Сергей Гаврилов

Тензорное исчисление для «чайников»

1-1. Инварианты

Изучение общей теории относительности (да и специальной – на адекватном уровне) затрудняется особым математическим аппаратом: *тензорами*. Полагаю, что с тензорами у вас плохо? Мутная какая-то тема…

Здесь я попытался дать базовые сведения, которые должны помочь понимать физические тексты. Предполагается, что читатель имеет образование в рамках втуза, что-то из институтской математики помнит (и из физики тоже). А вот школьного курса, к сожалению, никак недостаточно.

Ожидается готовность воспринимать новые взгляды, новый непривычный подход. Да и просто желание разобраться. Потому что потребуется изрядная перенастройка мозгов!

Читатель не найдет здесь строгости и полноты изложения, оставим их математикам, которых данное сочинение, пожалуй, шокирует примитивностью. Просто хотелось представить тему как можно доступнее – как ныне говорится, для «чайников». Увы, сам предмет сложен, и ошибется тот, кто решит, что можно освоить материал, не утруждаясь собственной работой мысли.

Иллюстрации применения тензоров в некоторых разделах физики никоим образом не следует рассматривать как исчерпывающее изложение данных физических разделов – на это существуют учебники!

Понятие тензора

Не станем ходить вокруг да около… Тензор – то, что отвечает трем пунктам:

1) это математическое представление некоторого объекта (геометрического или физического), существующего в пространстве, в виде таблицы величин – компонент тензора;

2) значения компонент зависят от принятой системы координат и изменяются (преобразуются) при переходе к другим координатам;

3) преобразование компонент таково, что оставляет, тем не менее, неизменными некоторые особые величины – инварианты.

Разумеется, что это не строгое определение, а просто пояснение.

Вектор

Частным примером тензора является *вектор*, который привычно видится чем-то вроде палки, заостренной на конце. При всей комичности такого представления, оно отчасти даже полезно. Ясно, что **вектор это цельный, самостоятельный объект**, независимый от того, как мы его представим математически.

Принцип целостности вообще любого тензора может показаться тривиальным… Но мы убедимся, что из него вытекают особые следствия.

Во всяком случае, пока отметим, что вектор объективно имеет *длину*.

Вектор рассматривается в пространстве. Пространство характеризуется *числом измерений*, фиксированным для данного класса задач.

Мы не сомневаемся в том, что в пространстве введены векторные операции: сложение векторов и умножение вектора на число.

В трехмерном пространстве рассмотрим перемещение из точки A в точку B. Его принято изображать вектором, то есть направленным отрезком из A в B. Это так называемый *вектор перемещения* $\mathbf{x}$ (обычный геометрический вектор).

Очевидно, что при сложении перемещений – результирующее перемещение (векторная сумма) определяется по известному *правилу параллелограмма*.

Компоненты вектора

Идея состоит в том, чтобы уметь производить с нашим объектом (вектором) операции – пользоваться *векторной алгеброй*. Для этого вводят *систему координат*, или *базис*.

В пространстве (для начала будем считать его трехмерным) выберем три вектора $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Это будут *единичные векторы*, или *орты*. Непременное условие: орты линейно независимы. Это значит, что ни один из них нельзя представить в виде линейной комбинации остальных (такое было бы, если бы тройка векторов лежала в одной плоскости).

Несложно доказать, что любой вектор $\mathbf{x}$ можно представить однозначным образом в виде: $\mathbf{x} = x^1\mathbf{e}_1 + x^2\mathbf{e}_2 + x^3\mathbf{e}_3$, то есть в качестве линейной комбинации ортов. Коэффициенты (x^1, x^2, x^3) и есть *компоненты* вектора $\mathbf{x}$ в принятом базисе.

Примечание: верхние индексы – это не показатели степени, а попросту индексы! Степени тут всюду первые, ведь мы занимаемся чисто линейными преобразованиями.

Все помнят, конечно, что операции с векторами представляются в координатах так:

$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x^1 + y^1, x^2 + y^2, x^3 + y^3)$ – сложение векторов,

$A\mathbf{x} = (Ax^1, Ax^2, Ax^3)$ – умножение вектора на число.

Имея в виду представление через компоненты, вектор далее нередко будем обозначать x^i.

Матричное представление

Тензор это таблица величин, и вектор, в частности – тоже. Значит, для них естественно матричное представление, иногда привлекать его бывает удобно. Разумеется, вектор это матрица-столбец или матрица-строка. Так, вектор $x^i(x^1, x^2, x^3)$ можно изобразить матрицей:

$$\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}.$$

Полезно вспомнить хотя бы базовые понятия, относящиеся к матрицам – они далее пригодятся.

Переход к другим координатам

Если мы выберем другой базис (например, повернем оси координат), то компоненты вектора изменятся. Разумеется, новые компоненты (x'^1, x'^2, x'^3) можно выразить через прежние (x^1, x^2, x^3), если знать углы поворота осей. Задача кажется весьма громоздкой, с синусами и косинусами… В общем же виде она проста:

$$\begin{aligned} x'^1 &= a_{11}x^1 + a_{12}x^2 + a_{13}x^3, \\ x'^2 &= a_{21}x^1 + a_{22}x^2 + a_{23}x^3, \qquad (1.1) \\ x'^1 &= a_{31}x^1 + a_{32}x^2 + a_{33}x^3. \end{aligned}$$

Можно записать коэффициенты a_{ik} в виде матрицы преобразования:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Правда, мы пока не знаем, чему равны эти коэффициенты… Но есть хорошая новость: мы и не будем здесь интересоваться их конкретными выражениями. Достаточно иметь в виду, что они существуют и известны (могут быть выведены, или взяты из справочной литературы).

Важно одно: любой объект, компоненты которого преобразуются согласно (1.1), является вектором. А если нет – то не является. Хотя бы он изображался тройкой чисел!

Очевидный, но немаловажный факт: если в некоторой системе координат все компоненты вектора равны нулю, то они нулевые и в любой другой системе. Это же относится к тензорам вообще.

Длина вектора в прямоугольных координатах

Если мы имеем декартову, то есть ортогональную (а еще точнее – ортонормальную) систему координат, то длина геометрического вектора **x** (ее квадрат) выражается через компоненты общеизвестным образом по теореме Пифагора:

$$\mathbf{x}^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 . \qquad (1.2)$$

Двойка за скобками здесь изображает уже показатель степени, разумеется.

При переходе к другому базису (когда значения компонент изменятся) длина должна остаться той же самой, ведь она является атрибутом собственно вектора! По нашему уговору, она не может зависеть от выбора координат. Говорят, что **длина инвариантна** относительно перехода к другим координатам; является *инвариантом* вектора.

По существу это определяет требования к формулам преобразования координат, то есть к той самой матрице коэффициентов a_{ik}: их значения не могут быть произвольными!

Скаляр

Вероятно, еще из школы вам запало в память правило: величины делятся на векторные и скалярные; все, что не вектор, то скаляр.

В тензорном исчислении *скаляр* это тоже тензор (нулевого ранга). Это **число-инвариант, которое не меняется при переходе к другим координатам**. Применительно к вектору, его длина – классический скаляр. Далее мы узнаем, что скаляры получаются как окончательный результат свертки тензоров.

Любая из компонент вектора – число. И не вектор… Но скаляром его тоже не считают: ведь эта величина не инвариантна.

Скалярное произведение

Напомню о понятии *скалярного произведения* двух векторов. Оно выражается через координаты так:

$$\mathbf{xy} = x^1 y^1 + x^2 y^2 + x^3 y^3 .$$

Собственно говоря, **квадрат длины вектора – это просто его скалярное произведение на себя**.

Скалярное произведение тоже инвариантно (как любой скаляр). Ведь оно несет геометрический смысл, независимый от координатного представления: произведение длин векторов и косинуса угла.

Теперь вы подготовлены к тому, чтобы понять, в каком смысле говорят об **инвариантности вектора, да и вообще любого тензора**. Идея, что тензор является чем-то целостным, выливается в утверждение об его инвариантности при преобразованиях координат, имея в виду все то, что вы уже успели узнать.

Наверняка изложенные до сих пор сведения представляются тривиальными, общеизвестными. Но теперь – важное предупреждение. Следующий параграф, хотя и рябит формулами (элементарными по сути), требует внимательного прочтения: он ключевой для понимания всего.

Длина вектора в произвольных координатах

Прямоугольные координаты это случай все-таки специальный. Координаты могут быть, скажем, косоугольными (единичные векторы не ортогональны). Ясно, что формула для длины окажется сложнее, чем (1.2). Однако (и тут снова хорошая новость!) мы выводить ее не собираемся. Достаточно записать в общем виде:

$$\mathbf{x}^2 = g_{11}(x^1)^2 + g_{22}(x^2)^2 + g_{33}(x^3)^2 + g_{12}x^1x^2 + g_{13}x^1x^3 + g_{23}x^2x^3 + g_{21}x^2x^1 + g_{31}x^3x^1 + g_{32}x^3x^2 .$$

Откуда такое? Да просто из соображений размерности – это квадратичная форма! Некие коэффициенты g_{ik} зависят от конкретной системы координат.

Конечно, можно привести подобные члены, и тогда слагаемых выйдет 6, а не 9… Но мы, наоборот, специально вводим из соображений симметрии $g_{ik} = g_{ki}$: так будет удобнее.

Теперь запишем то же самое немного иначе:

$$\mathbf{x}^2 = (g_{11}x^1)x^1 + (g_{22}x^2)x^2 + (g_{33}x^3)x^3 + (g_{12}x^1)x^2 + (g_{13}x^1)x^3 + (g_{23}x^2)x^3 +$$
$$+ (g_{21}x^2)x^1 + (g_{31}x^3)x^1 + (g_{32}x^3)x^2 .$$

И окончательно:

$$\mathbf{x}^2 = x_1x^1 + x_2x^2 + x_3x^3 . \qquad (1.3)$$

Здесь мы просто ввели обозначения:

$$\begin{aligned} x_1 &= g_{11}x^1 + g_{12}x^2 + g_{13}x^3 , \\ x_2 &= g_{21}x^1 + g_{22}x^2 + g_{23}x^3 , \\ x_3 &= g_{31}x^1 + g_{32}x^2 + g_{33}x^3 . \end{aligned} \qquad (1.4)$$

Сюрприз: формула (1.3) нам знакома, это опять скалярное произведение! В случае декартовых координат квадрат длины это просто скалярное произведение вектора на себя же. А здесь, для общего случая, – это скалярное произведение вектора x^i на… что? На некоторый другой вектор $x_i(x_1, x_2, x_3)$. Его называют *ковектором*, то есть сопряженным вектором.

Ковектор является тоже вектором – факт вообще-то неочевидный… Тем не менее, это так. Потому что его произведение с вектором – скаляр (квадрат длины). Вообще линейные операции с тензорами приводят к тензорам же!

Формулы (1.4) нам тоже известны: это формулы преобразования координат, сравните с (1.1). Получается (опять сюрприз), ковектор – это никакой не другой, а тот же самый вектор! Но только представленный в какой-то другой системе координат (ее называют иногда *дуальной*).

Для чего это нужно?

Ясно, что в ортогональном базисе оба представления вектора x^i и x_i совпадают (то есть имеют идентичные компоненты). Дуальная система координат здесь попросту совпадает с главной. И только в общем случае компоненты будут различаться.

Но тогда, казалось бы, приведенные выше построения, хотя и любопытны, но излишни. Просто условимся использовать декартовы координаты! В самом деле, так и поступают, и спокойно обходятся без тензорной экзотики.

Увы, такое возможно не всегда. Например, в искривленных пространствах пересечение сетки параллельных прямых не может быть всюду под прямым углом. Рассмотрите в качестве двумерного примера поверхность сферы, где «прямыми» являются окружности больших кругов.

Разделы, еще ожидающие вас впереди, как раз и посвящены применению тензорного аппарата в некоторых разделах физики.

1-2. Базовые понятия тензорного исчисления

В конце предыдущего раздела мы нашли способ **записывать инвариант** (скалярное произведение) **в инвариантной форме**. В самом деле, наша формула $\mathbf{x}^2 = x_1x^1 + x_2x^2 + x_3x^3$ – в любой системе координат выглядит одинаково. Преобразования координат в ней есть… но как бы скрыты. Далее нам предстоит убедиться, что и в более сложных случаях также легко обеспечивается простая форма записи. В этой простоте и состоит главная идея.

Правда, такое видимое упрощение достигается ценой введения разного типа представления одного и того же вектора. Это как раз и обозначается разным размещением индекса: вверху или внизу (а вы, наверно, гадали – почему?). Они называются: *ковариантное* и *контравариантное* представление.

Ковариантность и контравариантность

Один и тот же вектор можно **записать как в ковариантных, так и в контравариантных компонентах**. Обычно какие-то из них являются для рассматриваемого вектора естественными. То есть действующими именно в тех координатах, которые присущи задаче.

Координаты геометрического вектора (вектора перемещения) **являются естественно контравариантными**. Контравариантный вектор обозначается в форме x^i, то есть с индексом наверху.

Компоненты ковариантного вектора изменяются как бы противоположно изменению векторов базиса (отсюда название). Вот примитивный пример. Пусть мы перешли от одной системы координат к другой – такой, что:

$$x'^1 = Nx^1,\ x'^2 = x^2,\ x'^3 = x^3\ \ (N > 1).$$

Говоря попросту, мы изменили масштаб первой оси, сделав его более мелким. Новая единица длины на этой оси уменьшилась, и составляет $\frac{1}{N}$ от старой. А соответствующая новая координата вектора, напротив того, увеличилась в N раз – как бы противоположно масштабу оси. Это и есть контравариантность.

Для ковариантного вектора все наоборот… Но это мы разберем чуть ниже.

Хотя тот же самый вектор перемещения можно представить и в ковариантной форме: x_i. Его ковариантные компоненты x_1, x_2, x_3 – это составляющие не в базисе нашей задачи. А в некоторой другой (дуальной) системе координат. Просто мы знаем, как к ней переходить: через коэффициенты g_{ik}. И потому такой переход держим в уме. Оставляем его за кадром.

Правило Эйнштейна

Тензорное исчисление зародилось в середине XIX века, но было не слишком в ходу. Свое настоящее признание оно получило в связи с общей теорией относительности Эйнштейна, которая не может быть изложена иначе, как в тензорной форме.

Правило Эйнштейна позволяет еще более упростить запись многих тензорных выражений.

В соответствии с этим правилом, выражение для квадрата длины запишется компактнее:

$$\mathbf{x}^2 = x_1x^1 + x_2x^2 + x_3x^3 = x_ix^i\ .$$

Правило состоит в том, что **по индексу, встречающемуся дважды** (один раз наверху, другой раз внизу) **подразумевается суммирование**. То есть, $a_i b^i$ – это просто сокращенная запись выражения: $\sum_i a_i b^i$. Здесь индекс i (пробегающий значения 1, 2, 3) называется *немым*: в результирующее выражение он не вошел – как бы «сократился». В подобных случаях говорят, что произведена *свертка*. Подробно о ней будет ниже.

О ковариантных векторах

В пространстве задано скалярное поле φ . Построим частные производные:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x^1},\ \frac{\partial\varphi}{\partial x^2},\ \frac{\partial\varphi}{\partial x^3}.$$

Их смысл – изменение величины поля вдоль данного направления на единицу протяженности.

Если эти величины рассматривать как компоненты, то можно убедиться, что мы имеем дело с вектором: при повороте осей пересчет координат будет по стандартным формулам. Такой вектор, как известно, называют *градиентом поля*.

Пусть масштаб первой оси снова сжали в N раз. Единица протяженности сократилась, но само поле-то не изменилось. Ясно, что изменение поля в пересчете на новую, уменьшенную единицу будет соответственно меньше:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x'^1} = \frac{\partial\varphi}{\partial(Nx^1)} = \frac{1}{N}\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}.$$

Компонента вектора изменилась в те же сторону, что и масштаб оси! Причина ясна: сами выражения для компонент имеют внутри себя зависимость от координат.

Такое свойство векторов называется *ковариантностью*. **Вектор градиента естественно ковариантен** в том базисе, в котором задано поле.

Тензоры

Перепишем еще раз формулы (1.4) получения ковариантных компонент из исходных контравариантных:

$$\begin{aligned} x_1 &= g_{11}x^1 + g_{12}x^2 + g_{13}x^3, \\ x_2 &= g_{21}x^1 + g_{22}x^2 + g_{23}x^3, \\ x_3 &= g_{31}x^1 + g_{32}x^2 + g_{33}x^3. \end{aligned} \tag{1.4}$$

И присмотримся к выражениям. Мы увидим в них результат умножения двух матриц:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}.$$

Помните, мы упомянули, что вектор это частный случай тензора? Пора уточнить, что **вектор это тензор первого ранга** (иногда вместо «ранг» говорят «валентность»). Контравариантный вектор принято изображать матрицей-столбцом. Ковариантный – матрицей-строкой.

А в лице матрицы 3х3 (g_{ik}) мы знакомимся здесь с *тензором второго ранга*. Тензор третьего ранга придется уже представить себе в виде трехмерной таблицы. И так далее.

Количество индексов в символическом обозначении соответствует рангу тензора. А размеры строк и столбцов всегда соответствуют числу измерений пространства (в нашем примере оно трехмерно).

Запись тензорных выражений

Запишем (1.4) сокращенной записью:

$$x_i = g_{ik} x^k . \qquad (1.5)$$

Что мы можем усмотреть из (1.5)? Многое.

1) Это запись, укороченная по правилу Эйнштейна. В полном виде она выглядит так:

$$x_i = \sum_k g_{ik} x^k . \qquad (1.5а)$$

Здесь k это немой индекс (не попадающий в результат).

2) g_{ik} это условное обозначение *ковариантного тензора второго ранга*. Второго – потому что два индекса. Ковариантного – потому что индексы внизу. А внизу потому, что есть правило: повторяющиеся индексы должны чередоваться (верх – низ). При комбинировании ковариантных и контравариантных компонент законы их преобразования взаимно «сокращаются». А иначе конечный результат не будет являться тензором – потеряет инвариантность!

3) Результат является ковариантным вектором (i внизу), потому что справа индекс i ковариантный.

4) Количество измерений пространства (количество значений, которые пробегает индекс суммирования) здесь явно не видно, и должно подразумеваться из контекста задачи. Соответственно, под (1.5а) следует понимать на самом деле три формулы: для $i = 1, 2, 3$. Это тоже остается за кадром.

Тензорные операции. Произведение

Возможно покомпонентное сложение тензоров одинаковой структуры, умножение их на число – на этом особо задерживаться не будем. Пространство тензоров, как и в случае векторов, полагаем линейным, то есть результат таких операций будет снова тензором.

По большому счету придется иметь в виду две основные операции с тензорами: *перемножение* и *свертка*. Эти **операции над тензорами приводят к тензорам же**.

Вот иллюстрация тензорного произведения:

$$x^i x^k = X^{ik} = \begin{bmatrix} x^1x^1 & x^2x^1 & x^3x^1 \\ x^1x^2 & x^2x^2 & x^3x^2 \\ x^1x^3 & x^2x^3 & x^3x^3 \end{bmatrix}.$$

Как видим, результирующий тензор X^{ik} это тензор суммарного ранга. Он содержит **компоненты, равные произведению компонент сомножителей – каждый с каждым**. А все индексы сомножителей просто перешли к произведению.

Важно: из того, что произведение двух векторов это тензор 2-го ранга, вовсе не следует, что *любой* такой тензор можно представить произведением некоторых векторов!

А, например, произведение: $A^{ik} B_{lmn} = C^{ik}{}_{lmn}$ – будет тензором 5-го ранга. Причем, как говорят, *смешанным*: дважды контравариантным и три раза ковариантным.

Свертка

Мы уже отметили свертку – на примере квадрата длины вектора: простейшая свертка это скалярное произведение. Рассмотрим вопрос подробнее.

Свертка возникает при записи перемножения, когда один из индексов повторяется сверху и снизу. Так произведение:

$A^{ik}B_{imn} = C^{k}{}_{mn}$ – будет иметь не 5-й, а 3-й ранг: при однократной свертке ранг понижается на 2. Здесь свертка идет по индексу *i*.

Вспомнив, что повторяющийся индекс означает суммирование, запишем нашу свертку детально:

$$A^{ik}B_{imn} = \sum_i A^{ik}B_{imn} = A^{1k}B_{1mn} + A^{2k}B_{2mn} + A^{3k}B_{3mn}.$$

Здесь видно, каким образом пропадает немой индекс *i*.

Свертка тензора 2-го ранга внутри себя называется *следом* тензора, специалисты старой школы предпочитают немецкий эквивалент: *шпур* (Spur). Так квадрат длины $\mathbf{x}^2 = x_i x^i$ это след (шпур) тензора $X_i^{\ i} = x_i x^i$. По сути дела это сумма элементов его главной диагонали.

Очевидно, что **след, как любой скаляр – инвариант**.

Инвариант тензора

Мы знаем, что инвариантом вектора является его длина, выражающаяся через свертку вектора с ковектором. А что с тензором большего ранга?

Любой тензор имеет инвариант (скаляр), получающийся сверткой с сопряженным тензором. Например, инвариантом тензора второго ранга, дважды контравариантного: A^{ik} – будет, очевидно, выражение: $A^{ik}A_{ik}$.

На этом можно бы закончить… Но, ради полной ясности, все-таки распишем, что такое двойная свертка. Сначала свертываем, например, по индексу *i*:

$$A^{ik}A_{ik} = A^{1k}A_{1k} + A^{2k}A_{2k} + A^{3k}A_{3k}.$$

Вторым шагом свертываем по *k* каждый из трех получившихся членов:

$$A^{ik}A_{ik} = (A^{11}A_{11} + A^{12}A_{12} + A^{13}A_{13}) + (A^{21}A_{21} + A^{22}A_{22} + A^{23}A_{23}) + (A^{31}A_{31} + A^{32}A_{32} + A^{33}A_{33}).$$

Что полученное громоздкое выражение является инвариантом, ничуть не «очевидно»… Но мы в этом уверены! Просто потому, что в результате двойной свертки все индексы пропадают. Следовательно, обязан получиться скаляр.

Выполнение простых правил оперирования индексами избавляет от трудоемких доказательств.

Разумеется, инвариантом комбинированного тензора A_i^k будет величина $A_i^k A_k^i$.

Метрический тензор

Завершив затянувшийся экскурс в общие вопросы, возвращаемся к тому, с чего все началось – к формуле для длины вектора:

$$\mathbf{x}^2 = x_1x^1 + x_2x^2 + x_3x^3. \qquad (1.3)$$

Сейчас мы умеем записать ее в сокращенном виде:

$$\mathbf{x}^2 = x_i x^i. \qquad (1.3а)$$

Вспомним теперь, что:

$x_i = g_{ik} x^k$. (1.5)

Подставляя в (1.3а), имеем:

$\mathbf{x}^2 = g_{ik} x^i x^k$. (1.6)

Это общий вид тензорного выражения для длины, использующее контравариантные (естественные) компоненты.

Тензор g_{ik} есть метрический тензор пространства. *Метрический тензор* это как бы правило вычисления длины любого вектора по значениям его компонент. Применительно к (1.5) говорят, что здесь вектор x^i *свертывается* с метрическим тензором и получается вектор x_i. То есть метрический тензор это еще и способ преобразования компонент – от контравариантных к ковариантным и наоборот.

Теперь для длины вектора мы теперь имеем ряд вариантов (на выбор):

$\mathbf{x}^2 = x_i x^i$;

$\mathbf{x}^2 = g_{ik} x^i x^k$;

$\mathbf{x}^2 = g^{ik} x_i x_k$.

Аналогично для скалярного произведения:

$\mathbf{xy} = x_i y^i$;

$\mathbf{xy} = g_{ik} x^i y^k$;

$\mathbf{xy} = g^{ik} x_i y_k$.

Свойства метрического тензора

Мы не утруждали себя вычислением составляющих метрического тензора, и потому кажется, что про их значения ничего сказать нельзя. Но это не так.

Во-первых, вспомним, что коэффициенты в выражении для длины мы (из соображений симметрии) вводили так, что $g_{ik} = g_{ki}$. Вот вам и первое свойство метрического тензора: его матрица *симметрична* (элементы, симметричные относительно главной диагонали, одинаковы).

Далее, в декартовых координатах $\mathbf{x}^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$, то есть, между x^i и x_i нет разницы. Делаем второй вывод: именно здесь метрический тензор выглядит крайне просто:

$$g_{ik} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (1.7)$$

Члены со смешанными индексами $(i \neq k)$ в выражение для длины не входят. Итак, метрический тензор для случая прямоугольных координат является *диагональной матрицей*, причем все элементы главной диагонали равны единице.

Единичный тензор

Полезным понятием является *единичный тензор*, обозначаемый *символом Кронекера* δ_i^k. Он определяется так:

$\delta_i^k x^i = x^k$ (1.8)

– для любого вектора x. Единичный тензор как бы выделяет желаемую (k-ю) компоненту вектора.

Слева записана сумма – раскроем ее:

$$\delta_i^k x^i = \delta_1^k x^1 + \delta_2^k x^2 + \delta_3^k x^3 = x^k .$$

Для выполнения равенства нужно, чтобы равнялась единице только та компонента δ_i^k, для которого $i = k$. А остальные должны быть нулевыми. Значит, единичный тензор выглядит точно как (1.7)!

Перейдем к другой системе координат, компоненты вектора изменятся. И единичного тензора тоже… Но то, что мы разъяснили относительно (1.8), остается, тем не менее, в силе!

Получается, что тензор δ_i^k обладает редким свойством: **его компоненты одинаковы в любой системе координат**, не изменяются.

Физические векторы

Мы рассматривали вектор перемещения – он имеет чисто геометрическую природу.

А теперь рассмотрим в качестве примера вектор скорости. Чтобы получить компоненты, надо представить его в виде линейной комбинации ортов пространства… но вот беда: орты имеют у нас другую размерность – размерность расстояния, а не скорости!

Впрочем, ведь мы имеем выражения, связывающие различные физические величины с перемещением. Так, скорость определяется:

$$v^i = \frac{dx^i}{dt} = \left(\frac{dx^1}{dt}, \frac{dx^2}{dt}, \frac{dx^3}{dt} \right) = (v^1, v^2, v^2) .$$

Скорость это вектор потому, что дифференцирование – линейная операция. А время t в нерелятивистской механике рассматривается как скаляр: оно инвариантно.

Компоненты вектора скорости в принятом базисе, разумеется, контравариантны.

Аналогично вводится контравариантный вектор ускорения:

$$a^i = \left(\frac{dv^1}{dt}, \frac{dv^2}{dt}, \frac{dv^3}{dt} \right) = (a^1, a^2, a^3) .$$

Рассмотрим вектор силы. Из формулы, связывающей ее с ускорением, имеем:

$$f^i = ma^i = \left(ma^1, ma^2, ma^3 \right).$$

Здесь вектор силы оказывается в контравариантных компонентах, поскольку индекс i справа контравариантный.

Однако запишем формулу для силы в потенциальном поле:

$\mathbf{f} = k\,\mathrm{grad}\varphi$ (коэффициент k зависит от природы поля).

А теперь вспомним, что вектор градиента $\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x^2}, \frac{\partial\varphi}{\partial x^3}$ ковариантен в базисе, в котором задано поле! Это видно и формально – из того, что **контравариантные компоненты стоят в знаменателе**. Значит, и вектор силы получается здесь в ковариантных компонентах:

$$f_i = k\frac{\partial\varphi}{\partial x^i} = \left(k\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}, k\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}, k\frac{\partial\varphi}{\partial x^3} \right).$$

Приравнять его к ma^i будет формально неправильным. Придется свернуть с метрическим тензором пространства, получив корректное соотношение:

$$k\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}g^{ik}=ma^k\,.$$

Разумеется, в декартовых координатах такое усложнение излишне.

2. Тензоры в релятивистской механике

В физике, в отличие от геометрии, существенно присутствует время, движение. В части перехода между системами координат – интерес представляют не столько системы с взаимно повернутыми осями, сколько системы, *взаимно движущиеся*.

Тензорный стиль формулировки специальной теории относительности вызван некоторой причиной: **пространственная длина** (в понимании, имеющем физический смысл) **оказалась неинвариантной** – при переходе к другой, движущейся системе координат. Это следствие опытов.

И в то же время опыты показывают, что физические законы действуют в указанных системах одинаково. Значит, законы должны допускать формулировку в тензорной форме, из которой, как положено, вытекают некоторые инварианты – относительно переходов между движущимися системами координат.

Пространство СТО

Выяснилось, что **инвариантом является *интервал***. Он (точнее, его квадрат) определяется следующим образом:

$$s^2 = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = (ct)^2 - \mathbf{r}^2 . \qquad (2.1)$$

Система координат x, y, z здесь декартова, а c – фундаментальная константа, имеющая размерность скорости. И, соответственно, являющаяся инвариантом.

Трехмерный вектор $\mathbf{r}$ по-прежнему выражает пространственную дистанцию, а величина ct – временну́ю. В целом скаляр s выражает «расстояние» – но не между пространственными точками, как ранее, а между пространственно-временными. То есть между *событиями*.

Эти краткие сведения приведены здесь с целью напомнить, а вообще-то предполагаются известными.

Метрика 4-пространства

Форма (2.1) содержит, как видно, четыре квадратичных члена. Удобно приписать ее четырехмерному пространству событий – *пространству Минковского* с координатами: ct, x, y, z. Применим обозначение: x^0, x^1, x^2, x^3, и тогда:

$$s^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 . \qquad (2.1б)$$

Но ведь в общем виде квадрат длины записывается:

$s^2 = g_{00}(x^0) + g_{11}(x^1)^2 + g_{22}(x^2)^2 + g_{33}(x^3)^2$ (члены со смешанными индексами у нас отсутствуют). Сравнивая с (2.1б), где фигурируют минусы, получаем для 4-мерного метрического тензора:

$g_{00} = 1$, $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$ (остальные компоненты нулевые). В матричной форме:

$$g_{ik} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$. Перед вами **метрический тензор 4-пространства**.

Если бы все элементы главной диагонали метрического тензора равнялись 1, разницы между ковариантным и контравариантным представлением не было бы. В наших же координатах (их называют *галилеевыми*) это совсем не так. Потому и приходится брать в соображение тензорные примочки.

Выразим интервал через координаты 4-вектора:

$s^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = x^0x^0 - x^1x^1 - x^2x^2 - x^3x^3$.

Приведем это к стандартной форме для длины:

$$s^2 = x^i x_i = x^0x_0 + x^1x_1 + x^2x_2 + x^3x_3 \qquad (2.2)$$

Как всегда, квадрат длины это скалярное произведение вектора на ковектор.

Дифференциал интервала

Нам будет полезно выражение для дифференциала интервала. Из (2.2) очевидно:

$$ds^2 = dx^i dx_i = dx^0dx_0 + dx^1dx_1 + dx^2dx_2 + dx^3dx_3 . \qquad (2.2a)$$

Простыми преобразованиями получаем:

$$ds = dt\sqrt{c^2 - \frac{dx^2}{dt^2} - \frac{dy^2}{dt^2} - \frac{dz^2}{dt^2}} = dt\sqrt{c^2 - v_x^2 - v_y^2 - v_z^2} = cdt\sqrt{1 - v^2/c^2} . \qquad (2.3)$$

Формула (2.3) не раз потребуется. Использованные обозначения, кажется, понятны без пояснений. Следует лишь оговорить, что v – не есть скорость какого-то конкретного объекта. Это просто отношение приращения линейного промежутка между событиями (бесконечно близкими) к временному промежутку, имеющее размерность скорости. Поэтому вполне возможно, что $v > c$. Просто это будет соответствовать мнимому интервалу – как говорят, *пространственноподобному*.

Четырехвекторы

Итак, контравариантный геометрический вектор x^i от события A к событию B имеет компоненты: x^0, x^1, x^2, x^3. Здесь первую (точнее, нулевую) компоненту $x^0 = ct$ называют временнóй, остальные – пространственными. x^i это вектор в четырехмерном пространстве (правда, не эвклидовом, а *псевдоэвклидовом*), как говорят – *4-вектор*.

Вообще у любого 4-вектора СТО, какое бы физическое содержание он ни имел, **нулевую компоненту называют временной. Три остальные компоненты называют пространственными**. В совокупности последние образуют трехмерный вектор. Что принято условно изображать так: $x^i\ (x^0, \mathbf{x})$.

Конечно, трехмерный вектор **x** уже не имеет тензорных свойств относительно перехода между движущимися системами координат (не инвариантен).

Подчеркну: **трехмерный вектор не сохраняет свои компоненты** при переходе между системами координат (если только это не трехмерный поворот). Изменяется временная компонента 4-вектора – значит, обязана измениться хотя бы одна пространственная.

Сопоставляя $s^2 = x^0x^0 - x^1x^1 - x^2x^2 - x^3x^3$ и $s^2 = x^0x_0 + x^1x_1 + x^2x_2 + x^3x_3$, выводим 4-вектор в ковариантных компонентах:

$x_i(x_0, x_1, x_2, x_3)$, где $x_0 = x^0$, $x_1 = -x^1$, $x_2 = -x^2$, $x_3 = -x^3$.

Как видим, **для преобразования к ковариантным компонентам и обратно надо лишь поменять знаки перед всеми компонентами, кроме нулевой**. Проверьте, что соблюдается классическое: $x_i = g_{ik}x^k$.

Между прочим, это позволяет установить, как выглядит в СТО *дуальный базис* (тот самый, в котором векторы приобретают свои ковариантные компоненты). Он отличается от главного базиса просто сменой направлений пространственных осей на противоположные (а временная ось не меняется).

Преобразования координат

Компоненты 4-вектора при переходе к другой (движущейся со скоростью **v**) системе координат обязаны изменяться таким образом, чтобы квадрат вектора (квадрат интервала) оставался неизменным. Для простоты примем $c = 1$, и тогда данное требование запишется:

$$t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2 .$$

Легко проверить (простой подстановкой), что этому условию удовлетворяют преобразования:

$$x' = \frac{x - v_x t}{1 - v^2},\ y' = \frac{y - v_y t}{1 - v^2},\ z' = \frac{z - v_z t}{1 - v^2},\ t' = \frac{t - \mathbf{vr}}{1 - v^2}. \qquad (2.4)$$

Они называются *преобразованиями Лоренца*.

Запишем преобразования в более привычном виде:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},\ y' = y,\ z' = z,\ t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \qquad (2.5)$$

Подобная запись допустима: всегда можно повернуть оси координат таким образом, что относительная скорость систем координат будет направлена вдоль оси *X*.

Внимание: в точности **по этим же формулам преобразуются компоненты вообще любого 4-вектора** СТО x^i (примеры их мы рассмотрим далее). Только, с учетом того, что $x^0 = ct$, формулы записывают в общем виде так:

$$x'^1 = \frac{x^1 - \frac{v}{c}x^0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},\ x'^2 = x^2,\ x'^3 = x^3,\ x'^0 = \frac{x^0 - \frac{v}{c}x^1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \qquad (2.5а)$$

Четырехскорость

Перейдя к четырехмерным формулировкам, мы отказались рассматривать чисто пространственное перемещение. Тогда и обычная скорость нас тоже не устраивает! В самом деле, в $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$ **время уже не является инвариантной переменной**, одинаковой в любой системе координат. Теперь время это просто одна из координат 4-вектора перемещения. То есть не скаляр!

Чтобы получить 4-векторную величину, аналогичную скорости, следует дифференцировать по некоторой другой переменной, инвариантной в 4-пространстве – скаляру. Такой величиной является интервал.

Из указанных соображений вектор 4-скорости определяют так:

$$u^i = \frac{dx^i}{ds}. \qquad (2.6)$$

Из соотношения (2.2а) $ds^2 = dx^0 dx_0 + dx^1 dx_1 + dx^2 dx_2 + dx^3 dx_3$ выводим (поделив на ds^2):

$$\frac{dx^0}{ds}\frac{dx_0}{ds} + \frac{dx^1}{ds}\frac{dx_1}{ds} + \frac{dx^2}{ds}\frac{dx_2}{ds} + \frac{dx^3}{ds}\frac{dx_3}{ds} = 1.$$

Учитывая (2.6), имеем:

$$u^0u_0 + u^1u_1 + u^2u_2 + u^3u_3 = 1.$$

То есть длина вектора 4-скорости всегда равна единице. Странно? Ничуть, так и должно быть, длина любого 4-вектора это скаляр, инвариант. Кстати, 4-скорость – величина безразмерная (ведь интервал имеет размерность пространственного расстояния).

Можно выразить компоненты 4-скорости через привычные трехмерные величины:

$u^0 = \dfrac{d(ct)}{ds} = \dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ – тут просто использовано (2.3). Теперь v уже реальная скорость, ведь мы рассматриваем пространственный и временной промежутки, характеризующие движение заданного тела.

Столь же легко получаем:

$$u^1 = \frac{v_x}{c\sqrt{1-v^2/c^2}},\ u^2 = \frac{v_y}{c\sqrt{1-v^2/c^2}},\ u^3 = \frac{v_z}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

Три пространственные компоненты можно объединить в трехмерный вектор:

$$u^i = (u^0, \mathbf{u}) = \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \frac{\mathbf{v}}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}\right). \qquad (2.6а)$$

4-вектор энергии-импульса

Известное из школы выражение для импульса тела: $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ (m – масса) является трехмерным, и, следовательно, неинвариантным: абсолютная величина импульса при переходе к движущейся системе координат не сохраняется. Чтобы получить четырехмерную конструкцию, на место скорости ставим 4-скорость. Ну а с массой все в порядке: это скаляр.

Впрочем, возможно, вы читали, что масса движущегося тела возрастает? Это архаичный взгляд, о котором пора забыть…

4-скорость имеет другую размерность, чем просто скорость. Поэтому для преемственности домножают еще на c. В итоге для импульса имеем:

$$p^i = mcu^i.$$

Так как $u^iu_i = 1$, то: $p^ip_i = m^2c^2$ (инвариантный квадрат 4-вектора p^i).

Подставив компоненты 4-скорости, легко расписываем компоненты 4-импульса:

$$p^0 = \frac{mc}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\ p^1 = \frac{mv_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\ p^2 = \frac{mv_y}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\ p^3 = \frac{mv_z}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

Ну и, как всегда, пространственные компоненты можно объединить под эгидой трехмерного вектора:

$$p^i = (p^0, \mathbf{p}) = \left(\frac{mc}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right). \qquad (2.7)$$

При малых скоростях имеем привычную формулу:

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \approx m\mathbf{v}.$$

Мы без труда получили две вещи:

1) релятивистскую формулу для трехмерного импульса: $\mathbf{p} = \dfrac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$;

2) 4-вектор импульса, имеющий еще и некоторую загадочную временную компоненту. Займемся ею.

При малых скоростях данная составляющая равна:

$$\frac{mc}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \approx mc\left(1+\frac{v^2}{2c^2}\right) = mc + \frac{mv^2}{2c} = \frac{1}{c}\left(mc^2 + \frac{mv^2}{2}\right).$$

В скобках оказалась *полная энергия* $\mathcal{E}$, состоящая из двух слагаемых:

1) энергия покоя, равная mc^2;

2) кинетическая энергия (для малых скоростей равная $\frac{mv^2}{2}$).

Теперь окончательно ясен физический смысл компонент 4-вектора импульса. Это полная энергия (с точностью до коэффициента) и три компоненты импульса:

$$p^i\left(\mathcal{E}/c, \mathbf{p}\right).$$

Отсюда название: *4-вектор энергии-импульса*.

Напомню, что квадрат его равен m^2c^2. То есть:

$$\frac{\mathcal{E}^2}{c^2} - p^2 = m^2c^2. \qquad (2.8)$$

Без труда мы получили фундаментальное уравнение релятивистской динамики.

Сопоставляя два члена в (2.7):

$$\frac{\mathcal{E}}{c} = \frac{mc}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \text{ и } \mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

получаем и вторую важную формулу:

$$\mathcal{E} = \frac{pc^2}{v}.$$

4-сила

Ее можно ввести по аналогии с трехмерным случаем $\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$. Но для 4-вектора принимаем уже:

$f^i = \frac{dp^i}{ds}$. Как и ранее, используя (2.3), легко получается:

$$f^i = \left(\frac{d\mathcal{E}}{dt}\frac{1}{c^2\sqrt{1-v^2/c^2}}, \frac{\mathbf{f}}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}\right). \qquad (2.9)$$

Здесь, как всегда, **f** это обычный трехмерный вектор силы.

Кстати, $\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \mathbf{fv}$ это мощность, вот вам и физический смысл нулевой компоненты 4-силы!

Теперь подставим в $f^i = \frac{dp^i}{ds}$ определение 4-импульса: $p^i = mcu^i$. Получим:

$$f^i = mc\frac{du^i}{ds}. \qquad (2.10)$$

Перед нами аналог знакомой формулы: $\mathbf{f} = m\mathbf{a} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt}$. Производная $\frac{du^i}{ds}$ это *4-ускорение*. А множитель *c* появляется в связи с уравниванием размерностей.

Еще раз увидели, как знакомые трехмерные векторы превращаются в 4-векторы. А в качестве нулевой компоненты последнего выступает некоторый «скаляр». В кавычках, потому что в 4-пространстве он скаляром не является.

Дифференцирование по координатам

В физике рассматриваются скалярные и векторные поля и их производные – применяется аппарат векторного анализа. Поскольку поле зависит от четырех координат, речь идет о *частных производных*.

Для того, чтобы образовывать инвариант, производные по координатам должны составлять тензор. Запишем тензор производных векторного поля A^i:

$$\frac{\partial A^i}{\partial x^k} = \begin{bmatrix} \frac{\partial A^1}{\partial x^1} & \frac{\partial A^2}{\partial x^1} & \ldots \\ \frac{\partial A^1}{\partial x^2} & \frac{\partial A^2}{\partial x^2} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что это смешанный (один раз контравариантный, один раз ковариантный) тензор второго ранга.

С его помощью можно выразить дифференциалы компонент 4-вектора:

$$dA^i = \frac{\partial A^i}{\partial x^k} dx^k . \qquad (2.11)$$

Надеюсь, уже можно опускать надоевшее напоминание, что мы на самом деле имеем здесь сумму – в сокращенной записи.

Правда, логично задаться вопросом, действительно ли таблица частных производных это тензор. И если нет, то dA^i уже не являются компонентами вектора…

В самом начале мы принимали, что при переходе к другому базису – новые значения компонент выражаются из старых просто линейными функциями, согласно (1.1). Но это несправедливо в случае криволинейных координат!

В искривленном пространстве $\frac{\partial A^i}{\partial x^k}$ и dA^i это уже не тензоры. Чтобы составлять тензорные выражения, требуется вносить некоторые поправки, зависящие от геометрической кривизны пространства.

Такие поправки называются *символами Кристоффеля*. И оказывается, что они же характеризуют гравитационное поле! Впрочем, здесь мы вступаем уже в сферу теории гравитации, чего в данном популярном очерке делать не собирались…

3. Антисимметричные тензоры

Из предыдущего раздела можно опрометчиво заключить, что любая вообще физическая величина, традиционно изображаемая вектором, превращается в 4-пространстве в «пространственную» часть 4-вектора. А роль временной компоненты играет некоторая «скалярная» величина.

Но это не так – не любая!

Например, есть конструкции, очень похожие на вектор… кроме одной мелочи. Почти незаметной в трехмерном пространстве.

Тем и хорош тензорный подход, что с легкостью выявляет совсем другую природу подобных объектов (их называют псевдовекторами).

Антисимметричность

Ряд физических законов формулируется математически с использованием *векторного произведения* $\mathbf{z} = [\mathbf{xy}]$. Операция с тензорных позиций кажется странной, что-то не сходится даже по счету индексов. Перемножение векторов должно приводить либо к свертке по одинаковым индексам (к скаляру), либо – при разных индексах – к структуре 2-го ранга…

Впрочем, хорошо известно представление векторного произведения в декартовых координатах:

$$\mathbf{z} = (x^2 y^3 - x^3 y^2,\, x^3 y^1 - x^1 y^3,\, x^1 y^2 - x^2 y^1)\,. \qquad (3.1)$$

И можно предложить тензорную операцию, дающую в точности такой результат:

$$z_i = X_{ik} y^k\,. \qquad (3.2)$$

Структуру X_{ik} несложно подобрать, вот она:

$$X_{ik} = \begin{bmatrix} 0 & -x^3 & x^2 \\ x^3 & 0 & -x^1 \\ -x^2 & x^1 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (3.3)$$

В самом деле, получим, для примера, z_1, пользуясь (3.2):

$z_1 = X_{11} y^1 + X_{12} y^2 + X_{13} y^3 = 0 - x^3 y^2 + x^2 y^3$ – как и должно быть в соответствии с (3.1).

Итак, векторное произведение возможно получить обычной сверткой. Только на место первого сомножителя x^i надо подставить некоторый тензор X_{ik}, составленный из компонент вектора x^i. Назовем его *дуальным* вектору x^i.

В структуре X_{ik} (3.3) подмечается особенность: сумма двух компонент, таких, что у них переставлены местами индексы (например, $X_{12} + X_{21}$), равна нулю. Соответственно, главная диагональ не может быть заполнена ничем иным, как нулями. Такое свойство называется *антисимметричностью*. Антисимметричные тензоры играют важную роль в физике!

Значит, **тензор, дуальный вектору, антисимметричен**.

Псевдотензоры

На самом деле мы пока не уверены, является ли X_{ik} тензором. Не всякая таблица чисел есть тензор! Впрочем, при повороте координатных осей X_{ik} преобразуется как обычный тензор. И, однако…

Возьмем для сравнения заведомо истинный тензор 2-го ранга:

$$Z^{ik} = x^i y^k = \begin{bmatrix} x^1y^1 & x^2y^1 & x^3y^1 \\ x^1y^2 & x^2y^2 & x^3y^2 \\ x^1y^3 & x^2y^3 & x^3y^3 \end{bmatrix}.$$

Изменим направление одного из ортов системы координат (например, первого) на противоположное. Ясно, что компоненты x^1 и y^1 исходных векторов изменят свой знак (а остальные нет). Соответственно, некоторые компоненты тензора Z^{ik} тоже поменяют знак – по схеме:

$$\begin{matrix} + & - & - \\ - & + & + \\ - & + & + \end{matrix}$$

Так ведет себя тензор. Но наша структура:

$$X_{ik} = \begin{bmatrix} 0 & -x^3 & x^2 \\ x^3 & 0 & -x^1 \\ -x^2 & x^1 & 0 \end{bmatrix}$$

при изменении направления первого орта изменит знаки компонентов по другой схеме:

$$\begin{matrix} 0 & + & + \\ + & 0 & - \\ + & - & 0 \end{matrix}$$

Нулевые компоненты можно трактовать произвольно: изменившими, или не изменившими знак. Приняв первое, получим:

$$\begin{matrix} - & + & + \\ + & - & - \\ + & - & - \end{matrix}$$

Сюрприз: X_{ik} изменил знаки своих компонент противоположно обычному тензору! То же будет, если обратить направления не одного, а трех ортов. Если же поменять направления *двух* любых ортов, то разницы в поведении компонент X_{ik} и Z^{ik} не будет – проверьте!

Отличие X_{ik} от истинного тензора проявляется тогда, когда имеет место **«зеркальное отражение» базиса, не сводимое к поворотам**. Подобный объект называется *псевдотензором*.

Обычному (истинному) вектору всегда можно сопоставить дуальный ему псевдотензор.

Псевдотензор Леви-Чивиты

Кажется, что дуальный тензор как бы падает с неба… На самом деле он получается из «вектора-хозяина» таким образом:

$$X_{ik} = e_{ikl} x^l .$$

Тензор e_{ikl} знаменит, и имеет особое название: *совершенно антисимметричный единичный тензор*, или *псевдотензор Леви-Чивиты*. В данном случае он имеет 3-й ранг (а вообще его ранг соответствует числу измерений пространства). Изобразить трехмерную матрицу на бумаге – морока, да и нет особого смысла. Попробуем просто понять ее свойства.

Для чего не поленимся расписать нашу свертку (3.2): $z_i = X_{ik} y^k = e_{ikl} x^i y^k$ – для, например, 1-й компоненты векторного произведения:

$$z_1 = e_{111} x^1 y^1 + e_{121} x^2 y^1 + e_{131} x^3 y^1 + e_{112} x^1 y^2 + e_{122} x^2 y^2 + e_{132} x^3 y^2 + e_{113} x^1 y^3 + e_{123} x^2 y^3 + e_{133} x^3 y^3 .$$

Но согласно (3.1) должно получиться: $z_1 = x^2 y^3 - x^3 y^2$. Следовательно, из имеющихся компонент e_{ikl} – не равны нулю только e_{123} и e_{132}. Причем: $e_{123} = 1$ а $e_{132} = -1$.

Рассматривая аналогично остальные компоненты векторного произведения, установим пару примечательных фактов.

1) У тензора e_{ikl} не равны нулю только компоненты, для которых все три индекса разные (а таких всего $3! = 6$ из общего количества $3^3 = 27$). Эти компоненты равны 1 либо -1.

2) Сумма двух компонент e_{ikl}, таких, что у них переставлена местами пара индексов (например, $e_{123} + e_{132}$), равна нулю. Как мы знаем, это свойство называется *антисимметричностью*. В данном случае – *абсолютной* или *совершенной* (поскольку указанное справедливо для любых индексов, а не для какой-то одной пары).

Тензор e_{ikl} не меняется при переходе к другим координатам. Впрочем, это свойство любого антисимметричного тензора с рангом, соответствующим размерности пространства.

Радиальный и аксиальный векторы

Пусть $\mathbf{x}\,(x^1, x^2, x^3)$ это истинный вектор. Если изменить направление одной из осей базиса – например, первой – на противоположное, то изменит знак первая компонента x^i. Это можно схематически изобразить так:

$- + +$.

Если изменить направление двух осей, получим:

$- - +$

Изменив направление всех трех осей на противоположное, получим смену знаков всех трех компонент:

$- - -$

Сравним поведение вектора, являющегося результатом векторного произведения: $\mathbf{z} = (x^2 y^3 - x^3 y^2,\, x^3 y^1 - x^1 y^3,\, x^1 y^2 - x^2 y^1)$. В первом случае (меняется знак x^1 и y^1) сохраняет прежний знак только первая компонента **z**:

$+ - -$

Противоположно обычному вектору! Во втором случае (сменили знак x^1, x^2, y^1, y^2) результат такой, как и ранее:

$- - +$

В третьем снова противоположный:

$+ + +$

Вывод: **z** ведет себя не совсем так, как обычный вектор. А именно, при зеркальном отражении координатного базиса (когда изменяют направление *одна* либо *три* оси) он меняет направление в пространстве на противоположное! Это может быть проверено и по простой картинке со стрелками, если вспомнить определение векторного произведения из обычной геометрии.

Вектор, являющийся результатом векторного произведения, не является истинным вектором, он не инвариант в полном смысле. Это *псевдовектор*, или *аксиальный вектор*. Истинные же векторы называют еще *полярными*.

В лице аксиального вектора имеем, разумеется, частный случай псевдотензора. При поворотах системы координат он преобразуется вроде бы так же, как и обычный вектор… пока дело не доходит до зеркального отражения осей.

Почему «псевдовектор»?

Если x^i это псевдовектор, ему соответствует дуальный истинный тензор:

$$X_{ik} = \begin{bmatrix} 0 & -x^3 & x^2 \\ x^3 & 0 & -x^1 \\ -x^2 & x^1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Такой тензор имеет инвариант: $X_{ik}X^{ik}$. В декартовых координатах (мы его когда-то расписывали) это сумма квадратов всех компонент.

Отсюда следует, что $(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2$ инвариант. Но данная величина формально соответствует длине x^i.

Это значит, что компоненты псевдовектора преобразуются по тому же закону, что и компоненты истинного (пока мы не вдаемся в их знаки). Именно это позволяет оперировать аксиальными векторами до определенного предела так же, как истинными: это проще, чем работать с тензорами, и результат тот же. Но учитывая их особенность, которую отметили выше!

Там, где она несущественна, говорят просто о векторах, не уточняя, что, к примеру, вектор угловой скорости это аксиальный вектор.

Векторное произведение в тензорной записи

В тензорных обозначениях **переход к векторному произведению осуществляется через совершенно антисимметричный единичный тензор**: $z_i = e_{ikl}x^l y^k$. Здесь с индексами все в порядке…

Обратите внимание: справа псевдотензор – значит, и слева псевдотензор (псевдовектор). А вот произведение двух псевдотензоров дало бы истинный тензор…

Впрочем, перед нами запись не в тензорах, а в псевдотензорах! Но векторное произведение можно выразить в настоящей тензорной записи:

$$Z^{ik} = x^i y^k - x^k y^i. \qquad (3.4)$$

Слева стоит тензор второго ранга. Истинный, так как тут тензорная операция над полярными векторами. Терпеливо распишем его:

$$Z^{ik} = \begin{bmatrix} x_1y_1 - x_1y_1 & x_2y_1 - x_1y_2 & x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_1y_2 & x_2y_2 - x_2y_2 & x_3y_2 - x_2y_3 \\ x_1y_3 - x_3y_1 & x_2y_3 - x_3y_2 & x_3y_3 - x_3y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & x_2y_1 - x_1y_2 & x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_1y_2 & 0 & x_3y_2 - x_2y_3 \\ x_1y_3 - x_3y_1 & x_2y_3 - x_3y_2 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (3.4)$$

Мы обнаруживаем знакомые по (3.1) компоненты аксиального вектора **z**, так что окончательно получается:

$$Z^{ik} = \begin{bmatrix} 0 & -z_3 & z_2 \\ z_3 & 0 & -z_1 \\ -z_2 & z_1 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (3.5)$$

Сравните с (3.3): перед нами тензор, дуальный вектору **z**. Любому **псевдовектору можно указать дуальный антисимметричный истинный тензор**: $Z^{ik} = e^{ikl} z_l$. Дуальный тензор получается здесь истинным потому, что z_i это компоненты псевдовектора, а не вектора.

Природа антисимметричного тензора

Интересно, что антисимметричный тензор, если он ненулевой, невозможно записать в виде произведения двух векторов. Действительно, поскольку $Z^{11} = 0$, первая компонента хотя бы одного из предполагаемых сомножителей должна быть нулевой. Но тогда вся строка или столбец Z^{ik} должны целиком заполниться нулями… ну и так далее.

Антисимметричный тензор имеет иную природу. Он может быть представлен, например, как разность двух произведений:

$$Z^{ik} = x^i y^k - x^k y^i. \qquad (3.6а)$$

Вот другой источник получения антисимметричного тензора:

$$Z_{ik} = \frac{\partial y_k}{\partial x^i} - \frac{\partial y_i}{\partial x^k}. \qquad (3.6б)$$

То, что тензоры по (3.6а) и (3.6б) получаются антисимметричными, вполне очевидно.

Антисимметричный 4-тензор

Зная свойства антисимметричного тензора, сконструируем теперь антисимметричный 4-тензор 2-го ранга. Вот его общий вид (с условными буквенными обозначениями):

$$A^{ik} = \left[\begin{array}{c:ccc} 0 & \alpha & \beta & \gamma \\ \hdashline -\alpha & 0 & \delta & \varepsilon \\ -\beta & -\delta & 0 & \xi \\ -\gamma & -\varepsilon & -\xi & 0 \end{array}\right].$$

Разобьем тензор на части, как показано штриховыми линиями. И сразу кое-что замечаем!

Во-первых, правый нижний квадрат это тоже антисимметричный тензор, только трехмерный. Запишем его в такой форме:

$$\begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \text{(принимая } a_1 = -\xi,\ a_2 = \varepsilon,\ a_2 = -\delta \text{)}.$$

Вспомнив (3.5), заключаем, что a_1, a_2, a_3 это компоненты некоторого аксиального вектора **a**: тензор дуален псевдовектору.

Во-вторых, верхняя и левая части соответствуют некоторому другому (полярному) трехмерному вектору **p**. Принимая: $p_1 = \alpha$, $p_2 = \beta$, $p_3 = \gamma$, получаем наш тензор в окончательном виде:

$$A^{ik}=\begin{bmatrix} 0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ -p_1 & 0 & -a_3 & a_2 \\ -p_2 & a_3 & 0 & -a_1 \\ -p_3 & -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (3.7)$$

Антисимметричный вектор нередко записывают в компактном виде:

$$A^{ik}=(\mathbf{p},\mathbf{a}) \qquad (3.8)$$

– имея в виду, что компоненты A^{ik} по сути дела являются просто компонентами тех самых векторов $\mathbf{p}, \mathbf{a}$.

Примем на веру (просто дабы не отвлекаться), что тот же тензор в ковариантных компонентах будет выглядеть:

$$A_{ik}=(-\mathbf{p},\mathbf{a}). \qquad (3.8а)$$

Векторные компоненты антисимметричного 4-тензора

Фокус с нахождением внутри антисимметричного 4-тензора двух трехмерных векторов – имеет ли какой-то практический смысл? Да, и это обнаруживается при свертке тензора A^{ik} с некоторым 4-вектором x_k : $A^{ik}x_k$. Запишем, например, 0-ю компоненту искомой свертки:

$$A^{0k}x_k=A^{00}x_0+A^{01}x_1+A^{02}x_2+A^{03}x_3=0+p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3.$$

Да ведь это просто скалярное произведение:

$$\mathbf{px}. \qquad (3.8а)$$

Здесь $\mathbf{x}$ – пространственная часть 4-вектора x_k.

Теперь запишем 1, 2 и 3 компоненты свертки:

$$A^{1k}x_k=A^{10}x_0+A^{11}x_1+A^{12}x_2+A^{13}x_3=-p_1x_0+0+a_3x_2-a_2x_3,$$

$$A^{2k}x_k=A^{20}x_0+A^{21}x_1+A^{22}x_2+A^{23}x_3=-p_2x_0-a_3x_1+0+a_2x_3,$$

$$A^{3k}x_k=A^{30}x_0+A^{31}x_1+A^{32}x_2+A^{33}x_3=-p_3x_0+a_2x_1-a_2x_2+0.$$

Три строки легко объединить в одну:

$$-x_0\mathbf{p}-[\mathbf{ax}], \qquad (3.8б)$$

где второй член представляет собой векторное произведение.

Итак, **результат свертки антисимметричного 4-тензора с 4-вектором удобно раскладывается на два выражения, содержащие трехмерные векторы**:

$$A^{ik}x_k=(\mathbf{px}, \quad -x_0\mathbf{p}-[\mathbf{ax}]). \qquad (3.9)$$

Это нам пригодится при физической интерпретации 4-мерных выражений.

Не стоит удивляться тому, что в составе истинного тензора обнаружилось векторное произведение. Оно является здесь истинным вектором, а не псевдовектором, поскольку входящий в него сомножитель **a** – уже псевдовектор.

Следует отметить также, что векторы **p** и **a** не являются пространственными частями каких-либо 4-векторов. Это – векторы относительно только чисто пространственных преобразований координат… Но в общем случае 4-мерных поворотов – не преобразуются как векторы. Они представляют собой как бы (соответственно) временную и пространственную части 4-тензора!

4. Тензоры в электродинамике

Теория относительности родилась в значительной мере из проблемы инвариантной записи уравнений электродинамики. Опыт показывает, что электромагнитные явления в любой системе координат совершенно одинаковы, следовательно, инвариантная формулировка законов должна существовать. Первые шаги к этому сделал еще Лоренц. Но проблема исчерпывающе решена только на базе тензорного аппарата.

Сила Лоренца

Сила, действующая на заряд, находящийся в электромагнитном поле – это предмет бесчисленных опытов по электромагнетизму, прекрасно изученный. С нее мы и начнем. Уравнение *силы Лоренца* выглядит так:

$$\mathbf{f} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{vH}]. \qquad (4.1)$$

Здесь векторы **E** и **H** представляют электрическое и магнитное поля, **v** – скорость движения заряда величиной e. А квадратные скобки, как и ранее – векторное произведение.

Напомню (хотя предполагается известным), что первый член правой части отображает воздействие на заряженную частицу электрического поля. Второй член – действие магнитного поля, проявляющееся только при движении заряда ($v \neq 0$).

Уравнение это выглядит неинвариантным. Действительно, если перейти в систему координат, в которой заряд покоится, то магнитное поле действовать на него не должно. Но сила-то никуда не девается!

Чтобы подойти к четырехмерной формулировке, заменим векторы силы и скорости – на «пространственные» части, соответственно, 4-силы и 4-скорости. Просто разделим уравнение (4.1) на $c\sqrt{1-v^2/c^2}$:

$$\frac{\mathbf{f}}{c\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{e}{c}\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\mathbf{E} + \frac{e}{c}\left[\frac{\mathbf{v}}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}\mathbf{H}\right].$$

Слева записана теперь пространственная часть 4-силы $mc\dfrac{d\mathbf{u}}{ds}$ – смотрите (2.9), (2.10). В крайнем правом члене обнаруживается пространственная часть 4-скорости **u** (2.6а). А в среднем – временная часть 4-скорости u^0. Все это дает право записать:

$$mc\frac{d\mathbf{u}}{ds} = \frac{e}{c}\left(u^0\mathbf{E} + [\mathbf{uH}]\right) = \frac{e}{c}\left(u^0\mathbf{E} - [\mathbf{Hu}]\right). \qquad (4.2)$$

Выражение в скобках напоминает что-то знакомое! Это же (3.8б) – пространственная часть 4-вектора, являющегося **произведением некоторого антисимметричного 4-тензора на 4-вектор** u_i. Обозначим этот (пока неизвестный) тензор: F^{ik}.

Тензор поля

Запишем формально уравнение силы Лоренца через 4-тензор – просто по аналогии с (3.9):

$$mc\frac{du^i}{ds} = \frac{e}{c}F^{ik}u_k. \qquad (4.3)$$

Надо лишь понять структуру антисимметричного тензора F^{ik}. Это сделать несложно – просто сопоставляя (3.8), (3.8б) и (4.2). Очевидно, что в (4.2) роль **a** выполняет **H**, а роль **p** – минус **E**, так что:

$$F^{ik} = (-\mathbf{E}, \mathbf{H}).$$

F^{ik} называют *тензором электромагнитного поля*. Сопоставляя с (3.7), можно изобразить матричную структуру тензора поля в координатах x, y, z:

$$F^{ik} = \begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{bmatrix}. \qquad (4.4)$$

Если мы убедимся, что (4.3) справедливо (а мы в этом ниже убедимся!)… то выясняется, что **поле в электродинамике имеет тензорную природу**. А представление полей (отдельно электрического и магнитного) в виде трехмерных векторов допустимо лишь, пока и поскольку мы не переходим в движущуюся систему координат.

Заметим, что тензор:

$$\begin{bmatrix} 0 & -H_z & H_y \\ H_z & 0 & -H_x \\ -H_y & H_x & 0 \end{bmatrix}$$

– является антисимметричным истинным тензором (как часть истинного тензора). Однако он дуален вектору **H**. Следовательно, **вектор магнитного поля это аксиальный вектор (псевдовектор)**.

4-сила Лоренца

Пока что запись (4.3) гипотетическая; впрочем, для «пространственной» части F^{ik} она уже проверена. Осталось рассмотреть «временную» часть:

$$mc\frac{du^0}{ds} = \frac{e}{c}F^{0k}u_k. \qquad (4.5)$$

Временная компонента 4-силы (левая часть уравнения) нам известна – смотрите (2.9). Она равна $\dfrac{d\mathcal{E}}{dt}\dfrac{1}{c^2\sqrt{1-v^2/c^2}}$.

Ну а произведение $F^{0k}u_k$, учитывая антисимметричность F^{ik}, мы записываем по аналогии с (3.8а):

$$F^{0k}u_k = -\mathbf{Eu}.$$

Осталось только выразить 4-скорость через обычную скорость: $\mathbf{u} = -\dfrac{\mathbf{v}}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}$. Внимание: знак минус получается оттого, что 4-вектор u_k в (4.5) ковариантен! Как мы знаем, при переходе от контравариантного 4-вектора к ковариантному меняется знак пространственной части.

В итоге вместо (4.5) получаем:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt}\frac{1}{c^2\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{e}{c}\frac{\mathbf{Ev}}{c\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

или:

$$d\mathcal{E} = e\mathbf{E}\mathbf{v}dt = e\mathbf{E}d\mathbf{r}\,.$$

Имеем здесь обычное уравнение **работы, произведенной силой электрического поля** при перемещении заряда на $d\mathbf{r}$. Напомню, что **магнитное поле не производит работы над зарядом**: его сила (по правилу векторного произведения) всегда ортогональна скорости.

Таким образом, временная компонента 4-силы также имеет физический смысл. Значит, представление силы Лоренца в четырехмерной форме правомерно, и отражает реально имеющую место инвариантность явлений.

Инварианты тензора поля

Тензорное представление физических величин полезно тем, что можно легко выявить инварианты, которые отнюдь не лежат на поверхности. Инвариант для тензора поля записываем, как и для любого тензора 2-го ранга: $F^{ik}F_{ik}$. Подобную свертку нам уже доводилось проводить, воспользуемся готовым результатом, подставив значения компонент:

$$F^{ik}F_{ik} = -(E_x)^2 - (E_y)^2 - (E_z)^2 - (E_x)^2 + (H_z)^2 + (H_y)^2 - (E_y)^2 + (H_z)^2 + (H_x)^2 -$$
$$-(E_z)^2 + (H_y)^2 + (H_x)^2 = 2(\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2)\,.$$

Здесь учтено, что для ковариантных компонент: $E_i = -E^i$, а $H_i = H^i$ – см. (3.8а).

Таким образом, величина $\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2$ является инвариантом поля.

Из тензора поля можно образовать еще один «инвариант»: $e^{iklm}F_{ik}F_{lm}$. Здесь e^{iklm} это совершенно антисимметричный единичный тензор *четвертого* ранга.

Несложно доказать (мы уже опустим), что в трехмерном виде это приводит к инвариантности скалярного произведения **EH**.

Инвариантность вытекает из того, что все четыре индекса «сокращаются» при свертке. Правда, e^{iklm} является псевдотензором, так что мы получаем не вполне инвариант: не скаляр, а псевдоскаляр. Но его квадрат уже будет настоящим скаляром.

Четырехмерный потенциал

Вернемся к тензору поля. Мы уже знаем: природа антисимметричного тензора такова, что он является разностью двух тензоров, индексы в которых меняются местами. Запишем, следовательно, тензор F_{ik} предположительно в таком виде:

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}\,,$$

где A – некоторый 4-вектор. Нам предстоит понять физический смысл этого 4-вектора (если таковой смысл существует, конечно).

Здесь тензор удобнее будет рассматривать в ковариантных компонентах.

Выразим трехмерный вектор электрического поля **E** – он является верхней строкой ковариантного тензора:

$$F_{0k} = (F_{01}, F_{02}, F_{03}) = \left(\frac{\partial A_1}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial x^1}, \frac{\partial A_2}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial x^2}, \frac{\partial A_3}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial x^3}\right) = \frac{\partial A_k}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial x^k}\,.$$

Запишем его как покомпонентную разность двух векторов:

1) первый: $\left(\frac{\partial A_1}{\partial x^0}, \frac{\partial A_2}{\partial x^0}, \frac{\partial A_3}{\partial x^0}\right) = \frac{\partial A_k}{\partial x^0}$;

2) второй: $\left(\dfrac{\partial A_0}{\partial x^1}, \dfrac{\partial A_0}{\partial x^2}, \dfrac{\partial A_0}{\partial x^3}\right)$.

Вспомнив, что $x^0 = ct$, первый вектор записываем в трехмерном виде как $-\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathbf{A}}{dt}$. Знак минус появился за счет ковариантности 4-вектора A.

Ну а второй пункт – это знакомые компоненты градиента скалярного поля. Окончательно записываем в трехмерной форме:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{dt} - \mathrm{grad}\, A_0 .$$

Очевидно, что $A_0 = A^0$ это просто потенциал (*скалярный потенциал*) φ электрического поля. По аналогии **A** называют *векторным потенциалом*, и первый член отражает электрическое поле, создаваемое меняющимся во времени магнитным полем.

А **потенциал поля в целом является 4-вектором**.