

LEÇON N°4 — Suites numériques — notions de base

Cette leçon porte sur le concept de suite numérique pour lequel on va voir les principales définitions et exemples types. La notion de convergence, très importante, est présentée. En revanche, les outils utilisés pour manipuler les limites seront détaillés dans la leçon suivante.

1 Notion de suite numérique

La façon la plus intuitive de définir ce qu'est une suite numérique est de considérer une liste infinie de nombres réels ; par exemple : $3, \frac{5}{2}, -12, \pi, 10^{28}, -0.1 \dots$

On peut travailler avec des suites d'objets divers (figures géométriques, entiers, nombres complexes, fonctions, etc.) mais « numérique » signifie ici que l'on considèrera systématiquement des suites de nombres réels.

Pour donner une définition un peu plus abstraite mais plus juste d'un point de vue mathématique, on introduit la notion d'*application* qui sera traitée en détail dans le cours d'algèbre.

Définition 1 — *Etant donné deux ensembles quelconques E et F , on appelle application de E dans F tout triplet (E, F, f) où f est une correspondance associant à tout élément x de E un unique y dans F . On note aussi $f : E \rightarrow F$ cette application.*

On fera bien attention qu'une application n'est donc pas juste une formule de calcul entre x et $y = f(x)$, mais un triplet gardant en mémoire l'ensemble de départ et celui d'arrivée.

1.1 DÉFINITION.

Définition 2 — *On appelle suite numérique toute application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.*

Etant donné une suite $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, il est d'usage d'utiliser la notation avec indice $u_n = u(n)$ pour désigner le terme de rang $n \in \mathbb{N}$. Par ailleurs, on note $u = (u_n)_{n \geq 0}$ ou plus simplement (u_n) la suite elle-même.

Exemple 1. En posant $u_n = 3n^2 - 2n + 1$ on définit une suite $u = (u_n)$.
De même, $v_n =$ la n -ième décimale de π définit une suite $v = (v_n)$.

🔄 Parfois, une suite $u = (u_n)$ n'est pas définie pour les premiers entiers $n \geq 0$. Par exemple, si $u_n = \ln(n)$, alors u_n n'est défini que pour $n \geq 1$ et on notera la suite associée $(u_n)_{n \geq 1}$. Néanmoins, en renumérotant les termes on pourra toujours se ramener à une suite qui, elle, est définie pour tout $n \geq 0$. Dans la suite, nous considèrerons donc pour les énoncés des suites définies pour $n \geq 0$.

Il résulte immédiatement de la définition qu'étant donné (u_n) et (v_n) deux suites, on peut définir les suites $(u_n + v_n)$, $(u_n \times v_n)$, (u_n/v_n) (si v_n ne s'annule pas) de même qu'appliquer une fonction f à une suite reste une suite : en effet cela reste toujours une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

Par ailleurs, on va rencontrer dans la suite de nombreuses propriétés qui ne seront vraies que pour n assez grand. La notation *apdr* « à partir d'un certain rang » sera utilisée dans ce cas, cela signifiant qu'il existe un entier $n_0 \geq 0$ tel que la propriété est vraie pour $n \geq n_0$.

1.2 TYPES DE SUITES

Nous allons rencontrer principalement trois catégories de suites :

- **Les suites explicites** sont telles que, étant donné n on peut donner directement u_n à l'aide d'un procédé purement calculatoire. Souvent, les suites explicites peuvent s'écrire sous la forme $u_n = f(n)$ pour une certaine fonction f définie sur $\mathbb{R}$, facile à calculer. Il s'agit en principe des suites les plus simples à étudier car on peut utiliser certaines connaissances sur la fonction f pour en déduire des résultats sur la suite (u_n) : majoration, minoration, monotonie, limite etc.

Il faut néanmoins faire attention au cas de la factorielle que l'on rencontre souvent et qu'on ne peut pas vraiment écrire comme une fonction (disons ... pas avant d'avoir fait un L2!). Ainsi la suite $v_n = 2^n/n!$ est explicite mais ne s'écrit en ce sens sous la forme $f(n)$.

- **Les suites définies par une relation de récurrence.** On se donne ici u_0 et une fonction $f : \mathbb{N} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; puis on construit la suite par récurrence pour tout $n \geq 0$ en appliquant la fonction f :

$$u_{n+1} = f(n, u_n).$$

En général, une suite définie par récurrence n'est pas explicite : pour calculer u_{50} on doit calculer successivement les 49 premiers termes pour en arriver au 50ième. On verra cependant quelques cas particuliers plus loin (suites arithmétiques et géométriques) pour lesquelles on peut se ramener à des suites explicites.

L'étude générale des suites récurrentes est souvent complexe mais on arrive dans de nombreux cas à déterminer certaines propriétés et même leur limite (quand elles convergent) à l'aide de l'étude de la fonction f . On reviendra dans les dernières leçons de ce cours sur le où f ne dépend pas de n .

- **Les autres suites.** Cette troisième catégorie de suite est la plus difficile à étudier. L'exemple typique est celui, déjà cité, de la n -ième décimale de π . On sait assez peu de choses sur une telle suite mais par exemple, on voit facilement qu'elle est bornée (*cf.* ci-dessous) : pour tout $n \geq 0$, n est un chiffre compris entre 0 et 9. Ce n'est pas une suite explicite, ni définie par récurrence.

Dans certains cas néanmoins on arrive à produire certains résultats, parfois assez fins, alors même que la suite est mal connue. Par exemple, si p_n désigne le n -ième nombre premier, alors on sait comment se comporte p_n lorsque n tend vers l'infini, mais cela dépasse de loin le cadre de ce cours.

1.3 SUITES ARITHMÉTIQUES ET GÉOMÉTRIQUES

On va passer assez vite car ces notions sont censées être connues. Il s'agit d'exemples particulièrement représentatifs de suites définies par récurrence.

Définition 3 — *Etant donné a et r deux réels, on appelle suite arithmétique de premier terme a et de raison r la suite (u_n) définie par récurrence pour tout $n \geq 0$ par :*

$$\begin{cases} u_0 &= a, \\ u_{n+1} &= u_n + r. \end{cases}$$

Le cas particulier $r = 0$ donne évidemment une suite constante.

Exercice 1. Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 0$, $u_n = a + nr$. On a donc une forme explicite.

Définition 4 — Etant donné a et q deux réels, on appelle suite géométrique de premier terme a et de raison q la suite (u_n) définie par récurrence pour tout $n \geq 0$ par :

$$\begin{cases} u_0 &= a, \\ u_{n+1} &= q u_n. \end{cases}$$

Le cas particulier $q = 1$ donne évidemment une suite constante.

Exercice 2. Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 0$, $u_n = a q^n$. On a donc une forme explicite.

Exercice 3. Avec les notations précédentes, calculer la somme des n premiers termes d'une suite arithmétique ; même question pour une suite géométrique.

On reviendra plus tard sur le cas des suites arithmético-géométriques, dont la relation de récurrence prend la forme $u_{n+1} = q u_n + r$, qui sera vue en fin de semestre.

2 Premières propriétés

On comprendra un peu plus tard les raisons pour lesquelles savoir si une suite est monotone et/ou bornée est un point important.

2.1 MONOTONIE.

Définition 5 — Soit (u_n) une suite numérique.

On dit que (u_n) est croissante si : $\forall n \geq 0, u_{n+1} \geq u_n$.

On dit que (u_n) est décroissante si : $\forall n \geq 0, u_{n+1} \leq u_n$.

On dit que (u_n) est constante si : $\exists a \in \mathbb{R}, \forall n \geq 0, u_n = a$.

On dit que (u_n) est stationnaire si elle est constante apdcr.

On dit que (u_n) est monotone si elle est soit croissante, soit décroissante.

Dans le cas de monotonie stricte, on précisera « strictement croissante » ou « strictement décroissante », donc par défaut on parle de monotonie au sens large. Evidemment, une suite peut être monotone seulement apdcr.

Pour déterminer la monotonie de (u_n) , on peut essayer de déterminer le signe de $u_{n+1} - u_n$ ou encore, si u_n est strictement positive, déterminer si $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est supérieur à 1 ou non.

Exercice 4. Parmi les suites suivantes, lesquelles sont croissantes, décroissantes, ni l'une ni l'autre ?

$$u_n := \frac{1}{2^n} \quad v_n := (-1)^n, \quad S_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}.$$

On peut aussi étudier la fonction associée à (u_n) lorsque $u_n = f(n)$.

Exemple 2. On considère la suite $u_n = n^2 - 5n + 1$. En utilisant la fonction $f(x) = x^2 - 5x + 1$, qui est telle que $u_n = f(n)$, on voit facilement en étudiant f que la suite (u_n) est croissante à partir du rang

$n = 3$ car f est croissante pour $x \geq 5/2$. Dans ce cas précis, la croissance a même lieu à partir de $n = 2$ ce que l'on peut constater en calculant explicitement les termes.

2.2 MAJORATION, MINORATION.

Définition 6 — Soit (u_n) une suite numérique.

On dit que (u_n) est majorée si : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \geq 0, u_n \leq M$.

On dit que (u_n) est minorée si : $\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \geq 0, u_n \geq m$.

On dit que (u_n) est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

Exemple 3. La suite $(-1)^n$ est à la fois majorée et minorée, elle est donc bornée.

Exercice 5. Vérifier qu'une suite (u_n) est bornée si et seulement si : $\exists M \geq 0, \forall n \geq 0, |u_n| \leq M$.

N.B. ce critère est souvent utilisé en pratique.

Exercice 6. Démontrer que si (u_n) est décroissante, alors elle est majorée. Est-elle nécessairement minorée ? Que se passe-t-il si (u_n) est croissante ?

3 Convergence

L'étude de la convergence des suites va être poursuivie dans les deux leçons suivantes, en développant aussi bien des résultats abstraits que des méthodes concrètes de calcul de limites.

3.1 DÉFINITION.

Définition 7 — On dit que la suite (u_n) converge s'il existe un réel ℓ tel que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

On appelle ℓ la limite de la suite (u_n) et on dit que (u_n) converge vers ℓ . On écrit $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \ell$ ou $\lim u_n = \ell$ ou encore $u_n \rightarrow \ell$. Si (u_n) ne converge pas, on dit qu'elle diverge.

Plusieurs remarques importantes à ce stade :

1. Par définition, $\lim u_n = \ell \iff \lim(u_n - \ell) = 0$.
2. Dire que $|u_n - \ell| < \varepsilon$ est équivalent à dire que u_n est dans l'intervalle $] \ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon [$.
3. Le nombre N dépend de ε ; on le note parfois N_ε . Plus ε est proche de 0, plus N_ε doit être grand.
4. Le nombre N n'est pas unique : n'importe quel entier N' tel que $N' \geq N$ convient aussi.
5. L'assertion de la définition est équivalente à l'assertion suivante, où on a remplacé $< \varepsilon$ par $\leq \varepsilon$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

6. L'assertion de la définition est équivalente à la suivante

$$\forall \varepsilon \in]0, 1], \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

En d'autres termes, on peut supposer que $\varepsilon \leq 1$, ou en fait que ε est plus petit que n'importe quel nombre strictement positif fixé : ce qui compte dans cette définition ce sont les valeurs de ε les plus proches de zéro pour avoir un encadrement le plus fin possible.

Exemple 4. Il est facile de démontrer que la suite $u_n := \frac{1}{n}$ tend vers zéro directement à partir de la définition ci dessus : cela se fait en prenant un $\varepsilon > 0$ fixé et en calculant l'entier N_ε qui convient pour avoir $|u_n| < \varepsilon$, pour tout $n \geq N_\varepsilon$.

Exercice 7. Démontrer que les suites suivantes tendent vers 0 : $v_n := \frac{1}{\sqrt{n}}$, $w_n := e^{-n}$.

3.2 PROPRIÉTÉS IMMÉDIATES.

Commençons par un exercice qui va être utile pour mieux comprendre ce qui suit :

Exercice 8. Déterminer l'ensemble $A := \{x \in \mathbb{R} \mid \forall r > 0, |x| < r\}$.

La propriété suivante peut paraître anecdotique mais elle est fondamentale, elle permet de justifier la notation $\lim(u_n)$:

Proposition 1 — Si la suite (u_n) converge, alors sa limite est unique.

Voici un exercice qui utilise des idées similaires :

Exercice 9. Soit (u_n) une suite de nombres entiers qui converge. Démontrer que nécessairement (u_n) est stationnaire, et que sa limite est un entier.

Nous pouvons ensuite faire un lien entre convergence et majoration/minoration :

Proposition 2 — Si (u_n) est une suite convergente, alors elle est bornée.

⚠ On fera très attention au fait que la réciproque est fausse, comme on peut le voir en considérant la suite $(-1)^n$ qui est bornée mais ne converge pas (cf. plus bas).

3.3 SUITES DIVERGENTES.

Exercice 10. Ecrire sous forme de quantificateur la négation de la définition d'une suite convergente.

Il y a en fait deux modes de divergence : soit (u_n) a une limite infinie (ℓ n'est pas dans $\mathbb{R}$), soit (u_n) n'a pas de limite (elle ne se « stabilise pas » lorsque n tend vers l'infini). Voici un critère de divergence qui est utile :

Proposition 3 — Soit (u_n) une suite. On considère les suites extraites de rang pair et de rang impair : $v_n := u_{2n}$ et $w_n := u_{2n+1}$. Si (u_n) converge vers ℓ , alors (v_n) et (w_n) convergent vers ℓ également.

On utilise souvent sa contraposée : si les suites extraites de rang pair et impair n'ont pas la même limite, alors (u_n) diverge. On rappelle que $(P \Rightarrow Q) \iff (\text{non } Q \Rightarrow \text{non } P)$.

Exemple 5. On voit donc que $(-1)^n$ est une suite divergente, bien qu'elle soit bornée.

N.B. La réciproque de la proposition ci-dessus est également vraie : si (v_n) et (w_n) convergent vers la même limite ℓ , alors (u_n) converge vers ℓ , voir TD.

3.4 SUITES DE RÉFÉRENCE.

Proposition 4 — *Pour tout $\alpha > 0$ et $a > 1$, les suites suivantes convergent vers 0 :*

$$\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \quad \left(\frac{1}{\ln n}\right), \quad \left(\frac{1}{a^n}\right).$$

La preuve en utilisant la définition avec le calcul de N_ε est un exercice à faire !

OBJECTIFS ET RÉVISIONS

- ✓ Bien avoir compris la notion de suite numérique et les principales propriétés étudiées. Savoir déterminer la monotonie des suites et si elles sont majorées/minorées/bornées.
- ✓ Avoir compris la définition d'une suite convergente et savoir démontrer les limites des suites de référence.