Федеральное агентство по образованию
ГОУ ВПО «Уральский государственный технический университет – УПИ»

**С.С. Кузьмина, О.Я. Шевалдина**

# ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

Учебное электронное текстовое издание
Подготовлено кафедрой анализа систем и принятия решений

Учебное пособие для студентов очной формы обучения всех специальностей факультета информационно-математических технологий и экономического моделирования.

Учебное пособие содержит краткие теоретические сведения по разделу «Числовые ряды», а также большой набор примеров разного уровня сложности с подробным решением. Включенные в пособие упражнения можно использовать в процессе аудиторной и самостоятельной работы студентов, при проведении контрольных работ, консультаций, собеседований и экзаменов.
Данное пособие предназначено в первую очередь для студентов всех специальностей факультета информационно-математических технологий и экономического моделирования, а также может быть использовано для математической подготовки студентов всех экономических специальностей УГТУ-УПИ.



Екатеринбург
2005

## Оглавление

**1. Понятие числового ряда и его суммы** ... 3
**1. 1. Сходящиеся и расходящиеся ряды** ... 3
**1. 2. Число $e$ как сумма ряда** ... 13
**2. Основные свойства сходящихся рядов** ... 16
**2. 1. Критерий Коши сходимости ряда** ... 16
**2. 2. Необходимое условие сходимости ряда** ... 18
**2. 3. Алгебраические операции и сходимость** ... 20
**3. Ряды с неотрицательными членами** ... 22
**3. 1. Критерий сходимости ряда с неотрицательными членами** ... 22
**3. 2. Признаки сравнения** ... 22
**3. 3. Признаки Даламбера и Коши** ... 27
**3. 4. Интегральный признак Коши-Маклорена** ... 31
**3. 5. Метод выделения главной части** ... 35
**4. Знакопеременные ряды** ... 38
**4. 1. Свойства абсолютно и условно сходящихся рядов** ... 38
**4. 1. 1. Сочетательное свойство для числовых рядов** ... 39
**4. 1. 2. Переместительное свойство сходящихся рядов** ... 41
**4. 2. Знакочередующиеся ряды** ... 45
**5. Ряды с комплексными членами** ... 51
**6. Упражнения** ... 54
**БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК** ... 60

# 1. Понятие числового ряда и его суммы

## 1. 1. Сходящиеся и расходящиеся ряды

Пусть задана последовательность $(a_n)$ *действительных* чисел

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \dots, a_n, \dots . \qquad (1.\ 1)$$

Сопоставим этой последовательности чисел последовательность $(S_n)$ *конечных* сумм вида:

$$S_1 = a_1,$$
$$S_2 = a_1 + a_2,$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \dots,$$
$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \dots$$

Однако на практике часто приходят к задачам *суммирования бесконечной последовательности чисел* (1.1). В этом случае вместо слов последовательность $(a_n)$ и последовательность $(S_n)$ употребляют слово *ряд*. Для обозначения ряда используют символы:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

или

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n . \qquad (1.\ 2)$$

Число $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ называют $n$-й *частичной суммой ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, а число $a_n$ – $n$-м (*общим*) *членом этого ряда*.

Так как каждому ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ соответствует последовательность $(S_n)$ его частичных сумм, и, наоборот, каждой последовательности $(S_n)$ соответствует ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_1 = S_1,\ a_2 = S_2 - S_1, \dots, a_n = S_n - S_{n-1}, \dots$ , то каждое свойство последовательностей можно переформулировать в некоторое свойство рядов заменой характеристики членов последовательности соответствующей характеристикой членов ряда.

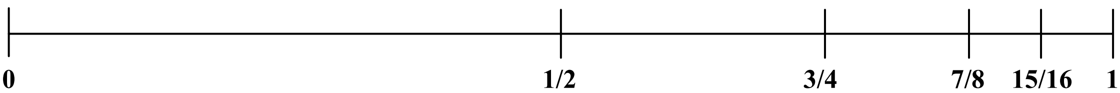
Таким образом, фразы «последовательность $(a_n)$», «последовательность $(S_n)$», «совокупность последовательностей $(a_n)$ и $(S_n)$», «ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$» суть математические синонимы.

При определении ряда естественно возникают вопросы:

1. Что такое «сумма» бесконечной последовательности чисел?
2. Если сумма существует, то каковы ее свойства?

Прежде чем ответить на эти вопросы, рассмотрим следующие примеры.

**Пример 1**. Отрезок $[0,1]$ разобьем пополам (на два равных отрезка).




Правую половину отрезка, то есть отрезок [1/2, 1], снова разделим пополам, затем разобьем пополам отрезок [3/4, 1] и т. д. Продолжая этот процесс до бесконечности, получим разбиение отрезка [0, 1] на бесконечное множество отрезков: [0, 1/2], [1/2, 3/4], [3/4, 7/8], [7/8, 5/16],… Естественно считать, что «сумма» длин всех отрезков, на которые разбит отрезок [0, 1], равна длине отрезка, т.е. единице. Иными словами,

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=1. \qquad (1.\ 3)$$

Это рассуждение было известно еще грекам, и философ Зенон (ок. 490 г. до н.э.), известный своими «парадоксами», оспаривал его законность. Один из парадоксов утверждал, что бегущий человек никогда не сможет достичь своей цели, поскольку он должен пробежать сначала половину требуемой дистанции, затем половину оставшейся части дистанции и т. д.; таким образом, он должен пробежать бесконечное множество расстояний, а это будет продолжаться вечно.

Если бы мы попытались вычислить сумму (1. 3), последовательно выполняя все указанные в ней сложения, то это, конечно, никогда бы не окончилось.

И все-таки равенство (1. 3) в некотором смысле верно. В чем же заключается точный его смысл?

Определим понятие *суммы ряда*. Прежде обратимся к примеру 1. Последовательности $\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$ сопоставим последовательность частичных сумм $(S_n)$, где

$$S_n = \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^n} : \; S_1 = \frac{1}{2},\; S_2 = \frac{3}{4},\; S_3 = \frac{7}{8},\; \ldots,\; S_n = \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{1 - \frac{1}{2}}.$$

Ясно, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1$ является длиной отрезка.

**Определение.** Если последовательность $(S_n)$ частичных сумм ряда *сходится*, то ее предел $S := \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ называют *суммой ряда*, а сам ряд (1. 2) называют *сходящимся* или *суммируемым*. В этом случае пишут:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, или предел последовательности $(S_n)$ не существует, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называют *расходящимся*.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$, то говорят, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится к* $+\infty$, и пишут $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$. Аналогично в случае $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = -\infty$ считаем, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty$.

**Пример 2**. Рассмотрим ряд $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n$.

Для этого ряда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)}{2} = +\infty$. Данный ряд расходится к $+\infty$.

**Пример 3**. Рассмотрим ряд $1-1+1-1+\dots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$. Поскольку для этого ряда $S_{2k-1}=1,\quad S_{2k}=0\quad (k\in\mathrm{N})$, то последовательность $(S_n)$ не имеет предела при $n\to\infty$. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$ расходится. Заметим, что этот ряд не расходится ни к $+\infty$, ни к $-\infty$.

**Пример 4.** Рассмотрим последовательность $(S_k)$: $S_k=\dfrac{1}{k^{\alpha}},\ k\in N,\ \alpha\in R$.

Ей соответствует ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, где $a_1=S_1=1,\ a_n=S_n-S_{n-1}=\dfrac{1}{n^{\alpha}}-\dfrac{1}{(n-1)^{\alpha}}$, $n\in N,\ n\ge 2.$ Так как последовательность $(S_n)$ *сходится* при $\alpha\ge 0$ и *расходится* при $\alpha<0$, то и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=1+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n^{\alpha}}-\dfrac{1}{(n-1)^{\alpha}}\right)$ *сходится* при $\alpha\ge 0$ и *расходится* при $\alpha<0$.

Не существует каких-либо общих методов нахождения сумм сходящихся рядов. Эту задачу удается решить только в отдельных частных случаях.

**Пример 5.** Исследуем сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$ и найдем его сумму.

Так как $\dfrac{1}{1\cdot 2}=1-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2\cdot 3}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{3\cdot 4}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4},\dots,\ \dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$, то последовательность частичных сумм $S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} =$

$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$ имеет $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1$.

Итак, заданный ряд сходится и его сумма $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

<u>Замечание</u>. Для представления общего члена ряда в виде суммы простейших дробей полезно использовать метод неопределенных коэффициентов.

**Пример 6.** Исследуем на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n^2 + 3n + 2)}$.

Представим общий член ряда $a_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2}.$$

Умножая обе части этого равенства на знаменатель левой части, приходим к тождеству: $1 \equiv A(n+1)(n+2) + Bn(n+2) + Cn(n+1)$.

Последовательно полагая $n = 0, \quad -1, \quad -2$, находим: $A = \frac{1}{2}; \; B = -1; \; C = \frac{1}{2}$.

Таким образом, $a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right)$.

Отсюда:

$$S_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}\right) =$$

$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}\right)$. Ясно, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{4}$, следовательно, данный ряд сходится и его сумма $S = \frac{1}{4}$.

**Пример 7.** Исследуем на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{(5n-2)(5n+3)}$.

Преобразуем формулу $n$-го члена ряда, представив его в виде суммы простейших дробей: $a_n = \frac{5}{(5n-2)(5n+3)} = \frac{(5n+3)-(5n-2)}{(5n-2)(5n+3)} = \frac{1}{5n-2} - \frac{1}{5n+3}$.

Выпишем последовательность частичных сумм данного ряда и найдем ее предел: $S_1 = a_1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{8}$, $S_2 = S_1 + a_2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{13} = \frac{1}{3} - \frac{1}{13}, \ldots,$

$$S_n = S_{n-1} + a_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{5n+3}, \quad \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5n+3}\right) = \frac{1}{3}.$$

Следовательно, ряд сходится и его сумма $S = \frac{1}{3}$.

**Пример 8.** Выясним, сходится или расходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{3n+2}{3n-1}\right)$.

Частичные суммы ряда равны:

$$S_1 = a_1 = \ln\frac{5}{2},$$

$$S_2 = S_1 + a_1 = \ln\frac{5}{2} + \ln\frac{8}{5} = \ln\left(\frac{5}{2}\cdot\frac{8}{5}\right) = \ln\frac{8}{2}, \ \cdots,$$

$$S_n = S_{n-1} + a_n = \ln\frac{3(n-1)+2}{2} + \ln\frac{3n+2}{3n-1} = \ln\left(\frac{3n-1}{2}\cdot\frac{3n+2}{3n-1}\right) = \ln\frac{3n+2}{2}.$$

Имеем $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\ln\frac{3n+2}{2} = +\infty$, т.к. аргумент логарифма, а значит и сам логарифм при $n\to\infty$ стремятся к бесконечности. Следовательно, исследуемый ряд расходится.

**Пример 9.** Пусть $m$ – фиксированное натуральное число. Исследуем на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)\cdots(n+m)}$, называемый рядом обратных факториалов.

Преобразуем общий член ряда по формуле

$$u_n = \frac{1}{m}\frac{n+m-n}{n(n+1)\cdots(n+m)} = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{n(n+1)\cdots(n+m-1)} - \frac{1}{(n+1)\cdots(n+m)}\right).$$

Выпишем последовательность частичных сумм данного ряда:

$$S_1 = a_1 = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{m!} - \frac{1}{2\cdot 3\cdots(m+1)}\right),$$

$$S_2 = S_1 + a_2 = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{m!} - \frac{1}{3\cdot 4\cdots(m+2)}\right), \ldots,$$

$$S_k = S_{k-1} + a_k = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{m!} - \frac{1}{(k+1)(k+2)\cdots(k+m)}\right).$$

Так как $\lim\limits_{k\to\infty} S_k = \dfrac{1}{m\cdot m!}$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)\cdots(n+m)} = \dfrac{1}{m\cdot m!}$.

**Пример 10.** Пусть члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ представимы в виде: $a_n = b_{n+1} - b_n$, и пусть существует конечный предел: $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$.

Тогда исходный ряд сходится и его сумма равна $b - b_1$, т.е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(b_{n+1} - b_n\right) = b - b_1. \qquad (1.\,4)$$

Действительно,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}\left(b_{k+1} - b_k\right) = \left(b_2 - b_1\right) + \left(b_3 - b_2\right) + \ldots + \left(b_{n+1} - b_n\right), \text{ т.е. } S_n = b_{n+1} - b_1.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} b_{n+1} = b$, то отсюда получаем $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = b - b_1$, и поэтому справедлива формула (1. 4).

Применим данное свойство для ряда с общим членом:

$$a_n = \frac{2n-1}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}.$$

Представим его в виде:

$$a_n = -\frac{(n+1)(2n+1) - n(2n+5)}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)} = -\left(\frac{(n+1)}{(2n+3)(2n+5)} - \frac{n}{(2n+1)(2n+3)}\right).$$

Обозначим $b_n = -\dfrac{n}{(2n+1)(2n+3)}$. Тогда $a_n = b_{n+1} - b_n$, причем $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$,

$b_1 = -\dfrac{1}{15}$. По формуле (1. 4) находим: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n-1}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)} = \dfrac{1}{15}$.

**Пример 11.** Найдем сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+10)}$.

Так как $\dfrac{1}{n(n+10)} = \dfrac{1}{10}\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+10}\right)$, то $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+10)} =$

$$= \frac{1}{10}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{10}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+10} = \frac{1}{10}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=11}^{n+10}\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{10}\left(\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{n+10}\frac{1}{k}\right).$$

Отсюда: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{1}{10}\sum\limits_{k=1}^{10}\dfrac{1}{k} = \dfrac{1}{10}\left(1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{10}\right) = 4\dfrac{9}{25}$.

Рассмотрим так называемые *эталонные ряды*, которые часто используются при исследовании сходимости многих рядов.

**Пример 12.** Исследуем сходимость *гармонического** ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots.$$

Его частичная сумма $S_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n}$. Пусть $n = 2^k$. Тогда

$$S_{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^k}\right) >$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{2^1} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}}_{2^2} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{2^k} + \ldots + \frac{1}{2^k}}_{2^{k-1}} = 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2}}_{k} = 1 + \frac{k}{2}.$$

* *Гармонический ряд* – это ряд, каждый член которого, начиная со второго, является средним гармоническим его соседних членов: $\dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a_{n-1}} + \dfrac{1}{a_{n+1}}\right)$.

Таким образом, $S_{2^k} > 1 + \frac{k}{2}$. Последовательность $(S_{2^k})$ не ограничена сверху, а потому не может быть сходящейся, так как сходящаяся последовательность ограничена. Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится.

Приведем еще одно доказательство того, что гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится. Действительно, если бы он сходился, то, обозначив его сумму через $S$, мы бы имели:

$$\lim_{k\to\infty}\left(S_{2k} - S_k\right) = \lim_{k\to\infty} S_{2k} - \lim_{k\to\infty} S_k = S - S = 0 . \tag{1. 5}$$

Но $S_{2k} - S_k = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{2k} > \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} + \ldots + \frac{1}{2k} = k \cdot \frac{1}{2k} = \frac{1}{2}$, т.е. $S_{2k} - S_k > \frac{1}{2}$, что противоречит (1. 5).

Заметим, что гармонический ряд расходится очень «медленно». Л. Эйлер, например, вычислил, что $S_{1000} = 7{,}4849\ldots$, $S_{10000} = 9{,}7875\ldots$, $S_{1000000} \approx 14{,}3927\ldots$.

(*Леонард Эйлер (1707– 1783) – математик, физик, механик; родился в Швейцарии, большую часть жизни прожил в России и в Германии, активно участвовал во многих направлениях деятельности Петербургской и Берлинской академий.*)

**Пример 13.** Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ $(\alpha \in R)$ называется *обобщенным гармоническим*. При $\alpha = 1$ – это гармонический ряд, и его расходимость доказана. Покажем, что этот ряд расходится и при $\alpha < 1$.

Здесь $S_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha}$ и $S_n > \underbrace{\frac{1}{n^\alpha} + \frac{1}{n^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha}}_{n \text{ слагаемых}} = \frac{1}{n^\alpha} \cdot n = n^{1-\alpha}$

при любом $n > 1$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, и поэтому при $\alpha < 1$ данный ряд расходится. Итак, обобщенный гармонический ряд расходится при $\alpha \le 1$. Ниже будет доказано, что при $\alpha > 1$ этот ряд сходится.

**Пример 14.** Исследуем на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\,q^n$, где $q$ – действительное число: $|q| < 1$.

Преобразуем частичную сумму $S_n$ этого ряда следующим образом:

$$S_n = \left(q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n\right) + \left(q^2 + q^3 + \cdots + q^n\right) + \left(q^3 + \cdots + q^n\right) + \cdots +$$

$$+ \left(q^{n-1} + q^n\right) + q^n = \frac{q\left(1 - q^n\right)}{1-q} + \frac{q^2\left(1 - q^{n-1}\right)}{1-q} + \frac{q^3\left(1 - q^{n-2}\right)}{1-q} + \cdots + \frac{q^n(1-q)}{1-q} =$$

$$= \frac{1}{1-q}\left(\frac{q\left(1-q^n\right)}{1-q} - nq^{n+1}\right).$$

Отсюда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{q}{(1-q)^2}$. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n q^n$ сходится и его сумма равна $\dfrac{q}{(1-q)^2}$.

В частности, если $q = \dfrac{1}{2}$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{2^n} = 2$.

### 1. 2. Число $e$ как сумма ряда

Нам известно, что $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$. В этом пункте мы изучим ряд, с помощью которого можно указать достаточно хороший способ вычисления числа $e$.

По формуле бинома Ньютона:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1!}\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k} + \cdots + \frac{1}{n^n} =$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) + \cdots +$$

$$+ \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

Полагая $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e_n$ и $1 + 1 + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \cdots + \dfrac{1}{n!} = s_n$, имеем

$$e_n < s_n \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

С другой стороны, при любом фиксированном $k$ и любом $n \ge k$ из того же разложения имеем:

$$1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) < e_n .$$

При $n \to \infty$ левая часть последнего неравенства стремится к $s_k$, а правая – к числу $e$, поэтому $s_k \le e$ для любого $k \in \mathrm{N}$. Но тогда из двойного неравенства

$$e_n < s_n \le e$$

по известной теореме о пределе промежуточной последовательности получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = e$. По определению суммы ряда теперь можно записать:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots .$$

Оценим разность $e - s_n$:

$$0 < e - s_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \dots = \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots\right) <$$

$$< \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots\right) = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n+2}} = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+1}.$$

Таким образом, чтобы абсолютная погрешность приближения числа $e$ числом $s_n$ не превосходила, например, $10^{-5}$, достаточно, чтобы имело место неравенство $\frac{1}{(n+1)!}\frac{n+2}{n+1} < \frac{1}{100000}$. Этому условию удовлетворяет уже $n = 8$.

В заключение покажем, что ***число $e$ иррационально***.

Предположим, что $e = \frac{p}{q}$, где $p, q \in \mathrm{N}$. Тогда при любом $n \in \mathrm{N}$ число $u_n := n!q\left(e - \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\right)$ целое и положительное. Следовательно, $u_n \ge 1$ при любом $n \in \mathrm{N}$.

С другой стороны, $u_n \le n!q\frac{1}{(n+1)!}\frac{n+2}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Противоречие!

В 1873 году Ш. Эрмит (*Шарль Эрмит (1822-1901) – французский математик, член Парижской Академии наук*) установил, что число $e$ трансцендентно, т.е. не является корнем никакого алгебраического многочлена с целыми коэффициентами.

# 2. Основные свойства сходящихся рядов

## 2. 1. Критерий Коши сходимости ряда

В приведенных примерах п. 1.1 нам удавалось не только установить сходимость или расходимость рассматриваемых рядов, но и найти их суммы (в случае сходимости ряда). Непосредственный анализ последовательности $(S_n)$ не всегда представляется возможным. Так как на практике частичные суммы ряда (в случае его сходимости) принимают за приближенное значение суммы ряда, то представляет интерес выяснение вопроса о сходимости или расходимости числового ряда *без вычисления* величины его *суммы,* а также *оценка зависимости остатка ряда* $r_n$ от номера $n$ (скорость сходимости ряда). Наиболее общий критерий сходимости числового ряда вытекает из критерия Коши для сходимости последовательности.

(*Коши Огюстен Луи (1789-1857) – французский математик, член Парижской Академии наук.*)

**Теорема 1.** Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathrm{N} : \forall (n \in \mathrm{N},\, p \in \mathrm{N}) \left( n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon \right). \qquad (2.\ 1)$$

Если условие (2.1) не выполняется, т.е. если

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall k \in \mathrm{N} : \exists (n \in \mathrm{N},\, p \in \mathrm{N}) \left( n \geq k \wedge \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| \geq \varepsilon \right), \qquad (2.\ 2)$$

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

**Определение.** Ряд $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots$ называют *остатком ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и обозначают $r_n$:

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+n}.$$

Из теоремы 1 легко получить следующее важное утверждение.

**Теорема 2.** Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится или расходится одновременно с рядом $r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k$. При этом

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = 0.$$

**Следствие.** Прибавление (отбрасывание, изменение) конечного числа членов не влияет на сходимость ряда (но может, конечно, изменить его сумму).

Так как для *сходящегося* ряда $S = S_n + r_n$, то при достаточно больших $n$ можно считать, что

$$S \approx S_n.$$

**Пример 15.** Пользуясь критерием Коши, доказать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Пусть $\varepsilon$ – произвольное положительное число. Так как

$\frac{1}{(k+1)^2} < \frac{1}{k(k+1)} \quad \forall k \in \mathrm{N}$ и $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, то

$$\frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} < \frac{1}{n(n+1)} + \cdots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} -$$

$$- \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+p-1} + \frac{1}{n+p} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}$$ при произвольном $p \in \mathrm{N}$. Отсюда следует, что при $n > \frac{1}{\varepsilon}$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^2} < \varepsilon.$$

Таким образом, взяв $N_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, получим, что при $n > N_\varepsilon$ и произвольном $p$ выполняется требуемое неравенство, и ряд сходится.

**Пример 16.** Покажем с помощью критерия Коши, что обобщенный гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ расходится.

Для любого $k \in \mathrm{N}$ возьмем $n = k$ и $p = k$. Тогда

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+p}} \geq \frac{1}{k+1} + \cdots + \frac{1}{k+p} = \frac{1}{k+1} + \cdots + \frac{1}{k+k} > \frac{1}{2k} \cdot k = \frac{1}{2}.$$

Итак, для $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ $\forall k \in \mathrm{N}$ $\exists \left( p = k,\ n = k \wedge \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} \dfrac{1}{\sqrt{k}} > \dfrac{1}{2} \right)$. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ расходится.

## 2. 2. Необходимое условие сходимости ряда

Из критерия Коши сходимости ряда вытекает

**Теорема 3.** Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ суммируем, то предел его общего члена равен нулю:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0. \tag{2. 3}$$

<u>Замечание</u>. Как утверждается в теореме, для сходимости ряда *необходимо*, чтобы $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$. Таким образом, если $\lim\limits_{n \to \infty} a_n \neq 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ заведомо расходится.

Наоборот, если $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$, то ряд не обязательно является сходящимся. Пример гармонического ряда показывает, что это условие *не является достаточным*: ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ расходится, хотя при этом $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Для сходимости ряда недостаточно, чтобы $n-$й член ряда стремился к нулю; нужно, чтобы он стремился к нулю достаточно быстро (обсуждение этого вопроса в п. 3. 2).

**Пример 17.** Рассмотрим ряд

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^{k-1} + \ldots \quad (q \in \Re), \tag{2. 4}$$

составленный из членов геометрической прогрессии: $1, q, q^2, \ldots, q^{n-1}, \ldots$. Его часто называют *геометрическим рядом*. Исследуем сходимость данного ряда.

Если $|q| \geq 1$, то $|q|^n \geq 1$; следовательно, $\left|q^n\right| = |q|^n \geq 1$, и в этом случае не выполнен необходимый признак сходимости. Итак, в случае $|q| \geq 1$ ряд (2. 4) расходится.

Пусть $|q| < 1$. Тогда $1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \xrightarrow[n \to \infty]{} \dfrac{1}{1 - q}$, поскольку $\lim\limits_{n \to \infty} q^{n+1} = 0$, если $|q| < 1$. Значит, ряд в этом случае сходится.

Наоборот, если ряд (2. 4) суммируем, то $q^n \to 0$, $n \to \infty$ и, следовательно, $|q| < 1$.

Таким образом, геометрический ряд суммируем тогда и только тогда, когда $|q| < 1$, и в этом случае его сумма:

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^{k-1} + \ldots = \frac{1}{1 - q}. \tag{2. 5}$$

**Пример 18.** Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n - 2}{4n + 7}$ расходится, ибо $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{3n - 2}{4n + 7} = \dfrac{3}{4} \neq 0$.

**Пример 19.** Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin n$ расходится, т.к. последовательность $(\sin n)$ не является бесконечно малой. В самом деле, предположим противное: $\lim\limits_{n \to \infty} \sin n = 0$. Тогда $\lim\limits_{n \to \infty} \sin(n + 1) = 0$. Так как $\sin(n + 1) = \sin n \cos 1 + \cos n \sin 1$, то $\lim\limits_{n \to \infty} \cos n = 0$, что противоречит равенству $\cos^2 n + \sin^2 n = 1$. Следовательно, рассматриваемый ряд расходится.

## 2. 3. Алгебраические операции и сходимость

**Теорема 4.** Пусть $\alpha \in R,\ \alpha \neq 0$. Ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ одновременно сходятся или расходятся. Если один из них сходится, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha\, a_n = \alpha \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ .

**Теорема 5.** Два сходящихся ряда можно почленно складывать и вычитать, то есть, если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ тоже сходится, причем

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n .$$

**Следствие.** Если два ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся, то для любых $\alpha, \beta \in \Re$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\alpha\, a_n \pm \beta b_n)$ также сходится и

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha\, a_n \pm \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n .$$

**Пример 20.** Найдем сумму ряда $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \ldots$.

Данный ряд можно представить как сумму двух рядов: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ и $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$. Каждый из них является геометрическим рядом со знаменателем $q < 1$, а потому сходится. По формуле (2. 5) суммы первого и второго рядов соответственно равны:

$$\overline{S} = \frac{1/2}{1 - 1/2} = 1, \quad \overline{\overline{S}} = \frac{1/3}{1 - 1/3} = \frac{1}{2} .$$

Тогда по теореме 5 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.$

**Теорема 6.** Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$ расходится.

**Пример 21.** Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+n^2}{n\cdot 2^n}$.

Так как $a_n=\frac{1}{n}+\frac{n}{2^n}$, и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ сходится (см. п. 1. 1, пример 14), а гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+n^2}{n\cdot 2^n}$ расходится.

**Теорема 7.** Если оба ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ расходятся, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$ может как сходиться, так и расходиться.

**Пример 22.** Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$.

Так как $a_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$, то $S_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)=$

$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}\right)$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{3}{4}$, т.е. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$ сходится, и его сумма равна $\frac{3}{4}$. В то же время каждый из рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+2}$ является расходящимся. Расходимость второго ряда очевидна: он получается из гармонического отбрасыванием двух его первых членов.

# 3. Ряды с неотрицательными членами

## 3. 1. Критерий сходимости ряда с неотрицательными членами

Пусть члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ при любом натуральном $n$ удовлетворяют условию $a_n \geq 0$. Последовательность частичных сумм такого ряда является неубывающей. Поэтому по теореме о пределе монотонной последовательности справедливо следующее утверждение.

**Теорема 8.** Для того чтобы ряд с неотрицательными членами сходился, необходимо и достаточно, чтобы последовательность его частичных сумм $(S_n)$ была ограничена сверху: $\exists M > 0 : \forall\, n \geq 1 \quad S_n \leq M$.

Если последовательность $(S_n)$ не ограничена сверху, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

**Пример 24.** Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{(n+1)(n+2)}$.

Так как $\frac{\sin^2 n}{(n+1)(n+2)} \leq \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)} - \frac{1}{(n+2)}$, то

$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin^2 k}{(k+1)(k+2)} \leq \sum_{k=1}^{n} \left( \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} < \frac{1}{2}$, поэтому ряд сходится.

## 3. 2. Признаки сравнения

**Теорема 9 (*первый признак сравнения*).** Пусть даны два ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{3. 1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{3. 2}$$

с неотрицательными членами: $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$.

Если $\exists n_0 \in \mathrm{N}\ \forall k \geq n_0:\ a_k \leq b_k$, то из сходимости ряда (3. 2) с «большими» членами следует сходимость ряда (3. 1) с «меньшими» членами, а из расходимости ряда (3. 1) следует расходимость ряда (3. 2). Ряд (3. 2) называют *мажорантным* для ряда (3. 1).

**Пример 25.** Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2+7}$. Так как $\frac{1}{2n^2+7} < \frac{1}{n^2}$, и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится (как обобщенный гармонический), то по признаку сравнения исходный ряд сходится.

**Пример 26.** Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$. Так как $\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} > \frac{1}{n}$ $(\forall n \geq 2)$ и гармонический ряд расходится, то данный ряд расходится.

**Пример 27.** Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3 \cdot \ln(n+2)}}$.

При $n > 1$ имеем $\ln(n+2) > 1$, $n^3 \ln(n+2) > n^3$. Тогда $\frac{1}{\sqrt{n^3 \ln(n+2)}} < \frac{1}{\sqrt{n^3}}$.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ сходится (как обобщенный гармонический), следовательно, по признаку сравнения исходный ряд сходится.

**Пример 28.** Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$ сходится, так как $\frac{n!}{n^n} < \frac{2}{n^2}$ (для $n > 3$), и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится.

**Пример 29.** Ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^{\beta} n}$ расходится, так как $\frac{1}{\ln^{\beta} n}>\frac{1}{n}$ для достаточно больших $n$ и так как гармонический ряд расходится.

**Теорема 10 (*второй признак сравнения*).** Пусть даны два ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ с *положительными членами*: $a_n>0$, $b_n>0$. Если $\exists\, n_0\in\mathrm{N}\ \ \forall k\ge n_0:\ \frac{a_{k+1}}{a_k}\le\frac{b_{k+1}}{b_k}$, то из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, а из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ следует расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$.

**Теорема 11 (*предельный признак сравнения*).** Если $a_n\ge 0$, $b_n>0$ для всех $n\ge n_0, n_0\in\mathrm{N}$ и если $\exists\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=K,\quad 0<K<+\infty$, то ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ сходятся или расходятся одновременно.

В частности, если $a_n\sim b_n$ при $n\to\infty$, т.е. если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$, то ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ либо оба сходятся, либо оба расходятся.

Если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$, то из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$.

**Пример 30.** Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+\sqrt{n^7+3}}{n^4+\sqrt[3]{n^5}+10}$.

Подберем подходящий для сравнения эталонный ряд. Рассмотрим поведение числителя и знаменателя общего члена ряда при $n \to \infty$:

$$2n + \sqrt{n^7 + 3} = 2n + \left(n^7 + 3\right)^{\frac{1}{2}} \sim 2n + n^{\frac{7}{2}} \sim n^{\frac{7}{2}}, \quad n \to \infty,$$

$$n^4 + \sqrt[3]{n^5 + 10} = n^4 + \left(n^5 + 10\right)^{\frac{1}{3}} \sim n^4 + n^{\frac{5}{3}} \sim n^4, \quad n \to \infty.$$

Возьмем $\alpha = 4 - \frac{7}{2} = \frac{1}{2}$ и в качестве эталонного ряда рассмотрим обобщенный гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$. Найдем $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left( \frac{2n + \sqrt{n^7 + 3}}{n^4 + \sqrt[3]{n^5 + 10}} : \frac{1}{n^{1/2}} \right) =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^{\frac{3}{2}} + \sqrt{n^8 + 3n}}{n^4 + \sqrt[3]{n^5 + 10}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n^{5/2}} + \sqrt{1 + \frac{3}{n^7}}}{1 + \sqrt[3]{\frac{1}{n^7} + \frac{10}{n^{12}}}} = 1.$$

Предел конечен и отличен от нуля, условие предельного признака сравнения выполнено. Эталонный ряд расходится, значит исходный ряд по предельному признаку сравнения тоже расходится.

**Пример 31.** Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)$.

Преобразуем формулу общего члена ряда: $a_n = \sqrt{n}\left(1 - \cos\frac{1}{n}\right) =$ $= \sqrt{n}\, 2\sin^2 \frac{1}{2n}$. Так как $2\sqrt{n}\sin^2 \frac{1}{2n} \sim 2\sqrt{n} \cdot \left(\frac{1}{2n}\right)^2 = \frac{1}{2n^{3/2}}$ при $n \to \infty$, и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ сходится, то и исходный ряд сходится.

**Пример 32.** Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ расходится, так как $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}:\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=$ $=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{1/n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{e^{\frac{\ln n}{n}}}=\frac{1}{e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}}}=\frac{1}{e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\ln n)'}{(n)'}}}=\frac{1}{e^0}=1$, и гармонический ряд расходится.

**Пример 33.** Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^5}\ln(n+1)}$.

Так как предел отношения общих членов данного ряда и ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{5/2}}$ равен нулю: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^5}\ln(n+1)}:\frac{1}{n^{5/2}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^5}}{\sqrt{n^5}\ln(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}=0$, то по предельному признаку сравнения из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{5/2}}$ следует сходимость исходного ряда.

**Пример 34.** Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+n^2}{e^n+\ln n}$.

Из асимптотических формул $2^n+n^2\sim 2^n,\quad e^n+\ln n\sim e^n$ при $n\to\infty$

( $\lim_{n\to\infty}\frac{n^q}{a^n}=0 \quad (a>1,\ q\in\Re)$, $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln^q n}{n^p}=0 \quad (p>0,\ q\in\Re)$) следует, что

$\frac{2^n+n^2}{e^n+\ln n}\sim\left(\frac{2}{e}\right)^n$, где $\frac{2}{e}<1$. Так как геометрический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{e}\right)^n$ сходится, то и данный ряд также сходится.

**Пример 35.** Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$.

Так как $\ln n=e^{\ln\ln n}$, то $\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}=\frac{1}{\left(e^{\ln\ln n}\right)^{\ln n}}=\frac{1}{\left(e^{\ln n}\right)^{\ln\ln n}}=\frac{1}{n^{\ln\ln n}}<\frac{1}{n^2}$ при $n>e^{e^2}>1618$. Из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ вытекает сходимость данного ряда.

## 3. 3. Признаки Даламбера и Коши

**Теорема 12 (признак Даламбера)**. Пусть дан ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n > 0 \quad \forall\, n \in \mathrm{N}.$$

Если $\exists q:\ 0 < q < 1$ и $\exists\, n_q \in \mathrm{N}:\ \forall n \geq n_q \ \ \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Если же $\exists\, n_0 \in \mathrm{N}:\ \forall n \geq n_0 \ \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

(*Жан Лерон <u>Д`Аламбер</u> (1717-1783) – один из самых разносторонних и влиятельных ученых Франции. Математик, физик, механик, автор физико-математической части «Энциклопедии» Д. Дидро, а также ряда трудов по музыке и эстетике.*)

Признак Даламбера часто применяется в ***предельной форме***: если существует верхний предел:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q,$$

то при $0 \leq q < 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а при $q > 1$ – расходится.

В случае $q = 1$ возможна как сходимость, так и расходимость ряда (требуется провести дополнительное исследование).

Признак Даламбера позволяет дать оценку остатка ряда. Из неравенства $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ следует, что $a_{n+1} \leq q a_n$. Отсюда $a_2 \leq q a_1$, $a_3 \leq q a_2 \leq q^2 a_1$, $a_4 \leq q a_3 \leq q^3 a_1$ и т.д. Вообще при любом $n \in N$ справедливо неравенство $a_n \leq q^{n-1} a_1$, откуда следует, что

$$r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \ldots \le a_{n+1} + a_{n+1}q + a_{n+1}q^2 + \ldots,$$

$$r_n \le \frac{a_{n+1}}{1-q}.$$

**Пример 36.** Исследовать сходимость ряда $1 + \frac{3}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \ldots + \frac{3^n}{n!} + \ldots$.

Имеем $a_n = \frac{3^n}{n!}$, $a_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!}$, тогда $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{3^n} = \frac{3}{n+1}$. Очевидно, что $\frac{3}{n+1} < 1$ для $n > 3$. По признаку Даламбера исходный ряд сходится.

Замечание. Из примера следует *необходимое условие сходимости ряда*, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{n!} = 0.$$

**Пример 37.** Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$ сходится, т.к. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^2} = \frac{1}{3} < 1$.

**Пример 38.** Исследуем на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.

Имеем $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)n!n^n}{(n+1)^n (n+1)n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} =$

$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{(n+1)\frac{n}{n+1}} = \frac{1}{e} < 1$, поэтому ряд сходится.

**Пример 39.** Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\sqrt{n}\right)^n}{n!}$.

Имеем $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{\left(\sqrt{n+1}\right)^{n+1} n!}{(n+1)!\left(\sqrt{n}\right)^n}=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$. Отсюда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}=0\cdot\sqrt{e}=0<1,$$

т.е. рассматриваемый ряд сходится.

**Пример 40.** Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)\cdot 3^{2n-1}}$. Оценить погрешность приближенного равенства $S\approx S_5$. Найти в этом случае сумму ряда.

По признаку Даламбера: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-1)\cdot 3^{2n-1}}{(2n+1)\cdot 3^{2n+1}}=\dfrac{1}{9}<1$, поэтому ряд сходится. Найдем $S_5=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3\cdot 3^3}+\dfrac{1}{5\cdot 3^5}+\dfrac{1}{7\cdot 3^7}+\dfrac{1}{9\cdot 3^9}$. Так как

$$r_5=\frac{1}{11\cdot 3^{11}}+\frac{1}{13\cdot 3^{13}}+\frac{1}{15\cdot 3^{15}}+\cdots<\frac{1}{11\cdot 3^{11}}+\frac{1}{11\cdot 3^{13}}+\frac{1}{11\cdot 3^{15}}+\cdots<$$

$$<\frac{1}{11\cdot 3^{11}}\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^4}+\cdots\right)=\frac{1}{11\cdot 3^{11}}\cdot\frac{1}{1-1/9}=\frac{9}{8\cdot 11\cdot 3^{11}}\approx 5{,}7\cdot 10^{-7}<0{,}000001,$$

то, для того чтобы гарантировать требуемую точность, будем вычислять каждое слагаемое с семью знаками после запятой, делая округление на седьмом знаке. При такой точности вычислений ошибка при подсчете каждого слагаемого будет меньше, чем $5\cdot 10^{-8}$, и накопление таких ошибок от пяти членов ряда будет меньше, чем $5\cdot 5\cdot 10^{-8}<3\cdot 10^{-7}$. Поэтому

$$S_5=0{,}3333333+0{,}0123456+0{,}0008230+0{,}0000653+0{,}0000056=$$
$$=0{,}3465728\approx 0{,}346573.$$

Окончательная погрешность вычислений (т.е. сумма погрешности от отбрасывания всех членов ряда, начиная с шестого, и погрешности от неточного вычисления пяти членов ряда) будет меньше, чем

$$3\cdot 10^{-7}+6\cdot 10^{-7}=9\cdot 10^{-7}<10^{-6}=0{,}000001.$$

Замечание. Для оценки остатка ряда можно было воспользоваться формулой $r_n \le \dfrac{a_{n+1}}{1-q}$, где $q=\dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}}$.

**Теорема 13 (радикальный признак Коши)**. Пусть дан ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n>0 \quad \forall n\in \mathrm{N}.$$

Если $\exists q:\ 0<q<1\ \ \exists n_q\in \mathrm{N}:\ \ \forall n\ge n_q \Rightarrow \sqrt[n]{a_n}\le q$, то ряд сходится.

Если же $\exists\, n_0\in \mathrm{N}:\ \forall n\ge n_0 \Rightarrow \sqrt[n]{a_n}\ge 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

На практике обычно применяют **признак Коши** в **предельной форме**: если существует предел:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}=q,$$

то при $0\le q<1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а при $q>1$ – расходится.

При $q=1$ возможна как сходимость, так и расходимость ряда.

**Пример 41.** Исследуем сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$.

Имеем $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{2^n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}=\dfrac{e}{2}>1$,

следовательно, по признаку Коши ряд расходится.

**Пример 42.** Исследуем сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^3\left(\dfrac{2n^2+1}{5n^2+1}\right)^n$.

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=\lim\limits_{n\to\infty} e^{\ln\left(n^{1/n}\right)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}}=e^0=1$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}\right)^3 \dfrac{2n^2+1}{5n^2+1} = 1\cdot\dfrac{2}{5} < 1$. Поэтому данный ряд сходится.

**Пример 43.** Исследуем на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^{2n}}{(n!)^2}$.

Используя асимптотическую формулу Стирлинга $n! \sim \left(\dfrac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}, \quad n\to\infty$,

получим $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{n^{2n}}{(n!)^2}} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{n^{2n}}{\left(\dfrac{n}{e}\right)^{2n} 2\pi n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^2}{(2\pi)^{\frac{1}{n}} n^{\frac{1}{n}}} = \dfrac{e^2}{1\cdot 1} = e^2 > 1$.

Следовательно, данный ряд расходится.

## 3. 4. Интегральный признак Коши-Маклорена

(*Маклорен Колин (1698 – 1746) – шотландский математик, ученик И.Ньютона.*)

**Теорема 14**. Если функция $f:(0,+\infty)\to\Re$ неотрицательна и не возрастает на промежутке $(a,+\infty)$ $\forall a>0$, то ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \tag{3. 3}$$

и несобственный интеграл:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \tag{3. 4}$$

– сходятся или расходятся одновременно.

Если ряд (3. 3) и интеграл (3. 4) сходятся, то справедливы следующие оценки:

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(x)dx \le r_n \le \int_n^{+\infty} f(x)dx, \tag{3. 5}$$

$$\int\limits_{n+1}^{+\infty} f(x)dx \le r_n \le \int\limits_{n+1}^{+\infty} f(x)dx + f(n+1), \qquad (3.\ 6)$$

где $r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} f(k)$. Заметим, что оценка сверху в неравенстве (3. 6) является следствием оценки сверху в неравенстве (3. 5).

**Пример 44.** Рассмотрим обобщенный гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$, $\alpha \in \Re$.

При $\alpha > 0$ функция $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$ положительна, убывает на промежутке $[1; +\infty)$. При $\alpha \ne 1$ имеем:

$$\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_{1}^{b}\frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{b\to+\infty}\left.\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_1^b = \lim_{b\to+\infty}\frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}.$$

Рассмотрим три случая:

1) если $0 < \alpha < 1$, то при $b \to +\infty$ $b^{1-\alpha} \to +\infty$, следовательно, $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_{1}^{b}\frac{dx}{x^{\alpha}} = +\infty$, т.е. интеграл расходится, а значит расходится и ряд (это мы установили выше другим способом);

2) если $\alpha = 1$, то исходный ряд превращается в гармонический ряд, расходимость которого была доказана в п. 1.1, (впрочем, интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x}$ также расходится);

3) если $\alpha > 1$, то при $b \to +\infty$ $b^{1-\alpha} \to 0$, следовательно, $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_{1}^{b}\frac{dx}{x^{\alpha}} = \frac{1}{\alpha - 1}$, т.е. несобственный интеграл сходится, а значит и ряд сходится.

Если $\alpha \le 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ расходится, так как в этом случае не выполнено необходимое условие сходимости ряда: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \ne 0$.

Итак, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \le 1$.

**Пример 45.** Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^{\beta} n}$.

Введем функцию $f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln^{\beta} x}$. На промежутке $[2;+\infty)$ эта функция принимает положительные значения, а ее производная равна $f'(x) = -\frac{\beta + \ln x}{x^2 \cdot \ln^{\beta+1} x}$. Если $\beta + \ln x > 0$, т.е. $x > e^{-\beta}$, то $f'(x) < 0$. Следовательно, $f(x)$ положительная функция и убывает на промежутке $[a;+\infty)$, где $a = \max\left(2; e^{-\beta}\right)$. Рассмотрим несобственный интеграл: $\int_{2}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_{2}^{b} \frac{dx}{x(\ln x)^{\beta}} = \left| \begin{matrix} \ln x = t, \\ dt = \frac{dx}{x} \end{matrix} \right| = \lim_{b\to+\infty} \int_{\ln 2}^{b} \frac{dt}{t^{\beta}}$. Из последнего равенства видно, что данный интеграл сходится, если $\beta > 1$, и расходится, если $\beta \le 1$.

Следовательно, исследуемый ряд сходится при $\beta > 1$ и расходится при $\beta \le 1$.

**Пример 46.** Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)\ln(n+2)}$.

В этом случае непосредственное применение интегрального признака нецелесообразно, т.к. вычисление несобственного интеграла может оказаться затруднительным. Сравним общий член данного ряда с общим членом ряда $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$. Найдем:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln n}{(3n+1)\ln(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln n}{(3n+1)\ln\left(n\left(1+\frac{2}{n}\right)\right)}= \quad =\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln n+\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)}=\frac{1}{3}.$$

Так как ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ расходится (см. предыдущий пример), то по предельному признаку сравнения исходный ряд также расходится.

**Пример 47.** Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^q},\quad q>0$.

Так как $\frac{\ln n}{n^q}>\frac{1}{n^q}$, если $n>3$, то в силу теоремы сравнения данный ряд расходится при $0<q\le 1$.

Пусть $q>1$. Так как по правилу Лопиталя $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^\alpha}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n\cdot\alpha n^{\alpha-1}}=0$ при $\forall\,\alpha>0$, то, в частности, для $\varepsilon=1$ найдется номер $N(\alpha)$, такой, что $\forall n\ge N(\alpha)$ $\frac{\ln n}{n^\alpha}\le 1$. Число $q>1$ запишем следующим образом: $q=1+\alpha+\alpha$, где $\alpha=\frac{q-1}{2}>0$. Тогда $\forall n\ge N(\alpha)$ $\frac{\ln n}{n^q}=\frac{\ln n}{n^\alpha}\cdot\frac{1}{n^{1+\alpha}}\le 1\cdot\frac{1}{n^{1+\alpha}}=\frac{1}{n^{1+\alpha}}$, и так как обобщенный гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\alpha}}$ при $\forall\,\alpha>0$ сходится, то в силу теоремы сравнения и исходный ряд сходится для всех значений $q>1$.

<u>Вывод</u>: ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^q}$ сходится, если $q>1$, и расходится, если $0<q\le 1$.

<u>Замечание</u>. Аналогично доказывается, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^p n}{n^q}$ сходится для всех значений $p\in\Re$ и $q>1$; кроме того, этот ряд сходится и для значений $q=1,\ p<-1$ (см. пример 45).

**Пример 48.** Выясним, сколько членов ряда $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}+\ldots$ надо сложить, чтобы найти сумму этого ряда с точностью до 0,001.

Введем функцию $f(x)=\frac{1}{x^2}$, $x \geq 1$. По формуле (3. 6)

$\int\limits_{n+1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2} \leq r_n \leq \int\limits_{n+1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2}+\frac{1}{(n+1)^2}$ или $\frac{1}{n+1} \leq r_n \leq \frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}$. Так как требуемая погрешность не должна превосходить 0,001, то потребуем, чтобы $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}<0{,}001$. Тогда при $n \geq 1000$ $r_n = S - S_n < 0{,}001$, значит для вычисления суммы ряда с требуемой точностью следует сложить по меньшей мере 1000 членов ряда! Как видим, сходимость ряда весьма «медленная».

Замечание. При решении данной задачи можно было воспользоваться и оценкой (3. 5).

## 3. 5. Метод выделения главной части

При исследовании на сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с неотрицательными членами полезны асимптотические формулы вида:

$$a_n \sim \frac{c}{n^\alpha} \quad (n \to \infty,\ c > 0), \tag{3. 7}$$

$$a_n \sim \frac{c}{n^\alpha \ln^\beta n} \quad (n \to \infty,\ c > 0). \tag{3. 8}$$

В случае (3. 7) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$; в случае (3. 8) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, если $\alpha = 1$, $\beta > 1$ или $\alpha > 1$, $\beta \in \Re$, и в других случаях расходится.

**Пример 49.** Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{n}-1\right)$.

Здесь $a_n=\sqrt[n]{n}-1=n^{1/n}-1=e^{\frac{\ln n}{n}}-1\sim\dfrac{\ln n}{n}$ при $n\to\infty$, так как последовательность $\dfrac{\ln n}{n}$ является бесконечно малой при $n\to\infty$. Ряд с общим членом $b_n=\dfrac{\ln n}{n}$ согласно (3. 8) расходится, поэтому исходный ряд также расходится.

**Пример 50.** Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\cdot\sqrt{\ln\left(n^3+2\right)}}{\sqrt[3]{n^7+n^3+5}}$. Общий член данного ряда $a_n=\dfrac{n\cdot\sqrt{\ln\left(n^3+2\right)}}{\sqrt[3]{n^7+n^3+5}}\sim\dfrac{\sqrt{3}\;n\cdot\ln^{1/2}n}{n^{7/3}}=\dfrac{\sqrt{3}\;\ln^{1/2}n}{n^{4/3}}$, $n\to\infty$. Здесь $\alpha=\dfrac{4}{3}>1,\ \beta=-\dfrac{1}{2}$, и согласно (3. 8) исходный ряд сходится.

**Пример 51.** Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{\sin n+n^{\alpha}}}\right)$. Заметим, что при $\alpha=0$ предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\sin n}$ не существует, так как не существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n$; если $\alpha<0$, то $n^{\alpha}\to0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin n+n^{\alpha}\right)$ не существует, и общий член ряда не стремится к нулю. Следовательно, при $\alpha\le0$ ряд расходится. При $\alpha>0$ $\dfrac{1}{\sqrt{\sin n+n^{\alpha}}}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$. Так как $\ln(1+t)=t+o(t)$, $t\to0$, то

$\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{\sin n+n^{\alpha}}}\right)\sim\dfrac{1}{\sqrt{\sin n+n^{\alpha}}}\sim\dfrac{1}{n^{\alpha/2}}$, $n\to\infty$. Согласно (3. 7) данный ряд сходится при $\dfrac{\alpha}{2}>1$ и расходится при $0<\alpha\le2$.

Окончательно получаем: исходный ряд сходится при $\alpha > 2$ и расходится при $\alpha \le 2$.

**Пример 52 .** Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln \dfrac{1+tg\left(1/\sqrt{n}\right)}{1+arctg\left(1/\sqrt{n}\right)}$.

Используя разложения:

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o\left(t^3\right), \quad t \to 0, \quad tg\, t = t + \frac{t^3}{3} + o\left(t^3\right), \quad t \to 0,$$

$$arctg\, t = t - \frac{t^3}{3} + o\left(t^3\right), \; t \to 0,$$

находим $\ln(1+tgt) = t - \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{2t^3}{3} + o\left(t^3\right)$, $\ln(1+arctg\, t) = t - \dfrac{t^2}{2} + o\left(t^3\right)$, $t \to 0$.

Следовательно, $a_n = \dfrac{2}{3n^{3/2}} + o\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$, т. е. $a_n \sim \dfrac{2}{3n^{3/2}}$, и потому ряд сходится.

# 4. Знакопеременные ряды

*Знакопеременный ряд* – это ряд, членами которого являются вещественные числа произвольного знака.

**Определение.** Ряд

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ... \qquad (2.\ 1)$$

называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд, составленный из модулей его членов:

$$|a_1| + |a_2| + ... + |a_n| + ... \qquad (2.\ 2)$$

**Определение**. *Сходящийся* ряд (2.1) называют *условно сходящимся*, если ряд (2. 2) расходится.

## 4. 1. Свойства абсолютно и условно сходящихся рядов

**Теорема 15.** Если ряд (2.1) абсолютно сходится, то он сходится, причем имеет место неравенство:

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

**Теорема 16.** Сумма абсолютно сходящегося ряда равна разности сумм двух положительных рядов, составленных соответственно из всех положительных членов ряда и из абсолютных величин всех его отрицательных членов.

**Теорема 17** (***признак сравнения***). Если существует сходящийся ряд с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, такой, что $\forall n \ge n_0$ $(n_0 \in \mathrm{N})$ $|a_n| \le u_n$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно.

**Пример 53**. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right) arctg \frac{\cos n}{n}$ абсолютно сходится.

Воспользуемся известными неравенствами: $0 \le \ln(1+x) \le x, \quad x \ge 0$ и $|arctgx| \le |x|, \quad x \in \Re$: $\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)\left|arctg\frac{\cos n}{n}\right| \le \frac{1}{\sqrt[3]{n}}\left|\frac{\cos n}{n}\right| \le \frac{1}{n^{4/3}}$, откуда и следует абсолютная сходимость заданного ряда.

### 4. 1. 1. Сочетательное свойство для числовых рядов

Посмотрим, как влияет на сходимость ряда группировка его членов.

**Пример 54.** Сгруппируем формально члены следующего ряда по два, начиная с первого:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} = (1-1)+(1-1)+\cdots = 0+0+\cdots = 0.$$

Если же формально сгруппировать члены этого же ряда по два, начиная со второго, то получим: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} = 1-(1-1)-(1-1)-\cdots = 1-0-0-0\cdots = 1.$

Пример показывает, что группировка членов расходящегося ряда может привести к разным результатам.

В общем случае перепишем ряд $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + \cdots + a_{n_1} + a_{n_1+1} + \cdots + a_{n_2} + \cdots + a_{n_{k-1}+1} + \cdots + a_{n_k} + \cdots,$$

где

$$1 = n_0 < n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots; \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Обозначим $b_k = a_{n_{k-1}+1} + \cdots + a_{n_k}$. Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_{n_{k-1}+1} + \cdots + a_{n_k}\right)$$

называют *группировкой ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

**Теорема 18**. Если исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то любая его группировка $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ также сходится, причем к той же сумме, которую имеет исходный ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

Замечание. Обратное утверждение неверно. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$. Если $b_k = 1-1,\ k = 1, 2, \ldots$, то $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} 0 = 0$, в то время как исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ расходится. Однако справедлива следующая теорема.

**Теорема 19.** Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, а последовательность натуральных чисел $n_k$ возрастает:

$$1 = n_0 < n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots; \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится или расходится одновременно с любой его группировкой $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

**Пример 55.** Рассмотрим ряд $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \cdots$. Этот ряд может быть просуммирован группировкой по два члена: $\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$. Так как

$$\frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \sim \frac{1}{4n^2}, \ n \to \infty,$$

то рассматриваемый ряд сходится. Поскольку гармонический ряд расходится, то знакопеременный гармонический ряд сходится условно.

### 4. 1. 2. Переместительное свойство сходящихся рядов

Одним из важнейших свойств суммы конечного числа вещественных слагаемых является переместительное свойство. Естественно возникает вопрос, остается ли справедливым это свойство для суммы сходящегося ряда.

**Определение**. Если отображение $\phi$ является *биекцией* множества $\mathrm{N}$ натуральных чисел на себя, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\phi(n)}$ называется *перестановкой ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

**Пример 56.** Рассмотрим условно сходящийся ряд:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Переставим и сгруппируем члены ряда по три следующим образом:

$$\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}\right)+\ldots.$$

Если внутри каждой скобки произвести левое вычитание, то получим ряд:

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}\right)+\ldots,$$

сумма которого равна: $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\ldots=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\ldots\right).$

Таким образом, перестановка членов условно сходящегося ряда изменяет его сумму. В данном случае она уменьшилась вдвое. Рассмотренный пример показывает, что *условно сходящийся* ряд *не обладает переместительным свойством*. Полную ясность в вопрос о сходимости перестановки условно сходящегося ряда вносит следующее утверждение.

**Теорема 20 (Римана).** Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно, то для любого числа $\alpha \in \Re$ существует перестановка ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\phi(n)}$, сходящаяся к $\alpha$.

Если же ряд является *абсолютно сходящимся*, то для него справедливо *переместительное свойство*.

**Теорема 21 (Коши).** Если ряд сходится абсолютно, то любая его перестановка также сходится абсолютно, причем к той же сумме.

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, общий член которого может быть представлен в виде произведения: $c_n = a_n b_n$. Приведем достаточные признаки сходимости таких рядов.

**Теорема 22 (признак Абеля).** Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$. Если последовательность $(a_n)$ монотонна и ограничена, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.

(*Абель Нильс Хенрик (1802–1829) – норвежский математик, один из крупнейших математиков 19 века*.)

**Теорема 23 (признак Дирихле).** Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$. Если последовательность частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ограничена, а последовательность $(a_n)$, начиная с некоторого номера, монотонно стремится к нулю, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.

(*Дирихле Петер Густав Лежён (1805–1859) – немецкий математик*.)

На практике при применении признаков Абеля и Дирихле в качестве последовательности $(b_n)$ чаще всего берется или последовательность $((-1)^n)$, или одна из последовательностей $(\cos n\alpha)$ и $(\sin n\alpha)$.

**Пример** 57. Пусть последовательность $(a_n)$ монотонно стремится к нулю. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ сходится при любом $x \in \Re$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ сходится при любом $x \neq 2\pi m, m \in \mathrm{Z}$.

Так как

$$\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\cos\frac{1}{2}x - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}, \quad \sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \sin\frac{1}{2}x}{2\sin\frac{1}{2}x},$$

$x \neq 2\pi m, m \in \mathrm{Z}$, то обе суммы ограничены по абсолютной величине числом $\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$. По признаку Дирихле оба ряда сходятся при $x \neq 2\pi m, m \in \mathrm{Z}$, впрочем, первый ряд сходится и при $x = 2\pi m$, ибо все его члены обращаются в нуль.

В частности, например, сходятся ряды:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{\sin nx}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{\sqrt{n}} \quad \text{и т.п.}$$

**Пример 58**. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n \cdot \arccos\frac{1}{n}}{\sqrt{n}}$.

Оценка $\left|\frac{\cos n \cdot \arccos\frac{1}{n}}{\sqrt{n}}\right| \leq \frac{\pi}{2\sqrt{n}}$ не дает информации о поведении ряда

$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos n \cdot \arccos \frac{1}{n}}{\sqrt{n}}\right|$. Покажем, что исходный ряд сходится. Положим

$b_n = \frac{\cos n}{\sqrt{n}}$ и $a_n = \arccos\frac{1}{n}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{\sqrt{n}}$ сходится условно, а последовательность $\left(\arccos\frac{1}{n}\right)$ монотонна ($a_n{}' = \frac{1}{n\sqrt{n^2-1}} > 0$) и ограничена ($0 \le \arccos\frac{1}{n} < \frac{\pi}{2}$).

Поэтому в силу признака Абеля исходный ряд сходится. Расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos n \cdot \arccos \frac{1}{n}}{\sqrt{n}}\right|$, составленного из модулей членов данного ряда, следует из неравенства $\left|\frac{\cos n \cdot \arccos \frac{1}{n}}{\sqrt{n}}\right| \ge \frac{|\cos n|}{\sqrt{n}} \cdot \arccos\frac{1}{2}$ $(n \ge 2)$ и расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos n}{\sqrt{n}}\right|$. В самом деле, так как $\frac{|\cos n|}{\sqrt{n}} \ge \frac{\cos^2 n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}} + \frac{\cos 2n}{\sqrt{n}}$ и так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n}{\sqrt{n}}$ сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{n}}$ расходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n}{\sqrt{n}}$ расходится. Поэтому в силу теоремы сравнения расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos n}{\sqrt{n}}\right|$.

Итак, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos n \cdot \arccos \frac{1}{n}}{\sqrt{n}}\right|$ сходится условно.

Заметим, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{\sqrt{n}}$ также сходится условно.

## 4. 2. Знакочередующиеся ряды

**Определение**. Знакопеременный ряд называют *знакочередующимся*, если каждые два соседних члена этого ряда имеют противоположные знаки.

Обычно знакочередующийся ряд записывают в виде:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n, \quad a_n>0. \qquad (2.\ 3)$$

Укажем очень простой *достаточный признак сходимости знакочередующегося ряда*, принадлежащий Лейбницу. *(Лейбниц Готфрид Вильгельм (1646–1716) – немецкий математик, физик и изобретатель, юрист, историк, философ-идеалист, языковед.)*

**Теорема (признак Лейбница)**. Пусть члены знакочередующегося ряда (2. 3) удовлетворяют условиям:

1) $a_n \ge a_{n+1} \quad \forall\, n \ge 1$,

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Тогда ряд (2. 3) сходится и для его суммы $S$ справедливо неравенство:

$$0 \le S \le a_1.$$

**Следствие**: Пусть $r_n = (-1)^n a_{n+1} + (-1)^{n+1} a_{n+2} + \ldots$ – остаток ряда (2. 3) и пусть выполнены условия 1) и 2) признака Лейбница. Тогда любой остаток ряда не превосходит по абсолютной величине первого из своих членов: $|r_n| \le a_{n+1}, \quad n \ge 1$ и имеет одинаковый с ним знак: $\operatorname{sgn} r_n = \operatorname{sgn} a_{n+1}$.

Замечание. Признак Лейбница является следствием признака Дирихле.

**Пример 59.** Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}n}{n^2+7}$.

Покажем, что члены ряда, начиная с некоторого номера, убывают по абсолютной величине. Имеем $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \dfrac{n}{n^2+7}\dfrac{(n+1)^2+7}{n+1} = \dfrac{n^3+2n^2+8n}{n^3+n^2+7n+7} =$ $= 1 + \dfrac{n^2+n-7}{n^3+n^2+7n+7}$. Так как $\dfrac{n^2+n-7}{n^3+n^2+7n+7} > 0$ при $n \geq 3$, то, начиная с номера $n = 3$, выполняется неравенство $a_n > a_{n+1}$. Кроме того, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n^2+7} = 0$. Условия теоремы Лейбница выполнены, следовательно, ряд сходится. Заметим, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n^2+7}$, составленный из модулей членов данного ряда, расходится, так как $\dfrac{n}{n^2+7} \sim \dfrac{1}{n}$, $n \to \infty$. Поэтому исходный ряд сходится *условно*.

**Пример 60.** Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-3)^{n-1}}{3^n n^2+1}$.

Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов исходного ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^{n-1}}{3^n n^2+1}$. Сравним его со сходящимся рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^{n-1}}{3^n n^2+1} : \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{3^n n^2}{3^n n^2\left(1+1\big/\left(3^n n^2\right)\right)} = \frac{1}{3}.$$

Предел конечен и отличен от нуля, следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^{n-1}}{3^n n^2+1}$ ведет себя так же, как и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$, т.е. сходится. Тогда по теореме 15 исходный ряд сходится, причем *абсолютно*.

**Пример 61.** Покажем, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^{n-1}}{2^n+n^3}$ расходится. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n-1}}{2^n+n^3}=\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{2^n\left(1+\frac{n^3}{2^n}\right)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3}{2^n}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+0}=\frac{1}{2}\neq 0$, то общий член ряда не стремится к нулю. Необходимое условие сходимости ряда не выполнено, и поэтому исходный ряд расходится.

Замечание. Для сходимости знакочередующегося ряда выполнение признака Лейбница *не является необходимым условием*: знакочередующийся ряд может сходиться, даже если модуль его общего члена стремится к нулю не монотонно.

Так ряд $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^3}-\frac{1}{(2n)^2}+\cdots$ сходится и притом абсолютно, хотя признак Лейбница и не выполнен: абсолютная величина общего члена ряда хотя и стремится к нулю, но не монотонно.

**Пример 62** . Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln^2 n}{n}$.

Так как по правилу Лопиталя

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln^2 n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\ln^2 n\right)'}{(n)'}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\ln n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}=0 \quad \text{и} \quad \left(\frac{\ln^2 n}{n}\right)'=\frac{\ln n}{n^2}(2-\ln n)<0$$

при $n\geq 8$, то выполнены соответственно условия 1) и 2) признака Лейбница. Поэтому данный ряд сходится. Заметим, что ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда, расходится: $\int\limits_2^{\infty}\frac{\ln^2 x}{x}dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_2^{b}\ln^2 x\, d(\ln x)=\infty$.

Поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln^2 n}{n}$ сходится *условно.*

**Пример 63**. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\right)$.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ сходится в силу признака Лейбница, гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится, следовательно, данный ряд расходится. В тоже время $\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\sim\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$, $n\to\infty$. Поэтому делать вывод о сходимости или расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ по поведению ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$, где $a_n\sim b_n$, $n\to\infty$, можно только для рядов с неотрицательными членами!

**Пример 64**. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n^2}}\right)$.

Используя асимптотическую формулу $\ln(1+t)=t+O(t^2)$, $t\to 0$, получаем $\ln\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n^2}}\right)=\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n^2}}+b_n$, где $|b_n|\le\frac{C}{n^{4/3}}$, $C>0$. Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ сходится абсолютно, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n^2}}$ в силу признака Лейбница сходится условно, то заданный ряд сходится условно.

**Пример 65.** Вычислить приближенно с точностью до $10^{-5}$ сумму знакочередующегося ряда:

$$1-\frac{1}{1!3}+\frac{1}{2!5}-\frac{1}{3!7}+\frac{1}{4!9}-\frac{1}{5!\,11}+\dots\,.$$

Сходимость ряда следует из признака Лейбница. Так как для *сходящегося* ряда его сумма $S=S_n+r_n$, то при достаточно больших $n$ можно считать, что $S\approx S_n$, причем для остатка ряда справедлива оценка

$$|r_n|<a_{n+1}.$$

В данном примере $a_{n+1}=\dfrac{1}{n!(2n+1)}$. По условию задачи должно выполняться неравенство $a_{n+1}=\dfrac{1}{n!(2n+1)}<5\cdot 10^{-6}$. Эта оценка удовлетворяется уже при $n=7$:

$$(7!)\cdot 15=75600>7\cdot 10^{5},\quad \frac{1}{(7!)\cdot 15}<\frac{1}{7}\cdot 10^{-5}<\frac{1}{5}\cdot 10^{-5}=2\cdot 10^{-6}.$$

Следовательно, для решения задачи можно отбросить все члены ряда, начиная с $a_8=\dfrac{1}{(7!)\cdot 15}$, и вычислить сумму только первых семи членов. Для того чтобы гарантировать требуемую точность, будем вычислять каждое слагаемое с шестью знаками после запятой, делая округление на шестом знаке. При такой точности вычислений ошибка при подсчете каждого слагаемого будет меньше, чем $5\cdot 10^{-7}$, и накопление таких ошибок от пяти членов ряда (первые два члена – точные) будет меньше, чем $3\cdot 10^{-6}$. Выпишем в отдельные столбцы результаты вычислений положительных и отрицательных членов:

$$
\begin{array}{ll}
1=1{,}000000 & \dfrac{1}{1\cdot 3}\approx 0{,}333333 \\[2ex]
\dfrac{1}{2!5}=0{,}100000 & \dfrac{1}{3!7}\approx 0{,}023809 \\[2ex]
\dfrac{1}{4!9}\approx 0{,}004625 & \dfrac{1}{5!11}\approx 0{,}000757 \\[2ex]
\dfrac{1}{6!13}\approx 0{,}000107 & \\[1ex]
\hline
\Sigma\approx 1{,}104732 & \Sigma\approx 0{,}357899
\end{array}
$$

В результате вычислений получаем:

$$S\approx S_7\approx 1{,}104732-0{,}357899=0{,}746833\approx 0{,}74683.$$

Окончательная погрешность вычислений (т.е. сумма погрешности от отбрасывания всех членов ряда, начиная с седьмого, и погрешности от неточного вычисления пяти членов ряда) меньше, чем $2 \cdot 10^{-6} + 3 \cdot 10^{-6} = 5 \cdot 10^{-6}$.

Итак, $S \approx 0{,}74683$ и все пять цифр после запятой верные.

## 5. Ряды с комплексными членами

Говорят, что последовательность комплексных чисел $(z_n)$ сходится к числу $z \in C$, если $|z_n - z| \to 0$. В этом случае пишут:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \text{ или } z_n \to z \text{ при } n \to \infty.$$

**Координатный критерий сходимости**. Если $z_n = a_n + ib_n$, $z = a + ib$, где $a_n,\ b_n,\ a,\ b \in \Re$, то

$$a_n + ib_n \to a + ib \Leftrightarrow a_n \to a \quad \text{и} \quad b_n \to b.$$

В силу этого критерия многие утверждения этого пособия сохраняют смысл для последовательностей и рядов комплексных чисел.

Ряд с общим членом $c_n = a_n + ib_n$ сходится тогда и только тогда, когда сходятся ряды с действительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, причем в этом случае:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + i\sum_{n=1}^{\infty} b_n. \tag{3. 1}$$

Ряд (3. 1) называется *абсолютно сходящимся* и заведомо сходится, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, членами которого являются модули членов ряда (3. 1).

**Пример 66.** Рассмотрим *геометрический* ряд:

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^{k-1} + \ldots, \tag{3. 2}$$

где $q$ – комплексное число и $|q| \neq 1$.

Частичная сумма этого ряда $S_n = \dfrac{1-q^n}{1-q}$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}|q|^n = 0$ при $|q|<1$ и $\lim\limits_{n\to\infty}|q|^n = +\infty$ при $|q|>1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{1}{1-q}$ при $|q|<1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ при $|q|>1$. Следовательно, ряд (3. 2) *сходится* при $|q|<1$, а его *сумма* $S = \dfrac{1}{1-q}$. Поэтому

$$1+q+q^2+...+q^n+... = \frac{1}{1-q}. \qquad (3.\ 3)$$

При $|q|>1$ ряд (3. 2) *расходится*.

Записав число $q$ в виде $q = |q|e^{i\alpha} = |q|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, получаем, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} |q|^n (\cos n\alpha + i\sin n\alpha) = \dfrac{1}{1-|q|\cos\alpha - i|q|\sin\alpha} = \dfrac{1-|q|\cos\alpha + i|q|\sin\alpha}{1-2|q|\cos\alpha + |q|^2}$

и, следовательно, для любого действительного числа $p$, $0<p<1$, справедливы равенства:

$$\sum_{n=1}^{\infty} p^{n-1}\cos(n-1)\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} p^n \cos n\alpha = \frac{1-p\cos\alpha}{1-2p\cos\alpha + p^2},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} p^n \sin n\alpha = \frac{p\sin\alpha}{1-2p\cos\alpha + p^2}.$$

**Пример 67.** Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(1+i)^n}$ и найти его сумму.

Так как числа $z_n = \dfrac{1}{(1+i)^n}$ образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \dfrac{1}{1+i}$, где $|q| = 1/\sqrt{2}$, то по формуле (3. 3) находим:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+i)^n} = \frac{1}{1-q} - 1 = \frac{q}{1-q} = \frac{1}{i} = -i.$$

**Пример 68.** Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{3ni}}{n\sqrt{n}}$. Представим общий член ряда в виде: $\frac{e^{3ni}}{n\sqrt{n}}=\frac{\cos 3n}{n\sqrt{n}}+i\frac{\sin 3n}{n\sqrt{n}}$. Ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 3n}{n\sqrt{n}}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 3n}{n\sqrt{n}}$ абсолютно сходятся, так как $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos 3n|}{n\sqrt{n}}\le\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$ и соответственно $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin 3n|}{n\sqrt{n}}\le\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$ сходится как обобщенный гармонический. Поэтому исходный ряд абсолютно сходится.

**Пример 69.** Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n i^n}{n^5}$.

Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n i^n}{n^5}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5}$ сходится, то и исходный ряд абсолютно сходится.

**Пример 70.** Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{sh\left(i\sqrt{n}\right)}{\sin(in)}$.

Так как $\frac{sh\left(i\sqrt{n}\right)}{\sin(in)}=\frac{i\cdot\sin\sqrt{n}}{i\cdot shn}=\frac{2\sin\sqrt{n}}{e^n-e^{-n}}=\frac{2e^n\sin\sqrt{n}}{e^{2n}-1}$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{sh\left(i\sqrt{n}\right)}{\sin(in)}\right|\le\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2e^n}{e^{2n}-1}$. Последний ряд сходится по интегральному признаку, так как сходится интеграл: $\int\limits_1^{+\infty}\frac{2e^x}{e^{2x}-1}dx=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right|-\ln\frac{e-1}{e+1}=\ln\frac{e+1}{e-1}$. Следовательно, исходный ряд сходится.

## 6. Упражнения

**6. 1.** Рассмотрев предел частичной суммы ряда, установить его сходимость или расходимость. В случае сходимости найти сумму ряда:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+5)}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2(n+2)^2}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$;

5) $\frac{3}{2}+\frac{9}{4}+\frac{27}{8}+\ldots$;

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{5n-3}{5n+2}\right)$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+20)}$;

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$;

9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)$.

*Ответы:* 1) $S=\frac{23}{90}$; 2) $S=1$; 3) $S=\frac{5}{16}$; 4) $S=\frac{1}{8}$; 5) расходится; 6) расходится; 7) $S=\frac{1}{20}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{20}\right)$; 8) $S=\frac{1}{6}$;

9) $S_n=1-\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}$, $S=1-\sqrt{2}$.

**6. 2.** Найти сумму ряда, используя теорему 5:

$$\frac{1}{5}+\frac{2}{3}+\frac{1}{25}+\frac{4}{9}+\frac{1}{125}+\frac{8}{27}+\ldots.$$

*Ответ*: $S=\frac{9}{4}$.

**6. 3.** Сложить ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ и вычислить сумму получившегося ряда, если $a_n=\frac{\cos(\pi n/3)}{2^n}$, $b_n=\frac{\sin^2(\pi n/6)}{2^{n-1}}$.

*Ответ*: 1.

**6. 4.** Используя необходимое условие сходимости ряда, выяснить, является ли ряд сходящимся:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\sqrt{4n^2+1}}{5n^2-3}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^3}{2n^3+4n+1}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{2n-3}\right)^n$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi n}{n^2+1}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\ln\left(\frac{3n}{3n-1}\right)$.

*Ответы*: 1) нет; 2) нет; 3) нет; 4) требуется дополнительное исследование; 5) нет.

**6. 5.** Исследовать ряд на сходимость, пользуясь признаком сравнения:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{n}\ln(n+2)}$.

*Ответы*: 1) сходится; 2) расходится.

**6. 6.** Исследовать ряд на сходимость, пользуясь предельным признаком сравнения:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6n+4}{n^3+2n^2-16}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+7}}{n^{15}+12}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n^6+2}+\sqrt{n^3-1}}{\sqrt[5]{n^{15}+14n^{11}+1}}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^2+3}-\sqrt{n^2+1}\right)$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n+n^2+1}{3^n n^5-12}$;

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{4}{n^3+7}\right)$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{n^2+2}{n^2+1}\right)$;

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{4^n}{5^n+n}$;

9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^3 tg^5\frac{\pi}{\sqrt{n^3}}$;

10) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}$.

*Ответы*: 1) сходится; 2) сходится; 3) расходится; 4) расходится; 5) сходится; 6) сходится; 7) сходится; 8) сходится; 9) сходится; 10) расходится.

**6. 7.** Исследовать ряд на сходимость, пользуясь признаком Даламбера:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n+2^n}{n!}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n^n+2^n}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+2}{3n+1}\right)^{-2n^2}$;

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi\cdot 3^n}{4^n+e^n}$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$;

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n\sin\frac{\pi}{2^n}}{n!}$.

*Ответы*: 1) сходится; 2) расходится; 3) сходится; 4) сходится; 5) сходится; 6) сходится; 7) сходится; 8) расходится.

**6. 8.** Рассматривая $a_n$ как члены соответствующего ряда, показать, что данные последовательности $(a_n)$ сходятся:

1) $a_n=\frac{n^5}{5^n}$;

2) $a_n=\frac{5^n}{n!}$;

3) $a_n=\frac{\ln n}{n^k},\quad k>1$;

4) $a_n=\frac{n^n}{5^n\cdot n!}$;

5) $a_n=\frac{(2n)!}{(2^n)!}$;

6) $a_n=\frac{n^n}{(2n)!}$.

**6. 9.** Исследовать ряд на сходимость, пользуясь признаком Коши:

1) $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+5}{3n-1}\right)^{2n-1}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\left(\dfrac{n}{4n-3}\right)^{2n}$;  5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arcsin^{n}\left(\dfrac{\sqrt{2n-5}}{\sqrt{2n+3}}\right)$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\left(arctg\dfrac{1}{n}\right)^{n}$;  6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^{\sqrt{n}}}$.

*Ответы*: 1) сходится; 2) сходится; 3) сходится; 4) сходится; 5) расходится; 6) расходится.

**6. 10.** Найти все значения $\alpha$, при которых сходится ряд:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n}}{9n^{\alpha}+arctg\sqrt{n}}$;  3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(n^{1/\left(n^2+1\right)}-1\right)^{\alpha}$.

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[7]{1+n^{\alpha}\sin\dfrac{\pi}{n^2}}-1\right)$;

*Ответы*: 1) $\alpha>\dfrac{4}{3}$; 2) $\alpha<1$; 3) $\alpha>\dfrac{1}{2}$.

**6. 11.** Исследовать ряд на сходимость, пользуясь интегральным признаком Коши:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)\ln^2(5n+1)}$;  4) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\cdot\sqrt[3]{\ln n+1}}$;

2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\cdot\sqrt[3]{\ln^5 n}}$;  5) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{n}{\left(n^2-3\right)^2}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n}$;  6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

*Ответы*: 1) сходится; 2) сходится; 3) расходится; 4) расходится; 5) сходится; 6) расходится.

**6. 12.** Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость:

1) $\dfrac{1}{10}+\dfrac{7}{10^2}-\dfrac{13}{10^3}+\dfrac{19}{10^4}+\dfrac{25}{10^5}-\dfrac{31}{10^6}+\ldots$;  5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n\ln(n+1)\ln\ln(n+2)}$;

2) $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}+\dots$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\left(n^3+7\right)}{3n^4+12\sqrt{n+5}}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2^n}{4^n+7}$;

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2\cdot\arcsin\left(\frac{(-1)^n}{3^n}\right)$;

7) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\ln(n+1)}$.

*Ответы*: 1) сходится абсолютно; 2) сходится абсолютно; 3) сходится условно; 4) сходится абсолютно; 5) сходится условно; 6) сходится абсолютно; 7) сходится условно.

**6. 13.** Исследовать на сходимость ряды, используя признаки Абеля и Дирихле:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\cdot\arcsin\left(\frac{\pi}{\sqrt[5]{n}}\right)$;

2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\ln^5 n}{n}\cdot\cos\left(\frac{\pi n}{5}\right)$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{arctg\, n}{\sqrt{n}}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n\sin\frac{1}{n}}-\cos\frac{1}{n}\right)\cos\pi n$.

*Ответы*: 1) сходится абсолютно; 2) сходится условно; 3) сходится условно; 4) сходится абсолютно.

**6. 14.** Вычислить сумму знакочередующегося ряда:

1) $\frac{1}{2!2}-\frac{1}{4!4}+\frac{1}{6!6}-\frac{1}{8!8}+\dots$ с точностью до $10^{-5}$;

2) $\frac{1}{10}-\frac{2}{3\cdot 10^3}+\frac{2^2}{2!5\cdot 10^5}-\frac{2^3}{3!7\cdot 10^7}+\frac{2^4}{4!9\cdot 10^9}-\dots$ с точностью до $10^{-9}$.

*Ответы*: 1) 0,23981; 2) 0,099337315.

**6. 15.** Число $e = 2{,}7182818284590\ldots$. Каково наименьшее число $k$, для которого $k$-я частичная сумма ряда $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$ позволяет вычислить десять верных знаков после запятой десятичного разложения числа $e$?

**6. 16.** Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ и оценить погрешность приближенного равенства $S \approx S_5$.

**6. 17.** Сколько членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!}$ нужно взять, чтобы ошибка при замене суммы $S$ этого ряда частичной суммой $S_n$ не превышала $10^{-5}$? Найти приближенно сумму ряда в этом случае.

**6. 18.** Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ и оценить погрешность приближенного равенства $S \approx S_5$.

# БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. **Виноградова, И.А., Олехник, С.Н., Садовничий. В.А.** Задачи и упражнения по математическому анализу. В 2 кн. – М. : Высш. шк., 2000. – Кн. 2. – 712 с.
2. **Зорич, В.А.** Математический анализ. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит, 1981. – Ч. 1. – 544 с.
3. **Ильин, В.А., Садовничий, В.А., Сендов, Б.Х.** Математический анализ. – М. : Изд-во МГУ, 1987. – Т.2. – 358 с.
4. **Кудрявцев, Л.Д., Кутасов, А.Д., Чехлов, В.И., Шабунин, М.И.** Сборник задач по математическому анализу. Интегралы. Ряды. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1986. – 528 с.
5. **Практикум по высшей математике для экономистов.** / Под ред. Н.Ш. Кремера. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2002. – 423 с.
6. **Солодовников, А.С., Бабайцев, В.А., Браилов, А.В.** Математика в экономике. – М. : Финансы и статистика, 2001. – Ч. 2. – 560с.

**Учебное электронное текстовое издание**

Кузьмина Светлана Сергеевна,
Шевалдина Ольга Яковлевна

# ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

**Редактор** *Н.П. Кубыщенко*
**Компьютерная верстка** *А.А. Шолина*

**Рекомендовано РИС ГОУ ВПО УГТУ-УПИ**
**Разрешен к публикации 02.12.05.**

**Электронный формат – PDF**

**Формат 60x90 1/8**

**Издательство ГОУ-ВПО УГТУ-УПИ**
**620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19**
**e-mail: sh@uchdep.ustu.ru**

**Информационный портал**
**ГОУ ВПО УГТУ-УПИ**
**http://www.ustu.ru**