§ 16. Равномерная сходимость последовательностей и рядов

16.1. Рассмотрим произвольное множество X и последовательность функций f_n, определенных на X. Говорят, что последовательность f_n *сходится поточечно на* X к функции f, если $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ для каждого $x \in X$. Иначе говоря, последовательность f_n сходится поточечно на X к f, если

$$(\forall x \in X)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Ясно, что в этом утверждении требуемый номер n_0 зависит, вообще говоря, от выбора точки x. Вместе с тем встречаются ситуации, в которых можно выбрать n_0 не зависящим от x, т. е. подходящим для любого $x \in X$, или годным **в равной мере** для всех $x \in X$. Это обстоятельство приводит к определению равномерной сходимости последовательности функций.

16.2. Определение. Говорят, что последовательность функций f_n *сходится равномерно на множестве* X к функции f, если

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\forall x \in X)\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Ясно, что при равномерной сходимости f_n к f выбор номера n_0 **не зависит** от x.

Факт равномерной сходимости последовательности функций f_n к функции f обозначают символом $f_n \rightrightarrows f$.

Нетрудно понять, что если функциональная последовательность сходится к некоторой функции равномерно, то она сходится к ней и поточечно, так что функциональная последовательность может равномерно сходиться только к своему поточечному пределу.

Отметим, что если множества X и X_1 отличаются лишь на конечное множество, то равномерная сходимость на одном из них равносильна равномерной сходимости на другом.

16.3. Устанавливать факт равномерной сходимости функциональной последовательности удобно и эффективно с помощью равномерной нормы.

Пусть φ — ограниченная функция на множестве X. Величину

$$\sup_{x\in X} |\varphi(x)|$$

называют *равномерной нормой функции* φ. Будем обозначать ее символом $\|\varphi\|$.

16.4. Утверждение. *Последовательность функций f_n сходится равномерно на множестве X к функции f в том и только в том случае, если $\|f_n - f\| \to 0$.*

16.5. Изучение вопроса о равномерной сходимости последовательности функций f_n на множестве X обычно будем проводить в три этапа.

1. Находим поточечный предел последовательности $f_n(x)$ (обозначим его через $f(x)$).

2. Находим равномерную норму разности

$$\|f_n - f\| = \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)|.$$

3. Изучаем сходимость этой нормы разности к нулю. Если окажется, что $\|f_n - f\| \to 0$, то $f_n \rightrightarrows f$, а если $\|f_n - f\| \not\to 0$, то $f_n \not\rightrightarrows f$.

Замечание. Если для функциональной последовательности $f_n(x)$ удается подобрать такую числовую последовательность $a_n \geq 0$, что $|f_n(x)| \leq a_n$ для всех $x \in X$ и $n \in \mathbb{N}$, да к тому же $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то последовательность f_n сходится к нулю равномерно на множестве X.

16.6. Утверждение (критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности). *Последовательность функций f_n сходится равномерно на множестве X в том и только в том случае, если*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m \geq n_0)(\forall n \geq n_0)(\forall x \in X)\ |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon,$$

или, что равносильно,

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\forall p \geq 0)(\forall x \in X)\ |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Критерий Коши удобно использовать для доказательства отсутствия равномерной сходимости.

16.7. Пример. Исследуем, сходится ли равномерно последовательность функций $f_n(x) = x^n$ на множестве $X = [0, \alpha]$, где α — какое-либо число из промежутка $(0, 1)$.

1. Найдем поточечный предел. Поскольку $0 \leq x \leq \alpha < 1$, имеем $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$.

2. При каждом фиксированном n функция x^n как функция от x возрастает, значит, $\sup\limits_{x \in [0,\alpha]} x^n = \alpha^n$.

3. Заметим, что $x^n \leq \alpha^n$, а поскольку $\alpha < 1$, имеем $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha^n = 0$ и, следовательно, x^n сходится к нулю равномерно на $[0, \alpha]$, $0 < \alpha < 1$.

Убедимся в том, что та же последовательность $f_n(x) = x^n$ не будет равномерно сходящейся на множестве $X = [0,1]$.

1. Ясно, что

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \le x < 1, \\ 1 & \text{при } x = 1. \end{cases}$$

2. Находим, что

$$f_n(x) - f(x) = x^n - f(x) = \begin{cases} x^n & \text{при } 0 \le x < 1, \\ 0 & \text{при } x = 1. \end{cases}$$

Используя определение или основное свойство точной верхней границы, выводим, что

$$\|f_n - f\| = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = 1.$$

3. Замечаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 1 \ne 0$, следовательно, равномерной сходимости в данном случае нет.

16.8. Пример. Исследуем равномерную сходимость последовательности $f_n(x) = \dfrac{2nx}{1+n^2x^2}$ на множестве $x > 0$.

1. Находим предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2nx}{1+n^2x^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2x/n}{1/n^2 + x^2} = 0,$$

так что предельная функция $f(x)$ нулевая.

2. Для нахождения $\|f_n - f\| = \sup\limits_{x>0} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x>0} \dfrac{2nx}{1+n^2x^2}$ воспользуемся обычным способом нахождения экстремума с привлечением производной. Найдем

$$f'(x) = 2n\frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}$$

и заметим, что $f'(x) = 0$ в рассматриваемом множестве в точке $x = \dfrac{1}{n}$. Нетрудно заключить, что это точка максимума, а также точка, в которой функция на рассматриваемом множестве принимает наибольшее значение, равное $f(1/n) = 1$, так что $\sup\limits_{x>0} \dfrac{2nx}{1+n^2x^2} = 1$.

3. Замечаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 1 \ne 0$, следовательно, равномерной сходимости в данном случае нет.

16.9. Задачи. **1.** Исследовать последовательности на равномерную сходимость в указанных промежутках:

(1) $f_n(x) = x^n - x^{n+1}, \quad 0 \le x \le 1;$

(2) $f_n(x) = x^n - x^{2n}, \quad 0 \le x \le 1;$

(3) $f_n(x) = \operatorname{arctg} nx, \quad 0 < x < +\infty;$

(4) $f_n(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{n}{x}, \quad (a)\ 0 < x \le a < +\infty, \quad (b)\ 0 < x < +\infty;$

(5) $f_n(x) = e^{-nx^2}, \quad 1 \le x < +\infty;$

(6) $f_n(x) = e^{-(x-n)^2}, \quad (a) -1 \le x \le 1; \quad (b) -\infty < x < +\infty;$

(7) $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n}, \quad -\infty < x < +\infty;$

(8) $f_n(x) = \sin \dfrac{x}{n}, \quad -\infty < x < +\infty;$

(9) $f_n(x) = \dfrac{x}{n} \ln \dfrac{x}{n}, \quad 0 < x < 1;$

(10) $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{n^3 + x^3}, \quad (a)\ 0 \le x \le 1,\ (b)\ 0 \le x < +\infty;$

(11) $f_n(x) = n^2 x^2 e^{-nx}, \quad (a)\ 0 \le x < +\infty,\ (b)\ \delta \le x < +\infty,\ \delta > 0;$

(12) $f_n(x) = n \operatorname{arctg} x^n, \quad (a)\ 0 \le x < 1,\ (b)\ 0 < x < \delta,\ 0 < \delta < 1.$

2. Пусть функция $f(x)$ имеет непрерывную производную $f'(x)$ в интервале (a, b) и

$$f_n(x) = n\left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right).$$

Доказать, что $f_n(x) \rightrightarrows f'(x)$ на сегменте $[\alpha, \beta]$, где $a < \alpha < \beta < b$.

3. Пусть

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(x + \frac{i}{n}\right),$$

где $f(x)$ — непрерывная на $\mathbb{R}$ функция. Доказать, что последовательность $f_n(x)$ сходится равномерно на любом конечном сегменте $[a, b]$.

16.10. Терминология и результаты о поточечной и равномерной сходимостях функциональных последовательностей стандартным образом переносятся на функциональные ряды.

Рассмотрим произвольное множество X и последовательность функций f_n, определенных на X. Говорят, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *сходится* *поточечно на* X, если для каждого $x \in X$ числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится, т. е. существует предел числовой последовательности $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$ частичных сумм данного ряда.

Множество тех x, при которых ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится, называют его *областью сходимости.*

Говорят, что ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *сходится абсолютно*, если сходится ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$.

Утверждение 1. *Если ряд* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *сходится абсолютно, то он сходится.*

Если ряд сходится, но не абсолютно, его называют *условно сходящимся.*

Исследование области сходимости функционального ряда заключается в ответе на вопрос: при каких значениях переменной соответствующий числовой ряд сходится? Тем самым нахождение области сходимости функционального ряда основано на исследовании сходимости при каждом фиксированном x соответствующего числового ряда. Напомним основные шаги такого исследования.

В первую очередь смотрим, если это нетрудно, сходится ли к нулю общий член данного ряда, и если нет, то ряд расходится, если да, то мы продолжаем исследование сходимости ряда.

Затем констатируем, знакопостоянен ли общий член ряда, и если да, то обращаемся к признакам сравнения или основанным на них признакам Даламбера, Коши, Раабе, Гаусса или изучаем асимптотику общего члена ряда в целях возможного сравнения с общим членом сходящегося ряда. Если общий член ряда меняет знак, то смотрим на возможность применения к нему признаков Дирихле и Абеля. Абсолютную сходимость изучаем как сходимость знакопостоянного ряда. Для доказательства расходимости можно использовать критерий Коши.

Напомним формулировки признаков сходимости знакопостоянных рядов.

Утверждение 2 (признак сравнения). *Рассмотрим два ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ *с положительным членами. Предположим, что* $x_n \le y_n$ *для всех (далеких) номеров* n. *Тогда если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ *сходится, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *также сходится, а если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *расходится, то и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ *расходится.*

Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = K$ *и* $0 < K < \infty$, *то сходимость ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *равносильна сходимости ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$. *Так будет, в частности, если* $x_n \sim y_n$ *при* $n \to \infty$.

На сравнении с геометрической прогрессией (быстро сходящимся рядом) основаны признаки Даламбéра и Коши.

Утверждение 3 (признак Даламбера). *Предположим, что* $x_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, *и существует* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = d$. *Тогда если* $d < 1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *сходится, если* $d > 1$, *то расходится, если же* $d = 1$, *то признак не дает информации о сходимости ряда.*

Утверждение 4 (признак Коши). *Предположим, что* $x_n \ge 0$, $n \in \mathbb{N}$, *и существует* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = c$. *Тогда если* $c < 1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *сходится, если* $c > 1$, *то расходится, если же* $c = 1$, *то признак не дает информации о сходимости ряда.*

Более тонкими являются признаки, основанные на сравнении с рядами $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Утверждение 5 (признак Раабе). *Предположим, что для ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *существует предел*

$$p = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right).$$

Тогда если $p > 1$, *то исходный ряд сходится, если* $p < 1$, *то расходится, если же* $p = 1$, *то признак не дает информации о сходимости ряда.*

Утверждение 6 (признак Гаусса). *Если* $x_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, *и*

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \alpha + \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma_n}{n^{1+\gamma}},$$

где $|\gamma_n| < c$, $\gamma > 0$, *то*

(а) *при* $\alpha > 1$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *сходится, при* $\alpha < 1$ *расходится;*

(б) *при* $\alpha = 1$ *данный ряд сходится, если* $\beta > 1$, *и расходится, если* $\beta \leq 1$.

Утверждение 7 (признаки Абеля и Дирихле). *Рассмотрим числовые последовательности* a_n, b_n *и предположим, что последовательность* a_n *монотонна.*

Допустим, что выполнены условия какого-либо из следующих пунктов:

(α) *имеет место сходимость* $a_n \to 0$ *при* $n \to \infty$, *а частичные суммы ряда, составленного из* b_n, *ограничены, т. е. существует постоянная* $C > 0$ *такая, что*

$$\left| \sum_{k=1}^{n} b_k \right| \leq C$$

при всех $n \in \mathbb{N}$;

(β) *последовательность* a_n *ограничена, т. е. существует такая постоянная* $K > 0$, *что* $|a_n| \leq K$ *при всех* $n \in \mathbb{N}$, *а ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходится.*

Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

сходится.

При выполнении условия (α) говорят о *признаке Дирихле*, условия (β) — о *признаке Абеля.*

16.11. Задачи. Определить области сходимости (абсолютной и условной) следующих функциональных рядов:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$; **(2)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1 + x^{2n}}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-\ln x^2}$; **(4)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-nx^2}$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{2x}{x^2+1} \right)^n$; (6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+4} \left(\frac{x+2}{2x+1} \right)^n$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{\sqrt[3]{n}}$; (8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} e^{-n\sin x}$;

(9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\cos \frac{\pi x}{n} \right)^{n^3}$; (10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin(\pi \sqrt{n^2+x^2})$;

(11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^2}{n} + x \right)^n$; (12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n n^{-x}$;

(13) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2+\sqrt{n}}$; (14) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2} \right)^n (e^{x/n}-1)^n$.

16.12. Говорят, что функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *сходится равномерно на множестве* X, если последовательность его частичных сумм сходится равномерно на X. Иначе говоря, ряд сходится равномерно, если

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\forall x \in X) \quad \left| \sum_{k=n}^{\infty} f_k(x) \right| < \varepsilon.$$

16.13. Утверждение 1 (критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда). *Для равномерной сходимости функционального ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *на множестве* X *необходимо и достаточно, чтобы*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\forall p \geq 0)(\forall x \in X) \left| \sum_{k=n}^{n+p} f_k(x) \right| < \varepsilon.$$

16.14. Исследовать равномерную сходимость функционального ряда путем изучения равномерной сходимости его частичных сумм трудно ввиду того, что для этой последовательности обычно трудно вывести подходящую краткую форму записи. Как и в случае числовых рядов, для исследования равномерной сходимости функциональных рядов мы будем использовать соответствующие признаки.

Сначала ограничимся рассмотрением рядов с положительными членами.

Утверждение 2 (признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда). *Рассмотрим функциональный ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad x \in X,$$

такой, что $f_n(x) > 0$ *при всех* $x \in X$ *для любого* $n \in \mathbb{N}$. *Если числовой ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|,$$

составленный из (равномерных) норм данного ряда, сходится, то исходный ряд сходится равномерно на X.

Этот признак можно сформулировать также в такой форме.

Утверждение. *Рассмотрим функциональный ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad x \in X,$$

такой, что $f_n(x) > 0$ *при всех* $x \in X$ *для любого* $n \in \mathbb{N}$. *Если существует сходящийся числовой ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$, *мажорирующий исходный ряд, т. е. такой, что* $f_n(x) \le c_n$, $n \in \mathbb{N}$, *для всех* $x \in X$, *то данный ряд сходится равномерно на множестве* X.

Ясно, что признаком Вейерштрасса можно пользоваться для исследования абсолютной равномерной сходимости (знакопеременного) функционального ряда, т. е. равномерной сходимости ряда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$.

16.15. Пример. Пользуясь признаком Вейерштрасса, докажем равномерную сходимость функционального ряда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^2}$ на множестве $(0, \infty)$.

Найдем равномерную норму общего члена ряда, т. е. величину $a_n = \sup\limits_{x \in (0,\infty)} \left| \dfrac{x}{1+n^4x^2} \right|$. Для этого найдем производную и приравняем ее к нулю:

$$\left(\frac{x}{1+n^4x^2} \right)' = \frac{1-n^4x^2}{(1+n^4x^2)^2} = 0.$$

Отсюда $x^2 = \dfrac{1}{n^4}$, или $x = \pm\dfrac{1}{n^2}$. Ясно, что $a_n = \dfrac{1}{2n^2}$. Поскольку ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ сходится, наш ряд сходится равномерно на $(0, \infty)$.

16.16. Задачи. Пользуясь признаком Вейерштрасса, доказать равномерную сходимость следующих функциональных рядов на указанных промежутках:

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1+n^{3/2}x^2}, \quad -\infty < x < \infty;$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} nx}{x^4 + n\sqrt[3]{n}}, \quad 0 < x < \infty;$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{nx}}, \quad 1 \le x < \infty;$

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^3 e^{-n^2 x}, \quad \delta < x < \infty,\ \delta > 0;$

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2}, \quad 0 < x < \infty;$

(6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x^4} \operatorname{arctg} \frac{x}{n}, \quad -\infty < x < \infty.$

16.17. При анализе равномерной сходимости функциональных рядов, общий член которых не обязательно положительная функция, используют признаки Абеля и Дирихле.

16.18. Утверждение. *Пусть f_n, g_n — заданные на множестве X последовательности функций. Предположим, что при каждом фиксированном $x \in X$ последовательность $f_n(x)$ монотонна.*

Допустим, что выполнены условия какого-либо из следующих пунктов:

(α) имеет место равномерная сходимость $f_n \rightrightarrows 0$ при $n \to \infty$, а частичные суммы ряда, составленного из $g_n(x)$, равномерно ограничены, т. е. существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$\left|\sum_{k=1}^{n} g_k(x)\right| \le C$$

при всех $x \in X$ и $n \in \mathbb{N}$;

(β) *последовательность f_n равномерно ограничена, т. е. существует такая постоянная $K > 0$, что $|f_n(x)| \le K$ при всех $x \in X$ и $n \in \mathbb{N}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ равномерно сходится на множестве X.*

Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) g_n(x)$$

сходится равномерно на X.

При выполнении условия (α) говорят о *признаке Дирихле*, а условия (β) — о *признаке Абеля.*

16.19. Пример. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n}$ на равномерную сходимость на отрезках $[\alpha, 2\pi - \alpha]$, где $0 < \alpha < \pi$, и $[0, 2\pi]$.

Заметим, что общий член ряда сходится к нулю довольно медленно, так что попытка ограничить его модуль сверху и воспользоваться признаком Вейерштрасса ничего не дает.

Обратимся к признаку Дирихле. Ясно, что последовательность функций $f_n(x) = \dfrac{1}{n}$ монотонна и сходится к нулю равномерно (на любом множестве). Рассмотрим сумму $\sum\limits_{k=1}^{n} \sin kx$. Если мы установим ее равномерную ограниченность, то докажем равномерную сходимость данного ряда. Напомним, что

$$\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}.$$

Если $x \in [\alpha, 2\pi - \alpha]$, где $0 < \alpha < \pi$, то $\sin \dfrac{x}{2} > \sin \dfrac{\alpha}{2} > 0$, поэтому $|S_n| \le \dfrac{1}{\sin \alpha/2}$. Итак, суммы S_n равномерно ограничены на $[\alpha, 2\pi - \alpha]$, следовательно, по признаку Дирихле ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n}$ сходится равномерно на этом промежутке.

На промежутке $[0, 2\pi]$ уже нет равномерной ограниченности сумм S_n, поэтому воспользоваться признаком Дирихле невозможно, но и гарантировать на его основе отсутствие равномерной сходимости тоже нельзя — признак Дирихле дает лишь достаточное условие сходимости. Для доказательства отсутствия равномерной сходимости на

$[0, 2\pi]$ воспользуемся критерием Коши. А именно, попробуем установить, что

$$(\exists\varepsilon > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\exists n_1 \geq n)(\exists p \geq 0)(\exists x \in [0, 2\pi]) \ \left|\sum_{k=n_1}^{n_1+p} \frac{\sin kx}{k}\right| \geq \varepsilon.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, а значит, взяв, например, $\varepsilon = 1/2$ и для любого $n \in \mathbb{N}$ положив, например, $n_1 = n$ и $p = n$, имеем $\sum\limits_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2}$. Возьмем теперь x настолько малым, что $\sin kx \geq 1/2$ при k от n до $2n$ (например, можно взять $x = \pi/6n$). Тогда

$$\sum_{k=n}^{2n} \frac{\sin kx}{k} \geq \frac{1}{2} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{4}.$$

Таким образом, взяв $\varepsilon = 1/4$, мы для любого $n \in \mathbb{N}$ можем подобрать такие $n_1 \geq n$, $p \geq 0$, $x \in [0, 2\pi]$, что $\left|\sum\limits_{k=n_1}^{n_1+p} \frac{\sin kx}{k}\right| \geq \varepsilon$, значит, равномерной сходимости ряда на $[0, 2\pi]$ нет.

16.20. Задачи. 1. Исследовать равномерную сходимость рядов на указанных промежутках.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x + \sqrt{n}}, \quad 0 \leq x < +\infty;$

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n + \sin x}, \quad -\infty < x < +\infty;$

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \frac{x^n}{x^n + 1}, \quad 0 \leq x < +\infty;$

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \sin x}{\sqrt[3]{n + x}}, \quad 0 \leq x < +\infty;$

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n \arcsin x}, \quad E_1 = (0, 1/2),\ E_2 = (1/2, 1);$

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n \sin^2 x}, \quad E_1 = (0, \pi/4],\ E_2 = (\pi/4, \pi/2);$

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2 x}\right), \quad E_1 = (0, 1),\ E_2 = [1, 2];$

(8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}(nx)}{1+n^2x^2},\quad E_1=(0,1),\ E_2=(1,+\infty);$

(9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}x^2e^{-nx^2},\quad E_1=(\delta,+\infty),\ \delta>0,\quad E_2=(0,+\infty);$

(10) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{\sqrt{n}}e^{-x^2n},\quad E_1=(\delta,+\infty),\ \delta>0,\quad E_2=(0,+\infty);$

(11) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n^2x^2}\operatorname{arctg}(nx),\quad E_1=(0,+\infty),\ E_2=(\delta,+\infty),\ \delta>0;$

(12) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x\sin\sqrt{x/n}}{n+x},\quad E_1=(0,\delta),\ E_2=(0,+\infty).$

2. Доказать, что если ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ сходится абсолютно в точках a и b, а функции $u_n(x)$, $n\in\mathbb{N}$, монотонны на $[a,b]$, то этот ряд сходится абсолютно и равномерно на $[a,b]$.

3. Доказать, что если ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, то ряд Дирихле $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$ сходится равномерно на множестве $[0,+\infty)$.

4. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$, где

$$u_n(x)=\begin{cases}0, & \text{если } 0\le x\le 2^{-(n+1)},\\ \dfrac{1}{n}\sin^2(2^{n+1}\pi x), & \text{если } 2^{-(n+1)}<x<2^{-n},\\ 0, & \text{если } 2^{-n}\le x\le 1,\end{cases}$$

сходится абсолютно и равномерно на отрезке $[0,1]$, но его нельзя мажорировать сходящимся числовым рядом с неотрицательными членами.

16.21. Ответы. 16.9. (1) Сходится равномерно; (2) сходится неравномерно; (3) сходится неравномерно; (4) (a) сходится неравномерно, (b) сходится равномерно; (5) сходится равномерно; (6) (a) сходится равномерно, (b) сходится неравномерно; (7) сходится равномерно; (8) сходится неравномерно; (9) сходится неравномерно; (10) (a) сходится равномерно, (b) сходится неравномерно; (11) (a) сходится неравномерно, (b) сходится равномерно; (12) (a) сходится неравномерно, (b) сходится равномерно.

16.11. (1) Сходится абсолютно при $x>0$; (2) сходится абсолютно при $|x|\ne 1$; (3) сходится абсолютно при $|x|>\sqrt{e}$; (4) сходится абсолютно при $x\ne 0$; (5) сходится абсолютно при $|x|\ne 1$, условно при $x=-1$;

(6) сходится абсолютно при $|x| > 1$, условно при $x = -1$; (7) сходится условно при $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; (8) сходится абсолютно на интервалах $(2k\pi, (2k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, и условно в точках $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; (9) сходится абсолютно при $x \neq 0$; (10) сходится условно при всех $x \in \mathbb{R}$; (11) сходится абсолютно при $|x| < 1$; (12) сходится абсолютно при $x > 1$; (13) сходится условно при всех $x \in \mathbb{R}$; (14) сходится абсолютно при $|x| < 2$.

16.20. (1) Сходится равномерно; (2) сходится равномерно; (3) сходится равномерно; (4) сходится равномерно; (5) сходится неравномерно на E_1 и равномерно на E_2; (6) сходится неравномерно на E_1 и равномерно на E_2; (7) сходится неравномерно на E_1 и равномерно на E_2; (8) сходится неравномерно на E_1 и равномерно на E_2; (9) сходится равномерно на E_1 и неравномерно на E_2; (10) сходится равномерно на E_1 и неравномерно на E_2; (11) сходится неравномерно на E_1 и равномерно на E_2; (12) сходится равномерно на E_1 и неравномерно на E_2.

§ 17. Свойства равномерно сходящихся последовательностей и рядов

17.1. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов используется при ответе на следующий вопрос. Допустим, что каждая из функций, составляющих последовательность или ряд, обладает каким-то свойством, связанным с предельным переходом, например имеет в какой-то точке предел, или непрерывна, или дифференцируема. Будет ли это свойство наследоваться предельной функцией?

17.2. Утверждение 1. *Пусть $f_n(x)$ — последовательность функций, определенных на множестве X, такая, что в некоторой точке x_0 существует $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x)$ при каждом $n \in \mathbb{N}$. Пусть существует такая окрестность U точки x_0, что f_n сходится к f равномерно на U. Тогда существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ и*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x).$$

Утверждение 2. *Пусть $f_n(x)$ — последовательность функций, ограниченных на множестве X, такая, что каждая функция $f_n(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in X$, и существует окрестность U точки x_0 такая, что f_n сходится к f равномерно на U. Тогда f непрерывна в точке x_0.*

Утверждение 3. *Если последовательность f_n состоит из непрерывных на множестве X функций и равномерно на X сходится к функции f, то предельная функция f непрерывна на X.*

Утверждение 4. *Пусть последовательность f_n дифференцируемых функций сходится на отрезке $[a,b]$ к функции f, а последовательность производных f_n' сходится на $[a,b]$ равномерно. Тогда функция f дифференцируема на $[a,b]$ и*

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x), \quad x \in [a,b].$$

Утверждение 5. *Пусть последовательность f_n состоит из интегрируемых на $[a,b]$ функций и равномерно на $[a,b]$ сходится к функции f. Тогда f интегрируема на $[a,b]$ и*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Мы сформулировали связанные с равномерной сходимостью свойства функциональных последовательностей. Их переформулировки для рядов очевидны и могут быть сделаны читателем самостоятельно.

17.3. Пример. Покажем, что функция $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n^3}$ непрерывна и имеет непрерывную производную на множестве $\mathbb{R}$.

Действительно, при любом $x \in \mathbb{R}$, очевидно, $\left|\dfrac{\sin nx}{n^3}\right| \le \dfrac{1}{n^3}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3}$ сходится, значит, ряд сходится на $\mathbb{R}$ равномерно. Поскольку он состоит из непрерывных функций, то и сумма его непрерывна.

Найдем производную общего члена ряда: $\left(\dfrac{\sin nx}{n^3}\right)' = \dfrac{\cos nx}{n^2}$. Она непрерывна на $\mathbb{R}$. Поскольку $\left|\dfrac{\cos nx}{n^2}\right| \le \dfrac{1}{n^2}$, а числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ сходится, по признаку Вейерштрасса ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n^2}$ из производных сходится равномерно на $\mathbb{R}$ и его сумма представляет собой непрерывную на $\mathbb{R}$ функцию. Тем самым функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}$.

17.4. Задачи. 1. Доказать, что дзета-функция Римана

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

непрерывна в области $x > 1$ и имеет в этой области непрерывные производные всех порядков.

2. Доказать, что функция $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 x}$ бесконечно дифференцируема при $x > 0$.

3. Показать, что последовательность $f_n(x) = \dfrac{1}{n} \operatorname{arctg} x^n$ сходится равномерно на $\mathbb{R}$, но $(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x))'_{x=1} \neq \lim\limits_{n\to\infty} f'_n(1)$.

4. Показать, что последовательность

$$f_n(x) = x^3 + \frac{1}{n} \sin n \left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

сходится равномерно на множестве $\mathbb{R}$, но $(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x))' \neq \lim\limits_{n\to\infty} f'_n(x)$.

5. Показать, что последовательность $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ сходится на $[0,1]$, но

$$\int\limits_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, dx \neq \lim_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f_n(x)\, dx.$$

6. Показать, что последовательность $f_n(x) = nx(1-x^2)^n$ сходится на $[0,1]$ к непрерывной функции, однако

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f_n(x)\, dx \neq \int\limits_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, dx.$$

7. Показать, что последовательность $f_n(x) = nx(1-x)^n$ сходится неравномерно на $[0,1]$, однако

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f_n(x)\, dx = \int\limits_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, dx.$$

8. Можно ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{n^2}$ дифференцировать почленно?

9. Может ли последовательность разрывных функций сходиться равномерно к непрерывной функции?

10. Показать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin 2^n \pi x}{2^n}$ сходится равномерно на $\mathbb{R}$, но его нельзя почленно дифференцировать ни на каком промежутке.

11. Найти пределы:

$$\textbf{(1)}\ \lim_{x\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{1+n^2x^2};\quad \textbf{(2)}\ \lim_{x\to 1-0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\frac{x^n}{x^n+1}.$$

§ 18. Степенные ряды

18.1. Функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n, \tag{18.1}$$

где c_n — числовая последовательность, $a\in\mathbb{R}$ — фиксированное число, а $z\in\mathbb{R}$, называют *степенным рядом* с коэффициентами c_n.

Выполнив замену переменных $z-a=x$ в ряде (18.1), получим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \tag{18.2}$$

свойства которого равносильны свойствам ряда (18.1). Мы приведем все необходимые утверждения для ряда (18.2), их переформулировки для ряда (18.1) очевидны и могут быть сделаны читателем самостоятельно.

18.2. Утверждение 1. *Если степенной ряд* (18.2) *сходится при некотором* $x_0\neq 0$, *то он абсолютно сходится при любом таком* x, *что* $|x|<|x_0|$, *а если он расходится при некотором* $x_1\neq 0$, *то будет расходящимся при любом таком* x, *что* $|x|>|x_1|$.

Утверждение 2. *Для любого степенного ряда* (18.2) *существует такое число* $R\geq 0$ (*возможно,* $R=+\infty$), *что ряд* (18.2) *абсолютно сходится в интервале* $(-R,R)$, *если* $R\neq 0$. *Этот интервал называют интервалом сходимости ряда* (18.2).

Если $R=0$, *то ряд* (18.2) *сходится в одной точке* $x=0$.

Если $R>0$, *то для любого* $R_1\in(0,R)$ *ряд* (18.2) *сходится абсолютно и равномерно на сегменте* $[-R_1,R_1]$.

Утверждение 3. *Если* R — *радиус сходимости степенного ряда* (18.2), *причем* $0<R<+\infty$, *и этот ряд сходится в точке* R, *то он сходится равномерно на отрезке* $[0,R]$ *и его сумма непрерывна на этом отрезке.*

Утверждение 4. *Радиус сходимости* R *степенного ряда* (18.2) *может быть найден по формуле*

$$R=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}}.$$

Если существует (конечный или бесконечный) предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right|$, *то*

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|.$$

18.3. Задачи. Найти радиус сходимости и интервал сходимости степенных рядов, исследовать их на сходимость и абсолютную сходимость на концах интервала сходимости:

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^n (x+2)^n$; **(2)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$;

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{a^n+b^n}$, $a>0,\ b>0$; **(4)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a-1)\ldots(a-(n-1))}{n!}x^n$.

18.4. Пусть f — бесконечно дифференцируемая в некоторой окрестности точки x_0 функция. Степенной ряд

$$f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \tag{18.3}$$

называют *рядом Тейлора* функции f.

Если $x_0 = 0$, то ряд (18.3) называют *рядом Маклорена.*

Сходимость ряда Тейлора к значению функции f в точке x зависит от свойств функции f и может быть проанализирована путем изучения сходимости к нулю остатка в формуле Тейлора. Нас здесь будут интересовать разложения в ряд Тейлора конкретных функций.

18.5. При разложении в ряд Тейлора (или Маклорена) полезно помнить следующие разложения (в которых для удобства записи полагаем $0^0 = 1$):

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}, \quad x\in\mathbb{R}, \tag{18.4}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad x\in\mathbb{R}, \tag{18.5}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x\in\mathbb{R}, \tag{18.6}$$

$$\operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x\in\mathbb{R}, \tag{18.7}$$

$$\operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{18.8}$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n, \quad x \in (-1,1), \tag{18.9}$$

$$\begin{gathered} \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \quad x \in [-1,1), \\ \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, \quad x \in (-1,1], \end{gathered} \tag{18.10}$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in (-1,1]. \tag{18.11}$$

18.6. Задачи. Используя формулы п. 18.5, разложить следующие функции в ряд Маклорена и найти радиусы сходимости полученных рядов:

(1) $\dfrac{x^2}{(1+x)^2}$; **(2)** $\dfrac{1}{(1-x^3)^2}$;

(3) $(1+x)e^{-x}$; **(4)** $x^2 \ln(4+x^2)$;

(5) $(1+x^2) \operatorname{arctg} x$; **(6)** $\dfrac{1}{x^2-2x-3}$;

(7) $\dfrac{5-2x}{x^2-5x+6}$; **(8)** $\dfrac{1}{(x^2+2)^2}$;

(9) $\ln\left(\dfrac{3-2x}{2+3x}\right)$; **(10)** $\ln \dfrac{2+x^2}{\sqrt{1-2x^2}}$;

(11) $\cos^2 x$; **(12)** $\sin^3 x$.

18.7. Поскольку степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$, составленный из производных данного ряда, сходятся равномерно на каждом замкнутом промежутке, содержащемся внутри интервала сходимости данного ряда, функция $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ дифференцируема в этом интервале и

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad \int f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} + C.$$

Указанное обстоятельство можно использовать при разложении функции в ряд Тейлора: сначала продифференцировать или проинтегрировать ее, результат разложить в ряд, а затем вернуться к исходной функции.

18.8. Пример. Разложить в ряд Маклорена функцию

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x}.$$

Найдем производную данной функции:

$$f'(x) = \left(\operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x}\right)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Разложим производную в ряд, используя разложение (18.9):

$$-\frac{1}{1+x^2} = -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

Интегрируя почленно последнее равенство, имеем

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + C. \tag{18.12}$$

Для нахождения константы C подставим в (18.12) значение $x = 0$. Получим $f(0) = \operatorname{arctg} 1 = \pi/4 = C$. Подставив найденное значение константы в равенство (18.12), приходим к искомому разложению.

18.9. Задачи. 1. Разложить в ряд Маклорена следующие функции и найти радиусы сходимости рядов:

(1) $\operatorname{arctg} \dfrac{2x-3}{x+6}$; **(2)** $\operatorname{arctg} \dfrac{2+x^2}{2-x^2}$;

(3) $\operatorname{arctg}(x + \sqrt{1+x^2})$; **(4)** $\arcsin \dfrac{2x}{1+x^2}$;

(5) $x \ln(x + \sqrt{x^2+2})$; **(6)** $\ln(x^3 + \sqrt{9+x^6})$;

(7) $x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$; **(8)** $2x \operatorname{arctg} x - \ln(1+x^2)$;

(9) $\dfrac{1}{4} \ln \dfrac{1+x}{1-x} + \dfrac{1}{2} \operatorname{arctg} x$; **(10)** $x^2 \arccos 2x$.

2. Показать, что функция

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n!}$$

является решением дифференциального уравнения $y' - xy = 0$.

3. Показать, что функция

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}$$

является решением дифференциального уравнения $xy'' + y' - y = 0$.

4. Применяя почленное дифференцирование, вычислить сумму ряда

$$x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots .$$

5. Применяя почленное интегрирование, вычислить сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}.$$

6. Вычислить сумму ряда:

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$; **(2)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n+1}$;

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$; **(4)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n$.

18.10. Ответы. 18.3. (1) $R = 1$, $0 < x < 2$, при $x = 0$ и $x = 2$ абсолютно расходится; (2) $R = e$, $-e < x < e$, при $x = \pm e$ расходится; (3) $R = \max(a, b)$, $-R < x < R$, при $x = \pm R$ расходится; (4) $R = 1$, $-1 < x < 1$, при $x = -1$ сходится абсолютно, если $a \geq 0$, и расходится, если $a < 0$, при $x = 1$ сходится абсолютно, если $a \geq 0$, и условно, если $-1 < a < 0$.

18.6. (1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^{n+2}$, $R = 1$; (2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1) x^{3n}$, $R = 1$; (3) $1 + \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n-1)}{n!} x^n$, $R = \infty$; (4) $x^2 \ln 4 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2(n+1)}}{n 4^n}$, $R = 2$; (5) $x + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{4n^2-1} x^{2n+1}$, $R = 1$; (6) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4}((-1)^{n+1} - 3^{-(n+1)}) x^n$, $R = 1$; (7) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (2^{-(n+1)} + 3^{-(n+1)}) x^n$, $R = 2$; (8) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{2^{n+2}} x^{2n}$, $R = \sqrt{2}$;

(9) $\ln\frac{3}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\left(-\frac{3}{2}\right)^n-\left(\frac{2}{3}^n\right)\frac{x^n}{n}\right.$, $R=\frac{2}{3}$; (10) $\ln 2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{-n}+2^{n-1}}{n}x^{2n}$, $R=\frac{1}{\sqrt{2}}$; (11) $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}$, $R=\infty$; (12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}3(3^{2n}-1)}{4(2n+1)!}x^{2n+1}$, $R=\infty$.

18.9. 1. (1) $-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{3^{2n+1}(2n+1)}$, $R=3$; (2) $\frac{\pi}{4}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n+2}}{(2n+1)2^{2n+1}}$, $R=\sqrt{2}$; (3) $\frac{\pi}{4}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2(2n-1)}x^{2n-1}$, $R=1$; (4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$, $R=1$; (5) $x\ln\sqrt{2}+\frac{x^2}{\sqrt{2}}+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1/2}}\cdot\frac{(2n03)!!}{(2n-2)!!}\cdot\frac{x^{2n}}{2n-1}$, $R=\sqrt{2}$; (6) $\ln 3+\frac{x^3}{3}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!3^{2n+1}(2n+1)}x^{6n+3}$, $R=\sqrt[3]{3}$; (7) $1+\frac{x^2}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}\cdot\frac{x^{2n+2}}{2n+1}$, $R=1$; (8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1)}}{n(2n-1)}x^{2n}$, $R=1$; (9) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$, $R=1$; (10) $\frac{\pi}{2}x^2-2x^3-2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!x^{2n+3}}{2n+1}$, $R=\frac{1}{2}$.

4. $\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$, $|x|<1$. **5.** $\frac{1+x}{(1-x)^3}$.

6. (1) x, $x>0$; (2) $\frac{x^2}{(1-x)^2}$, $|x|<1$; (3) $1+\frac{1-x}{x}\ln(1-x)$, $|x|\le 1$; (4) $\frac{x(1+4x+x^2)}{(1-x)^4}$, $|x|<1$.

§ 19. Интеграл Римана, зависящий от параметра

19.1. Пусть дана функция $f(x,\alpha)$, $\alpha\in A\subset\mathbb{R}$, $x\in[a,b]$, интегрируемая на $[a,b]$ как функция от x при каждом фиксированном $\alpha\in A$. Предположим, что f как функция от α непрерывна, или дифференцируема, или интегрируема на A при каждом фиксированном $x\in[a,b]$. Будет ли имеющееся у f свойство наследоваться функцией

$$I(\alpha)=\int\limits_a^b f(x,\alpha)\,dx,$$

представляющей собой интеграл, зависящий от параметра α?

19.2. Утверждение. *Пусть функция $f(x,\alpha)$ при каждом фиксированном $\alpha\in A$ интегрируема на $[a,b]$ как функция от x и при $\alpha\to\alpha_0$ сходится равномерно относительно $x\in[a,b]$ к предельной функции $g(x)$. Тогда g интегрируема на $[a,b]$ и имеет место равенство*

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0}I(\alpha)=\lim_{\alpha\to\alpha_0}\int\limits_a^b f(x,\alpha)\,dx=\int\limits_a^b\lim_{\alpha\to\alpha_0}f(x,\alpha)\,dx=\int\limits_a^b g(x)\,dx. \quad (19.1)$$

19.3. Утверждение. *Пусть функция $f(x,\alpha)$ непрерывна как функция двух переменных $x \in [a,b]$, $\alpha \in [c,d]$, где $a,b,c,d \in \mathbb{R}$. Тогда функция $I(\alpha) = \int\limits_a^b f(x,\alpha)\,dx$ непрерывна на промежутке $[c,d]$.*

19.4. Утверждение. *Пусть функции $f(x,\alpha)$, $\dfrac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)$ непрерывны как функции двух переменных $x \in [a,b]$, $\alpha \in [c,d]$, где $a,b,c,d \in \mathbb{R}$. Тогда функция $I(\alpha) = \int\limits_a^b f(x,\alpha)\,dx$ непрерывно дифференцируема в каждой точке $\alpha \in [c,d]$ и*

$$I'(\alpha) = \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)\,dx. \tag{19.2}$$

19.5. Утверждение. *Пусть функция $f(x,\alpha)$ непрерывна как функция двух переменных $x \in [a,b]$, $\alpha \in [c,d]$, где $a,b,c,d \in \mathbb{R}$. Тогда функция $I(\alpha) = \int\limits_a^b f(x,\alpha)\,dx$ интегрируема на промежутке $[c,d]$ и*

$$\int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,\alpha)\,dx \right) d\alpha = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,\alpha)\,d\alpha \right) dx.$$

19.6. Утверждение. *Пусть функция $f(x,\alpha)$ определена, непрерывна и имеет непрерывную производную по α в прямоугольнике $x \in [a,b]$, $\alpha \in [c,d]$, и пусть дифференцируемые на $[c,d]$ функции φ,ψ таковы, что $a \le \varphi(\alpha), \psi(\alpha) \le b$, для всех $\alpha \in [c,d]$. Тогда функция*

$$I(\alpha) = \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} f(x,\alpha)\,dx$$

дифференцируема и имеет место равенство

$$I'(\alpha) = \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} f'_\alpha(x,\alpha)\,dx + \psi'(\alpha) f(\psi(\alpha),\alpha) - \varphi'(\alpha) f(\varphi(\alpha),\alpha). \tag{19.3}$$

19.7. Сформулированные выше утверждения используют для установления непрерывной зависимости интегралов от параметра, а также для нахождения самих интегралов. Последнее делается, например, так. Если, продифференцировав интеграл по параметру, мы сумели вычислить полученный интеграл, то тем самым приходим к дифференциальному уравнению относительно искомого интеграла как функции от параметра. Решая его, мы находим исходный интеграл.

19.8. Задачи. 1. Доказать, что функция $I(\alpha)=\int\limits_0^1 \sin^2 \alpha x^2\, dx$ непрерывна на $\mathbb{R}$.

2. Доказать, что функция $I(\alpha)=\int\limits_0^1 \operatorname{sign}(x-\alpha)\, dx$ непрерывна на $\mathbb{R}$.

3. Найти пределы:

(1) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int\limits_0^1 \sqrt{1+\alpha^2x^4}\, dx$; **(2)** $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int\limits_0^1 \sqrt{x^2+\alpha^2}\, dx$;

(3) $\lim\limits_{\alpha\to 1}\int\limits_2^4 \dfrac{x\, dx}{1+x^2+\alpha^2}$; **(4)** $\lim\limits_{\alpha\to 1}\int\limits_0^1 x^2 e^{\alpha x^3}\, dx$.

4. Выяснить, справедливо ли равенство

$$\lim_{\alpha\to 0}\int\limits_0^1 f(x,\alpha)\, dx = \int\limits_0^1 \lim_{\alpha\to 0} f(x,\alpha)\, dx,$$

если $f(x,\alpha)=\dfrac{x}{\alpha^2}e^{-x^2/\alpha^2}$.

5. Найти $I'(\alpha)$, если

(1) $I(\alpha)=\int\limits_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}\, dx$, **(2)** $I(\alpha)=\int\limits_0^{\alpha} \dfrac{\ln(1+\alpha x)}{x}\, dx$.

6. Найти $I''(x)$, если

$$I(x)=\frac{1}{h^2}\int\limits_0^h \left(\int\limits_0^h f(x+\xi+\eta)\, d\eta\right) d\xi,$$

где f — непрерывная функция и $h>0$.

7. Найти $I''(x)$, если

$$I(x) = \int\limits_a^b f(y)|x-y|\,dy,$$

где $a<b$ и $f(y)$ — непрерывная на $[a,b]$ функция.

8. С помощью дифференцирования интеграла $\displaystyle\int\limits_0^b \frac{dx}{x^2+\alpha^2}$ по параметру α, где $\alpha>0$, вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_0^b \frac{dx}{(x^2+\alpha^2)^2}$.

9. Применяя дифференцирование по параметру, вычислить следующие интегралы:

(1) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \ln(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)\,dx$; **(2)** $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} \ln(1-2a\cos x + a^2)\,dx$;

(3) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{arctg}(a\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}\,dx$; **(4)** $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\cdot\frac{dx}{\cos x}$ $(|a|<1)$.

10. Применяя интегрирование под знаком интеграла, вычислить интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}\,dx \quad (a>0,\ b>0).$$

11. Пользуясь формулой $\displaystyle\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \int\limits_0^1 \frac{dy}{1+x^2y^2}$, вычислить интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

12. Вычислить интеграл

$$\int\limits_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}\,dx, \quad 0<a<b.$$

19.9. Ответы. 19.8. 3. (1) 1; (2) 1; (3) $\frac{\ln 3}{2}$; (4) $\frac{e-1}{3}$. **4.** Нет. **5.** (1) $-(e^{\alpha|\sin\alpha|}\sin\alpha+e^{\alpha|\cos\alpha|}\cos\alpha)+\int\limits_{\sin\alpha}^{\cos\alpha}\sqrt{1-x^2}e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}\,dx$; (2) $\frac{2}{\alpha}\ln(1+\alpha^2)$. **6.** $\frac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h^2}$. **7.** $2f(x)$, если $x\in(a,b)$, и 0, если $x\notin(a,b)$. **8.** $\frac{1}{2\alpha^3}\operatorname{arctg}\frac{b}{\alpha}+\frac{b}{2\alpha^2(\alpha^2+b^2)}$. **9.** (1) $\pi\ln\frac{|a|+|b|}{2}$; (2) 0, если $|a|\le 1$, $\pi\ln a^2$, если $|a|>1$; (3) $\frac{\pi}{2}\operatorname{sign}a\ln(1+|a|)$; (4) $\pi\arcsin a$. **10.** $\ln\frac{b+1}{a+1}$. **11.** $\frac{\pi}{2}\ln(1+\sqrt{2})$. **12.** $\operatorname{arctg}\frac{b-a}{1+(a+1)(b+1)}$.

§ 20. Несобственные интегралы, зависящие от параметра

В том случае если рассматривается несобственный интеграл, зависящий от параметра, для справедливости утверждений, аналогичных утверждениям 19.2–19.4, требуется дополнительно некоторое свойство, а именно равномерная относительно параметра сходимость несобственного интеграла.

20.1. Рассмотрим функцию $f(x,\alpha)$, которая при каждом значении $\alpha\in E\subset\mathbb{R}$ интегрируема в несобственном смысле по x на промежутке $[a,\omega)$, $a\in\mathbb{R}$, $\omega\in\overline{\mathbb{R}}$. Если функция $F(\alpha,y)=\int\limits_a^y f(x,\alpha)\,dx$, $y\in[a,\omega)$, имеет конечный предел при $y\to\omega$ равномерно относительно $\alpha\in E$, то говорят, что *несобственный интеграл* $I(\alpha)=\int\limits_a^\omega f(x,\alpha)\,dx$ *сходится равномерно относительно* $\alpha\in E$. Напомним, что равномерная относительно $\alpha\in E$ сходимость $F(\alpha,y)\underset{y\to\omega}{\rightrightarrows}\varphi(\alpha)$ означает, что

$$\lim_{y\to\omega}\sup_{\alpha\in E}|F(\alpha,y)-\varphi(\alpha)|=0.$$

Перефразируя содержание равномерной сходимости применительно к несобственному интегралу, можно утверждать, что его равномерная сходимость относительно $\alpha\in E$ означает выполнение следующего утверждения:

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists y_0\in[a,\omega))(\forall y\ge y_0, y<\omega)(\forall\alpha\in E)\quad\left|\int\limits_y^\omega f(x,\alpha)\,dx\right|\le\varepsilon.$$

20.2. Утверждение (критерий Коши равномерной сходимости интеграла). *Несобственный интеграл* $I(\alpha) = \int\limits_a^{\omega} f(x,\alpha)\,dx$ *сходится равномерно относительно* $\alpha \in E$ *в том и только в том случае, если*

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists y_0 \in [a,\omega))(\forall y_1 \ge y_0,\ y_1 < \omega)(\forall y_2 \ge y_0,\ y_2 < \omega)(\forall\alpha \in E)$$
$$\left|\int\limits_{y_1}^{y_2} f(x,\alpha)\,dx\right| \le \varepsilon.$$

20.3. Для доказательства сходимости несобственного интеграла от положительной функции (или абсолютной равномерной сходимости несобственного интеграла) полезен формулируемый ниже признак Вейерштрасса.

Признак Вейерштрасса равномерной абсолютной сходимости несобственного интеграла. *Если существует заданная на промежутке* $[a,\omega)$ *функция* $\varphi(x)$ *такая, что* $|f(x,\alpha)| \le \varphi(x)$ *для любых* $\alpha \in E$ *и* x *из некоторой окрестности точки* ω, *и интеграл* $\int\limits_a^{\omega} \varphi(x)\,dx$ *сходится, то интеграл* $\int\limits_a^{\omega} |f(x,\alpha)|\,dx$ *сходится равномерно относительно* $\alpha \in E$.

В качестве мажоранты $\varphi(x)$ можно брать, например, функцию $\varphi(x) = \sup\limits_{\alpha\in E} |f(x,\alpha)|$, особенно в тех случаях, когда супремум в правой части находится несложно.

20.4. Для исследования равномерной сходимости несобственного интеграла от знакопеременной функции можно использовать признаки Дирихле или Абеля.

Теорема. *Рассмотрим интеграл*

$$\int\limits_a^{\omega} f(x,\alpha)g(x,\alpha)\,dx \tag{20.1}$$

и допустим, что при каждом фиксированном $\alpha \in E$ *функция* $f(x,\alpha)$ *как функция от* x *монотонна. Предположим, что выполнены условия одной из следующих групп:*

(D1) $\lim\limits_{x\to\omega} f(x,\alpha) = 0$ *равномерно относительно* $\alpha \in E$;

(D2) *существует такая константа* $C > 0$, *что* $\left|\int\limits_a^b g(x,\alpha)\,dx\right| < C$ *для любых* b *из некоторой окрестности точки* ω *и любых* $\alpha \in E$;

либо

(A1) *существует такая константа* $M > 0$, *что* $|f(x,\alpha)| < M$ *для любых* $\alpha \in E$ *и* x *из некоторой окрестности точки* ω;

(A2) *интеграл* $\int\limits_a^\omega g(x,\alpha)dx$ *сходится равномерно относительно* $\alpha \in E$.

Тогда интеграл (20.1) *сходится равномерно относительно* $\alpha \in E$.

Если выполнены условия (D1), (D2), то говорят о *признаке Дирихле*, а если (A1), (A2) — о *признаке Абеля*.

20.5. Пример. Исследуем равномерную сходимость интеграла

$$\int\limits_0^1 \frac{x^\alpha \operatorname{arctg} \alpha x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

на множестве $E = [0,2]$.

Во-первых, констатируем, что подынтегральная функция положительна, значит, будем пытаться использовать признак Вейерштрасса. Для этого надо ограничить подынтегральную функцию сверху такой не зависящей от $\alpha \in [0,2]$ функцией, интеграл от которой по промежутку $(0,1)$ был бы сходящимся. В нашем интеграле одна особая точка 1. При $x \to 1$ имеем

$$\frac{x^\alpha \operatorname{arctg} \alpha x}{\sqrt{1-x^2}} \le \frac{\operatorname{arctg} 2}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Функция в правой части последнего неравенства не зависит от α, а интеграл от нее в особой точке 1 сходится, значит, наш интеграл в этой особой точке сходится равномерно относительно $\alpha \in [0,2]$.

При использовании признака Вейерштрасса для доказательства равномерной сходимости интеграла для нахождения функции, не зависящей от параметра и мажорирующей подынтегральную функцию, можно попробовать найти наибольшее значение подынтегральной функции как функции от параметра, воспользовавшись обычным путем нахождения наибольшего значения с использованием производных. Если этим способом удается воспользоваться, то мы получаем функцию от переменной интегрирования и нам остается только установить сходимость несобственного интеграла от нее.

20.6. Пример. Исследуем равномерную сходимость интеграла

$$I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \cos x^\alpha \, dx$$

на множествах $E_1 = (1, +\infty)$ и $E_2 = [\alpha_0, +\infty)$, $\alpha_0 > 1$.

Прежде всего заметим, что подынтегральная функция знакопеременна, поэтому признак Вейерштрасса здесь неприменим. Будем ориентироваться на признак Абеля или признак Дирихле. Сначала сделаем замену переменной с тем, чтобы аргумент у косинуса стал переменной интегрирования, а именно положим $x^\alpha = z$, $x = z^{1/\alpha}$, $dx = \dfrac{1}{\alpha} z^{1/\alpha - 1} dz$, переменная z будет изменяться в промежутке $[0, +\infty)$. Для краткости положим $1/\alpha - 1 = \beta$, при этом множествам E_1, E_2 изменения параметра α соответствуют множества $F_1 = (-1, 0)$, $(-1, \beta_0]$, где $\beta_0 = 1/\alpha_0 - 1 < 0$. Исходный интеграл станет таким:

$$I(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \int\limits_0^{+\infty} z^{1/\alpha - 1} \cos z \, dz = (\beta + 1) \int\limits_0^{+\infty} z^\beta \cos z \, dz.$$

Подынтегральная функция представлена в виде произведения двух функций, из которых $f(z) = z^\beta$ монотонна и при $\beta < 0$ имеет пределом 0 при $z \to +\infty$. Вместе с тем равномерной сходимости ее к нулю на множестве E_1 не будет. Это говорит о том, что нам не доведется воспользоваться признаком Дирихле, ибо не выполнены его условия, однако гарантировать отсутствие равномерной сходимости пока нельзя, и мы продолжим исследование. Заметим, что даже при больших z возможность сколь угодно близкого приближения к нулю величины β приводит к тому, что величина z^β может оказаться не малой, и есть шанс, воспользовавшись критерием Коши, доказать отсутствие равномерной сходимости интеграла на E_1. Попробуем оценить снизу интеграл $\displaystyle\int\limits_{b_1}^{b_2} z^\beta \cos z \, dz$, выбирая такие удаленные промежутки $[b_1, b_2]$, на которых косинус положителен. Ориентируясь на произвольное $b > 0$, возьмем (и фиксируем) $b_1, b_2 > b$ вида $b_1 = -\pi/4 + 2\pi n$, $b_2 = \pi/4 + 2\pi n$, $n \in \mathbb{N}$. На каждом промежутке $[b_1, b_2]$ будет $\cos z \geq 1/\sqrt{2}$. Поскольку функция z^β, $z > 0$, при $\beta < 0$ убывает, ее значения на этом промежутке оцениваются снизу значением в правом конце промежутка:

$z^\beta \geq (\pi/4 + 2\pi n)^\beta$. Следовательно, весь интеграл можно оценить так:

$$\int\limits_{b_1}^{b_2} z^\beta \cos z \, dz \geq (\pi/4 + 2\pi n)^\beta \cdot (1/\sqrt{2}) \cdot (\pi/2).$$

Поскольку $(\pi/4+2\pi n)^\beta \underset{\beta\to 0}{\longrightarrow} 1$, найдется такое $\beta < 0$, что $(\pi/4+2\pi n)^\beta > 1/2$. Собирая все оценки, можно утверждать, что

$$\int\limits_{b_1}^{b_2} z^\beta \cos z \, dz \geq (1/2) \cdot (1/\sqrt{2}) \cdot (\pi/2).$$

Взяв в качестве требуемого $\varepsilon > 0$ в отрицании критерия Коши число, стоящее в правой части последней оценки, придем к выводу об отсутствии равномерной сходимости интеграла на множестве E_1.

На множестве E_2 невозможно сколь угодно близко подойти к единице, поэтому $\lim\limits_{z\to+\infty} z^\beta = 0$ равномерно относительно $\beta \in (-1, \beta_0]$, а первообразная от функции $\cos z$ очевидно ограничена. Тем самым выполнены все условия признака Дирихле и наш интеграл сходится на множестве E_2 равномерно.

20.7. Задачи. Исследовать равномерную сходимость следующих несобственных интегралов на указанных множествах:

(1) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x^4} \, dx, \quad E_1 = [\alpha_0, +\infty),\ \alpha_0 > 0; \quad E_2 = (0, +\infty);$

(2) $\displaystyle\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^\alpha x}, \quad E_1 = [\alpha_0, +\infty),\ \alpha_0 > 1; \quad E_2 = (1, +\infty);$

(3) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos 2x \, dx, \quad E_1 = [\alpha_0, +\infty),\ \alpha_0 > 0; \quad E_2 = (0, +\infty);$

(4) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{4 + x^2} \, dx,\ E = \mathbb{R};$ **(5)** $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\alpha x} \, dx,\ E = [0, +\infty);$

(6) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{x}} e^{-\alpha x} \, dx, \quad E = [0, +\infty);$

(7) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x^5}{x} \, dx, \quad E_1 = [\alpha_0, +\infty),\ \alpha_0 > 0; \quad E_2 = (0, +\infty);$

(8) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos\alpha x^2\,dx, \quad E=[1,+\infty);$

(9) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(x-\alpha)^2}\,dx, \quad E_1=[0,2], \quad E_2=[0,+\infty);$

(10) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2e^{-\alpha x^4}\,dx, \quad E_1=[\alpha_0,+\infty),\ \alpha_0>0; \quad E_2=(0,+\infty);$

(11) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x^2}{1+x^\alpha}\,dx,\ E=[0,+\infty);$ **(12)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin e^x}{1+x^\alpha}\,dx,\ E=(0,+\infty);$

(13) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{e^{-x}}{|\sin x|^\alpha}\,dx, \quad E=[0,1);$ **(14)** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\alpha}{x^3}e^{-\alpha/(2x^2)}\,dx \quad E=[1,+\infty);$

(15) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{\sqrt{x}}\frac{dx}{4+\alpha^2x^2}, \quad E=\mathbb{R};$

(16) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^\alpha)}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}\,dx, \quad E=(-\infty,-1/2).$

20.8. Свойства несобственного интеграла как функции от параметра регламентируются следующими утверждениями.

Утверждение 1 (предельный переход в несобственном интеграле). *Пусть функция $f(x,\alpha)$ при каждом $\alpha\in A$ интегрируема (в собственном смысле) как функция от x на каждом промежутке $[a,b]$, где $a<b<\omega$, и в каждом таком промежутке при $\alpha\to\alpha_0$ равномерно относительно x сходится к функции $g(x)$. Если, кроме того, интеграл*

$$I(\alpha)=\int_a^\omega f(\alpha,x)\,dx$$

сходится равномерно относительно α из некоторой окрестности точки α_0, то

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0}\int_a^\omega f(\alpha,x)\,dx=\int_a^\omega \lim_{\alpha\to\alpha_0} f(\alpha,x)\,dx. \tag{20.2}$$

Утверждение 2 (непрерывность). *Пусть функция $f(x,\alpha)$ непрерывна как функция двух переменных $x\in[a,\omega)$, $\alpha\in(\alpha_1,\alpha_2)$, и пусть* *интеграл* $I(\alpha) = \int\limits_a^\omega f(x,\alpha)\,dx$ *сходится равномерно относительно* $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2)$. *Тогда функция* $I(\alpha)$ *непрерывна на* (α_1, α_2).

Утверждение 3 (дифференцируемость). *Пусть функции* $f(x,\alpha)$, $\dfrac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)$ *непрерывны как функции двух переменных* $x \in [a,\omega)$, $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2)$, *интеграл* $I(\alpha) = \int\limits_a^\omega f(x,\alpha)\,dx$ *сходится при каждом* $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2)$ *и интеграл* $\int\limits_a^\omega \dfrac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)\,dx$ *сходится равномерно относительно* $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2)$. *Тогда существует производная* $I'(\alpha)$, *которую можно найти по формуле*

$$I'(\alpha) = \int\limits_a^\omega \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)\,dx.$$

Утверждение 4 (интегрируемость). *Пусть функция* $f(x,\alpha)$ *непрерывна при* $a \le x < \omega$, $\alpha_1 \le \alpha \le \alpha_2$ *и интеграл* $I(\alpha) = \int\limits_a^\omega f(x,\alpha)\,dx$ *сходится равномерно относительно* $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$. *Тогда имеет место формула*

$$\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left(\int\limits_a^\omega f(x,\alpha)\,dx \right) d\alpha = \int\limits_a^\omega \left(\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x,\alpha)\,d\alpha \right) dx. \qquad (20.3)$$

Если $f(x,\alpha) \ge 0$ *при* $x \in [a,\omega)$, $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2)$, *то формула* (20.3) *остается справедливой в предположении, что внутренние интегралы в равенстве* (20.3) *являются непрерывными функциями и хотя бы одна из частей равенства* (20.3) *имеет смысл.*

20.9. Задачи. 1. Исследовать на непрерывность следующие функции на указанных множествах:

(1) $I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\sin x}{x} e^{-\alpha x} dx, \quad E = [0, +\infty);$

(2) $I(\alpha) = \int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\cos x}{x^\alpha}\,dx, \quad E = (0, +\infty);$

(3) $I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha^2 x^2}\, dx, \quad E = \mathbb{R};$

(4) $I(\alpha) = \int\limits_0^{\pi} \dfrac{\sin x}{x^\alpha(\pi - x)^\alpha}\, dx, \quad E = (0, 2).$

2. Законен ли переход к пределу под знаком интеграла в выражении

$$\lim_{\alpha\to+0} \int\limits_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x}\, dx?$$

3. Пусть функция $f(x)$ интегрируема в промежутке $(0, +\infty)$. Доказать равенство

$$\lim_{\alpha\to+0} \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x} f(x)\, dx = \int\limits_0^{+\infty} f(x)\, dx.$$

4. Пусть функция $f(x)$ непрерывна и ограничена на $[0, +\infty)$. Доказать, что

$$\lim_{y\to 0} \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{y f(x)}{x^2 + y^2}\, dx = f(0).$$

5. С помощью дифференцирования по параметру вычислить следующие интегралы:

(1) $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x}\, dx \quad (\alpha > 0,\ \beta > 0);$

(2) $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \sin mx\, dx \quad (\alpha > 0,\ \beta > 0);$

(3) $\int\limits_0^{1} \dfrac{\ln(1 - \alpha^2 x^2)}{x^2\sqrt{1 - x^2}}\, dx \ (|\alpha| \le 1);$ **(4)** $\int\limits_0^{1} \dfrac{\ln(1 - \alpha^2 x^2)}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx \ (|\alpha| \le 1);$

(5) $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} \alpha x}{x^2\sqrt{x^2 - 1}}\, dx;$ **(6)** $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\ln(\alpha^2 + x^2)}{\beta^2 + x^2}\, dx.$

6. Пользуясь формулой $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2 + a} = \dfrac{\pi}{2\sqrt{a}}$ $(a > 0)$, вычислить интеграл

$$I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a)^{n+1}},$$

где n — натуральное число.

7. Доказать формулу Фруллани

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = f(0)\ln\frac{b}{a} \quad (a>0,\ b>0),$$

где $f(x)$ — непрерывная функция и интеграл $\int\limits_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x}\,dx$ имеет смысл при любом $A>0$.

8. Пользуясь формулой Фруллани, вычислить интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x}\,dx \quad (a>0, b>0).$$

9. Вычислить интеграл Эйлера — Пуассона

$$I = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx,$$

исходя из формулы

$$I^2 = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \int\limits_0^{+\infty} x e^{-x^2y^2}\,dy.$$

10. Пользуясь интегралом Эйлера — Пуассона, найти интегралы:

(1) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+2bx+c)}\,dx \quad (a>0)$; **(2)** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}\operatorname{ch} bx\,dx \quad (a>0)$;

(3) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-(x^2+a^2/x^2)}\,dx \quad (a>0)$; **(4)** $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos bx\,dx \quad (a>0)$.

11. Исходя из интеграла

$$I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin\beta x}{x}\,dx \quad (\alpha \ge 0),$$

вычислить *интеграл Дирихле*

$$D(\beta) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x}\, dx.$$

12. Используя интегралы Дирихле и Фруллани, найти величины интегралов:

(1) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - \cos \beta x}{x^2}\, dx$; **(2)** $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \sin \beta x}{x}\, dx$;

(3) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \cos \beta x}{x}\, dx$; **(4)** $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{\sin \alpha x}{x}\right)^2 dx$.

13. Вычислить *интеграл Лапласа*

$$L = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2}\, dx.$$

14. Вычислить интеграл

$$L_1 = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{1+x^2}\, dx.$$

15. Пользуясь формулой

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} e^{-xy^2}\, dy \quad (x > 0),$$

вычислить *интегралы Френеля*

$$\int\limits_0^{+\infty} \sin x^2\, dx = \frac{1}{2} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\, dx, \quad \int\limits_0^{+\infty} \cos x^2\, dx = \frac{1}{2} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\, dx.$$

16. Найти величины интегралов:

(1) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{1+x^2}\, dx$; **(2)** $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{(1+x^2)^2}\, dx$;

(3) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin(ax^2 + 2bx + c)\,dx \quad (a \neq 0)$; **(4)** $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin x^2 \cos 2ax\,dx$;

(5) $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos\alpha x - \cos\beta x}{x^2}\,dx \quad (\beta > \alpha > 0)$;

(6) $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}\sin^2\beta x}{x}\,dx \quad (\alpha > 0)$;

(7) $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\ln(1+\alpha^2x^2)\operatorname{arctg}\beta x}{x(1+\beta^2x^2)}\,dx$; **(8)** $\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\ln(1+\alpha\cos x)}{\cos x}\,dx \quad (|\alpha| \leq 1)$;

(9) $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\ln(1+\alpha^2x^2)\operatorname{arctg}\beta x}{x^3}\,dx \quad (\alpha > 0,\ \beta > 0)$;

(10) $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\ln(1+\alpha^2x^2)\cdot\ln(1+\beta^2x^2)}{x^4}\,dx \quad (\alpha > 0,\ \beta > 0)$.

20.10. Ответы. 20.7. (1) Равномерно на E_1, неравномерно на E_2; (2) равномерно на E_1, неравномерно на E_2; (3) равномерно на E_1, неравномерно на E_2; (4) равномерно; (5) равномерно; (6) равномерно; (7) равномерно на E_1, неравномерно на E_2; (8) равномерно; (9) равномерно на E_1, неравномерно на E_2; (10) равномерно на E_1, неравномерно на E_2; (11) равномерно; (12) равномерно; (13) неравномерно; (14) неравномерно; (15) равномерно; (16) неравномерно.

20.9. 1. (1) Непрерывна; (2) непрерывна; (3) непрерывна при $\alpha \neq 0$, при $\alpha = 0$ разрывна; (4) непрерывна. **2.** Нет. **5.** (1) $\frac{1}{2}\ln\frac{\beta}{\alpha}$; (2) $\operatorname{arctg}\frac{\beta}{m} - \operatorname{arctg}\frac{\alpha}{m}$; (3) $-\pi(1-\sqrt{1-\alpha^2})$; (4) $\pi\ln\frac{1+\sqrt{1-\alpha^2}}{2}$; (5) $\frac{\pi}{2}\operatorname{sign}\alpha(1+|\alpha| - \sqrt{1+\alpha^2})$; (6) $\frac{\pi}{|\beta|}\ln(|\alpha|+|\beta|)$, $\beta \neq 0$. **6.** $\frac{\pi}{2}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}a^{-(n+1/2)}$. **8.** $\ln\frac{b}{a}$. **9.** $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. **10.** (1) $\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-(ac-b^2)/a}$; (2) $\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{b^2/4a}$; (3) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2a}$; (4) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-b^2/4a}$. **11.** $\frac{\pi}{2}\operatorname{sign}\beta$. **12.** (1) $\pi\frac{|\beta|}{2} - \sqrt{\pi\alpha}$; (2) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\right|$; (3) 0, если $|\alpha| < |\beta|$; $\frac{\pi}{4}\operatorname{sign}\alpha$, если $|\alpha| = |\beta|$; $\frac{\pi}{2}\operatorname{sign}\alpha$, если $|\alpha| > |\beta|$; (4) $\frac{\pi}{2}|\alpha|$. **13.** $\frac{\pi}{2}e^{-|\alpha|}$. **14.** $\frac{\pi}{2}\operatorname{sign}\alpha e^{-|\alpha|}$. **15.** $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. **16.** (1) $\frac{\pi}{4}(1-e^{-2})$; (2) $\frac{\pi(1+|\alpha|)}{4}e^{-|\alpha|}$; (3) $\sqrt{\frac{\pi}{|a|}}\sin\bigl(\frac{ac-b^2}{a} + \frac{\pi}{4}\operatorname{sign}a\bigr)$; (4) $\sqrt{\pi}\cos\bigl(a^2 + \frac{\pi}{4}\bigr)$; (5) $\frac{(\beta-\alpha)\pi}{2}$; (6) $\frac{1}{4}\ln\bigl(1 + \frac{4\beta^2}{\alpha^2}\bigr)$; (7) $2\pi((\alpha+\beta)\ln(\alpha+\beta) - \alpha\ln\alpha - \beta\ln\beta)$; (8) $\frac{\pi^2}{8} - \frac{(\arccos\alpha)^2}{2}$; (9) $\frac{\pi}{2}((\alpha^2 -$

$\beta^2)\ln(\alpha+\beta)-\alpha^2\ln\alpha+\beta^2\ln\beta+\alpha\beta)$; (10) $\frac{2\pi}{3}(\alpha\beta(\alpha+\beta)+\alpha^3\ln\alpha+\beta^3\ln\beta-(\alpha^3+\beta^3)\ln(\alpha+\beta))$.

§ 21. Интегралы Эйлера

21.1. Под *интегралами Эйлера* понимают следующие функции:

$$\Gamma(x)=\int\limits_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt;\quad \mathrm{B}(x,y)=\int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt,$$

называемые соответственно *гамма-функцией* и *бета-функцией*.

Ясно, что гамма-функция определена при $x>0$, а бета-функция — при $x>0$, $y>0$.

Интегралы Эйлера обладают рядом замечательных свойств, что ставит их в один ряд с широко известными элементарными функциями. Нахождение некоторых несобственных интегралов сводится к их выражению через гамма- и бета-функции, и такое сведéние можно считать окончательным результатом при их вычислении.

Перечислим основные формулы, связанные с эйлеровыми интегралами:

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x),\quad \Gamma(n)=(n-1)!,\ n\in\mathbb{N}; \tag{21.1}$$

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x},\quad 0<x<1,\quad \Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}; \tag{21.2}$$

$$\mathrm{B}(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}; \tag{21.3}$$

$$\mathrm{B}(x,1-x)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{y^{x-1}}{1+y}\,dy=\frac{\pi}{\sin\pi x}. \tag{21.4}$$

Кроме того, следует отметить, что эйлеровы интегралы бесконечно дифференцируемы на своей области определения и их производные могут быть найдены путем внесения операции дифференцирования под знак интеграла.

21.2. При сведéнии данного интеграла к гамма-функции или бета-функции выбор функции, к которой будет сводиться данный интеграл, зависит от вида подынтегральной функции. Сформулируем несколько соображений по такому выбору.

Если в подынтегральном выражении есть фрагмент, из которого может получиться (после замены) множитель e^{-t} (обычно это связано с присутствием в подынтегральной функции экспоненты или логарифма), то надо обеспечить заменой множитель e^{-t}, и если пределы интегрирования соответствуют таковым в гамма-функции, то сводить к ней. Если указанного фрагмента нет, то надо пытаться сводить к бета-функции.

При сведе́нии к бета-функции надо (заменой) добиться того, чтобы в подынтегральной функции стояло выражение $(1-t)$, где t — переменная интегрирования. Затем проследить за пределами интегрирования.

21.3. Задачи. 1. Определить области существования и выразить через гамма-функцию и бета-функцию следующие интегралы:

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n}\,dx \quad (n>0)$; **(2)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{(1+x)^n}\,dx$;

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\cos^n x\,dx$; **(4)** $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^m}} \quad (m>0)$;

(5) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^m e^{-x^n}\,dx \quad (n>0)$; **(6)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^n}\,dx \quad (n>0)$;

(7) $\displaystyle\int_0^{1} \left(\ln\frac{1}{x}\right)^p dx$; **(8)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^p e^{-ax}\ln x\,dx \quad (a>0)$;

(9) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}\ln x}{1+x}\,dx$; **(10)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^m\,dx}{(a+bx^n)^p}\,dx,\ (a,b,n>0)$.

2. Используя значения интегралов Эйлера, вычислить следующие интегралы:

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}\,dx$; **(2)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}(x+2)}\,dx$;

(3) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x^{2n}}{\sqrt[3]{x(1-x^2)}}\,dx, \quad n\in\mathbb{N}$; **(4)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha\ln^2 x}{1+x^2}\,dx \quad (|\alpha|<1)$;

(5) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\ln x}{1+x^3}\,dx$; **(6)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{1+x^4}\,dx$.

21.4. Ответы. 21.3. 1. (1) $\frac{\pi}{n\sin(m\pi/n)}$, $0<m<n$; (2) $\mathrm{B}(n-m,m)$, $0<m<n$; (3) $\frac{1}{2}\mathrm{B}\big(\frac{m+1}{2},\frac{n+1}{2}\big)$, $m>-1$, $n>-1$; (4) $\frac{1}{m}\mathrm{B}\big(\frac{1}{m},1-\frac{1}{n}\big)$, $n<0$ или $n>1$; (5) $\frac{1}{|n|}\Gamma\big(\frac{m+1}{n}\big)$, $\frac{m+1}{n}>0$; (6) $\frac{1}{n}\Gamma\big(\frac{1}{n}\big)$, $n>0$;

(7) $\Gamma(p+1)$, $p > -1$; (8) $\frac{d}{dp}\left(\frac{\Gamma(p+1)}{a^{p+1}}\right)$, $p > -1$; (9) $-\frac{\pi^2 \cos p\pi}{\sin^2 p\pi}$, $0 < p < 1$; (10) $\frac{a^{-p}}{n}\left(\frac{a}{b}\right)^{(m+1)/n}\mathrm{B}\left(\frac{m+1}{n}, p - \frac{m+1}{n}\right)$, $0 < \frac{m+1}{n} < p$. **2.** (1) $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$; (2) $\frac{\pi 2^{2/3}}{3}(\sqrt{3}\ln 2 + \pi)$; (3) $\frac{\pi}{\sqrt{3}}\frac{1\cdot 4\cdot\ldots\cdot(3n-5)(3n-2)}{3^n n!}$; (4) $\frac{\pi^3}{8}\frac{1+\sin^2(\alpha\pi/2)}{\cos^3(\alpha\pi/2)}$; (5) $\frac{2\pi^2}{27}$; (6) $\frac{3\pi^3}{32\sqrt{2}}$.