

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б.Н.Ельцина

И. Я. Пищулина
Е. В. Кукушкина

ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

*Рекомендовано методическим советом УрФУ в качестве
учебного пособия для студентов, обучающихся по программе
бакалавриата по направлениям подготовки
140100 – Теплоэнергетика и теплотехника, 231300 – Прикладная
математика, 141100 – Энергетическое машиностроение,
140400 – Электроэнергетика и электротехника, 141403 – Атомные станции:
проектирование, эксплуатация и инжиниринг, 280700 – Техносферная
безопасность*

Екатеринбург
УрФУ
2012

УДК 512.64(075.6)

ББК 22.143я73

ПЗ6

Рецензенты: кафедра информационных систем в экономике УрГЭУ;
ведущий научный сотрудник ИММ УрО РАН,
д-р физ.-мат. наук Ю. И. Бердышев

Научный редактор – проф. д-р физ.-мат. наук А. Н. Сесекин

Пищулина, И. Я.

ПЗ6 Поверхности второго порядка: учебное пособие /
И. Я. Пищулина, Е. В. Кукушкина. – Екатеринбург: УрФУ, 2012. – 166 с.

ISBN 978-5-321-02192-7

В предлагаемом учебном пособии приводится классификация поверхностей второго порядка и по заданному каноническому уравнению каждой поверхности производится исследование геометрической формы этой поверхности и расположение ее относительно системы координат с помощью метода параллельных сечений. В результате пересечения поверхности, определяемой рассматриваемым уравнением, плоскостями, параллельными координатным плоскостям, устанавливается форма и размер полученных сечений, что позволяет достаточно детально изобразить каждую поверхность.

Пособие представляет собой самоучитель, поскольку доступность изложения рассчитана на первоначальное знакомство студентов с изучаемым материалом. Глубине восприятия способствует и рассмотрение в пособии конкретных 9 примеров уравнений второго порядка, охватывающих все типы невырожденных поверхностей второго порядка. Описывается преобразование каждого из предложенных уравнений к каноническому виду и осуществляется подробный анализ методом сечений геометрического образа заданной поверхности и построение этой поверхности на чертеже.

Приложение состоит из 24 вариантов индивидуальных заданий для самостоятельной работы студентов, которые могут быть использованы в качестве расчетно-графической работы.

Пособие предназначено для студентов всех форм обучения и всех специальностей, изучающих аналитическую геометрию в данном объеме.

Библиогр.: 7 назв.

УДК 512.64(075.6)

ББК 22.143я73

ISBN 978-5-321-02192-7

© Уральский федеральный
университет, 2012

Оглавление

1. УРАВНЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ И ДВЕ ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ	5
2. КЛАССИФИКАЦИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ 2-ГО ПОРЯДКА...8	8
2.1. Поверхности эллиптического типа	9
2.2. Поверхности гиперболического типа	10
2.3. Поверхности параболического типа	11
2.4. Цилиндры второго порядка.....	12
1. Цилиндры эллиптического типа.....	12
2. Цилиндры гиперболического типа.....	13
3. Цилиндры параболического типа	14
3. ИССЛЕДОВАНИЕ ФОРМЫ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА ПО ИХ КАНОНИЧЕСКИМ УРАВНЕНИЯМ МЕТОДОМ СЕЧЕНИЙ	16
3.1. Поверхности эллиптического типа	16
3.1.1. Эллипсоид	16
3.1.2. Сфера	24
3.1.3. «Мнимый эллипсоид»	25
3.1.4. Точка	25
3.2. Поверхности гиперболического типа	26
3.2.1. Однополостный гиперболоид	26
3.2.2. Двуполостный гиперболоид	38
3.2.3. Конус второго порядка.....	47

3.3. Поверхности параболического типа	56
3.3.1. Эллиптический параболоид	56
3.3.2. Гиперболический параболоид	63
3.4. Цилиндры второго порядка.....	73
3.4.1. Цилиндры эллиптического типа.....	76
3.4.2. Цилиндры гиперболического типа.....	78
3.4.3. Цилиндры параболического типа	82
4. ПРИМЕРЫ.....	88
Библиографический список	152
Приложение	153

1. УРАВНЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ И ДВЕ ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Предмет аналитической геометрии заключается в **исследовании геометрических форм** средствами алгебры и математического анализа, основанными на применении метода координат.

Основная идея аналитической геометрии состоит в том, что (поскольку *положение* каждой *точки на прямой* можно однозначно описать *одним* вещественным *числом*, на *плоскости* – упорядоченной *парой чисел*, в *пространстве* – упорядоченной *тройкой чисел*) любое утверждение о *точках* можно перевести в утверждение о *числах*.

В аналитической геометрии всякую *поверхность* рассматривают как **геометрическое место точек**, причем в таком определении поверхности содержится **свойство**, **общее** всем её **точкам** и только им.

Одна из важнейших идей аналитического метода заключается в установлении того, **каким образом геометрические свойства поверхности отражаются на координатах точек**, составляющих эту поверхность.

Общее свойство, которым обладают все точки данного геометрического места, позволяет **связать координаты этих точек уравнением**

$$\Phi(x, y, z) = 0. \quad (1.1)$$

Уравнение (1.1) называют **уравнением поверхности S** , а входящие в него координаты x, y, z произвольной точки M рассматриваемой поверхности S относительно некоторой заданной прямоугольной декартовой системы координат $Oxyz$ – *текущими координатами*.

Поверхности разделяются по их уравнениям в декартовой системе координат на *алгебраические* и *трансцендентные*. Если уравнение алгебраической поверхности после преобразований может быть приведено к виду (1.1), где *левая часть* уравнения есть *целый многочлен* второй степени относительно x, y, z , то это уравнение представляет собой поверхность 2-го порядка.

Рассмотрим простейший пример составления такого уравнения поверхности, исходя из её *геометрических свойств*.

Пример. Найти уравнение шаровой поверхности (сферы) радиуса R с центром в точке $C(x_0, y_0, z_0)$.

Решение. Согласно определению сферы, расстояние любой её точки $M(x, y, z)$ от центра $C(x_0, y_0, z_0)$ постоянно и равно радиусу R , т.е.

$$|CM| = R.$$

Расстояние $|CM|$ между точками $M(x, y, z)$ и $C(x_0, y_0, z_0)$ определяется по формуле:

$$|CM| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}.$$

Следовательно,

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} = R,$$

или

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2. \quad (1.2)$$

Полученное уравнение (1.2) и есть *искомое уравнение сферы*, так как ему удовлетворяют координаты любой её точки и, очевидно, не удовлетворяют координаты точек, не лежащих на данной сфере.

В частности, если центр сферы совпадает с началом координат, то уравнение сферы (1.2) примет следующий вид:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \quad (1.3)$$

Заметим, что сфере соответствует уравнение второй степени относительно текущих координат. Действительно, раскрывая скобки в уравнении (1.2), будем иметь

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x_0x - 2y_0y - 2z_0z + (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - R^2) = 0. \quad (1.4)$$

Уравнение (1.4) содержит члены второго порядка относительно x, y, z , а также члены первого порядка относительно x, y, z и свободный член $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - R^2$.

Таким образом, всякая поверхность, рассматриваемая как геометрическое место точек, может быть представлена уравнением (1.1), связывающим координаты её точек, что даёт возможность свести изучение геометрических свойств этой поверхности к исследованию аналитических свойств соответствующего ей уравнения.

Обратно, всякое уравнение (1.1) между переменными x, y, z , вообще говоря, *определяет поверхность* как геометрическое место точек, координаты которых x, y, z удовлетворяют этому уравнению.

Из этих рассуждений вытекает постановка двух основных задач аналитической геометрии:

- **Дана поверхность** как геометрическое место точек, обладающих некоторым *общим свойством*, присущим всем точкам этой поверхности, и только им.

Задача: составить уравнение этой поверхности (см. рассматриваемый пример, уравнение (1.2))

- **Дано уравнение** (1.1) между координатами x, y, z .

Задача: исследовать форму поверхности, определяемой этим уравнением.

Исследованию формы той или иной поверхности 2-го порядка и изображению этой поверхности на чертеже с помощью так называемого «метода параллельных сечений» и посвящена предлагаемая работа.

2. КЛАССИФИКАЦИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ 2-ГО ПОРЯДКА

Определение. Поверхностью S второго порядка будем называть геометрическое место точек, декартовы прямоугольные координаты которых удовлетворяют уравнению вида

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + \\ + 2a_{10}x + 2a_{20}y + 2a_{30}z + a_{00} = 0, \quad (2.1)$$

в котором по крайней мере один из коэффициентов a_{11} , a_{22} , a_{33} , a_{12} , a_{13} , a_{23} отличен от нуля.

Если не существует ни одной действительной точки, координаты которой удовлетворяют уравнению (2.1), то говорят, что уравнение (2.1) определяет мнимую поверхность.

В некоторых случаях уравнение (2.1) может определять пару различных или совпадающих плоскостей, одну–единственную точку или прямую линию. Такие множества будем называть вырожденными поверхностями.

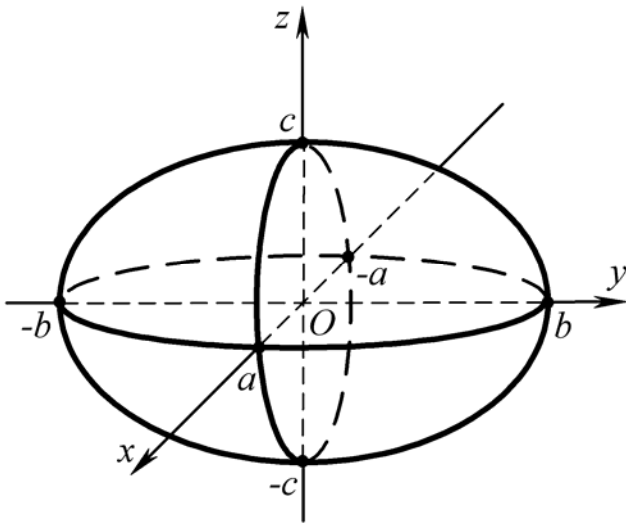
Уравнение (2.1) будем называть общим уравнением поверхности второго порядка.

При переходе от данной декартовой прямоугольной системы координат к другой декартовой системе координат поверхность второго порядка, рассматриваемая как геометрический объект, не меняется, меняется лишь её уравнение.

Действительно, если изменить систему координат и подставить в уравнение (2.1) выражение старых координат текущей точки через новые, то получим новое уравнение (также второго порядка), причём с помощью специально подобранного поворота декартовой системы координат и переноса начала координат вдоль соответствующих осей можно уравнение (2.1) преобразовать к одному из следующих канонических видов:

2.1. Поверхности эллиптического типа

➤ Эллипсоид:



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (2.2)$$

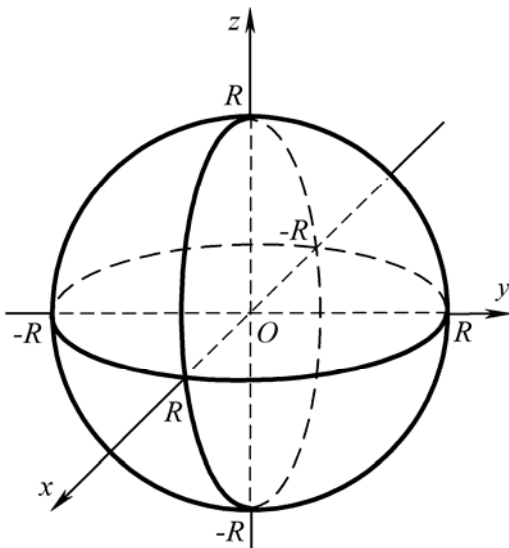
➤ «Мнимый эллипсоид»:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1. \quad (2.3)$$

➤ Точка:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0. \quad (2.4)$$

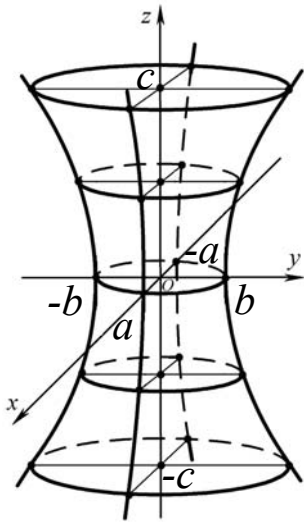
➤ Сфера:



$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \quad (2.5)$$

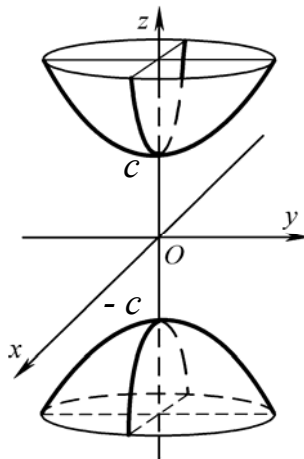
2.2. Поверхности гиперболического типа

- Однополостный гиперболоид:



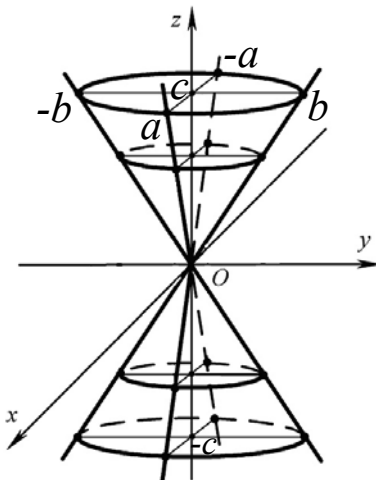
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (2.6)$$

- Двуполостный гиперболоид:



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1. \quad (2.7)$$

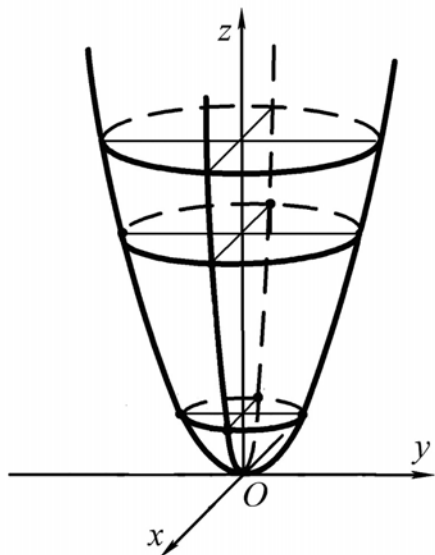
- Конус второго порядка:



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \quad (2.8)$$

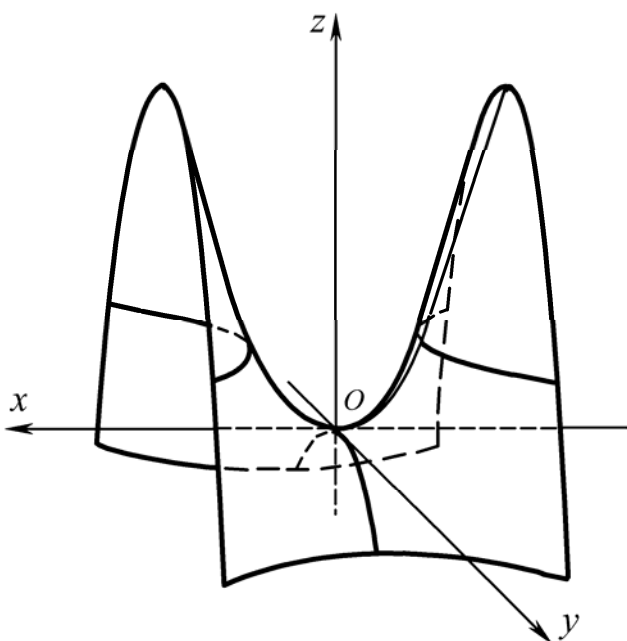
2.3. Поверхности параболического типа

➤ Эллиптический параболоид:



$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \quad (p, q > 0). \quad (2.9)$$

➤ Гиперболический параболоид:

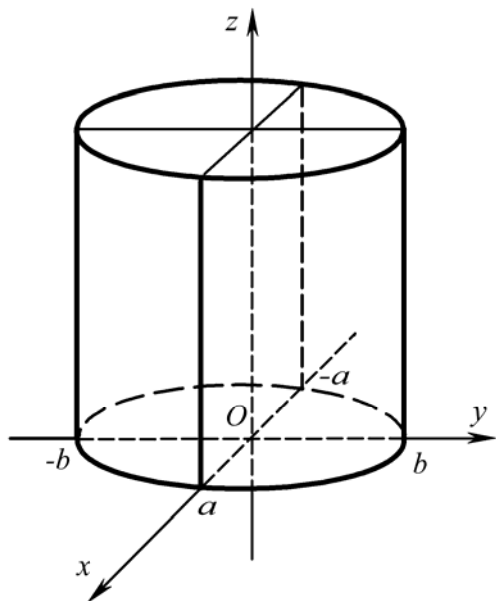


$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \quad (p, q > 0). \quad (2.10)$$

2.4. Цилиндры второго порядка

1. Цилиндры эллиптического типа

- Эллиптический цилиндр:



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (2.11)$$

- Круговой цилиндр (если $a = b = R$):

$$x^2 + y^2 = R^2. \quad (2.12)$$

- «Мнимый эллиптический цилиндр»:

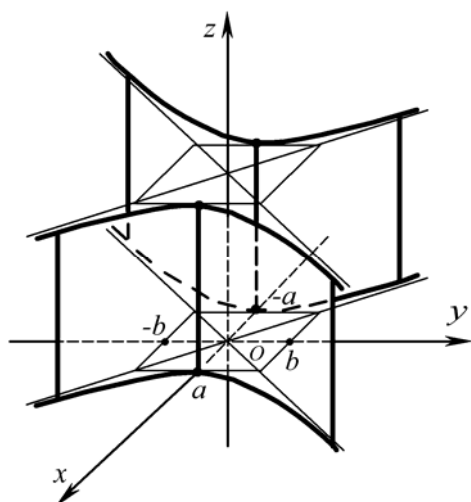
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1. \quad (2.13)$$

- Прямая линия:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0. \quad (2.14)$$

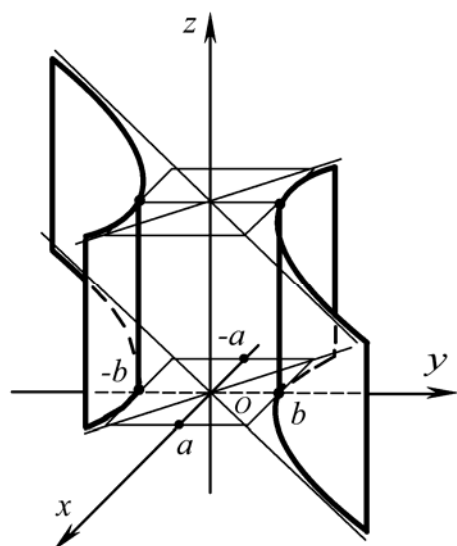
2. Цилиндры гиперболического типа

- Гиперболический цилиндр:



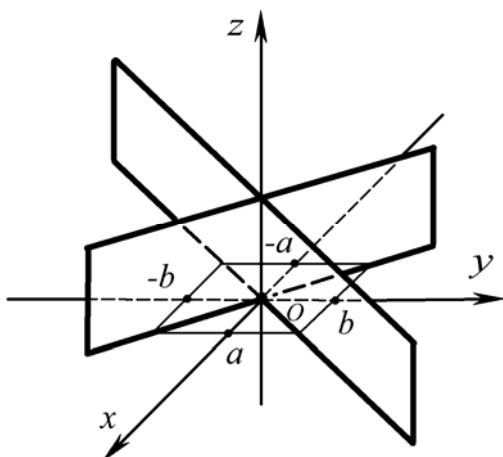
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (2.15)$$

- Сопряженный гиперболический цилиндр:



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1. \quad (2.16)$$

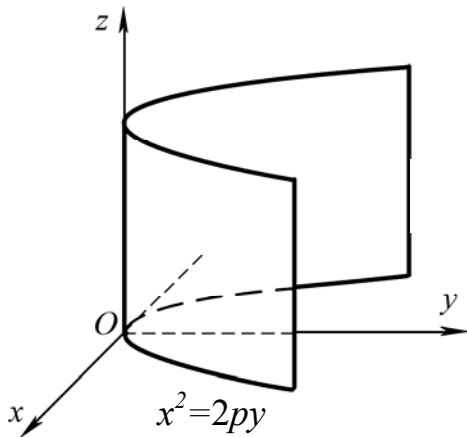
- Пара пересекающихся плоскостей:



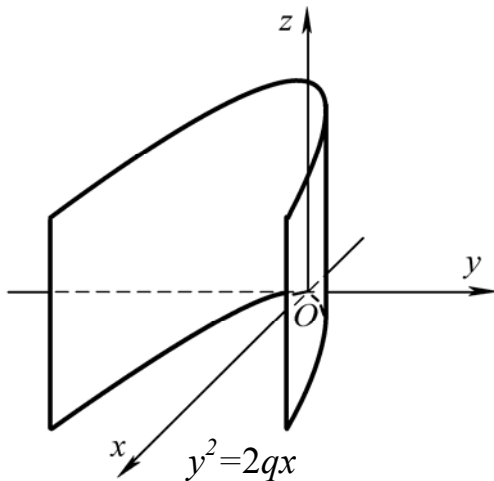
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0. \quad (2.17)$$

3. Цилиндры параболического типа

➤ Параболические цилиндры:

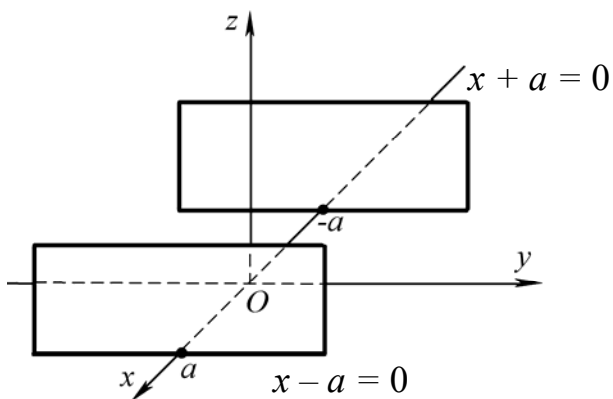


$$x^2 = \pm 2py. \quad (2.18)$$



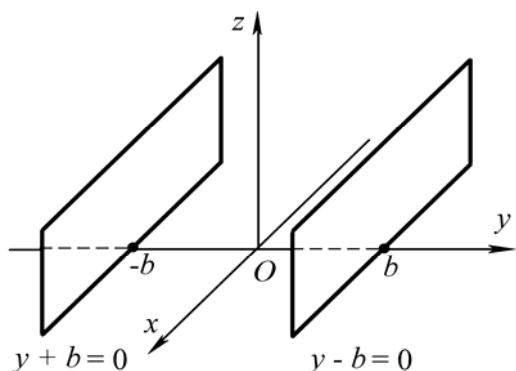
$$y^2 = \pm 2qx. \quad (2.19)$$

➤ Пара параллельных плоскостей:



$$x^2 - a^2 = 0 \quad (2.20)$$

ИЛИ



$$y^2 - b^2 = 0. \quad (2.21)$$

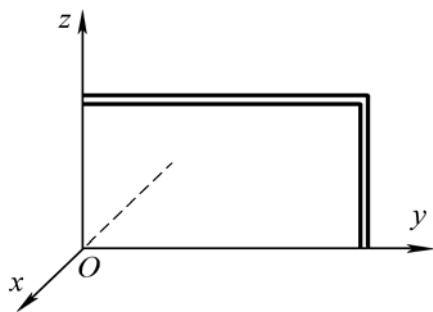
➤ «Пара мнимых параллельных плоскостей»:

$$x^2 + a^2 = 0 \quad (2.22)$$

ИЛИ

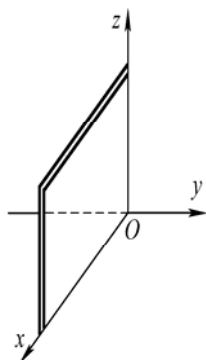
$$y^2 + b^2 = 0. \quad (2.23)$$

➤ Пара совпадающих плоскостей:



$$x^2 = 0 \quad (2.24)$$

ИЛИ



$$y^2 = 0. \quad (2.25)$$

Не касаясь пока вопроса о том, **каким образом** в каждом конкретном случае **найти** эту *специальную систему координат*, при переходе к которой уравнение (2.1) принимает один из перечисленных 24 канонических видов (2.2) – (2.25), **остановимся на** подробном **изучении уравнений (2.2) – (2.25)** и *исследовании формы поверхностей* второго порядка, *описываемых этими каноническими уравнениями.*

3. ИССЛЕДОВАНИЕ ФОРМЫ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА ПО ИХ КАНОНИЧЕСКИМ УРАВНЕНИЯМ МЕТОДОМ СЕЧЕНИЙ

Обратимся по порядку к каноническим уравнениям (2.2) – (2.25). По заданному уравнению *каждой* из поверхностей 2-го порядка (2.2) – (2.25) будем определять её геометрический образ и *изображать* эту поверхность на чертеже.

С этой целью будем применять к рассматриваемой поверхности один из основных методов исследования формы поверхности по её уравнению – **метод сечений**.

Суть этого метода состоит в изучении **линий**, получающихся в результате **пересечения** данной **поверхности** с координатными плоскостями (а также с плоскостями, параллельными какой-либо из координатных плоскостей), и **точном вычерчивании** каждой такой линии согласно полученному для неё уравнению.

Построенные таким образом *сечения* и позволяют *наглядно* представить себе *форму и размеры* исследуемой поверхности.

3.1. Поверхности эллиптического типа

3.1.1. Эллипсоид

Поверхность 2-го порядка, определяемая уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (3.1)$$

называется *эллипсоидом*, а числа a , b , c – полуосями эллипсоида.

Так как в уравнение (3.1) текущие координаты входят в чётных степенях, то эллипсоид **симметричен относительно начала координат**, а плоскости координат являются его плоскостями симметрии.

Действительно, если некоторая точка $M(x, y, z)$ находится на эллипсоиде (т.е. её координаты удовлетворяют уравнению (3.1) этого эллипсоида), то и симметричная ей относительно координатной плоскости Oyz точка $M_1(-x, y, z)$ также принадлежит данному эллипсоиду (т.к. её координаты также удовлетворяют уравнению (3.1)). Аналогичным образом, точки $M_2(x, -y, z)$ и $M_3(x, y, -z)$, симметричные точке $M(x, y, z)$ относительно координатных плоскостей Oxz и Oxy , а также точка $M_4(-x, -y, -z)$, симметричная точке $M(x, y, z)$ относительно начала координат, принадлежат данному эллипсоиду.

Исследуем эту поверхность **методом сечений**.

Чтобы установить форму эллипсоида, произведём три главных сечения, т.е. выясним прежде всего **форму линий пересечения его координатными плоскостями** Oxy ($z = 0$), Oxz ($y = 0$), Oyz ($x = 0$).

В сечении эллипсоида координатной плоскостью Oxy , имеющей уравнение $z = 0$,

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ z = 0 \end{cases}$$

получим эллипс

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

и изобразим его на чертеже (рис.1).

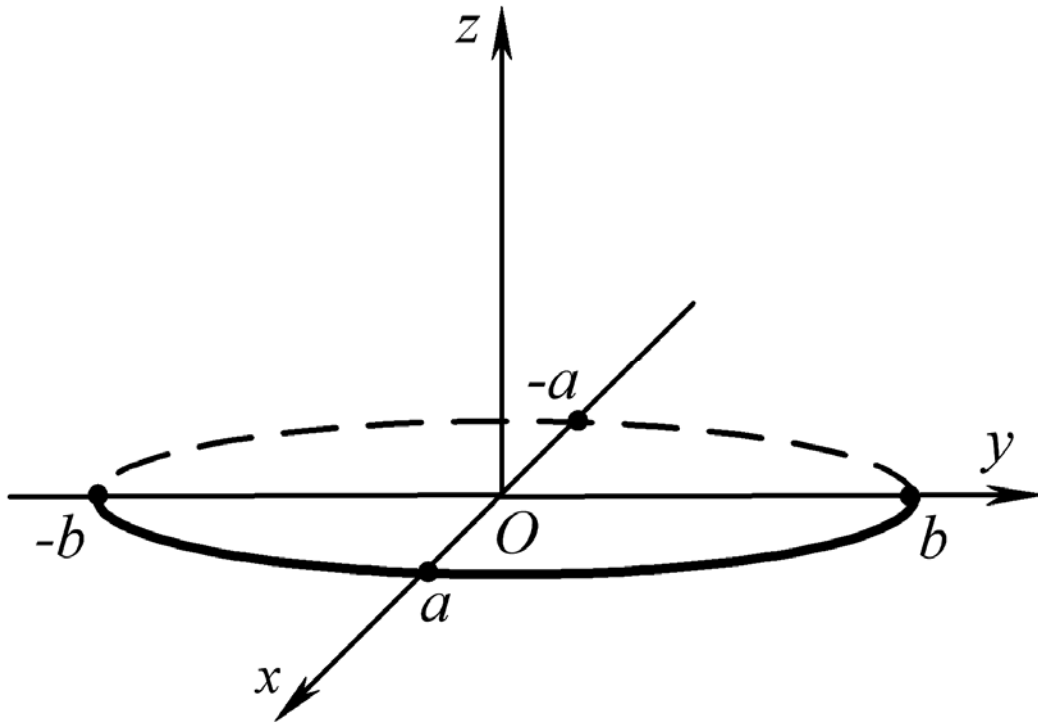


Рис.1

Аналогично, пересекая эллипсоид координатной плоскостью Oxz , имеющей уравнение $y = 0$,

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0 \end{cases}$$

будем иметь в сечении также эллипс

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0, \end{cases} \quad (3.3)$$

но лежащий уже в плоскости Oxz .

Повторим теперь рис.1 и добавим к изображённому ранее эллипсу (3.2), расположенному в плоскости Oxy , новый эллипс (3.3), лежащий в плоскости Oxz (рис. 2).

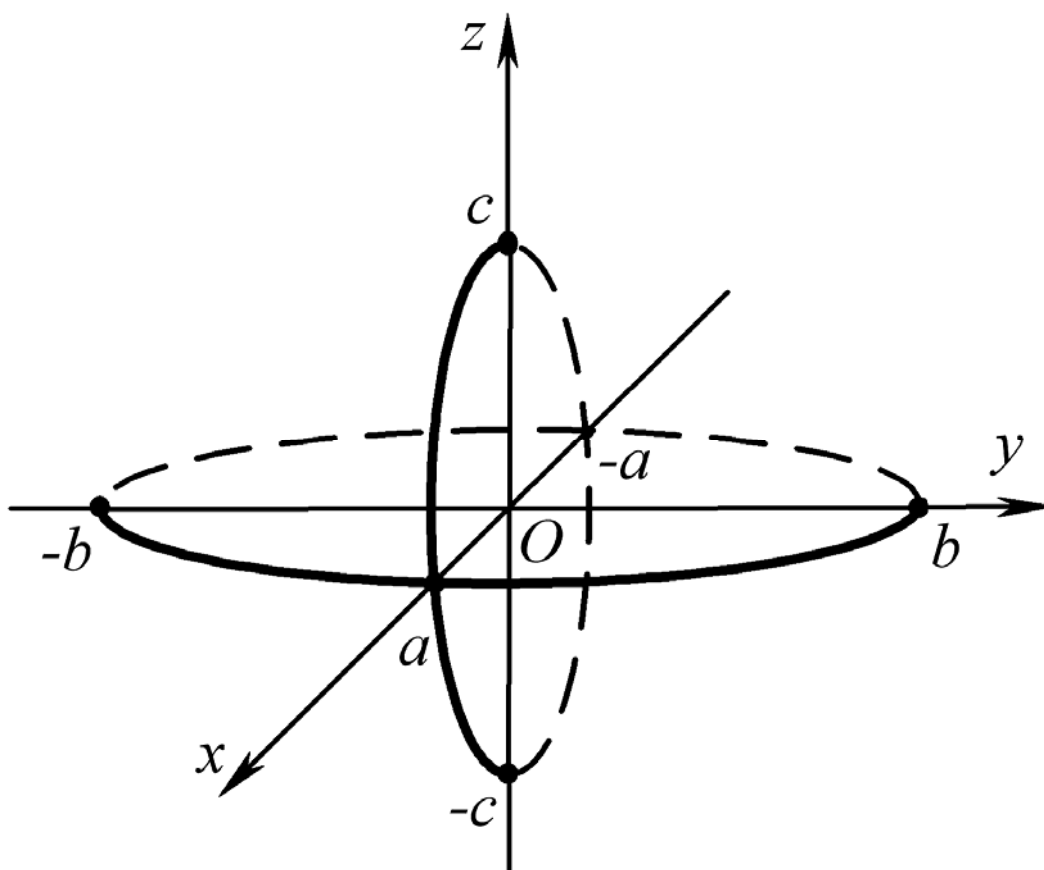


Рис. 2

Наконец, при пересечении эллипсоида (3.1) координатной плоскостью Oyz , имеющей уравнение $x = 0$,

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0 \end{cases}$$

получим в сечении снова эллипс

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0, \end{cases} \quad (3.4)$$

расположенный теперь в плоскости Oyz .

Продолжим рис. 2, достроив на этом чертеже ещё один эллипс — эллипс (3.4), лежащий в координатной плоскости Oyz (рис. 3).

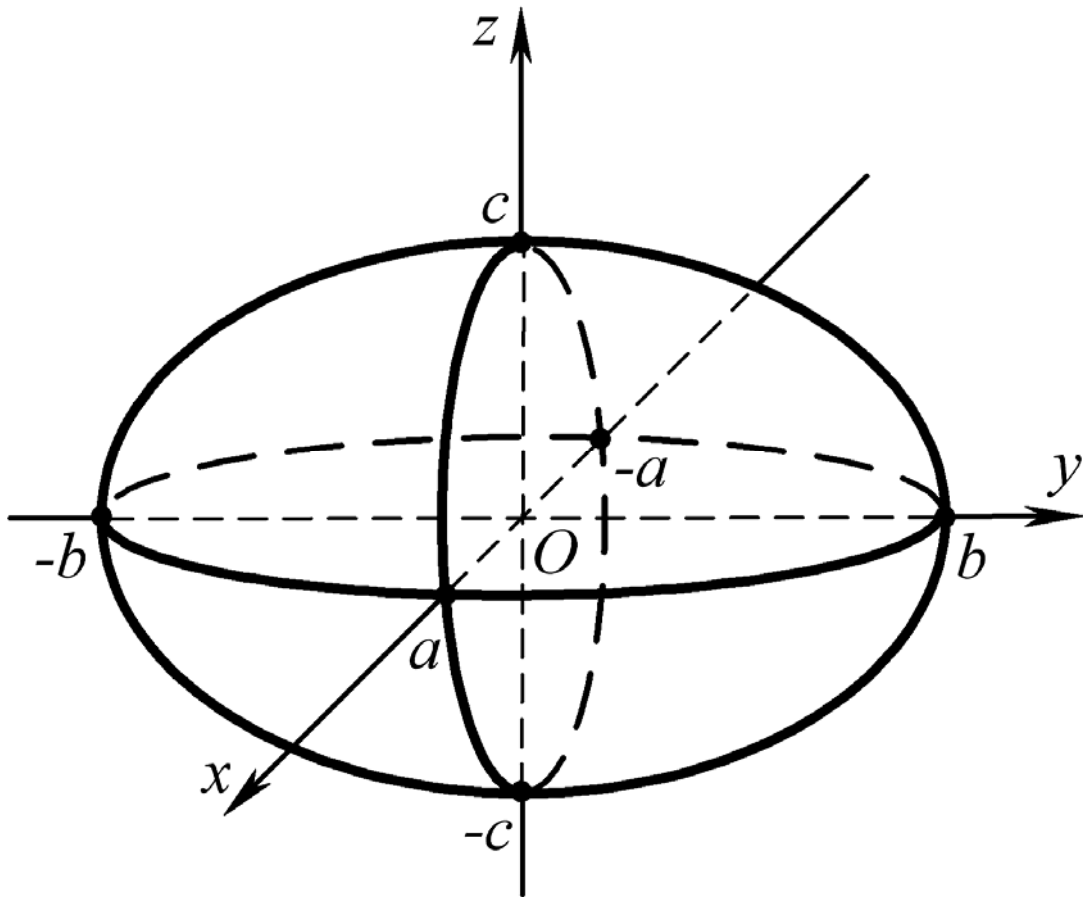


Рис.3

Чтобы составить более точное представление об эллипсоиде (3.1), произведём теперь сечения его плоскостями, **параллельными координатным плоскостям.**

Рассмотрим сечения эллипсоида (3.1) плоскостями $z = h$, параллельными координатной плоскости Oxy .

Линия, получаемая в сечении, определяется двумя уравнениями:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ z = h \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}, \\ z = h. \end{cases} \quad (3.5)$$

Из уравнений (3.5) видно:

- при условии $|\mathbf{h}| > c$ правая часть $1 - \frac{h^2}{c^2}$ становится отрицательной, но левая часть $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ не может быть отрицательной ни при каких действительных значениях x и y , и, следовательно, в этом случае точек пересечения эллипсоида (3.1) с плоскостями $z = h$ не существует. Это означает, что плоскости $z = h$ при $|\mathbf{h}| > c$ эллипсоид (3.1) не пересекают;
- при условии $|\mathbf{h}| < c$ правая часть $1 - \frac{h^2}{c^2} > 0$ и поэтому уравнения (3.5) будут иметь вид

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2\left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2\left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right)} = 1, \\ z = h. \end{cases} \quad (3.6)$$

Таким образом, при $-c < \mathbf{h} < c$ плоскость $z = h$ пересекает эллипсоид (3.1) по эллипсу (рис. 4):

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^{*2}} + \frac{y^2}{b^{*2}} = 1, \\ z = h, \end{cases} \quad (3.7)$$

с полуосями

$$a^* = a\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}, \quad b^* = b\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}. \quad (3.8)$$

Полуоси a^* и b^* (3.8) зависят от \mathbf{h} . Следовательно, при изменении h от $-c$ до $+c$ полуоси (3.8) изменяются, оставаясь пропорциональными полуосям a и b эллипса (3.2), лежащего в плоскости Oxy . Два эллипса с пропорциональными полуосями называются *подобными*;

- при $h = 0$ получается *самый большой* эллипс (3.7), поскольку из формул (3.8) вытекает, что *наибольшие значения* a^* и b^* достигаются, *если* $h = 0$. В этом случае $a^* = a$, $b^* = b$, следовательно, рассмотренный ранее эллипс (3.2), лежащий в сечении эллипсоида координатной плоскостью Oxy ($z = 0$), имеет наибольшие размеры;
- при условии $|h| = c$, т.е. при $h = c$ и $h = -c$ величины a^* и b^* (3.8) обращаются в нуль. Это означает, что эллипсы (3.7), образуемые сечением эллипсоида (3.1) плоскостью $z = c$ или плоскостью $z = -c$, вырождаются в две точки $(0, 0, c)$ и $(0, 0, -c)$. Другими словами, плоскость $z = c$ касается эллипсоида (3.1) в точке $(0, 0, c)$, а плоскость $z = -c$ касается эллипсоида (3.1) в точке $(0, 0, -c)$.

Изобразим рассматриваемый эллипс (3.7) с полуосями (3.8) на рис. 4 и докажем еще в заключение, что вершины этого эллипса (3.7) с полуосями (3.8) попадают как раз на эллипсы (3.3) и (3.4), расположенные в координатных плоскостях Oxz и Oyz соответственно.

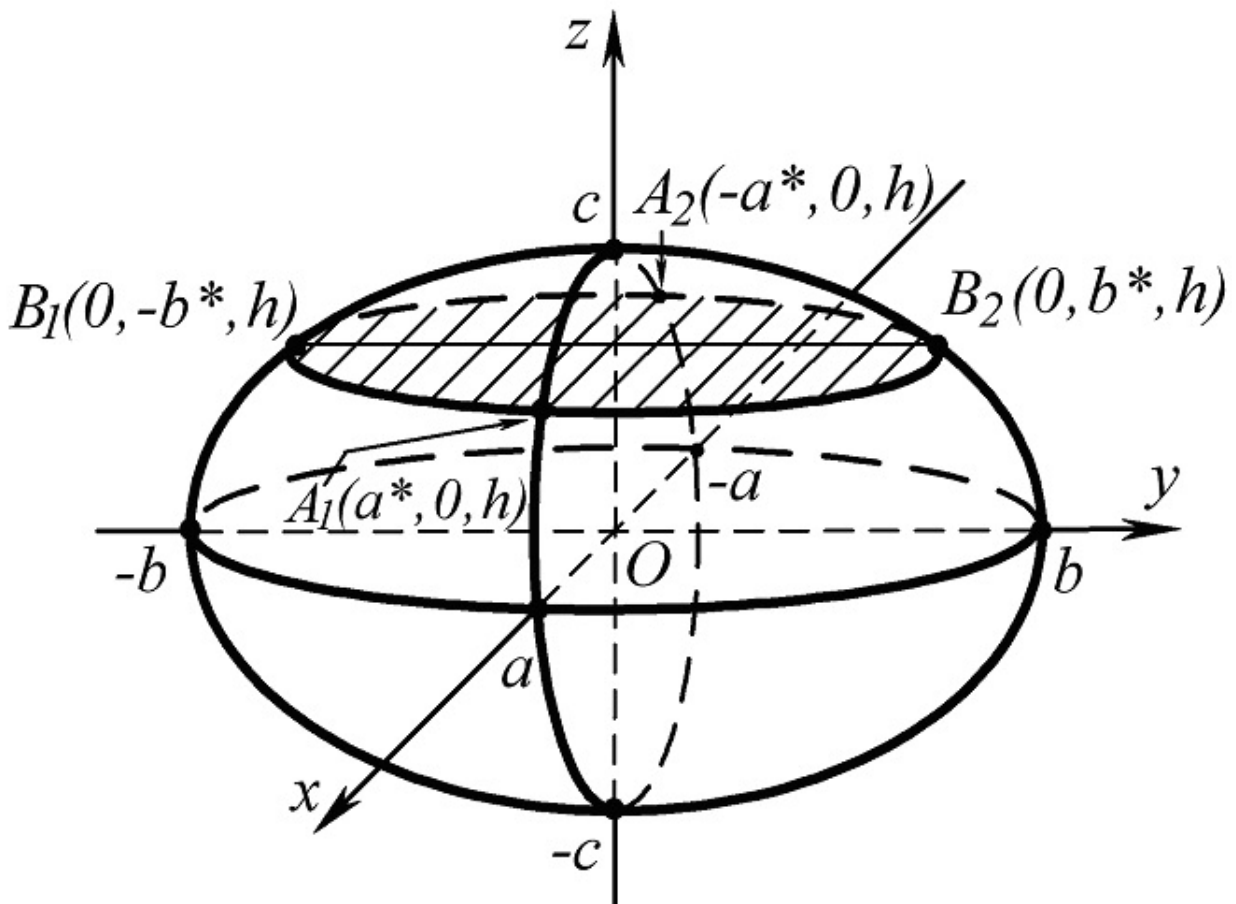


Рис. 4

Вершинами эллипса, как известно, называются точки пересечения эллипса с его осями симметрии (главными осями эллипса); иначе говоря, вершины эллипса – это концы его главных осей. Точки A_1, A_2, B_1, B_2 на рис. 4 – вершины эллипса (3.7). Очевидно, эти вершины имеют соответственно координаты $(a^*, 0, h), (-a^*, 0, h), (0, -b^*, h), (0, b^*, h)$.

Покажем, что координаты точек $A_1(a^*, 0, h)$ и $A_2(-a^*, 0, h)$ удовлетворяют уравнению эллипса (3.3):

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0. \end{cases}$$

В самом деле, подставляя в левую часть первого из уравнений (3.3)

координаты точек A_1 и A_2 $x = \pm a^* = \pm a\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}, z = h$, будем иметь

$$\frac{a^2 \left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right)}{a^2} + \frac{h^2}{c^2},$$

т.е. приходим к тождеству

$$1 - \frac{h^2}{c^2} + \frac{h^2}{c^2} \equiv 1, \quad (3.9)$$

а это означает, что точки A_1 и A_2 действительно располагаются на эллипсе (3.3).

Аналогично можно показать, что координаты точек $B_1(0, -b^*, h)$ и $B_2(0, b^*, h)$ удовлетворяют уравнениям эллипса (3.4):

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0. \end{cases}$$

В результате подстановки координат точек B_1 и B_2

$y = \pm b^* = \pm b\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}, z = h$ в первое уравнение (3.4) снова

получим тождество (3.9), и значит, точки B_1 и B_2 располагаются на эллипсе (3.4), лежащем в координатной плоскости Oyz .

Таким образом, эллипсоид (3.1) можно рассматривать как замкнутую ограниченную поверхность, образованную движущимся в соответствии с изменением h ($-c < h < c$) эллипсом (3.6), параллельным при всех значениях h от $-c$ до $+c$ плоскости Oxy (см. рис. 4), который при движении остаётся себе подобным и вершины A_1, A_2, B_1, B_2 которого скользят по эллипсам (3.3) и (3.4), лежащим в плоскостях Oxz и Oyz .

3.1.2. Сфера

Если в уравнении эллипсоида (3.1):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

все три полуоси a, b и c равны между собой, то полагая $a = b = c = R$, приходим к уравнению

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad (3.10)$$

определяющему **сферу**.

Сделаем чертеж сферы (рис. 5).

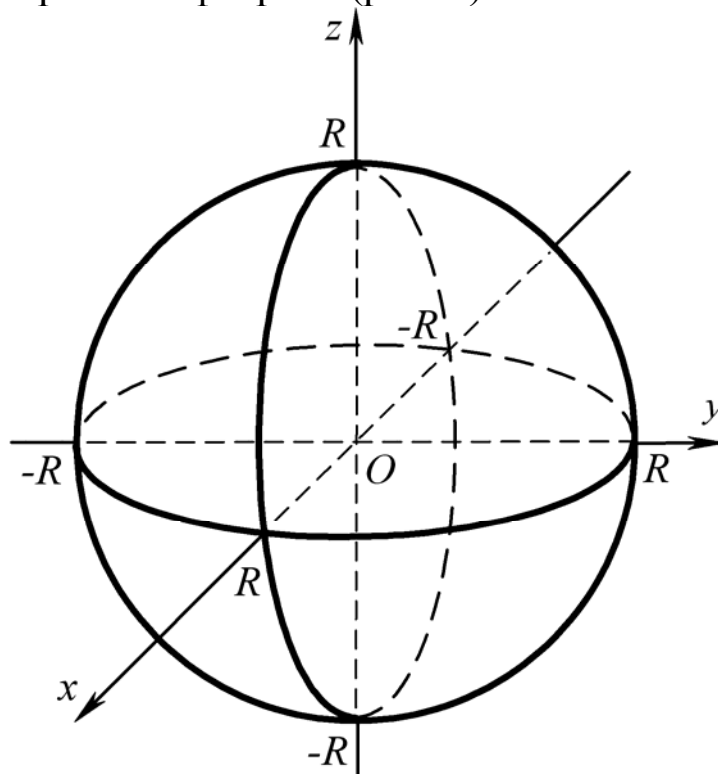


Рис. 5

3.1.3. «Мнимый эллипсоид»

Ясно, что не существует ни одной действительной точки, координаты которой удовлетворяли бы уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1. \quad (3.11)$$

В самом деле, слева стоит сумма квадратов, которая ни при каких значениях x , y и z не может стать отрицательной. Поэтому уравнение (3.11) не задает никакого геометрического образа и определяет «**МНИМЫЙ ЭЛЛИПСОИД**».

3.1.4. Точка

Наконец, уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad (3.12)$$

удовлетворяют координаты *одной – единственной точки* $O(0,0,0)$. Ни при каких других значениях x , y и z сумма квадратов, стоящая слева, в нуль не обращается.

3.2. Поверхности гиперболического типа

Займёмся прежде всего *гиперболоидами*. Существует два гипербоида: однополостный и двуполостный.

3.2.1. Однополостный гиперболоид

Поверхность 2-го порядка, определяемая уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (3.13)$$

называется *однополостным гиперболоидом*, а числа a , b и c – его полуосями.

Однополостный гиперболоид имеет три плоскости симметрии Oxy , Oxz и Oyz . Действительно, уравнение (3.13) содержит **только квадраты** координат, откуда следует, что если в уравнении (3.13) заменить (одновременно или порознь) x на $-x$, y на $-y$, z на $-z$, то оно не изменится. Это доказывает, что однополостный гиперболоид (3.13) есть поверхность, симметричная относительно координатных плоскостей $x=0$, $y=0$, $z=0$ и начала координат.

Методом сечений исследуем форму однополостного гиперболоида по его каноническому уравнению (3.13) и изобразим его на чертеже.

Рассмотрим прежде всего линию пересечения однополостного гиперболоида (3.13) координатной плоскостью Oyz , уравнение которой $x=0$. Линия, получаемая в сечении, определяется двумя уравнениями:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0 \end{cases} \quad (3.14)$$

и представляет собой **гиперболу**, лежащую в плоскости Oyz , которую и предстоит построить прежде всего.

Вспоминая, что перед изображением гиперболы рекомендуется сначала построить её *основной прямоугольник и асимптоты*, отложим от начала координат по оси Oy отрезки b и $(-b)$, а по оси Oz соответственно отрезки c и $(-c)$ и через полученные точки $(0, b, 0)$ и $(0, -b, 0)$ проведём прямые (длиной $2c$), параллельные оси Oz , а затем через точки $(0, 0, c)$ и $(0, 0, -c)$, лежащие на оси Oz , – прямые (длиной $2b$), параллельные оси Oy .

Полученный таким образом прямоугольник, лежащий в плоскости Oyz , и называется *основным прямоугольником* для рассматриваемой гиперболы (3.14). Каждая из его диагоналей, проведённая через противоположные вершины и неограниченно продолженная в обе стороны, является *асимптотой* данной гиперболы (3.14).

После этого может быть изображена сама гипербола (3.14), однако прежде следует определить, как *какая* из осей координат Oy или Oz является *действительной осью* этой гиперболы, а *какая* – *мнимой*. Как известно, одна из двух осей координат пересекает гиперболу, а другая её не пересекает и потому называется *мнимой осью* гиперболы. Точки же пересечения гиперболы с её *действительной осью* называют *вершинами гиперболы*; гипербола имеет две вершины.

Установим, исходя из уравнения (3.14), **какие же точки** являются **вершинами** рассматриваемой гиперболы. Чтобы найти точки пересечения данной гиперболы с осью Oz ,

имеющей уравнения: $\begin{cases} x = 0, \\ y = 0; \end{cases}$ **положим** в уравнении (3.14)

$y = 0$. Тогда получим для определения координат вершин гиперболы уравнение

$$-\frac{z^2}{c^2} = 1, \text{ или } z^2 = -c^2, \text{ или } z = \pm\sqrt{-c^2} = \pm c\sqrt{-1},$$

т.е. для z получаем *мнимые* значения. Следовательно, ось Oz не пересекает гиперболу (3.14) и, значит, является для неё мнимой осью симметрии.

Полагая же в уравнении (3.14) $z = 0$, найдём координаты точек пересечения гиперболы с осью Oy , имеющей уравнения $\begin{cases} x = 0, \\ z = 0, \end{cases}$

откуда $\frac{y^2}{b^2} = 1$, или $y^2 = b^2$ и $y = \pm b$.

Это означает, что точки $(0, b, 0)$ и $(0, -b, 0)$ являются вершинами рассматриваемой гиперболы (3.14).

Итак, построив основной прямоугольник, затем асимптоты гиперболы (3.14) и установив её вершины $(0, b, 0)$ и $(0, -b, 0)$, можно сделать чертёж этой гиперболы в плоскости Oyz . Как известно, часть рассматриваемой гиперболы, лежащая в первой координатной четверти Oyz , «исходит» из точки $(0, b, 0)$ (так, чтобы при этом соответствующая сторона основного прямоугольника служила касательной к этой ветви гиперболы в её вершине $(0, b, 0)$) и идёт «направо» и «вверх», бесконечно приближаясь к своей асимптоте, притом «снизу» и монотонно.

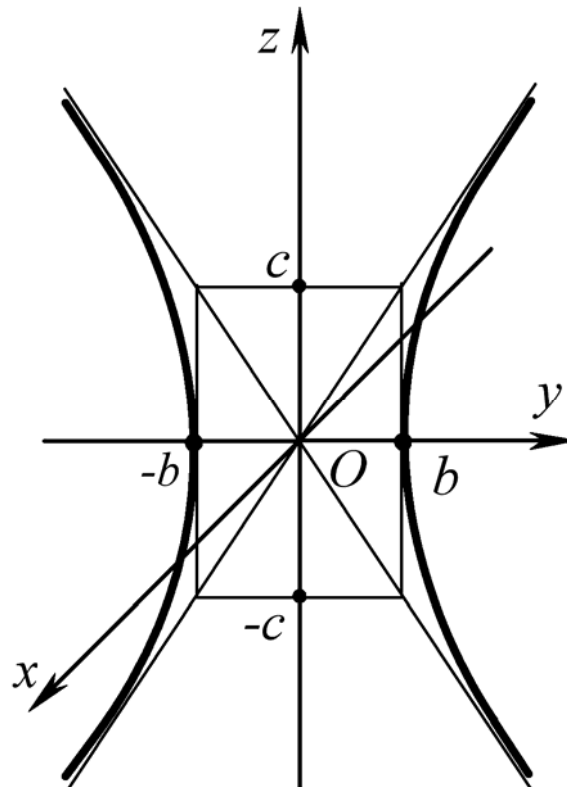


Рис. 6

После того, как построена часть гиперболы (3.14), лежащая в первой координатной четверти плоскости Oyz , общий вид целой гиперболы может быть легко установлен в силу симметрии гиперболы относительно координатных осей Oy и Oz и начала координат (рис. 6).

Пересекая однополостный гиперболоид (3.13) координатной плоскостью Oxz (которая имеет уравнение: $y=0$), получим в сечении снова гиперболу, лежащую теперь в плоскости Oxz и описываемую двумя уравнениями

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0. \end{cases} \quad (3.15)$$

Чтобы изобразить гиперболу (3.15) на чертеже, следует прежде всего построить её основной прямоугольник и асимптоты, а затем найти вершины гиперболы, установив, какая из осей её симметрии, Ox или Oz , является действительной осью, а какая – мнимой.

Отложим от начала координат по оси Ox отрезки a и $(-a)$ соответственно и через полученные точки $(a,0,0)$ и $(-a,0,0)$ проведём прямые, параллельные оси Oz длиной c вверх и длиной c вниз от этих точек. Затем из отмеченных ранее на этом чертеже (при изображении гиперболы (3.14)) точек $(0,0,c)$ и $(0,0,-c)$ проведём прямые, параллельные оси Ox (причём, внимание! *Чертим эти прямые по правилам начертательной геометрии также, как и ось Ox под углом 45° к горизонтали и вертикали, на которых расположены оси Oy и Oz соответственно*) длиной a в сторону положительного направления оси Ox и длиной a в сторону отрицательного направления оси Ox .

Через противоположные вершины полученного таким образом основного прямоугольника («развёрнутого» вдоль оси Ox) проведём диагонали и неограниченно продолжим эти диагонали в обе стороны, построив тем самым асимптоты гиперболы (3.15).

Найдём теперь вершины гиперболы (3.15), исследуя с этой целью точки её пересечения с осями координат Ox и Oz . Пересекая гиперболу (3.15) осью Oz , которая имеет уравнения

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \end{cases}$$

получаем

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0, \\ y = 0, \end{cases}$$

откуда

$$-\frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{или} \quad z^2 = -c^2, \quad z = \pm\sqrt{-c^2} = \pm c\sqrt{-1}.$$

Поскольку получили для z мнимые значения, то, следовательно, ось Oz не пересекает гиперболу (3.15) и является мнимой осью для этой гиперболы. Другое дело, если рассмотреть точки пересечения гиперболы (3.15) с осью Ox , которая имеет уравнения

$$\begin{cases} y = 0, \\ z = 0, \end{cases}$$

тогда

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0, \\ z = 0, \end{cases}$$

следовательно, $\frac{x^2}{a^2} = 1$ или $x^2 = a^2$, откуда $x = \pm a$.

Это означает, что ось Ox является действительной осью для гиперболы (3.15), а точки $(a, 0, 0)$ и $(-a, 0, 0)$ – вершинами этой гиперболы.

Подводя **итог** всему, что было сказано, ясно, что уравнение (3.15) определяет гиперболу, расположенную в плоскости Oxz так, как показано на рис. 7.

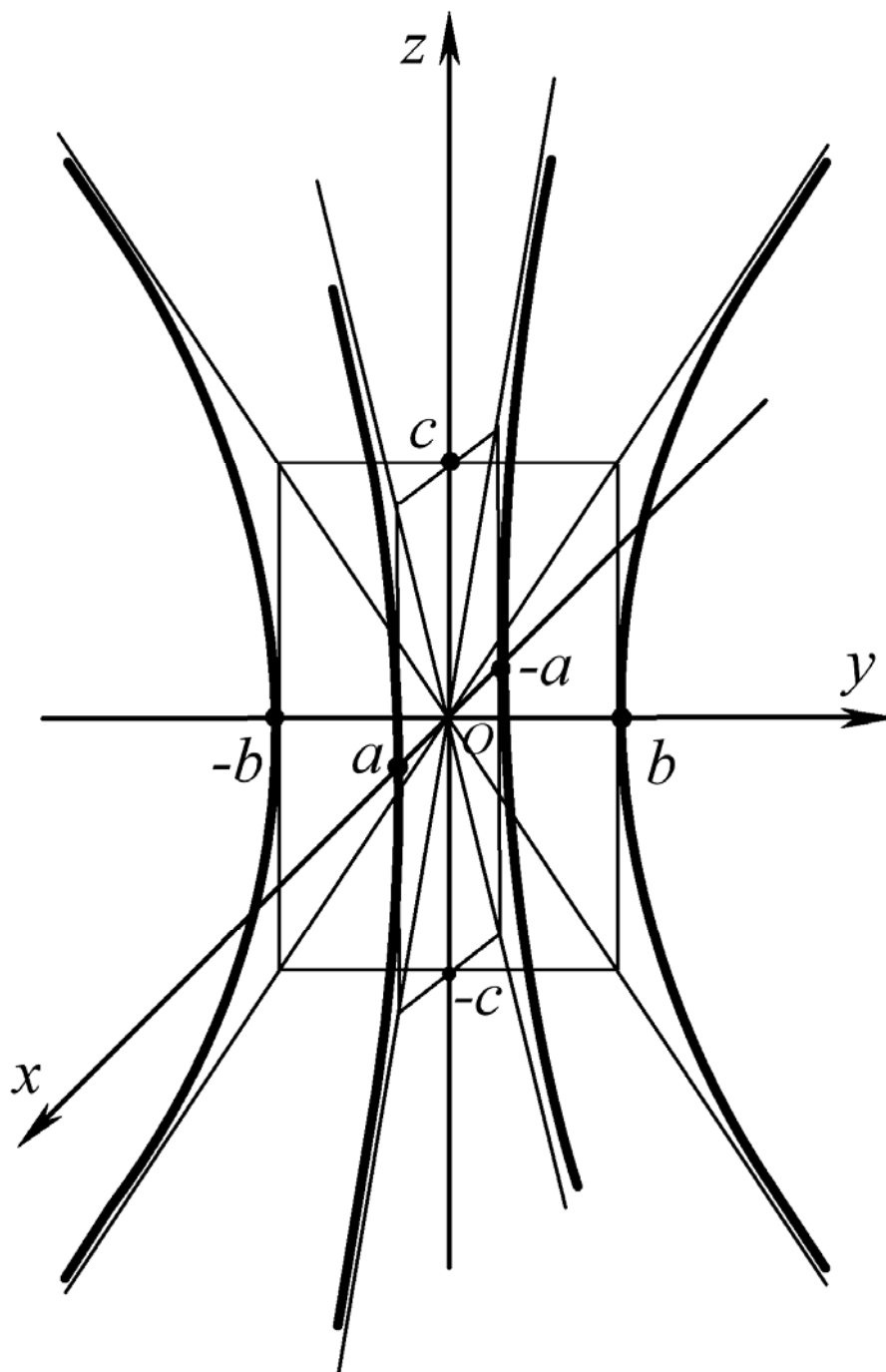


Рис. 7

Далее исследуем сечения однополостного гиперboloида (3.13) плоскостями, параллельными координатной плоскости Oxy . Каждая из таких плоскостей задаётся уравнением вида $z = h$, а линия пересечения однополостного гиперboloида (3.13) этой плоскостью определяется двумя уравнениями

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ z = h \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}, \\ z = h, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2 \left(1 + \frac{h^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2 \left(1 + \frac{h^2}{c^2}\right)} = 1, \\ z = h. \end{cases} \quad (3.16)$$

Следовательно, любая плоскость $z = h$ пересекает однополостный гиперboloид (3.13) по эллипсу

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^{*2}} + \frac{y^2}{b^{*2}} = 1, \\ z = h, \end{cases}$$

с полуосями

$$a^* = a \sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}, \quad b^* = b \sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}. \quad (3.17)$$

Полуоси a^* , b^* (3.17) зависят от h и изменяются с изменением $|h|$, т.е. каждый эллипс из семейства эллипсов, описываемых уравнениями (3.16), имеет размеры a^* , b^* (3.17), зависящие от того, на какую высоту h по оси Oz поднят этот эллипс. При этом в соответствии с формулами (3.17) h может принимать любые значения от $-\infty$ до $+\infty$, а своего наименьшего значения полуоси a^* , b^* достигают при $h=0$.

В случае, когда $h=0$, получается эллипс, расположенный в координатной плоскости Oxy , имеющей уравнение $z=0$. Этот эллипс с наименьшими полуосями $a^*=a$ и $b^*=b$ называется *горловым*. Важно отметить (и учитывать при изображении на чертеже), что вершины этого горлового эллипса $(a, 0, 0)$ и $(-a, 0, 0)$ совпадают с вершинами гиперболы (3.15), лежащей в плоскости Oxz , в то время как его вершины $(0, b, 0)$ и $(0, -b, 0)$ служат вершинами гиперболы (3.14), лежащей в плоскости Oyz .

С увеличением абсолютной величины h полуоси a^* и b^* (3.17) возрастают, значит с увеличением $|h|$ размеры эллипсов из семейства эллипсов (3.16) неограниченно увеличиваются. Однако убедимся, что при всех значениях h вершины этих эллипсов $(a^*, 0, h)$ и $(-a^*, 0, h)$ находятся на гиперболе (3.15), лежащей в плоскости Oxz , а две другие вершины этих же эллипсов (3.16) $(0, b^*, h)$ и $(0, -b^*, h)$ располагаются на гиперболе (3.14), лежащей в плоскости Oyz , а это означает, что при изменении h вершины эллипсов (3.16) скользят по гиперболам (3.14), (3.15).

В самом деле, подставляя координаты $(a^*, 0, h)$ и $(-a^*, 0, h)$ вершин эллипсов (3.16) в уравнение гиперболы (3.15):

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0, \end{cases}$$

будем иметь

$$\begin{cases} \frac{(a^*)^2}{a^2} - \frac{h^2}{c^2} = \frac{a^2 \left(1 + \frac{h^2}{c^2}\right)}{a^2} - \frac{h^2}{c^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2} - \frac{h^2}{c^2} \equiv 1, \\ y = 0, \end{cases}$$

т.е. координаты указанных вершин эллипсов (3.16) действительно удовлетворяют уравнениям гиперболы (3.15) при любых значениях h .

Аналогично, подставляя координаты двух других вершин $(0, b^*, h)$ и $(0, -b^*, h)$ эллипсов (3.16) в уравнения гиперболы (3.14):

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0, \end{cases}$$

убедимся, что эти координаты действительно удовлетворяют уравнениям гиперболы (3.14) при любых значениях h :

$$\begin{cases} \frac{(b^*)^2}{b^2} - \frac{h^2}{c^2} = \frac{b^2 \left(1 + \frac{h^2}{c^2}\right)}{b^2} - \frac{h^2}{c^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2} - \frac{h^2}{c^2} \equiv 1, \\ x = 0. \end{cases}$$

Таким образом, при изменении h от $-\infty$ до $+\infty$ эллипс (3.16) описывает поверхность (3.13), и поэтому можно однополостный гиперболоид (3.13) рассматривать как неограниченную поверхность, образованную движущимся эллипсом (3.16), всегда располагающимся в плоскостях, параллельных плоскости Oxy , который при движении остаётся себе подобным и **концы осей которого скользят по гиперболам** (3.15), (3.14), лежащим в плоскостях Oxz и Oyz .

Выполненное исследование позволяет достаточно подробно изобразить однополостный гиперболоид (3.13) на рис. 8.

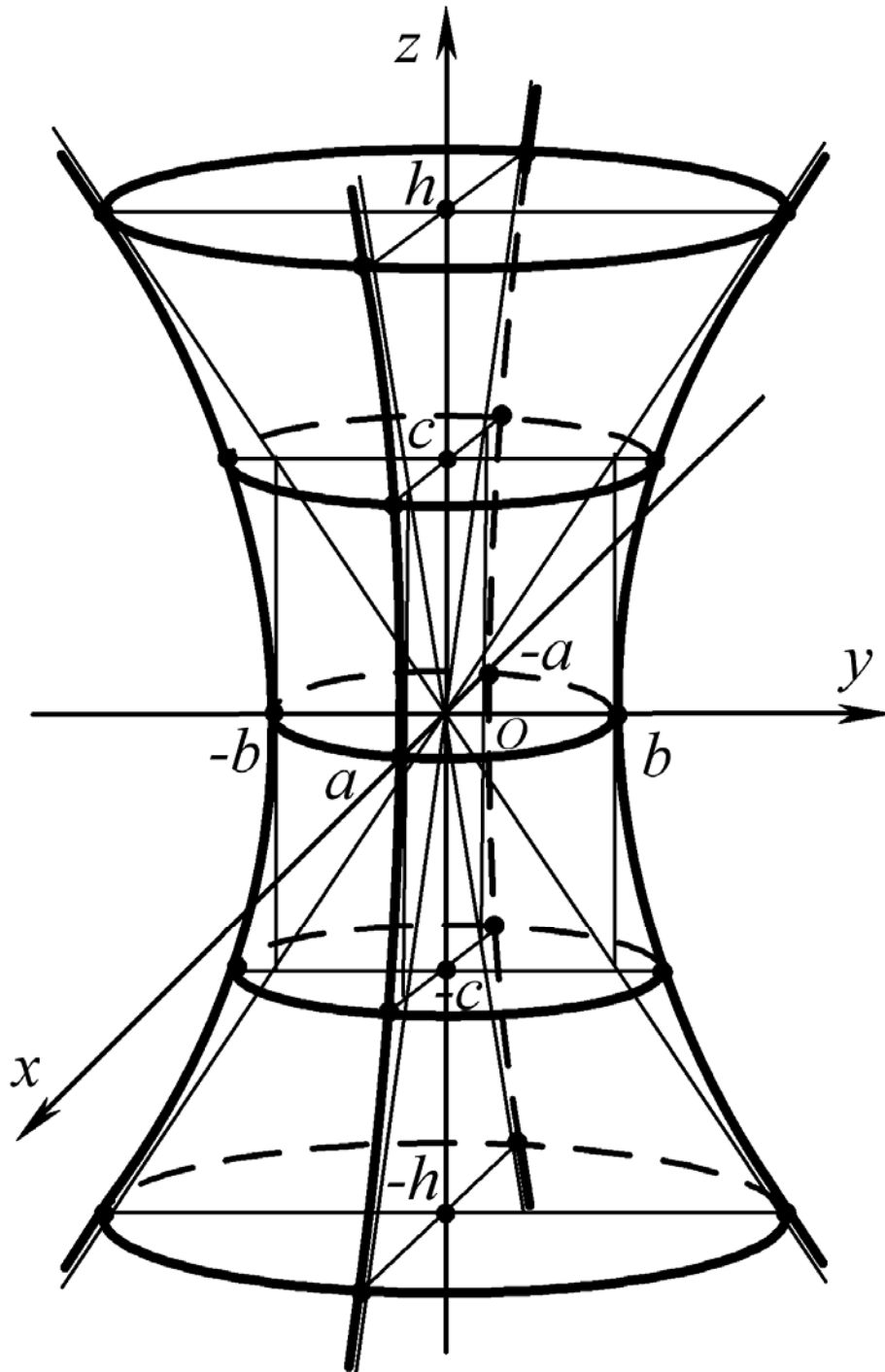


Рис. 8

З а м е ч а н и е 1. И з о б р а ж е н и е рассматриваемого однополостного гиперboloида (3.13) (впрочем, как и эллипсоида (3.1)) производилось в три этапа: во-первых, на рис. 6 была построена гипербола (3.14), являющаяся сечением изучаемой поверхности (3.13) плоскостью Oyz ; затем (в продолжение рис. 6) к уже имеющейся в координатной плоскости Oyz гиперболе (3.14) на рис. 7 была добавлена

ещё одна гипербола – гипербола (3.15), получающаяся в сечении однополостного гиперболоида (3.13) координатной плоскостью Oxz ; наконец, рассматриваемый однополостный гиперболоид (3.13) был окончательно изображен на рис. 8 в результате добавления к нанесенным на чертеж ранее (см. рис. 7) гиперболам (3.14) и (3.15) завершающих этот чертеж эллипсов (3.16), служащих сечениями изучаемой поверхности (3.13) плоскостями $z=h$, параллельными координатной плоскости Oxy и имеющих полуоси (3.17), увеличивающиеся с увеличением $|h|$.

Такое «поэтапное» (в три этапа) изображение рассматриваемой поверхности (3.13) осуществлялось исключительно из учебных соображений, чтобы **наиболее наглядно объяснить принцип построения поверхности 2-го порядка с помощью метода сечений** в данном случае на примере однополостного гиперболоида (3.13).

До конца поняв суть метода сечений и хорошо научившись рисовать поверхности 2-го порядка, можно в дальнейшем (по мере приобретения всей глубины понимания и необходимых навыков!) делать только один результирующий чертеж, где, конечно, *должны* быть изображены (как минимум) *три* основных сечения рассматриваемой поверхности 2-го порядка после предварительного детального исследования формы этой поверхности по её заданному уравнению **методом сечений**.

Если же не требуется вычерчивать однополостный гиперболоид (3.13) так точно и тщательно, как это сделано на рис. 8, а просто нужно представить себе его общий вид и показать (согласно приведённому исследованию), что *поверхность* (3.13) действительно *состоит из одной полости* и имеет форму, подобную трубке, неограниченно расширяющейся в положительном и отрицательном направлении по оси Oz , то этой цели может служить рис. 9.

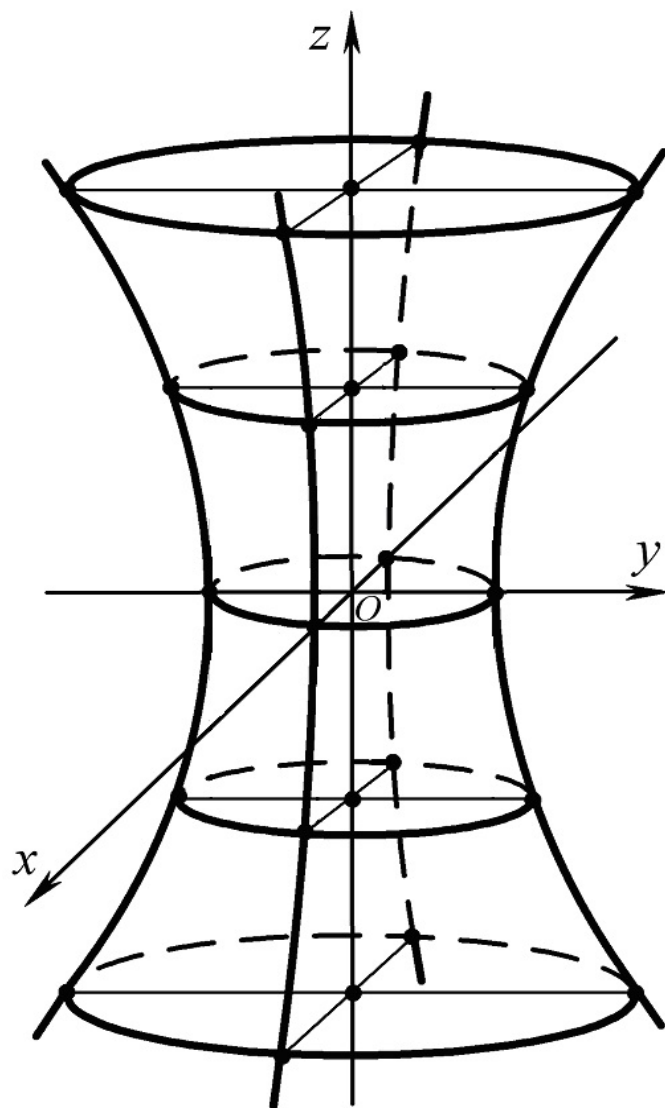


Рис. 9

З а м е ч а н и е 2. Уравнения

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (3.18)$$

и

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (3.19)$$

также определяют *однополостные гиперboloиды*. Эти уравнения того же типа, что и уравнение (3.13). В правой части все эти уравнения (3.13), (3.18), (3.19) содержат *единицу*, в левой части — только *квадраты* всех координат, причем два коэффициента положительны, один — отрицателен.

3.2.2. Двуполостный гиперboloид

Поверхность 2-го порядка, определяемая уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \quad (3.20)$$

называется *двуполостным гиперboloидом*, а числа a , b и c – его полуосями.

Двуполостный гиперboloид (также, как и эллипсоид (3.1) и однополостный гиперboloид (3.13)) обладает тремя взаимно перпендикулярными плоскостями симметрии, совпадающими с плоскостями координат Oyz ($x=0$), Oxz ($y=0$), Oxy ($z=0$), и имеет центр симметрии – начало координат, поскольку текущие координаты x , y и z входят в уравнение (3.20) только в чётных степенях.

Представление о форме двуполостного гиперboloида путём анализа его канонического уравнения (3.20) может быть получено с помощью **метода сечений**.

Сечение двуполостного гиперboloида (3.20) плоскостью Oyz (имеющей уравнение: $x=0$):

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \\ x = 0 \end{cases}$$

даёт гиперболу

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \\ x = 0, \end{cases} \quad (3.21)$$

лежащую в плоскости Oyz .

Чтобы изобразить гиперболу (3.21) на чертеже, построим прежде всего её основной прямоугольник. Откладывая от начала координат по оси Oy отрезки b и $(-b)$, а по оси Oz – отрезки c и $(-c)$, проведём через полученные точки $(0, b, 0)$ и $(0, -b, 0)$ прямые, параллельные

оси Oz (длиной c вверх и длиной c вниз от этих точек), а через точки $(0, 0, c)$ и $(0, 0, -c)$ прямые, параллельные оси Oy (длиной b в сторону положительного направления оси Oy и длиной b в сторону отрицательного направления оси Oy).

Через противоположные вершины построенного таким образом основного прямоугольника проведём асимптоты гиперболы (3.21) и найдём её точки пересечения с осями координат Oy и Oz .

Пересекая гиперболу (3.21) осью Oy , которая имеет уравнения

$$\begin{cases} x = 0, \\ z = 0, \end{cases}$$

получаем

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \\ x = 0, \\ z = 0 \end{cases}$$

или

$$\frac{y^2}{b^2} = -1, \quad y^2 = -b^2, \quad y = \pm b\sqrt{-1},$$

т.е. **ось Oy** не имеет точек пересечения с данной гиперболой (3.21) и **является для неё мнимой осью**.

Точки пересечения гиперболой (3.21) оси Oz , уравнения которой

$$\begin{cases} x = 0, \\ z = 0, \end{cases}$$

найдем, рассматривая совместно

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \\ x = 0, \\ y = 0, \end{cases}$$

откуда

$$-\frac{z^2}{c^2} = -1 \quad \text{или} \quad z^2 = c^2, \quad \text{или} \quad z = \pm c,$$

и, следовательно, точки $(0, 0, c)$ и $(0, 0, -c)$ являются вершинами гиперболы (3.21). Теперь можно выполнить чертёж этой гиперболы, расположенной в плоскости Oyz (рис. 10).

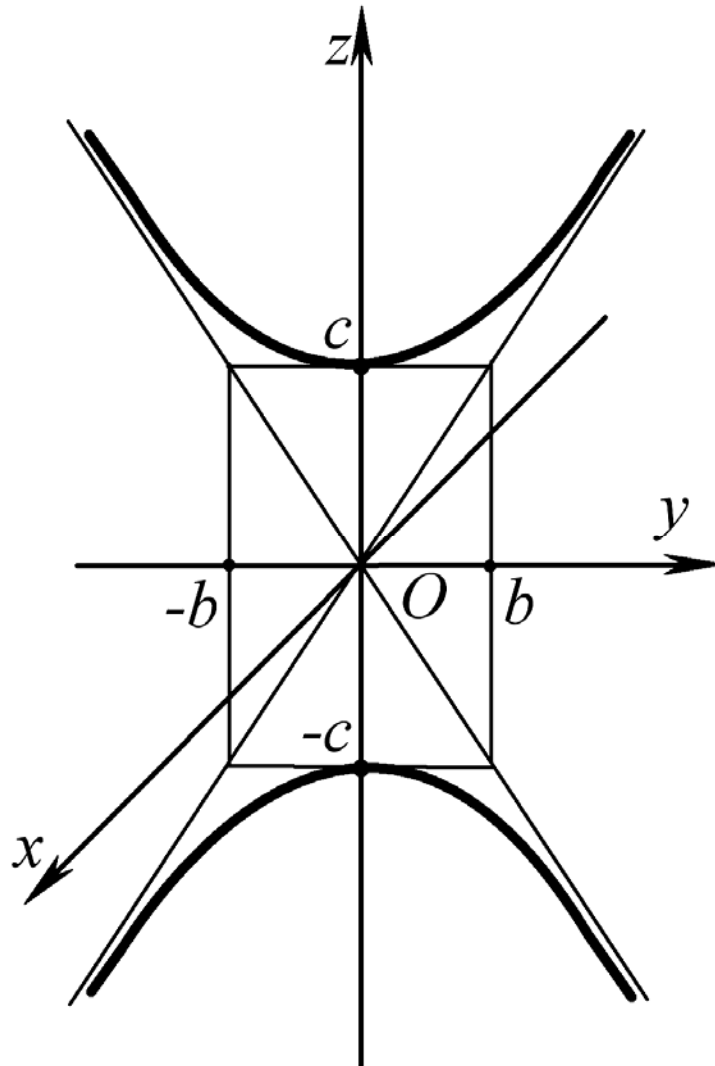


Рис. 10

Заметим, что *основной прямоугольник* для гиперболы (3.21), лежащей в сечении *двуполостного гиперboloида* (3.20) координатной плоскостью Oyz , *подобен основному прямоугольнику* для гиперболы (3.14), являющейся сечением *одноплостного гиперboloида* (3.13) плоскостью Oyz , однако **вершинами** этих гипербол служат **разные точки** (а именно: точки $(0, b, 0)$ и $(0, -b, 0)$, лежащие на оси Oy , для гиперболы (3.14) и точки $(0, 0, c)$ и $(0, 0, -c)$, лежащие на оси Oz , для гиперболы

(3.21), и потому эти гиперболы (3.14) и (3.21) будут сопряжёнными друг с другом, что собственно и отражают рис. 6 и рис. 10.

При пересечении двуполостного гиперboloида (3.20) координатной плоскостью Oxz ($y = 0$):

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \\ y = 0, \end{cases}$$

получится также гипербола

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \\ y = 0, \end{cases} \quad (3.22)$$

только лежащая уже в плоскости Oxz .

Основной прямоугольник для гиперболы (3.22) будем строить, откладывая от начала координат по оси Ox отрезки a и $(-a)$ соответственно, и через полученные точки $(a, 0, 0)$ и $(-a, 0, 0)$ проведём прямые, параллельные оси Oz длиной c вверх и длиной c вниз от этих точек.

Прямая, соединяющая точки $(a, 0, c)$ и $(-a, 0, c)$, будет параллельна оси Ox и пройдёт через имеющуюся уже на чертеже (при построении основного прямоугольника для гиперболы (3.21)) точку $(0, 0, c)$. И завершит построение основного прямоугольника для данной гиперболы прямая, соединяющая точки $(a, 0, -c)$ и $(-a, 0, -c)$, которая пройдёт параллельно оси Ox через нанесённую на чертёж ранее точку $(0, 0, -c)$.

Проведя далее через противоположные вершины полученного таким образом основного прямоугольника («развёрнутого» вдоль оси Ox) асимптоты гиперболы (3.22), будем искать её точки пересечения сначала с осью Ox :

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \\ y = 0, \\ z = 0, \end{cases}$$

(откуда $\frac{x^2}{a^2} = -1$, т.е. $x^2 = -a^2$ и $x = \pm \sqrt{-a^2} = \pm a\sqrt{-1}$),

а затем с осью Oz :

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \\ x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

Из этих последних соотношений вытекает:

$$-\frac{z^2}{c^2} = -1, \quad \text{откуда} \quad z^2 = c^2 \quad \text{и} \quad z = \pm c,$$

следовательно, гипербола (3.22) пересекает ось Oz в точках $(0, 0, c)$ и $(0, 0, -c)$, и эти точки будут вершинами рассматриваемой гиперболы. Изобразим эту гиперболу (3.22) на чертеже (рис. 11).

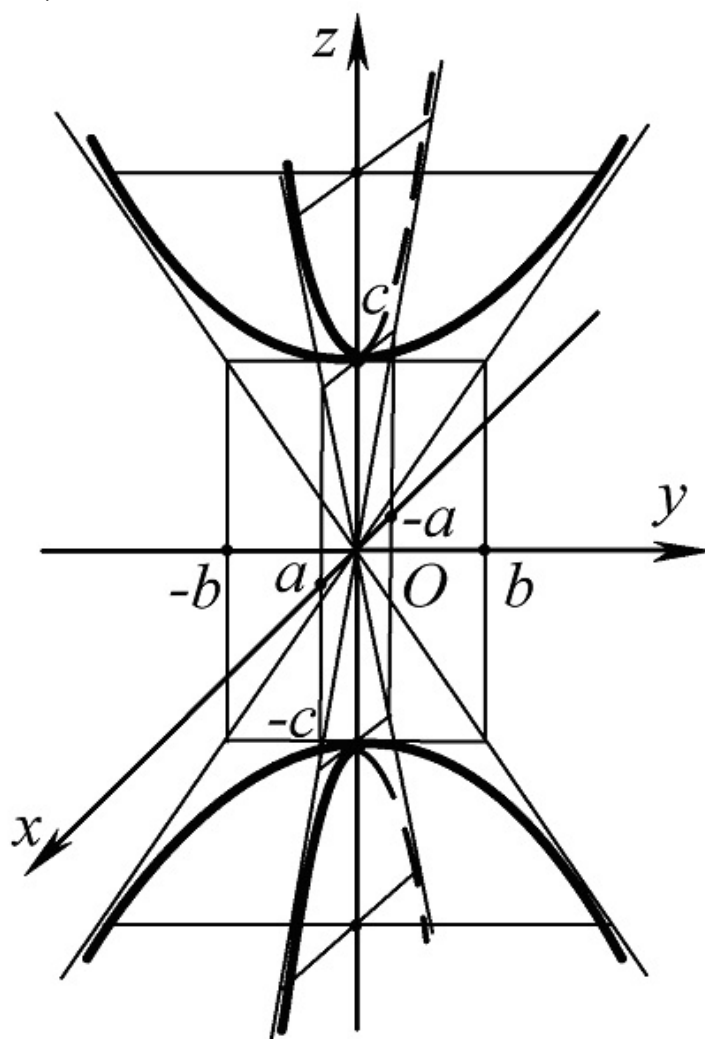


Рис. 11

З а м е ч а н и е. Сравнивая гиперболы (3.15) и (3.22), лежащие в сечении координатной плоскостью Oxz ($y=0$) соответственно однополостного (3.13) и двуполостного (3.20) гиперболоидов, заключаем, что эти гиперболы (3.15) и (3.22) также будут сопряжёнными и по отношению друг к другу и поэтому расположены именно так, как показано на рис. 7 и рис. 11.

Теперь рассмотрим сечения данного двуполостного гиперболоида (3.20) плоскостями $z=h$, параллельными координатной плоскости Oxy . Линия пересечения двуполостного гиперболоида (3.20) каждой такой плоскостью вида $z=h$ определяется двумя уравнениями

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \\ z = h \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1, \\ z = h. \end{cases} \quad (3.23)$$

Проанализируем уравнения (3.23):

• Если $|h| < c$, то $\frac{h^2}{c^2} - 1 < 0$, но выражение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ не

может быть отрицательным ни при каких действительных значениях x и y .

Это значит, что *точек пересечения* данной поверхности (3.20) с плоскостями $z=h$ в этом случае *не существует*. Иными словами, плоскости $z=h$ при $|h| < c$ не пересекают двуполостный гиперболоид (3.20).

• Если $|h| > c$, то $\frac{h^2}{c^2} - 1 > 0$, и уравнения (3.23) можно

переписать в виде

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2\left(\frac{h^2}{c^2}-1\right)} + \frac{y^2}{b^2\left(\frac{h^2}{c^2}-1\right)} = 1, \\ z = h. \end{cases}$$

Следовательно, плоскость $z = h$ при $|h| > c$ пересекает двуполостный гиперболоид (3.20) по эллипсу

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^{*2}} + \frac{y^2}{b^{*2}} = 1, \\ z = h, \end{cases} \quad (3.24)$$

с полуосями

$$\begin{aligned} a^* &= a \sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}, \\ b^* &= b \sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}, \end{aligned} \quad (3.25)$$

возрастающими с возрастанием $|h|$, причём, если $|h|$ возрастает бесконечно, то a^* и b^* (3.25) *возрастают* также *бесконечно*. Если же $|h| > c$, убывая, приближается к c , то a^* и b^* (3.25) также убывают и приближаются к нулю.

• Если $|h| = c$, т.е. $h = \pm c$, то из (3.23) получаем

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0,$$

и потому линии пересечения (3.23) двуполостного гиперболоида (3.20) с плоскостями $z = c$ и $z = -c$ вырождаются в две точки $(0, 0, c)$ и $(0, 0, -c)$, иначе говоря, плоскости $z = c$ и $z = -c$ касаются двуполостного гиперболоида (3.20).

Таким образом, **метод сечений** позволяет изобразить двуполостный гиперболоид (3.20), рассматривая его как *неограниченную* поверхность, образованную движущимся (в соответствии с возрастанием $|h|$ от c до $+\infty$) эллипсом (3.24) (с увеличивающимися при этом

полуосями (3.25)), который при движении остаётся себе подобным и всё время располагается в плоскости $z = h$, параллельной координатной плоскости Oxy . Вершины же всех этих эллипсов, т.е. концы их осей, при изменении h скользят по гиперболам (3.21) и (3.22), лежащим в координатных плоскостях Oyz и Oxz . Выполним окончательный чертёж (рис. 12).

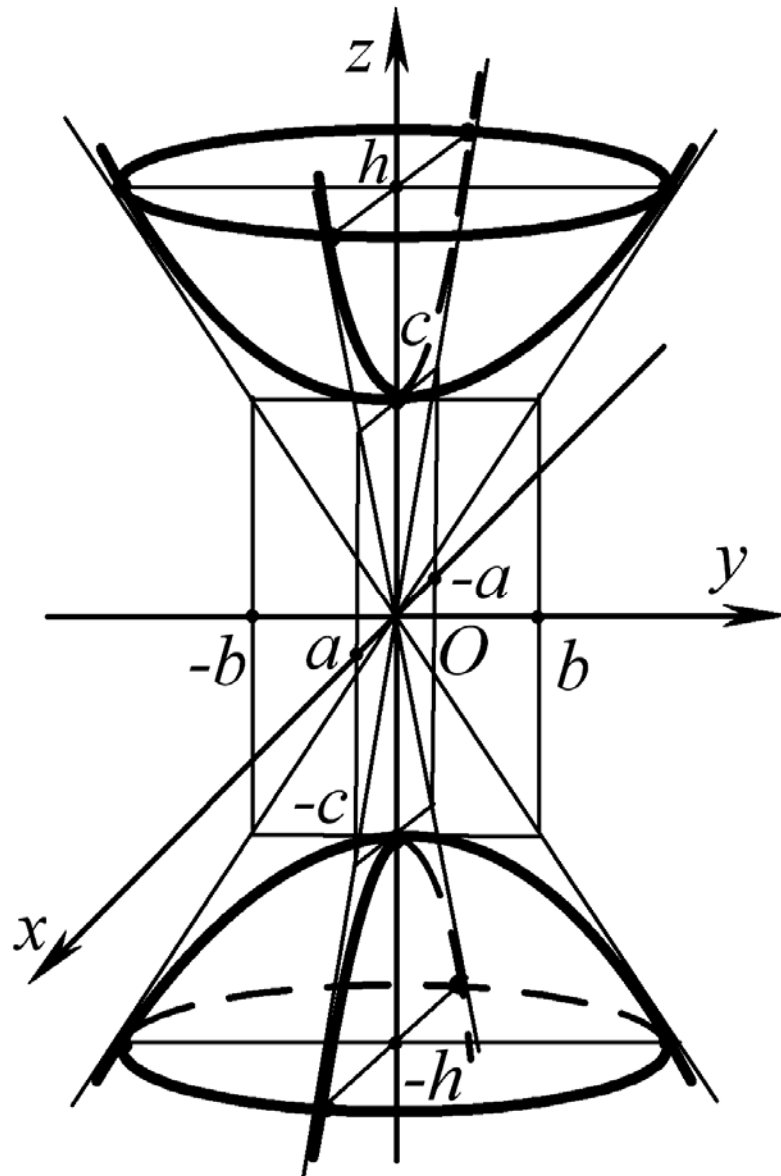


Рис. 12

Двуполостный гиперболоид состоит из двух отдельных частей («полостей» – отсюда его название); каждая из них имеет вид бесконечной выпуклой чаши.

Общий вид двуполостного гиперболоида (без вспомогательных линий) показан на рис. 12а.

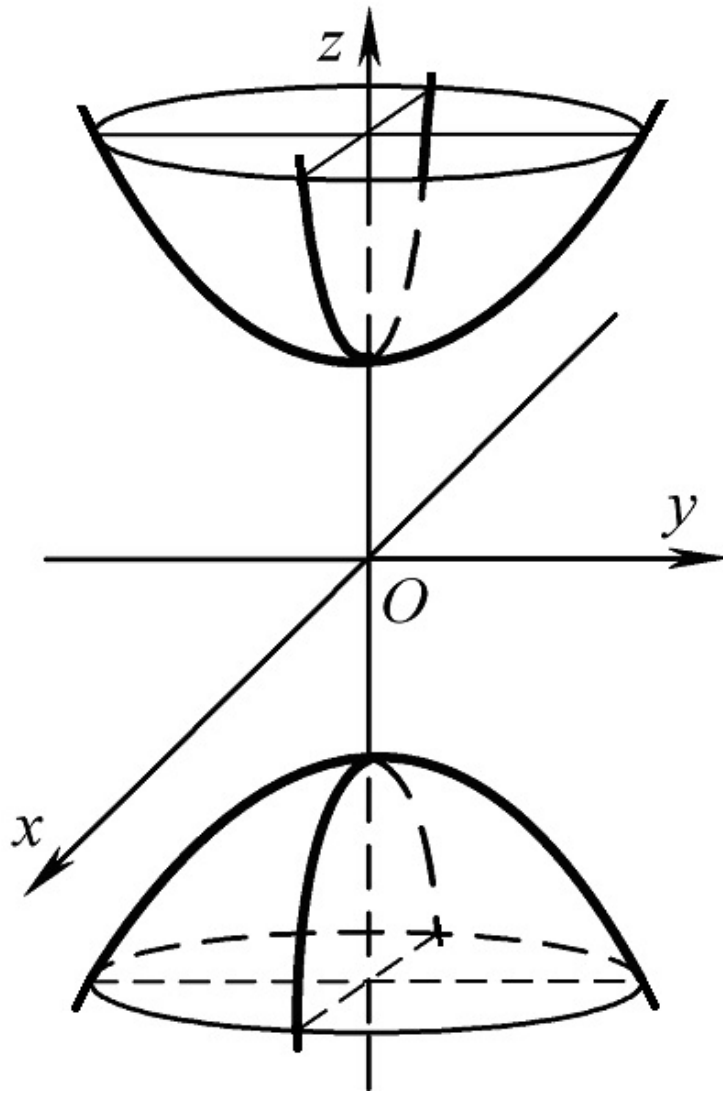


Рис. 12а

З а м е ч а н и е. Уравнения

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad (3.26)$$

и

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad (3.27)$$

также являются уравнениями *двуполостных гиперboloидов*. Э т и уравнения, как и уравнение (3.20), в правой части содержат *отрицательную единицу*, в левой части – два коэффициента положительных и один отрицательный коэффициент *при квадратах* координат.

3.2.3. Конус второго порядка

Поверхность 2-го порядка, определяемая уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \quad (3.28)$$

называется **конусом второго порядка**, а числа a , b и c – его полуосями.

Уравнение (3.28) содержит только **квадраты** переменных, поэтому данная поверхность *симметрична* относительно координатных плоскостей Oxy ($z=0$), Oxz ($y=0$), Oyz ($x=0$) и начала координат.

Представление о форме конуса получим **методом сечений**.

Пересекая конус второго порядка (3.28) координатной плоскостью Oyz :

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \\ x = 0, \end{cases}$$

будем иметь в сечении линию

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \\ x = 0, \end{cases} \quad (3.29)$$

или

$$\begin{cases} \left(\frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right) = 0, \\ x = 0, \end{cases}$$

т.е. уравнение $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ равносильно системе двух уравнений

$$\frac{y}{b} - \frac{z}{c} = 0, \quad \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0.$$

Это означает, что конус (3.28) пересекается с плоскостью Oyz по двум прямым

$$\begin{cases} \frac{y}{b} - \frac{z}{c} = 0, \\ x = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0, \\ x = 0, \end{cases} \quad (3.30)$$

лежащим в плоскости Oyz и проходящим через начало координат.

Чтобы построить эти прямые на чертеже, нужно найти ещё по одной точке, принадлежащей каждой из этих прямых. Перепишем с этой целью уравнения (3.30) в виде

$$\begin{cases} z = \frac{c}{b}y, \\ x = 0, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} z = -\frac{c}{b}y, \\ x = 0, \end{cases}$$

откуда сразу следует, что первая из этих прямых проходит через точку с координатами $(0, b, c)$, а вторая – с координатами $(0, -b, c)$.

Изобразим эти прямые на рис. 13.

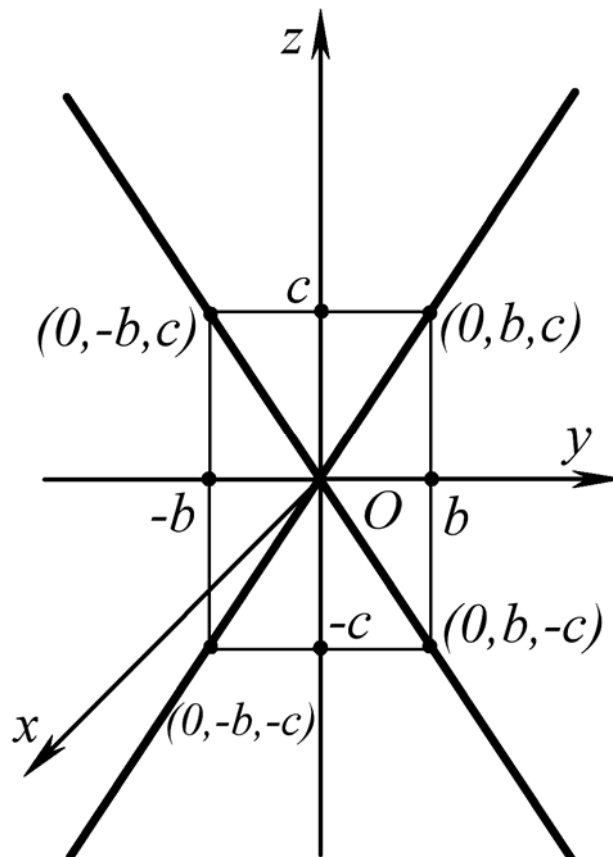


Рис. 13

Аналогично, при пересечении конуса второго порядка (3.28) координатной плоскостью Oxz , имеющей уравнение $y = 0$,

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \\ y = 0, \end{cases}$$

получим в сечении линию

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \\ y = 0, \end{cases} \quad (3.31)$$

представляющую собой две пересекающиеся в начале координат прямые

$$\begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0, \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0, \\ y = 0, \end{cases} \quad (3.32)$$

лежащие в плоскости Oxz и проходящие согласно

$$\begin{cases} z = \frac{c}{a}x, \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} z = -\frac{c}{a}x, \\ y = 0, \end{cases}$$

соответственно через точки с координатами $(a, 0, c)$ и $(-a, 0, c)$.

Продолжим рис. 13, добавив к изображенным ранее прямым (3.30), лежащим в плоскости Oyz , прямые (3.32), проходящие через начало координат и точки $(a, 0, c)$ и $(-a, 0, c)$ (рис. 14).

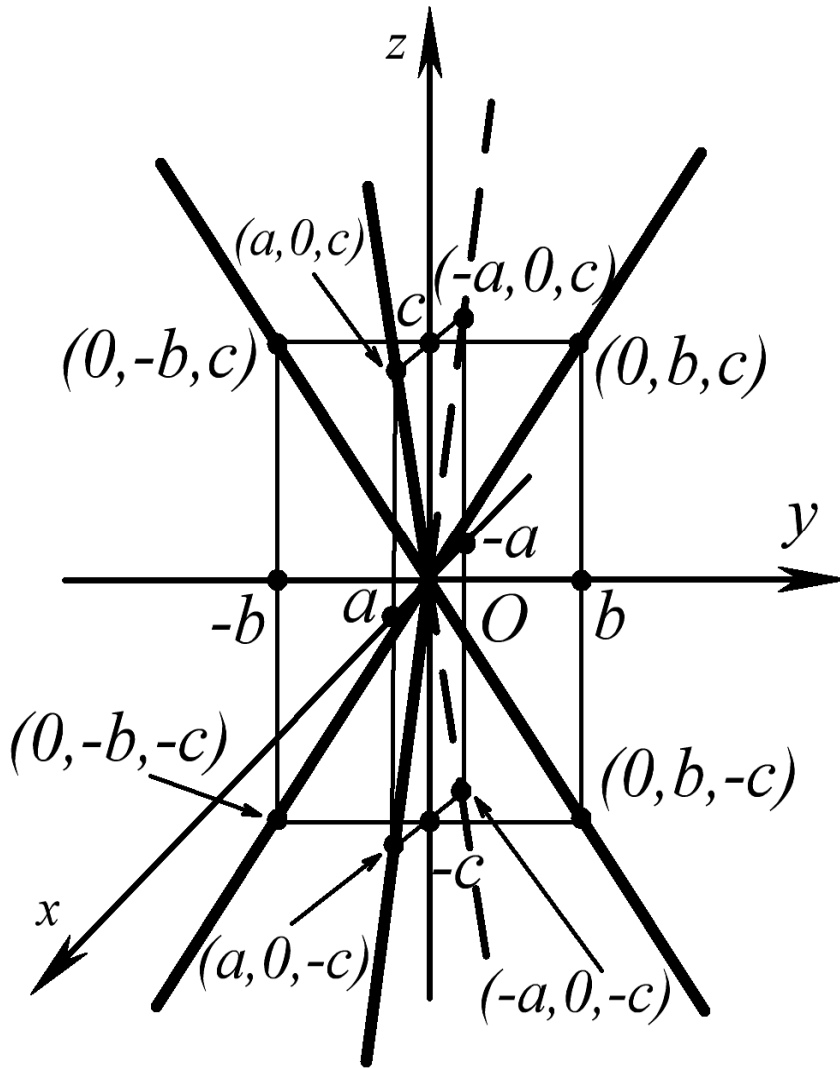


Рис. 14

Сечения конуса второго порядка (3.28) плоскостями $z=h$, параллельными координатной плоскости Oxy , определяются двумя уравнениями

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \\ z = h \end{cases}$$

ИЛИ

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2}, \\ z = h, \end{cases}$$

и представляют собой семейство эллипсов

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^{*2}} + \frac{y^2}{b^{*2}} = 1, \\ z = h \end{cases} \quad (3.33)$$

с полуосями

$$a^* = \frac{ah}{c}, \quad b^* = \frac{bh}{c}, \quad (3.34)$$

зависящими от высоты h по оси Oz , на которую поднят соответствующий эллипс.

Анализируя формулы (3.34), легко видеть:

- h может принимать любые значения от $-\infty$ до $+\infty$.
- Наименьшего значение полуоси a^* и b^* (3.34) достигают, когда $h=0$. В этом случае $a^*=0$ и $b^*=0$, следовательно, при $h=0$ соответствующий эллипс (3.33) вырождается в точку $O(0, 0, 0)$, называемую *вершиной* конуса (3.28).
- С увеличением абсолютной величины h полуоси a^* , b^* (3.34) **возрастают**. В частности, при $|h|=c$ $a^*=a$, $b^*=b$, а это означает, что вершины эллипса, расположенного на высоте $z=c$ (аналогично для $z=-c$), имеют координаты $(a, 0, c)$ и $(-a, 0, c)$, совпадающие с координатами точек, через которые проходят прямые (3.31), лежащие в плоскости Oxz , а также две другие вершины этого эллипса имеют координаты $(0, b, c)$ и $(0, -b, c)$, совпадающие с координатами точек, через которые проходят прямые (3.30), лежащие в плоскости Oyz (см. рис. 14).

Итак, конус второго порядка (3.28) имеет вершину в начале координат, осью этого конуса служит ось Oz , а за его направляющую кривую может быть взят эллипс с полуосями a и b , плоскость которого перпендикулярна оси Oz и находится на расстоянии c от начала координат (рис. 15).

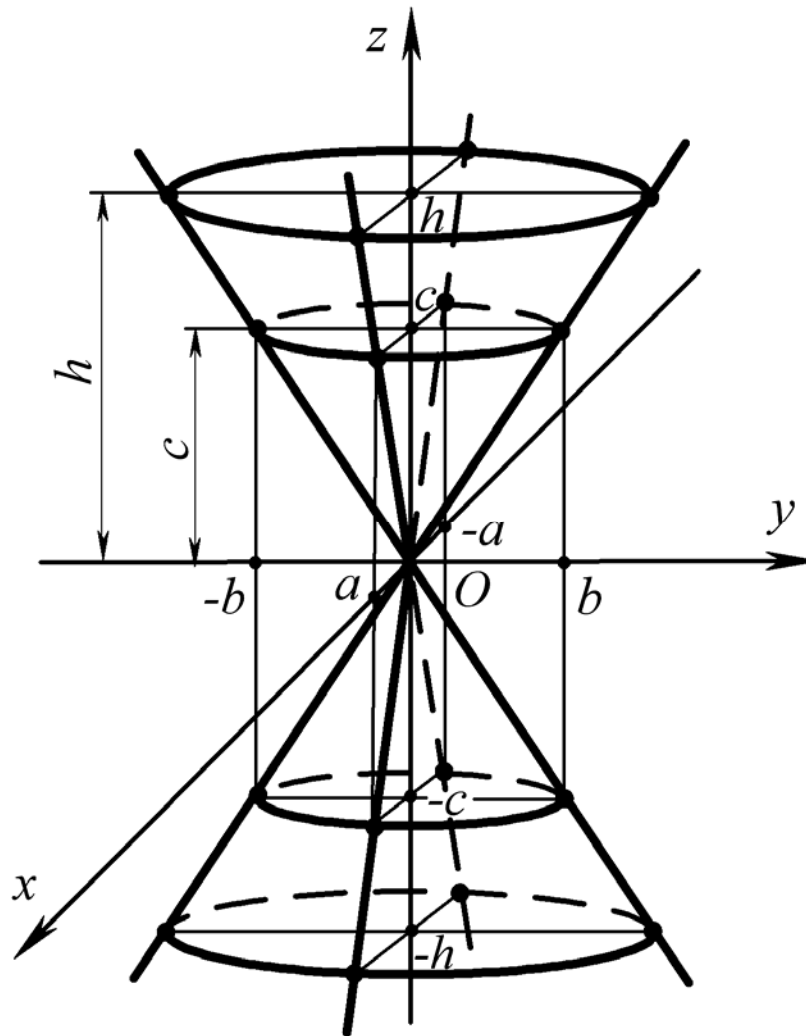


Рис. 15

Общий вид конуса второго порядка (без вспомогательных линий) показан на рис. 15а.

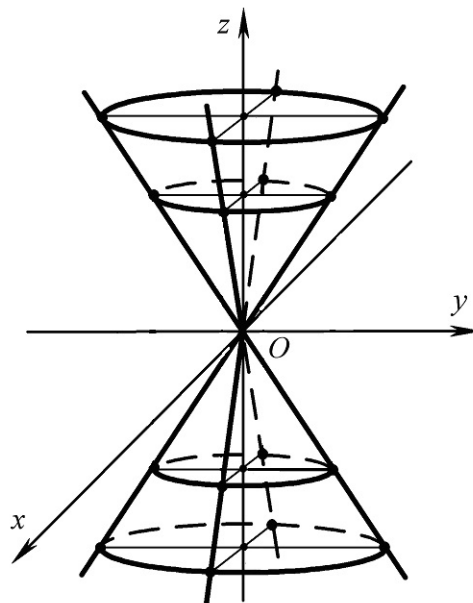


Рис. 15а

В заключение о т м е т и м, что в общем случае **конической поверхностью S** называется поверхность, описываемая прямой l , проходящей через данную точку – **вершину конуса S** – и пересекающей данную линию L – **направляющую конуса S** . Каждая из прямых l , составляющих коническую поверхность, называется **образующей** конуса S .

У с т а н о в и м, что действительно рассматриваемый конус второго порядка (3.28) образован прямыми линиями l , проходящими через начало координат $O(0, 0, 0)$ – вершину конуса.

Для доказательства этого утверждения достаточно показать, что **прямая l** , соединяющая произвольную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, лежащую на конусе (3.28), и начало координат $O(0,0,0)$, **целиком располагается на конусе** (рис. 16), т.е. что координаты (x, y, z) любой точки M прямой l удовлетворяют уравнению (3.28).

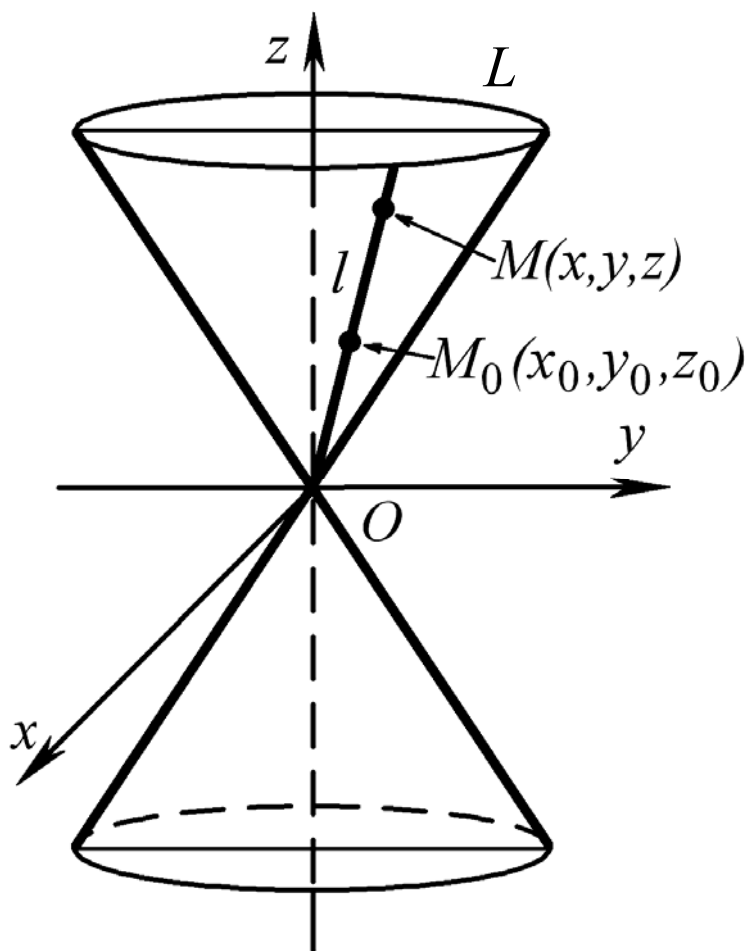


Рис. 16

Так как точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ лежит на конусе второго порядка (3.28), то

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2} = 0. \quad (3.35)$$

Составим уравнение прямой l , проходящей через точки $O(0; 0; 0)$ и $M_0(x_0; y_0; z_0)$:

$$\frac{x-0}{x_0-0} = \frac{y-0}{y_0-0} = \frac{z-0}{z_0-0} \quad \text{или} \quad \frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0} = \frac{z}{z_0}.$$

Введем параметр t , полагая $\frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0} = \frac{z}{z_0} = t$, и запишем

уравнение прямой l , проходящей через начало координат и точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$, в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = tx_0, \\ y = ty_0, \\ z = tz_0. \end{cases} \quad (3.36)$$

Подставляя эти значения (3.36) для x, y, z (т.е. координаты (x, y, z) любой точки M образующей l) в левую часть уравнения конуса (3.28), вынося затем t^2 за скобки и учитывая (3.35), будем иметь

$$\frac{(tx_0)^2}{a^2} + \frac{(ty_0)^2}{b^2} - \frac{(tz_0)^2}{c^2} = t^2 \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2} \right) = 0.$$

Итак, если некоторая точка M_0 (отличная от начала координат) лежит на поверхности S конуса второго порядка (3.28), то все точки $M(x, y, z)$ прямой l , которая проходит через начало координат и точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, также лежат на этой конической поверхности (3.28.)

Геометрическая особенность конуса второго порядка (3.28), заключающаяся в том, что он состоит из прямых, проходящих через одну точку (начало координат), объясняется особенностью самого уравнения (3.28), а именно – однородностью этого уравнения относительно координат x , y и z (т.е. все его члены имеют одну и ту же степень, равную двум, в то время как правая часть уравнения (3.28) равна нулю).

Замечание. Если знаки коэффициентов при квадратах координат распределены иначе, чем в рассматриваемом уравнении (3.28), то аналогично уравнения

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad (3.37)$$

и

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad (3.38)$$

являются уравнениями конусов второго порядка с вершиной в начале координат, осями которых служат соответственно оси Oy и Ox .

3.3. Поверхности параболического типа

3.3.1. Эллиптический параболоид

Поверхность 2-го порядка, определяемая уравнением

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \quad \text{где } p > 0, q > 0, \quad (3.39)$$

называется **эллиптическим параболоидом**.

Уравнение (3.39) содержит только квадраты координат x и y , следовательно, плоскости Oxz и Oyz являются **плоскостями симметрии** для рассматриваемого эллиптического параболоида, а **ось Oz** , представляющая собой линию пересечения этих плоскостей, называется **осью эллиптического параболоида**.

Из уравнения (3.39) вытекает, что эллиптический параболоид расположен в полупространстве $z \geq 0$.

Исследуем эту поверхность **методом сечений**.

Пересекая эллиптический параболоид (3.39) координатной плоскостью Oyz , имеющей уравнение $x = 0$,

$$\begin{cases} \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \\ x = 0, \end{cases}$$

получим в сечении **параболу**:

$$\begin{cases} y^2 = 2qz, \\ x = 0 \end{cases} \quad (3.40)$$

с вершиной в начале координат, для которой **ось Oz** является **осью симметрии** и которая расположена в **положительном направлении** оси Oz ; параметр этой параболы равен q .

Для построения параболы (3.40) используем **точки**: $O(0,0,0)$, $M_1(0,-2q,2q)$ и $M_2(0,+2q,2q)$, $P_1(0,-4q,8q)$ и $P_2(0,+4q,8q)$, **через которые она проходит согласно уравнениям** (3.40).

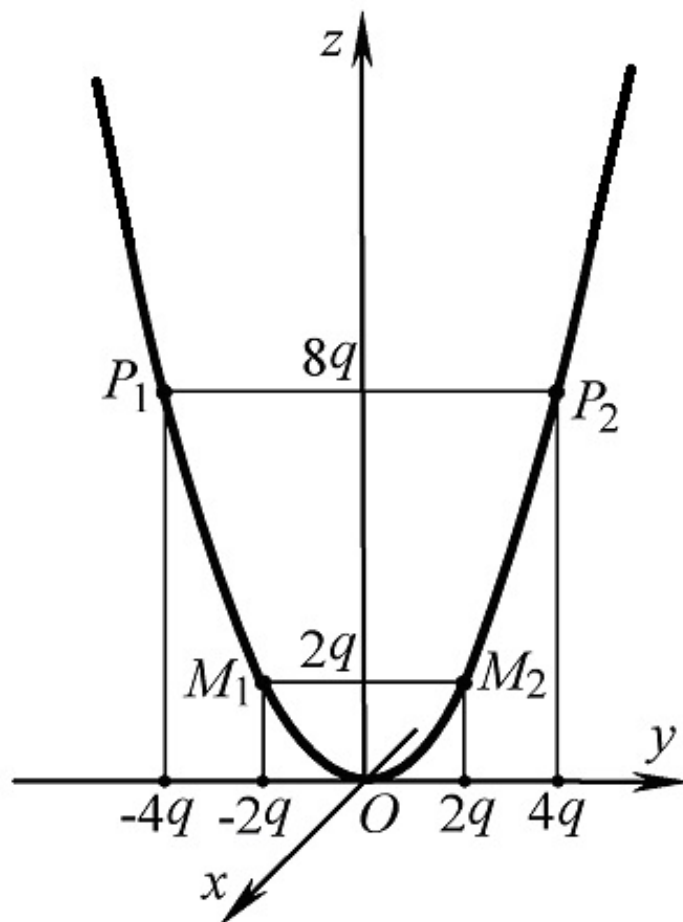


Рис. 17

Рассмотрим теперь сечение эллиптического параболоида (3.39) координатной плоскостью Oxz :

$$\begin{cases} \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \\ y = 0, \end{cases}$$

будем иметь в сечении снова параболу

$$\begin{cases} x^2 = 2pz, \\ y = 0, \end{cases} \quad (3.41)$$

проходящую через начало координат, но лежащую в плоскости Oxz и имеющую параметр p . Эта параболa также симметрична относительно оси Oz и расположена в положительном направлении оси Oz .

Для построения параболы (3.41) также найдём точки (назовём их M_3 , M_4 и P_3 , P_4 соответственно), через которые проходит эта параболa согласно уравнениям (3.41).

С этой целью придадим z те же самые значения, что и при построении точек M_1, M_2 и P_1, P_2 , т.е. $z_1 = 2q$ и $z_2 = 8q$ и подставим эти значения z_1 и z_2 в уравнения (3.41). Пусть $z = 2q$, тогда $x^2 = 2p2q$, откуда $x = \pm 2\sqrt{pq}$. Аналогично, полагая в уравнениях (3.41) $z = 8q$, находим $x^2 = 2p8q$, откуда $x = \pm 4\sqrt{pq}$.

Итак, будем иметь

$$M_3 (2\sqrt{pq}, 0, 2q), \quad M_4 (-2\sqrt{pq}, 0, 2q),$$

$$P_3 (4\sqrt{pq}, 0, 8q), \quad P_4 (-4\sqrt{pq}, 0, 8q).$$

Повторим рис. 17 и нанесём на этот чертёж точки M_3, M_4, P_3, P_4 . Далее проведём через эти точки и начало координат $O(0,0,0)$ п а р а б о л у, отвечающую уравнениям (3.41) и расположенную в плоскости Oxz (рис. 18).

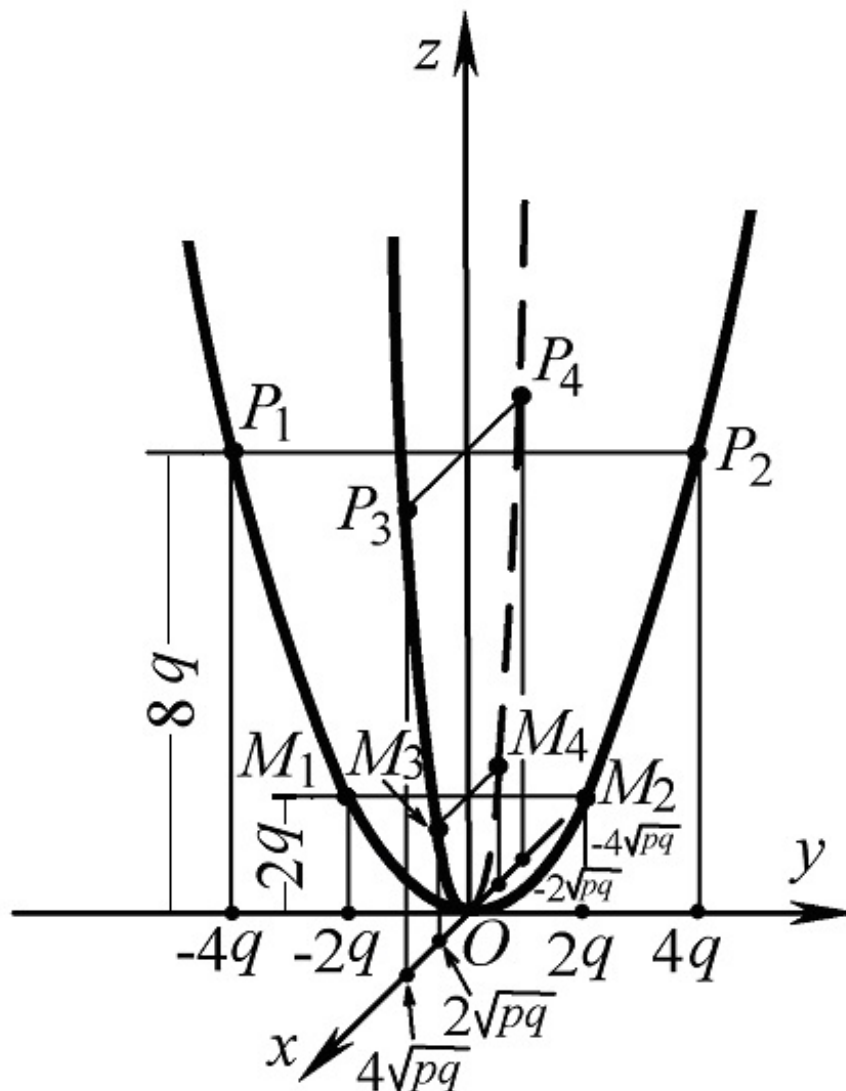


Рис. 18

Теперь рассмотрим сечения данного параболоида (3.39) плоскостями, параллельными координатной плоскости Oxy .

Каждая из таких плоскостей определяется уравнением типа $z = h$ (где для эллиптического параболоида $h \geq 0$), а линии пересечения эллиптического параболоида (3.39) плоскостями $z = h$, $h \geq 0$ представляют собой эллипсы, уравнения которых

$$\begin{cases} \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \\ z = h \end{cases} \quad (3.42)$$

или

$$\begin{cases} \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2h, \\ z = h, \end{cases}$$

т.е. эллипсы

$$\begin{cases} \frac{x^2}{2ph} + \frac{y^2}{2qh} = 1, \\ z = h, \end{cases} \quad (3.43)$$

определяемые уравнениями

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^{*2}} + \frac{y^2}{b^{*2}} = 1, \\ z = h, \end{cases} \quad (3.44)$$

где

$$a^* = \sqrt{2ph}, \quad b^* = \sqrt{2qh}. \quad (3.45)$$

Из формул (3.45) для a^* и b^* следует:

- при возрастании h величины a^* и b^* возрастают;
- если h возрастает бесконечно, то a^* и b^* возрастают также бесконечно;
- если h , убывая, приближается к нулю, то a^* и b^* также приближаются к нулю; при $h = 0$ имеем $a^* = 0$ и $b^* = 0$. Это означает, что эллипс, образуемый сечением параболоида (3.39) плоскостью $z = 0$, вырождается в точку; иначе говоря,

плоскость $z=0$ касается данного эллиптического параболоида;

- при $h < 0$ уравнения (3.43) определяют *мнимый эллипс*; это означает, что плоскость $z=h$ при $h < 0$ с данным параболоидом не пересекается совсем.

Докажем в заключение, что вершины эллипсов (3.44) с полуосями (3.45) при изменении h скользят по параболам (3.40), (3.41). Действительно, полагая $h = 2q$ в формулы (3.43), (3.45), будем иметь эллипс

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4pq} + \frac{y^2}{4q^2} = 1, \\ z = 2q \end{cases}$$

с полуосями

$$a^* = 2\sqrt{pq}, \quad b^* = 2q,$$

который, как легко видеть, как раз на высоте $h = 2q$ проходит через точки:

$$\begin{aligned} M_1(0, -2q, 2q), & \quad M_2(0, 2q, 2q), \\ M_3(2\sqrt{pq}, 0, 2q), & \quad M_4(-2\sqrt{pq}, 0, 2q). \end{aligned}$$

Аналогично, полагая $h = 8q$ в формулы (3.43), (3.45), получим эллипс

$$\begin{cases} \frac{x^2}{16pq} + \frac{y^2}{16q^2} = 1, \\ h = 8q \end{cases}$$

с полуосями

$$a^* = 4\sqrt{pq}, \quad b^* = 4q,$$

проходящий на высоте $h = 8q$ как раз через точки:

$$\begin{aligned} P_1(0, -4q, 8q), & \quad P_2(0, 4q, 8q), \\ P_3(4\sqrt{pq}, 0, 8q), & \quad P_4(-4\sqrt{pq}, 0, 8q). \end{aligned}$$

Таким образом, из формул (3.45) для a^* и b^* следует, что при увеличении h от 0 до $+\infty$ эллипсы (3.44) неограниченно увеличиваются, так что эллиптический параболоид имеет вид бесконечной выпуклой чаши.

Эллиптический параболоид можно рассматривать как поверхность, образованную движущимся эллипсом (3.43), который остаётся себе подобным и концы осей которого скользят по параболам (3.40), (3.41) (рис. 19); при этом плоскость эллипса (3.44) при движении остаётся параллельной плоскости Oxy (рис. 19).

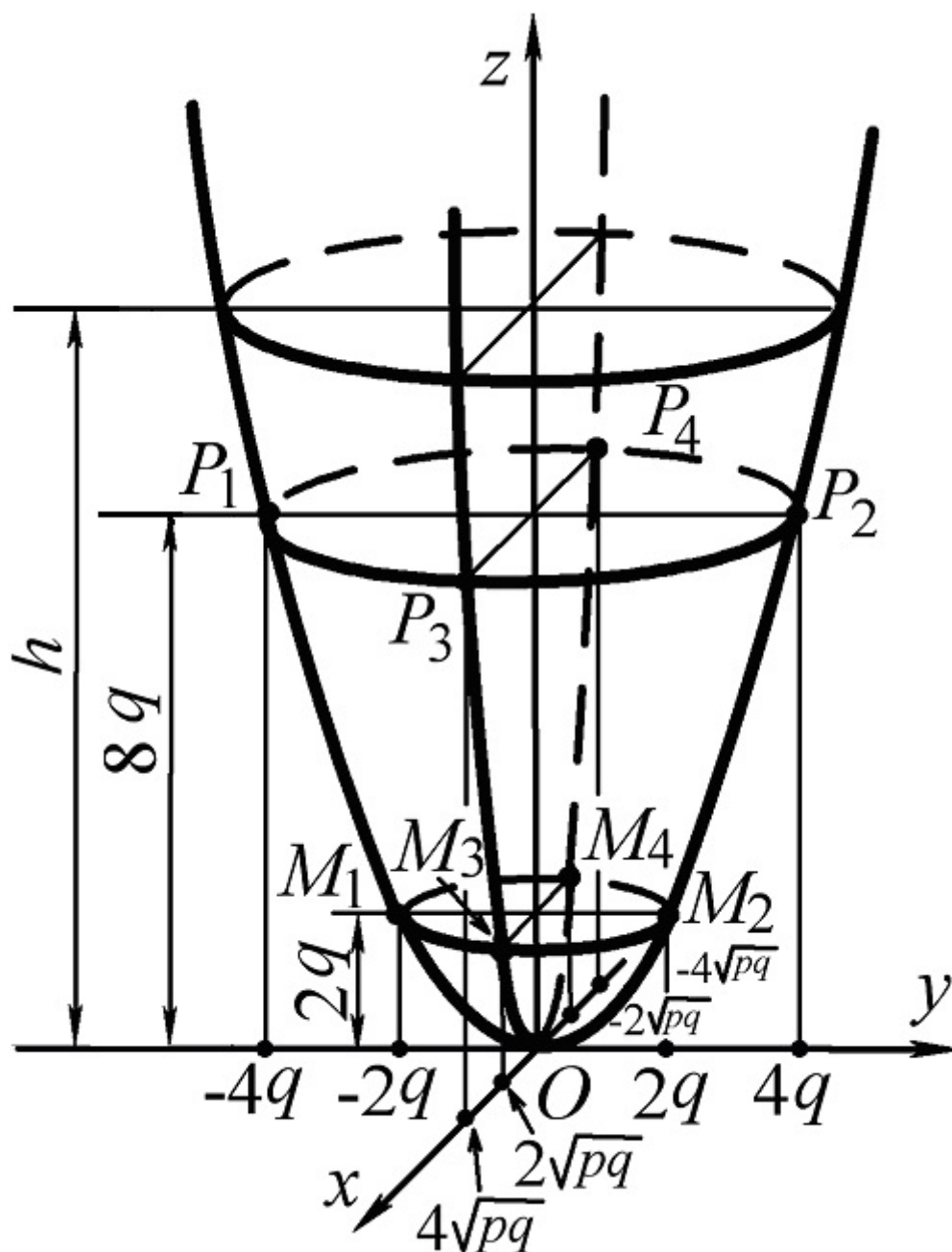


Рис. 19

Общий вид эллиптического параболоида показан на рис. 19а.

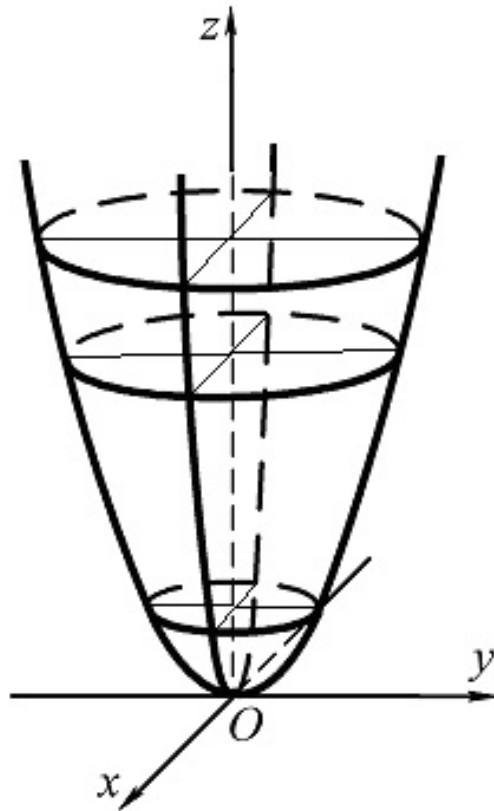


Рис. 19а

Заметим, что в случае $p = q$ уравнения (3.42) определяют окружность с центром на оси Oz .

Отсюда следует, что при $p = q$ эллиптический параболоид (3.39) можно рассматривать как поверхность, образованную вращением параболы $y^2 = 2pz$ вокруг её оси Oz , т.е. при $p = q$ уравнение

$$x^2 + y^2 = 2pz$$

определяет параболоид вращения с осью вращения Oz .

Замечание. Уравнения вида

$$\frac{x^2}{p} + \frac{z^2}{q} = 2y \quad (3.46)$$

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} = 2x \quad (3.47)$$

(где p и q – одного знака) также определяют эллиптические параболоиды. Эти уравнения того же типа, что и

уравнение (3.39), поскольку в левой части все эти уравнения содержат квадраты двух координат с коэффициентами одного и того же знака, а в правой части – третьей оставшуюся координату, причем эта третья координата входит во все уравнения (3.39), (3.46), (3.47) в первой степени.

3.3.2. Гиперболический параболоид

Поверхность 2-го порядка, определяемая уравнением

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \quad (p > 0, \quad q > 0), \quad (3.48)$$

называется **гиперболическим параболоидом**.

Уравнение (3.48) содержит только квадраты координат x и y , откуда следует, что плоскости Oxz и Oyz являются **плоскостями симметрии** для гиперболического параболоида, а **ось Oz** , представляющая собой линию пересечения этих плоскостей, называется **осью гиперболического параболоида**.

Исследуем эту поверхность **методом сечений**.

Рассмотрим *сечение* гиперболического параболоида (3.48) координатной *плоскостью Oxz* :

$$\begin{cases} \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, \\ y = 0. \end{cases} \quad (3.49)$$

При $y = 0$ из уравнения (3.48) имеем

$$\frac{x^2}{p} = 2z \quad \text{или} \quad x^2 = 2pz.$$

Таким образом, *сечение* плоскостью Oxz определяется уравнениями

$$\begin{cases} x^2 = 2pz, \\ y = 0 \end{cases} \quad (3.50)$$

и представляет собой **параболу**, проходящую через начало координат, для которой ось Oz является осью симметрии и которая расположена в **положительном направлении оси Oz** .

Для построения этой параболы используем точки: $O(0,0,0)$, $M_1(2p,0,2p)$ и $M_2(-2p,0,2p)$, $P_1(4p,0,8p)$ и $P_2(-4p,0,8p)$, принадлежащие этой параболе согласно уравнениям (3.50), и для *большей наглядности* **развернём оси координат** так, как показано на рис. 20.

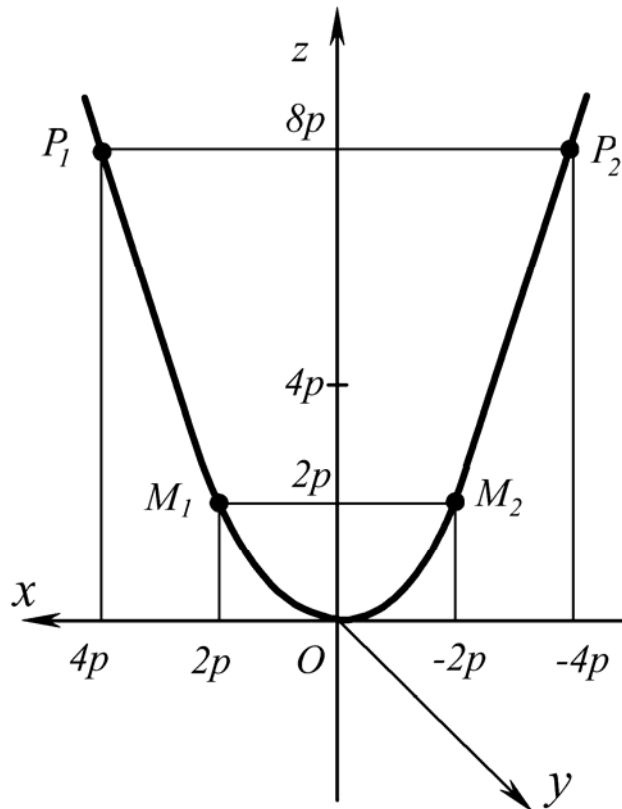


Рис. 20

С е ч е н и е гиперболического параболоида (3.48) координатной *плоскостью Oyz* ($x = 0$) определяется двумя уравнениями

$$\begin{cases} \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, \\ x = 0 \end{cases}$$

или уравнениями

$$\begin{cases} y^2 = -2qz, \\ x = 0 \end{cases} \quad (3.51)$$

(т.к. при подстановке $x = 0$ в уравнение (3.48) получаем $-\frac{y^2}{q} = 2z$, откуда $y^2 = -2qz$).

Таким образом, плоскость Oyz пересекает гиперболический параболоид (3.48) по параболе (3.51) с вершиной в начале координат, для которой осью симметрии является ось Oz . Однако ветви параболы (3.51) должны быть направлены вниз (в отрицательном направлении оси Oz , поскольку в силу уравнений (3.51) переменная z не может принимать положительных значений, т.е. всегда $z \leq 0$).

Для построения параболы (3.51) на чертеже найдём несколько точек, через которые проходит эта парабола. Полагая, например, $z = -2q$, получаем точки $N_1(0, 2q, -2q)$ и $N_2(0, -2q, -2q)$, координаты которых удовлетворяют уравнению (3.51).

Изобразим снова параболу (3.50), лежащую в плоскости Oxz , а затем начертим ещё расположенную перпендикулярно к ней в плоскости Oyz параболу (3.51), проходящую через начало координат и точки N_1 и N_2 (рис. 21).

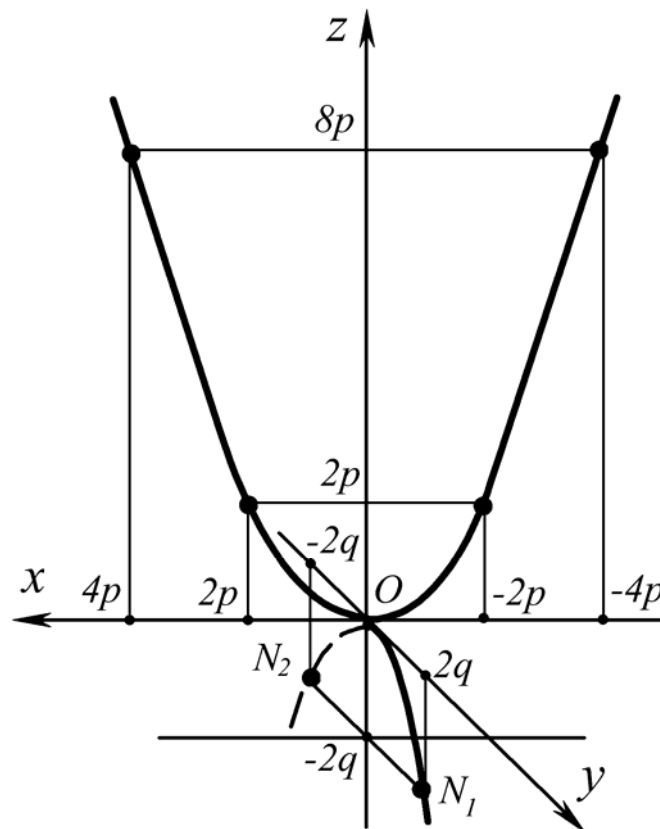


Рис. 21

Линии пересечения гиперболического параболоида с плоскостями $z = h$, параллельными плоскости Oxy , представляют собой **гиперболы**, уравнения которых

$$\begin{cases} \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, \\ z = h \end{cases} \quad (3.52)$$

или

$$\begin{cases} \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2h, \\ z = h, \end{cases} \quad (3.53)$$

причём при $h > 0$ это будут *гиперболы*, действительная ось симметрии которых параллельна оси **Ox**, т.е. гиперболы

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^{*2}} - \frac{y^2}{b^{*2}} = 1, \\ z = h \end{cases} \quad (3.54)$$

с полуосями

$$a^* = \sqrt{2ph}, \quad b^* = \sqrt{2qh}, \quad (3.55)$$

а при $h < 0$ – *сопряжённые гиперболы* (по отношению к гиперболам (3.54)), т.е. гиперболы

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^{*2}} - \frac{y^2}{b^{*2}} = -1, \\ z = h \end{cases} \quad (3.56)$$

с полуосями

$$a^* = \sqrt{-2ph}, \quad b^* = \sqrt{-2qh}, \quad (3.57)$$

у которых действительная ось симметрии будет параллельна оси **Oy**.

Заметим, что при $h = 0$ плоскость Oxy даёт в сечении с гиперболическим параболоидом (3.48) линию

$$\begin{cases} \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 0, \\ z = 0, \end{cases} \quad (3.58)$$

уравнения которой распадаются на две пары уравнений

$$\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = 0, \\ z = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = 0, \\ z = 0, \end{cases} \quad (3.59)$$

и, следовательно, это сечение есть совокупность двух пересекающихся прямых.

Эти прямые

$$\begin{cases} y = \pm \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{p}} x, \\ z = 0 \end{cases} \quad (3.60)$$

являются в действительности **асимптотами** как гипербол (3.54) с полуосями (3.55), так и гипербол (3.56) с полуосями (3.57).

В самом деле, из формул (3.54), (3.55) вытекает, что *асимптоты* этих гипербол имеют уравнения

$$y = \pm \frac{b^*}{a^*} x,$$

где

$$\frac{b^*}{a^*} = \frac{\sqrt{2qh}}{\sqrt{2ph}} = \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{p}}.$$

Аналогично, из формул (3.56), (3.57) следует:

$$\frac{b^*}{a^*} = \frac{\sqrt{-2qh}}{\sqrt{-2ph}} = \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{p}} \quad (h < 0).$$

Прямые (3.59) сечения гиперболического параболоида (3.48) плоскостью $z = 0$ служат как бы **переходом от семейства** гипербол (3.54) с полуосями (3.55), получающихся в сечении плоскостью $z = h$ при $h > 0$, к другому *семейству* гипербол (3.56) с полуосями (3.57), получающихся в сечении плоскостью $z = h$ при $h < 0$.

Чтобы изобразить на чертеже гиперболы (3.54) с полуосями (3.55), а также гиперболы (3.56) с полуосями (3.57), **выделим по одной гиперболе из каждого** указанного семейства гипербол (3.54), (3.56), *придавая h конкретные значения*, причём в случае $h > 0$ возьмём $h = 2p$, а в случае $h < 0$ положим $h = -2q$.

Тогда соответствующие гиперболы будут иметь следующие уравнения:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4p^2} - \frac{y^2}{4pq} = 1, \\ z = 2p \quad (z > 0) \end{cases} \quad (3.61)$$

(которые получаются из соотношений (3.52), (3.53) при подстановке $h = 2p$) и

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4pq} - \frac{y^2}{4q^2} = -1, \\ z = -2q \quad (z < 0) \end{cases} \quad (3.62)$$

(которые получаются из соотношений (3.52), (3.53) при подстановке $h = -2q$).

Повторим рис. 21 и **изобразим** далее на этом чертеже **гиперболы (3.61) и (3.62)**, замечая, что гипербола (3.61) имеет полуоси

$$\begin{cases} a^* = 2p, \\ b^* = 2\sqrt{pq}, \end{cases} \quad (3.63)$$

а гипербола (3.62) соответственно полуоси

$$\begin{cases} a^* = 2\sqrt{pq}, \\ b^* = 2q. \end{cases} \quad (3.64)$$

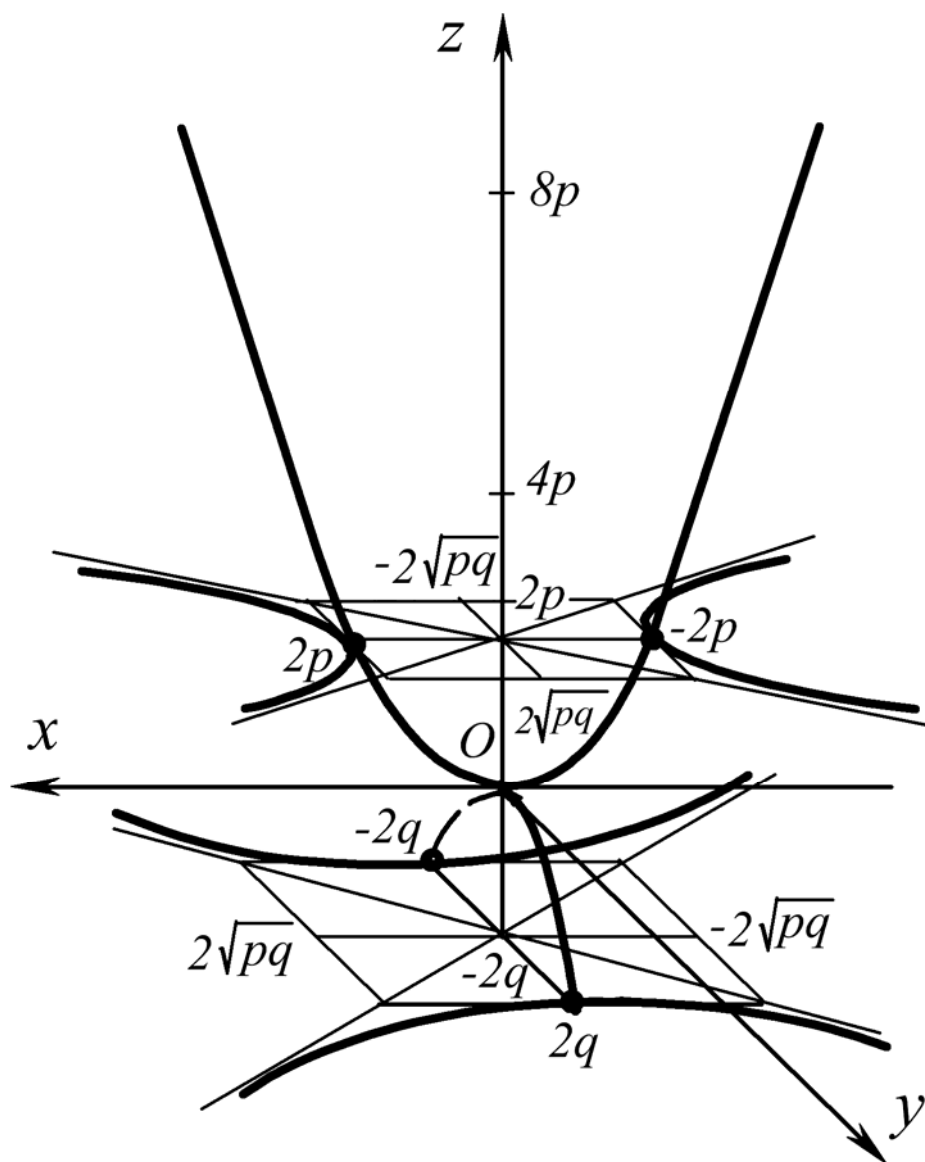


Рис. 22

Рассмотрим, наконец, сечения гиперболического параболоида (3.48) плоскостями $x = h$, параллельными плоскости Oyz :

$$\begin{cases} \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, \\ x = h. \end{cases} \quad (3.65)$$

Каждая плоскость $x = h$ пересекает гиперболический параболоид по параболе, уравнения которой:

$$\begin{cases} -\frac{y^2}{q} = 2z - \frac{h^2}{p}, \\ x = h \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} y^2 = -2q \left(z - \frac{h^2}{2p} \right), \\ x = h. \end{cases} \quad (3.66)$$

Из уравнений (3.66) легко видеть, что **все параболы**, расположенные в плоскостях $x = h$, имеют один и тот же параметр q , их **оси симметрии** находятся в плоскости Oxz и **параллельны оси Oz** , ветви этих парабол направлены вниз (в отрицательном направлении оси Oz), а их вершины при каждом h имеют координаты

$$x_0 = h, \quad y_0 = 0, \quad z_0 = \frac{h^2}{2p}.$$

Это означает, что каждая из семейства **парабол (3.66)** получается таким **параллельным переносом** рассмотренной ранее **параболы (3.51)**

$$\begin{cases} y^2 = -2qz, \\ x = 0 \end{cases} \quad (3.67)$$

(представляющей собой сечение гиперболического параболоида плоскостью Oyz и уже изображённой на рис. 21 и 22), при котором её **вершина**, имеющая координаты $(0,0,0)$, переходит в точку с координатами

$$(x = h, \quad y = 0, \quad z = \frac{h^2}{2p}).$$

Так как уравнение параболы (3.50):

$$\begin{cases} x^2 = 2pz, \\ y = 0, \end{cases}$$

расположенной в плоскости Oxz (и уже изображённой на чертежах 20, 21 и 22), при $x_0 = h$ даёт то же значение для

$$z_0 = \frac{h^2}{2p},$$

то отсюда заключаем, что **вершины парабол (3.66)** расположены на **параболе (3.50)**.

Достроим параболы (3.66) на чертеже (рис. 23), полагая для определённости $h = 4p$ и $h = -4p$.

Тогда эти параболы будут иметь следующие уравнения:

$$\begin{cases} x = \pm 4p, \\ y^2 = -2q(z - 8p). \end{cases} \quad (3.68)$$

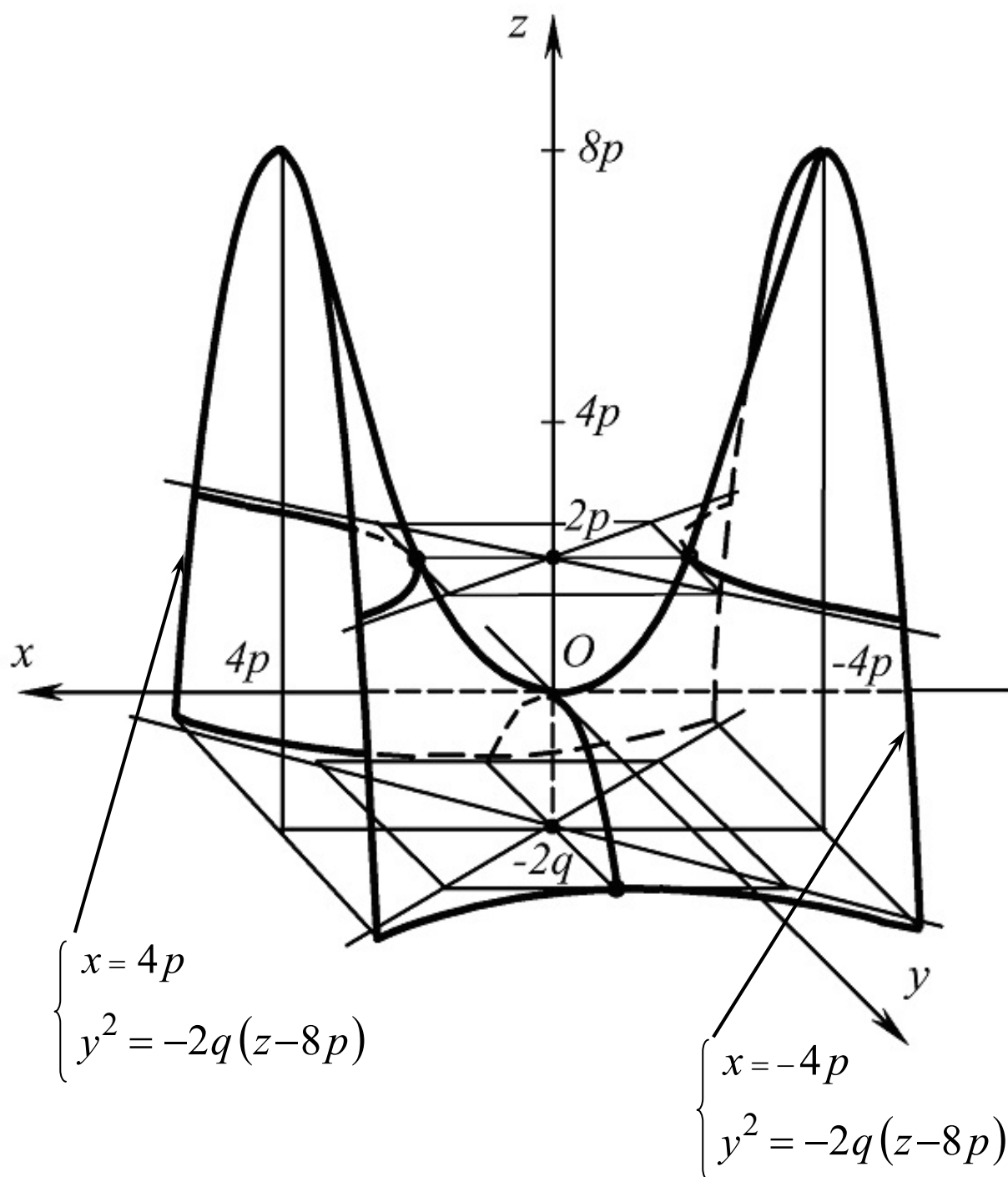


Рис. 23

Общий вид гиперболического параболоида (без вспомогательных линий) показан на рис. 23а.

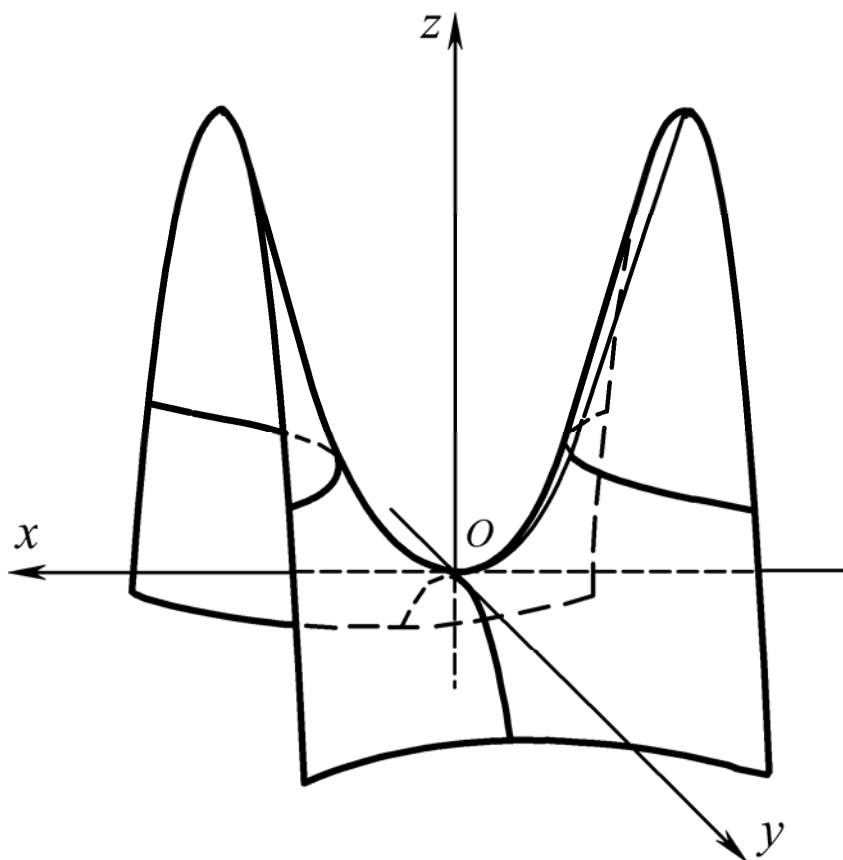


Рис. 23а

На чертеже (см. рис. 23а) изображён **кусок гиперболического параболоида**; *край* изображённого куска составлен из *двух* отрезков исходящих *парабол* (3.66), плоскости которых параллельны плоскости Oyz (в частности, можно взять параболы (3.68)), и *двух отрезков гипербол* (3.56), плоскости которых параллельны плоскости Oxy (в частности, можно взять гиперболу (3.62)). На рис. 23а **изображено** также одно **сечение** гиперболического параболоида **плоскостью** $z = h$ для случая $h > 0$, т.е. *гипербола* (3.61), где $h = 2p$.

Таким образом, гиперболический параболоид (3.48) можно рассматривать как поверхность, образованную движущейся (при изменении h) параболой (3.66), ось симметрии которой остаётся в плоскости Oxz , а вершина движется по параболе (3.50). Плоскость движущейся параболы (3.66) при этом остаётся параллельной плоскости Oyz .

Всё изложенное позволяет заключить, что **гиперболический параболоид имеет форму седла**.

3.4. Цилиндры второго порядка

Поверхность, составленная из всех прямых, пересекающих данную линию L и параллельных данной прямой l , называется **цилиндрической поверхностью**. При этом линия L называется *направляющей*, а каждая из прямых, составляющих эту поверхность и параллельных прямой l , – *образующей*.

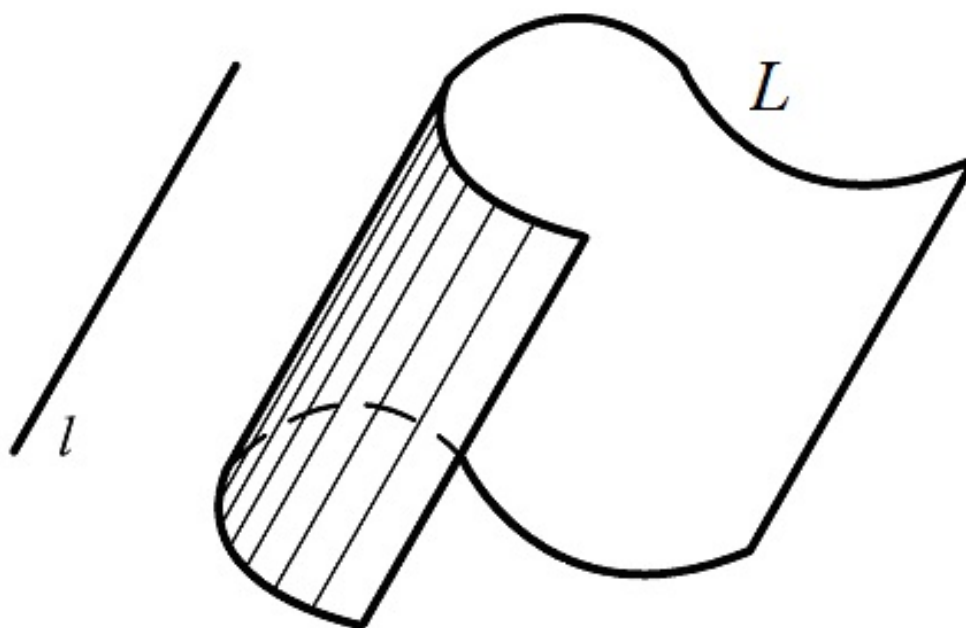


Рис. 24

В дальнейшем будем рассматривать только такие **цилиндрические поверхности**, направляющие которых лежат в одной из координатных плоскостей, а образующие параллельны координатной оси, перпендикулярной этой плоскости.

Рассмотрим уравнение вида

$$F(x, y) = 0. \quad (3.69)$$

Особенностью этого уравнения является то, что левая часть его не содержит переменной z . Это означает, что данное уравнение накладывает связь только на первые две координаты, третья же может принимать любые значения.

Докажем, что уравнение (3.69) определяет цилиндрическую поверхность S с образующими, параллельными оси Oz .

Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – произвольная точка поверхности S . Так как точка M_0 лежит на S , то числа x_0, y_0, z_0 удовлетворяют уравнению $F(x, y) = 0$. Но тогда числа x_0, y_0, z , где z – любое число, также удовлетворяют этому уравнению, поскольку $F(x, y)$ от z не зависит. Следовательно, при любом z точка $M(x_0, y_0, z)$ лежит на поверхности S .

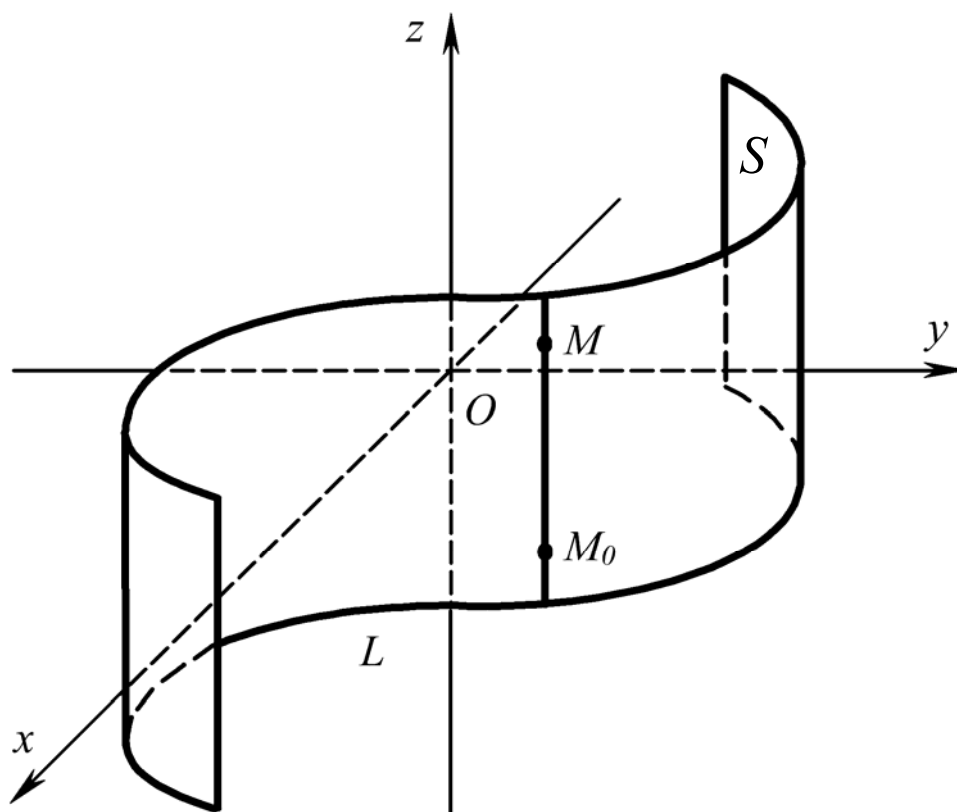


Рис. 25

Это означает, что на поверхности S целиком лежит прямая, проходящая через точку M_0 параллельно оси Oz .

Таким образом, поверхность S составлена из прямых, параллельных оси Oz , т.е. она является цилиндрической поверхностью.

Итак, уравнение $F(x,y)=0$ определяет цилиндрическую поверхность, образующие которой параллельны оси Oz .

Замечание 1. На координатной плоскости Oxy (плоский случай) уравнение (3.69) $F(x, y) = 0$ определяет плоскую линию. В пространстве же $Oxyz$ то же самое уравнение $F(x, y) = 0$ определяет уже цилиндр S с образующими, параллельными оси Oz , а направляющей линией L этого цилиндра S будет как раз линия, определяемая в пространстве $Oxyz$ двумя уравнениями:

$$\begin{cases} F(x, y) = 0, \\ z = 0, \end{cases} \quad (3.70)$$

первое из которых определяет рассматриваемую цилиндрическую поверхность S , а второе – координатную плоскость Oxy .

Замечание 2. Аналогично можно показать, что уравнение

$$F(x, z) = 0, \quad (3.71)$$

не содержащее y , на плоскости Oxz определяет плоскую кривую. В пространстве же $Oxyz$ то же самое уравнение $F(x, z) = 0$ (3.71), не содержащее y , задает уже цилиндр с образующими, параллельными оси Oy , а направляющей линией этого цилиндра будет линия, определяемая двумя уравнениями

$$\begin{cases} F(x, z) = 0, \\ y = 0. \end{cases} \quad (3.72)$$

Точно также уравнение

$$F(y, z) = 0, \quad (3.73)$$

не содержащее x , определяет в пространстве $Oxyz$ цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси Ox , а направляющей линией этого цилиндра будет линия, определяемая двумя уравнениями

$$\begin{cases} F(y, z) = 0, \\ x = 0. \end{cases} \quad (3.74)$$

Если же рассматривать уравнение $F(y, z) = 0$ (3.73) на плоскости Oyz , то оно же определяет плоскую кривую, расположенную в плоскости Oyz .

Если уравнение (3.69), не содержащее текущей координаты z , есть уравнение **второй степени**

$$a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0, \quad (3.75)$$

то определяемая им **цилиндрическая поверхность S** называется **цилиндром второго порядка с образующими, параллельными оси Oz** .

Поскольку сечение цилиндра (3.75) плоскостью Oxy есть **линия 2-го порядка**, то в зависимости от характера этой линии (служащей **направляющей** линией L цилиндра (3.75)) согласно изученной ранее классификации **кривых 2-го порядка** при помощи надлежащего выбора координатной системы уравнение кривой второго порядка может быть преобразовано к одному из следующих типов: эллиптическому, гиперболическому или параболическому.

Следовательно, в процессе **классификации поверхностей 2-го порядка**, определяемых уравнением (3.75), будем уже иметь **цилиндры эллиптического, гиперболического или параболического типа**.

Изобразим эти цилиндры 2-го порядка.

3.4.1. Цилиндры эллиптического типа

1. Эллиптический цилиндр

Если уравнение (3.75) при помощи надлежащего выбора координатной системы приводится к виду

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (3.76)$$

то поверхность 2-го порядка, определяемая этим уравнением (3.76), называется **эллиптическим цилиндром**, поскольку **направляющей** линией этого цилиндра, лежащей в плоскости Oxy , является **эллипс**, а образующие параллельны оси Oz (рис. 26).

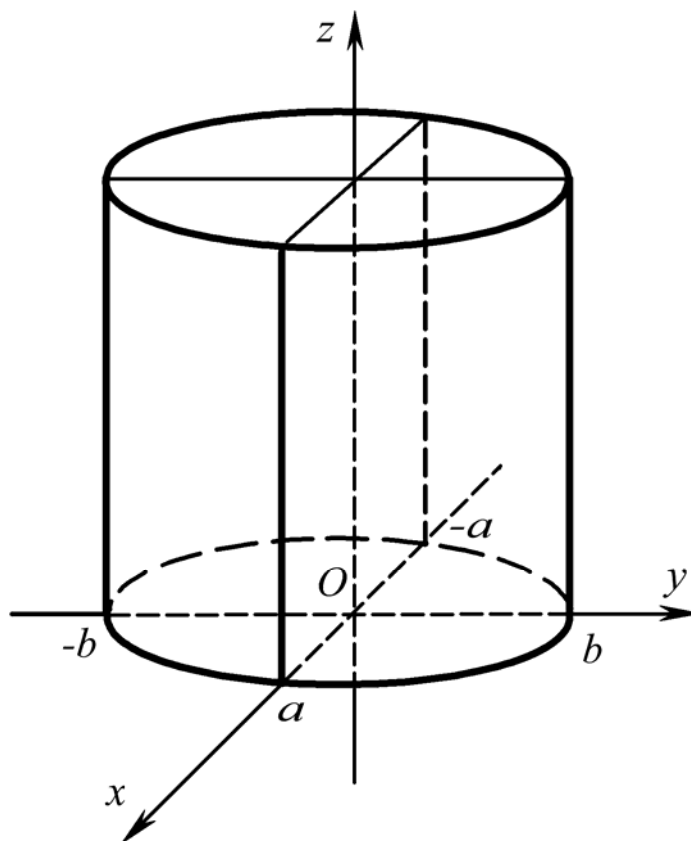


Рис. 26

В частности, если $a = b = R$, то уравнение

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad (3.77)$$

определяет **круговой цилиндр**, т.к. **направляющей** линией этого цилиндра, лежащей в плоскости Oxy , является **окружность**.

Следовательно, при $a = b$ эллиптический цилиндр (3.76) становится **поверхностью вращения** с осью вращения Oz .

2. «Мнимый эллиптический цилиндр»

Принято говорить, что уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad (3.78)$$

«определяет **мнимый эллиптический цилиндр**», т.к. это уравнение (3.78) совсем не имеет вещественных решений и, следовательно, совсем *не определяет никакого геометрического образа*.

3. Прямая линия

Уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad (3.79)$$

имеет единственное решение:

$$\begin{cases} x = 0 & (\text{плоскость } Oyz), \\ y = 0 & (\text{плоскость } Oxz) \end{cases}$$

и потому задаёт **прямую линию** – **ось Oz**, которая получается в результате пересечения этих плоскостей Oyz ($x=0$) и Oxz ($y=0$).

3.4.2. Цилиндры гиперболического типа

1. Гиперболический цилиндр

Если уравнение (3.75) при помощи надлежащего выбора координатной системы приводится к виду

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (3.80)$$

то поверхность 2-го порядка, определяемая этим уравнением (3.80), называется **гиперболическим цилиндром**, поскольку **направляющей линией** этого цилиндра, лежащей в плоскости Oxy , является **гипербола**

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = 0, \end{cases} \quad (3.81)$$

а образующие параллельны оси Oz (рис. 27).

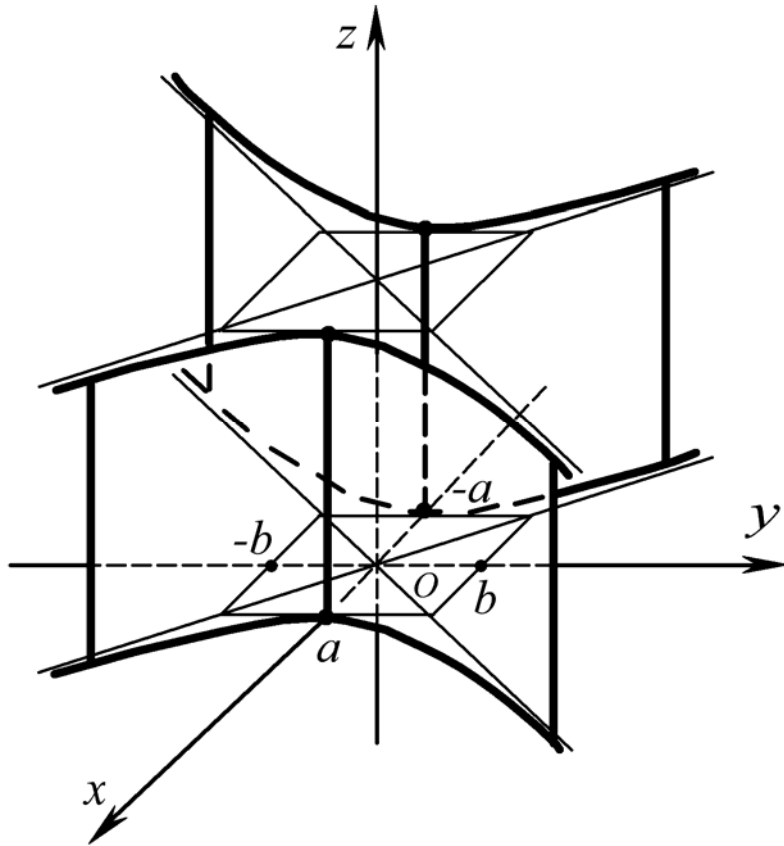


Рис. 27

2. Сопряжённый гиперболический цилиндр

Изобразим также **гиперболический цилиндр**, определяемый уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1, \quad (3.82)$$

направляющей линией которого служит **гипербола**, лежащая в плоскости Oxy

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1, \\ z = 0, \end{cases} \quad (3.83)$$

сопряженная гиперболе (3.81), а образующие параллельны оси Oz (рис. 28).

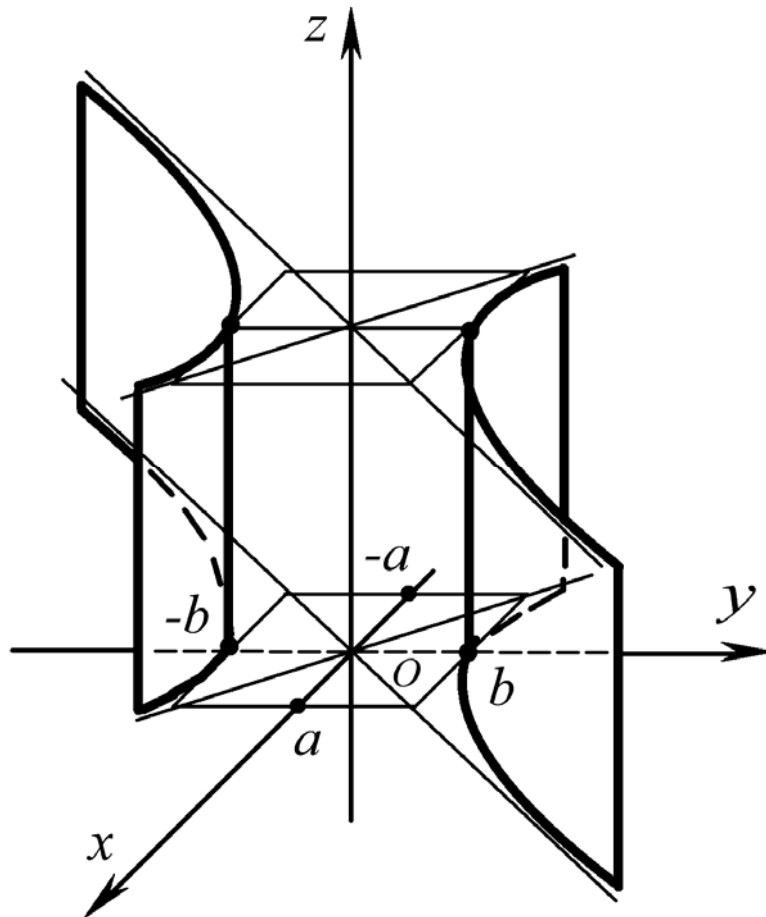


Рис. 28

3. Пара пересекающихся плоскостей

Кроме того, возможен случай, когда уравнение (3.75) приводится к виду

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0, \quad (3.84)$$

где левая часть уравнения (3.84) есть произведение двух множителей первой степени

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 0.$$

В этом случае гиперболические цилиндры (3.80), (3.82) «вырождаются» в пару пересекающихся плоскостей (рис. 29):

$$\begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0, \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0 \end{cases} \quad (3.85)$$

или

$$\begin{cases} y = \frac{b}{a}x, \\ y = -\frac{b}{a}x. \end{cases}$$

З а м е т и м, что в плоскости Oxy уравнения (3.85) определяют две прямые, представляющие собой асимптоты гиперболы (3.81) и сопряжённой с ней гиперболы (3.83), в которые эти гиперболы и «вырождаются».

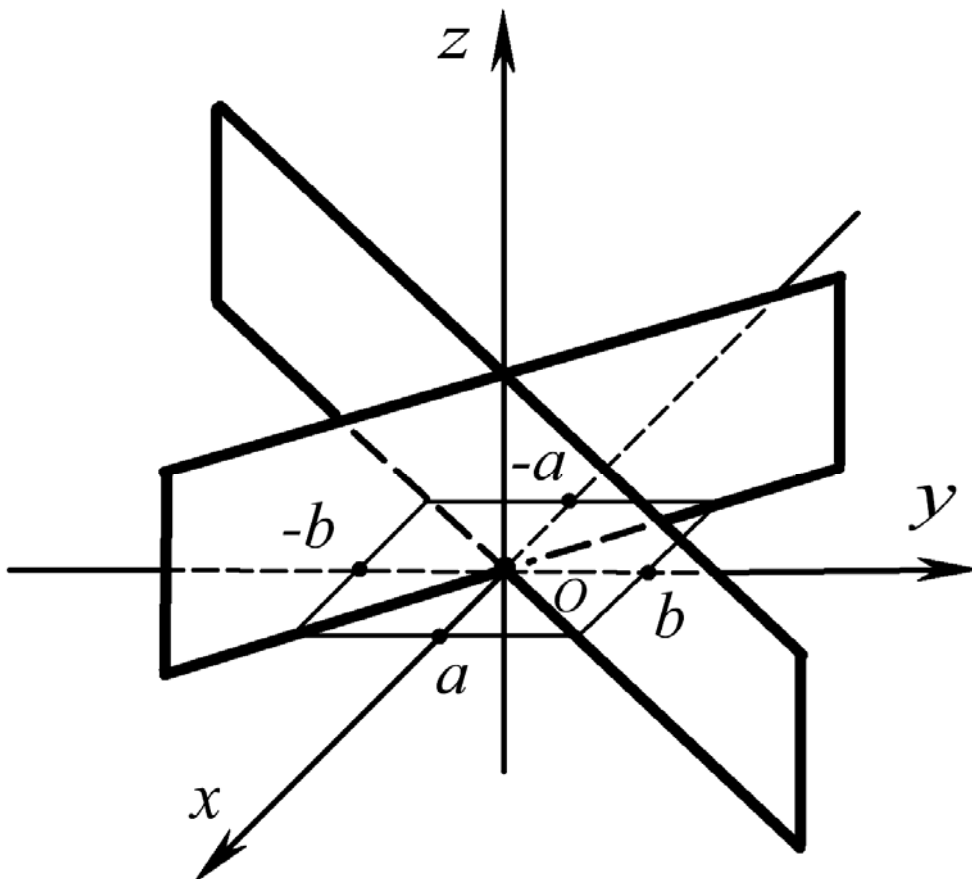


Рис. 29

3.4.3. Цилиндры параболического типа

1. Параболические цилиндры

Если уравнение (3.75) при помощи надлежащего выбора координатной системы приводится к виду

$$x^2 = \pm 2py \quad (3.86)$$

или

$$y^2 = \pm 2qx, \quad (3.87)$$

то поверхности 2-го порядка, определяемые этими уравнениями (3.86) и (3.87), называются **параболическими цилиндрами**, поскольку **направляющими линиями** этих цилиндров, *лежащими в плоскости Oxy* , являются **параболы** (3.86) или (3.87), а образующие параллельны оси Oz .

Изобразим два из этих четырёх параболических цилиндров (3.86), (3.87) (рис. 30, 31):

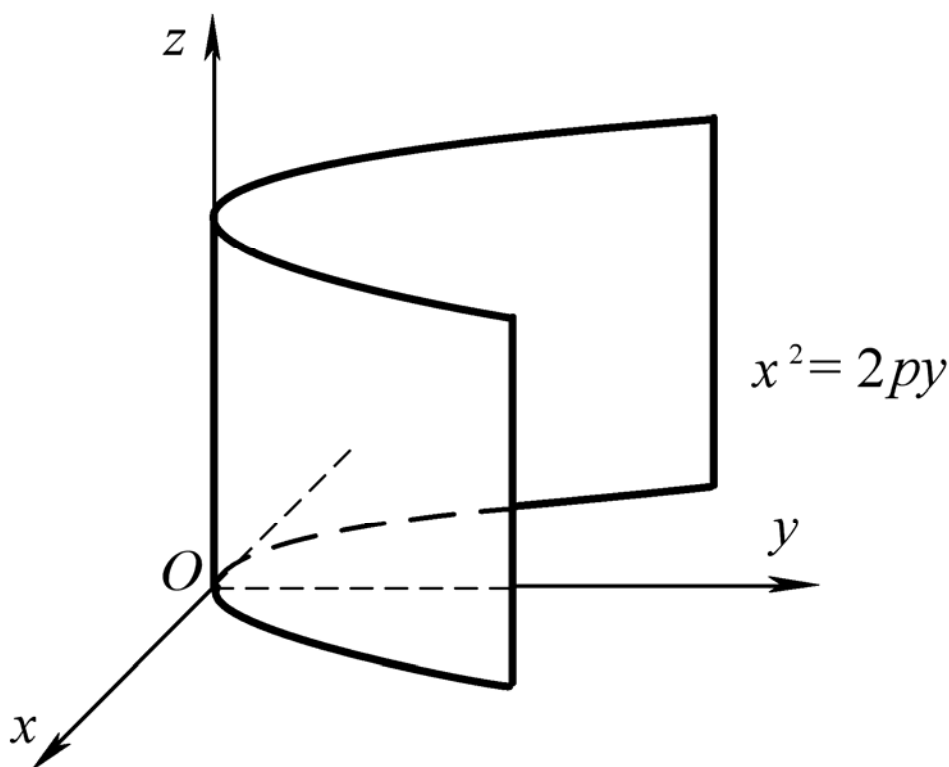


Рис. 30

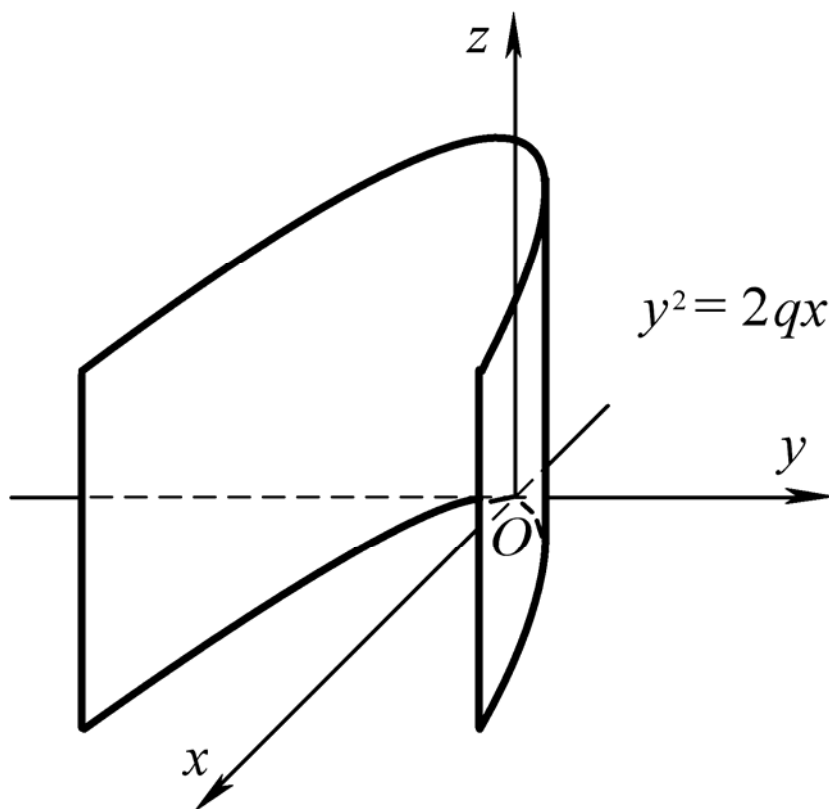


Рис. 31

2. Пара параллельных плоскостей

Возможен также случай, когда уравнение (3.75) приводится к виду

$$x^2 - a^2 = 0 \quad (3.88)$$

или

$$y^2 - b^2 = 0, \quad (3.89)$$

где левая часть уравнений (3.88), (3.89) есть произведение двух множителей первой степени

$$(x - a)(x + a) = 0$$

и соответственно

$$(y - b)(y + b) = 0.$$

В этом случае **параболические цилиндры** (3.86), (3.87) «вырождаются» в **пару параллельных плоскостей**:

$$\begin{cases} x - a = 0, \\ x + a = 0 \end{cases} \quad (3.90)$$

или

$$\begin{cases} x = a, \\ x = -a \end{cases}$$

и соответственно

$$\begin{cases} y - b = 0, \\ y + b = 0 \end{cases} \quad (3.91)$$

или

$$\begin{cases} y = b, \\ y = -b. \end{cases}$$

Изобразим сначала пару параллельных плоскостей (3.90), перпендикулярных оси Ox (рис.32):

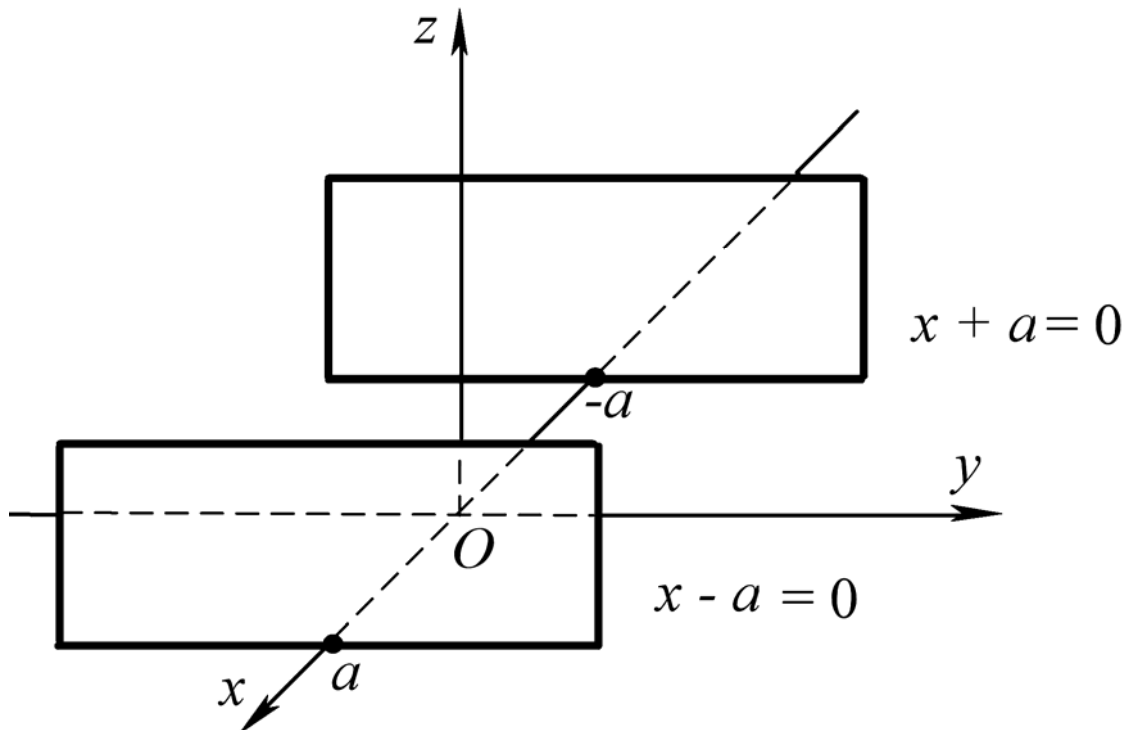


Рис. 32

А затем соответственно пару параллельных плоскостей (3.91), перпендикулярных оси Oy (рис.33).

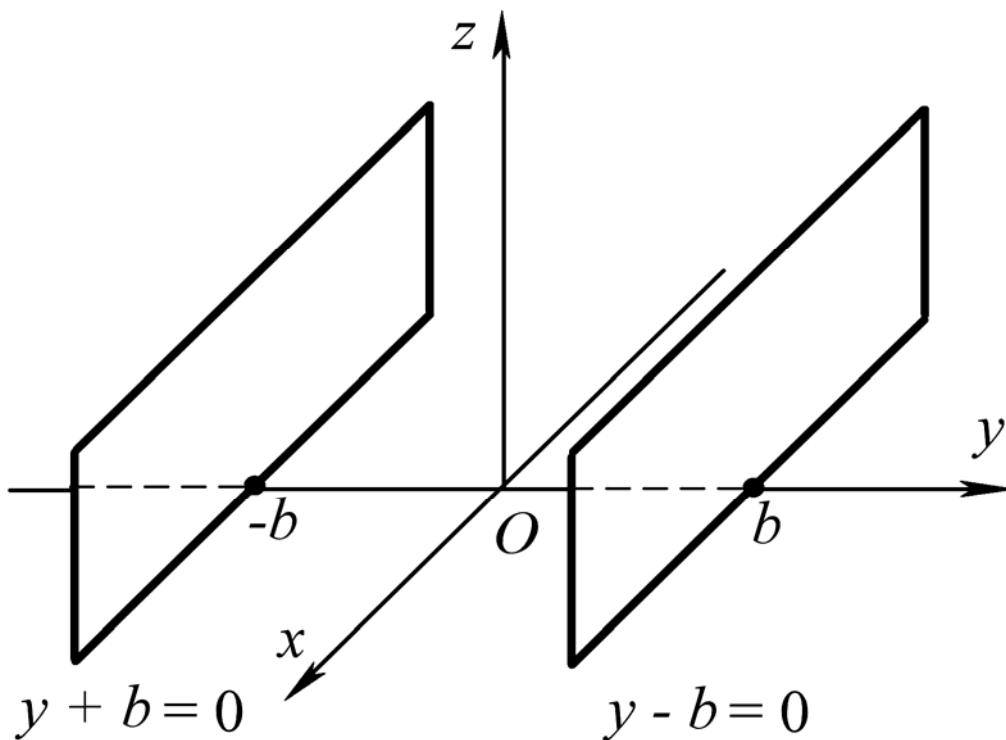


Рис. 33

3. «Пара мнимых параллельных плоскостей»

Если уравнение (3.75) приводится к виду

$$x^2 + a^2 = 0 \quad (3.92)$$

или

$$y^2 + b^2 = 0, \quad (3.93)$$

то принято говорить, что уравнения (3.92), (3.93) определяют «**пару мнимых параллельных плоскостей**», т.к. не существует ни одной действительной точки, координаты которой удовлетворяли бы уравнению (3.92) или (3.93) и, следовательно, **уравнения (3.92), (3.93) совсем не определяют никакого геометрического образа.**

4. Пара совпадающих плоскостей

Наконец, если уравнение 2-го порядка (3.75) приводится к виду

$$x^2 = 0 \quad (3.94)$$

или

$$y^2 = 0, \quad (3.95)$$

то левая часть уравнений (3.94), (3.95) есть произведение двух множителей первой степени

$$x \cdot x = 0,$$

и соответственно

$$y \cdot y = 0.$$

В этом случае **параболические цилиндры** (3.86), (3.87) «вырождаются» в **пару совпадающих плоскостей**:

$$\begin{cases} x = 0, \\ x = 0, \end{cases}$$

(координатная плоскость Oyz) (рис. 34),

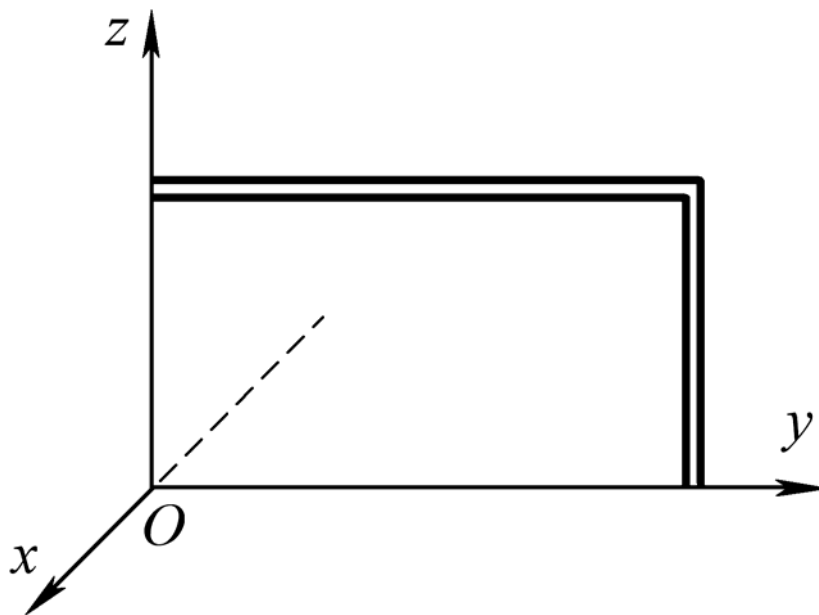


Рис. 34

И СООТВЕТСТВЕННО

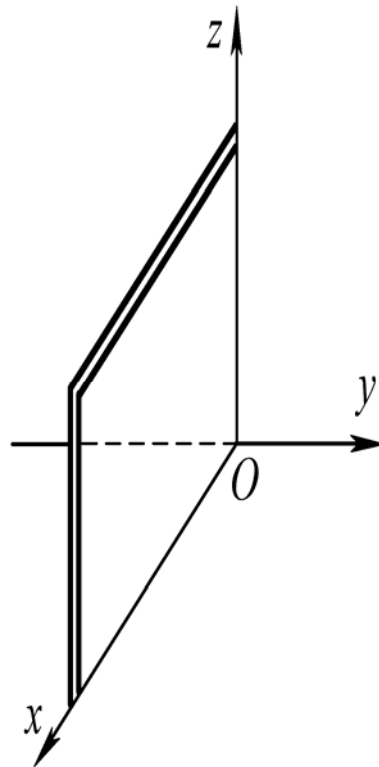


Рис. 35

$$\begin{cases} y = 0, \\ y = 0 \end{cases}$$

(координатная плоскость Oxz) (рис. 35).

4. ПРИМЕРЫ

Пример 1. Привести к каноническому виду уравнение

$$36x^2 + 16y^2 + 9z^2 + 72x - 128y - 36z + 184 = 0,$$

установить, какую поверхность оно определяет, и построить эту поверхность, выполнив исследование заданного уравнения с помощью метода сечений.

Решение. Для членов заданного уравнения, содержащих x , членов, содержащих y , членов, содержащих z , выполним следующие преобразования с выделением полного квадрата:

$$36x^2 + 72x = 36(x^2 + 2x) = 36(x^2 + 2x + 1 - 1) = 36(x + 1)^2 - 36,$$

$$16y^2 - 128y = 16(y^2 - 8y) = 16(y^2 - 8y + 16 - 16) = 16(y - 4)^2 - 256,$$

$$9z^2 - 36z = 9(z^2 - 4z) = 9(z^2 - 4z + 4 - 4) = 9(z - 2)^2 - 36.$$

Теперь исходное уравнение можно переписать так:

$$36(x + 1)^2 - 36 + 16(y - 4)^2 - 256 + 9(z - 2)^2 - 36 + 184 = 0$$

или

$$36(x + 1)^2 + 16(y - 4)^2 + 9(z - 2)^2 - 36 - 256 - 36 + 184 = 0,$$

откуда

$$36(x + 1)^2 + 16(y - 4)^2 + 9(z - 2)^2 = 144.$$

Разделив обе части этого уравнения на 144, окончательно будем иметь

$$\frac{(x + 1)^2}{4} + \frac{(y - 4)^2}{9} + \frac{(z - 2)^2}{16} = 1. \quad (4.1)$$

Как легко видеть, полученное уравнение (4.1) определяет эллипсоид с центром в точке $O'(-1, 4, 2)$ и полуосями $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$.

Введём новую вспомогательную декартову прямоугольную систему координат $O'x'y'z'$, полагая

$$x' = x + 1, \quad y' = y - 4, \quad z' = z - 2. \quad (4.2)$$

Согласно формулам преобразования декартовых координат (4.2) новая система $O'x'y'z'$ получена параллельным переносом заданной системы $Oxyz$ в центр эллипсоида (4.1), т.е. в точку $O'(-1, 4, 2)$.

Прежде чем выполнить чертеж заданной системы $Oxyz$ и новой вспомогательной $O'x'y'z'$, уточним – как следует строить в пространстве некоторую точку M_0 , если известны координаты x_0, y_0, z_0 этой точки относительно заданной прямоугольной декартовой системы координат $Oxyz$:

1) Откладываем по оси Ox от точки O отрезок длиной $|x_0|$ единиц (вперед или назад – смотря по знаку x_0).

2) Через конец P этого отрезка проводим в плоскости Oxy прямую параллельно оси Oy и откладываем на ней от точки P отрезок длиной $|y_0|$ (вправо или влево – смотря по знаку y_0).

3) Получим точку N , через которую проводим прямую параллельно оси Oz , и откладываем на ней от точки N отрезок длиной $|z_0|$ (вверх или вниз – смотря по знаку z_0).

4) Конец этого отрезка и является искомой точкой M_0 .

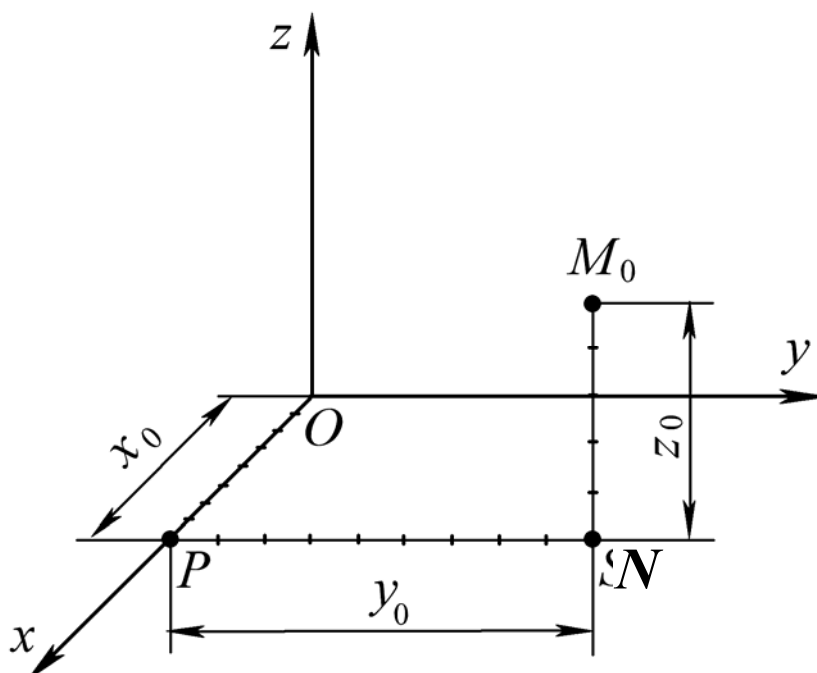


Рис. 36

Заметим, что единица масштаба, принятая одинаковой для всех осей декартовой системы $Oxyz$ на данном чертеже (рис. 36), изображается вдоль оси Ox по правилам начертательной геометрии всегда ровно в два раза меньше по абсолютной величине, чем такая же единица масштаба, откладываемая вдоль осей Oy и Oz .

Изобразим теперь заданную прямоугольную декартову систему $Oxyz$ и новую вспомогательную декартову систему $O'x'y'z'$, полученную параллельным переносом системы $Oxyz$ в точку $O'(-1, 4, 2)$, являющуюся центром рассматриваемого эллипсоида (4.1) (рис. 37).

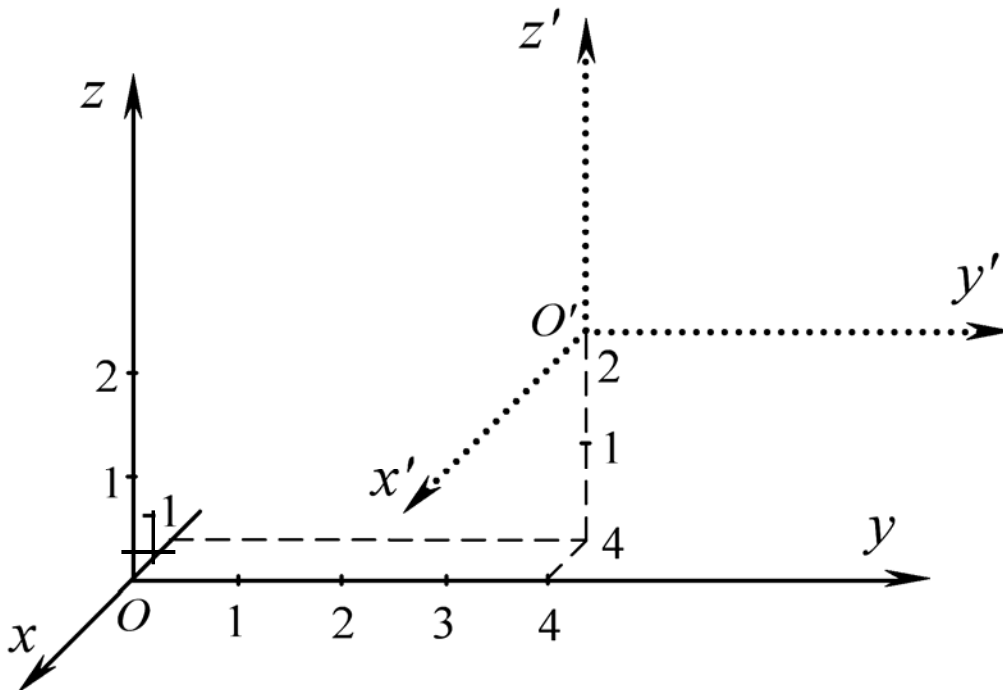


Рис. 37

В новой вспомогательной системе координат $O'x'y'z'$ уравнение эллипсоида (4.1) принимает каноническую форму:

$$\frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{9} + \frac{z'^2}{16} = 1. \quad (4.3)$$

Чтобы наиболее точно изобразить рассматриваемый эллипсоид (4.3) на чертеже, будем исследовать форму этого эллипсоида по его уравнению (4.3) методом сечений.

Прежде всего найдём главные сечения, т.е. сечения координатными плоскостями. Рассмотрим сечение эллипсоида (4.3) координатной плоскостью $O'x'y'$, уравнение которой: $z'=0$. Линия, получаемая в сечении, определяется двумя уравнениями

$$\begin{cases} \frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{9} + \frac{z'^2}{16} = 1, \\ z' = 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{9} = 1, \\ z' = 0, \end{cases}$$

и представляет собой эллипс с полуосями $a=2$, $b=3$, лежащий в плоскости $O'x'y'$. Построим этот эллипс (рис. 38).

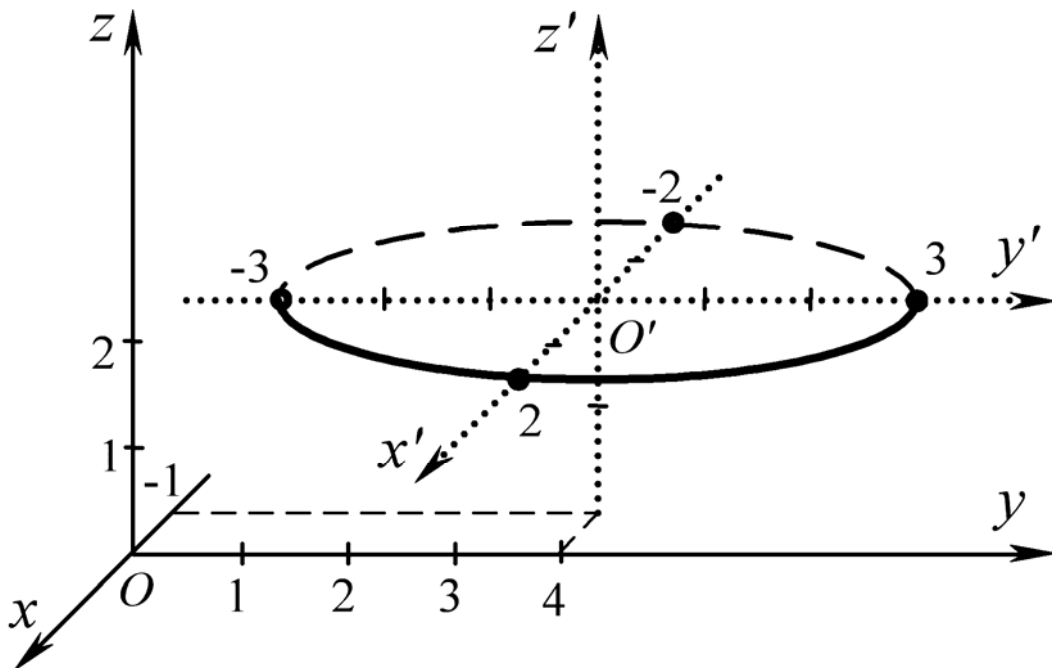


Рис. 38

Аналогично, пересекая эллипсоид (4.3) координатной плоскостью $O'x'z'$ (уравнение которой: $y'=0$):

$$\begin{cases} \frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{9} + \frac{z'^2}{16} = 1, \\ y' = 0, \end{cases}$$

получим в сечении снова эллипс (с полуосями $a = 2$, $c = 4$), лежащий в плоскости $O'x'z'$:

$$\begin{cases} \frac{x'^2}{4} + \frac{z'^2}{16} = 1, \\ y' = 0 \end{cases}$$

и изобразим этот эллипс на чертеже (рис. 39), продолжив рис. 38.

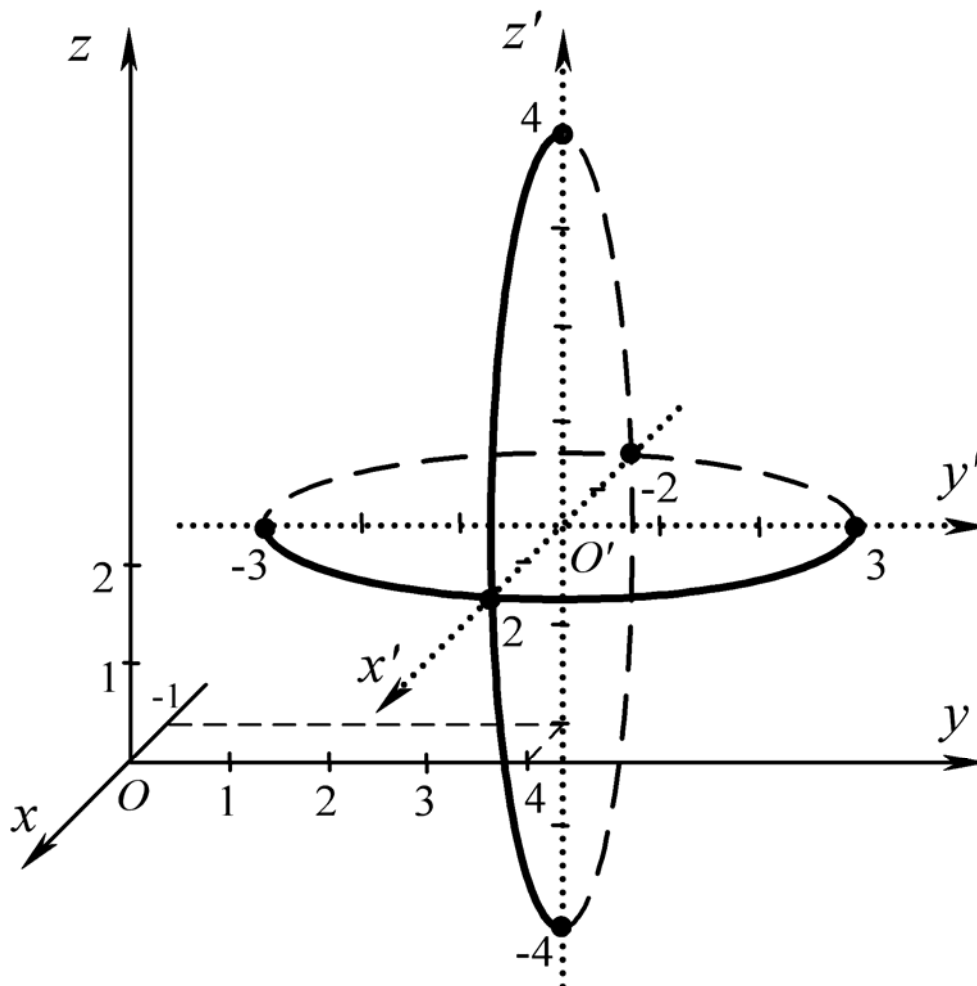


Рис. 39

Наконец, пересекая эллипсоид (4.3) координатной плоскостью $O'y'z'$: $x' = 0$:

$$\begin{cases} \frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{9} + \frac{z'^2}{16} = 1, \\ x' = 0, \end{cases}$$

будем иметь в сечении опять эллипс

$$\begin{cases} \frac{y'^2}{9} + \frac{z'^2}{16} = 1, \\ x' = 0 \end{cases}$$

(с полуосями $b=3$, $c=4$), но лежащий в плоскости $O'y'z'$. Построим этот эллипс, добавив его к изображенным ранее на рис. 39 эллипсам, расположенным в плоскостях $O'x'y'$ и $O'x'z'$ (рис. 40).

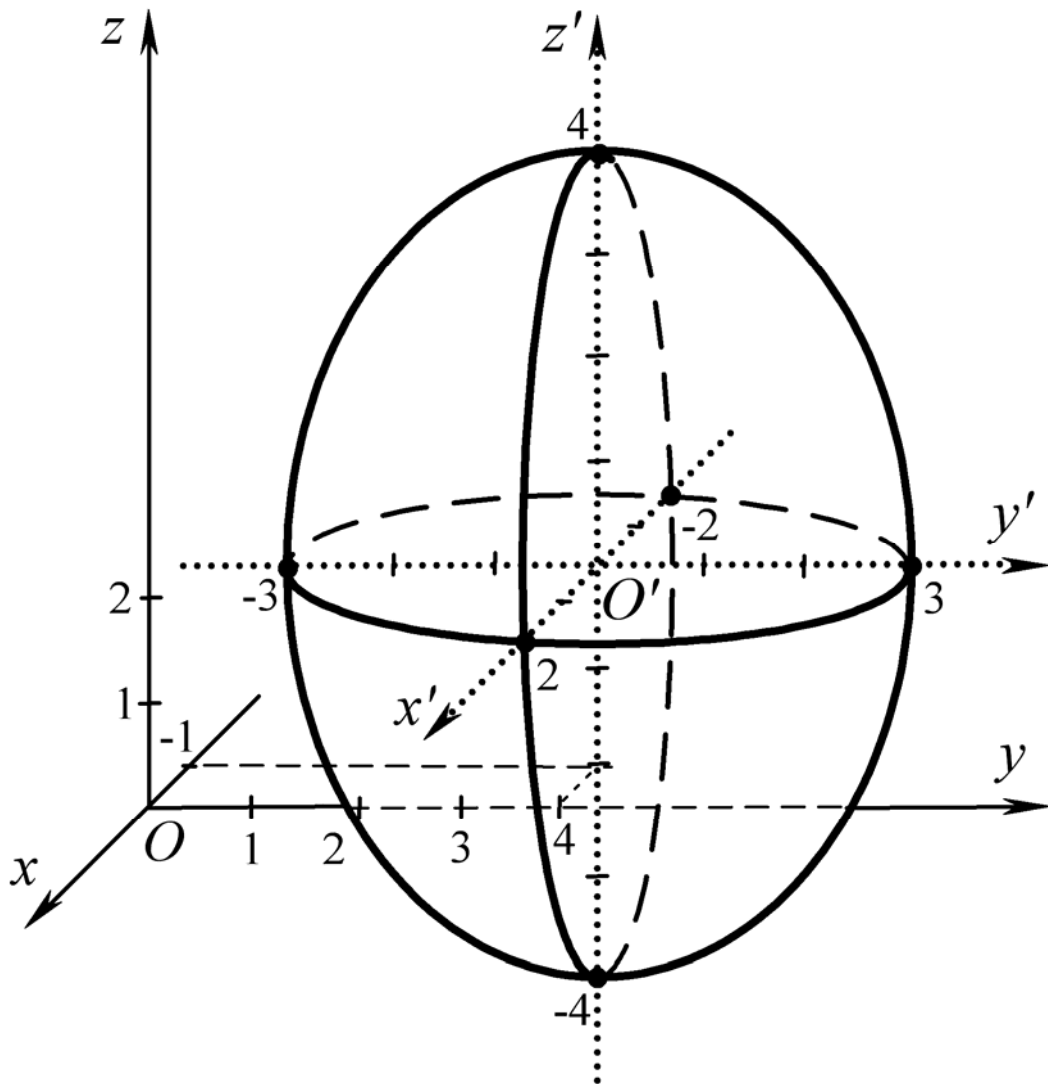


Рис. 40

При решении многих задач, в которых требуется построить эллипсоид, чтобы вычислить затем, например, его объём или площадь поверхности, бывает достаточно произвести указанные три главных сечения и изобразить эллипсоид на чертеже так, как это сделано на рис. 40, однако, если требуется более точное представление о заданном эллипсоиде, то следует произвести ещё сечения этого эллипсоида плоскостями, параллельными координатным плоскостям.

Выясним форму линий пересечения эллипсоида (4.3), вытянутого в вертикальном направлении (вдоль оси $O'z'$), плоскостями, параллельными координатной плоскости $O'x'y'$.

Каждая из таких плоскостей определяется уравнением вида $z' = h$, а линия, получаемая в сечении, определяется двумя уравнениями:

$$\begin{cases} \frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{9} + \frac{z'^2}{16} = 1, \\ z' = h \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{9} = 1 - \frac{h^2}{16}, \\ z' = h. \end{cases} \quad (4.4)$$

Из уравнения (4.4) видно, что при условии $|h| < 4$ (т.е. при $-4 < h < 4$) это уравнение можно переписать в виде

$$\begin{cases} \frac{x'^2}{\left(2\sqrt{1-\frac{h^2}{16}}\right)^2} + \frac{y'^2}{\left(3\sqrt{1-\frac{h^2}{16}}\right)^2} = 1, \\ z' = h. \end{cases}$$

Следовательно, плоскость $z'=h$ пересекает эллипсоид (4.3) по эллипсу

$$\begin{cases} \frac{x'^2}{a^{*2}} + \frac{y'^2}{b^{*2}} = 1, \\ z' = h \end{cases} \quad (4.5)$$

с полуосями

$$a^* = 2\sqrt{1 - \frac{h^2}{16}}, \quad b^* = 3\sqrt{1 - \frac{h^2}{16}}. \quad (4.6)$$

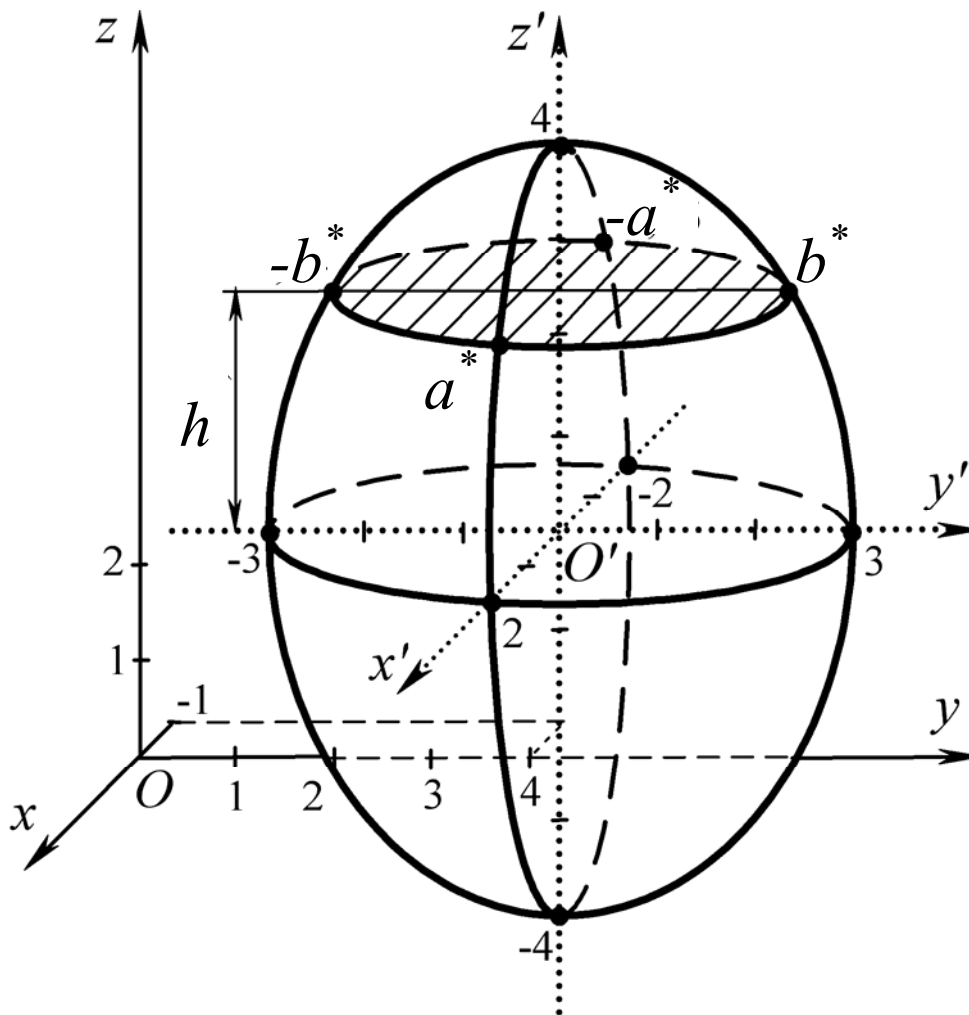


Рис. 41

Полуоси a^* и b^* (4.6) зависят от h . При изменении h от -4 до $+4$ полуоси (4.6) изменяются, оставаясь пропорциональными полуосям $a=2$ и $b=3$ эллипса, лежащего в плоскости $O'x'y'$.

Величины a^* и b^* , как видно из формул (4.6), имеют наибольшее значение при $h=0$. В этом случае $a^*=2$, $b^*=3$, т. е. самый крупный эллипс образуется в сечении координатной плоскостью $z'=0$. При возрастании $|h|$ величины a^* и b^* убывают, а при $h=\pm 4$ величины a^* и b^* обращаются в нуль, и потому эллипс, образуемый сечением эллипсоида (4.3) плоскостью $z'=4$ или плоскостью $z'=-4$, вырождается в точку. При $|h|>4$ уравнения (4.4) определяют мнимый эллипс, следовательно, плоскость $z'=h$ при $|h|>4$ с данным эллипсоидом не пересекается.

В случае необходимости аналогичным образом можно рассмотреть сечения эллипсоида (4.3) плоскостями $x'=h$ ($-2 \leq h \leq 2$) и $y'=h$ ($-3 \leq h \leq 3$). Линии пересечения эллипсоида (4.3) с этими плоскостями также представляют собой эллипсы.

Пример 2. Привести к каноническому виду уравнение

$$15x^2 - 6y^2 + 25z^2 - 120x + 108y + 150z + 129 = 0,$$

установить, какую поверхность оно определяет, и построить эту поверхность, выполнив исследование заданного уравнения с помощью метода сечений.

Решение. Приведём это уравнение к каноническому виду, выполнив ещё раз подробно следующие преобразования с выделением полного квадрата для членов, содержащих x , членов, содержащих y , и членов, содержащих z :

$$15x^2 - 120x = 15(x^2 - 8x) = 15(x^2 - 8x + 16 - 16) = 15(x - 4)^2 - 240,$$

$$-6y^2 + 108y = -6(y^2 - 18y) = -6(y^2 - 18y + 81 - 81) = -6(y - 9)^2 + 486,$$

$$25z^2 + 150z = 25(z^2 + 6z) = 25(z^2 + 6z + 9 - 9) = 25(z + 3)^2 - 225.$$

Тогда заданное уравнение запишется в виде

$$15(x-4)^2 - 240 - 6(y-9)^2 + 486 + 25(z+3)^2 - 225 + 129 = 0,$$

$$15(x-4)^2 - 6(y-9)^2 + 25(z+3)^2 = 240 - 486 + 225 - 129,$$

$$15(x-4)^2 - 6(y-9)^2 + 25(z+3)^2 = -150,$$

откуда, разделив обе части этого уравнения на 150, окончательно получаем

$$\frac{(x-4)^2}{10} - \frac{(y-9)^2}{25} + \frac{(z+3)^2}{6} = -1. \quad (4.7)$$

Введём теперь новые координаты x' , y' и z' , используя формулы параллельного переноса осей координат

$$x' = x - 4, \quad y' = y - 9, \quad z' = z + 3, \quad (4.8)$$

и изобразим на чертеже полученную таким образом новую вспомогательную декартову прямоугольную систему координат $O'x'y'z'$, начало которой находится в точке $O'(4, 9, -3)$, а оси $O'x'$, $O'y'$ и $O'z'$ параллельны соответствующим осям Ox , Oy и Oz и одинаково с ними направлены.

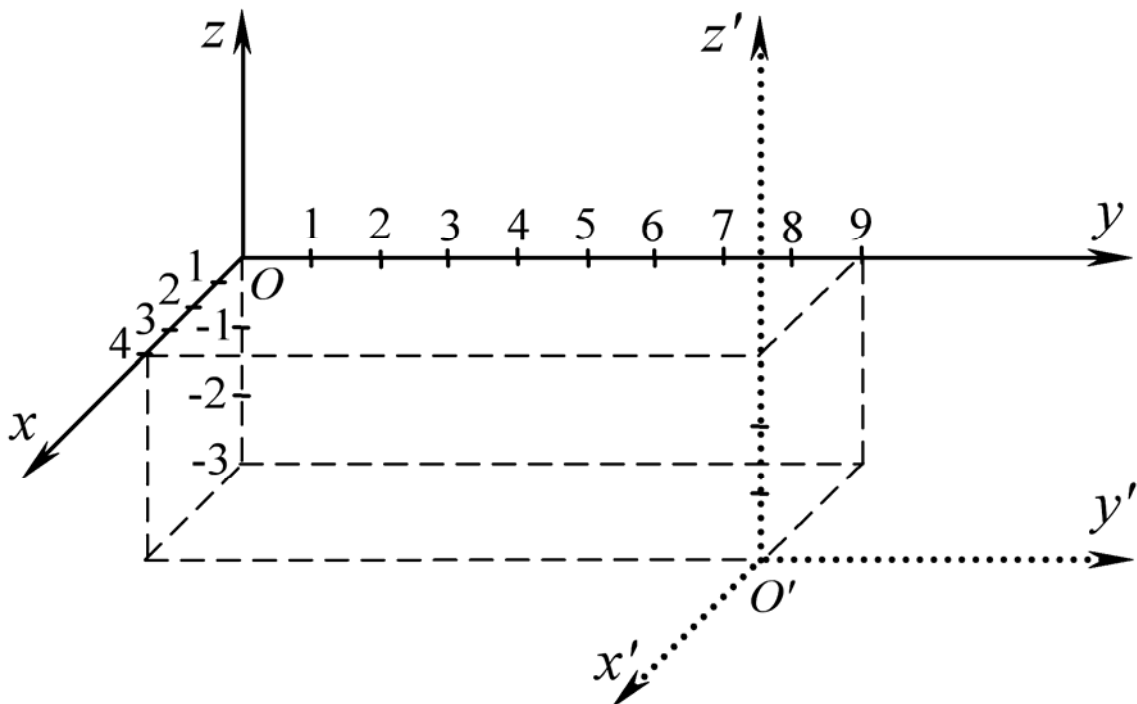


Рис. 42

Относительно новой вспомогательной системы координат $O'x'y'z'$ уравнение (4.7) принимает канонический вид

$$\frac{x'^2}{10} - \frac{y'^2}{25} + \frac{z'^2}{6} = -1 \quad (4.9)$$

и определяет **двуполостный гиперболоид** (с полуосями $a = \sqrt{10} \approx 3,162 \approx 3,2$, $b = 5$ и $c = \sqrt{6} \approx 2,449 \approx 2,5$), «**вытянутый**» **вдоль оси $O'y'$** , поскольку это уравнение того же типа, что и уравнение (3.26). Действительно, уравнение (4.9), как и каноническое уравнение двуполостного гиперболоида (3.20), в правой части содержит отрицательную единицу, а в левой части – два положительных и один отрицательный коэффициент при квадратах координат (см. замечание в конце п. 3.2.2).

Изучим форму этого двуполостного гиперболоида, заданного уравнением (4.9), с помощью **метода сечений**.

В сечении этой поверхности координатной плоскостью $O'y'z'$, имеющей уравнение $x' = 0$,

$$\begin{cases} \frac{x'^2}{10} - \frac{y'^2}{25} + \frac{z'^2}{6} = -1, \\ x' = 0, \end{cases}$$

получим **гиперболу**

$$\begin{cases} \frac{y'^2}{25} - \frac{z'^2}{6} = 1, \\ x' = 0, \end{cases} \quad (4.10)$$

лежащую в плоскости $O'y'z'$.

Нужно сделать точный чертёж этой гиперболы. Как всегда начнём с построения основного прямоугольника гиперболы (4.10), откладывая от начала координат по оси $O'y'$ отрезки 5 и (-5) , а по оси $O'z'$ отрезки $\sqrt{6} \approx 2,5$ и $(-\sqrt{6} \approx -2,5)$. Проведём далее через точки $(0, 5, 0)$ и

$(0, -5, 0)$ прямые, параллельные оси $O'z'$, а через точки $(0, 0, \sqrt{6})$ и $(0, 0, -\sqrt{6})$ прямые, параллельные оси $O'y'$, завершив тем самым построение основного прямоугольника.

Затем через его противоположные вершины проведём диагонали и неограниченно продолжим их в обе стороны – это и будут асимптоты рассматриваемой гиперболы (4.10).

Определим, какая из осей координат $O'y'$ или $O'z'$ является действительной осью этой гиперболы, а какая – мнимой. С этой целью найдём сначала точки пересечения гиперболы (4.10) с осью $O'z'$:

$$\begin{cases} \frac{y'^2}{25} - \frac{z'^2}{6} = 1, \\ x' = 0, \\ y' = 0, \end{cases}$$

откуда $-\frac{z'^2}{6} = 1$ или $z'^2 = -6$, а $z' = \pm\sqrt{-6}$, т. е. для z' получаем *мнимые* значения, следовательно, **ось $O'z'$** не имеет точек пересечения с данной гиперболой (4.10) и является для неё **мнимой осью**.

Пересечём тогда гиперболу (4.10) осью $O'y'$:

$$\begin{cases} \frac{y'^2}{25} - \frac{z'^2}{6} = 1, \\ x' = 0, \\ z' = 0, \end{cases}$$

откуда $\frac{y'^2}{25} = 1$ или $y'^2 = 25$, $y' = \pm 5$, а это означает, что точки $(0, 5, 0)$ и $(0, -5, 0)$ являются вершинами гиперболы (4.10), а **ось $O'y'$** – её **действительной осью** симметрии.

Теперь можно выполнить чертёж гиперболы (4.10), расположенной в плоскости $O'y'z'$ (рис. 43).

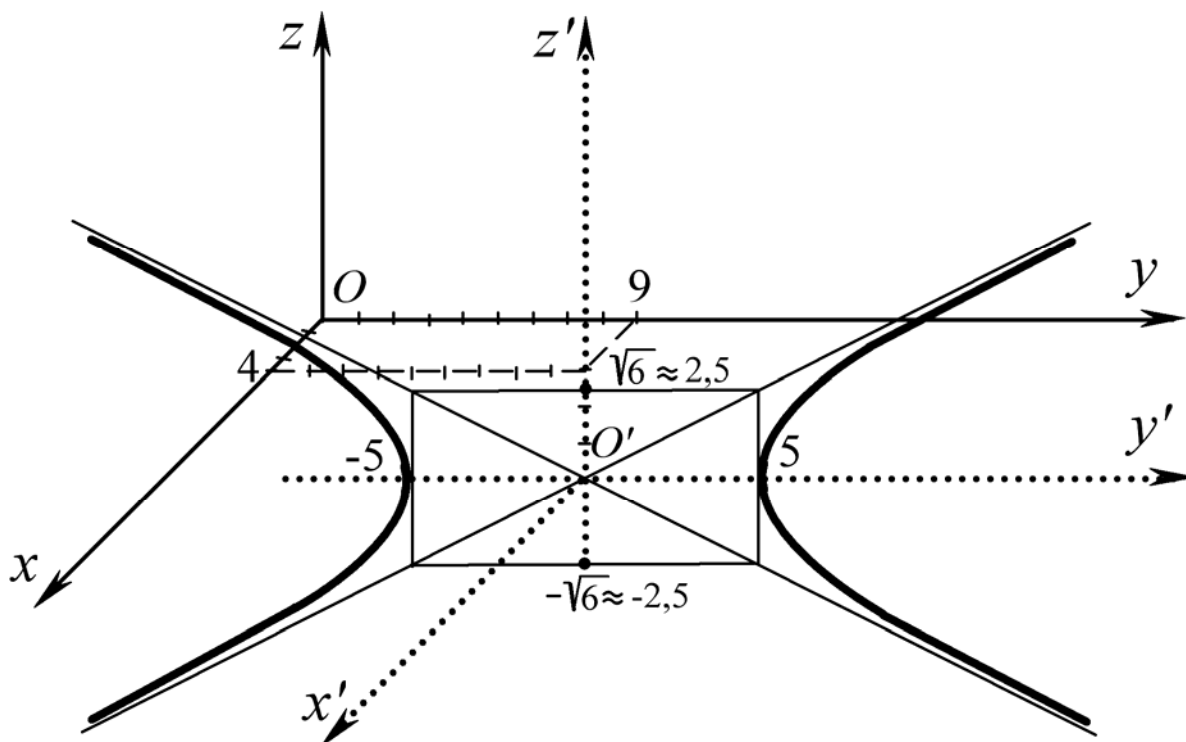


Рис. 43

В сечении заданного двуполостного гиперboloида (4.9) координатной плоскостью $O'x'y'$, имеющей уравнение $z'=0$:

$$\begin{cases} \frac{x'^2}{10} - \frac{y'^2}{25} + \frac{z'^2}{6} = -1, \\ z' = 0, \end{cases}$$

снова получим гиперболу

$$\begin{cases} \frac{x'^2}{10} - \frac{y'^2}{25} = -1, \\ z' = 0, \end{cases} \quad (4.11)$$

лежащую теперь в плоскости $O'x'y'$.

Основной прямоугольник для этой гиперболы (4.11) также следует изобразить в плоскости $O'x'y'$, откладывая от начала координат по оси $O'x'$ отрезки $\sqrt{10} \approx 3,2$ и $(-\sqrt{10} \approx -3,2)$, в то время как по оси $O'y'$ отрезки 5 и (-5) уже нанесены на чертёж и через них проходит основной прямоугольник для гиперболы (4.10) и ветви самой гиперболы (4.10) (рис. 43).

Через расположенные на оси $O'x'$ точки $(\sqrt{10}, 0, 0)$ и $(-\sqrt{10}, 0, 0)$ проведём прямые, параллельные оси $O'y'$, длиной 5 в сторону положительного направления оси $O'y'$ и длиной 5 в сторону отрицательного направления оси $O'y'$. Прямая, соединяющая полученные точки $(\sqrt{10}, 5, 0)$ и $(-\sqrt{10}, 5, 0)$, пройдёт через нанесённую на чертеже ранее, как уже отмечалось, точку $(0, 5, 0)$ и будет параллельна оси $O'x'$ (причём заметим, что по правилам начертательной геометрии эта прямая должна быть начерчена, как и сама ось $O'x'$, под углом 45° к горизонтали и вертикали, на которых расположены оси $O'y'$ и $O'z'$ соответственно). Аналогичным образом следует провести прямую, соединяющую полученные точки $(\sqrt{10}, -5, 0)$ и $(-\sqrt{10}, -5, 0)$, которая также будет параллельна оси $O'x'$ и пройдёт через точку $(0, -5, 0)$.

Завершив построение основного прямоугольника для гиперболы (4.11), проведём через его противоположные вершины диагонали и неограниченно продолжим их в обе стороны, т.е. построим тем самым асимптоты этой гиперболы.

Чтобы изобразить гиперболу (4.11) на чертеже, осталось найти её точки пересечения с осями координат $O'x'$ и $O'y'$. Пересекая гиперболу (4.11) осью $O'x'$:

$$\begin{cases} \frac{x'^2}{10} - \frac{y'^2}{25} = -1, \\ y' = 0, \\ z' = 0, \end{cases}$$

будем иметь $\frac{x'^2}{10} = -1$ или $x'^2 = -10$, откуда $x' = \pm\sqrt{-10}$,

т.е. для x' получили *мнимые* значения, и поэтому **ось $O'x'$** не имеет точек пересечения с рассматриваемой гиперболой (4.11) и является для неё **мнимой осью**.

Значит, действительной осью симметрии для гиперболы (4.11) будет ось $O'y'$. Убедимся в этом, определив точки пересечения оси $O'y'$ и данной гиперболы (4.11):

$$\begin{cases} \frac{x'^2}{10} - \frac{y'^2}{25} = -1, \\ x' = 0, \\ z' = 0. \end{cases}$$

Из этих уравнений получаем $-\frac{y'^2}{25} = -1$, откуда $y'^2 = 25$, а $y' = \pm 5$, т.е. точки $(0, 5, 0)$ и $(0, -5, 0)$ являются вершинами гиперболы (4.11), лежащей в плоскости $O'x'y'$.

Повторим теперь рис. 43 и продолжим его, построив прежде всего в плоскости $O'x'y'$ основной прямоугольник для гиперболы (4.11) таким образом, как это было подробно описано, затем проведём асимптоты этой гиперболы и, наконец, изобразим саму гиперболу (4.11), расположив её в плоскости $O'x'y'$ так, как показано на рис. 44.

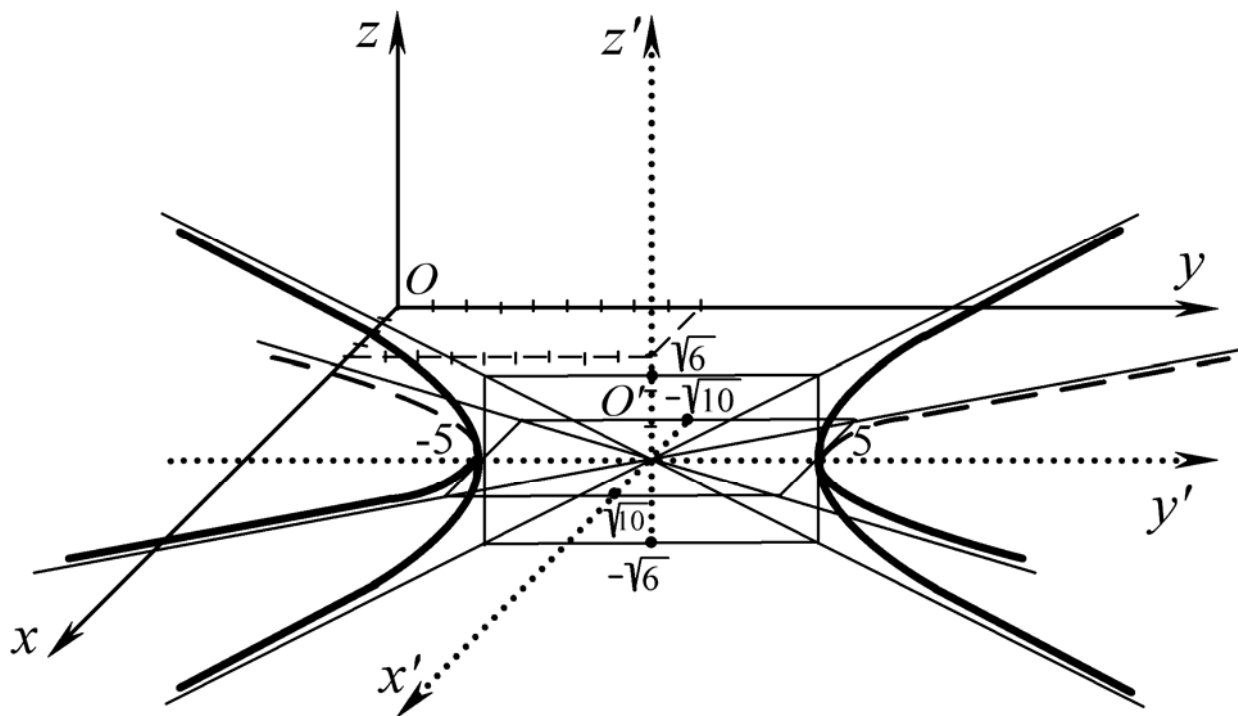


Рис. 44

В заключение рассмотрим сечения двуполостного гиперboloида (4.9) плоскостями $y' = h$, параллельными координатной плоскости $O'x'z'$. Линия пересечения двуполостного гиперboloида (4.9) каждой такой плоскостью $y' = h$ задаётся двумя уравнениями

$$\begin{cases} \frac{x'^2}{10} - \frac{y'^2}{25} + \frac{z'^2}{6} = -1, \\ y' = h, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \frac{x'^2}{10} + \frac{z'^2}{6} = \frac{h^2}{25} - 1, \\ y' = h. \end{cases} \quad (4.12)$$

Легко видеть:

- Уравнения (4.12) при $|h| < 5$ не имеют решений относительно (x', z') , поскольку в случае $|h| < 5$ $\frac{h^2}{25} - 1 < 0$,

в то время как $\frac{x'^2}{10} + \frac{z'^2}{6} \geq 0$ при любых значениях x' и z' .

Следовательно, секущая плоскость $y' = h$ начинает пересекать гиперboloид (4.9) лишь при $|h| \geq 5$, а при $|h| < 5$ плоскости $y' = h$ заданный гиперboloид (4.9) не пересекают.

- При $|h| = 5$, то есть при $h = 5$ или $h = -5$ из уравнений (4.12) получаем $\frac{x'^2}{10} + \frac{z'^2}{6} = 0$, откуда вытекает, что в этом случае решением уравнений (4.12) служат только две точки $(0, 5, 0)$ и $(0, -5, 0)$. Это означает, что плоскости $y' = 5$ и $y' = -5$ касаются заданного гиперboloида (4.9), а в слое между плоскостями $y' = -5$ и $y' = 5$ не содержится точек рассматриваемого гиперboloида (4.9).

• Если $|h| > 5$, то $\frac{h^2}{25} - 1 > 0$ и уравнения (4.12) можно переписать в виде

$$\begin{cases} \frac{x'^2}{10\left(\frac{h^2}{25}-1\right)} + \frac{z'^2}{6\left(\frac{h^2}{25}-1\right)} = 1, \\ y' = h. \end{cases}$$

Следовательно, плоскости $y' = h$ при $|h| > 5$ пересекают двуполостный гиперболоид (4.9) по эллипсам

$$\begin{cases} \frac{x'^2}{a^{*2}} + \frac{z'^2}{c^{*2}} = 1, \\ y' = h \end{cases} \quad (4.13)$$

с полуосями

$$a^* = \sqrt{10\left(\frac{h^2}{25}-1\right)}, \quad c^* = \sqrt{6\left(\frac{h^2}{25}-1\right)}. \quad (4.14)$$

• При возрастании $|h|$ величины a^* , c^* (4.14) возрастают, причем если $|h|$ возрастает бесконечно, то a^* и c^* (4.14) возрастают также бесконечно.

Таким образом, при изменении h от 5 до $+\infty$ эллипс (4.13) с полуосями (4.14) описывает одну полость рассматриваемого гиперболоида (4.9), бесконечно расширяющуюся в положительном направлении оси $O'y'$, а при изменении h от -5 до $-\infty$ эллипс (4.13) с полуосями (4.14) описывает другую полость заданного гиперболоида (4.9), бесконечно расширяющуюся в отрицательном направлении оси $O'y'$, т.е. заданный *двуполостный гиперболоид* (4.9) действительно *состоит из двух отдельных частей* – «полостей», каждая из которых имеет вид бесконечной выпуклой чаши.

В заключение убедимся, что при движении эллипсов (4.13) с полуосями (4.14) (соответствующем возрастанию $|h|$ от 5 до ∞) вершины этих эллипсов при любом значении h всегда располагаются на гиперболах (4.10) и (4.11), лежащих в плоскостях $O'y'z'$ и $O'x'y'$. Другими словами, покажем, что действительно концы осей движущихся с изменением $|h|$ эллипсов (4.13) с полуосями (4.14) скользят по гиперболам (4.10) и (4.11).

С этой целью возьмем **сначала** какое-нибудь **конкретное значение h** . Пусть, например, это будет $|h|=10$. Тогда из формул (4.14) получаем, что эллипсы (4.13), расположенные в плоскостях $y'=10$ и $y'=-10$, имеют полуоси

$$a^* = \sqrt{10 \left(\frac{100}{25} - 1 \right)} = \sqrt{10(4-1)} = \sqrt{30} \approx 5,5,$$

$$c^* = \sqrt{6 \left(\frac{100}{25} - 1 \right)} = \sqrt{6(4-1)} = \sqrt{18} \approx 4,243$$

и, следовательно, вершины этих эллипсов имеют координаты:

$$(0, -10, \sqrt{18}), (0, -10, -\sqrt{18}), (\sqrt{30}, -10, 0), (-\sqrt{30}, -10, 0)$$

$$\text{и } (0, 10, \sqrt{18}), (0, 10, -\sqrt{18}), (\sqrt{30}, 10, 0), (-\sqrt{30}, 10, 0).$$

Подставляя координаты соответствующих вершин $(0, \pm 10, \pm \sqrt{18})$ в уравнения гиперболы (4.10):

$$\begin{cases} \frac{y'^2}{25} - \frac{z'^2}{6} = 1, \\ x' = 0, \end{cases}$$

будем иметь

$$\begin{cases} \frac{100}{25} - \frac{18}{6} = 4 - 3 \equiv 1, \\ x' \equiv 0. \end{cases}$$

Аналогично, подставляя координаты других четырех вершин $(\pm\sqrt{30}, \pm 10, 0)$ в уравнение гиперболы (4.11):

$$\begin{cases} \frac{x'^2}{10} - \frac{y'^2}{25} = -1, \\ z' = 0, \end{cases}$$

получаем

$$\begin{cases} \frac{30}{10} - \frac{100}{25} = 3 - 4 \equiv -1, \\ z' \equiv 0. \end{cases}$$

Таким образом, доказали, что вершины эллипсов (4.13), расположенных в плоскостях $y' = 10$ и $y' = -10$, действительно принадлежат гиперболам (4.10) и (4.11), лежащим в плоскостях $O'y'z'$ и $O'x'y'$.

Наконец, установим, что и **при произвольном значении h** вершины эллипсов (4.13) с полуосями (4.14) находятся на гиперболах (4.10) и (4.11). Эти вершины при любом значении h имеют следующие координаты:

$$\begin{aligned} & \left(0, -h, \sqrt{6\left(\frac{h^2}{25} - 1\right)} \right), \quad \left(0, -h, -\sqrt{6\left(\frac{h^2}{25} - 1\right)} \right), \\ & \left(\sqrt{10\left(\frac{h^2}{25} - 1\right)}, -h, 0 \right), \quad \left(-\sqrt{10\left(\frac{h^2}{25} - 1\right)}, -h, 0 \right); \end{aligned}$$

$$\left(0, h, \sqrt{6\left(\frac{h^2}{25}-1\right)}\right), \quad \left(0, h, -\sqrt{6\left(\frac{h^2}{25}-1\right)}\right),$$

$$\left(\sqrt{10\left(\frac{h^2}{25}-1\right)}, h, 0\right), \quad \left(-\sqrt{10\left(\frac{h^2}{25}-1\right)}, h, 0\right).$$

Подставляя координаты соответствующих вершин $\left(0, \pm h, \pm \sqrt{6\left(\frac{h^2}{25}-1\right)}\right)$ в уравнения гиперболы (4.10), будем иметь

$$\begin{cases} \frac{h^2}{25} - \frac{6\left(\frac{h^2}{25}-1\right)}{6} = \frac{h^2}{25} - \frac{h^2}{25} + 1 \equiv 1, \\ x' \equiv 0. \end{cases}$$

Аналогично, подставляя координаты других четырех вершин $\left(\pm \sqrt{10\left(\frac{h^2}{25}-1\right)}, \pm h, 0\right)$ в уравнения гиперболы (4.11), также

приходим к заключению, что эти координаты действительно удовлетворяют уравнениям гиперболы (4.11) при любых значениях h :

$$\begin{cases} \frac{10\left(\frac{h^2}{25}-1\right)}{10} - \frac{h^2}{25} = \frac{h^2}{25} - 1 - \frac{h^2}{25} \equiv -1, \\ z' \equiv 0. \end{cases}$$

Завершив полное исследование заданного уравнения **методом сечений**, выполним теперь окончательный чертеж рассматриваемого двуполостного гиперboloида (4.7) (рис. 45).

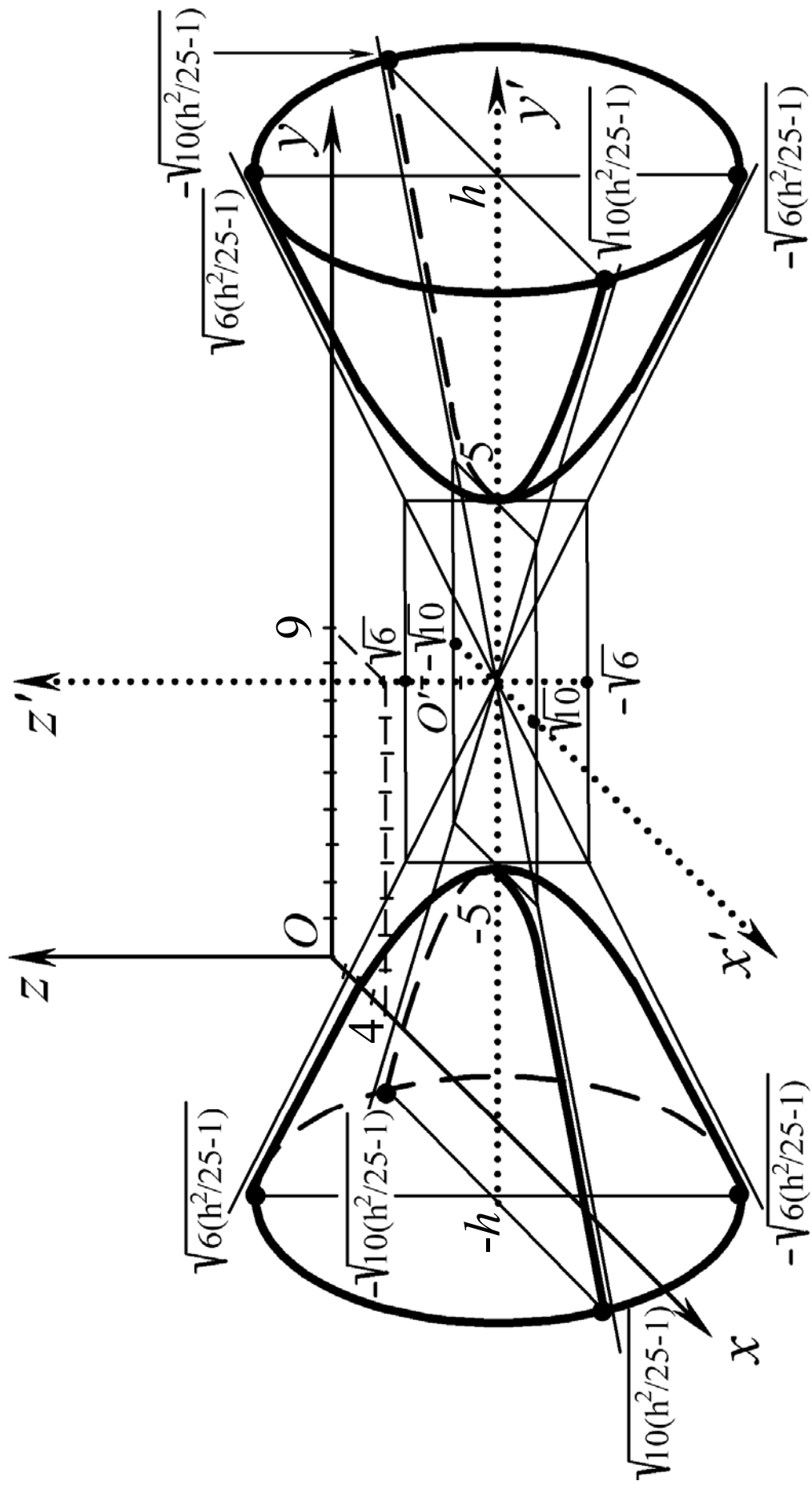


Рис. 45

Пример 3. Привести к каноническому виду уравнение

$$2y^2 + 3z^2 - 6x + 28y - 30z + 125 = 0,$$

установить, какую поверхность оно определяет, и построить эту поверхность, выполнив исследование заданного уравнения с помощью метода сечений.

Решение. Преобразуем левую часть заданного уравнения, дополняя соответствующие члены до полных квадратов:

$$2(y^2 + 14y + 49) - 98 + 3(z^2 - 10z + 25) - 75 - 6x + 125 = 0$$

или

$$2(y + 7)^2 + 3(z - 5)^2 = 6x + 48,$$

откуда

$$2(y + 7)^2 + 3(z - 5)^2 = 6(x + 8).$$

Разделив обе части последнего уравнения на 6, окончательно получаем

$$\frac{(y + 7)^2}{3} + \frac{(z - 5)^2}{2} = x + 8. \quad (4.15)$$

Введем новые координаты x' , y' и z' , используя формулы параллельного переноса осей координат

$$x' = x + 8, \quad y' = y + 7, \quad z' = z - 5. \quad (4.16)$$

Тогда относительно новой вспомогательной системы координат $O'x'y'z'$ уравнение (4.15) принимает вид

$$\frac{y'^2}{3} + \frac{z'^2}{2} = x'. \quad (4.17)$$

Сравнивая полученное уравнение (4.17) с уравнением (3.47) (см. замечание в п. 3.3.1) заключаем, что данная поверхность есть **эллиптический параболоид**, осью которого является ось $O'x'$, поскольку уравнение (4.17) содержит только квадраты координат y' и z' , и плоскостями симметрии поэтому для данной поверхности будут плоскости $O'x'y'$ и $O'x'z'$, пересекающиеся по оси $O'x'$. Из уравнения (4.17) вытекает

также, что рассматриваемый эллиптический параболоид расположен в полупространстве $x' \geq 0$.

Поэтому **чертеж** заданного эллиптического параболоида, определяемого уравнением (4.15) (в новых осях – уравнением (4.17)), будет **наиболее наглядным**, если развернуть оси координат таким образом, чтобы ось Ox оказалась направленной **вертикально снизу вверх** (именно потому, что эллиптический параболоид, заданный уравнением (4.17), имеет своей **осью симметрии – ось $O'x'$**).

Тогда, чтобы прямоугольная декартова система координат $Oxyz$ оставалась **правой**, ось Oz следует направить горизонтально *слева направо*, а ось Oy – горизонтально и «вперед» – так, как обычно располагают ось Ox .

Изобразим на рис. 46 описанную прямоугольную декартову систему координат $Oxyz$ и новую вспомогательную также прямоугольную декартову систему $O'x'y'z'$, начало которой находится согласно формулам (4.16) в точке $O'(-8, -7, 5)$, а оси $O'x'$, $O'y'$ и $O'z'$ соответственно параллельны осям Ox , Oy и Oz и направлены в те же стороны.

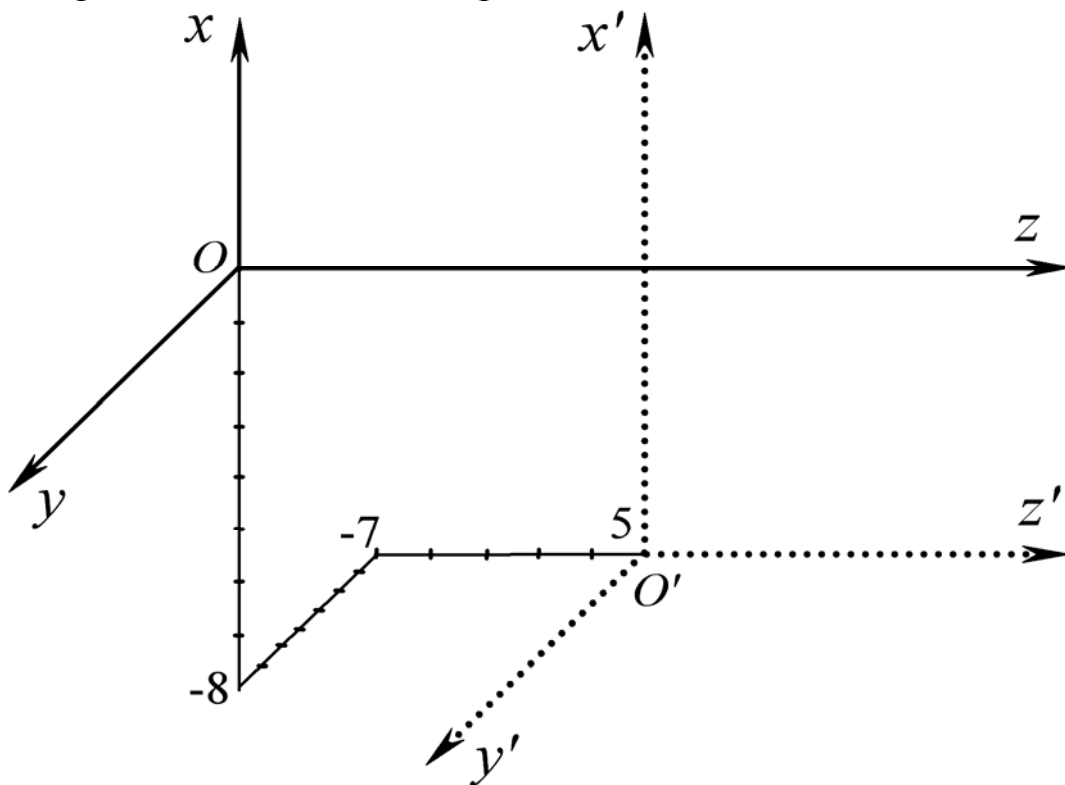


Рис. 46

Займемся теперь исследованием с помощью **метода сечений** формы эллиптического параболоида, заданного уравнением (4.17) относительно новой вспомогательной системы координат $O'x'y'z'$.

Рассмотрим сечение этого эллиптического параболоида координатной плоскостью $O'x'z'$ ($y'=0$):

$$\begin{cases} \frac{y'^2}{3} + \frac{z'^2}{2} = x', \\ y' = 0. \end{cases}$$

При $y'=0$ из уравнения (4.17) имеем $z'^2 = 2x'$. Таким образом, сечение эллиптического параболоида (4.17) плоскостью $O'x'z'$ определяется уравнениями

$$\begin{cases} z'^2 = 2x', \\ y' = 0 \end{cases} \quad (4.18)$$

и представляет собой **параболу**.

Как следует из уравнений (4.18), x' не может принимать отрицательных значений ($x' \geq 0$), то есть все точки параболы (4.18) лежат выше оси $O'z'$ (выше плоскости $O'y'z'$). При этом *каждому значению x' соответствуют два значения z' , равные по абсолютной величине, но противоположные по знаку*

$$z' = \pm \sqrt{2x'}. \quad (4.19)$$

Следовательно, кривая (4.18), лежащая в плоскости $O'x'z'$ ($y'=0$), расположена *симметрично* относительно оси $O'x'$. *Парабола имеет одну ось симметрии*, называемую её *осью*. В данном случае – осью параболы (4.18) служит ось $O'x'$. Точка пересечения параболы с её осью симметрии называется *вершиной параболы*. Для параболы, заданной уравнениями (4.18), вершиной является начало координат $O'(0, 0, 0)$.

Чтобы достаточно точно построить параболу (4.18) на чертеже, найдем несколько точек, лежащих в плоскости $O'x'z'$

(т.е. имеющих $y'=0$), через которые проходит эта парабола. Будем брать какие-нибудь определенные конкретные значения x' , например, $x'_1=1$, затем $x'_2=2$, $x'_3=3$, $x'_4=8$, $x'_5=12$ и находить из уравнения (4.19) соответствующие им значения z' , записывая результаты в виде таблицы:

x'	0	1	2	3	8	12
z'	0	$\pm\sqrt{2} \approx \pm 1,4$	± 2	$\pm\sqrt{6} \approx \pm 2,5$	± 4	$\pm\sqrt{24} = \pm 2\sqrt{6} \approx \pm 5$

Таким образом, получили следующие точки, расположенные на рассматриваемой параболе, определяемой уравнениями (4.18):

$$\begin{aligned}
 &M_1(1, 0, -\sqrt{2}) \quad \text{и} \quad M_2(1, 0, +\sqrt{2}), \\
 &M_3(2, 0, -2) \quad \text{и} \quad M_4(2, 0, 2), \\
 &M_5(3, 0, -\sqrt{6}) \quad \text{и} \quad M_6(3, 0, \sqrt{6}), \quad (4.20) \\
 &M_7(8, 0, -4) \quad \text{и} \quad M_8(8, 0, 4), \\
 &M_9(12, 0, -\sqrt{24}) \quad \text{и} \quad M_{10}(12, 0, \sqrt{24}).
 \end{aligned}$$

Заметим, что с увеличением x' согласно выражению (4.19), абсолютная величина z' увеличивается, причем когда x' неограниченно возрастает, то и $|z'|$ тоже неограниченно возрастает.

Следовательно, парабола, заданная уравнениями (4.18), проходит через начало координат $O'(0; 0; 0)$ и точки M_1, M_2, \dots, M_{10} (4.20), координаты которых удовлетворяют уравнениям (4.18), и имеет вид, изображенный на рис. 47.

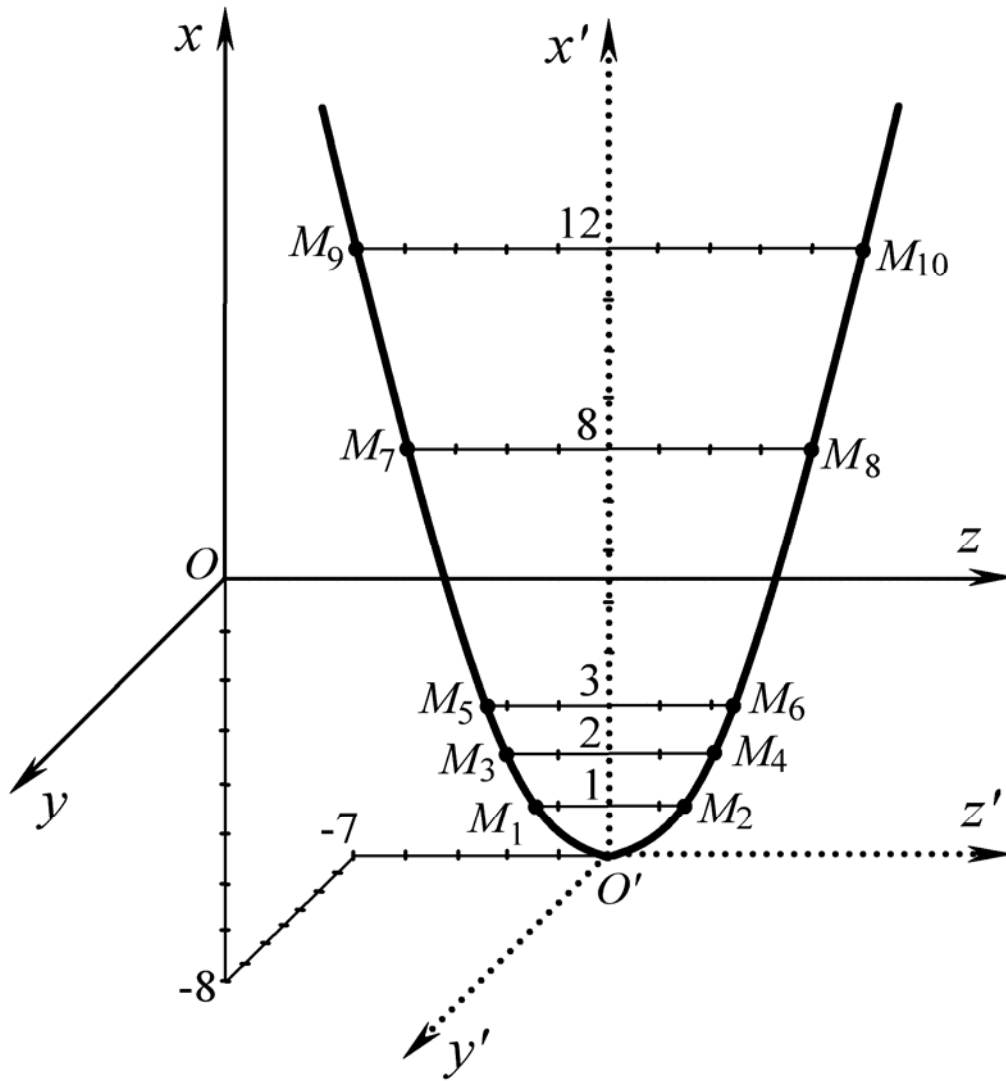


Рис. 47

Пересекая эллиптический параболоид (4.17) координатной плоскостью $O'x'y'$ ($z'=0$):

$$\begin{cases} \frac{y'^2}{3} + \frac{z'^2}{2} = x', \\ z' = 0, \end{cases}$$

получим в сечении параболу:

$$\begin{cases} y'^2 = 3x', \\ z' = 0, \end{cases} \quad (4.21)$$

расположенную аналогичным образом, то есть имеющую вершину в начале координат $O'(0, 0, 0)$, симмет-

ричную относительно оси $O'x'$, поскольку каждому значению x' соответствуют два значения y' , определяемые выражением

$$y' = \pm\sqrt{3x'}, \quad (4.22)$$

и направленную своими ветвями также в сторону возрастания значений x' (т.к. x' по-прежнему не может принимать отрицательных значений и с увеличением x' , как это вытекает из выражения (4.22), $|y'|$ также возрастает, причем при неограниченном увеличении x' абсолютная величина y' также неограниченно возрастает).

Для выполнения чертежа параболы (4.21) также найдем несколько точек, координаты которых удовлетворяют уравнению (4.21). Отложим затем эти точки в плоскости $O'x'y'$ (т.к. все они имеют $z'=0$) на рис. 48 (где уже изображена парабола (4.18)) и проведем через них рассматриваемую параболу (4.21).

Возьмем те же самые значения x' , которые были использованы при построении параболы (4.18), найдем, согласно выражению (4.22), соответствующие этим $x'_1=1$, $x'_2=2$, $x'_3=3$, $x'_4=8$, $x'_5=12$ значения y'_1 , y'_2 , y'_3 , y'_4 , y'_5 и запишем опять результаты вычислений в следующую таблицу:

x'	0	1	2	3	8	12
y'	0	$\pm\sqrt{3} \approx \pm 1,7$	$\pm\sqrt{6} \approx \pm 2,5$	± 3	$\pm\sqrt{24} \approx \pm 5$	± 6

Получили следующие точки, через которые проходит парабола, определяемая уравнениями (4.21):

$$\begin{aligned}
 &P_1(1, \sqrt{3}, 0) \quad \text{и} \quad P_2(1, -\sqrt{3}, 0), \\
 &P_3(2, \sqrt{6}, 0) \quad \text{и} \quad P_4(2, -\sqrt{6}, 0), \\
 &P_5(3, 3, 0) \quad \text{и} \quad P_6(3, -3, 0), \\
 &P_7(8, \sqrt{24}, 0) \quad \text{и} \quad P_8(8, -\sqrt{24}, 0), \\
 &P_9(12, 6, 0) \quad \text{и} \quad P_{10}(12, -6, 0).
 \end{aligned} \quad (4.23)$$

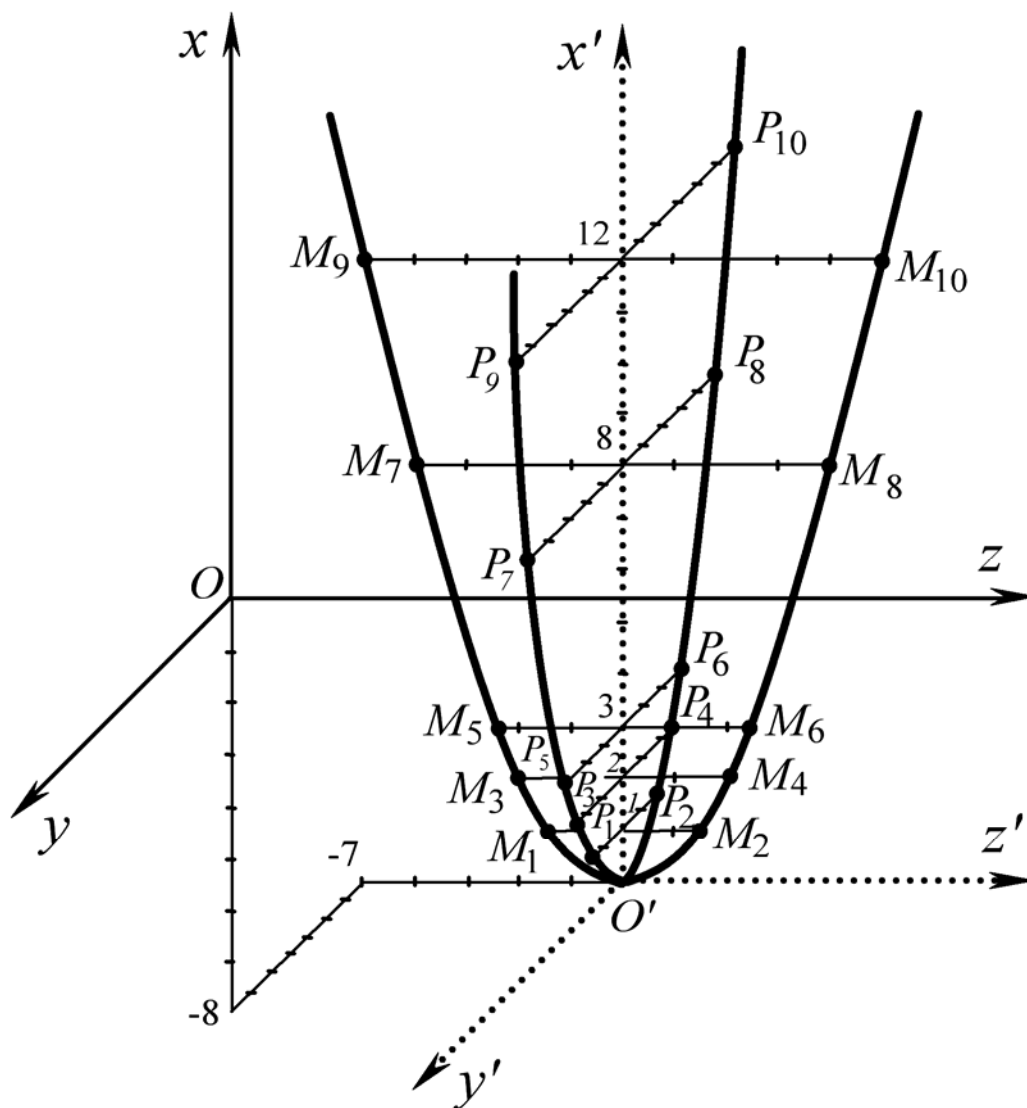


Рис. 48

Осталось рассмотреть линии пересечения данного эллиптического параболоида (4.17) плоскостями $x'=h$, параллельными координатной плоскости $O'y'z'$:

$$\begin{cases} \frac{y'^2}{3} + \frac{z'^2}{2} = x', \\ x' = h \end{cases}$$

ИЛИ

$$\begin{cases} \frac{y'^2}{3} + \frac{z'^2}{2} = h, \\ x' = h. \end{cases} \quad (4.24)$$

Анализ уравнений (4.24) показывает:

- При $h < 0$ уравнения (4.24) не имеют решений, следовательно, плоскости $x' = h$ при $h < 0$ с данным эллиптическим параболоидом (4.17) не пересекаются.

- При $h = 0$ уравнения (4.24) имеют единственное решение $x' = 0, y' = 0, z' = 0$. Это означает, что сечение данного эллиптического параболоида плоскостью $x' = 0$ вырождается в точку – начало координат $O'(0; 0; 0)$, то есть плоскость $x' = 0$ касается эллиптического параболоида (4.17) в начале координат.

- При $h > 0$, линии пересечения (4.24) эллиптического параболоида (4.17) с плоскостями $x' = h$ представляют собой эллипсы:

$$\begin{cases} \frac{y'^2}{3h} + \frac{z'^2}{2h} = 1, \\ x' = h \end{cases} \quad (4.25)$$

с полуосями

$$b^* = \sqrt{3h}, \quad c^* = \sqrt{2h}. \quad (4.26)$$

- При возрастании h величины b^* и c^* (4.26) возрастают, причем если h возрастает бесконечно, то полуоси b^*, c^* (4.26) возрастают также бесконечно.

Чтобы убедиться, что вершины эллипсов (4.25), имеющие при любых значениях h координаты:

$$\begin{aligned} N_1(h, 0, -\sqrt{2h}) \quad \text{и} \quad N_2(h, 0, \sqrt{2h}), \\ S_1(h, \sqrt{3h}, 0) \quad \text{и} \quad S_2(h, -\sqrt{3h}, 0), \end{aligned} \quad (4.27)$$

при изменении h от 0 до $+\infty$ скользят по параболам (4.18) и (4.21), достаточно подставить координаты вершин N_1 и N_2 (4.27) в уравнения параболы (4.18), а координаты вершин S_1 и S_2 (4.27) в уравнения параболы (4.21).

Действительно, полагая в уравнениях (4.18):

$$\begin{cases} z'^2 = 2x', \\ y' = 0, \end{cases}$$

$x' = h$, $y' = 0$, $z' = \pm\sqrt{2h}$ (т.е. $z'^2 = 2h$), легко видеть, что координаты вершин N_1 и N_2 (4.27) обращают уравнения параболы (4.18) в тождества.

Аналогично, подставляя координаты $x' = h$, $y' = \pm\sqrt{3h}$, $z' = 0$ вершин S_1 и S_2 (4.27) в уравнения (4.21):

$$\begin{cases} y'^2 = 3x', \\ z' = 0, \end{cases}$$

также видим, что координаты вершин S_1 и S_2 удовлетворяют уравнениям (4.21), определяющим параболу, лежащую в плоскости $O'x'y'$.

З а м е т и м, что если придавать h конкретные значения, например, $h_1 = 1$, $h_2 = 2$, $h_3 = 3$, $h_4 = 8$, $h_5 = 12$, то есть те самые значения x' , которые были использованы при построении парабол (4.18) и (4.21), то вершины (4.27) эллипсов (4.25) при этих значениях h как раз совпадут с соответствующими точками M_1, M_2, \dots, M_{10} (4.20) и P_1, P_2, \dots, P_{10} (4.23), а в плоскостях $x' = 1$, $x' = 2$, $x' = 3$, $x' = 8$, $x' = 12$ можно изобразить эллипсы (4.25), проходящие соответственно через точки P_1, M_1, P_2, M_2 , P_3, M_3, P_4, M_4 , P_5, M_5, P_6, M_6 , P_7, M_7, P_8, M_8 и P_9, M_9, P_{10}, M_{10} .

П о д в о д я и т о г всем рассуждениям, изложенным выше, **з а к л ю ч а е м**, что эллиптический параболоид, заданный уравнением (4.15), имеет вид бесконечной выпуклой чашки. При этом его можно рассматривать как **поверхность, образованную движущимся** (с изменением h от 0 до $+\infty$) **эллипсом** (4.25), *концы осей которого* N_1, N_2, S_1, S_2 (4.27) *скользят по параболам* (4.18) и (4.21). Этот эллиптический параболоид (4.15) с вершиной в точке $O'(-8, -7, 5)$ имеет две

плоскости симметрии, совпадающие при данном выборе координатной системы с плоскостями $O'x'y'$ и $O'x'z'$, пересекающимися по оси $O'x'$, которая является осью данного эллиптического параболоида. Наконец, поскольку в данном случае осью симметрии эллиптического параболоида (4.17) служит ось $O'x'$, для большей наглядности при изображении этой поверхности оси координат прямоугольной декартовой системы $Oxyz$ развернуты так, как показано на рис. 46.

Выполним результирующий чертеж заданного эллиптического параболоида (4.15) (рис. 49).

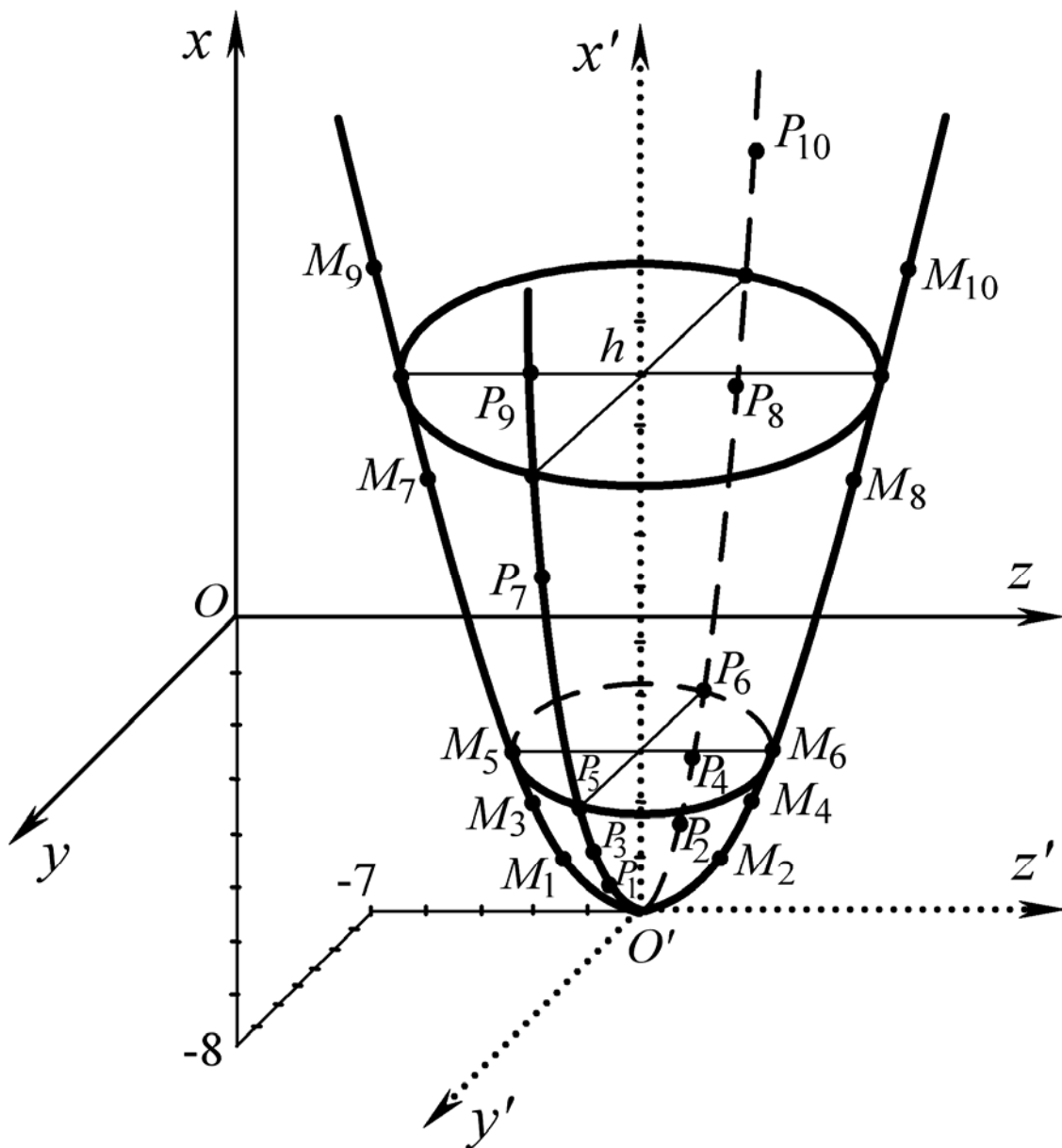


Рис. 49

Пример 4. Привести к каноническому виду уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 = ax,$$

установить, какую поверхность оно определяет, и построить эту поверхность, выполнив исследование заданного уравнения с помощью метода сечений.

Решение. Это простое уравнение задает поверхность, часто встречающуюся при решении многих задач математического анализа, в частности, в приложениях двойных и тройных интегралов при вычислении, например, объемов и площадей поверхности тел, ограниченных с одной стороны этой поверхностью, а с другой стороны – какой-либо ещё из известных поверхностей. Поэтому необходимо изучить эту поверхность, запомнить её, чтобы точно и быстро чертить её в будущем, когда понадобится.

Дополняя до полного квадрата члены, содержащие x , приведем заданное уравнение к каноническому виду:

$$\left(x^2 - ax + \frac{a^2}{4}\right) - \frac{a^2}{4} + y^2 + z^2 = 0,$$

откуда окончательно будем иметь

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^2}{4}. \quad (4.28)$$

Очевидно (см. уравнение (1.2)), что это уравнение (4.28) определяет **сферу** с центром в точке $C\left(\frac{a}{2}, 0, 0\right)$ и ради-

усом $R = \frac{a}{2}$.

Применим **метод сечений**, чтобы выполнить точный чертеж сферы, заданной уравнением (4.28). Изучим линии, получающиеся в результате пересечения этой сферы с координатными плоскостями, а также с плоскостями, параллельными плоскости Oyz .

Пересекая данную сферу (4.28) плоскостью Oxy , уравнение которой $z = 0$,

$$\begin{cases} \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^2}{4}, \\ z = 0, \end{cases}$$

получим окружность, лежащую в плоскости Oxy ,

$$\begin{cases} \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}, \\ z = 0 \end{cases} \quad (4.29)$$

с центром в точке $C\left(\frac{a}{2}, 0, 0\right)$ и радиусом $R = \frac{a}{2}$.

Изобразим окружность, определяемую уравнением (4.29), на рис. 50.

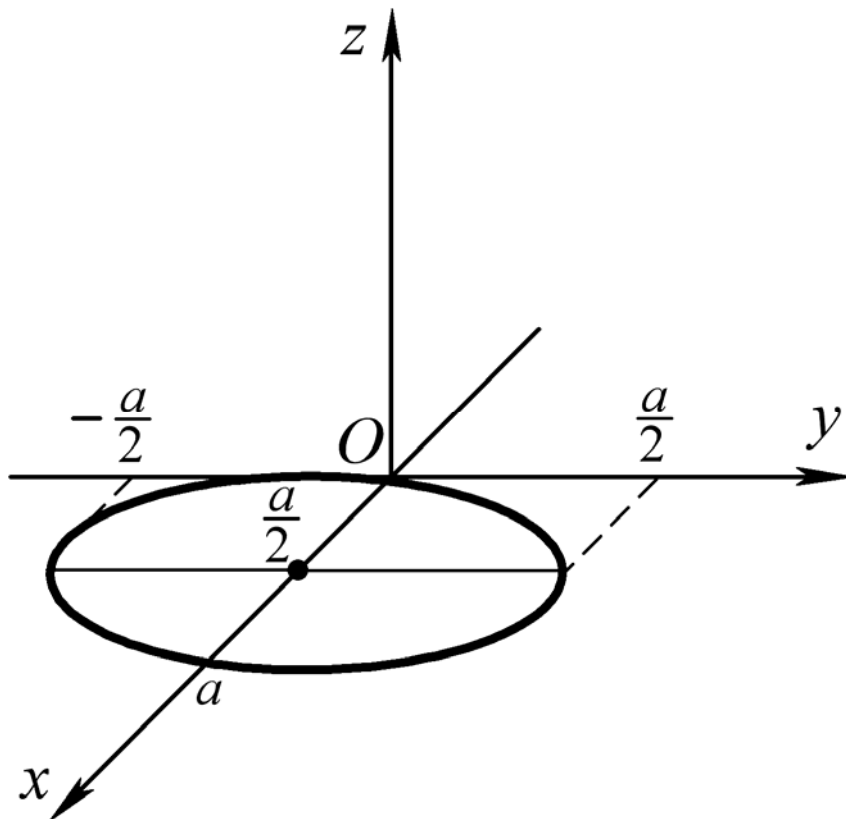


Рис. 50

Аналогично в сечении сферы (4.28) плоскостью Oxz (уравнение которой $y=0$):

$$\begin{cases} \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^2}{4}, \\ y=0 \end{cases}$$

также лежит окружность

$$\begin{cases} \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + z^2 = \frac{a^2}{4}, \\ y=0 \end{cases} \quad (4.30)$$

с центром в точке $C\left(\frac{a}{2}, 0, 0\right)$ и радиусом $R = \frac{a}{2}$.

Добавим на рис. 51 эту окружность (4.30), расположенную в плоскости Oxz , к изображенной ранее на рис. 50 окружности (4.29), лежащей в плоскости Oxy .

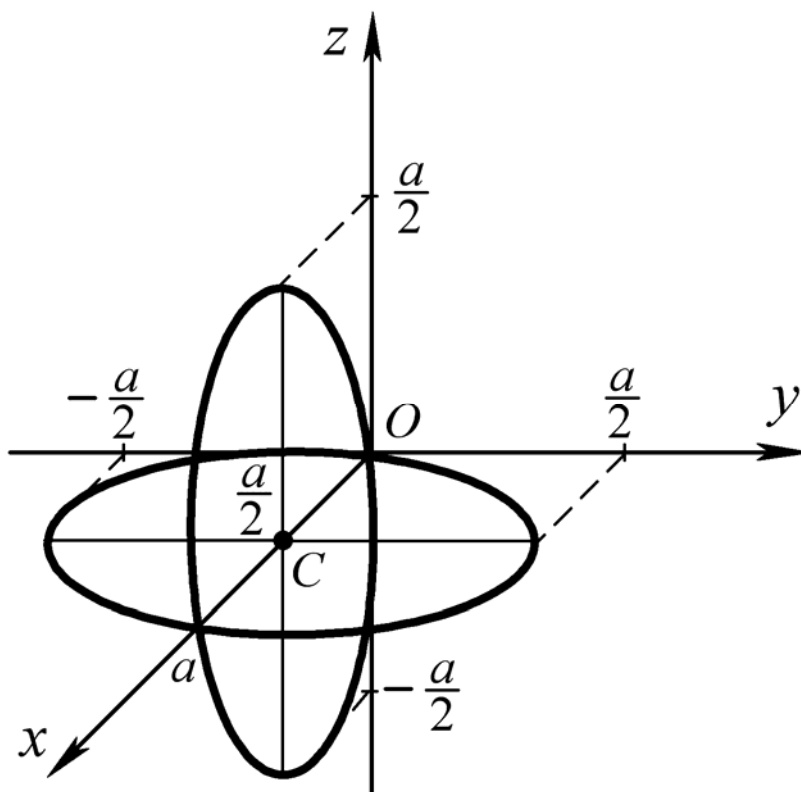


Рис. 51

Заметим, что и та, и другая рассмотренные окружности (4.29) и (4.30) проходят через начало координат $O(0, 0, 0)$, так как центр этих окружностей $C\left(\frac{a}{2}, 0, 0\right)$ находится на оси Ox на расстоянии $\frac{a}{2}$ от начала координат и радиус R этих окружностей равен тому же самому числу $\frac{a}{2}$.

Можно ещё обосновать этот факт иначе, раскрывая скобки в уравнении (4.29):

$$x^2 - ax + \frac{a^2}{4} + y^2 = \frac{a^2}{4}$$

и получая уравнения

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = ax, \\ z = 0 \end{cases} \quad (4.31)$$

и соответственно для окружности (4.30) уравнения

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = ax, \\ y = 0, \end{cases} \quad (4.32)$$

откуда легко видеть, что координаты начала координат $x=0$, $y=0$, $z=0$ удовлетворяют этим последним уравнениям (4.31) и (4.32), а это и означает, что обе окружности (4.31) и (4.32) проходят через начало координат. Впрочем, анализ самого *исходного* заданного уравнения

$$x^2 + y^2 + z^2 = ax \quad (4.33)$$

также показывает, что координаты начала координат $x=0$, $y=0$, $z=0$ удовлетворяют этому уравнению (4.33), определяющему сферу, и, следовательно, сразу можно было сделать вывод, что заданная **сфера (4.33) проходит через начало координат.**

Рассмотрим теперь сечения данной сферы плоскостями, параллельными координатной плоскости Oyz . Каждая из таких плоскостей определяется уравнением $x = h$, а линия, получаемая в сечении, задается двумя уравнениями:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = ax, \\ x = h \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = ah - h^2, \\ x = h. \end{cases} \quad (4.34)$$

Отсюда видно:

- При $ah - h^2 < 0$ уравнения (4.34) не имеют решений относительно (y, z) . Это означает, что при $h < 0$ и $h > a$ точек пересечения сферы (4.33) с плоскостями $x = h$ не существует. Таким образом, при $h < 0$ и $h > a$ (когда $ah - h^2 < 0$) плоскости $x = h$ сферу (4.33) не пересекают.

- При $h = 0$ и $h = a$ из уравнений (4.34) имеем $y^2 + z^2 = 0$, т.е. в этом случае решением уравнений (4.34) будут только две точки $(0, 0, 0)$ и $(a, 0, 0)$. Следовательно, линии пересечения (4.34) сферы (4.33) с плоскостями $x = 0$ (координатная плоскость Oyz) и $x = a$ вырождаются в две точки $(0, 0, 0)$ и $(a, 0, 0)$. Иными словами, плоскости $x = 0$ и $x = a$ касаются заданной сферы (4.33).

- При $0 < h < a$ плоскости $x = h$ пересекают сферу (4.33) по окружностям

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = R^2, \\ x = h \end{cases} \quad (4.35)$$

радиуса

$$R = \sqrt{ah - h^2} \quad (4.36)$$

с центрами в точках $(h, 0, 0)$.

Радиус R (4.36) зависит от h . При $h=0$ $R=0$ и окружность стягивается в точку $(0, 0, 0)$, в которой координатная плоскость Oyz касается сферы (4.33), о чем уже шла речь.

При изменении же h от 0 до $\frac{a}{2}$ радиус R , как легко видеть

из выражения (4.36), возрастает, а при изменении h от $\frac{a}{2}$

до a радиус R (4.36) убывает, обращаясь опять в нуль при $h=a$. Таким образом, наибольшее значение ра-

диус R (4.36) имеет при $h = \frac{a}{2}$. В этом случае

$$R = \sqrt{a \frac{a}{2} - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}.$$

Значит, самая большая окружность располагается в сечении и плоскостью $x = \frac{a}{2}$ и имеет радиус $R = \frac{a}{2}$, а центр в точке

$C\left(\frac{a}{2}, 0, 0\right)$. Запишем уравнение этой окружности

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = \frac{a^2}{4}, \\ x = \frac{a}{2} \end{cases} \quad (4.37)$$

и выполним чертеж этой окружности (4.37) на рис. 52, присоединив его к изображениям на рис. 51 окружностей (4.29) и (4.30), завершая тем самым исследование формы и чертеж самой заданной сферы (4.33).

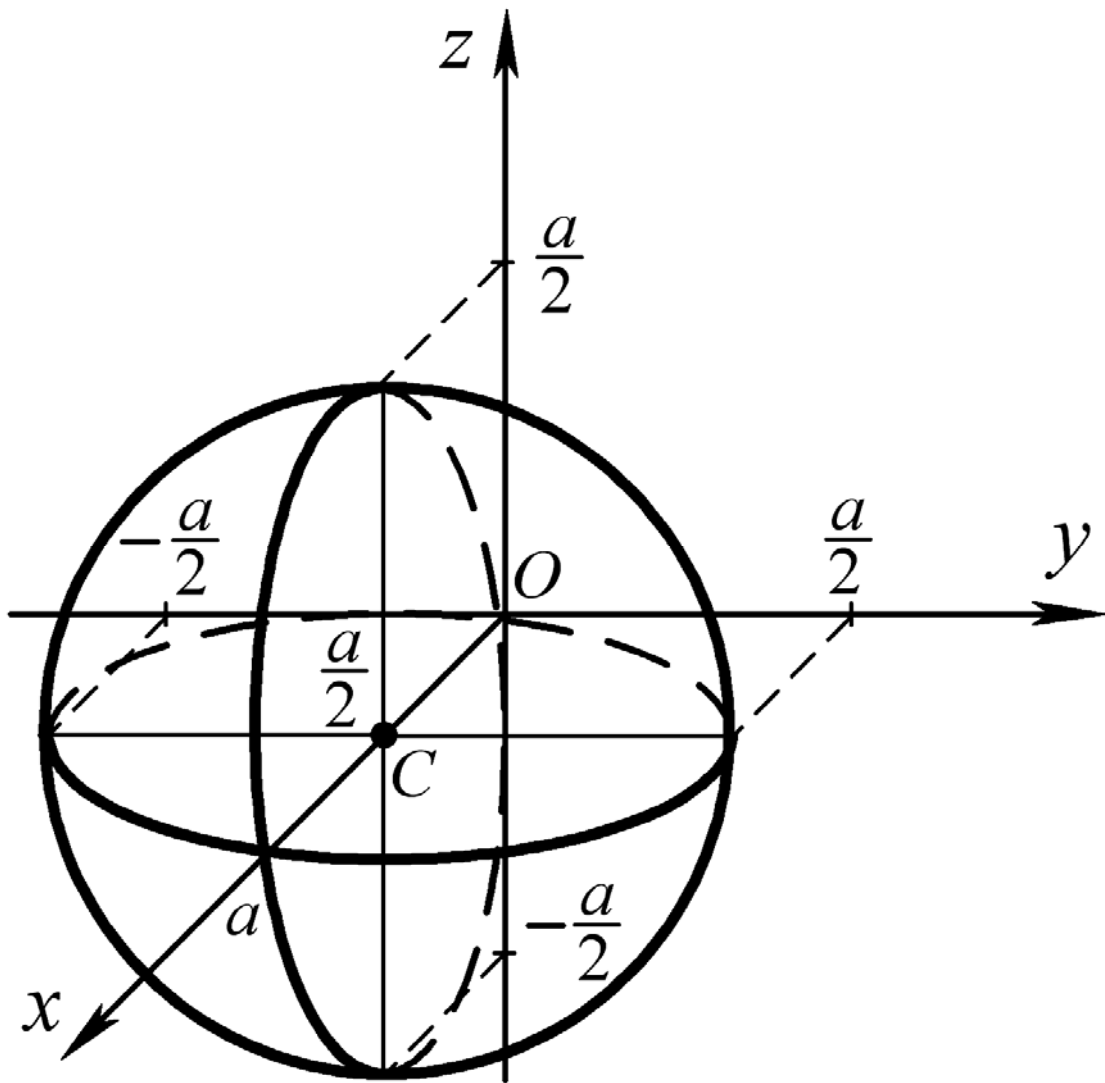


Рис. 52

Заметим в заключение, что так как центр $C\left(\frac{a}{2}, 0, 0\right)$ заданной сферы (4.33) находится на оси Ox , то **чертеж** этой сферы будет лучше «смотреться», если ось Ox направить вертикально вверх, то есть если **оси** координат прямоугольной декартовой системы $Oxyz$ **развернуть** таким образом, как это было подробно описано в предыдущем примере 3 (см. рис. 46), где рассматривался эллиптический параболоид (4.15) с осью симметрии, параллельной оси Ox (рис. 53).

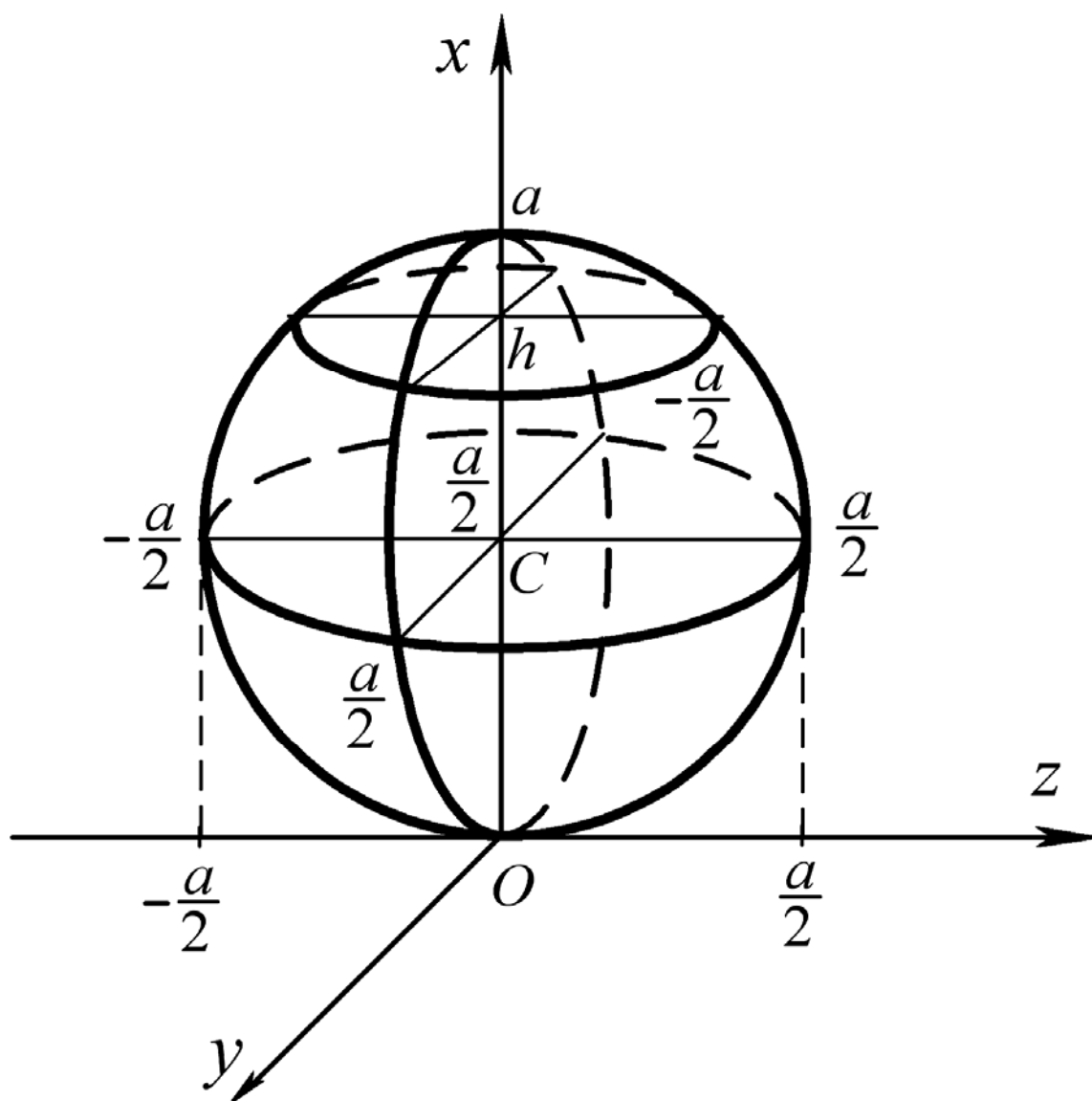


Рис. 53

Пример 5. Привести к каноническому виду уравнение

$$36x^2 - 16y^2 + 27z^2 - 216x - 64y - 324z - 64 = 0,$$

установить, какую поверхность оно определяет, и построить эту поверхность, выполнив исследование заданного уравнения с помощью метода сечений.

Решение. Выделяя полные квадраты, приведем заданное уравнение к каноническому виду

$$\begin{aligned}
& 36(x^2 - 6x + 9) - 324 - 16(y^2 + 4y + 4) + 64 + \\
& \quad + 27(z^2 - 12z + 36) - 972 - 64 = 0, \\
& 36(x-3)^2 - 16(y+2)^2 + 27(z-6)^2 = 1296,
\end{aligned}$$

откуда, разделив обе части этого уравнения на 1296, окончательно получаем

$$\frac{(x-3)^2}{36} - \frac{(y+2)^2}{81} + \frac{(z-6)^2}{48} = 1. \quad (4.38)$$

Введем новые координаты x' , y' и z' , используя формулы параллельного переноса осей координат

$$x' = x - 3, \quad y' = y + 2, \quad z' = z - 6. \quad (4.39)$$

Относительно новой вспомогательной системы координат $O'x'y'z'$ с началом координат в точке $O'(3, -2, 6)$ и осями координат, параллельными соответствующим координатным осям Ox , Oy , Oz , уравнение (4.38) принимает канонический вид

$$\frac{x'^2}{36} - \frac{y'^2}{81} + \frac{z'^2}{48} = 1. \quad (4.40)$$

Сравнивая полученное уравнение (4.40) с уравнением (3.18) (см. замечание 2 в п. 3.2.1), приходим к выводу, что уравнение (4.40) задает **однополостный гиперboloид** с полуосями $a=6$, $b=9$, $c=\sqrt{48} \approx 7$, так как в правой части это уравнение содержит единицу, в левой же части – квадраты координат x' и z' с положительными коэффициентами, а квадрат координаты y' с отрицательным коэффициентом, и потому рассматриваемый однополостный гиперboloид «**вытянут**» **вдоль оси $O'y'$** .

Займемся исследованием этой поверхности **методом сечений**, чтобы построить однополостный гиперboloид, определяемый уравнением (4.38), на чертеже.

Как всегда, прежде всего рассмотрим сечение данной поверхности (4.40) координатной плоскостью $O'y'z'$, имеющей

уравнение $x' = 0$:

$$\begin{cases} \frac{x'^2}{36} - \frac{y'^2}{81} + \frac{z'^2}{48} = 1 \\ x' = 0. \end{cases}$$

Это сечение определяется, следовательно, уравнениями

$$\begin{cases} \frac{y'^2}{81} - \frac{z'^2}{48} = -1, \\ x' = 0 \end{cases} \quad (4.41)$$

и представляет собой **гиперболу**, расположенную в плоскости $O'y'z'$.

Для изображения гиперболы (4.41) на чертеже следует построить её основной прямоугольник, откладывая от начала координат O' по оси $O'y'$ отрезки 9 и (-9) , а по оси $O'z'$ – отрезки $\sqrt{48} \approx 7$ и $(-\sqrt{48} \approx -7)$, и провести асимптоты через противоположные вершины этого основного прямоугольника.

Затем нужно найти точки пересечения гиперболы (4.41) с осями $O'y'$ и $O'z'$, чтобы выяснить, какая из этих осей координат $O'y'$ или $O'z'$ является действительной осью этой гиперболы, а какая – мнимой. Пересекая гиперболу (4.41) осью $O'y'$, получаем

$$\begin{cases} \frac{y'^2}{81} - \frac{z'^2}{48} = -1, \\ x' = 0, \\ z' = 0, \end{cases}$$

откуда $y'^2 = -81$, т.е. для y' получаем *мнимые* значения, а это означает, что **ось $O'y'$** не имеет точек пересечения с гиперболой (4.41) и является для неё **мнимой осью**. При пересечении же гиперболы (4.41) осью $O'z'$ будем иметь

$$\begin{cases} \frac{y'^2}{81} - \frac{z'^2}{48} = -1, \\ x' = 0, \\ y' = 0. \end{cases}$$

Следовательно, $-\frac{z'^2}{48} = -1$ или $z'^2 = 48$, откуда $z' = \pm\sqrt{48} = \pm 4\sqrt{3}$.

Значит, действительной осью для гиперболы (4.41) служит ось $O'z'$, а точки $(0,0,4\sqrt{3})$ и $(0,0,-4\sqrt{3})$ будут вершинами этой гиперболы. Изобразим гиперболу (4.41), расположенную в плоскости $O'y'z'$, на чертеже (рис. 54).

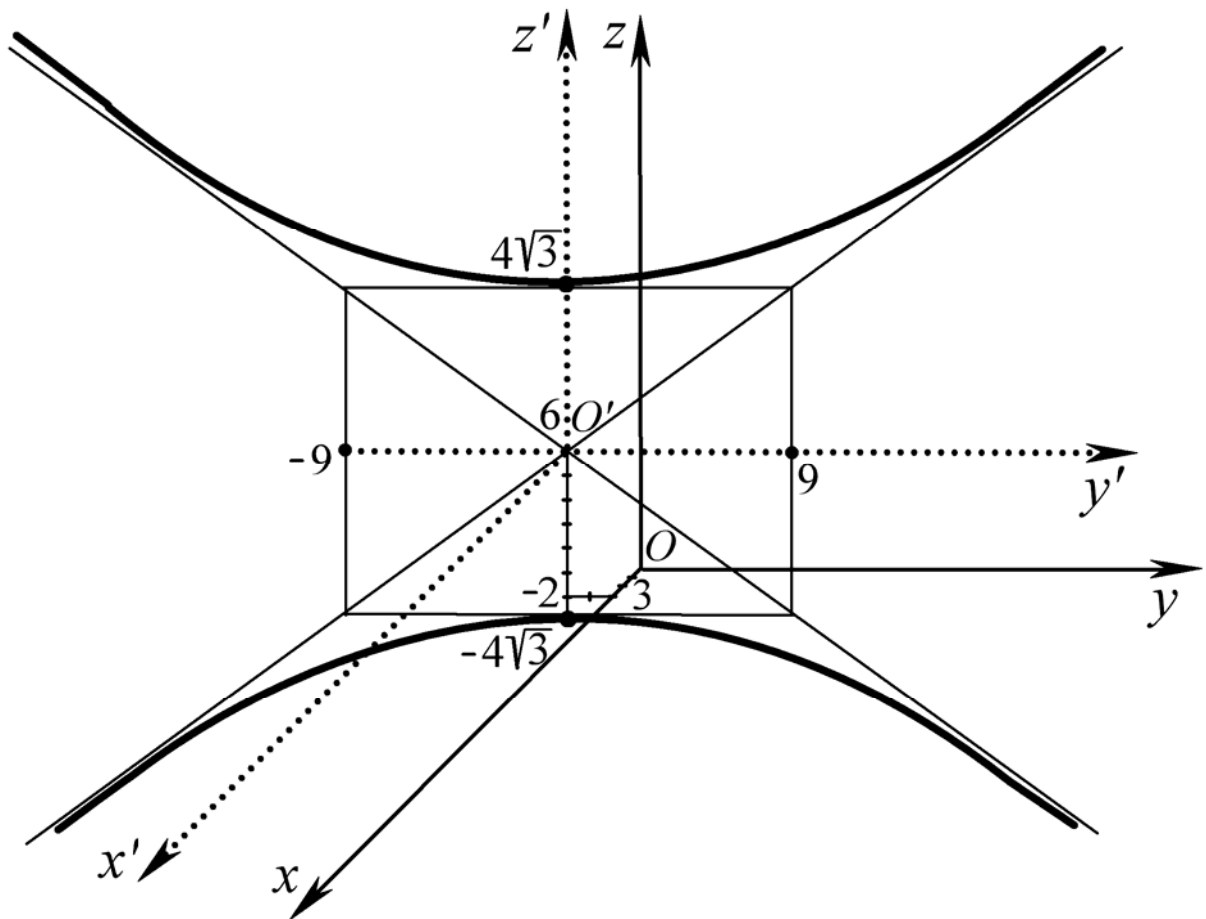


Рис. 54

При пересечении заданного однополостного гиперболоида (4.40) координатной плоскостью $O'x'y'$, имеющей уравнение $z'=0$,

$$\begin{cases} \frac{x'^2}{36} - \frac{y'^2}{81} + \frac{z'^2}{48} = 1, \\ z' = 0 \end{cases}$$

получается также гипербола

$$\begin{cases} \frac{x'^2}{36} - \frac{y'^2}{81} = 1, \\ z' = 0, \end{cases} \quad (4.42)$$

только лежащая уже в плоскости $O'x'y'$.

Основной прямоугольник гиперболы (4.42) будем строить, откладывая от начала координат O' по оси $O'x'$ отрезки 6 и (-6) соответственно, и через полученные точки $(6,0,0)$ и $(-6,0,0)$ проведем прямые, параллельные оси $O'y'$ длиной 9 в положительном направлении оси $O'y'$ и длиной 9 в отрицательном направлении оси $O'y'$.

Прямая, соединяющая точки $(6,9,0)$ и $(-6,9,0)$, будет параллельна оси $O'x'$ и пройдет через отложенную ранее на рис. 54 (при построении основного прямоугольника для гиперболы (4.41)) точку $(0,9,0)$. Аналогично, параллельно оси $O'x'$ через точку $(0,-9,0)$ проведем прямую, соединяющую точки $(6,-9,0)$ и $(-6,-9,0)$, завершив тем самым построение основного прямоугольника для данной гиперболы (4.42).

Далее, через противоположные вершины этого основного прямоугольника («развернутого» вдоль оси $O'x'$) проведем асимптоты гиперболы (4.42) и установим (сделать это самостоятельно), что данная гипербола не имеет точек пересечения с осью $O'y'$ (т.е. ось $O'y'$ является мнимой осью гиперболы (4.42)) и пересекает ось $O'x'$ в точках $(6,0,0)$ и $(-6,0,0)$, которые и будут её вершинами.

Продолжим рис. 54, добавив к изображенной ранее гиперболе (4.41) основной прямоугольник для гиперболы (4.42) и саму эту гиперболу (4.42) (рис. 55).

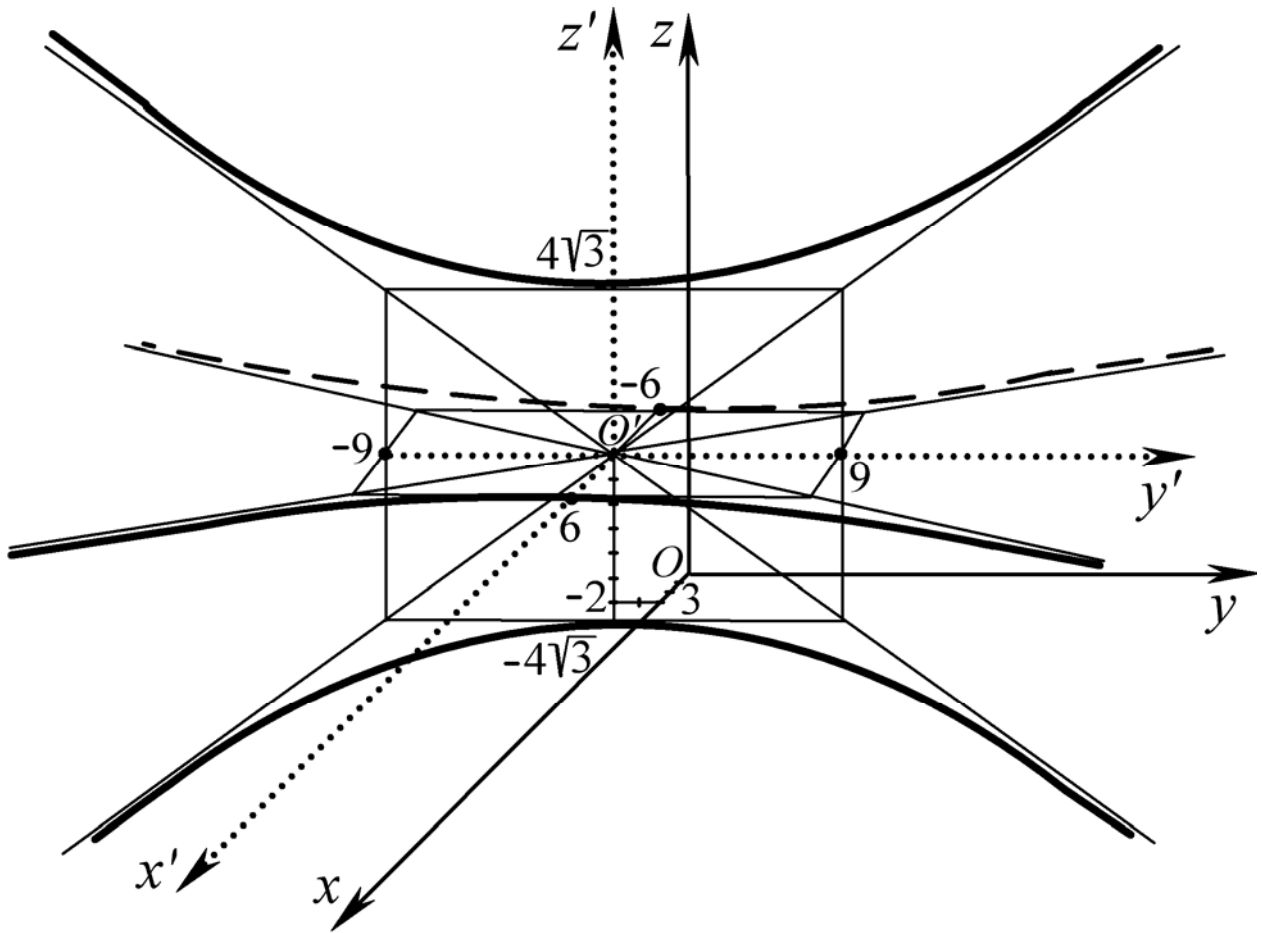


Рис. 55

Рассмотрим теперь сечения заданного однополостного гиперboloида (4.40) плоскостями $y' = h$, параллельными координатной плоскости $O'x'z'$. Линия пересечения однополостного гиперboloида (4.40) каждой такой плоскостью $y' = h$ определяется двумя уравнениями

$$\begin{cases} \frac{x'^2}{36} - \frac{y'^2}{81} + \frac{z'^2}{48} = 1, \\ y' = h \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \frac{x'^2}{36} + \frac{z'^2}{48} = 1 + \frac{h^2}{81}, \\ y' = h, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} \frac{x'^2}{36\left(1+\frac{h^2}{81}\right)} + \frac{z'^2}{48\left(1+\frac{h^2}{81}\right)} = 1, \\ y' = h. \end{cases} \quad (4.43)$$

Таким образом, любая плоскость $y' = h$ пересекает однополостный гиперболоид (4.40) по эллипсу

$$\begin{cases} \frac{x'^2}{a^{*2}} + \frac{z'^2}{c^{*2}} = 1, \\ y' = h \end{cases}$$

с полуосями

$$a^* = 6\sqrt{1+\frac{h^2}{81}}, \quad c^* = 4\sqrt{3}\sqrt{1+\frac{h^2}{81}}, \quad (4.44)$$

При изменении h полуоси a^* , c^* (4.44) изменяются, причем *наименьшее значение* эти полуоси a^* , c^* имеют при $h = 0$.

В случае, когда $h = 0$, получается эллипс, лежащий в плоскости $O'x'z'$ (имеющей уравнение $y' = 0$) и называемый *горловым*. Заметим, что вершины $(6,0,0)$ и $(-6,0,0)$ горлового эллипса совпадают с вершинами гиперболы (4.42), лежащей в плоскости $O'x'y'$, а вершины $(0,0,4\sqrt{3})$ и $(0,0,-4\sqrt{3})$ этого горлового эллипса являются вершинами гиперболы (4.41), расположенной в плоскости $O'y'z'$.

В соответствии с формулами (4.44) h может принимать **любые значения от $-\infty$ до $+\infty$** . С увеличением абсолютной величины h полуоси a^* , c^* (4.44) **возрастают**, а это означает, что с увеличением $|h|$ размеры эллипсов (4.43) неограниченно увеличиваются. При этом легко установить, что

при всех значениях h координаты вершин $(a^*, h, 0)$ и $(-a^*, h, 0)$ этих эллипсов (4.43) удовлетворяют уравнениям гиперболы (4.42), лежащей в плоскости $O'x'y'$, а координаты $(0, h, c^*)$ и $(0, h, -c^*)$ двух других вершин эллипсов (4.43) удовлетворяют уравнениям гиперболы (4.41), лежащей в плоскости $O'y'z'$.

Следовательно, при изменении h от $-\infty$ до $+\infty$ эллипс (4.43) движется таким образом, что описывает заданную уравнением (4.40) поверхность, поскольку плоскость $y'=h$, в которой он располагается, остается всегда параллельной плоскости $O'x'z'$, а его вершины скользят по гиперболам (4.41) и (4.42), лежащим в плоскостях $O'y'z'$ и $O'x'y'$.

Выполним окончательный чертеж заданного однополостного гиперболоида (4.38) на рис. 56.

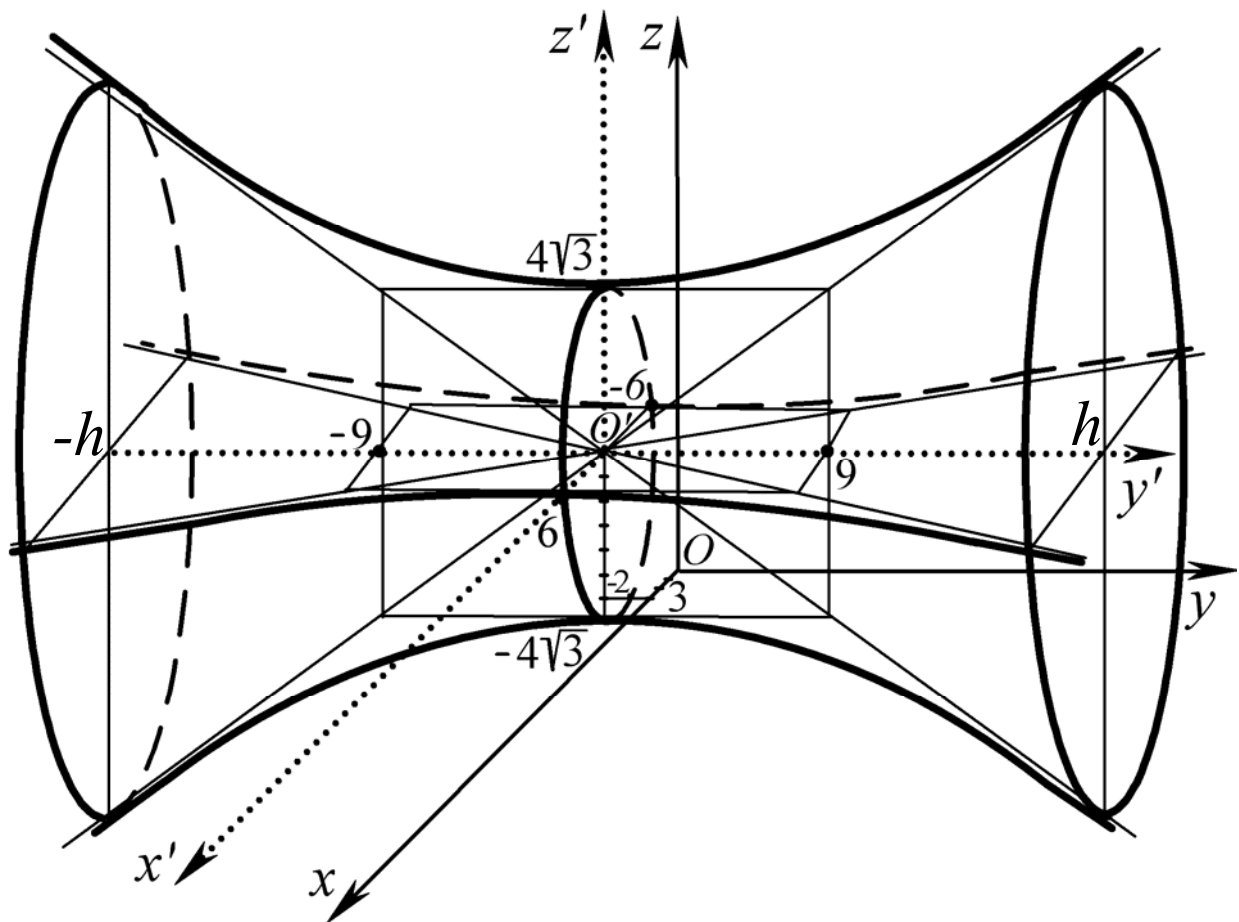


Рис. 56

Пример 6. Привести к каноническому виду уравнение

$$x^2 - 16x + 4y + 28 = 0,$$

установить, какую поверхность оно определяет, и построить эту поверхность, выполнив исследование заданного уравнения.

Решение. Данное уравнение не содержит членов с координатой z , следовательно, это уравнение определяет **цилиндрическую поверхность** с образующими, параллельными оси Oz . Преобразуем заданное уравнение

$$(x^2 - 16x + 64) - 64 + 4y + 28 = 0,$$

$$(x - 8)^2 + 4y - 36 = 0,$$

откуда окончательно получим

$$(x - 8)^2 = -4(y - 9) \quad (4.45)$$

Введем новые координаты x' , y' и z' , используя формулы параллельного переноса осей координат

$$x' = x - 8, \quad y' = y - 9, \quad z' = z. \quad (4.46)$$

Относительно новой вспомогательной системы координат $O'x'y'z'$ с началом координат в точке $O'(8, 9, 0)$ и осями координат, параллельными соответствующим координатным осям Ox , Oy , Oz , уравнение (4.45) принимает канонический вид

$$x'^2 = -4y'. \quad (4.47)$$

Рассматривая уравнение (4.47) в плоскости $O'x'y'$ заключаем, что это уравнение определяет параболу с вершиной в начале координат O' , расположенную симметрично относительно оси $O'y'$ и своими ветвями направленную в сторону, противоположную положительному направлению оси $O'y'$.

Если уравнение (4.47), не содержащее $z' = z$, отнести к системе координат в пространстве $O'x'y'z'$, то это уравнение является **уравнением цилиндрической поверхности с образующими, параллельными оси Oz , и направляющей, которая представляет собой параболу, задаваемую в плоскости $O'x'y'$ тем же самым уравнением (4.47).**

Это означает, что заданное уравнение (4.45) определяет **параболический цилиндр.**

Чтобы построить рассматриваемый параболический цилиндр (4.45) на чертеже, изобразим сначала его направляющую – расположенную в плоскости $O'x'y'$ параболу, которая в пространстве $O'x'y'z'$ определяется системой двух уравнений

$$\begin{cases} x'^2 = -4y' , \\ z' = 0 . \end{cases} \quad (4.48)$$

Как следует из уравнений параболы (4.48), y' не может принимать положительных значений ($y' \leq 0$); при этом каждому значению y' соответствуют два значения x' , равные по абсолютной величине, но противоположные по знаку:

$$x' = \pm 2\sqrt{-y'} . \quad (4.49)$$

Поэтому парабола (4.48), лежащая в плоскости $O'x'y'$ ($z'=0$), расположена симметрично относительно оси $O'y'$.

Чтобы достаточно точно построить эту линию, найдем несколько точек, лежащих в плоскости $O'x'y'$, через которые проходит эта парабола. Будем придавать y' произвольные значения, например, $y'_1 = -1$, $y'_2 = -4$, $y'_3 = -9$, $y'_4 = -16$ и находить из уравнения (4.49) соответствующие им значения x' , записывая результаты в виде таблицы:

x'	0	± 2	± 4	± 6	± 8
y'	0	-1	-4	-9	-16

Пересчитаем теперь координаты точек, помещенных в эту таблицу, с помощью формул (46) параллельного переноса осей координат, выразив наоборот заданные координаты x, y, z через вспомогательные координаты x', y', z' :

$$x = x' + 8, \quad y = y' + 9, \quad z = z'$$

и выпишем уже в заданной системе координат $Oxyz$ точки, координаты которых удовлетворяют уравнениям

$$\begin{cases} (x - 8)^2 = -4(y - 9), \\ z = 0, \end{cases} \quad (4.50)$$

определяющим рассматриваемую параболу с вершиной в точке $O'(8, 9, 0)$:

$$\begin{aligned} M_1(6, 8, 0) \quad \text{и} \quad M_2(10, 8, 0), \\ M_3(4, 5, 0) \quad \text{и} \quad M_4(12, 5, 0), \\ M_5(2, 0, 0) \quad \text{и} \quad M_6(14, 0, 0), \\ M_7(0, -7, 0) \quad \text{и} \quad M_8(16, -7, 0). \end{aligned} \quad (4.51)$$

Заметим, что среди точек M_1, M_2, \dots, M_8 (4.51) содержатся точки (если бы их не было, то необходимо было бы их добавить к рассматриваемым точкам), которые всегда обязательно должны быть учтены при построении параболы – это *точки пересечения параболы с осью Ox* : $M_5(2, 0, 0)$, $M_6(14, 0, 0)$ и *точка пересечения данной параболы оси Oy* .

Нанесем полученные точки M_1, M_2, \dots, M_8 (4.51) на чертеж и проведем через них в плоскости Oxy рассматриваемую параболу (4.50), являющуюся направляющей для заданного параболического цилиндра (4.45) (рис. 57).

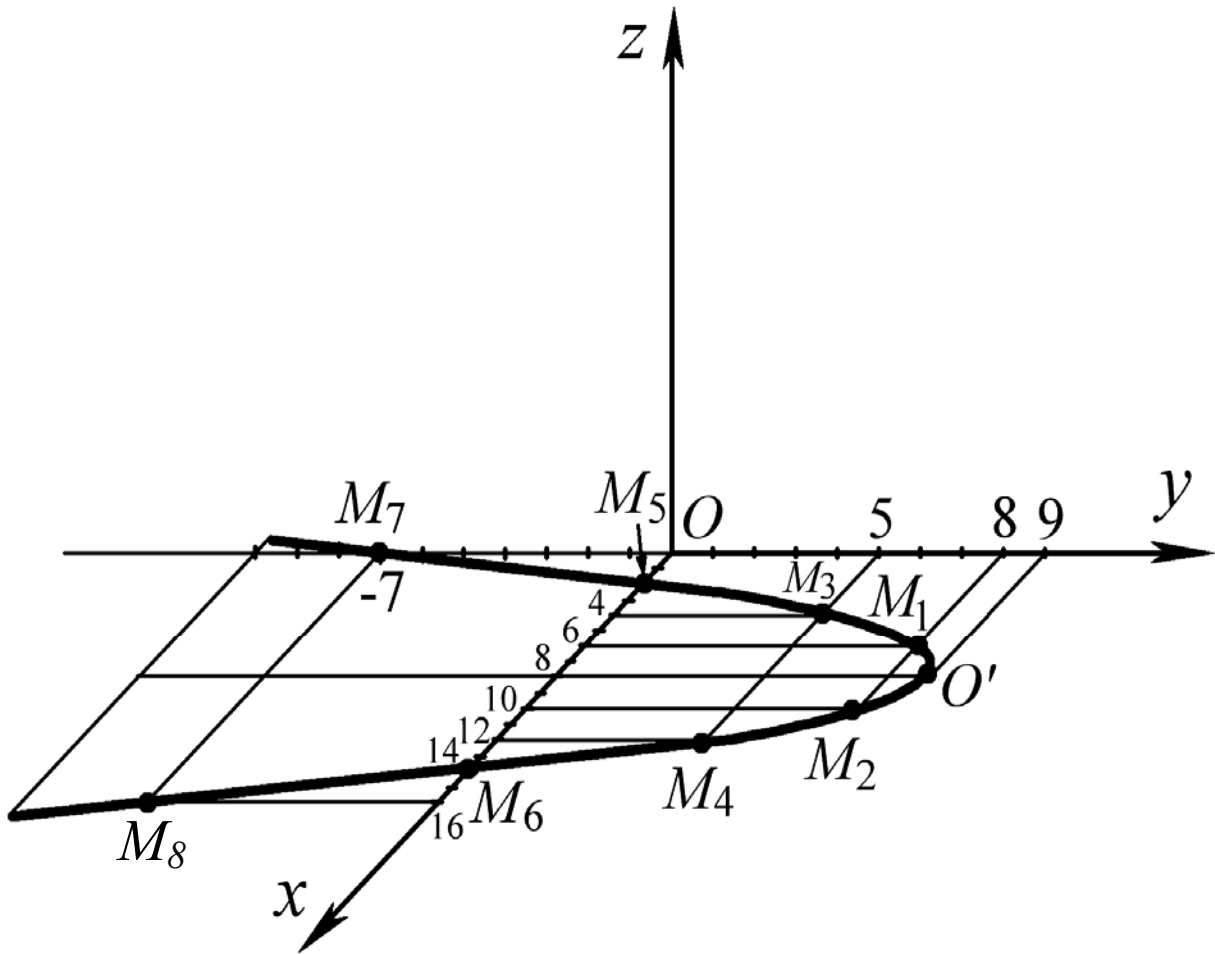


Рис. 57

Чтобы изобразить на рис. 58 заданный параболический цилиндр (4.45) следует построить на некоторой высоте $z = h$ точно такую же параболу и соединить каждую точку этой новой параболы, имеющей уравнения

$$\begin{cases} (x - 8)^2 = -4(y - 9), \\ z = h, \end{cases} \quad (4.52)$$

прямой, параллельной оси Oz , с проекцией этой точки на плоскость Oxy , т.е. с соответствующей точкой, лежащей на построенной на рис. 57 параболе (4.50) (рис. 58).

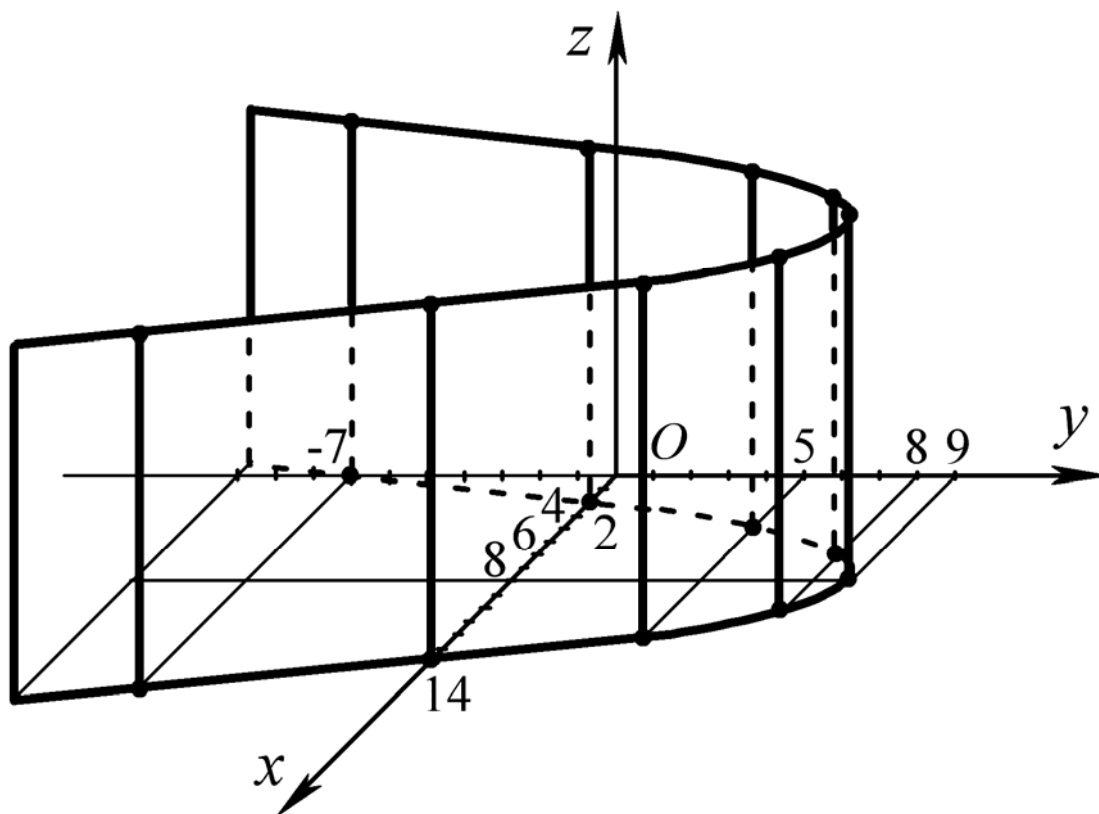


Рис. 58

Пример 7. Привести к каноническому виду уравнение

$$4x^2 - 9y^2 - 16z^2 - 56x - 54y + 128z - 141 = 0,$$

установить, какую поверхность оно определяет, и построить эту поверхность, выполнив исследование заданного уравнения с помощью метода сечений.

Решение. Выполнив соответствующие преобразования, будем иметь

$$\begin{aligned} 4(x^2 - 14x + 49) - 196 - 9(y^2 + 6y + 9) + 81 - \\ - 16(z^2 - 8z + 16) + 256 - 141 = 0, \\ 4(x - 7)^2 - 9(y + 3)^2 - 16(z - 4)^2 = 0, \end{aligned}$$

откуда, разделив обе части этого уравнения на 144, окончательно получаем

$$\frac{(x-7)^2}{36} - \frac{(y+3)^2}{16} - \frac{(z-4)^2}{9} = 0$$

или

$$-\frac{(x-7)^2}{36} + \frac{(y+3)^2}{16} + \frac{(z-4)^2}{9} = 0. \quad (4.53)$$

Принимая за новое начало точку $O'(7, -3, 4)$, введем новые координаты x' , y' и z' согласно формулам параллельного переноса осей координат, полагая

$$x' = x - 7, \quad y' = y + 3, \quad z' = z - 4. \quad (4.54)$$

Тогда данное уравнение (4.53) относительно новой вспомогательной системы координат $O'x'y'z'$ примет вид

$$-\frac{x'^2}{36} + \frac{y'^2}{16} + \frac{z'^2}{9} = 0. \quad (4.55)$$

Сравнивая полученное уравнение (4.55) с уравнением (3.38) (см. замечание в п. 3.2.3), легко видеть, что уравнение (4.55) однородно, так как в правой части оно содержит ноль; в левой же части этого уравнения – два положительных коэффициента при квадратах координат y' и z' и один отрицательный коэффициент при квадрате координаты x' . Следовательно, заданная поверхность, описываемая относительно вспомогательной системы координат $O'x'y'z'$ уравнением (4.55), является **конусом второго порядка** с вершиной в точке O' , осью которого служит ось $O'x'$.

Представить себе форму данного конуса второго порядка (4.53) будет проще, если развернуть оси координат заданной прямоугольной декартовой системы координат $Oxyz$ таким образом, как это было сделано в примере 3, где рассматривался эллиптический параболоид (4.15), осью симметрии которого также являлась ось $O'x'$.

Итак, направим ось Ox (и соответственно ось $O'x'$) вертикально *снизу вверх*. Тогда, чтобы система координат $Oxyz$ оставалась правой, ось Oz (соответственно ось $O'z'$) необходимо направить горизонтально *слева направо*, а ось Oy (соответственно ось $O'y'$) – горизонтально и «вперед» – так, как обычно располагают ось Ox . Изобразим на рис. 59 описанную прямоугольную декартову систему координат $Oxyz$ и соответствующую вспомогательную систему $O'x'y'z'$, начало которой находится согласно формулам (4.53) параллельного переноса осей координат в точке $O'(7, -3, 4)$, а оси $O'x'$, $O'y'$ и $O'z'$ параллельны соответствующим осям Ox , Oy и Oz и направлены в те же стороны (рис. 59).

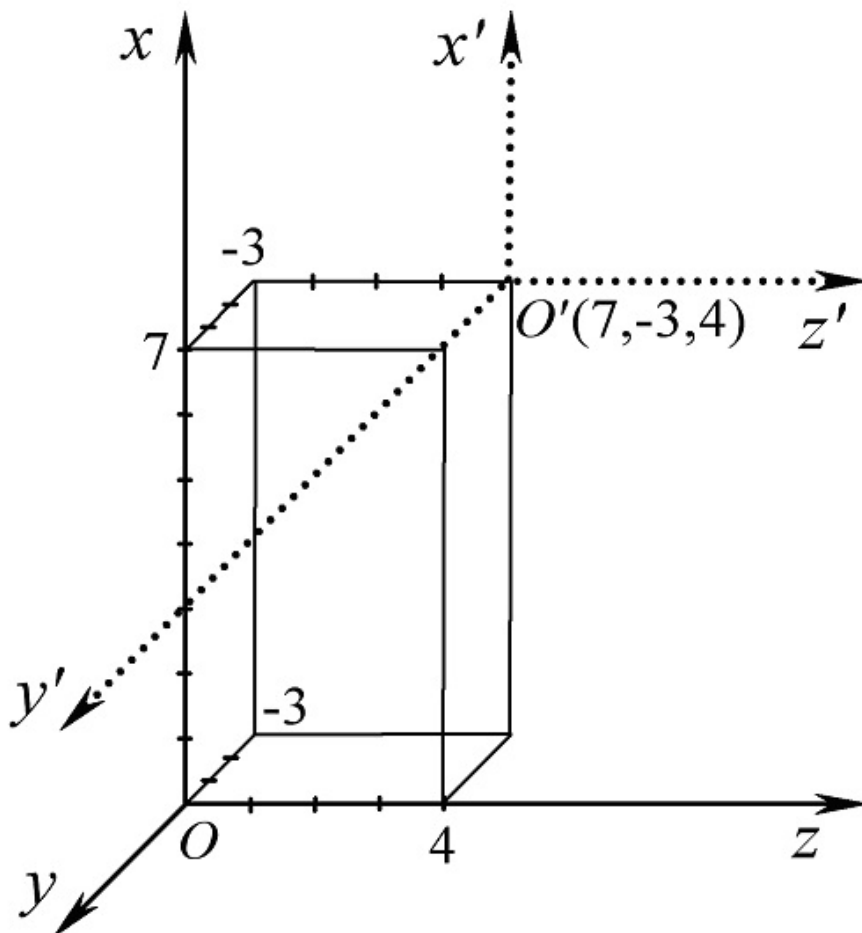


Рис. 59

Исследуем теперь **методом сечений** форму конуса второго порядка, заданного уравнением (4.55) относительно новой вспомогательной системы координат $O'x'y'z'$, и построим эту поверхность.

Пересечем прежде всего конус второго порядка (4.55) координатной плоскостью $O'x'z'$, имеющей уравнение $y'=0$:

$$\begin{cases} -\frac{x'^2}{36} + \frac{y'^2}{16} + \frac{z'^2}{9} = 0, \\ y' = 0. \end{cases}$$

В сечении получим линию

$$\begin{cases} \frac{x'^2}{36} - \frac{z'^2}{9} = 0, \\ y' = 0. \end{cases} \quad (4.56)$$

Поскольку первое из уравнений (4.56) равносильно системе двух уравнений

$$\frac{x'}{6} - \frac{z'}{3} = 0, \quad \frac{x'}{6} + \frac{z'}{3} = 0,$$

то, следовательно, конус второго порядка (4.55) пересекается с плоскостью $O'x'z'$ по двум прямым

$$\begin{cases} \frac{x'}{6} - \frac{z'}{3} = 0, \\ y' = 0, \end{cases} \quad (4.57)$$

$$\begin{cases} \frac{x'}{6} + \frac{z'}{3} = 0, \\ y' = 0, \end{cases} \quad (4.58)$$

лежащим в плоскости $O'x'z'$, из которых, как легко видеть, прямая (4.57) проходит через точку с координатами $(6, 0, 3)$ и начало координат $O'(0, 0, 0)$, а прямая (4.58) – через точку с координатами $(6, 0, -3)$ и начало координат O' . Указанных точек достаточно для построения прямых (4.57), (4.58) на чертеже (рис. 60).

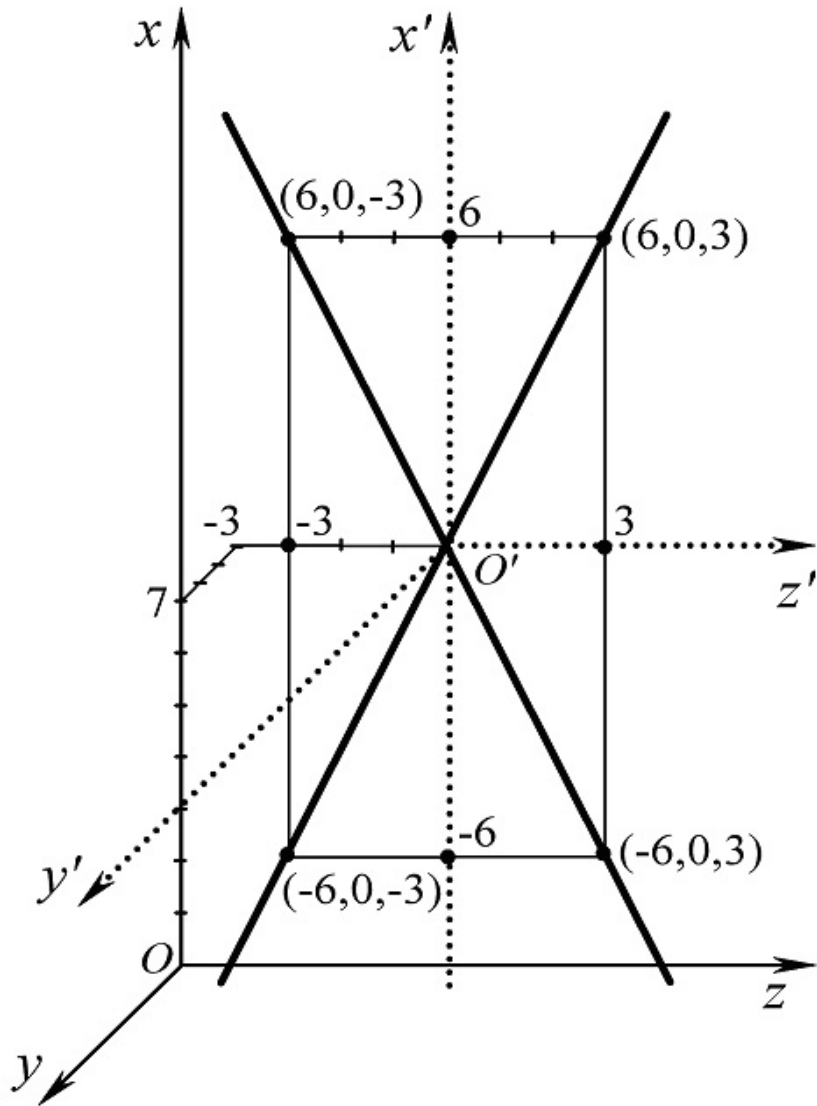


Рис. 60

Пересекая конус второго порядка (4.55) координатной плоскостью $O'x'y'$ ($z'=0$)

$$\begin{cases} -\frac{x'^2}{36} + \frac{y'^2}{16} + \frac{z'^2}{9} = 0, \\ z' = 0, \end{cases}$$

будем иметь в сечении линию

$$\begin{cases} \frac{x'^2}{36} - \frac{y'^2}{16} = 0, \\ z' = 0, \end{cases}$$

представляющую собой аналогично (4.56) две пересекающиеся в начале координат O' прямые

$$\begin{cases} \frac{x'}{6} - \frac{y'}{4} = 0, \\ z' = 0 \end{cases} \quad (4.59)$$

и

$$\begin{cases} \frac{x'}{6} + \frac{y'}{4} = 0, \\ z' = 0, \end{cases} \quad (4.60)$$

лежащие в плоскости $O'x'y'$, из которых прямая (4.59) проходит, например, через точки с координатами $(6, 4, 0)$ и $(-6, -4, 0)$, а прямая (4.60) – соответственно через точки с координатами $(6, -4, 0)$ и $(-6, 4, 0)$.

Добавим на рис. 61 к построенным прямым (4.57), (4.58), лежащим в плоскости $O'x'z'$, прямые (4.59), (4.60), проходящие через начало координат O' и указанные точки (рис. 61).

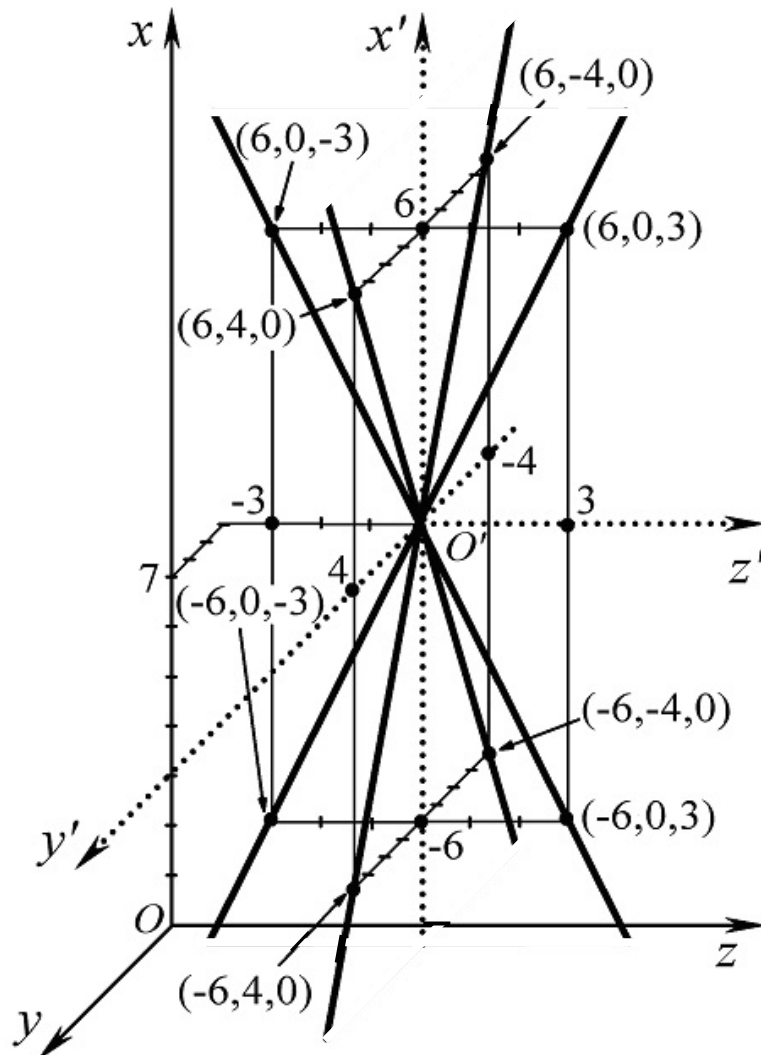


Рис. 61

В заключение выясним форму линий пересечения конуса второго порядка (4.55), вытянутого вдоль оси $O'x'$, плоскостями, параллельными координатной плоскости $O'y'z'$.

Каждая из таких плоскостей определяется уравнением вида $x' = h$, а линия, получаемая в сечении, задается двумя уравнениями

$$\begin{cases} -\frac{x'^2}{36} + \frac{y'^2}{16} + \frac{z'^2}{9} = 0, \\ x' = h \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \frac{y'^2}{16} + \frac{z'^2}{9} = \frac{h^2}{36}, \\ x' = h. \end{cases}$$

Таким образом, сечения конуса второго порядка (4.55) плоскостями $x' = h$, параллельными координатной плоскости $O'y'z'$, представляют собой семейство эллипсов

$$\begin{cases} \frac{y'^2}{(b^*)^2} + \frac{z'^2}{(c^*)^2} = 1, \\ x' = h \end{cases} \quad (4.61)$$

с полуосями

$$b^* = \frac{4h}{6} = \frac{2h}{3}, \quad c^* = \frac{3h}{6} = \frac{h}{2}, \quad (4.62)$$

зависящими от высоты h по оси $O'x'$, на которую поднят соответствующий эллипс.

Согласно формулам (4.62) h может принимать любые значения от $-\infty$ до $+\infty$; наименьшего значения полуоси b^* , c^* (4.62) достигают при $h = 0$. В этом случае $b^* = 0$ и $c^* = 0$, а это означает, что при $h = 0$ соответствующий эллипс (4.61) вырождается в точку $O'(0, 0, 0)$, называемую *вершиной* конуса (4.55).

С увеличением абсолютной величины h полуоси b^* , c^* (4.62) возрастают, и, следовательно, соответствующие

эллипсы увеличиваются в размерах. В частности, при $h=6$ $b^*=4$, а $c^*=3$, значит вершины эллипса, расположенного на высоте $x'=6$, имеют координаты $(6, 4, 0)$ и $(6, -4, 0)$, совпадающие с координатами точек, через которые проходят прямые (4.59), (4.60), лежащие в плоскости $O'x'y'$, а две другие вершины этого эллипса имеют координаты $(6, 0, -3)$ и $(6, 0, 3)$, совпадающие с координатами точек, через которые проводились прямые (4.57), (4.58), лежащие в плоскости $O'x'z'$ (рис. 62).

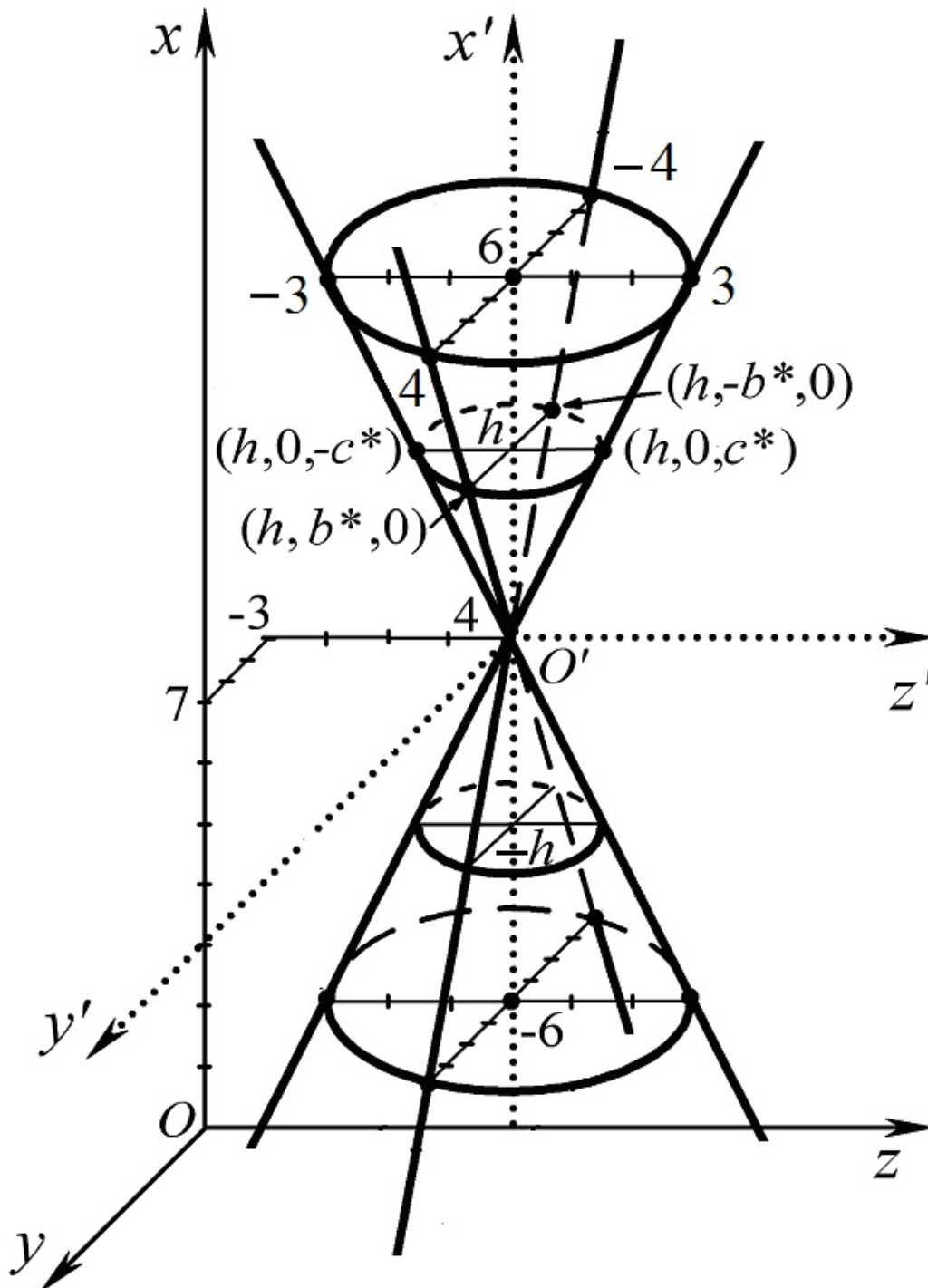


Рис. 62

Всё изложенное позволяет заключить, что заданное уравнение определяет **конус второго порядка** с вершиной в точке $O'(7, -3, 4)$, осью симметрии которого служит ось $O'x'$, выходящая из точки $O'(7, -3, 4)$ и параллельная данной оси Ox , а за направляющую линию этого конуса может быть взят, например, эллипс, расположенный в плоскости $x'=6$ (параллельной координатной плоскости Oyz) с центром на оси $O'x'$, имеющий полуоси $b^*=4$, а $c^*=3$.

Изобразим рассматриваемый конус второго порядка (4.53) на чертеже согласно выполненному исследованию (рис. 63).

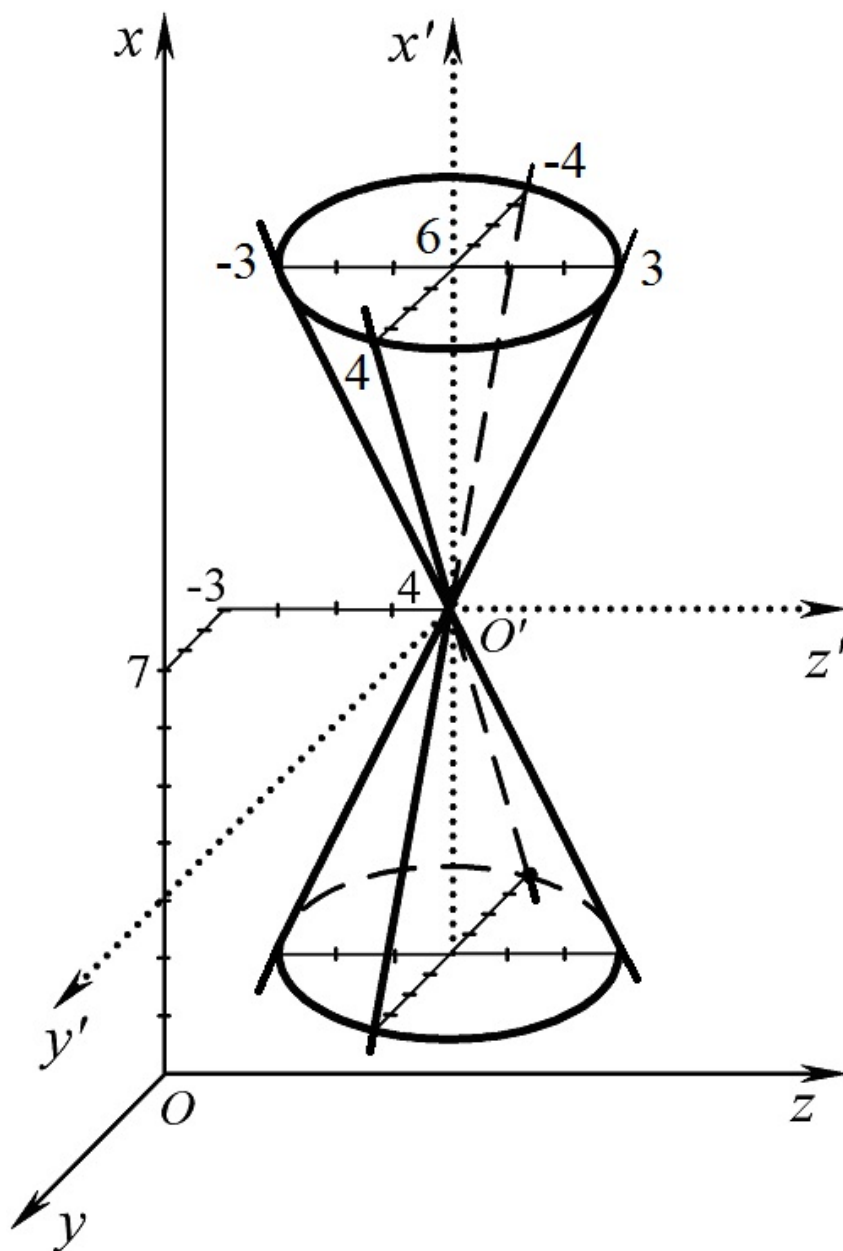


Рис. 63

Пример 8. Привести к каноническому виду уравнение

$$x^2 + z^2 - 6x + 4z - 36 = 0,$$

установить, какую поверхность оно определяет, и построить эту поверхность, выполнив исследование заданного уравнения.

Решение. Данное уравнение не содержит членов с координатой y , а это означает, что рассматриваемое уравнение определяет **цилиндрическую поверхность** с образующими, параллельными оси Oy . Приведем заданное уравнение к каноническому виду

$$(x^2 - 6x + 9) - 9 + (z^2 + 4z + 4) - 4 - 36 = 0$$

или

$$(x - 3)^2 + (z + 2)^2 = 49. \quad (4.63)$$

Полученное уравнение (4.63) в плоскости Oxz определяет окружность с центром в точке $O'(3, 0, -2)$ и радиусом $R = 7$.

Однако это уравнение задано в пространстве $Oxyz$, и поскольку оно не содержит y , то то же самое уравнение (4.63), рассматриваемое в пространстве $Oxyz$, есть уравнение **кругового цилиндра** (название цилиндра соответствует названию его направляющей кривой), для которого окружность (4.63), лежащая в плоскости Oxz , является направляющей, а образующие этого кругового цилиндра (4.63) параллельны оси Oy .

Изобразим сначала направляющую линию заданного кругового цилиндра (4.63), определяемую двумя уравнениями

$$\begin{cases} (x - 3)^2 + (z + 2)^2 = 49, \\ y = 0, \end{cases} \quad (4.64)$$

и представляющую собой окружность, расположенную в плоскости Oxz , с центром в точке $O'(3, 0, -2)$ и радиусом $R = 7$.

Затем построим две точно такие же окружности, только лежащие в некоторой плоскости $y = h$ ($h > 0$) и симметричной ей плоскости $y = -h$ ($h > 0$) и имеющие уравнения

$$\begin{cases} (x-3)^2 + (z+2)^2 = 49, \\ y = h \end{cases} \quad (4.65)$$

и

$$\begin{cases} (x-3)^2 + (z+2)^2 = 49, \\ y = -h, \end{cases} \quad (4.66)$$

т.е. окружности с центрами в точках $(3, h, -2)$ и $(3, -h, -2)$ и радиусом $R = 7$.

Наконец, соединяя каждую точку этих окружностей (4.65) и (4.66) **прямой, параллельной оси Oy** , с соответствующей точкой, лежащей на построенной ранее окружности (4.64), расположенной в плоскости Oxz , получим изображение заданного кругового цилиндра (4.63) (рис. 64).

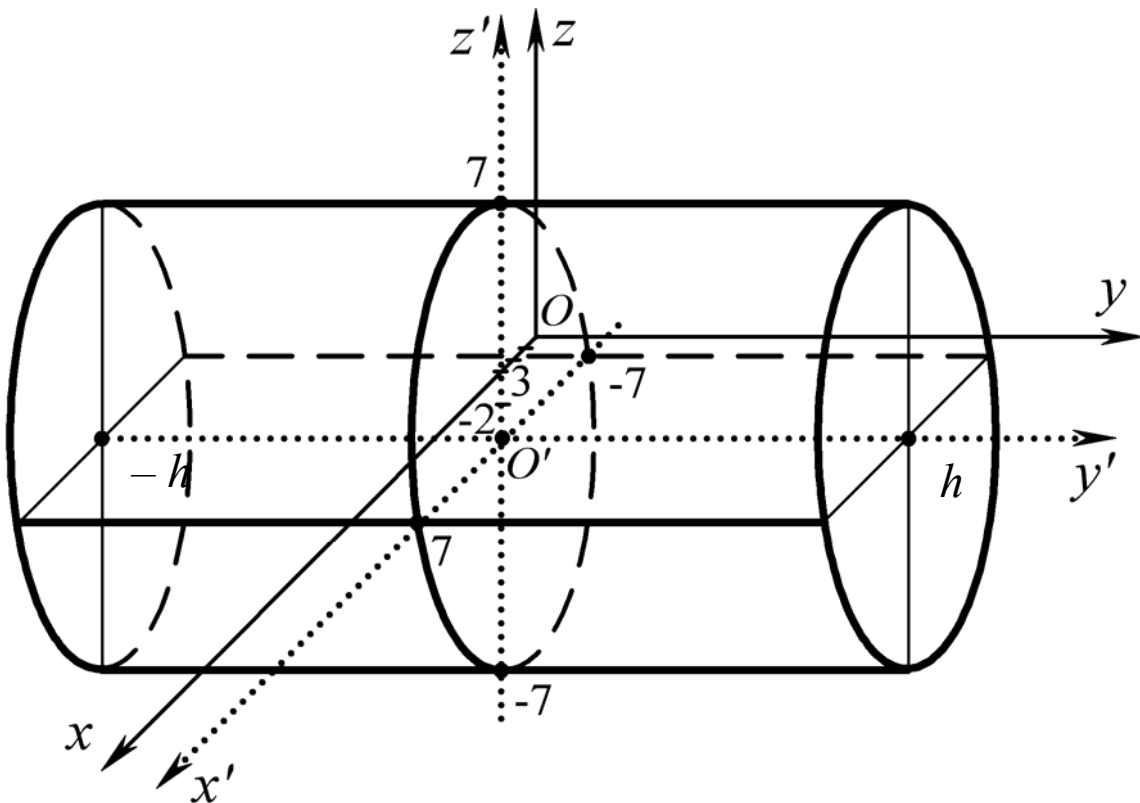


Рис. 64

Пример 9. Привести к каноническому виду уравнение

$$9y^2 - 4z^2 + 18y - 40z - 55 = 0,$$

установить, какую поверхность оно определяет, и построить эту поверхность, выполнив исследование заданного уравнения.

Решение. Данное уравнение не содержит членов с координатой x , следовательно, это уравнение определяет **цилиндрическую поверхность** с образующими, параллельными оси Ox . Преобразуем заданное уравнение

$$9(y^2 + 2y + 1) - 9 - 4(z^2 + 10z + 25) + 100 - 55 = 0$$

или

$$9(y + 1)^2 - 4(z + 5)^2 = -36,$$

откуда, разделив левую и правую части полученного уравнения на 36, окончательно будем иметь

$$\frac{(y + 1)^2}{4} - \frac{(z + 5)^2}{9} = -1. \quad (4.67)$$

Введем новые координаты x' , y' и z' , используя формулы параллельного переноса осей координат

$$x' = x, \quad y' = y + 1, \quad z' = z + 5. \quad (4.68)$$

Относительно новой вспомогательной системы координат $O'x'y'z'$ с началом координат в точке $O'(0, -1, -5)$ и осями координат, параллельными соответствующим координатным осям Ox , Oy , Oz , уравнение (4.67) принимает вид

$$\frac{y'^2}{4} - \frac{z'^2}{9} = -1 \quad (4.69)$$

и определяет, следовательно, **гиперболический цилиндр**, направляющей линией которого служит гипербола

$$\begin{cases} \frac{y'^2}{4} - \frac{z'^2}{9} = -1, \\ x' = 0, \end{cases} \quad (4.70)$$

расположенная в плоскости Oyz , а образующие прямые этого гиперболического цилиндра (4.69) будут *параллельны оси Ox* .

Развернем опять оси координат заданной прямоугольной декартовой системы координат $Oxyz$ таким образом, как это было сделано в примерах 3 и 7, то есть *направим ось Ox* (и соответственно ось $O'x'$) *вертикально снизу вверх*, *ось Oz* (и соответственно ось $O'z'$) – *горизонтально слева направо*, а *ось Oy* (и соответственно ось $O'y'$) – *горизонтально и «вперед»* – так, как обычно располагают *ось Ox* .

Изобразим на рис. 65 гиперболу (4.70) в плоскости Oyz , построив предварительно её основной прямоугольник и асимптоты и заметив, что её действительной осью служит ось $O'z'$, а вершины этой гиперболы (4.70) находятся в точках, имеющих относительно вспомогательной системы $O'x'y'z'$ координаты $(0, 0, 3)$ и $(0, 0, -3)$.

Затем на некоторой высоте $x' = h$ построим ещё одну такую же гиперболу, имеющую уравнения

$$\begin{cases} \frac{y'^2}{4} - \frac{z'^2}{9} = -1, \\ x' = h, \end{cases} \quad (4.71)$$

и соединим каждую точку этой новой гиперболы (4.71) *прямой, параллельной оси Ox* , с соответствующей точ-

к о й, расположенной на изображенной ранее гиперболе (4.70), лежащей в плоскости Oyz .

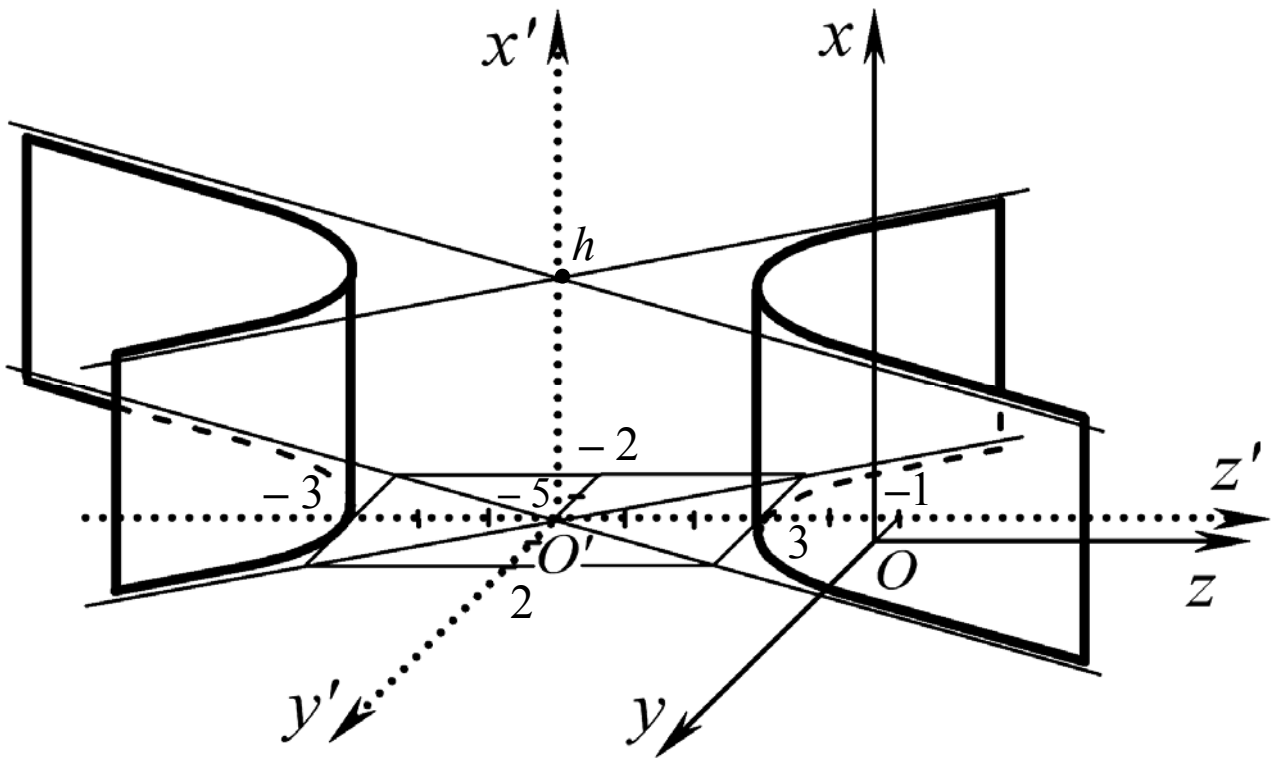


Рис. 65

П о с т р о е н н а я т а к и м о б р а з о м п о в е р х н о с т ь и
есть заданный **гиперболический цилиндр**, определяемый
уравнением (4.67) (рис. 65).

Библиографический список

1. Привалов И. И. Аналитическая геометрия / И. И. Привалов. СПб.: Лань, 2008. 304 с.
2. Ефимов Н. В. Краткий курс аналитической геометрии / Н. В. Ефимов. М.: Физматлит, 2005. 240 с.
3. Постников М. М. Аналитическая геометрия / М. М. Постников. СПб.: Лань, 2009. 416 с.
4. Ильин В. А. Аналитическая геометрия / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. М.: Физматлит, 2007. 223 с.
5. Гусак А. А. Аналитическая геометрия и линейная алгебра: справочное пособие к решению задач / А. А. Гусак. Минск: ТетраСистемс, 2008. 288 с.
6. Сборник задач по математике для втузов: учеб. пособие для втузов: в 4 ч. / под общ. ред. А. В. Ефимова, А. С. Поспелова. – 4-е изд., перераб. и доп. М.: Физматлит, 2009. Ч. 1. 288 с.
7. Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии / Д. В. Клетеник. СПб.: Лань, 2010. 224 с.

Приложение

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

для самостоятельной работы студентов

по теме «Поверхности второго порядка»

Вариант 1

Преобразовать следующие уравнения к каноническому виду, установить, какую поверхность определяет каждое из этих уравнений, а затем методом сечений исследовать форму заданных поверхностей и построить их:

1) $28x^2 + 49y^2 - 16z^2 - 168x + 98y + 160z - 99 = 0$

2) $16x^2 + 25z^2 + 64x - 50z - 311 = 0$

3) $3y^2 + 4z^2 + 12x - 6y + 56z + 103 = 0$

4) $5x^2 - 3y^2 + 12z^2 + 10x - 36y - 72z - 55 = 0$

5) $x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 10x - 8y + 32z + 61 = 0$

6) $x^2 + 4x - 3y - 17 = 0$

Вариант 2

Преобразовать следующие уравнения к каноническому виду, установить, какую поверхность определяет каждое из этих уравнений, а затем методом сечений исследовать форму заданных поверхностей и построить их:

1) $x^2 + 2z^2 - 10x - 8y + 12z + 11 = 0$

2) $9x^2 - 12y^2 - 16z^2 - 36x + 24y - 128z - 376 = 0$

3) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 10z + 34 = 0$

4) $x^2 + 2x + 2z - 15 = 0$

5) $6x^2 + 9y^2 - 4z^2 - 48x + 54y - 8z + 173 = 0$

6) $4x^2 - 7y^2 - 8x + 70y - 199 = 0$

Вариант 3

Преобразовать следующие уравнения к каноническому виду, установить, какую поверхность определяет каждое из этих уравнений, а затем методом сечений исследовать форму заданных поверхностей и построить их:

$$1) 4x^2 + 25y^2 + 25z^2 - 56x - 150y + 50z + 346 = 0$$

$$2) 9x^2 - 4y^2 + 16z^2 + 54x - 40y - 64z - 99 = 0$$

$$3) 3x^2 + 5y^2 - 24x + 60y - 15z + 108 = 0$$

$$4) 4x^2 - 3z^2 - 40x - 18z + 121 = 0$$

$$5) x^2 - 12x + 4y + 20 = 0$$

$$6) x^2 - 4y^2 - 2z^2 + 4x + 8y + 20z - 50 = 0$$

Вариант 4

Преобразовать следующие уравнения к каноническому виду, установить, какую поверхность определяет каждое из этих уравнений, а затем методом сечений исследовать форму заданных поверхностей и построить их:

$$1) 6x^2 + 9y^2 - 4z^2 + 24x - 36y - 24z + 168 = 0$$

$$2) z^2 - 2y - 2z - 9 = 0$$

$$3) 2x^2 + 3y^2 - 20x + 24y + 80 = 0$$

$$4) 20x^2 - 15y^2 + 48z^2 - 40x - 180y - 192z - 328 = 0$$

$$5) 12x^2 + 9y^2 + 4z^2 + 72x - 18y + 64z + 229 = 0$$

$$6) 3x^2 + 5z^2 + 12x - 45y - 30z - 258 = 0$$

Вариант 5

Преобразовать следующие уравнения к каноническому виду, установить, какую поверхность определяет каждое из этих уравнений, а затем методом сечений исследовать форму заданных поверхностей и построить их:

$$1) 8x^2 - 3y^2 + 6z^2 - 48x - 6y + 24z + 45 = 0$$

$$2) 9x^2 + 4y^2 + 18x - 72y + 36z + 153 = 0$$

$$3) x^2 - 7y^2 - 5z^2 + 12x - 56y + 80z - 396 = 0$$

$$4) x^2 - 4x - 8z - 20 = 0$$

$$5) x^2 + 16y^2 + 4z^2 - 8x - 96y + 8z + 100 = 0$$

$$6) 4x^2 - 3y^2 + 40x + 12y + 124 = 0$$

Вариант 6

Преобразовать следующие уравнения к каноническому виду, установить, какую поверхность определяет каждое из этих уравнений, а затем методом сечений исследовать форму заданных поверхностей и построить их:

$$1) 2y^2 + z^2 - 6x + 20y - 14z + 75 = 0$$

$$2) 7x^2 - 5z^2 - 28x - 80z - 117 = 0$$

$$3) 4x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 48x - 30y + 12z + 189 = 0$$

$$4) 25x^2 - 8y^2 + 50z^2 - 48y - 100z - 22 = 0$$

$$5) z^2 - 2y - 12z + 18 = 0$$

$$6) 6x^2 + 9y^2 - 4z^2 - 12x + 36y - 40z - 94 = 0$$

Вариант 7

Преобразовать следующие уравнения к каноническому виду, установить, какую поверхность определяет каждое из этих уравнений, а затем методом сечений исследовать форму заданных поверхностей и построить их:

$$1) \quad 3x^2 - 6y^2 - 8z^2 - 6x - 108y + 32z - 707 = 0$$

$$2) \quad 7x^2 + 5z^2 - 28x - 35y + 30z - 102 = 0$$

$$3) \quad 9x^2 - 16y^2 + 54x + 128y - 319 = 0$$

$$4) \quad 3x^2 + y^2 + 4z^2 - 12y - 24z + 36 = 0$$

$$5) \quad y^2 - 2y + 6z - 47 = 0$$

$$6) \quad 8x^2 + 6y^2 - 3z^2 + 64x + 84y - 30z + 347 = 0$$

Вариант 8

Преобразовать следующие уравнения к каноническому виду, установить, какую поверхность определяет каждое из этих уравнений, а затем методом сечений исследовать форму заданных поверхностей и построить их:

$$1) \quad 10x^2 + 25y^2 + 8z^2 - 50y + 32z + 257 = 0$$

$$2) \quad 21x^2 - 6y^2 + 14z^2 - 42x - 24y - 84z - 171 = 0$$

$$3) \quad 4x^2 - 6y^2 - 9z^2 + 40x - 48y + 108z - 320 = 0$$

$$4) \quad 2x^2 + z^2 - 8x + 10z + 17 = 0$$

$$5) \quad 4x^2 + 5y^2 + 24x - 80y + 20z + 216 = 0$$

$$6) \quad 3y^2 - 4z^2 - 54y - 32z + 323 = 0$$

Вариант 9

Преобразовать следующие уравнения к каноническому виду, установить, какую поверхность определяет каждое из этих уравнений, а затем методом сечений исследовать форму заданных поверхностей и построить их:

1) $x^2 + 2x - 4y - 23 = 0$

2) $16x^2 - 5y^2 + 20z^2 - 96x - 70y - 40z - 81 = 0$

3) $12x^2 + 21y^2 + 28z^2 + 144x - 126y + 112z + 145 = 0$

4) $3x^2 - 2z^2 - 30x + 32z - 35 = 0$

5) $5x^2 + 7y^2 - 7z^2 + 40x - 126y - 112z + 24 = 0$

6) $2y^2 + z^2 + 8x + 4y + 14z + 35 = 0$

Вариант 10

Преобразовать следующие уравнения к каноническому виду, установить, какую поверхность определяет каждое из этих уравнений, а затем методом сечений исследовать форму заданных поверхностей и построить их:

1) $50x^2 + 25y^2 - 16z^2 + 100x - 150y - 128z + 19 = 0$

2) $y^2 + 12y - 2z + 26 = 0$

3) $3x^2 - y^2 + 4z^2 - 42x - 18y + 16z + 118 = 0$

4) $5x^2 + 3z^2 + 20x - 15y - 48z + 227 = 0$

5) $y^2 - 3z^2 - 10y - 6z - 26 = 0$

6) $24x^2 + 16y^2 + 9z^2 + 48x + 128y - 54z - 215 = 0$

Вариант 11

Преобразовать следующие уравнения к каноническому виду, установить, какую поверхность определяет каждое из этих уравнений, а затем методом сечений исследовать форму заданных поверхностей и построить их:

$$1) 4x^2 + 3y^2 + 8x - 48y - 36z + 88 = 0$$

$$2) 3x^2 + 2z^2 - 36x + 8z + 44 = 0$$

$$3) 6x^2 - 10y^2 - 15z^2 - 108x - 20y + 210z - 409 = 0$$

$$4) 14x^2 + 4y^2 + 7z^2 + 84x + 32y - 70z + 169 = 0$$

$$5) 4x^2 - 5y^2 - 64x + 70y + 31 = 0$$

$$6) 9x^2 - 18y^2 - 16z^2 + 126x + 108y - 128z + 23 = 0$$

Вариант 12

Преобразовать следующие уравнения к каноническому виду, установить, какую поверхность определяет каждое из этих уравнений, а затем методом сечений исследовать форму заданных поверхностей и построить их:

$$1) 21x^2 + 18y^2 - 14z^2 - 294x - 144y - 56z + 127 = 0$$

$$2) 45x^2 + 18y^2 + 50z^2 + 90x + 72y - 333 = 0$$

$$3) 7y^2 + 6z^2 + 42x - 42y + 108z + 339 = 0$$

$$4) 4x^2 - y^2 + 4z^2 + 16x - 12y - 24z + 16 = 0$$

$$5) 4y^2 - 9z^2 - 64y - 126z - 329 = 0$$

$$6) x^2 - 12x - 3y + 21 = 0$$

Вариант 13

Преобразовать следующие уравнения к каноническому виду, установить, какую поверхность определяет каждое из этих уравнений, а затем методом сечений исследовать форму заданных поверхностей и построить их:

$$1) \quad 2y^2 - z^2 - 20y + 18z - 15 = 0$$

$$2) \quad 4x^2 + z^2 - 24x - 4y + 14z + 69 = 0$$

$$3) \quad 4x^2 + 3y^2 + z^2 + 40x - 48y - 2z + 257 = 0$$

$$4) \quad z^2 + 2y + 16z + 54 = 0$$

$$5) \quad 10x^2 + 14y^2 - 5z^2 - 80x + 28y - 60z - 6 = 0$$

$$6) \quad 18x^2 - 9y^2 + 16z^2 + 36x + 54y - 128z - 383 = 0$$

Вариант 14

Преобразовать следующие уравнения к каноническому виду, установить, какую поверхность определяет каждое из этих уравнений, а затем методом сечений исследовать форму заданных поверхностей и построить их:

$$1) \quad 12x^2 + 3y^2 + 8z^2 + 24x - 30y + 48z - 33 = 0$$

$$2) \quad 9x^2 - 15y^2 - 25z^2 - 126x - 180y + 100z - 199 = 0$$

$$3) \quad 4x^2 + 7z^2 + 32x + 14z + 43 = 0$$

$$4) \quad 8x^2 + 9y^2 - 32x + 54y + 72z - 319 = 0$$

$$5) \quad 20x^2 - 28y^2 - 35z^2 - 320x - 224y + 140z - 288 = 0$$

$$6) \quad x^2 - 3y^2 + 6x + 6y - 30 = 0$$

Вариант 15

Преобразовать следующие уравнения к каноническому виду, установить, какую поверхность определяет каждое из этих уравнений, а затем методом сечений исследовать форму заданных поверхностей и построить их:

$$1) 8x^2 - 3y^2 + 6z^2 + 64x - 42y - 60z + 131 = 0$$

$$2) 16x^2 + 9y^2 - 64x - 90y - 287 = 0$$

$$3) y^2 - 12y - 8z + 20 = 0$$

$$4) 6x^2 + 9y^2 - 4z^2 - 12x - 54y - 64z - 133 = 0$$

$$5) 5x^2 + 25y^2 + 16z^2 - 70x + 50y - 64z - 66 = 0$$

$$6) 2x^2 + 3z^2 + 20x + 6y + 36z + 146 = 0$$

Вариант 16

Преобразовать следующие уравнения к каноническому виду, установить, какую поверхность определяет каждое из этих уравнений, а затем методом сечений исследовать форму заданных поверхностей и построить их:

$$1) 5y^2 + 6z^2 - 30x + 10y - 36z - 151 = 0$$

$$2) 8x^2 - 3y^2 + 12z^2 + 48x + 54y + 192z + 405 = 0$$

$$3) 4x^2 - 3y^2 - 64x - 42y + 121 = 0$$

$$4) 21x^2 + 15y^2 + 35z^2 + 168x + 150y - 70z + 11 = 0$$

$$5) 5x^2 - 9y^2 - 15z^2 - 60x + 36y - 120z - 96 = 0$$

$$6) y^2 + 7x + 8y - 47 = 0$$

Вариант 17

Преобразовать следующие уравнения к каноническому виду, установить, какую поверхность определяет каждое из этих уравнений, а затем методом сечений исследовать форму заданных поверхностей и построить их:

$$1) 16x^2 - 4y^2 + 9z^2 - 128x - 24y + 18z + 373 = 0$$

$$2) 5y^2 + 3z^2 + 10y - 42z + 77 = 0$$

$$3) 4x^2 + 5z^2 + 16x - 20y - 60z + 136 = 0$$

$$4) 21x^2 + 14y^2 - 6z^2 + 42x - 140y - 48z + 275 = 0$$

$$5) x^2 + 2y^2 + 8z^2 - 6x + 8y - 80z + 281 = 0$$

$$6) x^2 - 3y^2 - 2x - 36y - 119 = 0$$

Вариант 18

Преобразовать следующие уравнения к каноническому виду, установить, какую поверхность определяет каждое из этих уравнений, а затем методом сечений исследовать форму заданных поверхностей и построить их:

$$1) 4y^2 - z^2 - 24y - 10z + 27 = 0$$

$$2) 9x^2 + 7y^2 - 108x + 70y + 63z + 247 = 0$$

$$3) 3x^2 - y^2 + 6z^2 + 18x + 14y + 24z + 2 = 0$$

$$4) 75x^2 + 50y^2 + 12z^2 - 150x + 200y + 96z + 167 = 0$$

$$5) x^2 + 2x - 4z - 27 = 0$$

$$6) 16x^2 - 27y^2 - 36z^2 + 64x + 270y - 216z + 361 = 0$$

Вариант 19

Преобразовать следующие уравнения к каноническому виду, установить, какую поверхность определяет каждое из этих уравнений, а затем методом сечений исследовать форму заданных поверхностей и построить их:

1) $16x^2 + 12y^2 - 3z^2 + 32x - 120y + 42z + 169 = 0$

2) $x^2 - 18x - 5z + 61 = 0$

3) $x^2 + 4y^2 + 3z^2 + 4x - 24y + 6z - 5 = 0$

4) $y^2 - 4z^2 + 2y - 40z - 135 = 0$

5) $10x^2 + 13y^2 - 4z^2 - 60x + 26y + 48z + 219 = 0$

6) $4x^2 + 3z^2 - 32x + 24y + 6z - 101 = 0$

Вариант 20

Преобразовать следующие уравнения к каноническому виду, установить, какую поверхность определяет каждое из этих уравнений, а затем методом сечений исследовать форму заданных поверхностей и построить их:

1) $9x^2 + 2y^2 + 8z^2 - 18x + 28y - 80z + 235 = 0$

2) $20x^2 + 25y^2 - 16z^2 + 120x - 300y - 224z - 104 = 0$

3) $3y^2 + 4z^2 - 12x - 6y + 64z + 199 = 0$

4) $4x^2 + 3y^2 + 48x - 30y + 171 = 0$

5) $3x^2 - 9y^2 - 8z^2 - 42x - 54y + 64z - 62 = 0$

6) $7x^2 - 9z^2 + 14x - 108z + 124 = 0$

Вариант 21

Преобразовать следующие уравнения к каноническому виду, установить, какую поверхность определяет каждое из этих уравнений, а затем методом сечений исследовать форму заданных поверхностей и построить их:

$$1) \quad x^2 + 2z^2 - 6x - 2y + 24z + 73 = 0$$

$$2) \quad 10x^2 + 6y^2 + 3z^2 + 20x - 96y - 18z + 271 = 0$$

$$3) \quad 28x^2 - 16y^2 + 49z^2 - 280x - 64y - 98z - 99 = 0$$

$$4) \quad y^2 + 12y + 3z + 12 = 0$$

$$5) \quad 4x^2 - y^2 - 56x + 10y + 207 = 0$$

$$6) \quad 15x^2 - 64y^2 - 40z^2 - 270x - 256y - 400z - 41 = 0$$

Вариант 22

Преобразовать следующие уравнения к каноническому виду, установить, какую поверхность определяет каждое из этих уравнений, а затем методом сечений исследовать форму заданных поверхностей и построить их:

$$1) \quad 9x^2 - 12y^2 - 16z^2 - 162x - 24y - 96z - 3 = 0$$

$$2) \quad 9x^2 + 4y^2 + 54x - 40y + 145 = 0$$

$$3) \quad 14x^2 - 6y^2 + 21z^2 - 112x + 24y + 42z + 221 = 0$$

$$4) \quad 5x^2 + 7y^2 + 20x - 56y + 35z - 183 = 0$$

$$5) \quad 4x^2 + 9y^2 + 12z^2 - 40x + 54y - 144z + 289 = 0$$

$$6) \quad x^2 - 4z^2 - 14x - 40z - 115 = 0$$

Вариант 23

Преобразовать следующие уравнения к каноническому виду, установить, какую поверхность определяет каждое из этих уравнений, а затем методом сечений исследовать форму заданных поверхностей и построить их:

1) $x^2 + 12x + 3z + 21 = 0$

2) $4x^2 - 9y^2 - 8z^2 + 64x + 126y + 80z - 241 = 0$

3) $28x^2 + 21y^2 + 12z^2 - 168x + 210y + 24z + 201 = 0$

4) $24x^2 - 8y^2 + 27z^2 + 96x - 96y - 162z + 51 = 0$

5) $8x^2 + 9y^2 - 16x + 90y - 72z + 89 = 0$

6) $y^2 - 5z^2 + 6y - 70z - 256 = 0$

Вариант 24

Преобразовать следующие уравнения к каноническому виду, установить, какую поверхность определяет каждое из этих уравнений, а затем методом сечений исследовать форму заданных поверхностей и построить их:

1) $8x^2 + 3y^2 + 12z^2 + 48x + 30y - 24z - 33 = 0$

2) $3y^2 + 2z^2 + 6x + 42y - 16z + 131 = 0$

3) $x^2 - 3y^2 - 18x - 36y - 54 = 0$

4) $y^2 + 6y - 4z + 33 = 0$

5) $65x^2 - 15y^2 + 39z^2 - 130x + 240y + 156z + 236 = 0$

6) $2x^2 + 3y^2 - z^2 + 16x + 54y + 14z + 226 = 0$

Учебное издание

Пищулина Ирина Яковлевна
Кукушкина Евгения Викторовна

ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Редактор *О. С. Смирнова*

Компьютерная верстка *Е. В. Кукушкиной*

Подписано в печать	30.09.2012.	Формат 60x84 1/16.
Бумага типографская.	Плоская печать.	Усл. печ. л. 9,58.
Уч.-изд. л. 7,3.	Тираж 100 экз.	Заказ

Редакционно-издательский отдел ИПЦ УрФУ
620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19
rio@ustu.ru

Издательско-полиграфический центр УрФУ
620002, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4