ТЕМА 2. МНОЖЕСТВА И ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ

Множество — одно из основных понятий современной математики. Это понятие не сводится к другим понятиям и не определяется. Вместо определения приведем несколько примеров множеств:

1) множество действительных чисел;
2) множество точек плоскости;
3) множество букв русского алфавита;
4) множество деревьев в лесу;
5) множество учащихся данного класса.

Когда в математике говорят о множестве, то понимают под этим совокупность предметов (объектов), объединенных в одно целое по некоторому признаку. Один из основоположников современной теории множеств немецкий математик Георг Кантор (1845–1918 гг.) выразил эту мысль следующим образом: «Множество есть многое, мыслимое как единое целое».

Предметы (объекты), составляющие множество, называют его *элементами*. Множества обозначают заглавными латинскими буквами: A, B, C, X, … их элементы — прописными буквами: a, b, c, x, … или буквами с индексами a_1, a_2.

Предложение «объект a является элементом множества A» записывается $a \in A$ (читается: a принадлежит A), если же a не является элементом множества A, то это записывают так $a \notin A$.

Например, A – множество четных чисел. Тогда $2 \in A$, $1028 \in A$, $5 \notin A$, $0{,}8 \notin A$.

В повседневной жизни слово «множество» обычно связывают с большим количеством предметов. В математике можно рассматривать множества, содержащие 3, 2, 1 элемент, а также множество, не содержащее ни одного элемента. Такое множество называют *пустым* и обозначают $\varnothing$. Примерами пустых множеств являются множество нечетных чисел, делящихся на 2; множество сооружений на земле высотой более 1000 м и т.д. Если множество содержит конечное число элементов, то его называют *конечным*, а если в нем бесконечно много элементов, то *бесконечным*. Так, множество жителей г. Донецка конечно, а множество точек на отрезке бесконечно.

При решении задач по теории множеств самое главное – умело пользоваться определениями основных понятий. Так, выполнение операций над множествами и доказательство тождеств базируется на понятии принадлежности элемента множеству ($x \in$ A), равенства множеств (A=B), отношения включения множеств (A$\subseteq$B). Необходимо твердо знать содержание понятий собственного и несобственного подмножеств, семейства всех подмножеств данного множества (P(A)), универсального множества (U) и смысл используемых операций.

<u>Упражнение 1</u>

1. Приведите примеры множеств, которые встречаются в жизненных ситуациях.

2. Как называется:

а) множество птиц;

б) множество лошадей;

в) множество людей в поезде;

г) множество артистов, работающих в одном театре.

3. Назовите несколько элементов, принадлежащих множеству:

а) чисел, кратных 7;

б) квадратов натуральных чисел;

в) простых чисел, принадлежащих промежутку [25; 43];

г) чисел, обратных кубам натуральных чисел.

4. Пусть A – множество простых чисел вида $7n + 2$, где $n \in \mathbf{N}$. Верна ли запись: а) $9 \in A$; б) $23 \in A$; в) $31 \notin A$; г) $37 \notin A$.

5. Пусть B – множество корней уравнения $x^3 - 7x^2 + 12x = 0$. Верна ли запись: а) $0 \in B$; б) $-3 \notin B$; в) $4 \in B$; г) $3 \notin B$.

Способы задания множеств

Чтобы задать множество, необходимо знать, какие объекты принадлежат множеству, а какие нет. Если множество содержит немного элементов, то его можно задать, перечислив все его элементы. Например, множество учеников класса — список в классном журнале, множество стран – список в географическом атласе.

Если множество задано списком, то его элементы записывают в фигурных скобках через точку с запятой. Множество цифр можно записать следующим образом $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 0\}$.

Однако задать множество списком можно только тогда, когда оно содержит конечное число элементов (но и это неудобно, если число элементов множества велико). Существует универсальный способ задания множеств (в том смысле, что таким способом можно задать любое множество). Множество может быть задано с помощью *характеристического свойства*, то есть такого свойства, которым обладают все элементы множества, и не обладают объекты, не принадлежащие множеству (записывают: $A = \{x \mid P(x)\}$, где $P(x)$ – характеристическое свойство).

Приведем несколько примеров:

1. Пусть A – множество остатков от деления натуральных чисел на 5, тогда $A = \{0; 1; 2; 3; 4\}$.
2. Если $B = \{n \mid n \in \mathbf{N}, 3 \le n \le 12\}$ – множество натуральных чисел, заключенных между 3 и 12, то $B = \{3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$.
3. Если $D = \{x \mid x \in \mathbf{R}, -3 \le x \le 4\}$, то D –отрезок $[-3; 4]$.
4. Если $X = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$ – множество корней квадратного уравнения, то $X = \{1; 2\}$.

Рассмотрим множество $A = \left\{ \dfrac{n}{n^2 - 2} \;\middle|\; n \in \mathbf{N} \right\}$ и выясним, принадлежат ли числа $\frac{1}{4};\frac{2}{7}$ этому множеству.

Число $\frac{1}{4} \in A,$ если существует такое натуральное число n, что $\frac{n}{n^2-2}=\frac{1}{4}$.

Для проверки этого решим уравнение $\frac{n}{n^2-2}=\frac{1}{4}$.

Имеем $n^2-4n-2=0$, откуда $n_{1,2}=2\pm\sqrt{6}$.

Так как числа $2\pm\sqrt{6}$ не являются натуральными, то $\frac{1}{4}\notin A$.

Аналогично, решая уравнение $\frac{n}{n^2-2}=\frac{2}{7}$, имеем $2n^2-7n-4=0$,

откуда $n_1=4;\ n_2=-\frac{1}{2}$.

Так как $4 \in \mathbf{N}$ и $\frac{2}{7}=\frac{4}{4^2-2}$, получаем, что $\frac{2}{7}\in A$.

Упражнение 2

1. Задайте перечислением элементов множество, заданное характеристическим свойством:

а) $A=\{x|\ x^2+2x-8\}$;

б) $B=\{x \mid x\in \mathbf{N}, 2<x\le 8\frac{2}{5}\}$;

в) $C=\{x \mid x\in \mathbf{N}, x^4-5x^2+4=0\}$;

г) $D=\{x \mid x\in \mathbf{Z}, -5<x^3+1<20\}$;

д) $E=\{(x,y) \mid (x-1)^2+(y+2)^2=0\}$;

е) $F=\{x \mid x\in \mathbf{Z}, |x|<5\}$;

ж) $P=\{x \mid x\in \mathbf{N}, -4<x<6\}$;

з) $Q=\{n \mid n\in \mathbf{N}, n<20, n - \text{простое}\}$;

и) $S=\left\{n \mid n\in \mathbf{Z}, \frac{n^2-2n+5}{(n-1)^2} - \text{целое}\right\}$;

к) $T=\{x \mid x\in \mathbf{N}, -x^2+x+6\ge 0\}$.

2. В данном множестве все элементы, кроме одного, обладают некоторым свойством. Опишите это свойство и найдите элемент, не обладающий им.

а) {сумма; разность; множитель; частное};

б) {4; 16; 22; 27; 30; 34};

в) {1; 15; 16; 25; 64; 121};

г) {синий; красный; круглый; бежевый; зеленый};

д) {4; 6; 12; 81; 441; 1113};

е) {Обь; Иртыш; Волга; Байкал; Ангара; Амур};

ж) $\left\{\frac{3}{4}; \frac{7}{11}; \frac{1}{3}; \frac{5}{4}; \frac{9}{16}; \frac{2}{9}\right\}$;

з) {шар; пирамида; параллелограмм; цилиндр; конус}.

3. Исследуйте, принадлежат ли числа $\frac{1}{2}; -\frac{1}{8}; -\frac{1}{4}$ множеству

$$A = \left\{ \frac{3-2n}{n^2+n} \,\middle|\, n \in \mathbf{N} \right\}.$$

4. Определите, по какому закону составлено бесконечное множество, содержащее числа:

а) $\left\{6; 2; \frac{2}{3}; \frac{2}{9}; \ldots\right\}$;

б) $\left\{\frac{1}{5}; \frac{3}{8}; \frac{5}{11}; \frac{7}{14}; \frac{9}{17}; \ldots\right\}$;

в) $\left\{\frac{3}{4}; \frac{8}{9}; \frac{15}{16}; \frac{24}{25}; \frac{35}{36}; \ldots\right\}$;

г) {2; 6; 12; 20; 30; …};

д) $\left\{\frac{3}{7}; \frac{5}{11}; \frac{7}{15}; \frac{9}{19}; \ldots\right\}$;

е) {4; 18; 48; 100; 180; …}.

5. Задайте характеристическим свойством множества:

а) всех правильных многоугольников;

б) параллельных прямых;

в) всех натуральных чисел, кратных 5.

6. Какие из следующих множеств пустые:

а) множество корней уравнения $|x - 7| = 7$;

б) множество прямых плоскости, перпендикулярных двум пересекающимся прямым;

в) множество решений неравенства $(x-10)^2 \le 0$;
г) множество корней уравнения $|9 - 5x| = -3$;
д) множество отрицательных корней уравнения $|x| = -x$.

Ответы:

1. а) $A = \{-4; 2\}$; б) $B = \{3; 4; 5; 6; 7; 8\}$; в) $C = \{1; 2\}$; г) $D = \{-1; 0; 1; 2\}$; д) $E = \{(1; -2)\}$; е) $F = \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$; ж) $P = \{1; 2; 3; 4; 5\}$; з) $Q = \{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19\}$; и) $S = \{-1; 0; 2; 3\}$; к) $T = \{1; 2; 3\}$.

2. а) результаты арифметических действий; множитель; б) четные числа; 27; в) квадраты чисел; 15; г) прилагательные, определяющие цвет; круглый; д) кратны трем; 4; е) реки; Байкал; ж) правильные дроби; $\frac{5}{4}$; з) пространственные тела; параллелограмм.

3. $\frac{1}{2} \in A$; $-\frac{1}{8} \notin A$; $-\frac{1}{4} \in A$.

4. а) $a_n = \frac{6}{3^{n-1}}, n \in \mathbf{N}$; б) $a_n = \frac{2n-1}{3n+2}, n \in \mathbf{N}$;

в) $a_n = \frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2}, n \in \mathbf{N}$; г) $a_n = n(n+1), n \in \mathbf{N}$;

д) $a_n = \frac{2n+1}{4n+3}, n \in \mathbf{N}$; е) $a_n = n(n+1)^2, n \in \mathbf{N}$.

5. а) многоугольники с равными сторонами и равными углами; б) прямые, не имеющие общих точек; в) $\{5n \mid n \in \mathbf{N}\}$.

6. б) $\varnothing$; г) $\varnothing$.

Подмножества

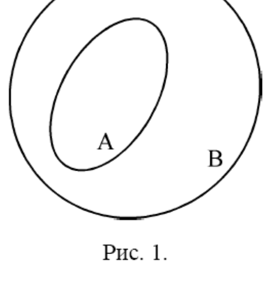


Рис. 1.

Рассмотрим два множества A и B. Если каждый элемент множества A является элементом множества B, то говорят, что A – *подмножество* множества B (рис. 1). Этот факт записывают $A \subset B$. Считают, что пустое множество является подмножеством любого множества.

Каждое непустое множество A имеет хотя бы два подмножества – само множество A и пустое множество. Их называют *несобственными* подмножествами множества A, все другие подмножества, если они существуют, – *собственными*.

Если A – подмножество множества B, B – подмножество множества C ($A \subset B$ и $B \subset C$), то A –подмножество множества C ($A \subset C$), то есть свойство быть подмножеством удовлетворяет условию транзитивности.

Примеры множеств и их подмножеств:

1) Пусть **N** – множество натуральных чисел, **Z** – множество целых чисел, **Q** – множество рациональных чисел, **R** – множество действительных чисел. Тогда $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$.
2) Пусть A – множество букв русского алфавита, B – множество гласных букв русского алфавита, тогда $B \subset A$.
3) Пусть A – множество линий на плоскости, B – множество прямых на плоскости, то $B \subset A$.

Если множество B является подмножеством множества A ($B \subset A$), то принадлежность элемента x множеству B является *достаточным* условием его принадлежности множеству A, а принадлежность элемента x множеству A – необходимым условием его принадлежности множеству B.

Например, если A – множество всех параллелограммов, а B – множество всех прямоугольников, то $B \subset A$. Поэтому, для того, чтобы четырехугольник был параллелограммом, т.е. принадлежал множеству A, достаточно чтобы он был прямоугольником, т.е. принадлежал множеству B. С другой стороны, для того чтобы четырехугольник был прямоугольником, необходимо, чтобы он являлся параллелограммом.

Если одновременно $A \subset B$ и $B \subset A$, то говорят, что множества A и B *равны*, т.е. состоят из одних и тех же элементов. В этом случае принадлежность элемента множеству A необходима и достаточна для его принадлежности множеству B. Многие теоремы математики можно рассматривать как утверждения о равенстве множеств.

Упражнение 3

1. Составьте цепочки включений, так чтобы каждое следующее множество содержало предыдущее.

а) A – множество всех позвоночных;
B – множество всех животных;
C – множество всех волков;
D – множество всех млекопитающих;
E – множество всех хищных млекопитающих.

б) A – множество всех трапеций;
B – множество всех прямоугольников;

C – множество всех четырехугольников;

D – множество всех квадратов;

E – множество всех параллелограммов;

F – множество всех многоугольников.

2. Даны множества:

A – множество целых чисел; B – множество четных чисел; C – множество нечетных чисел; D – множество чисел, кратных 3; E – множество чисел, кратных 6; P – множество чисел, кратных 2 и 3 одновременно; T – множество чисел, которые при делении на 4 дают в остатке 1.

Укажите, какие из данных множеств являются подмножествами других множеств, имеются ли среди множеств равные множества? Ответы запишите с помощью символов.

3. Назовите три подмножества:

а) множества треугольников на плоскости; б) множества чисел, оканчивающихся нулем; в) множества уравнений.

4. Придумайте примеры цепочек, состоящих из множеств и их подмножеств и содержащих не менее трех включений.

Ответы:

1. а) $C \subset E \subset D \subset A \subset B$; б) $D \subset B \subset E \subset C \subset F, A \subset C \subset F$.

2. Все множества являются подмножествами множества A;

$E \subset D, E \subset B, P = E$ (следовательно, $P \subset D, P \subset B$), $T \subset C$.

Пересечение множеств

Пусть даны два множества A и B.

Пересечением (*произведением*) множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих одновременно и множеству A, и множеству B.

Обозначают пересечение множеств $A \cap B$. $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$. Аналогично определяется пересечение любого числа множеств.

Графически удобно пересечение множеств изображать в виде общей части двух или более кругов Эйлера–Венна (рис. 2).

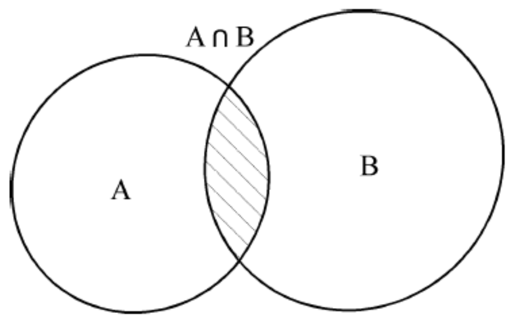


Рис. 2.

<u>**Примеры**</u>

1. $A = \{2n \mid n \in \mathbf{N}\}$ – множество чисел, делящихся на 2, $B = \{3n \mid n \in \mathbf{N}\}$ – множество чисел, делящихся на 3, тогда $A \cap B = \{6n \mid n \in \mathbf{N}\}$ – множество чисел, делящихся на 6.

2. A – отрезок [0; 5], B – отрезок [2; 7], тогда $A \cap B$ – отрезок [2; 5].

Упражнение 4

1. Найдите $A \cap B$, если

а) $A = (-3; 7)$, $B = (1; 8)$;

б) $A = [0; 5]$, $B = [5; 8]$;

в) $A = (-\infty; +\infty)$, $B = (-1; 9)$;

г) A – множество простых чисел, B – множество положительных четных чисел;

д) A – множество всех прямоугольников, B – множество всех ромбов;

е) $A = \{x \mid x \in \mathbf{N}, x \geq 10\}$, $B = \{x \mid x \in \mathbf{N}, x \leq 16\}$;

ж) $A = \{x \mid n \in \mathbf{N}, x = n^2\}$, $B = \{x \mid x \in \mathbf{N}, x \leq 40\}$;

з) A – множество чисел, кратных 18, B – множество чисел, кратных 24;

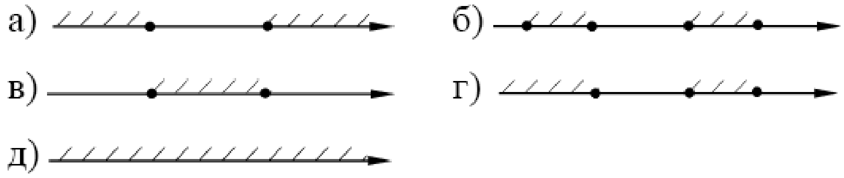
и) $A = \{3n \mid n \in \mathbf{N}\}$, $B = \{5n \mid n \in \mathbf{N}\}$;

к) $A = \{2n + 1 \mid n \in \mathbf{N}\}$, $B = \{4n + 3 \mid n \in \mathbf{N}\}$;

л) $A = \{3n + 2 \mid n \in \mathbf{N}\}$, $B = \{4n + 1 \mid n \in \mathbf{N}\}$.

2. Множество A состоит из целых чисел, делящихся на 4, множество B – из целых чисел, оканчивающихся нулем и множество C – из целых чисел, делящихся на 75. Из каких чисел состоит множество $A \cap B \cap C$.

3. Определите, какие из предложенных вариантов могут изображать пересечение множеств решений двух квадратных неравенств? В случае положительного ответа приведите примеры таких неравенств.



4. Изобразите с помощью кругов Эйлера–Венна пересечение множеств A и B для всевозможных случаев их взаимного расположения.

***Ответы*:**

1. а) (1; 7); б) {5}; в) (–1; 9); г) {2}; д) множество квадратов; е) {10; 11; 12; 13; 14; 15; 16}; ж) {1; 4; 9; 16; 25; 36}; з) числа, кратные 72; и) $\{15n \mid n \in \mathbf{N}\}$; к) $\{4n + 3 \mid n \in \mathbf{N}\}$; л) $\{12n - 7 \mid n \in \mathbf{N}\}$.

2. $A \cap B \cap C = \{300n \mid n \in \mathbf{Z}\}$.

3. а), б), в), д).

Объединение множеств

Объединением двух множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A или B. Обозначают объединение множеств $A \cup B$ (рис. 3).

$A \cup B = \{x \mid x \in A$ или $x \in B\}$.

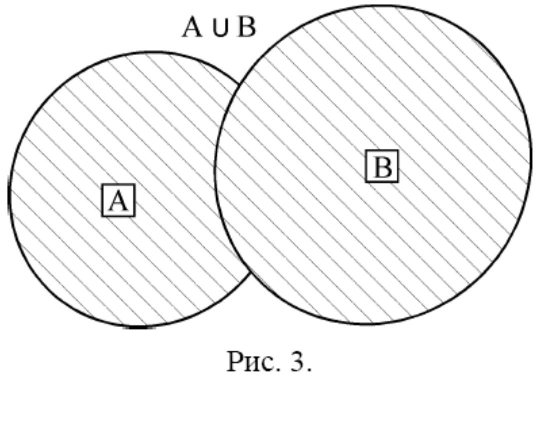


Рис. 3.

Аналогично определяется объединение любого числа множеств.

<u>Примеры</u>

1. $A = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$, $B = \{1; 2; 3; 6; 9; 18\}$, тогда $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 18\}$.

2. $A = [0; 7]$, $B = [3; 10]$, тогда $A \cup B = [0; 10]$.

3. $A = \{6k \mid k \in \mathbf{Z}\}$ — числа, кратные 6, $B = \{6k + 2 \mid k \in \mathbf{Z}\}$ – числа, дающие при делении на 6 остаток 2, $C = \{6k + 4 \mid k \in \mathbf{Z}\}$ – числа, дающие при делении на 6 остаток 4. Перечислим некоторые элементы этих множеств:
$A = \{\ldots, –6; 0; 6; 12; \ldots\}$, $B = \{\ldots, –4; 2; 8; 14; \ldots\}$, $C = \{\ldots, –2; 4; 10; 16; \ldots\}$.
Очевидно, что $A \cup B \cup C = \{2k \mid k \in \mathbf{Z}\}$ – множество четных чисел.

<u>Упражнение 5</u>

1. Пусть $A = \{–4; –3; –2; –1; 0; 1; 2\}$, $B = \{4; 3; 2; 1; 0; –1; –2\}$,
$C = \{x \mid –4 \le x < 5\}$. Запишите следующие множества $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cup C$, $A \cap C$, $B \cup C$, $A \cap \mathbf{N}$, $A \cup \mathbf{N}$, $B \cup \mathbf{Z}$, $(A \cap B) \cap \mathbf{N}$.

2. Пусть заданы множества A, B и C такие, что $A \cap B = \{2; 3\}$, $A \cup B = \{1; 2; 3; 5; 7; 8\}$, $A \cap C = \{1\}$, $C \cup B = \{1; 2; 3; 5; 6; 7; 8\}$. Найдите множества A, B и C.

3. Найдите объединение множеств:
   а) $A = \{3k + 1 \mid k \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{3k \mid k \in \mathbf{Z}\}$, $C = \{3k + 2 \mid k \in \mathbf{Z}\}$;
   б) $A = \{8k \mid k \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{8k + 4 \mid k \in \mathbf{Z}\}$;
   в) $A = \{9k + 7 \mid k \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{9k + 4 \mid k \in \mathbf{Z}\}$, $C = \{9k + 1 \mid k \in \mathbf{Z}\}$.

4. Найдите $A \cup B$ и $A \cap B$, если
   а) $A = \{x \mid x^4 – 13x^2 + 36 = 0\}$, $B = \{x \mid x^4 – 8x^2 + 9 = 0\}$;
   б) $A = \{x \mid 3x – 9 < 0\}$, $B = \{x \mid 2x + 6 > 0\}$.

5. Какое заключение можно сделать об отношении между фигурами, расположенными так, что их пересечением и их объединением служит одна и та же фигура?

***Ответы*:**

1. Например, $A = \{1; 2; 3\}$; $B = \{2; 3; 5; 7; 8\}$; $C = \{1; 6; 7; 8\}$.
2. а) $A \cup B \cup C = \mathbf{Z}$; б) $A \cup B = \{4k \mid k \in \mathbf{Z}\}$; в) $A \cup B \cup C = \{3k + 1 \mid k \in \mathbf{Z}\}$.
3. а) $A \cup B = \{–1; –2; –3; 1; 2; 3\}$, $A \cap B = \{–3; 3\}$; б) $A \cup B = \mathbf{R}$, $A \cap B = (–3; 3)$.
4. Они равны.

Разность множеств

Разностью множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов, множества A, не принадлежащих множеству B. Обозначают разность множеств $A \setminus B$ (рис. 4): $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$.

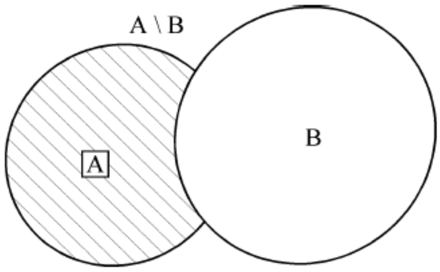


Рис. 4.

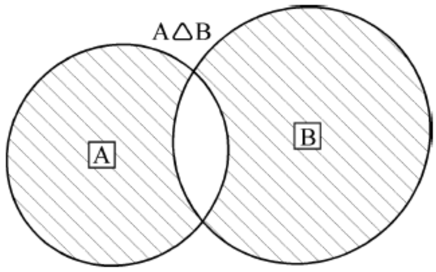


Рис. 5.

Симметрической разностью множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих только одному множеству A или B, обозначают $A \Delta B$ (рис. 5).

Часто при решении задач вводят *универсальное* множество U – это самое большое множество элементов, рассматриваемых в задаче.

Дополнением множества A до универсального называется множество элементов универсального множества, не принадлежащих множеству A.

Обозначают дополнение множества A (рис. 6):

$$\overline{A} = U \setminus A = \{x \mid x \in U, x \notin A\}$$

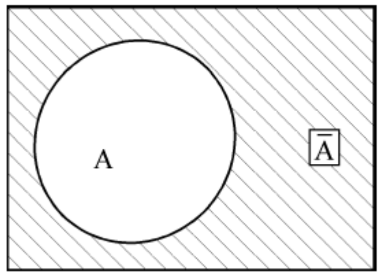


Рис. 6.

Примеры

1. $A = [-2; 0)$, $B = [-1; 3)$. Тогда $A \setminus B = [-2; -1)$, а $B \setminus A = [0; 3)$.
2. $A = \{2m - 1 \mid m \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{4n + 1 \mid n \in \mathbf{Z}\}$.
$A = \{\ldots; -3; -1; 1; 3; \ldots\}$, $B = \{\ldots; -3; 1; 5; 9; \ldots\}$,
$A \setminus B = \{\ldots; -1; 3; 7; \ldots\}$,
$A \setminus B = \{4k - 1 \mid k \in \mathbf{Z}\}$.

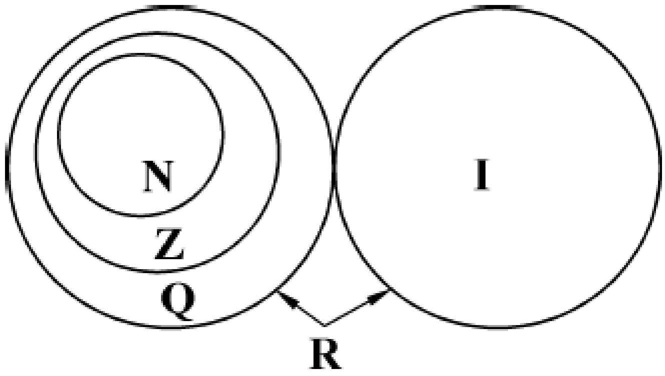
Упражнение 6

1. Найдите $A \setminus B$, $B \setminus A$, $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$:
а) $A = [-11; 4]$, $B = (2; 8]$;
б) $A = [2; 7]$; $B = [8; 12]$;
в) $A = (-\infty; 5]$; $B = (1; +\infty)$.
2. Найдите $A \setminus B$:
а) $A = \{3k \mid k \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{6m \mid m \in \mathbf{Z}\}$;
б) $A = \{2k \mid k \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{4m + 2 \mid m \in \mathbf{Z}\}$.
3. Найдите дополнение множества остроугольных треугольников до множества всех треугольников.
4. Докажите, что симметрическую разность можно определить с помощью формул: $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ или $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (B \cap A)$.

***Ответы*: 2**. а) $A \setminus B = \{6k + 3 \mid k \in \mathbf{Z}\}$; б) $A \setminus B = \{4k \mid k \in \mathbf{Z}\}$.

Числовые множества

Элементами множества могут быть объекты различной природы (числа, слова, геометрические фигуры, функции, животные и т.д.). Для математики особую роль играют множества, составленные из математических объектов. Очень часто встречаются *числовые множества*, т.е. множества, элементами которых являются числа.



Например:
N – множество натуральных чисел,
Z – множество целых чисел,
Q –множество рациональных чисел,
I – множество иррациональных чисел,
R – множество действительных чисел.

Особое место занимают множества, называемые числовыми промежутками:

- отрезок [a; b],
- интервалы (a; b), (a; $+\infty$), ($-\infty$; b),
- полуинтервалы [a; b), (a; b], [a; $+\infty$), ($-\infty$; b].

Числовые множества используются при решении уравнений и неравенств.

<u>Примеры</u>

1. Найдем множество допустимых значений переменной для уравнения

$\sqrt{9-x^2}+\sqrt{x^2-4}=2.$

$$\begin{cases} 9-x^2 \ge 0, \\ x^2-4 \ge 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} |x| \le 3, \\ |x| \ge 2, \end{cases}$$

Ответ: [–3; –2] ∪ [2; 3].

2. Совпадают ли множества корней уравнений

$$(x-2)\sqrt{x^2-2x-3}=0 \text{ и } (x-2)(x^2-2x-3)=0?$$

Рассмотрим первое уравнение $(x-2)\sqrt{x^2-2x-3}=0$.

Область допустимых значений переменной (ОДЗ): $(-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$.

Решим уравнение: $\left[\begin{array}{l} x-2=0, \\ \sqrt{x^2-2x-3}=0, \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=2 \notin \text{ОДЗ}, \\ x=-1, \\ x=3. \end{array}\right.$

Корни: -1; 3.

Корнями же второго уравнения являются числа -1; 2; 3. Поэтому множества корней данных уравнений различны.

Алгебра множеств

Алгеброй множеств называется часть теории множеств, в которой изучаются свойства операций над множествами. Рассмотрим некоторые из них:

1. Свойство коммутативности объединения и пересечения

$$A \cup B = B \cup A;\ A \cap B = B \cap A.$$

2. Свойство ассоциативности объединения и пересечения

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C);\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

3. Свойство дистрибутивности пересечения относительно объединения и наоборот $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

4. $A \cup A = A$; $A \cap A = A$;

5. $A \cup U = U$; $A \cap U = A$;

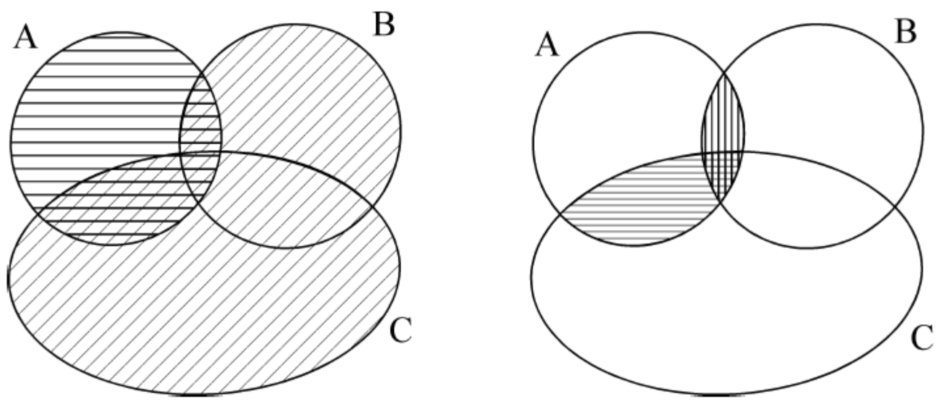
6. $A \cup \varnothing = A$; $A \cap \varnothing = \varnothing$;

7. $A \cup \overline{A} = U$; $A \cap \overline{A} = \varnothing$;

8. $\overline{\overline{A}} = A$;

9. $\overline{U} = \varnothing$; $\overline{\varnothing} = U$;

Проиллюстрируем с помощью диаграмм Эйлера–Венна, например, свойство 3. Рассмотрим отдельно левую и правую части равенства (рис. 7, *а* и *б*). На рисунке 7, *а* нас интересует множество, отмеченное двойной штриховкой, а на рисунке 7, *б* – множество, выделенное хотя бы одной штриховкой.



а *б* Рис. 7.

Левую часть второго равенства определяет множество, отмеченное хотя бы одной штриховкой (рис. 8, *а*). Правую – множество, отмеченное двойной штриховкой (рис. 8, *б*).

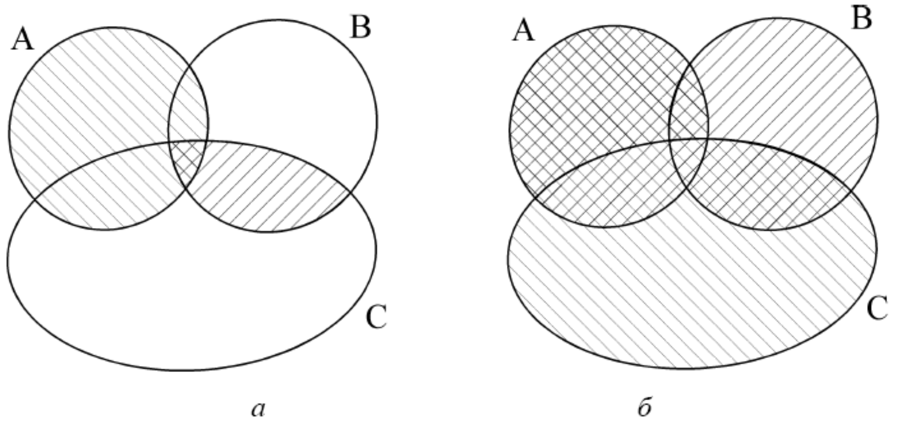


Рис. 8.

Пример Докажите то $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

Решение. Докажем два включения

$A \setminus (B \cup C) \subset (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ и $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) \subset A \setminus (B \cup C)$.

Построим цепочку следующих друг из друга утверждений

$$x \in A \setminus (B \cup C) \Rightarrow x \in A, x \notin (B \cup C) \Rightarrow x \in A, x \notin B, x \notin C \Rightarrow$$

$$x \in A \setminus B, x \in A \setminus C \Rightarrow x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$$

Проверим обратное включение $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \Rightarrow$

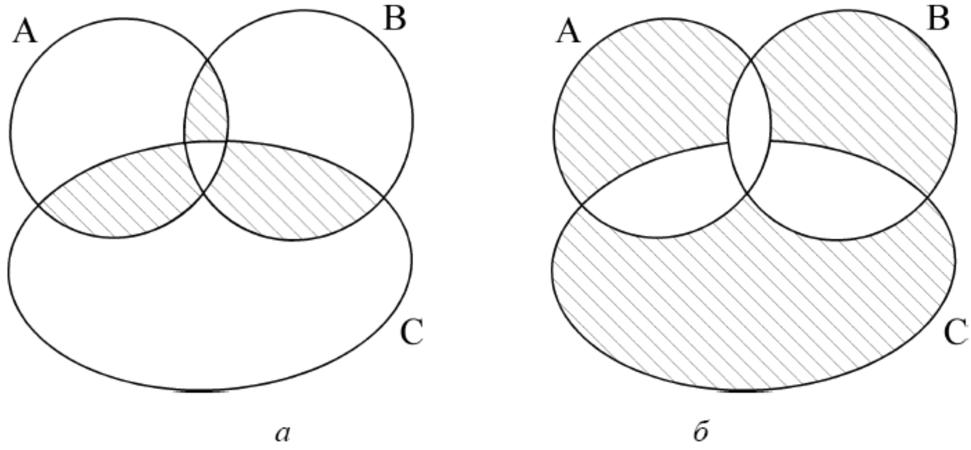
$$x \in A \setminus B, x \in A \setminus C \Rightarrow x \in A, x \notin B, x \notin C \Rightarrow x \in A, x \notin (B \cup C) \Rightarrow$$

$$x \in A \setminus (B \cup C).$$

Равенство множеств доказано.

Упражнение 7

1. Запишите с помощью формул заштрихованное множество:



2. Покажите с помощью диаграмм Эйлера–Венна, что

$$[(A \cap B) \setminus C] \cup [(B \cap C) \setminus A] = [(A \cap B) \cup (B \cap C) \setminus (A \cap B \cap C)].$$

Ответы:

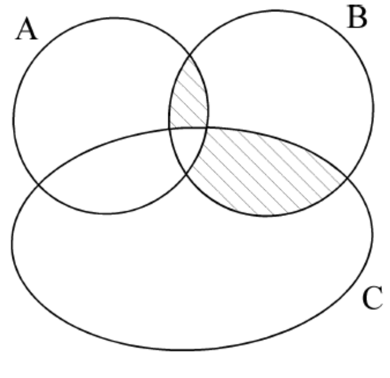
1. Ввиду неоднозначности записи ответы приводятся примерные:

   а) $[(A \cap B) \setminus C] \cup [(B \cap C) \setminus A] \cup [(A \cap C) \setminus B]$ или

   $[(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C)] \setminus [A \cap B \cap C]$;

   б) $[A \setminus (B \cup C)] \cup [B \setminus (A \cup C)] \cup [A \cap B \cap C]$.

2.



Формула включений и исключений

Пусть задано конечное множество A. Число его элементов обозначим $n(A)$. Найдем сколько элементов содержится в множестве $A \cup B$. Основная формула нахождения числа элементов суммы двух множеств

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B). \tag{1}$$

Действительно, $n(A \cup B)$ – это сумма числа элементов множеств A и B, но при подсчете элементы, принадлежащие $A \cap B$ учитывались дважды. С помощью формулы (1) можно получить формулы для определения числа элементов суммы любого числа множеств. Например,

$$\begin{gathered}
n(A \cup B \cup C) = n(A \cup (B \cup C)) = \\
= n(A) + n(B \cup C) - n(A \cap (B \cup C)) = \\
= n(A) + n(B) + n(C) - n(B \cap C) - n((A \cap B) \cup (A \cap C)) = \\
= n(A) + n(B) + n(C) - n(B \cap C) - (n(A \cap B) + n(A \cap C) - \\
- n((A \cap B) \cap (A \cap C))) = n(A) + n(B) + n(C) - n(B \cap C) - \\
- n(A \cap B) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C).
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - \\
- n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C).
\end{gathered} \tag{2}$$

<u>Формулы (1) и (2) называют формулами включений и исключений.</u>

<u>**Задача 1**</u>.

Из 100 школьников английский знают 42, немецкий – 30, французский – 28, английский и немецкий – 5, английский и французский – 10, немецкий и

французский – 8, английский, немецкий и французский – 3 школьника. Сколько школьников не знают ни одного языка?

Решение.

Обозначим через A – множество школьников, знающих английский язык; N – множество школьников, знающих немецкий язык; F – множество школьников, знающих французский язык.

Тогда

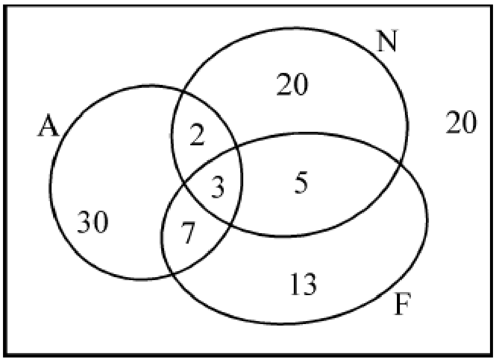
$$n(A) = 42,\ n(N) = 30,\ n(F) = 28,\ n(A \cap N) = 5,$$
$$n(A \cap F) = 10,\ n(N \cap F) = 8,\ n(A \cap N \cap F) = 3.$$

Найдем с помощью формулы включений и исключений количество школьников, знающих хотя бы один из перечисленных иностранных языков.

$$n(A \cup N \cup F) = n(A) + n(N) + n(F) =$$
$$= n(A \cap N) – n(A \cap F) – n(N \cap F) + n(A \cap N \cap F) =$$
$$= 42 + 30 + 28 – 5 – 10 – 8 + 3 = 80.$$

Следовательно, не знают ни одного иностранного языка:

100 – 80 = 20 школьников.



Эту же задачу можно решить с помощью диаграммы Эйлера–Венна.

Так как 3 языка знают 3 школьника, то английский и немецкий знают 5 – 3 = 2, английский и французский: 10 – 3 = 7, немецкий и французский: 8 – 3 = 5 школьников. Только английский знают 42 – (2 + 3 + 7) = 30, только немецкий: 30 – (2 + 3 + 5) = 20, только французский : 28 – (3 + 5 + 7) = 13 школьников.

Ни одного языка не знают 100 – (2 + 3 + 5 + 7 + 13 + 20 + 30) = 20 школьников.

<u>**Задача 2**</u>. Сколько двузначных чисел не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5, ни на 11?

Решение. Обозначим: A – множество двузначных чисел, делящихся на 2; B – множество двузначных чисел, делящихся на 3; C – множество двузначных чисел, делящихся на 5; D – множество двузначных чисел, делящихся на 11.

$n(A \cup B \cup C \cup D)$ – количество двузначных чисел, делящихся хотя бы на одно из чисел 2; 3; 5; 11.

$$n(A \cup B \cup C \cup D) = n(A) + n(B) + n(C) + n(D) –$$
$$– n(A \cap B) – n(A \cap C) – n(A \cap D) – n(B \cap C) –$$
$$– n(B \cap D) – n(C \cap D) + n(A \cap B \cap C) + n(A \cap B \cap D) +$$
$$+ n(A \cap C \cap D) + n(B \cap C \cap D) – n(A \cap B \cap C \cap D).$$
$$n(A) = 45,\ n(B) = 30,\ n(C) = 18,\ n(D) = 9,$$
$$n(A \cap B) = 15,\ n(A \cap C) = 9,\ n(A \cap D) = 4,\ n(B \cap C) = 6,$$
$$n(B \cap D) = 3,\ n(C \cap D) = 1,\ n(A \cap B \cap C) = 3,$$

$$n(A \cap B \cap D) = 1,\ n(A \cap C \cap D) = n(B \cap C \cap D) =$$
$$= n(A \cap B \cap C \cap D) = 0.$$

Итак, $n(A \cup B \cup C \cup D) = 45 + 30 + 18 + 9 - 15 - 9 - 4 - 6 - 3 -$
$$- 1 + 3 + 1 = 102 - 34 = 68.$$

Так как всего 90 двузначных чисел, то чисел, не делящихся ни на одно из заданных чисел: $90 - 68 = 22$.

<u>Задача 3.</u> Сколько четных двузначных чисел, не делятся ни на 3, ни на 5, ни на 11?

Решение. Учитывая обозначения, введенные в предыдущей задаче, нужно ответить на вопрос: сколько элементов попало во множество A и не попало ни в какие другие множества?

Рассмотрим диаграмму.

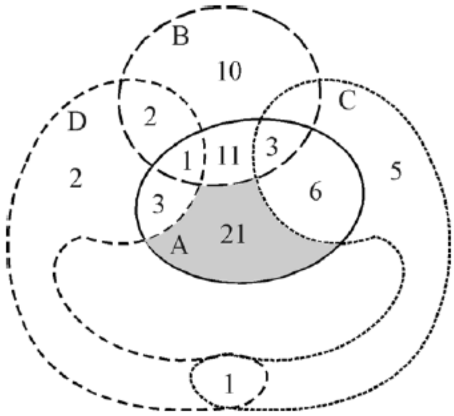
Отметим количественные показатели в соответствующих областях в следующем порядке:

$n(A \cap B \cap C) = 3$, $n(A \cap B \cap D) = 1$,

$n(A \cap B) - 3 - 1 = 11$, $n(A \cap C) - 3 = 6$,

$n(A \cap D) - 1 = 3$,

$n(A) - 3 - 1 - 11 - 3 - 6 = 45 - 24 = 21$.



Таким образом, только во множестве A (т.е. четных чисел, не делящихся ни на 3, ни на 5, ни на 11) находится 21 число.

Остальные числовые данные на диаграмме служат иллюстрацией к задаче 2 $(90 - (21 + 10 + 5 + 2 + 2 + 3 + 3 + 6 + 11 + 1 + 3 + 1) = 22)$.

<u>Задача 4.</u> Учащиеся 9-х классов пошли в лес за грибами. 80 % собирали белые грибы, 70 % — моховики, 85 % — маслята, 75 % — рыжики. Сколько процентов учащихся собирали белые грибы, моховики, маслята и рыжики?

Решение. Подсчитаем, сколько учащихся собирали белые грибы и моховики: 70 % + 80 % = 150 %. Следовательно, белые грибы и моховики собирали 50 % учащихся. Аналогично, так как 50 % + 85 % = 135 %, то белые грибы, моховики и маслята собирали 35 % учащихся. Далее, имеем 35 % + 75 % = 110 %, белые грибы, моховики, маслята и рыжики собирали 10 % учащихся.

<u>Упражнение 8</u>

1. В спортивном классе обучаются 24 человека. Каждый учащийся занимается хотя бы одним видом спорта (баскетболом или волейболом), из них баскетболом и волейболом занимаются 12 человек. Сколько человек занимается только волейболом, если их в 3 раза больше, чем тех, кто занимается только баскетболом?

Ответ: 9.

Индивидуальное задание 1 Операции над множествами

Для заданных множеств A, B и C найти следующие множества:

$A \cup B$, $A \cap \overline{B}$, $A \cup B \cap C$, $A \setminus B$, $(B \setminus A) \cap C$.

(Здесь использованы следующие обозначения:
N – множество натуральных чисел,
Z – множество целых чисел).

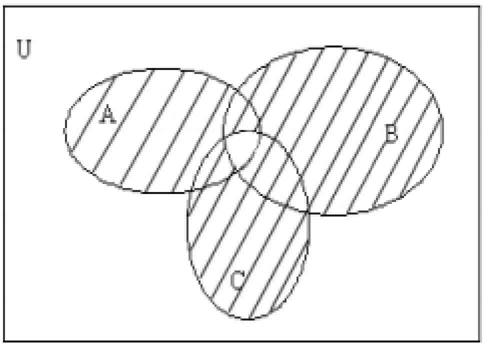
№ варианта	A	B	C
1.	$\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$	$\{x: x \in N, x < 12\}$	{*четные числа*}
2.	$\{-2, 0, 4, 6, 33, 99\}$	$\{x: x \in Z, \lvert x \rvert < 3\}$	{*числа кратные трем*}
3.	$\{-3.4, -3.6, 3.7, 4.5\}$	$\{x: x \in N, x \le 13\}$	{*отрицательные числа*}
4.	$\{-5, -4, -3, -2, -1, 0\}$	$\{x: x \in Z, \lvert x \rvert < 2\}$	{*нечетные числа*}
5.	$\{a, b, c, d, f, g\}$	$\{c, d, f, g, h, e, j\}$	{*первые 12 букв латинского алфавита*}
6.	$\{1, 3, 5, R, s, Q\}$	$\{c, R, y, S, e, Q\}$	{*прописные буквы латинского алфавита*}
7.	$\{6, 7, 9, w, r, t, z\}$	$\{t, D, G, R, q, s, f\}$	$\{g, o, p, z, r, W, K\}$
8.	$\{Q, T, R, p, v, s\}$	$\{Q, g, u, s, v, e\}$	$\{q, e, T, a, R, k, l\}$
9.	$\{-7, -2, -1, 0, 7, 9\}$	$\{x: x \in N, 14 < x < 20\}$	{*неположительные действительные числа*}
10.	$\{11, 12, 13, -10, -1\}$	$\{x: x \in N, x < 13\}$	{*четные положительные числа*}
11.	$\{-5, 0, 5, 10, 15\}$	$\{x: x = 3n, n \in N, 2 < n < 5\}$	{*положительные рациональные числа*}
12.	$\{-14, -7, 0, 7, 14, 21\}$	$\{x: x = 7n, n \in Z, -1 < n < 2\}$	{*неотрицательные целые числа*}

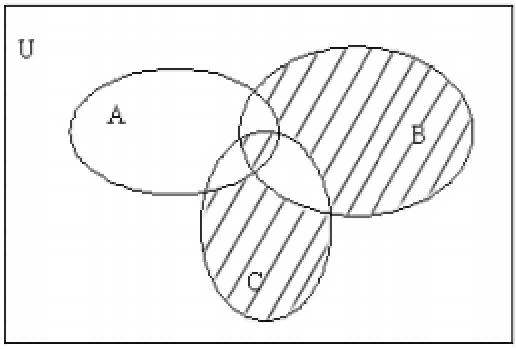
№ варианта	A	B	C
13.	$\{3, 7, 11, 17, 18, 23\}$	$\{x: x\in 3n,\quad n\in N, n < 6\}$	{*числа, не являющие-ся простыми*}
14.	$\{0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5\}$	$\{x: x\in 0.1n, n\in N, n < 4\}$	{*рациональные числа*}
15.	$\{\varDelta, \varPsi, \varOmega, \varSigma, \varXi, \varTheta\}$	$\{\varPi, T, \varPsi, \varOmega, \varTheta\}$	{*буквы греческого алфавита*}
16.	$\{A, B, \varGamma, P, \varSigma, \pi\}$	$\{\varGamma, \psi, P, \zeta, \rho, \pi\}$	{*прописные буквы греческого алфавита*}
17.	$\{A, 1, 3, \delta, \varepsilon, \zeta\}$	$\{\eta, \varepsilon, A, 1, \lambda, 3\}$	{*буквы греческого алфавита*}
18.	$\{\pi, \rho, \sigma, \tau, \upsilon, \varphi\}$	$\{\varphi, Y, \pi, B, \tau, A\}$	{*строчные буквы греческого алфавита*}
19.	$\{0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3\}$	$\{x: x\in Z, 4 > x > 1.5\}$	{*рациональные числа*}
20.	$\{-1.2, -0.5, 0, 1, 2, 2.5\}$	$\{x: x\in N, \lvert x\rvert < 2\}$	{*положительные ра-циональные числа*}
21.	$\{-2, -1, 1, 2, 3, 6\}$	$\{-2, 0, 2, 4, 6, 8, a, b, c\}$	{*числа*}
22.	$\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{4},-\frac{1}{6},\frac{1}{8},-\frac{1}{10},\frac{1}{12}\right\}$	$\{x: x=\frac{1}{n}, \in Q, n\in Z, -3<n<10\}$	{*положительные ра-циональные числа*}
23.	$\left\{-\frac{1}{3},\frac{2}{4},\frac{3}{5},\frac{4}{6},\frac{5}{7},-\frac{6}{8}\right\}$	$\{x: x=\frac{1+n}{3+n}, n\in N, 2\le n\le 4\}$	{*отрицательные ра-циональные числа*}
24.	$\left\{\frac{2}{3},\frac{3}{5},\frac{4}{7},\frac{5}{9},\frac{6}{11},\frac{7}{13}\right\}$	$\{x: x=\frac{2+n}{3+2n}, n\in N, 2\le n\le 4\}$	{*рациональные числа меньше* 0.5}
25.	$\{0, -1, -2, -3, -4, -5\}$	$\{x: x\in Z, \lvert x\rvert \le 2\}$	{*четные неотрица-тельные числа*}
26.	$\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$	$\{x: x\in Z, 20> x > 10\}$	{*числа, кратные трем*}

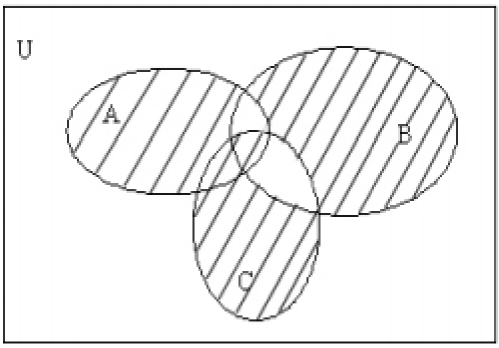
№ варианта	*A*	*B*	*C*
27.	$\{5.4, -5.6, 5.7, 5.5, -5.7\}$	$\{x: x \in Z, \lvert x \rvert \geq 5.7\}$	{*отрицательные числа*}
28.	$\left\{-\frac{4}{11}, \frac{5}{10}, -\frac{6}{9}, \frac{7}{8}, -\frac{7}{7}, \frac{8}{6}\right\}$	$\{x: x = -\frac{4+n}{11-n}, n \in N, 2 \leq n \leq 4\}$	{*целые неположительные числа*}
29.	$\{15, 24, 33, 42, 51, 60\}$	$\{x: x \in Z, \lvert x \rvert < 40\}$	{*нечетные числа, кратные трем*}
30.	$\{2, -3, 4, -5, 6, -7\}$	$\{x: x \in N, x < 7\}$	{*неотрицательные четные числа*}
31.	$\{d, r, y, 2, 6, 1, a\}$	$\{x: x \in N, 6 > x > 2\}$	{*буквы*}

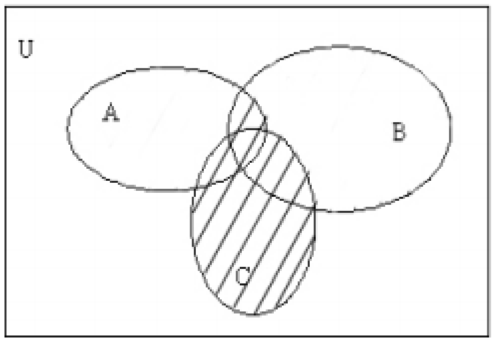
<u>Индивидуальное задание 2</u>

По заданной диаграмме Эйлера-Венна, описать множество, заданное штриховкой.

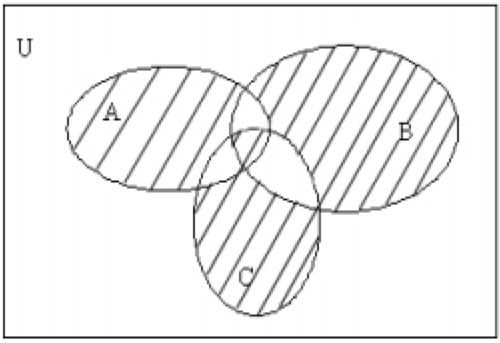
1. 

2. 

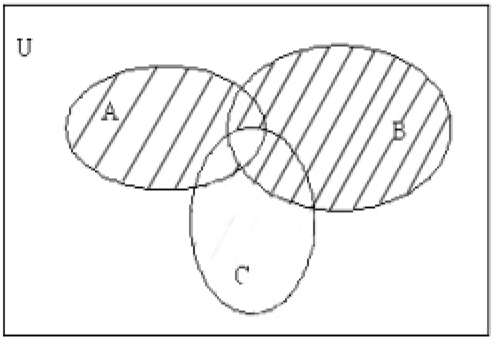
3. 

4. 

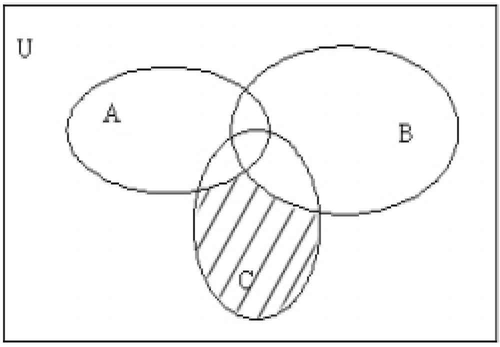
5.



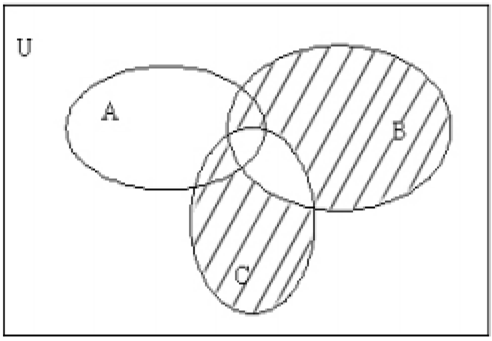
6.



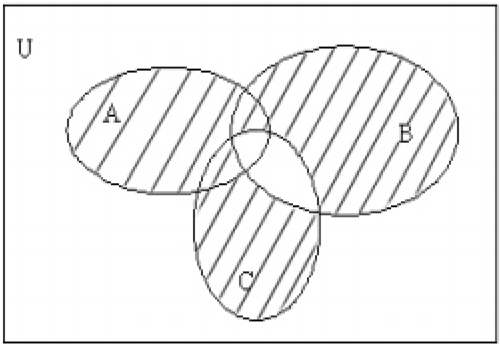
7.



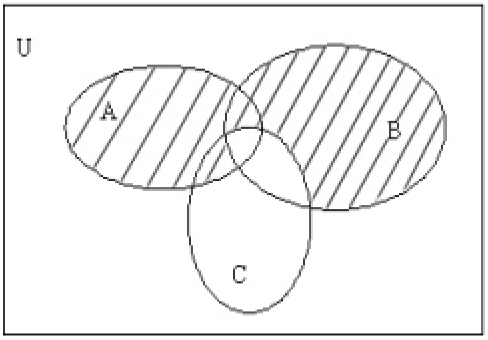
8.



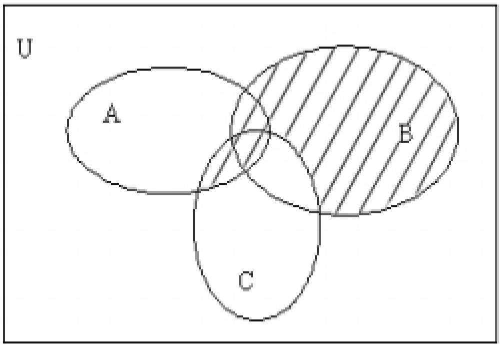
9.



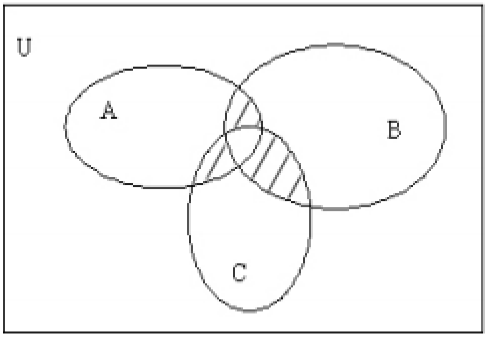
10.



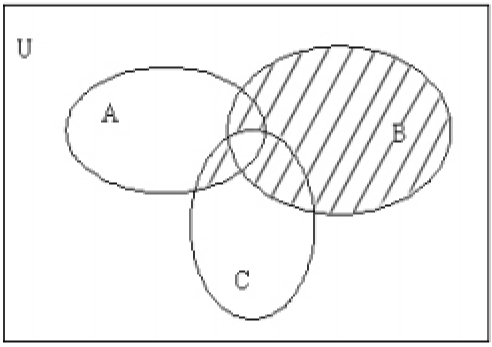
11.



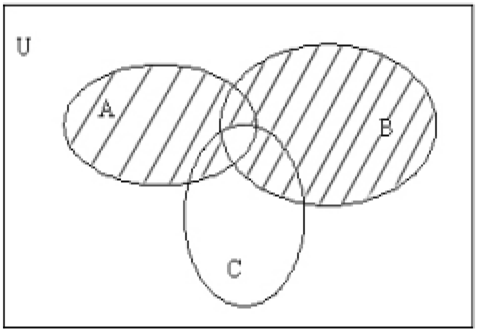
12.



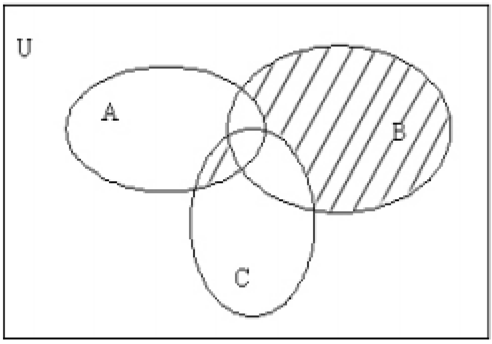
13.



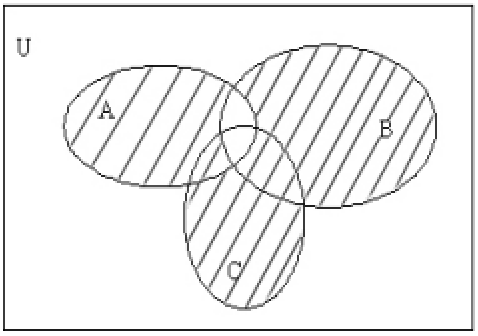
14.



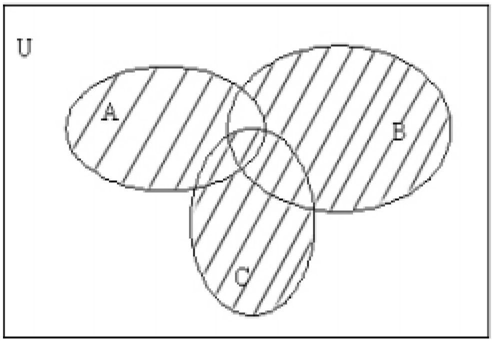
15.



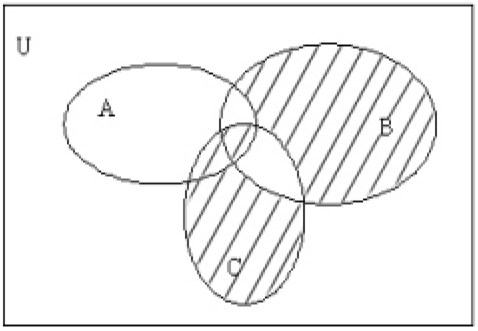
16.



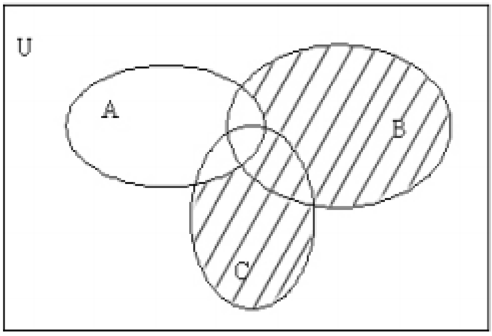
17.



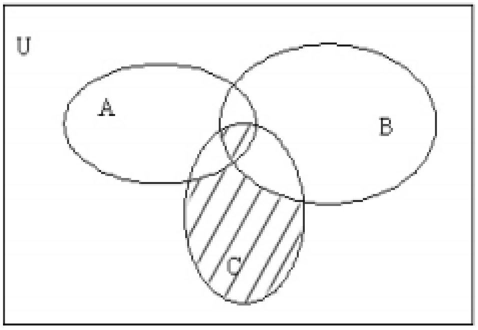
18.



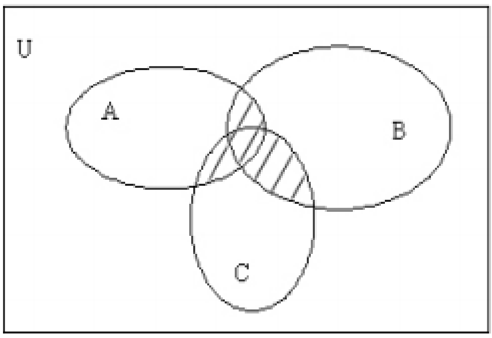
19.



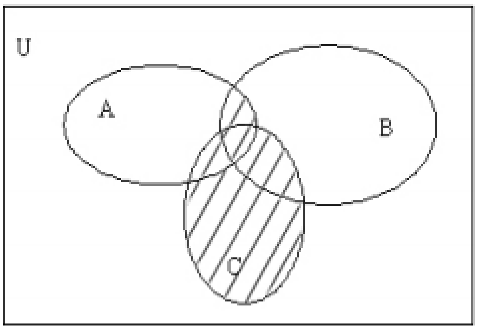
20.



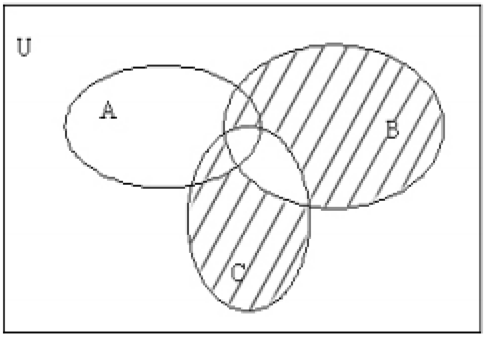
21.



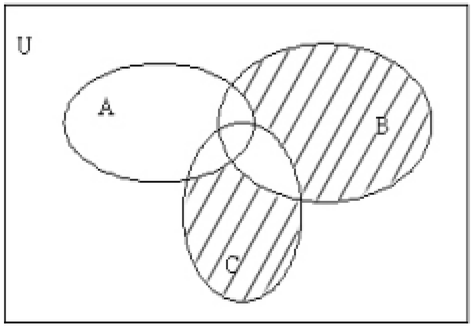
22.



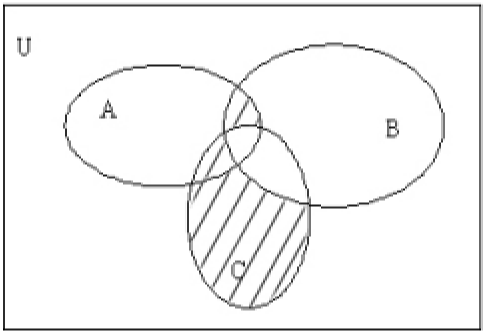
23.



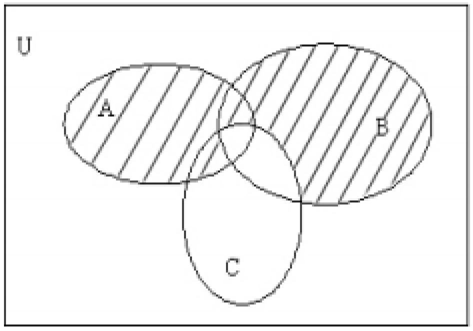
24.



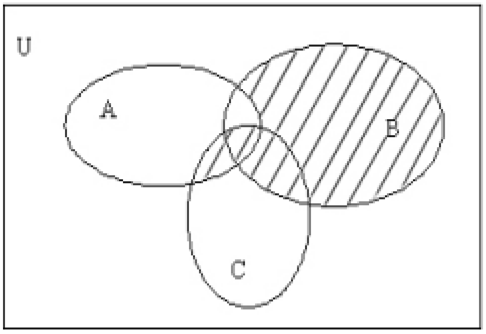
25.



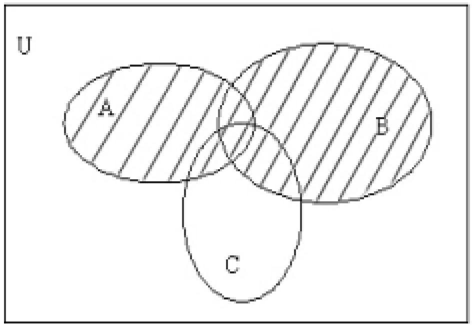
26.



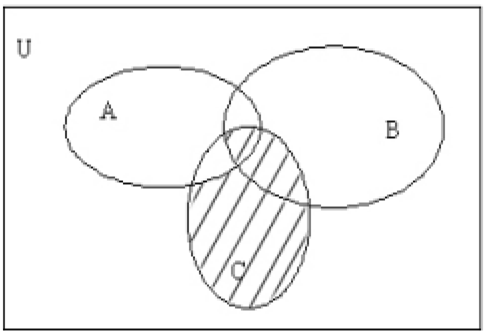
27.



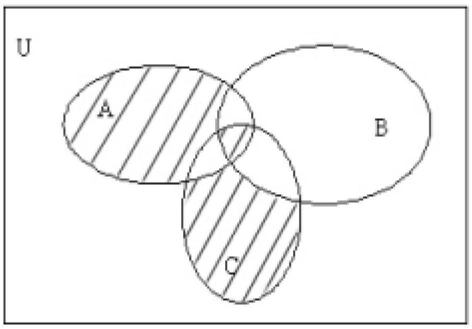
28.



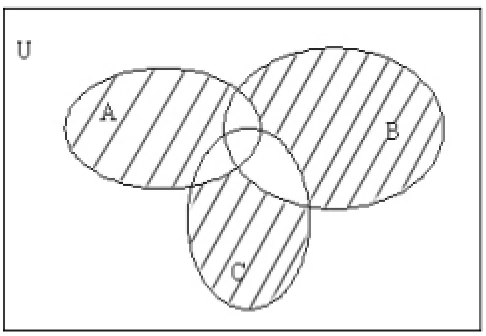
29.



30.



31.



<u>Индивидуальное задание 3 </u>. Решение задач с использованием диаграммы Эйлера-Венна

Решите следующие задачи, используя диаграммы Эйлера-Венна:

№ варианта	Задание
1	Из 20 студентов группы 14 посещают курсы английского языка, 11 – посещают одновременно курсы английского языка и информатики, 4 студента не посещают никакие курсы. Сколько студентов посещают курсы информатики?
2	На контрольной работе было дано три задания. Правильно выполнили первое задание 18 студентов, второе задание – 9 студентов, третье задание – 13 студентов, причем правильно выполнивших первое и второе задания оказалось 3 студента, первое и третье - 7 студентов, второе и третье – 5 студентов. Все три задания правильно выполнили 2 студента. Сколько студентов неправильно выполнили все три задания?
3	В группе из 60-ти туристов английским языком владеют 19 человек, немецким – 20 человек, испанским – 4 человека, английским и и немецким – 2 человека, английским и испанским – 1 человек, немецким и испанским – 3 человека, все три языка не знает никто. Сколько человек не знают ни одного из перечисленных языков?
4	Из 220 студентов 163 играют в баскетбол, 175 – в футбол, 24 не играют в эти игры. Сколько человек одновременно играют в баскетбол и футбол?
5	Из 64 студентов на вопрос, занимаются ли они в свободное время спортом, утвердительно ответили 40 человек; на вопрос любят ли они слушать музыку, 30 человек ответили утвердительно, причем 22 студента занимаются спортом и любят слушать музыку. Сколько человек не увлекаются ни спортом ни музыкой?
6	По результатам опроса пользователей мобильной связи выяснилось, что абонентами сети Билайн являются 35% опрошенных, сети Водафон – 40%, сети Мегафон – 50%. Также выяснилось, что периодически абоненты пользуются услугами и других сетей. Так, пользуются Билайном и Водафоном – 15 %, Билайном и Мегафоном – 15%, Водафоном и Мегафоном – 10%. Сколько абонентов (в процентах) пользуются услугами только сети Водафон?
7	В изоляторе находятся 31 заключенных. Известно, что 20 человек отбывают наказание по 105 ст. УК РФ, по 111 ст. – 14 человек, по 116 ст. – 11 человек. Одновременно по двум статьям 105 и 111 осуждено 6 человек, по 105 и 116 – 5 человек, по 111 и 116 – 3 человека. Сколько человек в изоляторе осуждены по трем статьям одновременно?

№ варианта	Задание
8	Известно, что во взводе 13 курсантов ежемесячно ходят в наряды по столовой, 4 – в наряд по учебной базе, 12 – по курсу. Причем, 3 курсанта ходят в наряды и по столовой и по курсу, 2 – по курсу и по учебной базе. Во все три наряда не сходил ни один из курсантов. Во взводе 26 курсантов. Сколько курсантов не ходил на в один из нарядов?
9	В наряд заступило 32-х курсанта. 28 получили дубинки резиновые, из них 20 человек также получили бронежилет и 6 человек – фонарик. 3 курсанта получили только бронежилет, а фонарики (кроме 6-ти человек) больше никто не получил. Сколько курсантов не получило спецсредств?
10	В группе 26 студентов из трех городов: Макеевка, Горловка, Снежное. Периодически они ездят домой и друг к другу в гости. В Макеевку съездили 12 человек, в Горловку – 14 человек, в Снежное – 11 человек. Побывали только в Макеевке 5 человек, в Горловке – 4 человека, в Снежном – 6 человек. В Горловке и Макеевке побывало 6 человек, а в Горловке и Снежном – 4 человека. Во всех трех городах не побывал никто. Сколько студентов побывало в Макеевке и Снежном?
11	В группе 11 студентов имеют водительские права категории «А», 11 студентов – категории «В», 11 студентов – категории «С», у 2-х студентов имеются права на все три категории. Категории «А» и «В» имеют 3 студента, «А» и «С» - 5 студентов, «В» и «С» - 4 студента. Сколько студентов в группе?
12	При создании флага используются три цвета: красный, белый, синий. Известно, что красный цвет используется на 55% всех флагов, синий – на 50%, белый – на 35%. Сочетаются синий и красный цвета на 20% всех флагов, белый и синий – на 15%, белый и красный – на 10%. На скольких процентах всех флагов используется только один цвет?
13	Из 17 человек в шахматы умеют играть 7 человек, в нарды – 11 человек, в шашки – 7 человек, причем в шашки и шахматы умеют играть 4 человека. В нарды и шахматы - 4 человека, в шашки и нарды – 5 человек. Сколько человек умеет играть во все три игры?
14	В группе 28 студентов. На первую пару пришли 9 студентов, на вторую – 14 студентов, на третью – 16 студентов; на первой и второй парах присутствовали 3 студента, на второй и третьей – 9 студентов, на первой и третьей – 3 студента, 2 студента не были ни на одной из пар. Сколько студентов присутствовало на всех трех парах?

№ варианта	Задание
15	При наступлении холодов из 40 студентов 13 человек пришли в институт в шапках, 15 – в шарфах, 29 – в перчатках, причем, одновременно надели шапки и перчатки 6 студентов, шарф и перчатки – 9 студентов, шарф и шапку – 4 студента. Все три предмета одежды надели 2 студента. На скольких человек был только один из предметов?
16	При проведении соцопроса выяснили, что из 26 семей у 20 было как минимум по одной машине, у 8 семей имелся катер, у 6 семей мотоцикл. Известно, что 4 семьи одновременно владели машиной и катером, 3 семьи – катером и мотоциклом и 3 семьи – машиной и мотоциклом. Сколько семей одновременно обладает машиной, катером и мотоциклом?
17	Для сбережения доходов 56% людей покупают валюту , 42% - акции различных компаний и 43% приобретают золото. Также известно, что 6% покупают золото и валюту, 4% - акции и золото, 12% - золото, акции и валюту. Сколько людей (в процентах) скупает только валюту?
18	В группе 30 студентов. У 17 имеются задолженности по математике, у 11 – по физике, у 13 – по информатике, причем две задолженности по математике и физике имеют 4 студента, по математике и информатике – 5 студентов, по физике и информатике – 6 студентов. Из всей группы только 2 студента не имеют задолженностей по этим предметам. Сколько студентов имеют задолженности по трем предметам?
19	В библиотеку записаны 87 читателя. Известно, что 46 читателей периодически берут романы, 46 читателей берут научно-техническую литературу, 51 – фантастику, причем читают и романы и фантастику – 14 человек, романы и научно-техническую литературу – 31 читатель. Сколько человек в библиотеке читают только романы?
20	Из всего состава кафедры 95% преподавателей ведут занятия на факультете КИТА, 20% - на экономическом (ЭФ), 80% - на факультете заочного обучения (ФЗО). На двух факультетах: КИТА и ЭФ ведут занятия 15% преподавателей; ФЗО и КИТА – 75%; ЭФ и ФЗО – 10%. На трех факультетах работает 5%. Также известно, что только на ФЗО никто не работает. Сколько процентов преподавателей кафедры работает только на ФКИТА%
21	Известно, что в семьях, в которых содержат домашних животных, 50% кошек, 40% собак, 35% попугаев, причем собак и кошек содержат лишь 10% семей, собак и попугаев – 15%, кошек и попугаев – 10%. Сколько процентов семей содержат только одного животного?

№	Задание
22	Из 56 опрошенных фермеров 20 заявили, что выращивают только свеклу, 15 – только подсолнечник, 10 только рожь. Выращивают рожь и подсолнечник 8 фермеров, рожь и свеклу – 7 фермеров, свеклу и подсолнечник – 6 фермеров. Сколько фермеров выращивают рожь?
23	В ходе опроса был задан вопрос: Каким способом Вы добираетесь до работы? И даны три варианта ответа: пешком, на личном автомобиле, на маршрутке. 22% ответили, что добираются на личном автомобиле, 55% - маршрутке, 45% - пешком. Совмещают различные способы: ?5 – на автомобиле и маршрутке, 105 _ на маршрутке и пешком, 2% - используют все три вида транспорта. Сколько процентов добирается только пешком?
24	В институте имеется 24 кафедры, в распоряжении которых находятся кабинеты и аудитории, расположенные на трех этажах. Известно, что на первом этаже имеют кабинеты 7 кафедр, на втором этаже – 8 кафедр, на третьем этаже – 15 кафедр, причем на первом и втором этажах расположены кабинеты двух кафедр, на первом и третьем – трех кафедр, на втором и третьем – трех кафедр. Сколько кафедр имеют кабинеты только на третьем этаже?
25	55% опрошенных ответили, что используют бытовую технику фирмы Philips, 37% - технику фирмы LG, 55% - технику фирмы Samsung. Также они заявили, что пользуются техникой от разных производителей: LG и Samsung – 22%, LG и Philips – 12%, Samsung и Philips – 20%. Каков процент тех, кто пользуется техникой только от LG?
26	В одном украинском городе все жители говорят на русском или украинском языке. По-украински говорят 80 % всех жителей, а по-русски – 75 %. Сколько процентов всех жителей говорят на обоих языках?
27	Группа ребят отправилась в поход. Семеро из них взяли с собой бутерброды, шестеро – фрукты, пятеро – печенье. Четверо ребят взяли с собой бутерброды и фрукты, трое – бутерброды и печенье, двое – фрукты и печенье, а один – и бутерброды, и фрукты, и печенье. Сколько ребят пошли в поход?
28	В лаборатории института работают несколько человек. Каждый из них знает хотя бы один иностранный язык. 7 человек знают английский, 7 – немецкий, 8 – французский, 5 знают английский и немецкий, 4 – немецкий и французский, 3 – французский и английский, 2 человека знают все три языка. Сколько человек работает в лаборатории? Сколько из них знает только французский язык? Сколько человек знает ровно 1 язык?
29	Сколько целых чисел от 0 до 999 не делятся ни на 5, ни на 7, ни на 11?