УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Задачи
по линейной алгебре
Часть 1

Е. И. Анно, О. И. Демушкина,
И. А. Кострикин, Н. А. Курош, А. А. Любкин,
Л. С. Павлова, В. М. Ромашова

Экономический
факультет
МГУ
имени
М.В. Ломоносова

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. Ломоносова
Экономический факультет

ЗАДАЧИ
ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ

Часть 1

Учебно-методическое пособие

Под общей редакцией Е. И. Анно

Москва
2020

УДК 512.64
ББК 22.143
З-15

Коллектив авторов:
Е. И. Анно, О. И. Демушкина, И. А. Кострикин, Н. А. Курош,
А. А. Любкин, Л. С. Павлова, В. М. Ромашова

З-15 **Задачи по линейной алгебре. Часть 1:** Учебно-методическое пособие / Под общей редакцией Е. И. Анно — М.: Экономический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова, 2020. — 169 с.

ISBN 978-5-906932-53-2

В пособии собраны задачи по линейной алгебре, используемые в процессе обучения на экономическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова.

Пособие предназначено для студентов технических и экономических вузов.

ISBN 978-5-906932-53-2

ОГЛАВЛЕНИЕ

I. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Определения и формулы

Уравнение вида $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$ с неизвестными переменными $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется линейным алгебраическим уравнением. Решением уравнения называется набор чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которые при подстановке в уравнение вместо неизвестных превращают его в тождество.

Для тривиального линейного уравнения вида $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = 0$ решением является произвольный набор чисел длины n.

Система линейных алгебраических уравнений (сокращенно СЛАУ) состоит из m линейных уравнений с n неизвестными. Решением системы уравнений называется набор чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которые при подстановке в каждое уравнение системы вместо неизвестных превращают его в тождество.

Алгебраическая запись СЛАУ: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots & = \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$.

Алгебраическая запись решения СЛАУ: $X = \left(x_1; x_2; \ldots; x_n\right)$.

Если система уравнений имеет решение, то она называется совместной. В противном случае она называется несовместной. Например, несовместным является уравнение $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = b \neq 0$.

Если все правые части линейных уравнений (свободные члены) равны нулю, то СЛАУ называется однородной. В противном случае она называется неоднородной.

Две системы уравнений, имеющие одно и то же множество решений, называются эквивалентными.

Преобразованием Гаусса системы линейных алгебраических уравнений называется преобразование одного из четырех типов:

(1) Умножить одно из уравнений на число, отличное от нуля.

(2) Переставить два уравнения.

(3) Одно из уравнений заменить суммой этого уравнения с другим уравнением.

(4) Исключить или добавить тривиальное уравнение.

Любое преобразование Гаусса переводит СЛАУ в эквивалентную СЛАУ.

Система линейных уравнений называется канонической, если она отвечает следующим требованиям:

(1) Все переменные разбиваются на два подмножества: базисные переменные и свободные переменные; одно из подмножеств может быть пустым.

(2) Количество базисных переменных совпадает с количеством нетривиальных уравнений.

(3) Каждой базисной переменной соответствует одно уравнение, в котором она содержится с коэффициентом единица, а коэффициенты при остальных базисных переменных равны нулю.

Если в каждом уравнении системы перенести свободные переменные в правую часть, то получится система, которая называется общим решением СЛАУ. Любое частное решение СЛАУ получится, если присвоить свободным переменным произвольные значения, а значения базисных переменных вычислить, используя уравнения общего решения.

Фундаментальный набор решений однородной СЛАУ (сокращенно ФНР) состоит из частных решений, вычисленных следующим образом: одна из свободных переменных равна единице, остальные свободные переменные равны нулю. Число решений в ФНР равно количеству свободных переменных.

Для записи СЛАУ можно использовать матричную запись $A \cdot X = B$, где A – матрица коэффициентов СЛАУ, X – столбец неизвестных, B – столбец свободных членов. В этой формуле используются понятия матрицы и матричного умножения, которые определяются в Главе *VI* «Матричная алгебра».

Иногда полезна векторная запись СЛАУ: $x_1A^1 + x_2A^2 + \ldots + x_nA^n = B$, где A^k – k-ый столбец матрицы A, B – столбец свободных членов. В этой формуле используется понятие линейной комбинации вектор-столбцов, которое определяется в Главе *IV* «Линейная зависимость и ранг».

Примеры решения задач

Пример 1. Решите систему трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} x + y - 2z = 3 \\ 3x - 2y + 4z = 5. \\ 2x - y + 5z = 3 \end{cases}$$

Решение. Используем метод Гаусса исключения неизвестных:

$$\begin{cases} x\boxed{-\ y}+2z=3 \\ 3x-2y+4z=5 \\ 2x-\ y+3z=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-\ y+2z=\ 3 \\ \boxed{x} \qquad\qquad =-1 \\ x \qquad +\ z=\ 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y+2z=\ 4 \\ x \qquad\qquad =-1 \\ \qquad\quad \boxed{z}=\ 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y=\ \ 2 \\ \ x=-1. \\ \ z=\ \ 1 \end{cases}$$

Итерация 1. Выберем ведущим элемент $a_{12}=-y$, затем 1-е уравнение, умноженное на $\lambda_1=-2$, прибавим ко 2-му уравнению, и умноженное на $\lambda_2=-1$, прибавим к 3-му уравнению.

Итерация 2. Выберем ведущим элемент $a_{21}=x$, затем 2-е уравнение, умноженное на $\lambda_1=-1$, прибавим к 1-му уравнению, и умноженное на $\lambda_2=-1$, прибавим к 3-му уравнению.

Итерация 3. Выберем ведущим элемент $a_{33}=z$, затем 3-е уравнение, умноженное на $\lambda=-2$, прибавим к 1-му уравнению.

Получим единственное решение $x=-1,\ y=-2,\ z=1$. Чтобы проверить правильность решения, надо подставить найденные значения в исходную СЛАУ.

Пример 2. Решите систему с четырьмя неизвестными:

$$\begin{cases} 2x+\ y+3z-2t=2 \\ \ x-2y+4z-2t=1\ . \\ 4x+7y+\ z-2t=5 \end{cases}$$

Решение. Используем схему Гаусса-Жордана (ведущие элементы, выбираемые для обнуления элементов столбца, обведены рамкой):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & \boxed{-2} & 2 \\ 1 & -2 & 4 & -2 & 1 \\ 4 & 7 & 1 & -2 & 5 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & -2 & 2 \\ \boxed{-1} & -3 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -2 & 0 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -7 & 5 & -2 & 0 \\ -1 & -3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Итерация 1. Выберем ведущим элемент $a_{14}=-2$, затем 1-ую строку, умноженную на $\lambda_1=-1$, прибавим ко 2-ой строке, и умноженную на $\lambda_2=-1$, прибавим к 3-ей строке.

Итерация 2. Выберем ведущим элемент $a_{21}=-1$, затем 2-ую строку, умноженную на $\lambda_1=2$, прибавим к 1-ой строке, и умноженную на $\lambda_2=2$, прибавим к 3-ей строке.

Система несовместна, так как третье уравнение не имеет решения.

Пример 3. Решите систему с четырьмя неизвестными:

$$\begin{cases} 2x + \ y + 3z - t = 2 \\ \ x - 2y + 4z - t = 1. \\ 4x + 7y + \ z - t = 4 \end{cases}$$

Решение. Используем схему Гаусса-Жордана:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & \boxed{-1} & 2 \\ 1 & -2 & 4 & -1 & 1 \\ 4 & 7 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ \boxed{-1} & -3 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -2 & 0 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -7 & 5 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Итерация 1. Выберем ведущим элемент $a_{14} = -1$, затем 1-ую строку, умноженную на $\lambda_1 = -1$, прибавим ко 2-ой строке, и умноженную на $\lambda_2 = -1$, прибавим к 3-ей строке.

Итерация 2. Выберем ведущим элемент $a_{21} = -1$, затем 2-ую строку, умноженную на $\lambda_1 = 2$, прибавим ко 1-ой строке, и умноженную на $\lambda_2 = 2$, прибавим к 3-ей строке.

Итерация 3. Вычеркнем тривиальную третью строку, обе строки умножим на -1 и переставим местами. Получим каноническую систему

$$\begin{cases} x + 3y - \ z = 1 \\ t + 7y - 5z = 0 \end{cases}.$$

В этой системе x, t – базисные переменные, y, z – свободные переменные.

Общее решение $\begin{cases} x = 1 - 3y + \ z \\ t = \quad -7y + 5z \end{cases}$. Если положить $y = a$, $z = b$, то можно записать общее решение вектором $X = (1 - 3a + b; a; b; -7a - 5b)$, зависящим от двух параметров:

Пример 4. Решите систему с четырьмя неизвестными:

$$\begin{cases} 2x + 2y - \ z + \ u = 4 \\ 4x + 3y - \ z + 2u = 6. \\ 3x + 3y - 2z + 2u = 6 \end{cases}$$

Решение. Используем схему Гаусса-Жордана:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & \boxed{-1} & 1 & 4 \\ 4 & 3 & -1 & 2 & 6 \\ 3 & 3 & -2 & 2 & 6 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & \boxed{1} & 2 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ \boxed{-1} & -1 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right).$$

Переставив уравнения, получим каноническую систему

$$\begin{cases} x+y= \ 2 \\ z-y=-2. \\ u-y=-2 \end{cases}$$

В этой системе x,z,u – базисные переменные, y – свободная переменная.

Общее решение

$$\begin{cases} x= \ 2-y \\ z=-2+y. \\ u=-2+y \end{cases}$$

Если положить $y=t$, то можно записать общее решение как вектор

$$X=(2-t;t;-2+t;-2+t)=c(2;0;-2;-2)+t\cdot a(-1;1;1;1),$$

зависящий от параметра $t\in R$.

Пример 5. Найдите ФНР однородной СЛАУ

$$\begin{cases} 3x+2y-z+\ t=0 \\ 4x+3y-z-\ t=0\ . \\ 2x+\ y-z+3t=0 \end{cases}$$

Решение. Используем схему Гаусса-Жордана, опуская столбец свободных членов. Цепочка преобразований имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & \boxed{-1} & 1 \\ 4 & 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & \boxed{-1} & 1 \\ 1 & \boxed{1} & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычеркнем тривиальную третью строку, изменим знак второй строки и переставим строки. Получим каноническую систему

$$\begin{cases} y+x-2t=0 \\ z-x-5t=0 \end{cases}$$

и общее решение

$$\begin{cases} y=-x+2t \\ z=\ x+5t \end{cases}.$$

Здесь y,z – базисные переменные, а x,t – свободные переменные.

Если положить $x=p, t=s$, то можно записать общее решение системы как вектор $X=(p;-p+2s;p+5s;s)=p\cdot f_1(1;-1;1;0)+s\cdot f_2(0;2;5;1)$, зависящий от параметров $p,s \in R$. Фундаментальный набор решений состоит из векторов f_1 и f_2.

Пример 6. Система $\begin{cases} x+ \quad ay=2 \\ (a-2)x+(a+4)y=a \end{cases}$ зависит от параметра a. Найдите все значения параметра a, при которых СЛАУ: а) не имеет решений; б) имеет бесконечно много решений. В последнем случае выпишите общее решение.

Решение. Умножим первое уравнение на число $(2-a)$ и прибавим ко второму уравнению. Получим СЛАУ

$$\begin{cases} x+ \qquad ay=2 \\ \qquad (a+4+a(2-a))y=a+2(2-a) \end{cases}.$$

Эта система будет иметь единственное решение, если

$$(a+4+a(2-a))=-a^2+3a+4\neq 0.$$

Уравнение $-a^2+3a+4=0$ имеет два корня $a=-1$ и $a=4$. В случае $a=-1$ система $\begin{cases} x-y=2 \\ 0\cdot y=5 \end{cases}$ решений не имеет. В случае $a=4$ получим СЛАУ $\begin{cases} x+4y=2 \\ 0\cdot y=0 \end{cases}$, которая имеет общее решение $\{x=2-4y$ со свободной переменной $y\in R$ (или $X=(2-4y;y)$).

Типовые задачи

1. Решите СЛАУ методом Гаусса-Жордана.

а) $\begin{cases} x+3y=5 \\ 2x-5y=-1 \end{cases}$. б) $\begin{cases} 2x-4y=-1 \\ -3x+6y=2 \end{cases}$.

в) $\begin{cases} 5x+3y=-7 \\ 2x-5y=-9 \end{cases}$. г) $\begin{cases} -x+2y-2z=2 \\ 2x+3y-z=8 \\ 3x-2y-z=5 \end{cases}$.

д) $\begin{cases} 3x+y-2z=-1 \\ 2x+3y-z=5 \\ 5x-3y-4z=-3 \end{cases}$. е) $\begin{cases} 5x+3y+4z=9 \\ 2x-5y+3z=-4 \\ 7x+4y+3z=15 \end{cases}$.

ж) $\begin{cases} -3x+2y-3z=7 \\ 2x+3y+5z=-2 \\ 3x-2y-4z=7 \\ -4x+7y+6z=-2 \end{cases}$. з) $\begin{cases} 3x+y-2z+u=5 \\ 2x+3y-z+2u=4 \\ x-2y+2z-u=4 \\ x+3y-z+u=0 \end{cases}$.

Дополнительно:

и) $\begin{cases} x+2y-2z=2 \\ 2x-3y+z=5 \\ 2x-2y-3z=-5 \end{cases}$.   к) $\begin{cases} -3x+7y+4z=14 \\ 2x+5y+6z=11 \\ 3x+3y+5z=7 \end{cases}$.

л) $\begin{cases} x+y+2z=2 \\ 2x-3y-z=1 \\ -x+2y+z=1 \end{cases}$.   м) $\begin{cases} -2x+2y+3z=-4 \\ 4x+y-3z=-1 \\ 3x-2y-5z=2 \\ 4x+5y+2z=-3 \end{cases}$.

н) $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=-3 \\ 2x_1-3x_2-x_3+x_4=1 \\ x_1-3x_2+x_3+x_4=2 \\ -x_1+4x_2+3x_3+2x_4=-1 \end{cases}$.   о) $\begin{cases} 2x_1-2x_2+3x_3+3x_4=-8 \\ 3x_1+x_2-2x_3-x_4=2 \\ 2x_1+x_2+3x_3-x_4=-7 \\ -2x_1-x_2-2x_3+x_4=5 \end{cases}$.

2. Решите СЛАУ методом Гаусса-Жордана, укажите базисные и свободные переменные.

а) $\begin{cases} -x+2y=3 \\ 3x-6y=-9 \end{cases}$.   б) $\begin{cases} -2x+4y=6 \\ 3x-6y=-8 \end{cases}$.

в) $\begin{cases} 3x+4y-5z=1 \\ 2x+3y+2z=5 \end{cases}$.   г) $\begin{cases} 2x+3y+5z=1 \\ 5x+4y+7z=2 \end{cases}$.

д) $\begin{cases} x+2y+z=0 \\ 4x+y-3z=7 \\ -3x+2y+5z=-8 \end{cases}$.   е) $\begin{cases} 3x+y-2z=-1 \\ 2x+3y-z=5 \\ 5x-3y-4z=-13 \end{cases}$.

ж) $\begin{cases} 3x_1-2x_2-x_3+2x_4=-2 \\ -2x_1+3x_2+4x_3+2x_4=3 \\ x_1+3x_2-x_3-4x_4=7 \\ x_1+4x_2+3x_3+x_4=7 \end{cases}$.   з) $\begin{cases} 3x_1+2x_2-3x_3-x_4=3 \\ -2x_1-3x_2+5x_3+2x_4=-1 \\ 7x_1+3x_2-4x_3-x_4=8 \\ -x_1-4x_2+7x_3+3x_4=1 \end{cases}$.

Дополнительно:

и) $\begin{cases} 3x+5y+5z=4 \\ 2x-6y+z=5 \end{cases}$.   к) $\begin{cases} 3x-4y+2z=1 \\ 4x+3y+z=8 \\ x-3y+z=-1 \end{cases}$.

л) $\begin{cases} 3x+5y+z=13 \\ 2x+2y+z=6 \\ x-5y+2z=-9 \end{cases}$.

м) $\begin{cases} 2x_1-3x_2+2x_3-x_4=-3 \\ -3x_1+5x_2-3x_3+2x_4=6 \\ 3x_1-4x_2+3x_3-x_4=-3 \end{cases}$.

н) $\begin{cases} 3x_1+5x_2+2x_3-x_4=-5 \\ 5x_1+3x_2+2x_3-3x_4=-3 \\ x_1-3x_2-2x_3-x_4=5 \\ 2x_1-3x_2-4x_3-x_4=8 \end{cases}$.

3. Решите однородную СЛАУ методом Гаусса-Жордана и постройте ФНР.

а) $\begin{cases} 3x+3y-z=0 \\ 5x+y-3z=0 \end{cases}$.

б) $\begin{cases} x+2y-2z=0 \\ x-y+z=0 \end{cases}$.

в) $\begin{cases} x+2y-2z+3u=0 \\ x-y+z-u=0 \end{cases}$.

г) $\begin{cases} 2x-y+2z=0 \\ x+y+2z=0 \\ 3x-3y+2z=0 \end{cases}$.

д) $\begin{cases} 3x+2y-z-3u=0 \\ -2x+3y+5z+2u=0 \\ x+2y-2z+2u=0 \end{cases}$.

е) $\begin{cases} x_1-x_2+\quad+x_4+x_5=0 \\ x_2+x_3-x_4+2x_5=0 \\ -x_1+2x_2+x_3-x_4+x_5=0 \end{cases}$.

Дополнительно:

ж) $\begin{cases} 2x+y-2z=0 \\ -2x+y+z=0 \end{cases}$.

з) $\begin{cases} 3x-2y+z+2u=0 \\ 2x+3y-2z+u=0 \end{cases}$.

и) $\begin{cases} 3x+y-4z=0 \\ x+5y+z=0 \\ 3x+5y-2z=0 \end{cases}$.

к) $\begin{cases} 2x_1-x_2+2x_3-x_4=0 \\ x_1-3x_2=0 \\ x_1+2x_2+2x_3+x_4=0 \end{cases}$.

л) $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+2x_5=0 \\ 2x_1+3x_2+2x_3-x_4+3x_5=0 \\ 3x_1+2x_2+2x_3-3x_4=0 \\ x_1+3x_2+2x_4+x_5=0 \end{cases}$.

4. Найдите все значения параметра a, при которых система:
   I) не имеет решений; II) имеет бесконечно много решений.
   Во втором случае укажите ответ.

а) $\begin{cases} 2x+ay=1 \\ ax+2y=-1 \end{cases}$. б) $\begin{cases} 4x+(a-1)y=2a+2 \\ 2x+(a+2)y=-4 \end{cases}$.

в) $\begin{cases} ax+(a-3)y=3 \\ (2-a)x-2y=-2 \end{cases}$. г) $\begin{cases} ax+(a-2)y=a+1 \\ 2x+(a+3)y=2 \end{cases}$.

д) $\begin{cases} -8x-(a+1)y=a-7 \\ (a-1)x+(a-2)y=1 \end{cases}$. е) $\begin{cases} (a+1)x+(a-1)y=2 \\ (a+1)x-y=a \end{cases}$.

Дополнительно:

ж) $\begin{cases} (a-4)x+(a-2)y=2 \\ (a-4)x+y=a-3 \end{cases}$. з) $\begin{cases} (a+1)x+(a-1)y=-2 \\ (a+1)x-y=a \end{cases}$.

и) $\begin{cases} ax+ay=a+4 \\ 4x+ay=8 \end{cases}$.

Дополнительные задачи

5. Приведите пример СЛАУ, у которой вектор $x=(2;3;4)$ является единственным решением.
6. Приведите пример однородной СЛАУ, решением которой являются только векторы, пропорциональные вектору $a=(2;3;4)$.
7. Может ли быть нетривиальное решение у однородной СЛАУ из трех уравнений с двумя неизвестными?
8. Пусть A – матрица размером $(n\times n)$ и система линейных уравнений $Ax=b$ не имеет решений при некотором $b\in R^n$, $b\neq 0$. Верны ли следующие утверждения:
   а) Система $Ax=\overline{0}$ обязательно имеет ненулевые решение.
   б) Система $Ax=\overline{0}$ не имеет ненулевых решений.
   в) Система $Ax=\overline{0}$ может не иметь ненулевых решений.
9. Пусть A – матрица размером $(n\times n)$ и система линейных уравнений $Ax=\overline{0}$ имеет ненулевое решение. Верны ли следующие утверждения:
   а) СЛАУ $Ax=b$ обязательно имеет решение при любом $b\in R^n$.
   б) СЛАУ $Ax=b$ может иметь решение при любом $b\in R^n$.
   в) Существует $b\in R^n$, для которого СЛАУ $Ax=b$ не имеет решений.

г) При некотором $b \in R^n$ СЛАУ $Ax = b$ имеет единственное решение.

10. Пусть A – матрица размером $(n \times n)$. Как соотносятся следующие утверждения:
   а) (1) СЛАУ $Ax = b$ имеет решение при любом $b \in R^n$;
   (2) СЛАУ $Ax = \overline{0}$ не имеет ненулевых решений.
   б) (1) СЛАУ $Ax = \overline{0}$ имеет только нулевое решение;
   (2) Существует $b \in R^n$, для которого СЛАУ $Ax = b$ не имеет решения.
   в) (1) СЛАУ $Ax = b$ имеет решения при некотором $b \in R^n$;
   (2) СЛАУ $Ax = \overline{0}$ имеет ненулевые решения.
   г) (1) СЛАУ $Ax = b$ имеет решения не для любых $b \in R^n$;
   (2) СЛАУ $Ax = \overline{0}$ имеет ненулевое решение.

Ответы на типовые задачи

1. а) $(2;1)$. б) Решений нет.
   в) $(-2;1)$. г) $(2;1;-1)$.
   д) Решений нет. е) $(2;1;-1)$.
   ж) $(1;2;-2)$. з) $(2;-1;1;2)$.
   и) $(4;2;3)$. к) $(1;3;-1)$.
   л) Решений нет. м) $(2;-3;2)$.
   н) Решений нет. о) $(-1;3;-2;2)$.

2. а) Например, $x = 2y - 3$; x – базисная, y – свободная.
   б) Решений нет.
   в) Например, $\begin{cases} x = -17 + 23z \\ y = 13 - 16z \end{cases}$; x, y – базисные, z – свободная.
   г) Например, $\begin{cases} y = -3 + 11x \\ z = 2 - 7x \end{cases}$; y, z – базисные, x – свободная.
   д) Например, $\begin{cases} x = 2 + z \\ y = -1 - z \end{cases}$; x, y – базисные, z – свободная.
   е) Например, $\begin{cases} x = 11 - 5y \\ z = 17 - 7y \end{cases}$; x, z – базисные, y – свободная.
   ж) Например, $\begin{cases} x_2 = 3 - 2x_1 \\ x_3 = -2 + 3x_1 \\ x_4 = 1 - 2x_1 \end{cases}$; x_2, x_3, x_4 – базисные, x_1 – свободная.

з) Например, $\begin{cases} x_2 = 5 - 4x_1 + x_3 \\ x_4 = 7 - 5x_1 - x_3 \end{cases}$; $\begin{cases} x_2,\ x_4 - \text{базисные}, \\ x_1,\ x_3 - \text{свободные}. \end{cases}$

и) Например, $\begin{cases} x = \ \ 3 + 5y \\ z = -1 - 4y \end{cases}$; x, z – базисные, y – свободная.

к) Например, $\begin{cases} x = \ \ 3 - 2y \\ z = -4 + 5y \end{cases}$; x, z – базисные, y – свободная.

л) Например, $\begin{cases} x = \ \ 7 - 3y \\ z = -8 + 4y \end{cases}$; x, z – базисные, y – свободная.

м) Например, $\begin{cases} x_1 = \qquad x_2 - x_3 \\ x_4 = 3 - x_2 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1,\ x_4 - \text{базисные}, \\ x_2,\ x_3 - \text{свободные}. \end{cases}$

н) Например, $\begin{cases} x_1 = \ \ 3 + 2x_3 \\ x_2 = -2 - \ x_3 \\ x_4 = \ \ 4 + 3x_3 \end{cases}$; x_1, x_2, x_4 – базисные, x_3 – свободная.

3. а) Например, $\begin{cases} x = -2y \\ z = -3y \end{cases}$; ФНР $\{a_1(-2;1;-3)\}$.

б) Например, $\begin{cases} x = 0 \\ z = y \end{cases}$; ФНР $\{a_1(0;1;1)\}$.

в) Например, $\begin{cases} z = -4x + y \\ u = -3x \end{cases}$; ФНР $\{a_1(1;0;-4;-3),\ a_2(0;1;1;0)\}$.

г) Например, $\begin{cases} x = \ \ 2y \\ z = -\dfrac{3}{2}y \end{cases}$; ФНР $\{a_1(4;2;-3)\}$.

д) Например, $\begin{cases} x = 2u \\ y = -u \\ z = \ \ u \end{cases}$; ФНР $\{a_1(2;-1;1;1)\}$.

е) Например, $\begin{cases} x_1 = -x_3 - 3x_5 \\ x_2 = -x_3 - 2x_5 \\ x_4 = 0 \end{cases}$;

ФНР – $\{a_1(-1;-1;1;0;0), a_2(-3;-2;0;0;1)\}$.

ж) Например, $\begin{cases} x = \dfrac{3}{2}y \\ z = 2y \end{cases}$; ФНР $\{a_1(3;2;4)\}$.

з) Например, $\begin{cases} y = 8x + 5u \\ z = 13x + 8u \end{cases}$; ФНР $\{a_1(1;8;13;0), a_2(0;5;8;1)\}$.

и) Например, $\begin{cases} x = -3y \\ z = -2y \end{cases}$; ФНР $\{a_1(3;-1;2)\}$.

к) Например, $\begin{cases} x_1 = \ \ 3x_2 \\ x_3 = -\dfrac{5}{2}x_2 \\ x_4 = 0 \end{cases}$; ФНР $\{a_1(6;2;-5;0)\}$.

л) Например, $\begin{cases} x_1 = \ \ x_4 + 2x_5 \\ x_2 = -x_4 - \ x_5 \\ x_3 = \ \ x_4 - 2x_5 \end{cases}$; ФНР $\{a_1(1;-1;1;1;0), a_2(2;-1;-2;0;1)\}$.

4. а) I) $a = 2$; II) $a = -2$, $\{x = y + \frac{1}{2}$.

б) I) Не существует; II) $a = -5$, $\{x = \frac{3}{2}y - 2$.

в) I) $a = 1$; II) $a = 6$, $\{y = 1 - 2x$.

г) I) Не существует; II) Не существует.

д) I) Не существует; II) $a = 3$, $\{y = 1 - 2x$; $a = 5$, $\left\{y = \dfrac{1-4x}{3}\right.$.

е) I) $a = 0$, $a = -1$; II) Не существует.

ж) I) $a = 3$; II) $a = 4$, $\begin{cases} x \in R \\ y = 1 \end{cases}$.

з) I) $a = 0$; II) $a = -1$, $\begin{cases} x \in R \\ \ y = 1 \end{cases}$.

и) I) $a = 0$; II) $a = 4$, $\{y = 2 - x$.

Ответы на дополнительные задачи

5. Например, $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 4 \end{cases}$.

6. Например, $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 0 \\ 2x_1 - \ x_3 = 0 \end{cases}$.

7. Например, $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 = 0 \\ 4x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases}$.

8. а) Верно.
   б) Неверно.
   в) Неверно.
9. а) Неверно.
   б) Неверно.
   в) Верно.
   г) Неверно.
10. а) Эквивалентны.
   б) Противоречат друг другу.
   в) Не зависят друг от друга.
   г) Эквивалентны.

II. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Определения и формулы

Расстояние на плоскости между точками $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$ вычисляется по формуле $r=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

Общее уравнение прямой: $L:\{ax+by+c=0$, где $n(a;b)$ – вектор нормали к прямой.

Векторное уравнение прямой: $(n,M-M_0)=0$ или $(n,M)=(n,M_0)$, где n – вектор нормали к прямой, M_0 – некая выбранная точка на прямой, M – переменная точка прямой. После подстановки координат точек получим уравнение $ax+by=ax_0+by_0=-c$.

Параметрическое задание прямой: $L=c(p;q)+t\cdot a(u;v)$, где $a(u;v)$ – направляющий вектор прямой, $c(p;q)$ – произвольная точка на прямой, $t\in R$ – параметр.

Каноническое уравнение прямой: $L:\left\{\frac{x-p}{u}=\frac{y-q}{v}\right.$, где $a(u;v)$– направляющий вектор прямой, $c(p;q)$ – произвольная точка на прямой.

Расстояние от точки $M(p;q)$ до прямой $L:\{ax+by+c=0$, заданной общим уравнением, вычисляется по формуле $r=\frac{|ap+bq+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Примеры решения задач

Пример 1. Составьте общее уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2;-1)$ перпендикулярно вектору $n(2;3)$.

Решение. Векторное уравнение прямой $(n,M)=(n,M_0)$. В координатном представлении общее уравнение прямой $L:\{2x+3y=2\cdot 2+3\cdot(-1)=1$.

Пример 2. Составьте общее уравнение прямой на плоскости с направляющим вектором $a(3;-5)$, проходящей через точку $M_0(-2;-3)$.

Решение. Параметрическое задание прямой $L=M_0+t\cdot a$. В координатном представлении получаем $L:\begin{cases}x=-2+3t\\ y=-3-5t\end{cases}$, где $t\in R$. Каноническое уравнение прямой $L:\left\{\frac{x+2}{3}=\frac{y+3}{-5}\right.$. Отсюда общее уравнение $L:\{5x+3y+19=0$.

Второй способ. Вектор $n(5;3)$ перпендикулярен направляющему вектору $a(3;-5)$. Как в предыдущей задаче, общее уравнение прямой $L:\{5x+3y=5\cdot(-2)+3\cdot(-3)=-19$.

Пример 3. Определите, как взаимно расположены две прямые, заданные общими уравнениями $L_1:\{2x-3y-4=0$ и $L_2:\{-4x+6y+6=0$.

Решение. Если $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$, то прямые совпадают (ситуация $a_1=a_2=0$ считается допустимой). Если $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$, то прямые параллельны. Если $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$, то прямые пересекаются. При этом прямые перпендикулярны, если $a_1a_2+bb_2=0$. В нашем случае прямые параллельны.

Пример 4. Определите, как взаимно расположены две прямые, заданные уравнениями $L_1:\{2x+3y=5$ и $L_2:\left\{\frac{x-2}{-4}=\frac{y+1}{-6}\right.$.

Решение. Вектор $n(2;3)$ – нормаль к первой прямой, вектор $a(-4;-6)$ – направляющий вектор второй прямой. Прямые параллельны или совпадают тогда и только тогда, когда $(n,a)=0$. При этом прямые совпадают, если точка M_0 лежит на прямой L_1. Если $(n,a)\neq 0$, то прямые пересекаются. При этом прямые перпендикулярны, если векторы n и a коллинеарны. В нашем случае $\frac{2}{-4}=\frac{3}{-6}$, поэтому векторы n и a коллинеарны. Следовательно, прямые пересекаются под прямым углом.

Пример 5. Найдите точку $M(x;y)$, симметричную точке $M_0(-1;2)$ относительно прямой, заданной уравнением $L:\{3x-2y=6$.

Решение. Искомая точка должна удовлетворять двум условиям:

а) вектор $\overrightarrow{M_0M}$ перпендикулярен прямой L, то есть коллинеарен нормали $n(3;-2)$ к прямой;

б) середина отрезка $[M_0M]$ лежит на прямой L.

В результате получим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{-2} \\ 3\cdot\frac{x-1}{2}-2\cdot\frac{y+2}{2}=6 \end{cases}.$$

Решением этой системы будет точка $M(5;-2)$.

Пример 6. Найдите на прямой, заданной уравнением $L:\{2x+3y=6$, точку $M(x;y)$, равноудаленную от точек $M_1(3;4)$ и $M_2(0;-5)$.

Решение. Тот факт, что точка M равноудалена от точек M_1 и M_2, записывается в виде $|M_1M|^2=|M_2M|^2$. В итоге получим систему

$$L:\begin{cases}2x+3y=6\\ (x-3)^2+(y-4)^2=x^2+(y+5)^2\end{cases}.$$

Решением этой системы будет точка $M(6;-2)$.

Типовые задачи

1. Запишите прямую L в параметрическом виде. Укажите вектор n нормали к прямой.

   а) $L:\{3x-2y+3=0$. б) $L:\{3x+9=0$.

   в) $L:\left\{\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+3}{-2}\right.$. г) $L:\left\{\dfrac{x+2}{5}=\dfrac{y-2}{0}\right.$.

2. Составьте общее уравнение прямой L, проходящей через точку M перпендикулярно вектору n.

   а) $M=(2;-1)$, $n=(-2;3)$. б) $M=(-3;2)$, $n=(-1;-2)$.

   в) $M=(-1;-1)$, $n=(0;3)$. г) $M=(2;-2)$, $n=(2;0)$.

3. Составьте общее уравнение прямой L, проходящей через точку M параллельно вектору a.

   а) $M=(2;-1)$, $a=(-2;3)$. б) $M=(3;1)$, $a=(-1;-2)$.

   в) $M=(2;-1)$, $a=(-2;0)$.

4. Определите, как взаимно расположены две прямые L_1 и L_2.

   а) $L_1=c_1(1;2)+t\cdot a_1(1;-1)$, $L_2=c_2(1;-1)+t\cdot a_2(2;1)$.

   б) $L_1:\left\{\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-3}{-2}\right.$, $L_2=c_2(-4;1)+t\cdot a_2(-3;2)$.

   в) $L_1=c_1(1;-3)+t\cdot a_1(3;-6)$, $L_2=c_2(-3;5)+t\cdot a_2(-2;4)$.

   г) $L_1:\left\{\dfrac{x-2}{-2}=\dfrac{y+3}{-4}\right.$, $L_2:\{x+2y+5=0$.

д) $L_1 : \{x+2y+2=0$, $L_2 = c_2(-4;1)+t\cdot a_2(-2;1)$.

е) $L_1 = c_1(1;1)+t\cdot a_1(2;-1)$, $L_2 = c_2(-3;-1)+t\cdot a_2(-2;1)$.

ж) $L_1 = c_1(1;1)+t\cdot a_1(2;-1)$, $L_2 = c_2(3;2)+t\cdot a_2(2;3)$.

5. Определите, как взаимно расположены три прямые L_1, L_2 и L_3.

а) $L_1 = c_1(4;3)+t\cdot a_1(2;-1)$, $L_2 = c_2(3;1)+t\cdot a_2(-2;1)$,
$L_3 = c_3(2;-1)+t\cdot a_3(1;-1)$.

б) $L_1 = c_1(4;3)+t\cdot a_1(1;2)$, $L_2 = c_2(3;1)+t\cdot a_2(-2;1)$,
$L_3 = c_3(2;-1)+t\cdot a_3(1;1)$.

в) $L_1 = c_1(1;2)+t\cdot a_1(1;-1)$, $L_2 = c_2(-2;4)+t\cdot a_2(2;1)$,
$L_3 : \{x+y-3=0$.

г) $L_1 = c_1(1;2)+t\cdot a_1(2;-1)$, $L_2 = c_2(1;3)+t\cdot a_2(-1;1)$,
$L_3 : \left\{ \dfrac{x+3}{3} = \dfrac{y-5}{-2} \right.$.

д) $L_1 = c_1(1;2)+t\cdot a_1(2;-3)$, $L_2 : \{3x+2y=0$, $L_3 : \left\{ \dfrac{x-1}{-4} = \dfrac{y+3}{6} \right.$.

6. Найдите точку M_2, симметричную точке M_1 относительно прямой L.

а) $M_1 = (2;-1)$, $L : \{x=-2$.

б) $M_1 = (2;-1)$, $L = c(1;2)+t\cdot a(1;-1)$.

в) $M_1 = (2;-1)$, $L : \left\{ \dfrac{x+4}{2} = \dfrac{y-2}{-1} \right.$.

7. На прямой L найдите точку M, равноудаленную от точек M_1 и M_2.

а) $L = c(4;-6)+t\cdot a(2;1)$, $M_1 = (4;2)$, $M_2 = (8;0)$.

б) $L : \{5x-3y=8$, $M_1 = (4;3)$, $M_2 = (-2;-5)$.

в) $L : \left\{ \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-8}{-3} \right.$, $M_1 = (3;7)$, $M_2 = (-1;5)$.

8. Найдите параметрическое задание прямой L_2, проходящей через точку M и перпендикулярной прямой L_1. Найдите расстояние от точки M до прямой L_1.

а) $M = (1;2)$, $L_1 = c_1(-3;-1)+t\cdot a_1(-2;1)$.

б) $M = (1;-4)$, $L_1 : \{3x-4y+1=0$.

Дополнительные задачи

9. Дан треугольник с вершинами в точках $A(7;4), B(6;1), C(1;2)$. Для этого треугольника найдите:
   а) Уравнение медианы, опущенной на сторону AB.
   б) Уравнение высоты, опущенной на сторону AC.
   в) Уравнение биссектрисы угла A.
   г) Уравнение срединного перпендикуляра к стороне AC.
   д) Координаты центра описанной окружности.
   е) Координаты точки пересечения медиан.
   ж) Площадь треугольника.
10. Найдите геометрическое место точек на плоскости, для которых расстояние до точки $M_1(-2;5)$ в два раза больше расстояния до точки $M_2(7;-7)$.
11. а) Задайте прямую L, проходящую через точку $M_1(-2;3)$ и отстоящую от точки $M_2(1;-1)$ на расстояние d.
    б) При каких значениях d эта задача имеет решение?
    в) При каких значениях d эта задача имеет единственное решение?

Ответы на типовые задачи

1. а) $L = c(1;0) + t \cdot a(2;3)$, $n = (3;-2)$.
   б) $L = c(-3;0) + t \cdot a(0;1)$, $n = (1;0)$.
   в) $L = c(2;-3) + t \cdot a(3;-2)$, $n = (2;3)$.
   г) $L = c(-2;2) + t \cdot a(5;0)$, $n = (0;1)$.
2. а) $L : \{-2x + 3y = -7$. б) $L : \{x + 2y = 1$.
   в) $L : \{y = -1$. г) $L : \{x = 2$.
3. а) $L : \{3x + 2y = 4$. б) $L : \{2x - y = 5$. в) $L : \{y = -1$.
4. а) Пересекаются. б) Параллельны.
   в) Совпадают. г) Перпендикулярны.
   д) Совпадают. е) Параллельны.
   ж) Пересекаются.
5. а) L_1 и L_2 параллельны, L_3 их пересекает.
   б) L_1, L_2 и L_3 попарно пересекаются в трех разных точках.
   в) L_1 и L_3 совпадают, L_2 их пересекает.
   г) L_1, L_2 и L_3 пересекаются в одной точке.
   д) L_1, L_2 и L_3 параллельны.
6. а) $M_2 = (-6;-1)$. б) $M_2 = (4;1)$. в) $M_2 = M_1 = (2;-1)$.

7. а) $M=(2;-7)$. б) $M=(1;-1)$. в) $M=(3;2)$.
8. а) $L_2 = t\cdot a_2(1;2)$, $r=2\sqrt{5}$.
   б) $L_2 = M(1;-4)+t\cdot a_2(3;-4)$, $r=4$.

Ответы на дополнительные задачи

9. а) $m_c:\{x-11y=-21$. б) $h_b:\{3x+y=19$.
   в) $l_a:\{x-y=3$. г) $d_b:\{3x+y=15$.
   д) $O\left(\frac{31}{8};\frac{27}{8}\right)$. е) $M\left(7;\frac{7}{2}\right)$.
   ж) $S=8$.

10. Окружность радиуса $r=10$ с центром в точке $M_1(4;-3)$.
11. а) Указание. Прямая L имеет вид $L:\{ax+by+(2a-3b)=0$.
    Воспользуйтесь формулой расстояния от точки $M_2(1;-1)$ до этой прямой, наложив дополнительное ограничение $a^2+b^2=1$.
    б) $d\le 5$.
    в) $d=5$.

III. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Определения и формулы

Расстояние в пространстве между точками $M_1(x_1;y_1;z_1)$ и $M_2(x_2;y_2;z_2)$ вычисляется по формуле $r=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.

Общее уравнение плоскости: $\pi:\{ax+by+cz+d=0$, где $n(a;b;c)$ – вектор нормали к плоскости.

Векторное уравнение плоскости: $(n,M-M_0)=0$ или $(n,M)=(n,M_0)$, где $n(a;b;c)$ – вектор нормали к плоскости, $M_0(x_0;y_0;z_0)$ – некая выбранная в плоскости точка, $M(x;y;z)$ – переменная точка плоскости. После подстановки координат точек получим общее уравнение плоскости в виде $\pi:\{ax+by+cz=ax_0+by_0+cz_0=-d$.

Параметрическое задание плоскости:

$$\pi=c(p;q;s)+t_1\cdot a_1(u_1;v_1;w_1)+t_2\cdot a_2(u_2;v_2;w_2),$$

где $a_1(u_1;v_1;w_1)$ и $a_2(u_2;v_2;w_2)$ – два направляющих вектора плоскости, $c(p;q;s)$ – произвольная точка плоскости, $t_1,t_2\in R$ – параметры.

Общее уравнение прямой задается системой:

$$L:\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0\\a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0\end{cases}.$$

Геометрически это задает прямую как пересечение двух плоскостей.

Параметрическое задание прямой:

$$L=c(p;q;s)+t\cdot a(u;v;w),$$

где $a(u;v;w)$ – направляющий вектор прямой, $c(p;q;s)$ – произвольная точка на прямой, $t\in R$ – параметр. Если прямая задана системой

$$L:\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=-d_1\\a_2x+b_2y+c_2z=-d_2\end{cases},$$

то координаты направляющего вектора прямой $a(u;v;w)$ являются решениями однородной системы

$$L:\begin{cases}a_1u+b_1v+c_1w=0\\a_2u+b_2v+c_2w=0\end{cases}.$$

Каноническое уравнение прямой:

$$L:\left\{\frac{x-p}{u}=\frac{y-q}{v}=\frac{z-s}{w},\right.$$

где $a(u;v;w)$ – направляющий вектор прямой, $c(p;q;s)$ – произвольная точка на прямой.

Расстояние от точки пространства $M(p;q;s)$ до плоскости, заданной общим уравнением $\pi:\{ax+by+cz+d=0$, вычисляется по формуле

$$r=\frac{|ap+bq+cs+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Примеры решения задач

Пример 1. Составьте уравнение плоскости π, проходящей через точку $M_0(1;-2;-3)$ перпендикулярно вектору $n(3;-1;-2)$.

Решение. Векторное уравнение плоскости $(n,M)=(n,M_0)$. Подставляя координаты точек, получим уравнение плоскости

$$\pi:\{3x-y-2z=3\cdot 1+(-1)(-2)+(-2)(-3)=11.$$

Пример 2. Найдите точку пересечения M прямой $L=c(0;2;-5)+t\cdot a(-1;1;2)$ и плоскости $\pi:\{3x+y+5z=9$.

Решение. Запишем координаты точки $M(x;y;z)$ прямой в зависимости от параметра $t\in R$: $M(0-t;2+t;-5+2t)$. Точка пересечения прямой и плоскости определится из решения уравнения

$$3(-t)+(2+t)+5(-5+2t)=8t-23=9.$$

Решая уравнение, получим $t=4$ и $M=(-4;6;3)$.

Пример 3. Составьте общее уравнение плоскости π, проходящей через точку $M_0(-1;1;-5)$ и прямую $L=c(1;0;-2)+t\cdot a(1;-2;1)$, заданную параметрически.

Решение. Для составления уравнения плоскости достаточно знать какую-то точку плоскости (это точка M_0) и нормаль n к плоскости. Нормаль к плоскости перпендикулярна любому вектору в плоскости. В частности, она перпендикулярна векторам $a(1;-2;1)$ и $M_0-c=(-2;1;-3)$. Составим систему однородных уравнений

$$\begin{cases}(a,n)= \quad x-2y+z=0\\ (M_0-c,n)=-2x+y-3z=0\end{cases}.$$

Ее решением является вектор $n(5;1;-3)$. Общее уравнение плоскости $(n,M)=(n,M_0)$ или $\pi:\{5x+y-3z=11$.

Пример 4. Составьте общее уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(2;3;-1)$, $M_2(-2;1;2)$, $M_3(-1;1;1)$.

Решение. Для построения нормали к плоскости надо указать два вектора, лежащие в плоскости. Можно взять векторы $M_2 - M_1 = (-4;-2;3)$ и $M_3 - M_1 = (-3;-2;2)$. Составим систему однородных уравнений

$$\begin{cases}(M_2 - M_1, n) = -4x - 2y + 3z = 0 \\ (M_3 - M_1, n) = -3x - 2y + 2z = 0\end{cases}.$$

Ее решением является вектор $n(2;-1;2)$. Общее уравнение плоскости $(n, M) = (n, M_1)$ или $\pi:\{2x - y + 2z = -3$.

Пример 5. Найдите направляющий вектор прямой, заданной системой уравнений

$$L:\begin{cases}2x - 5y + 3z = 3 \\ -3x + 5y - 2z = -2\end{cases},$$

и укажите ее параметрическое и каноническое представления.

Решение. Для выбора точки на прямой достаточно взять любое частное решение системы

$$\begin{cases}2x - 5y + 3z = 3 \\ -3x + 5y - 2z = -2\end{cases},$$

например, c$(-1;-1;0)$. Координаты направляющего вектора прямой L являются решениями однородной системы

$$\begin{cases}2x - 5y + 3z = 0 \\ -3x + 5y - 2z = 0\end{cases}.$$

Решив ее, получим направляющий вектор $a(1;1;1)$. Параметрическое уравнение прямой имеет вид $L = c(-1;-1;0) + t \cdot a(1;1;1)$. Следовательно, каноническое уравнение прямой

$$L:\left\{\frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{1}.\right.$$

Пример 6. Установите, как взаимно расположены плоскость π и заданная в параметрическом виде прямая L:

$$\pi:\{x + 2y - z = 1, \quad L = c(3;-1;-2) + t \cdot a(3;-1;1).$$

Решение. Прямая параллельна плоскости или лежит в плоскости, если ее направляющий вектор $a(3;-1;1)$ перпендикулярен нормали к плоскости $n(1;2;-1)$, то есть $(a, n) = 0$. Если $(a, n) \neq 0$, то прямая и плоскость пересекаются. Проверим: $(a,n)=3\cdot 1+(-1)\cdot 2+1\cdot(-1)=0$. Тогда прямая лежит в плоскости, если ей принадлежит хотя бы одна точка прямой, например, точка $c(3;-1;-2)$. Подстановка в уравнение $3+2(-1)-(-2)=3\neq 1$ показывает, что $c\notin\pi$. Значит, прямая параллельна плоскости.

Пример 7. Установите, как взаимно расположены две прямые:

$$L_1=c_1(1;0;-2)+t\cdot a_1(1;-2;1) \text{ и } L_2:\begin{cases} 2x-5y+3z=\ \ 3\\ -3x+5y-2z=-2\end{cases}.$$

Решение. Две прямые в пространстве могут совпадать, быть параллельными, пересекаться или скрещиваться. Прямые совпадают или параллельны, если их направляющие векторы коллинеарные. Направляющий вектор прямой L_2 удовлетворяет однородной системе

$$\begin{cases} 2x-5y+3z=0\\ -3x+5y-2z=0\end{cases}.$$

Решив ее, получим направляющий вектор $a_2(1;1;1)$. Направляющие векторы не коллинеарны, значит прямые пересекаются или скрещиваются. Чтобы проверить пересечение двух прямых, заданных параметрически, проверим наличие общей точки: $c_1+t_1\cdot a_1=c_2+t_2\cdot a_2$. В качестве c_2 годится точка $c_2(0;0;1)$. Значит, надо решить систему:

$$\begin{cases} 1+\ t_1=0+t_2\\ 0-2t_1=0+t_2\\ -2+\ t_1=1+t_2\end{cases}.$$

Эта система несовместна, следовательно, прямые скрещиваются.

Для другого варианта проверки пересечения обе прямые должны быть заданы системами уравнений, после чего надо проверить наличие решения у системы, полученной объединением обеих систем. Каноническое уравнение $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z-2}{1}$ прямой L_1 сводится к СЛАУ $\begin{cases}2x+y=2\\ y+2z=4\end{cases}.$

Объединенная для двух прямых СЛАУ

$$\begin{cases} 2x+\ \ y \qquad\ =\ 2\\ \qquad y+2z=\ 4\\ 2x-5y+3z=\ \ 3\\ -3x+5y-2z=-2\end{cases}$$

несовместна.

Пример 8. Составьте общее уравнение плоскости π, содержащей две параллельные прямые L_1 и L_2:

$$L_1 = c_1(1;-1;2) + t_1 \cdot a_1(2;0;-1),\ \ L_2 = c_2(-3;2;3) + t_2 \cdot a_2(2;0;-1).$$

Решение. Для составления уравнения плоскости достаточно знать одну точку на плоскости и нормаль к плоскости. В качестве точки плоскости годится любая из двух точек c_1 или c_2, а координаты нормали должны удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} (a_1,n) = 2x - z = 0 \\ (c_2 - c_1, n) = -4x - 2y + 2z = 0 \end{cases}.$$

Решением системы будет нормаль $n(1;-2;2)$. Значит, уравнение плоскости $(n,M) = (n,c_1)$ или $\pi:\{x - 2y + 2z = 7$.

Типовые задачи

1. Укажите параметрическое представление и каноническое уравнение прямой L, заданной системой уравнений.

   а) $L:\begin{cases} 2x - y + 2z = 5 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$. б) $L:\begin{cases} 2x - 3y + z = -2 \\ -x - 3y + 4z = 1 \end{cases}$.

   в) $L:\begin{cases} 3x - y + 6z = 2 \\ -2x + 3y - 4z = 1 \end{cases}$.

Дополнительно:

   г) $L:\begin{cases} 3x - y + 5z = 2 \\ 2x - 3y + 4z = -1 \end{cases}$. д) $L:\begin{cases} 2x - 5y + 3z = 3 \\ -3x + 5y - 2z = -2 \end{cases}$.

   е) $L:\begin{cases} x - 2y + 3z = 7 \\ -2x - y + z = -2 \end{cases}$.

2. Составьте каноническое уравнение прямой L, проходящей через точку M и перпендикулярной плоскости π.

   а) $M(1;-3;2)$, $\pi:\{2x + 5y + 3z = 4$.

   б) $M(2;-5;7)$, $\pi:\{3x - 7z = 5$.

3. Запишите в параметрическом виде плоскость π, заданную уравнением.

   а) $\pi:\{y = 2$. б) $\pi:\{3x + y - 2z = -1$.

   в) $\pi:\{2x - 2y + z = 4$. г) $\pi:\{-x + 2y - z = 5$.

4. Найдите точку M пересечения прямой L и плоскости π.

   а) $L = c(0;2;-5) + t \cdot a(-1;1;2)$, $\pi:\{3x + y + 5z = 9$.

б) $L:\left\{\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y-5}{2}=\dfrac{z+3}{-3}\right.$, $\pi:\{x+2y+z=4$.

в) $L=c(0;3;4)+t\cdot a(-1;2;2)$, $\pi:\{3x+y+2z=8$.

г) $L=c(-2;2;0)+t\cdot a(3;-2;2)$, $\pi:\{2x+5y-z=0$.

5. Составьте общее уравнение плоскости π, проходящей через точку M перпендикулярно вектору n.

а) $M=(-1;1;2)$, $n=(1;2;3)$.

б) $M=(-2;-1;1)$, $n=(1;1;-3)$.

в) $M=(3;1;-2)$, $n=(0;1;-1)$.

6. Составьте общее уравнение плоскости π, проходящей через точку M перпендикулярно прямой L.

а) $L:\left\{\dfrac{x-2}{-3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z+2}{5}\right.$, $M(1;-3;2)$.

б) $L:\left\{\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+5}{0}=\dfrac{z-7}{-3}\right.$, $M(-1;2;3)$.

7. Составьте общее уравнение плоскости π, проходящей через точку M параллельно векторам a и b.

а) $M(-2;3;-1)$, $a(1;2;-2)$, $b(2;1;-2)$.

б) $M(-2;1;-3)$, $a(1;1;1)$, $b(-1;2;1)$.

в) $M(-2;3;-1)$, $a(1;0;-2)$, $b(5;0;-3)$.

г) $M(2;3;-1)$, $a(-2;1;-2)$, $b(-2;1;5)$.

8. Проверьте, что две прямые L_1 и L_2 параллельны, и составьте общее уравнение плоскости, их содержащей.

а) $L_1=c_1(0;-1;3)+t\cdot a_1(2;1;-1)$, $L_2=c_2(0;0;2)+t\cdot a_2(4;2;-2)$.

б) $L_1:\begin{cases}-2x-y+z=3\\ 3x+y-2z=-2\end{cases}$, $L_2=c_2(2;1;-1)+t\cdot a_2(1;-1;1)$.

в) $L_1:\left\{\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z+2}{1}\right.$, $L_2:\begin{cases}-2x-y+3z=3\\ 3x+2y-4z=-2\end{cases}$.

9. Проверьте, что две прямые L_1 и L_2 пересекаются, и составьте общее уравнение плоскости, их содержащей.

а) $L_1=c_1(1;2;0)+t\cdot a_1(2;0;-1)$, $L_2=c_2(0;0;2)+t\cdot a_2(1;2;-2)$.

б) $L_1:\begin{cases}x+2y+z=1\\ 2x+3y-z=-3\end{cases}$, $L_2=c_2(3;1;4)+t\cdot a_2(1;1;1)$.

в) $L_1:\left\{\dfrac{x-4}{-1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-5}{-1}\right.$, $L_2:\begin{cases}x+y-2z=-4\\ x-3y+2z=8\end{cases}$.

10. Составьте общее уравнение плоскости, проходящей через точку M и прямую L.
    а) $M=(3;1;-2)$, $L=c(2;0;-1)+t\cdot a(-1;2;3)$.
    б) $M=(2;1;-4)$, $L:\left\{\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{-3}\right.$.
    в) $M=(1;2;3)$, $L:\begin{cases} x-2y+z=3 \\ 2x+3y-z=-1 \end{cases}$.
    г) $M=(3;1;-1)$, $L=c(-2;1;2)+t\cdot a(-1;1;1)$.
11. Составьте общее уравнение плоскости, проходящей через три точки M_1, M_2, M_3.
    а) $M_1(2;3;-1)$, $M_2(-2;1;2)$, $M_3(-1;1;1)$.
    б) $M_1(2;3;4)$, $M_2(-1;-1;5)$, $M_3(1;-1;-1)$.
    в) $M_1(1;0;2)$, $M_2(0;-1;2)$, $M_3(4;1;2)$.
    г) $M_1(1;2;-1)$, $M_2(0;-1;5)$, $M_3(4;1;1)$.
    д) $M_1(1;1;-1)$, $M_2(2;-1;1)$, $M_3(4;-5;5)$.
12. Установите, как взаимно расположены в пространстве плоскость π и прямая L. Если они пересекаются, найдите точку пересечения.
    а) $\pi:\{2x+y-3z=-3$, $L=c(2;-1;4)+t\cdot a(1;-2;2)$.
    б) $\pi:\{x+2y-z=1$, $L=c(3;-1;-2)+t\cdot a(3;-1;1)$.
    в) $\pi:\{x+2y-z=0$, $L:\begin{cases} 2x-2y+3z=-1 \\ -3x+2y-2z=3 \end{cases}$.
    г) $\pi=c(1;-1;1)+t\cdot a(1;-3;0)+s\cdot b((0;2;1)$ $L=c(2;-2;2)+t\cdot a(2;0;3)$.
    д) $\pi:\{x-y-2z=5$, $L=c(-1;0;3)+t\cdot a(-1;1;2)$.
13. Установите, как взаимно расположены в пространстве две прямые L_1 и L_2, и найдите расстояние между ними. Если прямые пересекаются, найдите точку пересечения M. Если прямые скрещиваются, найдите концы M_1 и M_2 общего перпендикуляра.
    а) $L_1=c_1(1;1;2)+t\cdot a_1(2;0;-1)$, $L_2=c_2(-3;0;-1)+t\cdot a_2(-2;0;1)$.
    б) $L_1=c_1(1;4;-3)+t\cdot a_1(3;3;-6)$, $L_2=c_2(-3;0;5)+t\cdot a_2(-2;-2;4)$.
    в) $L_1=c_1(5;4;6)+t\cdot a_1(2;1;4)$, $L_2=c_2(-2;0;3)+t\cdot a_2(3;-1;1)$.
    г) $L_1:\begin{cases} 2x-y-2z=19 \\ 2x-2y-z=15 \end{cases}$, $L_2=c_2(-1;4;1)+t\cdot a_2(1;0;1)$.
    д) $L_1=c_1(1;-4;9)+t\cdot a_1(2;-1;2)$, $L_1=c_2(-1;4;-3)+t\cdot a_2(-4;2;-4)$.
    е) $L_1=c_1(3;4;3)+t\cdot a_1(2;-1;1)$, $L_2=c_2(-2;-1;10)+t\cdot a_2(-2;1;3)$.

Дополнительно:

ж) $L_1:\begin{cases} x+y+z=3 \\ 4x+y+2z=10 \end{cases}$, $L_2:\begin{cases} x-2y-z=-3 \\ 3x-3y-z=3 \end{cases}$.

з) $L_1:\left\{\frac{x-2}{2}=\frac{y-4}{-1}=\frac{z-3}{-1}\right.$, $L_2=c(0;5;8)+t\cdot a_2(-2;1;3)$.

и) $L_1=c_1(1;1;-1)+t\cdot a_1(2;-1;-1)$, $L_2=c_2(3;2;-1)+t\cdot a_2(2;3;1)$.

к) $L_1=c_1(1;0;2)+t\cdot a_1(1;2;-1)$, $L_2=c_2(1;0;-1)+t\cdot a_2(2;1;1)$.

14. Составьте параметрическое задание прямой L, проходящей через точку M и перпендикулярной плоскости π, и найдите расстояние от точки M до плоскости π.

а) $M=(2;1;4)$, $\pi:\{x-y+z=2$.

б) $M=(-1;4;-4)$, $\pi:\{4x-2y+3z=5$.

в) $M=(3;-1;4)$, $\pi:\{-x+2y=-5$.

15. Составьте параметрическое задание перпендикуляра L_2, опущенного из точки M на прямую L_1, и найдите расстояние от точки M до прямой L_1.

а) $M=(1;1;2)$, $L_1=c_1(-3;0;-1)+t\cdot a_1(-2;0;1)$.

б) $M=(2;3;0)$, $L_1:\begin{cases} x-y+z=2 \\ 3x-2y+z=4 \end{cases}$.

в) $M=(-2;5;3)$, $L_1:\left\{\frac{x+2}{2}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+7}{3}\right.$.

16. Найдите точку, симметричную точке M относительно плоскости π.

а) $M_1=(2;2;5)$, $\pi:\{x+2y-3z=5$.

б) $M_1=(0;1;5)$, $\pi:\{2x+3y-4z=12$.

в) $M_1=(-3;3;7)$, $\pi:\{-x+2y+3z=2$.

17. Найдите угол φ между плоскостями π_1 и π_2.

а) $\pi_1:\{x-y+z=2$, $\pi_2:\{3x-y-4z=2$.

б) $\pi_1:\{2x+y+z=-1$, $\pi_2:\{x+2y-z=3$.

в) $\pi_1:\{x-2y+z=3$, $\pi_2:\{y-z=-5$.

Дополнительные задачи

18. Задайте плоскость π, параллельную прямой $L=c_1(2;1;0)+t\cdot a_1(1;1;1)$, проходящую через точку $M(1;-1;2)$, и отстоящую от прямой L на расстояние r. При каких значениях r эта задача имеет решение? При каких значениях r эта задача имеет единственное решение?

Ответы на типовые задачи

1. а) $L = c(0;9;7) + t \cdot a(1;-4;-3)$, $L:\left\{\frac{x}{1} = \frac{y-9}{-4} = \frac{z-7}{-3}\right.$.

   б) $L = c(-1;0;0) + t \cdot a(1;1;1)$, $L:\left\{\frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}\right.$.

   в) $L = c(1;1;0) + t \cdot a(2;0;-1)$, $L:\left\{\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z}{-1}\right.$.

   г) $L = c(1;1;0) + t \cdot a(-11;2;7)$, $L:\left\{\frac{x-1}{-11} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{7}\right.$.

   д) $L = c(-1;-1;0) + t \cdot a(1;1;1)$, $L:\left\{\frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{1}\right.$.

   е) $L = c(2;-1;1) + t \cdot a(1;-7;-5)$, $L:\left\{\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-7} = \frac{z-1}{-5}\right.$.

2. а) $L:\left\{\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{5} = \frac{z-2}{3}\right.$. б) $L:\left\{\frac{x-2}{3} = \frac{y+5}{0} = \frac{z-7}{7}\right.$.

3. а) $\pi = c(0;2;0) + t \cdot a(1;0;0) + s \cdot b(0;0;1)$.

   б) $\pi = c(0;-1;0) + t \cdot a(1;-3;0) + s \cdot b(0;2;1)$.

   в) $\pi = c(1;-1;0) + t \cdot a(1;1;0) + s \cdot b(0;1;2)$.

   г) $\pi = c(1;3;0) + t \cdot a(1;1;1) + s \cdot b(-1;0;1)$.

4. а) $M(-4;6;3)$. б) L параллельна π.

   в) $M(1;1;2)$. г) $M(1;0;2)$.

5. а) $\pi:\{x + 2y + 3z = 6$.

   б) $\pi:\{x + y - 3z = -6$.

   в) $\pi:\{y - z = 3$.

6. а) $\pi:\{-3x + 2y + 5z = 1$. б) $\pi:\{2x - 3z = -11$.

7. а) $\pi:\{2x + 2y + 3z = -1$. б) $\pi:\{x + 2y - 3z = 9$.

   в) $\pi:\{y = 3$. г) $\pi:\{x + 2y = 8$.

8. а) $\pi:\{y + z = 2$.

   б) $\pi:\{5x - 2y - 7z = 15$.

   в) $\pi:\{4x + 5y - 3z = 9$.

9. а) $\pi:\{2x + 3y + 4z = 8$.

   б) $\pi:\{x + y - 2z = -4$.

   в) Прямые совпадают.

10. а) $\pi:\{5x - 2y + 3z = 7$. б) $\pi:\{2x - 3y + z = -3$.

    в) $\pi:\{4x - y + z = 5$. г) $\pi:\{3x - 2y + 5z = 2$.

11. а) $\pi:\{-2x+y-2z=1$. б) $\pi:\{3x-2y+z=4$.
    в) $\pi:\{z=2$. г) $\pi:\{2y+z=3$.
    д) Точки лежат на одной прямой.
12. а) Прямая пересекает плоскость в точке $M=(1;1;2)$.
    б) Прямая параллельна плоскости.
    в) Прямая пересекает плоскость в точке $M=(-1;1;1)$.
    г) Прямая лежит в плоскости.
    д) Прямая перпендикулярна плоскости, пересекает ее в точке $M=(1;-2;-1)$.
13. а) Параллельны, $r=1$.
    б) Совпадают, $r=0$.
    в) Скрещиваются, $M_1(3;3;2)$, $M_2(1;-1;4)$, $h=(-2;-4;2)$, $r=2\sqrt{6}$.
    г) Скрещиваются, $M_1(7;1;-3)$, $M_2(1;4;3)$, $h=(-6;3;6)$, $r=9$.
    д) Параллельны, $h=(6;4;-4)$, $r=2\sqrt{17}$.
    е) Скрещиваются, $M_1(5;3;4)$, $M_2(2;-3;4)$, $h=(3;6;0)$, $r=3\sqrt{5}$.
    ж) Параллельны, $h=(2;2;2)$, $r=2\sqrt{3}$.
    з) Пересекаются, $M(4;3;2)$, $h(1,2,0)$, $r=0$.
    и) Пересекаются, $M=\left(2;\dfrac{1}{2};-\dfrac{3}{2}\right)$, $r=0$.
    к) Скрещиваются, $M_1(2;2;1)$, $M_2(3;1;0)$, $h(1;-1;-1)$, $r=\sqrt{3}$.
14. а) $L=c(2;1;4)+t\cdot a(1;-1;1)$, $r=\sqrt{3}$.
    б) $L=c(-1;4;-4)+t\cdot a(4;-2;3)$, $r=\sqrt{29}$.
    в) $L=c(3;-1;4)+t\cdot a(-1;2;0)$, $r=0$.
15. а) $L_2=c_2(1;1;2)+t\cdot a_2(2;1;4)$, $r=\sqrt{21}$.
    б) $L_2=c_2(2;3;0)+t\cdot a_2(0;-1;2)$, $r=\sqrt{5}$.
    в) $L_2=c_2(-2;5;3)+t\cdot a_2(-1;1;1)$, $r=4\sqrt{3}$.
16. а) $M_2=(4;6;-1)$. б) $M_2=(4;7;-3)$. в) $M_2=(1;-5;-5)$.
17. а) $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$. б) $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$. в) $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$.

Ответы на дополнительные задачи

18. Указание. Рассмотрите плоскость $\pi:\{ax+by+cz+d=0$, нормаль $n(a;b;c)$ к которой удовлетворяет ограничению $a^2+b^2+c^2=1$. Добавьте к этому уравнения еще три, отражающих три условия: плоскость проходит через точку $M(1;-1;2)$, нормаль n перпендикулярна прямой L и расстояние от точки до плоскости равно r.

IV. ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ И РАНГ

Определения и формулы

Линейным пространством называется множество (элементы которого называются векторами), в котором определены операция сложения векторов и операция умножения вектора на число. Эти операции удовлетворяют определенным соотношениям:

(1) $(a+b)+c=a+(b+c)$ (ассоциативность операции сложения).

(2) $a+b=b+a$ (коммутативность операции сложения).

(3) Существует единственный нуль-вектор (обозначаемый $\overline{0}$) такой, что для всех a верно $a+\overline{0}=\overline{0}+a=a$.

(4) Для любого a существует единственный вектор $b=-a$ такой, что $a+(-a)=\overline{0}$.

(5) $(\lambda\mu)a=\lambda(\mu a)$ (ассоциативность операции умножения на число).

(6) $\lambda(a+b)=\lambda a+\lambda b$ (дистрибутивность сложения векторов относительно умножения на число).

(7) $(\lambda+\mu)a=\lambda a+\mu a$ (дистрибутивность сложения чисел относительно умножения на вектор).

Набор векторов $a=\{a_1,a_2,\dots,a_k\}$ называется линейно зависимым, если существует такие числа $\{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_k\}$, не все из которых равны нулю, что $\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\ldots+\lambda_k a_k=\overline{0}$.

Набор векторов $a=\{a_1,a_2,\dots,a_k\}$ называется линейно независимым, если из равенства $\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\ldots+\lambda_k a_k=\overline{0}$ следует, что $\lambda_j=0$ для всех j.

Вектор b линейно выражается через набор векторов $a=\{a_1,a_2,\dots,a_k\}$, если существует такие числа $\{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_k\}$, что $b=\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\ldots+\lambda_k a_k$.

Набор векторов линейно зависим тогда и только тогда, когда хотя бы один его вектор линейно выражается через остальные.

Набор векторов b линейно выражается через набор векторов $a=\{a_1,\dots,a_k\}$, если каждый вектор набора b выражается через набор a.

Рангом $rank(a)$ (или $r(a)$) набора a называется максимальное число линейно независимых векторов в наборе a.

Базой набора a называется его поднабор f, который, во-первых, линейно независим, во-вторых, становится линейно зависимым при добавлении любого вектора из набора a.

Поднабор f является базой набора a тогда и только тогда, когда он линейно независим и любой вектор набора a линейно выражается через поднабор f.

Число векторов во всех базах набора a одинаково и равно рангу набора a.

Теорема о двух наборах. Если набор векторов $b=\{b,b,\ldots,b_m\}$ выражается через набор векторов $a=\{a_1,a_2,\ldots,a_k\}$ и $m>k$, то набор b линейно зависим.

Теорема о сравнении рангов наборов. Если набор векторов b выражается через набор векторов a, то $rank(a)\geq rank(b)$.

Рангом матрицы называется ранг ее строк или столбцов, рассматриваемых как координатные векторы (эти числа совпадают).

Если в определения и теоремы выше вместо слова «набор» подставлять словосочетание «линейное пространство», то ранг называется размерностью, а база называется базисом. Линейное пространство, в котором есть конечный базис, называется конечномерным.

Примеры решения задач

Пример 1. Найдите ранг набора векторов

$$a=\{a_1(1;1;-2),a_2(2;-3;1),a_3(1;-2;1)\}.$$

Решение. Если два набора векторов выражаются друг через друга, то их ранги одинаковы. Поэтому преобразования набора векторов, подобные преобразованиям Гаусса, а именно: умножить вектор на число, прибавить к вектору другой вектор, умноженный на число, исключить или добавить нулевой вектор – не меняют ранга набора.

Эти преобразования оформляются схемой, подобной схеме Гаусса-Жордана решения однородной системы. Составляется матрица, в которой координаты векторов образуют строки. Далее преобразованиями Гаусса она приводится к виду, где строки линейно независимы. Тогда количество строк в последней матрице является также рангом исходного набора векторов.

Для нашего набора

$$A=\begin{pmatrix}1 & \boxed{1} & -2\\ 2 & -3 & 1\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 5 & 0 & -5\\ \boxed{3} & 0 & -3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

В матрице $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ есть два линейно независимых столбца, так как матрица $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ условно треугольная: переставив в ней столбцы, мы получим треугольную матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, строки и столбцы которой линейно независимы. Значит, $rank(a) = 2$.

В исходной матрице координаты векторов можно также записывать по столбцам.

Пример 2. Опишите все линейные зависимости набора векторов $a = \{a_1, a_2, \ldots\}$. Определите ранг этого набора. Перечислите все возможные базы этого набора. Укажите, какие векторы набора нельзя выразить через остальные.

(1) $a = \{a_1(1;-5;2), a_2(1;-2;-1), a_3(-2;1;5)\}$.

(2) $a = \{a_1(3;-7;-4), a_2(1;-3;-1), a_3(-1;1;3)\}$.

(3) $a = \{a_1(3;2;4), a_2(0;1;-1), a_3(2;1;3), a_4(5;4;6)\}$.

Решение. Линейная зависимость набора векторов $a = \{a_1, a_2, \ldots\}$ эквивалентна наличию нетривиального решения у векторного уравнения $x_1 a_1 + x_2 a_2 + \ldots = \overline{0}$. В пространстве R^n такое векторное уравнение записывается в виде однородной СЛАУ. Столбцы матрицы коэффициентов этой СЛАУ составляют координаты векторов a_j.

(1) Однородная СЛАУ имеет вид

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ -5x_1 - 2x_2 + x_3 = 0. \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$

Решим ее помощью схемы Гаусса-Жордана:

$$\begin{pmatrix} 1 & \boxed{1} & -2 \\ -5 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & -3 \\ \boxed{3} & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ФНР последней системы состоит из одного вектора $f_1 = (-1;3;1)$. Мы получили единственную (с точностью до множителя) линейную зависимость: $-a_1 + 3a_2 + a_3 = \overline{0}$. Итак, тройка $\{a_1, a_2, a_2\}$ линейно зависима, а линейно независимыми являются пары $\{a_1, a_2\}$, $\{a_1, a_3\}$, $\{a_2, a_3\}$. Любая из этих пар может служить базой набора a, $rank(a) = 2$. Зависимость $-a_1 + 3a_2 + a_3 = \overline{0}$ показывает, что любой из трех векторов можно выразить через два других.

(2) Однородная СЛАУ имеет вид

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -7x_1 - 3x_2 + x_3 = 0. \\ -4x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Решим ее помощью схемы Гаусса-Жордана:

$$\begin{pmatrix} 3 & \boxed{1} & -1 \\ -7 & -3 & 1 \\ -4 & -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ \boxed{-1} & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & \boxed{2} \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Наша система имеет только тривиальное решение. Итак, тройка $\{a_1, a_2, a_2\}$ линейно независима и является единственной базой набора a, $rank(a) = 3$. Линейная независимость означает, что ни один из трех векторов нельзя выразить через два других.

(3) Однородная СЛАУ имеет вид

$$\begin{cases} 3x_1 \qquad + 2x_3 + 5x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 0. \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$$

Решим ее:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & \boxed{1} & 4 \\ 4 & -1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{-1} & -2 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ -2 & -4 & 0 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

ФНР этой системы состоит из двух векторов

$$f_1 = (-2;1;3;0) \text{ и } f_1 = (-3;0;2;1).$$

Мы получили две не пропорциональных линейных зависимости:

$$-2a_1 + a_2 + 3a_3 = \bar{0} \text{ и } -3a_1 + 2a_3 + a_4 = \bar{0}.$$

Из этого следует, что любая пара $\{a_j, a_k\}$ линейно независима, а другие векторы набора выражаются через эти два вектора. Значит, любая пара $\{a_j, a_k\}$ может служить базой набора a, $rank(a) = 2$.

Пример 3. Найдите ранг набора строк матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & P \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & P-4 & 0 \end{pmatrix}$$

при всех значениях параметра P.

Решение. Будем преобразовывать матрицу A так, как при решении однородной СЛАУ:

$$\begin{pmatrix} 3 & 8 & P \\ \boxed{-1} & -3 & 1 \\ -2 & P-4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & \boxed{-1} & P+3 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & P+2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & P+3 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & P^2+5P+4 \end{pmatrix}.$$

При данных преобразованиях ранг набора строк матрицы не меняется. Если $P^2+5P+4=(P+1)(P+4)\neq 0$, то, сократив третью строку на число (P^2+5P+4) и переставив первые две строки, получим треугольную матрицу

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & P+3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

с ненулевой главной диагональю, набор строк которой имеет ранг три. При $P=-1$ и $P=-4$ ранг набора строк получающихся матриц

$$A_1=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

равен двум.

Пример 4. Найдите коэффициенты разложения вектора $b(0;1;-1)$ по векторам набора $a=\{a_1(2;3;-2), a_2(1;2;3), a_3(2;3;1)\}$.

Решение. Разложение вектора b по набору векторов $a=\{a_1,a_2,\ldots\}$ эквивалентно наличию решения у векторного уравнения $x_1a_1+x_2a_2+\ldots=b$. В пространстве R^n такое уравнение эквивалентно неоднородной СЛАУ $AX=B$, у которой столбцы матрицы A составляют координаты векторов a_j, а столбец свободных членов B состоит из координат вектора b. Решим систему методом Гаусса-Жордана:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & \boxed{1} & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & \boxed{-1} & 1 \\ -8 & 0 & -5 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ \boxed{-3} & 0 & 0 & -6 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Следовательно, $x_1=2$, $x_2=2$, $x_3=-3$, откуда $b=2a_1+2a_2-3a_3$.

Типовые задачи

1. Найдите ранг матрицы A.

а) $A=\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

б) $A=\begin{pmatrix} 7 & -5 & 4 \\ 9 & -2 & 8 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

в) $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 7 & 6 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$.

г) $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 4 & 6 & -5 & 4 \end{pmatrix}$.

д) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

е) $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Дополнительно.

ж) $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

з) $A=\begin{pmatrix} 8 & 1 & -7 & 12 \\ 5 & 2 & -3 & 7 \\ -3 & 1 & 4 & -5 \\ -1 & 4 & 5 & -3 \end{pmatrix}$.

и) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Найдите ранг набора векторов $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

а) $a_1=(1;\ -1;\ -2)$, $a_2=(2;\ 1;\ 1)$, $a_3=(3;\ 1;\ -2)$.

б) $a_1=(-2;\ -1;\ 3)$, $a_2=(-3;\ 1;\ 2)$, $a_3=(-3;\ -4;\ 7)$.

в) $a_1=(2;\ -1;\ 5;\ 7)$, $a_2=(4;\ -2;\ 7;\ 5)$, $a_3=(-1;\ -3;\ 4;\ -5)$, $a_4=(-4;\ 2;\ -1;\ 13)$.

г) $a_1=(3;-1;0;-2)$, $a_2=(0;2;2;4)$, $a_3=(3;0;1;0)$, $a_4=(1;1;1;1)$.

д) $a_1=(2;1;0;1)$, $a_2=(4;3;2;3)$, $a_3=(-5;-1;3;-1)$, $a_4=(1;2;3;2)$.

е) $a_1=(1;\ -2;\ 4;\ -3;\ 2)$, $a_2=(3;\ 4;\ -5;\ 3;\ 1)$, $a_3=(-5;\ 0;\ 7;\ -5;\ -3)$, $a_4=(7;\ 6;\ 4;\ -5;\ 6)$.

3. Найдите ранг и базу набора векторов $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

а) $a_1=(-1;\ 2;\ 1)$, $a_2=(-1;\ 1;\ 3)$, $a_3=(2;\ -1;\ 1)$.

б) $a_1=(3;\ 1;\ -2)$, $a_2=(1;\ 2;\ 1)$, $a_3=(3;\ -4;-7)$.

в) $a_1=(0;\ 0;\ 0)$, $a_2=(1;\ 0;\ 1)$, $a_3=(1;\ -1;-2)$.

г) $a_1=(1;\ 2;\ -1)$, $a_2=(-1;-2;\ 1)$, $a_3=(-3;\ -6;\ 3)$, $a_4=(-2;\ -4;\ 2)$.

д) $a_1=(-2;\ 3;\ 4;\ -3;\ -1)$, $a_2=(3;\ -2;\ 1;\ 0;\ 4)$, $a_3=(2;\ -4;\ -5;\ 3;\ 2)$, $a_4=(5;\ 3;\ 1;\ -3;\ -3)$.

Дополнительно.

е) $a_1=(3;\ -1;\ 1;\ 2)$, $a_2=(3;\ 1;\ -2;\ 3)$, $a_3=(6;\ -4;\ 5;\ 3)$, $a_4=(9;\ -1;\ 0;\ 7)$.

ж) $a_1=(3;\ 5;\ -4;\ -6;\ -1)$, $a_2=(3;\ 4;\ 1;\ 0;\ -2)$, $a_3=(-5;\ -6;\ -5;\ -4;\ 4)$, $a_4=(2;\ 3;\ -1;\ -2;\ -1)$.

4. Найдите ранг набора векторов $\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ и определите полную систему зависимостей этих векторов. Какой вектор нельзя выразить через остальные?

а) $a_1=(4;\ 3;\ -1)$, $a_2=(-1;\ 2;\ 1)$, $a_3=(-1;\ 2;\ 3)$.

б) $a_1=(1;\ 2;\ -1)$, $a_2=(0;\ 0;\ 0)$, $a_3=(1;\ -1;\ 2)$.

в) $a_1=(1;\ 0;\ 1)$, $a_2=(1;\ 1;\ 0)$, $a_3=(2;\ -1;\ 1)$, $a_4=(-1;-1;\ 1)$.

г) $a_1=(2;\ -1;\ 3;\ -2)$, $a_2=(-4;\ 2;\ -6;\ 4)$, $a_3=(1;\ -1;\ 3;-2)$.

Дополнительно.

д) $a_1=(0;\ 5;\ -1)$, $a_2=(2;\ -1;\ -1)$, $a_3=(3;\ 1;\ -2)$.

е) $a_1=(3;2;1)$, $a_2=(10;7;1)$, $a_3=(0;1;-7)$, $a_4=(2;1;3)$.

5. Определите ранг набора векторов $\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ и полную систему зависимостей этих векторов. Перечислите все варианты базы этого набора.

а) $a_1=(1;\ 2;\ -1)$, $a_2=(1;\ 0;\ 1)$, $a_3=(1;\ -1;\ 2)$.

б) $a_1=(0;\ 5;\ -1)$, $a_2=(2;\ -1;\ -1)$, $a_3=(3;\ 1;\ -2)$.

в) $a_1=(1;\ 2;\ 1;\ 3)$, $a_2=(3;\ 1;\ 2;\ 2)$, $a_3=(7;\ -1;\ 4;\ 0)$, $a_4=(-1;\ 1;\ -3;\ 2)$.

г) $a_1=(9;-4;\ 2;\ -1;\ 3)$, $a_2=(3;\ 1;\ -2;\ 1;\ 3)$, $a_3=(2;\ 3;\ -1;\ 2;\ 3)$, $a_4=(1;\ -2;\ 2;\ -1;\ -1)$, $a_5=(1;\ 3;\ -1;\ 1;\ -4)$.

6. Найдите ранг матрицы A при всех значениях параметра p.

а) $A=\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & p+2 \end{pmatrix}$.

б) $A=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & -3 \\ -2 & 1 & 2p-3 \end{pmatrix}$.

в) $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 2 & p-1 & -3 \\ -2 & -1 & 2p-1 \end{pmatrix}$.

г) $A=\begin{pmatrix} p^2-4 & 0 & p^2-4 \\ 2p-4 & p^2-3p+2 & 2p-4 \\ p^2+2p-8 & 2p-4 & 2p-4 \end{pmatrix}$.

Дополнительно.

д) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & p \\ 1+p & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

е) $A=\begin{pmatrix} p & p & p+1 \\ 1 & 1 & 0 \\ p^2 & p+2 & p+1 \end{pmatrix}$.

ж) $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -7 & p+1 \\ -1 & p-2 & 1 \end{pmatrix}$.

з) $A=\begin{pmatrix} p^2-3p+2 & -2p+2 & p^2-5p+4 \\ 0 & p^2-1 & -2p+2 \\ p^2-3p+2 & -2p+2 & -2p+2 \end{pmatrix}$.

7. Найдите все значения параметра p, при которых набор векторов $\{a_1, a_2, \ldots\}$ линейно зависим.

а) $a_1=(3;\ -4;\ 5),\ a_2=(1;\ -1;\ 2),\ a_3=(0;\ -1;\ -\mathrm{p})$.

б) $a_1=(1;\ -1;\ -2),\ a_2=(-2;\ 2;\ 4),\ a_3=(3;\ \mathrm{p}-1;\ \mathrm{p})$.

в) $a_1=(1;\ -2;\ -2),\ a_2=(p-1;\ 4;\ 5),\ a_3=(3;\ -6;\ 2\mathrm{p})$.

г) $a_1(x)=2+2x+x^2,\ a_2(x)=1+3x+x^2,\ a_3(x)=3+5x+px^2$.

д) $a_1=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},\ a_2=\begin{pmatrix} p+1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},\ a_3=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Дополнительно.

е) $a_1(x)=1+px+3x^2,\ a_2(x)=1-2x^2,\ a_3(x)=2+x+px^2$.

ж) $a_1(x)=\sin x+p\cos x+p\cos 2x$, $a_2(x)=3\sin x+\cos x+2\cos 2x$, $a_3(x)=\sin x+2\cos x-\cos 2x$.

з) $a_1=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}$, $a_2=\begin{pmatrix}1 & 2\\ p & -1\end{pmatrix}$, $a_3=\begin{pmatrix}4 & 1-2p\\ 1 & 5\end{pmatrix}$.

8. Найдите все значения параметра p, при которых набор $\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ линейно независим.

а) $a_1=(3;-1;-2)$, $a_2=(-1;\,2;\,4)$, $a_3=(-2;1;p)$.

б) $a_1=(2;1;-1)$, $a_2=(4;p;1)$, $a_3=(-4;-2;2)$.

в) $a_1=(4;-2;-7)$, $a_2=(1;p-2;\,5)$, $a_3=(3;-1;-3)$.

9. Найдите все значения параметра p, при которых вектор b выражается линейно через векторы $\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$.

а) $b=(p;\ p^2+3)$, $a_1=(1;\ 2)$, $a_2=(-2;\ 1)$.

б) $b=(-4;\ 3)$, $a_1=(3;\ 1)$, $a_2=(p;\ -2)$.

в) $b=(4;\ 2p-1;\ 7;\ -1)$, $a_1=(2;\ -1;\ 3;\ 1)$, $a_2=(1;\ -3;\ 2;\ -1)$, $a_3=(4;\ 3;\ 5;\ 5)$.

г) $b=(-4;1;p)$, $a_1=(-2;4;2)$, $a_2=(1;-2;-1)$, $a_3=(-1;2;3)$.

Дополнительно!

д) $b=(3;\ -2;\ 5)$, $a_1=(2;\ 1;\ -3)$, $a_2=(1;\ -1;\ 2)$, $a_3=(2p+2;\ 3;\ -7)$.

е) $b=(1;3;3)$, $a_1=(2;p+3;-1)$, $a_2=(-1;1;-5)$, $a_3=(2;4;7)$.

ж) $b=(6;\ 2;\ 13)$, $a_1=(2;4;1)$, $a_2=(1;3;1-p)$, $a_3=(1;p;1)$.

10. Найдите коэффициенты разложения вектора b по векторам набора $\{a_1,a_2,\dots\}$.

а) $b=(4;\ -7)$, $a_1=(1;\ 0)$, $a_2=(0;\ 1)$.

б) $b=(-4;\ 15)$, $a_1=(2;\ 3)$, $a_2=(3;\ 1)$.

в) $b=(3;\ -5;\ 2)$, $a_1=(1;\ 0;\ 0)$, $a_2=(0;\ 1;\ 0)$, $a_3=(1;\ 1;\ 1)$.

г) $b=(5;\ 2;\ 1)$, $a_1=(2;\ 3;-1)$, $a_2=(3;-1;\ 2)$.

д) $b=(0;\ -7;\ 3)$, $a_1=(2;\ -1;\ 3)$, $a_2=(1;\ -1;\ 2)$, $a_3=(2;\ 3;\ 1)$.

е) $b=(-1;\ 1;\ 2)$, $a_1=(2;\ 3;-1)$, $a_2=(3;\ 2;\ 1)$, $a_3=(1;-1;\ 2)$.

ж) $b(x)=-1+5x-7x^2$, $a_1(x)=1-x^2$, $a_2(x)=1-x+2x^2$, $a_3(x)=2x+x^2$.

з) $b(x)=2(2\cos x-3\sin x)^2$, $a_1(x)=\sin 2x$, $a_2(x)=\cos 2x$, $a_3(x)=1$.

и) $B=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$, $A_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $A_3=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

Дополнительно.

к) $b=(2;3)$, $a_1=(4;-3)$, $a_2=(-2;3)$.

л) $b=(6;1)$, $a_1=(3;-5)$, $a_2=(4;-3)$.

м) $b(x)=-2x^2+6x+3$, $a_1(x)=x^2+2x-1$, $a_2(x)=-2x^2+x+3$, $a_3(x)=2x^2-x-2$.

н) $b(x)=5+4x-3x^2$, $a_1(x)=2+x-3x^2$, $a_2(x)=1+x^2$, $a_3(x)=x+x^2$.

о) $B=\begin{pmatrix}7 & -2\\ 7 & -2\end{pmatrix}$, $A_1=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 3 & -4\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -2 & 7\end{pmatrix}$, $A_3=\begin{pmatrix}-3 & 5\\ -4 & 6\end{pmatrix}$.

п) $B=\begin{pmatrix}3 & 5\\ -5 & 4\end{pmatrix}$, $A_1=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $A_3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$.

Дополнительные задачи

11. Существует ли набор из двух векторов, имеющий ранг нуль?
12. Приведите пример трех линейно зависимых векторов, один из которых нельзя выразить через два других.
13. Набор векторов F в R^3 таков, что ранг набора F не меняется при добавлении к нему вектора $a\neq\overline{0}$ и меняется при добавлении вектора b. Каким может быть ранг такого набора?
14. Приведите пример такого линейно зависимого набора F векторов в R^3, ранг которого при добавлении произвольного вектора не меняется.
15. Приведите пример такого непустого набора F векторов в R^3, ранг которого при добавлении произвольного ненулевого вектора увеличивается.
16. Приведите пример 3-х линейно зависимых многочленов в пространстве $P_2[x]$ многочленов степени не выше второй, не каждый из которых линейно выражается через остальные.
17. Приведите пример набора из 3-х векторов в R^3, у которого есть единственная база:

    а) из двух векторов. б) из одного вектора.
18. Набор векторов $\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ имеет ровно одну базу. Опишите все варианты, при которых это возможно.
19. Приведите пример набора из 3-х векторов в R^3, у которого нет базы.
20. Приведите пример набора из 4-х векторов в R^3, имеющего ровно две базы.
21. Приведите пример набора из четырех разных ненулевых многочленов в $P_3[x]$, имеющего ровно две базы.

22. Пусть A – матрица размером 4×4. Верны ли следующие утверждения?
    а) Если в матрице есть три ЛНЗ строки, то в ней есть три ЛНЗ столбца.
    б) Если в матрице есть три ЛНЗ строки, то в ней любые три столбца ЛНЗ.
    в) Если в матрице есть три ЛЗ строки, то в ней есть три ЛЗ столбца.
    г) Если в матрице есть три ЛЗ строки, то в ней любые три столбца ЛЗ.
    д) Если в матрице есть три ЛЗ строки, то в ней есть столбец, который выражается через три других.
    е) Если в матрице любые три строки ЛЗ, то в ней есть три ЛЗ столбца.
    ж) Если в матрице любые три строки ЛЗ, то в ней любые три столбца ЛЗ.
    з) Если в матрице любые три строки ЛНЗ, то в ней любые три столбца ЛНЗ.
    и) Если в матрице любые три строки ЛНЗ, то в ней может быть столбец, который выражается через три других.
23. Матрица порядка 3×4 такова, что присоединение к ней произвольного столбца не меняет ее ранга. Чему в том случае равен ранг матрицы?
24. Матрица A размером 4×3 такова, что присоединение к ней строки $(1;1;1)$ меняет ее ранг, а присоединение строки $(1;2;1)$ или строки $(-1;1;1)$ не меняет ее ранга. Чему в этом случае равен ранг матрицы A?
25. Набор векторов $\{b_1,b_2\}$ линейно независим и линейно выражается через набор $\{a_1,a_2\}$. Докажите, что набор $\{a_1,a_2\}$ линейно выражается через набор $\{b_1,b_2\}$.
26. Набор векторов $\{b_1,b_2\}$ линейно независим, и наборы $\{b_1,b_2\}$ и $\{a_1,a_2,a_3\}$ линейно выражаются друг через друга.
    а) Чему может быть равен ранг набора $\{a_1,a_2,a_3\}$?
    б) Докажите, что хотя бы один из векторов a_j таков, что $r\{b_1,b_2,a_j\}=3$.
27. Набор векторов $\{b_1,b_2\}$ линейно независим и линейно выражается через набор $\{a_1,a_2,a_3\}$, а набор $\{a_1,a_2,a_3\}$ не выражается линейно через набор $\{b_1,b_2\}$. Чему может быть равен ранг набора $\{a_1,a_2,a_3\}$?
28. Наборы векторов $\{a_1,a_2,a_3\}$ и $\{b_1,b_2,b_3\}$ линейно выражаются друг через друга, набор $\{b_1,b_2,a_1\}$ линейно независим. Чему может быть равен ранг набора $\{a_1,a_2,a_3\}$?

29. Наборы векторов $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ и $\{b_1, b_2, b_3\}$ линейно выражаются друг через друга.
    а) Верно ли, что если набор $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ ЛЗ, то набор $\{b_1, b_2, b_3\}$ тоже ЛЗ?
    б) Верно ли, что если набор $\{b_1, b_2, b_3\}$ ЛНЗ, то набор $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ тоже ЛНЗ?
30. Верно ли утверждение: если любой вектор линейного пространства R^n можно разложить по векторам $\{f_1, \ldots, f_n\}$, то набор $\{f_1, \ldots, f_n\}$ – базис в R^n?
31. Верно ли утверждение: если существует вектор, который имеет два различных разложения по векторам $\{f_i\}$, то набор $\{f_i\}$ линейно зависим?

Ответы на типовые задачи

1. а) $r=2$. б) $r=3$. в) $r=2$. г) $r=3$. д) $r=4$.
   е) $r=2$. ж) $r=3$. з) $r=2$. и) $r=2$.
2. а) $r=3$. б) $r=2$. в) $r=3$.
   г) $r=3$. д) $r=2$. е) $r=3$.
3. а) $r=3$; $\{a_1, a_2, a_3\}$. б) $r=2$; например, $\{a_1, a_2\}$.
   в) $r=2$; $\{a_2, a_3\}$. г) $r=1$; например, $\{a_1\}$.
   д) $r=4$; $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. е) $r=2$; например, $\{a_1, a_2\}$.
   ж) $r=2$; например, $\{a_1, a_2\}$.
4. а) $r=3$; комбинаций нет; каждый.
   б) $r=2$; $a_2=0$; a_1 и a_3.
   в) $r=3$; $-3a_1+3a_2+a_3+2a_4=0$; никакой.
   г) $r=2$; $2a_1+a_2=0$; a_3.
   д) $r=2$; $a_1+3a_2-2a_3=0$, никакой.
   е) $r=2$; $2a_1-a_3-3a_4=0$ и $a_2-2a_3-5a_4=0$; никакой.
5. а) $r=2$; $a_1-3a_2+2a_3=0$; $\{a_1, a_2\}$, $\{a_1, a_3\}$ и $\{a_2, a_3\}$.
   б) $r=2$; $a_1+3a_2-2a_3=0$; $\{a_1, a_2\}, \{a_1, a_3\}, \{a_2, a_3\}$.
   в) $r=3$, $2a_1-3a_2+a_3=0$; $\{a_1, a_2, a_4\}$, $\{a_1, a_3, a_4\}$ и $\{a_2, a_3, a_4\}$.
   г) $r=4$; $a_1-2a_2-3a_4=0$; $\{a_1, a_2, a_3, a_5\}$, $\{a_1, a_3, a_4, a_5\}$ и $\{a_2, a_3, a_4, a_5\}$.
6. а) $r=2$ при $p=-1$; $r=3$ при $p \neq -1$.
   б) $r=2$ при всех p.
   в) $r=1$ при $p=2$; $r=3$ при $p \neq 2$.
   г) $r=0$ при $p=2$; $r=2$ при $p=-2,\ 1$; $r=3$ при прочих p.
   д) $r=2$ при $p=-2,\ p=1$; $r=3$ при прочих p.

е) $r=1$ при $p=-1$; $r=2$ при $p=2$; $r=3$ при прочих p.
ж) $r=2$ при $p=-4,-2$; $r=3$ при прочих p.
з) $r=0$ при $p=1$; $r=2$ при $p=2,\ -1$; $r=3$ при прочих p.

7. а) $p=1$. б) При любых р. в) $p=-1,\ p=-3$.
г) $p=2$. д) $p=-2$. е) $p=1$.
ж) $p=\frac{1}{2}$. з) $p=4$.

8. а) $p\neq 2$. б) Ни при каких р. в) $p\neq 3$.

9. а) При всех р. б) $p\neq -6$. в) $p=-3$.
г) Ни при каких р. д) $p\neq -1$. е) При всех p.
ж) $p\neq 1$.

10. а) $(4;\ -7)$. б) $(7;\ -6)$. в) $(1;\ -7;\ 2)$.
г) $(1;1)$. д) $(3;\ -2;\ -2)$. е) Не разлагается.
ж) $(2;-3;\ 1)$. з) $(-12;-5;\ 13)$. и) $(1;\ 3;\ 1)$.
к) $(2;3)$. л) $(-2;\ 3)$. м) $(2;\ 1;-1)$.
н) $(2;\ 1;\ 2)$. о) $(1;\ 2;-2)$. п) $(-5;\ 2;-3)$.

Ответы на дополнительные задачи

11. $f=\left\{\overline{0},\overline{0}\right\}$.
12. $a_1(1;0;0),\ a_2(1;0;0),\ a_3(1;1;0)$.
13. $r(F)=0,1$ или 2.
14. $F=\left\{a_1(1;0;0), a_2(0;1;0), a_3(0;0;1), a_4(1;0;0)\right\}$.
15. $F=\left\{a_1(0;0;0)\right\}$. 16. $p_1(x)=1,\ p_2(x)=1,\ p_3(x)=x$.
17. а) $F=\left\{a_1(1;0;0),\ a_2(0;1;0),\ a_3(0;0;0)\right\}$.
б) $F=\left\{a_1(1;0;0),\ a_2(0;0;0),\ a_3(0;0;0)\right\}$.
18. Указание. В наборе нет поднабора из ненулевых элементов, который был бы ЛЗ.
19. $F=\left\{a_1(0;0;0),\ a_2(0;0;0),\ a_3(0;0;0)\right\}$.
20. $F=\left\{a_1(1;0;0), a_2(0;1;0), a_3(0;0;1), a_4(1;0;0)\right\}$.
21. $F=\left\{p_1(x)=1,\ p_2(x)=2,\ p_3(x)=x,\ p_4(x)=x^2\right\}$.
22. а) Верно. б) Неверно. в) Неверно.
г) Неверно. д) Верно. е) Верно.
ж) Верно. з) Неверно. и) Верно.
23. Трем.
24. Двум.
25. Указание. Рассмотрите набор $\{a_1, a_2, b_1, b_2\}$.

26. а) Двум. б) Указание. Рассмотрите набор $\{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2\}$.
27. Трем.
28. Трем.
29. а) Неверно. б) Неверно.
30. Неверно.
31. Верно.

V. ЛИНЕЙНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА

Определения и формулы

Подмножество M линейного пространства V называется линейным подпространством, если для любых $x, y \in V$ и любых $\lambda, \mu \in R$ выполняется $\lambda x + \mu y \in V$.

Любое линейное подпространство является линейным пространством.

Пересечением $L = L_1 \cap L_2$ линейных подпространств называется множество их общих элементов.

Пересечение линейных подпространств является линейным подпространством.

Суммой $L = L_1 + L_2$ двух подпространств L_1 и L_2 называется множество, содержащее все суммы вида $a_1 + a_2$, где $a_1 \in L_1$, $a_2 \in L_2$.

Сумма линейных подпространств является линейным подпространством.

Сумма линейных подпространств $L = L_1 + L_2 + \ldots + L_k$ называется прямой суммой (обозначение $L = L_1 \oplus L_2 \oplus \ldots \oplus L_k$), если из равенства $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = \overline{0}$, где $a_j \in L_j$, следует $a_j = \overline{0}$ для всех j.

Сумма линейных подпространств $L = L_1 + L_2 + \ldots + L_k$ является прямой суммой тогда и только тогда, когда $\sum_{j=1}^{k} \dim(L_j) = \dim(L)$.

Для любых двух линейных подпространств выполняется формула Грассмана:

$$\dim(L_1 + L_2) + \dim\left(L_1 \cap L_2\right) = \dim(L_1) + \dim\left(L_2\right).$$

Линейной оболочкой набора $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ называется множество $L\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, содержащее все суммы вида $a_1 + a_2 + \ldots + a_k$, где $a_j \in L_j$ для всех j.

Линейная оболочка набора является линейным подпространством.

Множество решений однородной СЛАУ ранга r в координатном пространстве R^n является линейным подпространством размерности $k = n - r$, совпадающей с количеством свободных переменных. Базисом подпространства может служить любой ФНР данной СЛАУ.

Обратное утверждение: каждое линейное подпространство в R^n размерности k является множеством решений некоторой однородной СЛАУ ранга $r = n - k$.

Для того чтобы построить пересечение двух подпространств, каждое из них должно быть представлено в виде множества решений соответствующей СЛАУ. Затем следует объединить уравнения обеих СЛАУ в одну СЛАУ.

Для того чтобы построить сумму двух подпространств, каждое из них должно быть представлено в виде линейной оболочки некоторого набора. Затем следует выписать линейную оболочку объединения двух наборов.

Примеры решения задач

Пример 1. Какие из множеств $M_k \subset R^n$, выделяемых некоторым условием, являются подпространствами?

а) $M_1 = \{x(x_1, x_2):\ x = t \cdot (1;-2),\ \text{где}\ t \in R\}$.

б) $M_2 = \{x(x_1, x_2):\ x_1 = 0\}$.

в) $M_3 = \{x(x_1, x_2):\ |x_1| = |x_2|\}$.

г) $M_4 = \{x(x_1, x_2):\ x_1 + x_2 = 1\}$.

д) $M_5 = \{x(x_1, x_2):\ x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 = 0\}$.

е) $M_6 = \{x(x_1, x_2):\ x_1^2 + 2x_1x_2 - 3x_2^2 = 0\}$.

Решение. Ответ отрицательный, если нуль-вектор не принадлежит M_k. В частном случае может сработать теорема: множество решений однородной СЛАУ является подпространством. Если оба рассуждения не работают, надо проверить выполнение определения линейного подпространства: если $x, y \in R^n$ и $\lambda, \mu \in R$, то $\lambda x + \mu y \in R^n$.

а) Проверим определение линейного подпространства. Пусть векторы $x = t_1 \cdot (1;-2)$, $y = t_2 \cdot (1;-2)$, тогда
$\lambda x + \mu y = \lambda t_1 \cdot (1;-2) + \mu t_2 \cdot (1;-2) = (\lambda t_1 + \mu t_2) \cdot (1;-2) \in R^n$.
Множество M_1 является подпространством.

б) Множество M_2 является подпространством, так как оно является решением однородной СЛАУ, состоящей из одного уравнения $x_1 = 0$.

в) Множество M_3 не является подпространством, так как векторы $x = (1;1)$ и $y = (1;-1)$ принадлежат M_3, а вектор $x + y = (2;0) \notin M_3$.

г) Множество M_4 не является подпространством, так как вектор $\overline{0} = (0;0) \notin M_4$.

д) Уравнение $x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 = 0$ имеет только нулевое решение, а множество $M_5 = \{(0;0)\}$ является подпространством.

е) Множество M_6 не является подпространством. Уравнение $x_1^2 + 2x_1x_2 - 3x_2^2 = 0$ эквивалентно уравнению $(x_1 - x_2)(x_1 + 3x_2) = 0$.

Векторы $x=(1;1)$ и $y=(3;-1)$ принадлежат M_6, а вектор $x+y=(4;0)\notin M_6$.

Пример 2. Найдите размерность и базис подпространства L, заданного однородной СЛАУ

$$L=\begin{cases} -2y+z-2t=0 \\ x-y \quad\quad +t=0 \end{cases}.$$

Решение. Известно, что множество решений однородной системы является подпространством. Базисом L является ФНР этой СЛАУ, $\dim(L)=n-r=4-2=2$. Решив СЛАУ, получим $f_1(1;1;2;0)$, $f_2(-1;0;2;1)$.

Пример 3. Найдите размерность и базис линейной оболочки $L=L\{a_1,a_2,a_3\}$, где $a_1=(1;3;-2;-1)$, $a_2=(2;1;1;-1)$, $a_3=(-1;7;-8;-1)$.

Решение. Размерность и базис подпространства L совпадают с рангом и базой набора $\{a_1,a_2,a_3\}$. Имеем:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & \boxed{-1} \\ -1 & 7 & -8 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ -3 & 6 & -9 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Базисом может служить набор $\{f_1(-1;2;-3;0), \{f_2(2;1;1;-1)\}, \dim(L)=2$.

Пример 4. Докажите, что подмножество M пространства многочленов степени не выше четырех, для которых $\begin{cases} p(-x)=p(x) \\ p'(2)=0 \end{cases}$, является подпространством. Найдите базис и размерность этого подпространства.

<u>Решение</u>. Прежде всего надо показать, что если $p(x)\in M$, $q(x)\in M$, то $s(x)=\lambda\cdot p(x)++\mu\cdot q(x)\in M$.

(1) $s(-x)=\lambda\cdot p(-x)+\mu\cdot q(-x)=-\lambda\cdot p(x)-\mu\cdot q(x)=-s(x)$.

(2) $s'(2)=\lambda\cdot p'(2)+\mu\cdot q'(2)=\lambda\cdot 0+\mu\cdot 0=0$.

Пусть $p(x)=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$. Условие $p(-x)=p(x)$ изображается тождеством

$$a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0= =a_4x^4-a_3x^3+a_2x^2-a_1x+a_0,$$

или $a_3x^3+a_1x=0$. Поскольку последнее равенство должно выполняться для всех x, получаем $a_3=0,\ a_1=0$.

Далее, $p'(x)=4a_4x^3+3a_3x^2+2a_2x+a_1$, откуда следует уравнение $p'(2)=32a_4+12a_3+4a_2+a_1=0$. В итоге набор коэффициентов многочлена, принадлежащего подмножеству M, является решением однородной СЛАУ

$$\begin{cases} a_1 & = 0 \\ a_3 & = 0. \\ a_2 + 8a_4 & = 0 \end{cases}$$

Множество L решений этой СЛАУ является подпространством. Ранг СЛАУ $r = 3$, откуда $\dim(L) = 5 - 3 = 2$. Свободными переменными являются коэффициенты a_0 и a_4.

Согласно теореме об изоморфизме линейных пространств, множества M и L изоморфны. При $a_0 = 1$, $a_4 = 0$ получаем первый базисный многочлен $p_1(x) = 1$, при $a_0 = 0$, $a_4 = 1$ получаем второй базисный многочлен $p_2(x) = x^4 - 8x^2$.

Пример 5. Множество $M \in R^9$ состоит из всех векторов, у которых 1-я координата совпадает со 2-й, а 4-я координата с 7-й и 8-й. Показать, что это множество является подпространством, и указать его размерность и базис.

Решение. Множество M является решением однородной СЛАУ

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_7 = x_4 \\ x_8 = x_4 \end{cases}$$

ранга $r = 3$, со свободными переменными x_3, x_4, x_5, x_6, x_9. Поэтому M – линейное подпространство, $\dim(M) = 6$. Базис в M состоит из шести векторов:

$f_1(1;1;0;0;0;0;0;0;0)$, $f_2(0;0;1;0;0;0;0;0;0)$, $f_3(0;0;0;1;0;0;1;1;0)$,
$f_4(0;0;0;0;1;0;0;0;0)$, $f_5(0;0;0;0;0;1;0;0;0)$, $f_6(0;0;0;0;0;0;0;0;1)$.

Пример 6. Линейную оболочку набора векторов $L = L\{a_1, a_2, \ldots\}$ задать как множество решений СЛАУ.

а) $a_1 = (1;2;-2)$, $a_2 = (1;-1;1)$.

б) $a_1 = (3;\ 2;\ -3;\ -1;\ -2)$, $a_2 = (1;\ 2;\ -2;\ 2;\ 1)$, $a_3 = (-2;\ 1;\ 1;\ 4;\ 5)$

Решение. а) Условие, что вектор $x \in L(a_1, a_2)$, то есть $x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2$, эквивалентно утверждению, что совместна неоднородная СЛАУ $AX = B$, в которой столбцами матрицы A являются координаты векторов a_1 и a_2, а столбец B состоит из координат x_1, x_2, x_3 вектора x. Эта система приводится к виду

$$\left(\begin{array}{rr|c} 1 & 1 & x_1 \\ 2 & -1 & x_2 \\ -2 & 1 & x_3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{rr|c} 1 & 1 & x_1 \\ 2 & -1 & x_2 \\ 0 & 0 & x_2 + x_3 \end{array}\right).$$

Последняя система совместна тогда и только тогда, когда выполнено условие $\{x_2 + x_3 = 0$. Это и есть искомая система уравнений для L.

б) Составим систему уравнений по образцу пункта а) и преобразуем ее с помощью преобразований Гаусса-Жордана:

$$\left(\begin{array}{rrr|c} 3 & 1 & -2 & x_1 \\ 2 & 2 & 1 & x_2 \\ -3 & -2 & 1 & x_3 \\ -1 & 2 & 4 & x_4 \\ -2 & 1 & 5 & x_5 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{rrr|c} 0 & 1 & 1 & -x_1 - x_3 \\ 0 & 0 & 3 & 6x_1 + x_2 + 6x_3 + 2x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \\ 1 & 0 & -2 & -2x_1 - 2x_3 - x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 3x_1 + 3x_3 + 2x_4 - x_5 \end{array}\right).$$

Последняя СЛАУ совместна тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \end{cases}.$$

Эти соотношения представляют собой СЛАУ для L.

Другой способ. Составим вспомогательную однородную СЛАУ с матрицей A, строки которой составляют координаты векторов a_k:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 - 2x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0 \end{cases}.$$

Векторы $b_1 = (2;\ -1;\ 1;\ 1;\ 0)$, $b_2 = (1; -2; -1;\ 0;\ 1)$ образуют ФНР этой СЛАУ. Для матрицы B, строки которой составляют координаты векторов b_j, получим $AB^T = 0$. Но тогда $BA^T = 0$. Из этого и из соотношения рангов матриц ($r(A) + r(B) = n$) следует, что столбцы матрицы A^T составляют ФНР для однородной СЛАУ $BX = 0$. В итоге мы получили СЛАУ для L:

$$L: \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_5 = 0 \end{cases}.$$

Системы, полученные двумя способами, эквивалентны.

Пример 7. Для подпространства $L = L_1 \cap L_2$ составьте однородную СЛАУ, в которой число уравнений равно рангу. Найдите размерность и базис L.

а) $L_1 = \{a_1(1;-4;\ 0;\ 3),\ a_2(0;\ 5;\ 1;-2)\},\ L_2 : \begin{cases} x+2y-2z-t=0 \\ x-\ \ y+\ \ \ z-t=0 \\ x+\ \ y-\ \ \ z-t=0 \end{cases}.$

б) $L_1 = \{a_1(1;\ 0;-1;\ 0),\ a_2(0;-1;\ 0;\ 1)\},\ L_2 = \{b_1(1;\ 0;\ 0;\ 1), b_2(0;\ 1;\ 1;\ 0)\}.$

Решение. а) Для построения СЛАУ для подпространства $L = L_1 \cap L_2$ оба подпространства L_1 и L_2 тоже должны быть представлены в виде СЛАУ.

Действуя, как в Примере 6, получим

$$L_1 : \begin{cases} x+y-3z+\ \ t=0 \\ 2x-y+\ \ z-2t=0 \end{cases}.$$

Теперь обе СЛАУ следует объединить в одну:

$$L = L_1 \cap L_2 : \begin{cases} x+\ \ y\ -3z+\ \ \ t=0 \\ 2x-\ \ y\ +\ \ \ z-2t=0 \\ x+2y-2z-\ \ t=0 \\ x-\ \ y\ +\ \ \ z-\ \ t=0 \\ x+\ \ y\ -\ \ \ z-\ \ t=0 \end{cases},\ \text{или} \begin{cases} y-z\ =0 \\ \mathrm{t}\ -z\ =0 \\ x-z\ =0 \end{cases}.$$

Из этого следует $\dim(L)=1,\ L = L\{f_1(1;\ 1;\ 1;\ 1)\}$.

б) Сначала надо найти однородные СЛАУ, задающие подпространства L_1 и L_2. Действуя, как в Примере 6, найдем эти СЛАУ:

$$L_1 : \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \end{cases},\ L_2 : \begin{cases} x_1 - x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}.$$

Далее следуем по решению пункта а): объединенная СЛАУ

$$L : \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases},\ \text{или} \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_4 = 0 \end{cases}.$$

Из этого следует $\dim(L)=1,\ \ \mathrm{L} = \mathrm{L}\{f_1(1;\ -1;\ -1;\ 1)\}$.

Пример 8. Подпространство $L = L_1 + L_2$ представьте в виде линейной оболочки и в виде СЛАУ. Найдите его размерность и базис, и составьте однородную СЛАУ.

а) $L_1 : -\begin{cases} -x+y\ \ \ \ \ \ \ +t=0 \\ -x\ \ \ \ \ \ \ +z+t=0 \end{cases}$ и $L_2 = \{b_1(1;\ 0;\ 0;\ 0), b_2(0;\ 0;\ 0;\ 2)\}.$

б) $L_1 = \begin{cases} x+y-z \quad\quad = 0 \\ \quad y-z \quad\quad = 0 \\ \quad 2y \quad\; -t = 0 \end{cases}$ и $L_2 = \begin{cases} \;x \quad\quad -z+t = 0 \\ -x-y+z \quad\quad = 0 \\ \quad\quad y \quad\quad +t = 0 \end{cases}$.

Решение. а) Для представления подпространства $L = L_1 + L_2$ в виде линейной оболочки оба подпространства L_1 и L_2 тоже должны быть представлены в виде линейной оболочки. Решив СЛАУ для L_1, получим $L_1 = \{a_1(1;\ 1;\ 1;\ 0), a_2(0;\ -1; -1;\ 1)\}$. Согласно теории $L = L_1 + L_2 = L\{a_1, a_2, b_1, b_2\}$. Ранг набора $\{a_1, a_2, b_1, b_2\}$ равен 3, база $\{a_1, b_1, b_2\}$. Следовательно, $\dim(L) = 3$, базис $\{a_1, b_1, b_2\}$.

Коэффициенты системы для подпространства L являются решениями СЛАУ, матрица которой составлена из координат векторов $\{a_1, b_1, b_2\}$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases},$$

Ее решение $f_1(0;\ 1;\ -1;\ 0)$. Из этого следует $L: \{x_2 - x_3 = 0$.

б) Задача решается в три этапа. На первом шаге, решая СЛАУ для L_1 и L_2, находим базисы этих подпространств. Получим $L_1 = L\{a_1(0;\ 1;\ 1;\ 2)\}$, $L_2 = \{b_1(1;\ 0;\ 1;\ 0)\}$. На втором шаге находим ранг и базу объединенного набора $\{a_1, b_1\}$, которая будет базисом подпространства $L = L_1 + L_2$. Имеем $\dim(L) = 2$, базис $\{a_1, b_1\}$. На третьем шаге, как в Примере 6, строится СЛАУ для подпространства L. Получим $L: \begin{cases} x - z = 0 \\ 2y - t = 0 \end{cases}$.

Типовые задачи

1. Какие из множеств $M_k \subset R^n$, выделяемых заданными условиями, являются подпространствами?

   а) $M_1 = \{x(x_1, x_2):\ x_1 + 2x_2 = 0\}$.

   б) $M_2 = \{x(x_1, x_2): x_1^2 = x_2^2\}$.

   в) $M_3 = \{x(x_1, x_2): \dfrac{x_2}{x_1} + \dfrac{x_1}{x_2} = 2\}$.

   г) $M_4 = \{x(x_1, x_2): x_1^2 - 2x_1x_2 - 3x_2^2 = 0\}$.

   д) $M_5 = \{x(x_1, x_2): 2x_1^2 - 3x_1x_2 + 2x_2^2 = 0\}$.

   е) $M_6 = \{x(x_1, x_2, x_3):\ |x_1 + 3x_2 - 2x_3| = 0\}$.

   ж) $M_7 = \{x(x_1, x_2, x_3):\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1\}$.

   з) $M_8 = \{x(x_1, x_2, x_3):\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 \geq 0\}$.

   и) $M_9 = \{x = \lambda \cdot a(2;1;3) + \mu \cdot b(3;2;5)\}$, $\lambda, \mu \in R$.

к) $M_{10}=\{x=a(2;1;3)+\lambda\cdot b(3;2;5)\},\ \lambda\in R.$

л) $M_{11}=\{x=a(4;2;-6)+\lambda\cdot b(-6;-3;9)\},\ \lambda\in R.$

м) $M_{12}=\{x(x_1,x_2,x_3):x_1=x_2=2x_3\}.$

2. Найдите размерность и базис $\{a_1,a_2,\ldots,a_k\}$ подпространства L, заданного однородной СЛАУ.

а) $L=\begin{cases}x+3y-2z=0\\ x-y+4z=0\\ 5x+7y+2z=0\end{cases}.$ б) $L=\begin{cases}4x-5y+z+3t=0\\ 2x+y-z+t=0\\ 5x-y-z+3t=0\\ x-3y+z+t=0\end{cases}.$

в) $L=\begin{cases}5x+5y+6z-t-5u=0\\ 2x-y+3z+2t-2u=0\\ x-3y+2z+3t-u=0\\ 3x+y+4z+t-3u=0\end{cases}.$

Дополнительно.

г) $\begin{cases}2x_1-x_2+2x_3-x_4=0\\ x_1-3x_2=0\\ x_1-2x_2+2x_3+x_4=0\end{cases}.$ д) $\begin{cases}2x_1+x_2+x_3+2x_5=0\\ 3x_1+5x_2+x_4+5x_5=0\\ x_1+2x_3-x_4-x_5=0\end{cases}.$

е) $\begin{cases}2x_1+x_3+4x_4-3x_5=0\\ +2x_2-3x_3+2x_4-x_5=0\\ -5x_1-3x_2+2x_3-13x_4+9x_5=0\end{cases}.$

3. Найдите размерность линейной оболочки $L=L\{a_1,a_2,\ldots,a_k\}$ набора векторов.

а) $a_1(2;-3;1),\ a_2(4;2;-3),\ a_3(1;-3;2).$

б) $a_1(3;5;-5),\ a_2(6;-4;1),\ a_3(2;8;-7).$

в) $a_1(1;2;0;-3),\ a_2(2;-1;2;-3),\ a_3(-2;3;1;-2),\ a_4(2;-4;-1;3).$

г) $a_1(3;-1;0;-2),\ a_2(0;2;2;4),\ a_3(3;0;1;0),\ a_4(6;1;3;2).$

4. Найдите размерность и базис линейной оболочки $L=L\{a_1,a_2,\ldots,a_k\}$.

а) $a_1(1;2;3;4),\ a_2(2;3;4;5),\ a_3(3;4;5;6),\ a_4(4;5;6;7).$

б) $a_1(1;-2;-1;1),\ a_2(0;3;-2;2),\ a_3(-2;1;0;0),\ a_4(0;-3;1;-1).$

в) $a_1=1+x+x^2,\ a_2=x+x^2+x^3,\ a_3=1+x^2+x^3,\ a_4=1+x+x^3.$

г) $a_1=\begin{pmatrix}7&2\\2&11\end{pmatrix},\ a_2=\begin{pmatrix}-5&-3\\-3&13\end{pmatrix},\ a_3=\begin{pmatrix}2&9\\9&4\end{pmatrix},\ a_4=\begin{pmatrix}1&-3\\-3&5\end{pmatrix}.$

5. В пространстве $V = P_n[x]$ многочленов $p(x)$ степени не выше n линейное подпространство L задано ограничениями на значения многочленов и их производных. Найдите базис и размерность подпространства L.
   а) $n=4,\ p(2)=0$.
   б) $n=4,\ p'(2)=0$.
   в) $n=4,\ p(1)=-p(-1),\ p'(1)=0$.
   г) $n=5,\ \ p'(-1)=0,\ p(-x)=-p(x)$.

Дополнительно.
   д) $n=4,\ p(1)=0,\ p'(-1)=0,\ p''(1)=0$.
   е) $n=5,\ p(1)=0,\ \ p'(1)=0,\ p(x)=p(-x)$.
   ж) $n=5,\ p'(1)=0,\ p''(x)=-p''(-x)$.

6. Найдите базис и размерность подпространства L функций $f(x)$ в линейном функциональном пространстве V, заданного ограничениями на значения функций и их производных.
   а) $V = L\{\sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x\},\ f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,\ f(\pi)=0$.
   б) $V = L\{1; \sin x; \sin 2x; \cos 2x\},\ f'(\pi)=0,\ f'(\pi/2)=0$.
   в) $V = L\{\sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x\},\ f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0,\ f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.
   г) $V = L\{1,\ \sin^2 x, \cos^2 x, \sin 2x, \cos 2x\},\ f(\pi/4)=-f(-\pi/4)$.

Дополнительно.
   д) $V = L\{\sin x; \cos x; \sin 3x; \cos 3x\},\ f(\pi)=0,\ f'(\pi)=0$.
   е) $V = L\{\sin 3x, \cos 3x, \sin 2x, \cos 2x\},\ f(0)=0,\ f'(\pi)=0$.
   ж) $V = L\{1, \sin x, \cos x, \sin 3x, \cos 3x\},\ f(\pi)=0,\ f'(\pi)=0$.
   з) $V = L\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x\},\ f(x)=-f(-x),\ f'(\pi)=0$.

7. Множество $L \subset R^n$ состоит из всех векторов, координаты которых удовлетворяют определенным условиям. Покажите, что это множество является подпространством, укажите его размерность и базис.
   а) $L \subset R^7$, координаты векторов с четными номерами равны нулю.
   б) $L \subset R^9$, 1-я координата совпадает со 2-й, а 4-я с 7-й и 8-й.
   в) $L \subset R^{10}$, координаты векторов с нечетными номерами равны нулю.
   г) $L \subset R^6$, координаты векторов с четными номерами равны друг другу.

8. Линейную оболочку набора векторов $L = L(a_1, a_2, \ldots, a_k)$задайте с помощью СЛАУ.

а) $a_1=(1;\ 2;\ -2),\ a_2=(1;\ -1;\ 1)$.
б) $a_1=(1;\ 2;\ -1),\ a_2=(1;\ 0;\ 1),\ a_3=(1;\ -1;\ 2)$.
в) $a_1=(1;\ 1;\ 3),\ a_2=(2;\ 3;-1),\ a_3=(1;\ -1;\ -2)$.
г) $a_1=(1;\ 2;\ -2;\ 3),\ a_2=(1;\ -1;\ 1;\ -1)$.
д) $a_1=(1;\ -1;\ 0;\ -3),\ a_2=(0;\ 1;\ 2;\ -4),\ a_3=(1;\ 0;\ -2;\ 5)$.

Дополнительно.

е) $a_1=(0;\ 5;\ -1),\ a_2=(2;\ -1;\ -1),\ a_3=(3;\ 1;\ -2)$.
ж) $a_1=(2;\ -1;\ 5;\ 7),\ a_2=(4;\ -2;\ 7;\ 5),\ a_3=(2;\ -1;\ 1;\ -5)$.
з) $a_1=(1;\ 1;\ 5;\ 3;\ 1),\ a_2=(2;\ 5;\ -1;\ 4;\ 4),\ a_3=(1;\ 1;\ 0;\ 1;\ 0)$.
и) $a_1=(1;\ 1;\ -3;\ -3;\ -2),\ a_2=(1;\ 2;\ -2;\ 2;\ 1)$,
$a_3=(-2;\ -3;\ 5;\ 1;\ 1),\ a_4=(0;\ 1;\ 1;\ 5;\ 3)$.

9. Найдите в R^n размерности суммы и пересечения подпространств L_1 и L_2.

а) $n=5,\ L_1:\begin{cases} x_1 - x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases},\ L_2:\begin{cases} x_1 - x_4 = 0 \\ x_2 - x_5 = 0 \end{cases}.$

б) $L_1 = L\{a_1(1;2;0;1),\ a_2(0;1;-1;2),\ a_3(1;0;1;-2)\}$,
$L_2 = L\{b_1(2;1;1;2),\ b_2(1;0;1;2),\ b_3(2;1;-1;0)\}$.

в) $n=4,\ L_1=\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases},$
$L_2 = L\{a_1(-1;3;3;1), a_2(6;2;-3;4)\}$.

Дополнительно.

г) $n=5,\ L_1:\begin{cases} x_1 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases},\ L_2:\begin{cases} x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_3 + 2x_5 = 0 \end{cases}.$

д) $L_1 = L\{a_1(1;2;1;1),\ a_2(2;1;-1;2),\ a_3(1;1;1;-2)\}$,
$L_2 = L\{b_1(2;1;1;2),\ b_2(1;0;1;2),\ b_3(2;-1;3;6)\}$.

е) $n=4,\ L_1=\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases},$
$L_2 = L\left\{a_1(6;2;-3;4), a_2(1;2;-1;2)\right\};$

10. Для подпространства $L = L_1 \cap L_2$ пространства R^n найдите размерность и базис. Составьте однородную СЛАУ, задающую L, в которой число уравнений равно рангу.

а) $n=4,\ L_1:\begin{cases} x + y - 3z + t = 0 \\ 2x - y + z - 2t = 0 \end{cases},\ L_2:\begin{cases} x + 2y - 2z - t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \\ x + y - z - t = 0 \end{cases}.$

б) $n=4,\ L_1:\begin{cases} x+y-z+2t=0\\ 4x+y-z+3t=0\\ 3y-3z+5t=0\end{cases},\ L_2:\begin{cases} 2x-y+z-t=0\\ 3x+t=0\\ -3x+3y-3z+4t=0\end{cases}.$

в) $n=4,\ L_1=\begin{cases} x+y+z-t=0\\ 2x+y+z=0\\ 3x+2y-z+2t=0\end{cases},\ L_2=\begin{cases} x+2y-2z+t=0\\ x-y+3z-t=0\\ x-2y+z+2t=0\end{cases}.$

г) $n=4,\ L_1=L\{a_1(1;0;-1;0),a_2(0;-1;0;1)\},\ L_2=\begin{cases} x_1-x_4=0\\ x_2-x_3=0\end{cases}.$

д) $n=5,\ L_1=L\{a_1(0;1;1;1;0),a_2(1;0;0;0;1),a_3(1;1;1;0;0)\},$
$L_2=L\{b_1(1;1;1;1;1),b_2(-1;0;0;0;-1)\}.$

Дополнительно.

е) $n=4,\ L_1:\begin{cases} x+y+2z=0\\ 2x+2y+z-3t=0\end{cases},\ L_2:\begin{cases} x-2y-2z-t=0\\ x-y+z+t=0\\ x+y+z-t=0\end{cases}.$

ж) $n=4,\ L_1=L\{a_1(1;2;2;0),a_2(-1;3;-2;1)\},\ L_2=\begin{cases} x_1-x_4=0\\ x_2-x_3=0\end{cases}.$

з) $n=4,\ L_1=L\{a_1(1;-1;2;-1),a_2(2;1;-3;1)\},$
$L_2=L\{b_1(0;3;-7;3),b_2(4;-1;1;-1)\}.$

11. Для подпространства $L=L_1+L_2$ пространства R^n найдите его размерность и базис. Составьте однородную СЛАУ, задающую L, в которой число уравнений равно рангу.

а) $L_1=L\{a_1(1;1;1;0),a_2(0;-1;-1;1)\},\ L_2=L\{b_1(1;0;0;0),b_2(0;0;0;2)\}.$

б) $L_1=L\{a_1(1;2;2;3),a_2(-1;3;-2;0)\}$,
$L_2=L\{b_1(1;2;3;1),b_2(-2;1;-3;-1)\}.$

в) $L_1=L\{a_1(1;-1;2;-1),a_2(2;1;-3;1)\}$,
$L_2=L\{b_1(0;3;-7;3),b_2(4;-1;1;-1)\}.$

г) $L_1=L\{a_1(1;0;-1;0),a_2(0;-1;0;1)\},\ L_2=\begin{cases} x_1+x_4=0\\ x_2+x_3=0\end{cases}.$

д) $L_1=L\{a_1(0;1;1;1;0),a_2(1;0;0;0;1),a_3(1;1;1;0;0)\},$
$L_2=L\{b_1(1;1;1;1;1),b_2(-1;0;0;0;-1),b_3(0;1;0;1;0)\}.$

е) $n=4,\ L_1:\begin{cases} x+2y-2z-t=0\\ x-y+z-t=0\end{cases},\ L_2:\begin{cases} 2x-y-t=0\\ 3x-y-z-t=0\\ x-y+z-t=0\end{cases}.$

ж) $n=4,\ L_1:\begin{cases} x+y-z=0\\ y-z=0\\ 2y-t=0\end{cases},\ L_2:\begin{cases} x-z+t=0\\ -x-y+z=0.\\ y+t=0\end{cases}$

Дополнительно.

з) $L_1=L\{a_1(1;0;-1;0),a_2(0;-1;0;1)\},\ L_2=L\{b_1(1;0;0;1),b_2(0;1;1;0)\}.$

и) $n=4,\ L_1:\begin{cases} x+y-z=0\\ y-z=0\\ 3x+2y-z-t=0\end{cases},\ L_2:\begin{cases} x+2y-3z+t=0\\ x-y+3z-2t=0.\\ 4x-y+6z-5t=0\end{cases}$

к) $n=4,\ L_1:\begin{cases} x+y-t=0\\ y-z=0\\ 2y-t=0\end{cases},\ L_2:\begin{cases} x-z+t=0\\ -x-y+z=0.\\ y+t=0\end{cases}$

Дополнительные задачи

12. Пусть СЛАУ $Ax=b$ имеет решения при некотором $b\in R^m$, $b\neq 0$. Верны ли следующие утверждения:
    а) Система $Ax=\overline{0}$ обязательно имеет ненулевые решения.
    б) Система $Ax=\overline{0}$ не имеет ненулевых решений.
    в) Система $Ax=\overline{0}$ может не иметь ненулевых решений.
    г) Система $Ax=\overline{0}$ может иметь ненулевые решения.
13. Пусть СЛАУ $Ax=b$ не имеет решений при некотором $b\in R^m$, $b\neq 0$. Верны ли следующие утверждения:
    а) Система $Ax=\overline{0}$ обязательно имеет ненулевые решение.
    б) Система $Ax=\overline{0}$ не имеет ненулевых решений.
    в) Система $Ax=\overline{0}$ может не иметь ненулевых решений.
14. Пусть СЛАУ $Ax=\overline{0}$ имеет только нулевое решение. Верны ли следующие утверждения:
    а) Система $Ax=b$ обязательно имеет решение при любом $b\in R^m$.
    в) Существует $b\in R^m$, для которого система $Ax=b$ не имеет решений.
15. Пусть СЛАУ $Ax=\overline{0}$ имеет ненулевое решение. Верны ли следующие утверждения:
    а) Система $Ax=b$ обязательно имеет решение при любом $b\in R^m$.
    б) Система $Ax=b$ может иметь решение при любом $b\in R^m$.
    в) Обязательно существует $b\in R^m$, для которого система $Ax=b$ не имеет решений.
    г) Система $Ax=b$ при некотором $b\in R^m$ имеет единственное решение.

16. Как соотносятся следующие утверждения:
   а) (1) СЛАУ $Ax = \overline{0}$ имеет только нулевое решение;
      (2) Существует $b \in R^n$, для которого система $Ax = b$ не имеет решения.
   б) (1) СЛАУ $Ax = \overline{0}$ не имеет ненулевых решений;
      (2) СЛАУ $Ax = b$ имеет решение при любом $b \in R^m$.
   в) (1) СЛАУ $Ax = b$ имеет решения при всех $b \in R^m$;
      (2) Система $Ax = \overline{0}$ имеет ненулевое решение.
   г) (1) СЛАУ $Ax = b$ имеет единственное решение;
      (2) Система $Ax = \overline{0}$ имеет ненулевое решение.
   д) (1) СЛАУ $Ax = b$ не имеет решения при некотором $b \in R^m$;
      (2) Система $Ax = \overline{0}$ имеет ненулевое решение.
17. Укажите базис и размерность подпространства $P_3[x]$ многочленов степени не выше трех, имеющих корень $x = 1$.
18. Укажите базис и размерность подпространства $P_4[x]$ многочленов степени не выше четырех, производная которых является четной функцией.
19. Чему равна размерность подпространства L симметричных квадратных матриц третьего порядка (для которых $a_{jk} = a_{kj}$)? Укажите его базис.
20. Чему равна размерность подпространства L симметричных квадратных матриц третьего порядка со следом нуль? Укажите его базис.
21. Чему равна размерность подпространства L антисимметричных квадратных матриц третьего порядка (для которых $a_{jk} = -a_{kj}$)? Укажите его базис.
22. Приведите пример двух двумерных подпространств в пространстве матриц (2×2), которые пересекаются только в нуле.
23. Приведите пример такого трехмерного подпространства L в пространстве квадратных матриц (2×2), которое не содержит матрицу A.
   а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.   б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
24. Приведите пример подпространства L в пространстве квадратных матриц размером (3×3), не содержащего ненулевых симметричных матриц.
25. Является ли линейным подпространством множество матриц L размером $(m\times n)$, являющихся решением матричного уравнения $AX = \overline{0}$ (где A и $\overline{0}$ – матрицы подходящего размера)?
26. Является ли линейным подпространством множество векторов, являющихся одновременно решением двух СЛАУ: $Ax = b$ и $Cx = b$ $(A \neq C)$?

Ответы на типовые задачи

1. а) Да. б) Нет. в) Нет. г) Нет.
   д) Да. е) Да. ж) Нет. з) Нет.
   и) Да. к) Нет. л) Да. м) Да.
2. а) $L=L\{a_1(-5;3;2)\}$, $\dim(L)=1$.
   б) Например, $L=L\{a_1(-4;1;0;7),a_2(2;0;1;-3)\}$, $\dim(L)=2$.
   в) Например, $L=L\{a_1(-7;1;5;0;0),a_2(5;0;-4;1;0),a_3(1;0;0;0;1)\}$, $\dim(L)=3$.
   г) $L=L\{a_1(6;2;-3;4)\}$, $\dim(L)=1$.
   д) Например, $L=L\{a_1(-1;0;2;3;0),a_2(0;0;2;5;-1)\}$, $\dim(L)=2$.
   е) Например, $L=L\{a_1(-1;3;2;0;0),a_2(0;7;4;-1;0),a_3(0;5;3;0;1)\}$, $\dim(L)=3$.
3. а) $\dim(L)=3$. б) $\dim(L)=2$. в) $\dim(L)=3$. г) $\dim(L)=2$.
4. а) Например, $L=L\{a_1(1;2;3;4),b(1;1;1;1)\}$, $\dim(L)=2$.
   б) Например, $L=L\{a_1,a_2,a_3\}$, $\dim(L)=3$.
   в) $L=L\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$, $\dim(L)=4$.
   г) Например, $L=L\left\{b_1\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, b_2\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}, b_3\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right\}$, $\dim(L)=3$.
5. а) Например, $L=L\{x-2,x(x-2),x^2(x-2),x^3(x-2)\}$, $\dim(L)=4$.
   б) Например, $L=L\{1,(x-2)^2,(x-2)^3,(x-2)^4\}$, $\dim(L)=4$.
   в) Например, $L=L\{x^2-2x-1,\ x^3-3x,x^4-4x-1\}$, $\dim(L)=3$.
   г) Например, $L=L\{x^3-3x,x^5-5x\}$, $\dim(L)=2$.
   д) Например, $L=L\{x^3-3x^2-9x+11,\ \ x^4-6x^2-8x+13\}$, $\dim(L)=2$.
   е) Например, $L=L\{1-2x^2+x^4\}$, $\dim L=1$.
   ж) Например, $L=L\{1,\ \ x^3-3x,\ \ x^5-5x\}$, $\dim(L)=3$.
6. а) $L=L\{\sin x,\ 2\cos x-\sin 2x+2\cos 2x\}$, $\dim L=2$.
   б) $L=L\{1,\ \cos 2x\}$, $\dim L=2$.
   в) $L=L\{2\cos x-\sin 2x,\ \sin x-\cos 2x\}$, $\dim(L)=2$.
   г) $L=L\{\sin 2x,\cos 2x\}$, $\dim(L)=2$.
   д) $L=L\{\cos x-\cos 3x,\ 3\sin x-\sin 3x\}$, $\dim L=2$.
   е) $L=L\{\cos 2x-\cos 3x,\ 3\sin 2x+2\sin 3x\}$, $\dim L=2$.

ж $L = L\{1+\cos x, \cos x - \cos 3x, 3\sin x - \sin 3x\}$, $\dim L = 3$.

з) $L = L\{2\sin x + \sin 2x\}$, $\dim L = 1$.

7. а) L=L{ (1;0;0;0;0;0;0), (0;0;1;0;0;0;0), (0;0;0;0;1;0;0), (0;0;0;0;0;0;1) }, $\dim L = 4$.

б) L=L{ (1;1;0;0;0;0;0;0;0), (0;0;1;0;0;0;0;0;0), (0;0;0;1;0;0;1;1;0), (0;0;0;0;1;0;0;0;0), (0;0;0;0;0;1;0;0;0), (0;0;0;0;0;0;0;0;1) }, $\dim L = 6$.

в) L=L{ (0;1;0;0;0;0;0;0;0;0), (0;0;0;1;0;0;0;0;0;0), (0;0;0;0;0;1;0;0;0;0), (0;0;0;0;0;0;0;1;0;0), (0;0;0;0;0;0;0;0;0;1) }, $\dim L = 5$.

г) L=L{ (1;0;0;0;0;0), (0;0;1;0;0;0), (0;0;0;0;1;0), (0;1;0;1;0;1) }, $\dim L = 4$.

8. а) $L:\{x_2 + x_3 = 0$.

б) $L:\{x_1 - x_2 - x_3 = 0$.

в) $L\{0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 = 0$ или пустая СЛАУ.

г) $L:\begin{cases} x_1 + 4x_2 \qquad -3x_4 = 0 \\ \qquad x_2 + x_3 \qquad = 0 \end{cases}$.

д) $L:\{x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0$.

е) $L:\{3x_1 + x_2 + 5x_3 = 0$.

ж) $L:\begin{cases} \qquad 8x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 \qquad\qquad = 0 \end{cases}$.

з) $L:\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$.

и) $L:\begin{cases} 2x_1 \qquad + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 \qquad - x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 \qquad + x_5 = 0 \end{cases}$.

9. а) $\dim(L_1 \cap L_2) = 1$, $\dim(L_1 + L_2) = 5$.

б) $\dim(L_1 \cap L_2) = 2$, $\dim(L_1 + L_2) = 4$.

в) $\dim(L_1 \cap L_2) = 2$, $\dim(L_1 + L_2) = 2$.

г) $\dim(L_1 \cap L_2) = 1$, $\dim(L_1 + L_2) = 5$.

д) $\dim(L_1 \cap L_2) = 1$, $\dim(L_1 + L_2) = 4$.

е) $\dim(L_1 \cap L_2) = 1$, $\dim(L_1 + L_2) = 3$.

10. а) $L:\{x = y = z = t$, $\dim(\mathrm{L}) = 1$, $L = L\{f_1(1;\ 1;\ 1;\ 1)\}$.

б) $L:\begin{cases} 5x - y + z \qquad = 0 \\ 3x \qquad\quad + t = 0 \end{cases}$, $\dim(\mathrm{L}) = 2$,

$L = L\{f_1(1;\ 0; -5;\ -3), f_2(0;\ 1;\ 1;\ 0)\}$.

в) $L:\begin{cases} x+y=0 \\ x+z\ =0 \\ x+t=0 \end{cases}$, $\dim(\mathrm{L})=1$, $L=L\{f_1(-1;\ 1;\ 1;\ 1)\}$.

г) $L:\{x_1=-x_2=-x_3=x_4$, $\dim(L)=1$, $L=L\{f_1(1;-1;-1;1)\}$.

д) $L:\begin{cases} x_1\ -x_5=0 \\ x_2-x_3\ =0 \\ x_2-x_4\ =0 \end{cases}$, $\dim(L)=2$, $L=L\{a_1(1;0;0;0;1), a_2(0;1;1;1;0)\}$.

е) $L:\{x=y=t=-z$, $\dim(L)=1$, $L=L\{f_1(-1;-1;1;-1)\}$.

ж) $L:\{x_1=x_2=x_3=x_4=0$, $\dim(L)=0$.

з) $L:\begin{cases} x_2-x_4 \qquad =0 \\ x_1+7x_2+3x_3=0 \end{cases}$,
$\dim(L)=2$, $L=L\{a_1(1;-1;2;-1), a_2(2;1;-3;1)\}$.

11. а) $L=L(a_1,b_1,b_2)$, $\dim(L)=3$, $L:\{x_2-x_3=0$.

б) $L=L(a_1,a_2,b_1,b_2)$, $\dim(L)=4$, $L:\{0\cdot x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3+0\cdot x_4=0$.

в) $L=L_1=L_2=L(a_1,a_2)$, $\dim(L)=2$, $L:\begin{cases} x_1+3x_3+7x_4=0 \\ x_2-x_4=0 \end{cases}$.

г) $L=L\{a_1,a_2,b(1;-1;-1;1)\}$, $\dim(L)=3$, $L:\{x_1+x_2+x_3+x_4=0$.

д) $L=L(a_1,a_2,a_3,b_3)$, $\dim(L)=3$, $L:\{x_1-x_2+x_4-x_5=0$.

е) $L\{a_1(0;1;1;0), a_2(1;0;0;1), a_3(1;1;0;0)\}$, $\dim(L)=3$,
$L:\{x-y+z-t=0$.

ж) $L=L\{a_1(0;\ 1;\ 1;\ 2), b_1(1;\ 0;\ 1;\ 0)\}$, $\dim(L)=2$, $L:\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2y-t=0 \end{cases}$.

з) $L=L(a_1,a_2,b_1)$, $\dim(L)=3$, $L:\{x-y+z-t=0$.

и) $L=L\{b_1(0;\ 1;\ 1;\ 1), b_2(1;-1;\ 0;\ 1)\}$, $\dim(L)=2$, $L:\begin{cases} x+y-z=0 \\ x+z-t=0 \end{cases}$.

к) $L=L(a_1(1;1;1;2), b_1(1;0;1;0))$, $\dim(L)=2$, $L:\begin{cases} x-z=0 \\ 2y-t=0 \end{cases}$.

Ответы на дополнительные задачи

12. а) Неверно. б) Неверно.
в) Верно. г) Верно.
13. а) Неверно. б) Неверно.
в) Верно.
14. а) Неверно. б) Неверно.
15. а) Неверно. б) Верно.

в) Неверно. г) Неверно.

16. а) Не зависят друг от друга. б) Не зависят друг от друга.
в) Не зависят друг от друга. г) Противоречат друг другу.
д) Не зависят друг от друга.

17. $p_1(x)=x-1,\ p_2(x)=(x-1)^2,\ p_3(x)=(x-2)^3,\ dim(L)=3$

18. $p_1(x)=1,\ p_2(x)=x,\ p_3(x)=x^3,\ dim(L)=3$

19. $dim(L)=6$. Пример базиса:

$$A_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ A_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

$$A_4=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ A_5=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\ A_6=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

20. $dim(L)=5$. Пример базиса:

$$A_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\ A_3=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$A_4=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\quad A_5=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

21. $dim(L)=3$. Пример базиса:

$$A_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix},\ A_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}.$$

22. Например, $L_1=L\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$ и $L_2=L\left\{\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right\}$.

23. а) Например, $L:\{a_{22}=0$. б) Например, $L:\{a_{11}=a_{22}$.

24. Например, подпространство антисимметричных матриц.

25. Является.

26. Если $b=\overline{0}$, то является, если $b\neq\overline{0}$, то не является.

VI. МАТРИЧНАЯ АЛГЕБРА

Определения и формулы

Матрицей называется отображение, которой каждой комбинации из номера строки j, где $1 \le j \le m$, и номера столбца k, где $1 \le k \le n$, ставит в соответствие число a_{jk}. Число a_{jk} называется элементом матрицы. Запись $(m \times n)$ обозначает порядок матрицы.

Строкой матрицы с номером j называется набор ее значений при фиксированном значении аргумента j, столбцом с номером k – набор значений при фиксированном k. Строки и столбцы матрицы можно считать элементами линейных пространств R^n и R^m.

Матрица записывается заключенной в круглые скобки таблицей со списком всех значений, распределенных по строкам и столбцам.

Вектор-строкой называется матрица, состоящая из одной строки. Вектор-столбцом называется матрица, состоящая из одного столбца.

Матрицы можно почленно складывать и умножать на действительное число. Множество $M[m,n]$ матриц порядка $(m \times n)$ с так определенными операциями является линейным пространством размерности mn. Базисом этого пространства являются матрицы M^{pq} для $1 \le p \le m$, $1 \le q \le n$. Элементы матрицы M^{pq} задаются формулой $m_{jk} = \delta_{pj}\delta_{qk}$, где δ_{ij} – символ Кронекера.

Произведением матрицы A порядка $(m \times n)$ и матрицы B порядка $(n \times p)$ является матрица $C = A \cdot B$ порядка $(m \times p)$, значения которой вычисляются по формуле $c_{jq} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{kq}$.

Произведение матриц ассоциативно (то есть $A(BC) = (AB)C$) и дистрибутивно относительно сложения (то есть $A(B+C) = AB + AC$ и $(A+B)C = AC + BC$), но в общем случае не коммутативно.

Система линейных алгебраических уравнений, состоящая из m уравнений с n неизвестными, эквивалентна матричному уравнению $AX = B$, где A – матрица коэффициентов порядка $(m \times n)$, X – вектор-столбец неизвестных высотой n, B – вектор-столбец свободных членов высотой m. Матрица A, к которой справа присоединен еще один столбец B, называется расширенной матрицей коэффициентов СЛАУ.

Необходимое и достаточное условие совместности СЛАУ (Теорема Кронекера-Капелли): система совместна тогда и только тогда, когда ранг ее матрицы коэффициентов совпадает с рангом расширенной матрицы коэффициентов.

Матрица B порядка $(n\times m)$ называется транспонированной к матрице A порядка $(m\times n)$, если $b_{kj}=a_{jk}$. Транспонированная матрица обозначается A^T.

Операция транспонирования удовлетворяет соотношению двойственности: $\left(A^T\right)^T=A$.

Для произведения матриц выполняется формула: $(AB)^T=B^TA^T$.

Для произведения матриц $C=AB$ выполняются соотношения $C^k=AB^k$ и $C_j=A_jB$, где C^k и B^k – столбцы матриц C и B с номером k, C_j и A_j – строки матриц C и A с номером j.

В этих же обозначениях верна формула $C^k=\sum_{i=1}^{n}A^ib_{ik}$. Словесная формулировка: k-ый столбец матрицы $C=AB$ является линейной комбинацией столбцов матрицы A, коэффициентами которой являются элементы k-го столбца матрицы B.

Верна также формула $C_j=\sum_{i=1}^{m}a_{ji}B_i$. Словесная формулировка: j-ая строка матрицы $C=AB$ является линейной комбинацией строк матрицы B, коэффициентами которой являются элементы j-ой строки матрицы A.

Рангом $r(A)$ матрицы A является ранг набора ее строк, рассматриваемых как элементы пространства R^n, или ранг набора ее столбцов, рассматриваемых как элементы пространства R^m. Эти числа совпадают.

Квадратной матрицей порядка n называется матрица E, у которой число строк m равно числу столбцов n. Главной диагональю квадратной матрицы считается совокупность ее элементов, у которых номер строки равен номеру столбца. Единичной матрицей называется квадратная матрица, у которой на главной диагонали стоят единицы, вне главной диагонали – нули.

Квадратная матрица называется невырожденной, если ее ранг $r(A)=n$.

Для произведения матриц верно неравенство $r(AB)\le\min\left(r(A),r(B)\right)$. В случае, когда матрица A – невырожденная, верно $r(AB)=r(B)$. Аналогично $r(AB)=r(A)$, если невырожденная матрица B.

Обратной матрицей к квадратной матрице A называется такая матрица B, для которой $BA=AB=E$. Обратная матрица обозначается A^{-1}.

Переход к обратной матрице удовлетворяет соотношению двойственности: $\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$.

Для произведения матриц выполняется формула: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, если оба множителя в правой части существуют.

Если матрица A имеет обратную, то в матричных уравнениях $AX = B$ и $XA = B$ решение единственное. Решения даются формулами $X = A^{-1}B$ и $X = BA^{-1}$ соответственно.

Примеры решения задач

Пример 1. Представьте вторую строку матрицы $C = A \cdot B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

в виде линейной комбинации строк B_1, B_2, B_3 матрицы B.

Решение. В соответствие с формулой $C_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ji} B_i$ имеем $C_2 = 2B_1 - B_2 + 2B_3$.

Пример 2. Найдите матрицу, обратную к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ проверьте (по определению).

Решение. Для решения матричного уравнения $AX = E$ используется обобщенная схема, аналогичная схеме Гаусса-Жордана для стандартной СЛАУ:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 9 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & -9 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -9 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 11 & -18 \end{array}\right).$$

Итак,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -9 & 15 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 11 & -18 \end{pmatrix}.$$

Проверка: $A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}4&3&3\\2&-3&2\\1&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-9&15\\0&1&-2\\-1&11&-18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

Пример 3. Решите матричное уравнение $XA=B$, где

$$A=\begin{pmatrix}3&4&2\\2&3&1\\1&0&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&1&2\\2&-1&2\\1&-2&3\end{pmatrix}.$$

Решение. Транспонируем уравнение и сделаем замену $Y=X^T$. Для решения матричного уравнения $A^TY=B^T$ воспользуемся обобщенной схемой Гаусса-Жордана:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}3&2&1&0&2&1\\4&3&0&1&-1&-2\\2&1&\boxed{1}&2&2&3\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&\boxed{1}&0&-2&0&-2\\4&3&0&1&-1&-2\\2&1&1&2&2&3\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&-2&0&-2\\\boxed{1}&0&0&7&-1&4\\1&0&1&4&2&5\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&1&0&-9&1&-6\\1&0&0&7&-1&4\\0&0&1&-3&3&1\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&7&-1&4\\0&1&0&-9&1&-6\\0&0&1&-3&3&1\end{array}\right).$$

Тогда

$$X=Y^T=\begin{pmatrix}7&-9&-3\\-1&1&3\\4&-6&1\end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку:

$$XA=\begin{pmatrix}7&-9&-3\\-1&1&3\\4&-6&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&4&2\\2&3&1\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&2\\2&-1&2\\1&-2&3\end{pmatrix}=B.$$

Пример 4. Решите матричное уравнение $AX=B$, где

$$A=\begin{pmatrix}-3&6\\2&-4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}12&21\\-8&-14\end{pmatrix}.$$

Решение. Используя схему Гаусса-Жордана, получим, что матричное уравнение эквивалентно уравнению $\begin{pmatrix}-1&2\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}4&7\end{pmatrix}$. Решение этого уравнения будет суммой частного решения, например $X_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, и общего решения однородного уравнения $\begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot Y = 0$. Однородная СЛАУ $\{-y_1 + 2y_2 = 0$ имеет решение $b = (2;\ 1)$. Каждый столбец матрицы Y пропорционален вектору b. В итоге получим

$$Y = \begin{pmatrix} 2\lambda & 2\mu \\ \lambda & \mu \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ где } \lambda, \mu \in R.$$

Общее решение исходного уравнения

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + 2\lambda & -1 + 2\mu \\ 2 + \lambda & 3 + \mu \end{pmatrix}, \text{ где } \lambda, \mu \in R.$$

Пример 5. Решите матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -7 \\ -12 & 7 \\ -27 & 14 \end{pmatrix}.$$

Решение. Матрица $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ невырожденная, поэтому можно умножить обе части уравнения справа на $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$. В правой части получим

$$\begin{pmatrix} 12 & -7 \\ -12 & 7 \\ -24 & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix},$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Решам стандартное матричное уравнение типа $AX = B$ методом Гаусса-Жордана. В результате получим

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Пример 6. Решите матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -4 & -9 \end{pmatrix}.$$

Укажите параметрическое представление множества решений.

Решение. Матрица $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ невырожденная. Умножим обе части уравнения слева на $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Получим

$$X \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -4 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Транспонируем обе части уравнения:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X^T = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица $Y = X^T$ порядка 3×2 содержит 6 неизвестных, матричное уравнение эквивалентно СЛАУ из 4 уравнений. В системе 2 свободных переменных и 4 базисных. Решим СЛАУ с использованием схемы Гаусса-Жордана. Получим общее решение

$$Y = \begin{pmatrix} 1+3\lambda & -1+3\mu \\ \lambda & 1+\mu \\ 2-5\lambda & -1-5\mu \end{pmatrix},$$

откуда

$$X = Y^T = \begin{pmatrix} 1+3\lambda & \lambda & 2-5\lambda \\ -1+3\mu & 1+\mu & -1-5\mu \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Пример 7. Решите матричное уравнение $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} p & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ при всех значениях параметра p.

Решение. Система $\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & p & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & p-2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right)$ совместна, только если $p = 2$. В этом случае решение матричного уравнения $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}$ можно представить в виде

$$\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix},$$ где $\lambda,\mu\in R$ (см. Пример 4).

Пример 8. Найдите размерность подпространства решений матричного уравнения $\begin{pmatrix}-3 & 6 & 0 & -1 & 2\\ 2 & -4 & 3 & 2 & -2\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

Решение. Матрица X должна иметь размер 5×3. Соответствующая система линейных уравнений содержит 15 переменных и состоит из шести уравнений – по два на каждый столбец. Ее ранг равен шести, тогда размерность решения равна 15 – 6 = 9.

Пример 9. Найдите общий вид матриц X, перестановочных с матрицей A, укажите размерность подпространства L всех таких матриц и его базис.

а) $A=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$; в) $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

Решение. а) По условию задачи

$$\begin{pmatrix}1 & -3\\ -1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -3\\ -1 & 2\end{pmatrix},\text{ или}$$

$$\begin{pmatrix}x_1-3x_3 & x_2-3x_4\\ -x_1+2x_3 & -x_2+2x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1-x_2 & -3x_1+2x_2\\ x_3-x_4 & -3x_3+2x_4\end{pmatrix}.$$

Приравнивая элементы обеих матриц, получим СЛАУ

$$\begin{cases} x_1-3x_3= x_1- x_2\\ x_2-3x_4=-3x_1+2x_2\\ -x_1+2x_3= x_3- x_4\\ -x_2+2x_4=-3x_3+2x_4\end{cases},\text{ или }\begin{cases}x_2-3x_3=0\\ x_1-x_3-x_4=0\end{cases}.$$

Ранг СЛАУ равен 2, общее решение

$$X=\begin{pmatrix}\lambda+\mu & 3\lambda\\ \lambda & \mu\end{pmatrix}=\lambda\cdot\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\text{ где }\lambda,\mu\in R.$$

Базис в L составляют матрицы $f_1=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $f_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $\dim(L)=2$.

Замечание. Можно заметить, что $f_2=E$, $-f_1+2f_2=A$. Очевидно, заранее можно было предвидеть, что эти две матрицы лежат в L. Однако то, что $\dim(L)=2$, заранее не ясно.

Пример 10. Дана матрица $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$. Найти A^{29}.

Решение. Проверим, что

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 2 & 0\end{pmatrix},\ A^4=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 2 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & -2\\ 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 0\\ 0 & -4\end{pmatrix}=-4E,$$

Тогда $A^{29}=(A^4)^7\cdot A=(-4E)^7\cdot A=-2^{14}\cdot A$.

Типовые задачи

1. Пусть $C=A\cdot B$, где B задано, матрица A порядка 3×3. Представьте k-ую строку матрицы C в виде линейной комбинации строк B_1, B_2, B_3 матрицы B.

   а) $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 2\\ 2 & -4 & 1\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}$, $k=3$. б) $A=\begin{pmatrix}1 & 6 & 7\\ -2 & 3 & 2\\ 3 & 8 & -5\end{pmatrix}$, $k=3$.

   в) $A=\begin{pmatrix}1 & 4 & -3\\ 6 & -2 & 7\\ 2 & 5 & 1\end{pmatrix}$, $k=2$.

2. Пусть $C=A\cdot B$, где A задано, матрица B порядка 3×3. Представьте k-ый столбец матрицы C в виде линейной комбинации столбцов A^1, A^2, A^3 матрицы A.

   а) $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 4 & 1 & 2\\ 5 & -3 & 2\end{pmatrix}$, $k=2$. б) $B=\begin{pmatrix}6 & 4 & -3\\ 7 & 5 & 1\\ -2 & 2 & -3\end{pmatrix}$, $k=1$.

   в) $B=\begin{pmatrix}-2 & 4 & -2\\ -3 & 6 & 8\\ 2 & -3 & -5\end{pmatrix}$, $k=2$.

3. Матрица A задана. Найдите A^{-1} методом Гаусса и сделайте проверку.

   а) $A=\begin{pmatrix}3 & 4 & -2\\ 2 & 3 & -1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$. б) $A=\begin{pmatrix}5 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 2\\ 2 & -1 & -1\end{pmatrix}$. в) $A=\begin{pmatrix}4 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ -1 & -1 & -1\end{pmatrix}$.

Дополнительно.

г) $A=\begin{pmatrix}4 & -3 & -4\\ 3 & -2 & -3\\ 2 & 5 & -1\end{pmatrix}$. д) $A=\begin{pmatrix}5 & 1 & -2\\ -2 & -3 & 5\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix}$. е) $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & -2 & 1\\ 2 & 3 & -1 & 1\\ 1 & -2 & 2 & -1\\ 1 & 3 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

4. Найдите общий вид матриц X, удовлетворяющих однородному матричному уравнению $AX=0$ или $XA=0$, а также найдите базис и размерность подпространства L таких матриц.

а) $\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$. б) $X\cdot\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 5\\ 4 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

в) $\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 4 & -2 & 1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$. г) $X\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -3\\ 4 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

д) $\begin{pmatrix}-3 & 6 & 0 & -1 & 2\\ 2 & -4 & 3 & 2 & -2\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

Дополнительно.

е) $\begin{pmatrix}-3 & 6 & 0 & 2\\ 2 & -4 & 0 & -2\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

ж) $\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3 & 1 & 0\\ 2 & -4 & 3 & 2 & -2\\ -1 & 2 & 12 & 5 & -2\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

5. Найдите общий вид матриц X, удовлетворяющих матричному уравнению $AX=B$ или $XA=B$.

а) $\begin{pmatrix}3 & 2\\ 5 & 4\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 7 & 6\end{pmatrix}$.

б) $X\cdot\begin{pmatrix}3 & 2\\ 5 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$.

в) $\begin{pmatrix}-3 & 6\\ 2 & -4\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 6 & 8\end{pmatrix}$.

г) $\begin{pmatrix}-3 & 6\\ 2 & -4\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}12 & 21\\ -8 & -14\end{pmatrix}$.

д) $\begin{pmatrix} -3 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

е) $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Дополнительно.

ж) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. з) $\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 12 & 18 \\ -16 & -24 \end{pmatrix}$.

6. Решите матричное уравнение $AX = B$ или $XA = B$ при всех значениях параметра p.

а) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} p & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. б) $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

в) $\begin{pmatrix} p & -1 \\ -8 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$. г) $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} p & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

д) $X \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ p & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$. е) $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ p & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Дополнительно.

ж) $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 3 \\ 1 & p+2 \end{pmatrix}$. з) $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ p & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

и) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} p & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

7. Укажите общее решение и параметрическое представление множества решений матричного уравнения $AXB = C$.

а) $\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$.

б) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$.

в) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -7 \\ -12 & 7 \\ -24 & 14 \end{pmatrix}$.

г) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -11 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$.

д) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

е) $\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -3 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 3 \\ -6 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

Дополнительно.

ж) $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 6 & -8 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. з) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

и) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

8. Выпишите общий вид квадратных матриц X порядка 2, перестановочных с матрицей A, найдите базис и размерность подпространства L таких матриц.

а) $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. б) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

в) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. г) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Дополнительно.

д) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. е) $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. ж) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

9. Дана матрица A. Найдите A^n.

а) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$, $n = 29$. б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $n = 25$.

в) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $n = 75$. г) $A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$, $n = 40$.

Дополнительные задачи

10. Приведите пример матриц A и B, для которых AB существует, а BA нет.

11. Приведите примеры ненулевых квадратных матриц второго порядка, для которых:
    а) $A^2 = 0,\ A \neq 0$. б) $A^2 = E,\ A \neq \alpha E$. в) $A^2 = -E$.
    г) $A^{-1} = -A$. д) $A^2 = A,\ A \neq \alpha E$.
12. Приведите пример квадратных матриц второго порядка, для которых $AB \neq BA$.
13. Верно ли следующее утверждение: если A и B – квадратные матрицы, и $r(A \cdot B) = r(B)$, то A – невырожденная матрица?
14. Если известно, что $AB = CA = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, то можно ли утверждать, что $rank(B) = rank(C)$?
15. Пусть A и B – матрицы размером (2×2). Проверьте истинность утверждения «$r(AB) = r(BA)$ при любом B» в зависимости от ранга матрицы A.
16. Пусть A и B – матрицы размером $(n\times n)$ и $rank(AB) = 2$. Следует ли из этого, что $rank(BA) = 2$?
17. Даны две матрицы $A\ (2\times 3)$ и $B\ (3\times 2)$, обе ранга 2.
    (а) Обязательно ли $r(AB) = 2$?
    (б) Обязательно ли $r(BA) = 2$?
18. Пусть A и B – матрицы размером (5×5), $r(A) = 3$ и $AB = 0$. Чему может быть равен ранг матрицы B?
19. Существуют ли такие две квадратные матрицы 3-го порядка ранга два, что их произведение равно матрице ранга один?
20. Существуют ли такие две квадратные матрицы (3×3) ранга два, что их произведение равно нулевой матрице?
21. Приведите пример двух квадратных матриц размеров (3×3) рангов 2 и 1 соответственно, произведением которых является нулевая матрица.
22. Дана неоднородная СЛАУ из трех уравнений с двумя неизвестными. Найдите ранг матрицы СЛАУ и ранг расширенной матрицы СЛАУ при заданном условии.
    а) Три прямые, соответствующие уравнениям, пересекаются в одной точке.
    б) Все три точки, являющиеся пересечениями двух из трех прямых, различны.
    в) Прямые, соответствующие двум уравнениям из трех, параллельны.
    г) Прямые, соответствующие всем трем уравнениям, параллельны.

23. Дана неоднородная СЛАУ из трех уравнений с тремя неизвестными. Найдите ранг матрицы системы и ранг расширенной матрицы системы при заданном условии.
    а) Плоскости, соответствующие трем уравнениям, пересекаются в одной точке.
    б) Плоскости, соответствующие трем уравнениям, пересекаются по одной прямой.
    в) Плоскости, соответствующие двум уравнениям, параллельны, третья их пересекает.
    г) Попарные пересечения плоскостей являются тремя параллельными прямыми.
    д) Плоскости, соответствующие трем уравнениям, параллельны.
24. Докажите, используя определение подпространства, что множество матриц, перестановочных с квадратной матрицей A порядка n (то есть $AX = XA$), является подпространством пространства квадратных матриц порядка n.
25. Какова минимальная размерность подпространства L матриц, перестановочных с матрицей A размером (2×2)? Приведите пример матрицы, для которой это минимум достигается.
26. Какова максимальная размерность подпространства L матриц, перестановочных с матрицей A размером (2×2)? Приведите пример матрицы, для которой это максимум достигается.
27. Докажите, что множество L квадратных матриц X размером 3×3, удовлетворяющих условию $X = X^T \cdot A$, где $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, является линейным подпространством. Укажите размерность и базис этого подпространства.
28. $\tilde{A}$ – матрица, присоединенная к матрице A размером (4×4), $rank\left(A\right) = 2$. Чему равен $rank\left(\tilde{A}\right)$?
29. $\tilde{A}$ – матрица, присоединенная к матрице A размером (4×4), $rank\left(A\right) = 3$. Чему равен $rank\left(\tilde{A}\right)$?
30. Пусть A, B, C, D – матрицы 2×2, и $AB = AC = D$. Следует ли, что $B = C$, если:
    а) $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. б) $D = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. в) $D = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.
31. Пусть $A \neq 0$, B_1 и B_2 – матрицы (2×2), и $AB_1 = AB_2$. Сформулируйте и обоснуйте необходимое и достаточное условие, наложенное на матрицу A, при выполнении которого $B_1 = B_2$?

32. Докажите, что произведение двух верхних треугольных квадратных матриц порядка n есть снова верхняя треугольная матрица.
33. Докажите, что для матрицы размером (2×2) найдется многочлен $P(t)$ степени не выше четырех, для которого $P(A)=0$.

Ответы на типовые задачи

1. а) $C_3 = B_1 - 2B_2 + B_3$.
   б) $C_3 = 3B_1 + 8B_2 - 5B_3$.
   в) $C_2 = 6B_1 - 2B_2 + 7B_3$.
2. а) $C^2 = 2A^1 + A^2 - 3A^3$.
   б) $C^2 = 6A^1 + 7A^2 - 2A^3$.
   в) $C^2 = 4A^1 + 6A^2 - 3A^3$.
3. а) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. б) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -6 & 7 & 8 \\ 8 & -9 & -11 \end{pmatrix}$.
   в) $A^{-1} = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. г) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 17 & -23 & 1 \\ -3 & 4 & 0 \\ 19 & -26 & 1 \end{pmatrix}$.
   д) $A^{-1} = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 11 & 17 & -21 \\ 7 & 11 & -13 \end{pmatrix}$. е) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -4 \\ 1 & -6 & 2 & 7 \\ 4 & -19 & 5 & 21 \end{pmatrix}$.
4. а) $\dim(L) = 2;\ X = \begin{pmatrix} 11\lambda & 11\mu \\ \lambda & \mu \\ -7\lambda & -7\mu \end{pmatrix}$,
   где $\lambda, \mu \in R;\ L = L\left\{\begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 1 & 0 \\ -7 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 11 \\ 0 & 1 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}\right\}$.
   б) $\dim(L) = 2;\ X = \begin{pmatrix} 24\lambda & 10\lambda & -\lambda \\ 24\mu & 10\mu & -\mu \end{pmatrix}$,
   где $\lambda, \mu \in R;\ L = L\left\{\begin{pmatrix} 24 & 10 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 24 & 10 & -1 \end{pmatrix}\right\}$.

в) $\dim(L)=2$; $X=\begin{pmatrix}3\lambda & 3\mu\\ 5\lambda & 5\mu\\ -2\lambda & -2\mu\end{pmatrix}$, где $\lambda,\mu\in R$; $L=L\left\{\begin{pmatrix}3 & 0\\ 5 & 0\\ -2 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 3\\ 0 & 5\\ 0 & -2\end{pmatrix}\right\}$.

г) $\dim(L)=2$; $X=\begin{pmatrix}6\lambda & 2\lambda & -3\lambda\\ 6\mu & 2\mu & -3\mu\end{pmatrix}$, где $\lambda,\mu\in R$;

$L=L\left\{\begin{pmatrix}6 & 2 & -3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 6 & 2 & -3\end{pmatrix}\right\}$.

д) $\dim(L)=9$; базисом служит набор из 9 матриц X_{jk} размером 5×3, где $j=1,2,3$, $k=1,2,3$; если положить $f_1=(2;1;0;0;0)$, $f_2=(6;0;2;0;9)$, $f_3=(1;0;0;1;2)$, то в матрице X_{jk} j-ый столбец равен f_k^T, остальные столбцы нулевые.

е) $\dim(L)=8$; базисом служит набор из 9 матриц X_{jk} размером 4×4, где $j=1,2,3,4, k=1,2$; если положить $f_1=(2;1;0;0)$, $f_2=(0;0;1;0)$, то в матрице X_{jk} j-ый столбец равен f_k^T, остальные столбцы нулевые.

ж) $\dim(L)=6$; базисом служит набор из 9 матриц X_{jk} размером 5×2, где $j=1,2$, $k=1,2,3$; если положить $f_1=(2;1;0;0;0)$, $f_2=(6;0;2;0;9)$, $f_3=1;0;0;1;2)$, то в матрице X_{jk} j-ый столбец равен f_k^T, другой столбец нулевой.

5. а) $X=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}$. б) $X=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}4 & -2\\ 3 & -1\end{pmatrix}$.

в) Нет решений. г) $X=\begin{pmatrix}2+2\lambda & -1+2\mu\\ 3+\lambda & 3+\mu\end{pmatrix}$, где $\lambda,\mu\in R$.

д) $X=\begin{pmatrix}2 & 0 & 3\\ 9 & 6 & 19\\ -10 & -7 & -23\end{pmatrix}$. е) $X=\begin{pmatrix}7 & -9 & -3\\ -1 & 1 & 3\\ 4 & -6 & 1\end{pmatrix}$.

ж) $X=\begin{pmatrix}3\lambda & 3\mu\\ 2-5\lambda & -1-5\mu\\ -2+\lambda & 3+\mu\end{pmatrix}$, где $\lambda,\mu\in R$.

з) $X=\begin{pmatrix}4+2\lambda & 6+2\mu\\ \lambda & \mu\end{pmatrix}$, где $\lambda,\mu\in R$.

6. а) $X=\begin{pmatrix}2p-3 & 6\\ -p+2 & -3\end{pmatrix}$.

   б) $X=\begin{pmatrix}2p-3 & -3p+6\\ 2 & -3\end{pmatrix}$.

   в) При $p=4$ нет решений;

   при $p\neq 4$ имеем $X=\dfrac{1}{2p-8}\cdot\begin{pmatrix}-2 & -5\\ -4p+8 & p-24\end{pmatrix}$.

   г) При всех p нет решений.

   д) При $p=6$ нет решений;

   при $p\neq 6$ имеем $X=\dfrac{1}{6-p}\cdot\begin{pmatrix}2p-8 & 2\\ -3p+12 & -3\end{pmatrix}$.

   е) При $p\neq -4$ имеем $X=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}$;

   при $p=-4$ имеем $X=\begin{pmatrix}-1+2\lambda & \lambda\\ -1+2\mu & \mu\end{pmatrix}$, где $\lambda,\mu\in R$.

   ж) $X=\begin{pmatrix}2p-3 & -3p+6\\ -p & 2p+1\end{pmatrix}$.

   з) При $p=-6$ нет решений;

   при $p\neq -6$ имеем $X=\dfrac{1}{p+6}\cdot\begin{pmatrix}2-p & 4\\ 4 & 2\end{pmatrix}$.

   и) При $p\neq 2$ нет решений;

   при $p=2$ имеем $X=\begin{pmatrix}1+2\lambda & 3+2\mu\\ -\lambda & -\mu\end{pmatrix}$, где $\lambda,\mu\in R$.

7. а) $X=\begin{pmatrix}-20 & 32\\ -15 & 24\end{pmatrix}$.

   б) $X=\begin{pmatrix}10+\lambda & \lambda\\ -4+\mu & \mu\end{pmatrix}$, где $\lambda,\mu\in R$; $H=\begin{pmatrix}10 & 0\\ -4 & 0\end{pmatrix}+L\left\{\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right\}$.

   в) $X=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -2\\ -1 & 2\end{pmatrix}$.

   г) $X=\begin{pmatrix}5+2\lambda & -11+2\mu\\ -\lambda & -\mu\\ 7 & -18\end{pmatrix}$, где $\lambda,\mu\in R$;

$$H=\begin{pmatrix}5&-11\\0&0\\7&-18\end{pmatrix}+L\left\{\begin{pmatrix}2&0\\-1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&2\\0&-1\\0&0\end{pmatrix}\right\}.$$

д) $X=\begin{pmatrix}\lambda&8-3\lambda&1-\lambda\\\mu&-5-3\mu&-\mu\end{pmatrix}$, где $\lambda,\mu\in R$;

$$H=\begin{pmatrix}0&8&1\\0&-5&0\end{pmatrix}+L\left\{\begin{pmatrix}1&-3&-1\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\1&-3&-1\end{pmatrix}\right\}.$$

е) $X=\begin{pmatrix}\lambda&\mu&\nu\\2\lambda&3+2\mu&-1+2\nu\end{pmatrix}$, где $\lambda,\mu,\nu\in R$;

$$H=\begin{pmatrix}0&0&0\\2&3&-1\end{pmatrix}+L\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&2&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&2\end{pmatrix}\right\}.$$

ж) $X=\begin{pmatrix}1+4\lambda&-1+4\mu\\-2+3\lambda&3\mu\end{pmatrix}$, где $\lambda,\mu\in R$;

$$H=\begin{pmatrix}1&-1\\-2&0\end{pmatrix}+L\left\{\begin{pmatrix}4&0\\3&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&4\\0&3\end{pmatrix}\right\}.$$

з) $X=\begin{pmatrix}\lambda&-17+2\lambda\\\mu&12+2\mu\end{pmatrix}$, где $\lambda,\mu\in R$; $H=\begin{pmatrix}0&-17\\0&12\end{pmatrix}+L\left\{\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&2\end{pmatrix}\right\}.$

и) $X=\begin{pmatrix}\lambda&\mu\\-13&10\\17-\lambda&-13-\mu\end{pmatrix}$, где $\lambda,\mu\in R$;

$$H=\begin{pmatrix}0&0\\-13&10\\17&-13\end{pmatrix}+L\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\\-1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\\0&-1\end{pmatrix}\right\}.$$

8. а) $X=\begin{pmatrix}4\lambda+\mu&0\\3\lambda&\mu\end{pmatrix}$, где $\lambda,\mu\in R$;

$$\dim(L)=2,\ L=L\left\{\begin{pmatrix}4&0\\3&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}.$$

б) $X=\begin{pmatrix}\lambda&\mu\\0&\lambda\end{pmatrix}$, где $\lambda,\mu\in R$; $\dim(L)=2,\ L=L\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right\}.$

в) $X=\begin{pmatrix}\lambda+\mu&-3\mu\\-\mu&\lambda+2\mu\end{pmatrix}$, где $\lambda,\mu\in R$;

$$\dim(L)=2,\ L=L\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&-3\\-1&2\end{pmatrix}\right\}.$$

г) $X=\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\mu&0\\0&0&\nu\end{pmatrix}$, где $\lambda,\mu,\nu\in R$;

$$\dim(L)=3,\ L=L\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}.$$

д) $X=\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&\mu\end{pmatrix}$, где $\lambda,\mu\in R$; $\dim(L)=2,\ L=L\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$.

е) $X=\begin{pmatrix}\lambda&-\mu\\-4\mu&\lambda+2\mu\end{pmatrix}$, где $\lambda,\mu\in R$;

$$\dim(L)=2,\ L=L\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-1\\-4&2\end{pmatrix}\right\}.$$

ж) $X=\begin{pmatrix}\lambda+2\mu&-\mu\\2\mu&\lambda-2\mu\end{pmatrix}$, где $\lambda,\mu\in R$;

$$\dim(L)=2,\ L=L\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-1\\2&-4\end{pmatrix}\right\}.$$

9. а) $A^2=E,\ A^{29}=A$. б) $A^2=3E,\ A^{25}=3^{12}\cdot A$.
   в) $A^2=-E,\ A^{75}=-A$. г) $A^3=-8E,\ A^{40}=-2^{39}\cdot A$.

Ответы на дополнительные задачи

10. Например, $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

11. а) Например, $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$. б) Например, $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$.
    в) Например, $A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$. г) Например, $A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$.
    д) Например, $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$.

12. Например, $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$.

13. Неверно.
14. Нельзя.
15. Если $r(A)=0$ или $r(A)=2$, то верно, если $r(A)=1$, то неверно.
16. Не следует.
17. а) Нет. б) Да.
18. $0 \le r(B) \le 2$.
19. Например, $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.
20. Не существуют.
21. Например, $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.
22. а) Два и два. б) Два и три. в) Два и три. г) Один и два.
23. а) Три и три. б) Два и два. в) Два и три. г) Два и три. д) Один и два.
25. $dim(L)=2$; например, $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$.
26. $dim(L)=4$, $A=E$.
27. $dim(L)=2$, $F=\left\{\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\right\}$.
28. $rank(\tilde{A})=0$.
29. $rank(\tilde{A})=1$.
30. а) Следует. б) Следует. в) Не следует.
31. $rank(A)=1$.
33. Указание. Сравните с размерностью пространства всех матриц.

VII. ЛИНЕЙНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

Определения и формулы

Суммой Минковского двух подмножеств M_1 и M_2 линейного пространства V называется подмножество M, содержащее все суммы $a_1 + a_2$, где $a_1 \in M_1, a_2 \in M_2$. Сумма Минковского обозначается $M = M_1 + M_2$.

Линейным многообразием в линейном пространстве V называется сумма Минковского $H = c + L$, где c фиксированный вектор, L линейное подпространство.

Размерность $dim(H)$ многообразия H по определению равна размерности $\dim(L)$ подпространства L. В частности, размерность многообразия, содержащего одну точку, равна нулю. Пустое множество также считается линейным многообразием, размерность которого не определена.

Многообразие, которое содержит нуль-вектор, является подпространством.

Подпространство L определяется по многообразию H однозначно и состоит из всевозможных попарных разностей $(x - y)$ элементов многообразия H.

Одномерное линейное многообразие называется прямой. k-мерное многообразие называется k-мерной плоскостью. Многообразие размерности $(n-1)$ в линейном пространстве размерности n называется гиперплоскостью.

Подмножество H координатного пространства является линейным многообразием тогда и только тогда, когда оно является множеством решений некоторой неоднородной СЛАУ.

Пересечением нескольких линейных многообразий является их теоретико-множественное пересечение (подмножество векторов, содержащихся во всех многообразиях).

Пересечение линейных многообразий является линейным многообразием.

Суммой двух линейных многообразий $H_1 = c_1 + L_1$ и $H_2 = c_2 + L_2$ называется их сумма Минковского (обозначение $H = H_1 + H_2$). Сумма линейных многообразий является линейным многообразием, заданным формулой

$$H_1 + H_2 = (c_1 + c_2) + (L_1 + L_2).$$

Два линейных многообразия $H_1 = c_1 + L_1$ и $H_2 = c_2 + L_2$, не имеющие общих точек, называются параллельными, если либо $L_1 \subseteq L_2$, либо $L_2 \subseteq L_1$. Если ни одно из двух условий не выполняется, то многообразия без общих точек называются скрещивающимися.

Критерий непустого пересечения многообразий: два многообразия $H_1 = c_1 + L_1$ и $H_2 = c_2 + L_2$ имеют непустое пересечение тогда и только тогда, когда $c_2 - c_1 \in L_1 + L_2$.

Если два многообразия пересекаются, то верна формула, аналогичная формуле Грассмана:

$$dim(H_1 + H_2) + \dim(H_1 \cap H_2) = \dim(H_1) + \dim(H_2).$$

Если пересечение многообразий пусто, то значение $\dim(H_1 \cap H_2)$ не определено.

Критерий параллельности многообразий: два многообразия параллельны или совпадают тогда и только тогда, когда

$$\dim(L_1 \cap L_2) = \min(\dim(L_1), \dim(L_2)).$$

Эквивалентное условие $\dim(L_1 + L_2) = \max(\dim(L_1), \dim(L_2))$.

Два многообразия $H_1 = c_1 + L_1$ и $H_2 = c_2 + L_2$ пересекаются или скрещиваются тогда и только тогда, когда

$$\dim(L_1 \cap L_2) < \min(\dim(L_1), \dim(L_2)).$$

Эквивалентное условие $\dim(L_1 + L_2) > \max(\dim(L_1), \dim(L_2))$.

Примеры решения задач

Пример 1. В пространстве $P_n[x]$ многочленов степени не выше четырех задайте в параметрическом виде многообразие H, ограниченное условиями $p(-1) = -p(1)$ и $p'(1) = 3$. Укажите его размерность.

Решение. Запишем многочлен в виде

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4.$$

Условия $p(-1) = -p(1)$ и $p'(1) = 3$ записываются уравнениями для коэффициентов многочлена:

$$\begin{cases} a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 = -a_0 - a_1 - a_2 - a_3 - a_4 \\ a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 = 3 \end{cases}$$

$$\text{или} \begin{cases} a_0 \quad + \quad a_2 \qquad + \ a_4 = 0 \\ \qquad a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 = 3 \end{cases}$$

Система имеет ранг 2, ее решением является трехмерное многообразие в R^5. Частным решением может служить вектор $c = (0;\ 3;\ 0;\ 0;\ 0)$, которому соответствует многочлен $p_0(x) = 3x$. В качестве ФНР соответствующей однородной СЛАУ можно выбрать векторы

$$f_1=(1;\ 2;-1;\ 0;\ 0),\ f_2=(0;\ 3;\ 0;-1;\ 0),\ f_3=(1;\ 4;\ 0;\ 0;-1)$$

Им будут соответствовать многочлены

$$p_1(x)=-x^2+2x+1,\ p_2(x)=-x^3+3x,\ p_3(x)=-x^4+4x+1.$$

Параметрическое представление $H=p_0(x)+L\{p_1(x),p_2(x),p_3(x)\}$.

Пример 2. В пространстве R^3 многообразие $H=c(1;\ -2;\ 2)+L\{(4;\ -1;\ 3)\}$ задать с помощью СЛАУ.

Решение. Сначала надо составить однородную СЛАУ для прямой $L=L\{a_1(4;\ -1;\ 3)\}$, используя стандартный подход, описанный в Главе V.

Получим $L=\begin{cases} x_1+4x_2 & =0 \\ 3x_2+\ x_3 & =0 \end{cases}$. Система для H должна быть неоднородной с той же матрицей коэффициентов. При этом вектор $c=(1;\ -2;\ 2)$ должен быть частным решением этой СЛАУ. Для этого свободные члены уравнений вычисляются подстановкой в левую часть координат вектора c.

Получим $H:\begin{cases} x_1+4x_2 & =-7 \\ 3x_2+\ x_3 & =-4 \end{cases}$.

Второй способ. Вектор $x(x_1,x_2,x_3)\in H$, если выполняется векторное уравнение $t\cdot a_1=-c+x$. Запишем решение соответствующей СЛАУ с неизвестной t, в которой свободные члены изображаются параметрами x_1,x_2,x_3:

$$\left(\begin{array}{r|r} 4 & -1+x_1 \\ -1 & 2+x_2 \\ 3 & -2+x_3 \end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{r|l} 0 & 7+x_1+4x_2 \\ -1 & 2+x_2 \\ 0 & 4+x_3+3x_2 \end{array}\right).$$

Эта система совместна при ограничениях

$$\begin{cases} x_1+4x_2 & +7=0 \\ 3x_2+\ x_3 & +4=0 \end{cases},$$

которые задают искомую СЛАУ для H. Ответ оказался таким же, как при решении первым способом.

Пример 3. Пусть заданы два многообразия

$$H_1=c_1(1;-2;\ 1;\ 3)+L\{a_1(1;\ 2;\ 2;\ 0),a_2(0;-2;-2;\ 1)\},\ H_2:\begin{cases} x_1-x_4=-1 \\ x_2-x_3=-3 \end{cases}.$$

Найдите параметрическое представление для их пересечения $H_3=H_1\cap H_2$.

Решение. Если нужно найти пересечение многообразий, они должны быть заданы в виде СЛАУ. Поэтому сначала нужно построить неоднородную СЛАУ для многообразия H_1, как в Примере 2. Получим

$$H_1:\begin{cases}2x_1-x_2-2x_4=-2\\ x_2-x_3=\ -3\end{cases}.$$

СЛАУ для пересечения многообразий получается объединением уравнений СЛАУ для обоих многообразий:

$$H_3:\begin{cases}2x_1-x_2\qquad-2x_4=-2\\ \qquad x_2\ -x_3\qquad\ =-3\\ x_1\qquad\qquad-\ x_4=-1\\ \qquad x_2\ -x_3\qquad\ =-3\end{cases}.$$

В качестве частного решения годится вектор $c_3(0;\ 0;\ 3;\ 1)$. ФНР соответствующей однородной СЛАУ состоит из одного вектора $f_1(1;\ 0;\ 0;\ 1)$. В итоге

$$H_3=c_3(0;\ 0;\ 3;\ 1)+L\{f_1(1;\ 0;\ 0;\ 1)\}.$$

Пример 4. Пусть заданы два многообразия

$$H_1=c_1(1;-2;\ 1;\ 3)+L\{a_1(1;\ 2;\ 2;\ 0),a_2(0;-2;-2;\ 1)\},\ H_2:\begin{cases}x_1-x_4=-1\\ x_2-x_3=-3\end{cases}.$$

Найдите СЛАУ для их суммы $H_3=H_1+H_2$ и укажите ее размерность.

Решение. Найдем параметрическое представление многообразия H_2, заданного системой. Получим

$$H_2=c_2(0;0;\ 3;\ 1)+L\{b_1(1;\ 0;\ 0;\ 1),b_2(0;1;1;\ 0)\}.$$

Сумма многообразий в параметрическом представлении

$$H_3=H_1+H_2=(c_1+c_2)+L\{a_1,a_2,b_1,b_2\}.$$

Вычислим СЛАУ для подпространства $L_3=L\{a_1,a_2,b_1,b_2\}$. Получим $L_3=\{x_2-x_3=0$. В СЛАУ для H_3 надо изменить свободные члены так, чтобы вектор $c_3=c_1+c_2$ был ее частным решением. Получим $H_3=\{x_2-x_3=-6$.

Пример 5. Найдите, как взаимно расположены линейные многообразия H_1 и H_2. В случае непустого пересечения укажите размерность пересечения.

а) $H_1=c_1(1;\ 2;\ 1;\ 3)+L\{a_1(1;\ 0;\ 1;\ -1);\ a_2(1;\ -1;\ 0;\ 2)\ \}$,
$H_2=c_2(1;\ -2;\ -2;\ 0)+L\{b_1(2;\ 1;\ -1;\ 0);\ b_2(1;\ 2;\ -1;\ 1)\ \}$;

б) $H_1=c_1(-1;\ 2;\ 1;\ -1)+L\{a_1(1;\ -1;\ 1;\ 2);\ a_2(1;\ 2;\ -1;\ -2)\ \}$,
$H_2=c_2(1;\ 2;\ 1;\ 2)+L\{b_1(2;\ 1;\ 0;\ 0);\ b_2(1;\ -4;\ 3;\ 6)\ \}$;

в) $H_1=c_1(3;\ -1;\ 1;\ -3)+L\{a_1(1;\ -1;\ 1;\ -1);\ a_2(1;\ -1;\ -1;\ 2)\ \}$,
$H_2=c_2(2;\ -1;\ 1;\ -2)+L\{b_1(1;\ 0;\ 2;\ -3);\ b_2(0;\ 1;\ 1;\ -2)\ \}$.

Решение. Взаимное расположение двух многообразий зависит от двух факторов: пустого или непустого пересечения многообразий и взаимного расположения их направляющих подпространств. В зависимости от этого возможны четыре варианта расположения:

(1) $H_1 \cap H_2 = \varnothing$, $L_1 \subseteq L_2$ или $L_2 \subseteq L_1$: многообразия параллельны;
(2) $H_1 \cap H_2 = \varnothing$, ни $L_1 \subseteq L_2$, ни $L_2 \subseteq L_1$: многообразия скрещиваются;
(3) $H_1 \cap H_2 \neq \varnothing$, $L_1 \subseteq L_2$ или $L_2 \subseteq L_1$: одно многообразие включает другое;
(4) $H_1 \cap H_2 \neq \varnothing$, ни $L_1 \subseteq L_2$, ни $L_2 \subseteq L_1$: многообразия пересекаются.

Критерий непустого пересечения многообразий: $c_2 - c_1 \in L_1 + L_2$.

Критерий параллельности или включения: $L_1 \subseteq L_2$ или $L_2 \subseteq L_1$ тогда и только тогда, когда

$$\dim(L_1 \cap L_2) = \min(\dim(L_1), \dim(L_2)).$$

Вектор $c_2 - c_1 \in L_1 + L_2$, если $c_2 - c_1$ разлагается по векторам $\{a_1, a_2, b_1, b_2\}$. Для проверки надо составить неоднородную СЛАУ, в которой в матрице коэффициентов координаты векторов $\{a_1, a_2, b_1, b_2\}$ записаны по столбцам, а координаты вектора $c_2 - c_1$ составляют столбец свободных членов. Ранг матрицы коэффициентов этой СЛАУ совпадает с размерностью подпространства $L\{a_1, a_2, b_1, b_2\} = L_1 + L_2$.

а) Имеем $\dim(L_1) = 2$, $\dim(L_2) = 2$. Далее $c_2 - c_1 = (0; -4; -3; -3)$, так что СЛАУ для проверки непустого пересечения принимает вид

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right).$$

Матрица коэффициентов этой СЛАУ невырожденная, поэтому СЛАУ имеет единственное решение. Следовательно, пересечение многообразий не пусто. Невырожденность СЛАУ означает, что $\dim(L_1 + L_2) = r\{a_1, a_2, b_1, b_2\} = 4$. При непустом пересечении по формуле Грассмана $\dim(H_1 \cap H_2) = \dim(L_1 \cap L_2) = 0$. Итак, многообразия H_1 и H_2 пересекаются в одной точке.

б) Имеем $\dim(L_1) = 2$, $\dim(L_2) = 2$. Далее $c_2 - c_1 = (2;\ 0;\ 0;\ 3)$, так что СЛАУ для проверки непустого пересечения принимает вид

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 6 & 3 \end{array}\right).$$

Решая систему, получим, что она несовместна, то есть, $c_2 - c_1 \notin L_1 + L_2$. Следовательно, пересечение многообразий H_1 и H_2 пусто. В процессе решения СЛАУ оказывается, что ранг системы равен 2, откуда $\dim(L_1 + L_2) = r\{a_1, a_2, b_1, b_2\} = 2$. Проверим условие параллельности: $\dim(L_1 + L_2) = \dim(L_1) = \dim(L_2)$, то есть $L_1 = L_2$. Итак, многообразия H_1 и H_2 параллельны.

в) Имеем $\dim(L_1) = 2$, $\dim(L_2) = 2$. Далее, $c_2 - c_1 = (-1;\ 0;\ 0;\ 0)$, так что СЛАУ для проверки непустого пересечения принимает вид

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & -2 & 0 \end{array}\right).$$

Решая систему, получим, что она несовместна, то есть, $c_2 - c_1 \notin L_1 + L_2$. Следовательно, пересечение многообразий H_1 и H_2 пусто. В процессе решения СЛАУ оказывается, что ранг матрицы СЛАУ равен 3, откуда $\dim(L_1 + L_2) = r\{a_1, a_2, b_1, b_2\} = 3$. Проверим условие параллельности: $\dim(L_1 + L_2) > \max(\dim(L_1), \dim(L_2))$. Итак, многообразия H_1 и H_2 скрещиваются.

Пример 6. Найдите все значения параметра p, при которых параллельны многообразия

$$H_1 = c_1(1;-2;3) + L\{a_1(1;0;p)\} \text{ и } H_2 = c_2(-1;1;1) + L\{b_1(p;2;1), b_2(0;1;0)\}.$$

Решение. Сначала проверим критерий параллельности: для параллельности или совпадения многообразий необходимо и достаточно, чтобы ранг набора $\{a_1, b_1, b_2\}$ был равен двум. Подсчитаем этот ранг:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & p \\ p & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & p \\ p & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 0 & 1-p^2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг равен двум при $p = \pm 1$. Теперь при $p = 1$ и $p = -1$ проверим критерий непустого пересечения. Для этого следует вычислить $c = c_2 - c_1 = (-2;3;-2)$ и определить, совместны ли системы

$$(1) \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \text{ (для } p = 1\text{)}; \quad (2) \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \text{ (для } p = -1\text{)}.$$

Первая система совместна (многообразия пересекаются), вторая система несовместна (многообразия параллельны). Итак, $p=-1$.

Пример 7. Приведите пример трехмерного линейного многообразия H_2, которое параллельно двумерному линейному многообразию $H_1=c_1(1;-2;\ 1;\ 3)+L\{a_1(1;\ 0;\ 2;-4), a_2(-1;\ 2;-2;\ 1)\}$ и проходит через точку $M=(-3;-1;-2;\ 0)$.

Решение. Условия задачи означают, что $H_2=M+L\{b_1,b_2,b_3\}$, векторы $\{b_1,b_2,b_3\}$ линейно независимы, векторы $\{b_1,b_2,b_3,c_2-c_1\}$ также линейно независимы, и $L(a_1,a_2)\subset L(b_1,b_2,b_3)$. В качестве векторов b_1 и b_2 можно взять векторы a_1 и a_2. Тогда остается подобрать вектор b_3 так, чтобы было выполнено условие $r\{a_1,a_2,b_3,c_2-c_1\}=4$. Проверка показывает, что годится, например, вектор $b_3=(0;\ 0;\ 0;\ 1)$.

Пример 8. Приведите пример двух двумерных линейных многообразий H_1 и H_2, пересечение которых состоит из единственной точки $M_0=(-3;-1;-2;\ 0)$, при этом $M_1\in H_1$, $M_2\in H_2$ для заданных точек $M_1=(1;\ 0;\ 2;-4)$ и $M_2=(-1;\ 2;-2;\ 1)$.

Решение. Условия задачи означают, что $H_1=M_0+L_1$, $H_2=M_0+L_2$, $M_1-M_0\in L_1$, $M_2-M_0\in L_2$, $L_1=L\{a_1,a_2\}$, $L_2=L\{b_1,b_2\}$. Значит, можно взять $M_1-M_0=a_1$, $M_2-M_0=b_1$. Тот факт, что пересечение $H_1\cap H_2$ состоит из одной точки, означает, что $\dim(L_1\cap L_2)=0$. По формуле Грассмана $\dim(L_1+L_2)=4$. Тогда остается подобрать векторы a_2 и b_2 так, чтобы было выполнено условие $r\{a_1,a_2,b_1,b_2\}=4$. Проверка показывает, что годятся, например, векторы $a_2=(0;\ 0;\ 0;\ 1)$, $b_2=(0;\ 0;\ 1;\ 0)$.

Типовые задачи

1. Многообразие, представленное в форме СЛАУ, задайте в параметрическом виде $H=c+L\{a_1,a_2,\dots,a_k\}$, и укажите его размерность.

   а) $H:\begin{cases}-x+2y=3\\3x-6y=-9\end{cases}.$

   б) $H:\begin{cases}3x+4y-5z=1\\2x+3y+2z=5\end{cases}.$

   в) $H:\begin{cases}3x+y-2z=-1\\2x+3y-z=5\\5x-3y-4z=-13\end{cases}.$

г) $H:\begin{cases} 3x+2y-3z-t=3 \\ -2x-3y+5z+2t=-1 \\ 7x+3y-4z-t=8 \\ -x-4y+7z+3t=1 \end{cases}.$

д) $H:\begin{cases} 3x_1+x_2-2x_3+x_4-2x_5=5 \\ x_1+2x_2+2x_3-x_5=5. \\ x_1-3x_2+x_3-3x_4=-5 \end{cases}$

е) $H:\begin{cases} x_1+2x_2+x_3-2x_4+x_5=2 \\ 3x_1-x_2+2x_3+2x_4=2. \\ 2x_1-4x_2+x_3+4x_4-x_5=2 \end{cases}$

Дополнительно.

ж) $H:\begin{cases} -x_1+x_2+x_3-x_4-2x_5=6 \\ 2x_1-x_2+2x_3+x_4+x_5=2. \\ 3x_1-2x_2+4x_3+2x_4+3x_5=2 \end{cases}$

з) $H:\begin{cases} 2x_1+x_2-2x_3+x_4+x_5=3 \\ 3x_1+2x_2+x_3+2x_4-x_5=5. \\ x_1+x_2+3x_3+x_4=2. \end{cases}$

2. Многообразие, представленное в параметрической форме $H=c+L\{a_1,a_2,a_3\}$, задайте в виде множества решений СЛАУ.

а) $H=c(1;-2)+L\{a_1(-1;1)\}$.

б) $H=c(1;-2;2)+L\{a_1(4;-1;3)\}$.

в) $H=c(1;-2;2)+L\{a_1(1;-2;3),a_2(-1;1;-2)\}$.

г) $H=c(1;0;-2;3;2)+L\{a_1(3;2;-3;-3;-2),a_2(1;2;-2;2;1),$
$a_3(-2;-3;5;1;1)\}$.

д) $H=c(1;2;-1;3)+L\{a_1(0;5;-1;1),a_2(2;-1;-1;1),a_3(3;1;-2;2)\}$.

е) $H=c(1;-2;1;3)+L\{a_1(2;-1;5;7),a_2(4;-2;7;5),a_3(2;-1;1;-5)\}$.

Дополнительно.

ж) $H=c(1;-1;-1;0;3)+L\{a_1(1;1;1;1;1),a_2(-1;0;0;0;-1),a_3(0;1;0;1;0)\}$.

з) $H=c(2;0;-1;1)+L\{a_1(1;-6;2;2),a_2(2;3;-1;-6),a_3(-1;3;1;-2)\}$.

3. Установите с полным обоснованием, как взаимно расположены два линейных многообразия H_1 и H_2. В случае непустого пересе-

чения задайте его в параметрическом виде и укажите его размерность.

а) $H_1 = c_1(0;\ 2;\ 1;\ 1) + L\{a_1(1;\ 2;\ 2;\ 0), a_2(0; -2; -2;\ 1)\}$,
$H_2 = c_2(0;\ 1;\ 0;\ 0) + L\{b_1(2;\ 1;\ 1;\ 2), b_2(0;\ 1;\ 1;\ 0)\}$.

б) $H_1 = c_1(0; -3;\ 2; -1) + L\{a_1(0;\ 2; -1; -3), a_2(2; 0;\ 3;\ -1)\}$,
$H_2 = c_2(1;\ 2;\ 1; 0) + L\{b_1(1;\ 2; -3;\ 0), b_2(2;\ 1; -1;\ 1)\}$.

в) $H_1 = \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 3 \\ x_1 \quad - x_2 \quad + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$, $H_2 = \begin{cases} 2x_1 - x_2 \qquad - x_4 = 2 \\ \ x_1 \qquad - x_3 \qquad = 2 \end{cases}$.

г) $H_1 = c_1(2;5;1;-2) + L\{a_1(2;1;-1;3), a_2(1;2;0;1)\}$,
$H_2 = c_2(4;1;0;2) + L\{b_1(0;-3;-1;2)\}$.

д) $H_1 = c_1(3;1;1;1) + L\{a_1(0;-2;1;6), a_2(1;-1;1;1)\}$,
$H_2 = c_2(1;1;0;5) + L\{b_1(2;-4;3;8), b_2(1;3;-1;-11)\}$.

е) $H_1 = c_1(0;1;2;5) + L\{a_1(1;0;-1;4), a_2(1;1;0;1)\}$,
$H_2 = c_2(0;2;3;1) + L\{b_1(1;2;1;-2), b_2(1;3;2;-5)\}$.

ж) $H_1 = c_1(2;1;1;-1) + L\{a_1(2;1;-1;4), a_2(1;2;0;1)\}$,
$H_2 = c_2(4;2;0;3) + L\{b_1(0;-3;-1;2)\}$.

Дополнительно.

з) $H_1 = c_1(1;-3;2;-1) + L\{a_1(-1;2;-3;1), a_2(5;-2;-1;2)\}$,
$H_2 = c_2(4;-2;3;-1) + L\{b_1(1;2;-5;2), b_2(2;0;-2;1)\}$.

и) $H_1 = c_1(-2;3;-1;1;) + L\{a_1(2;-1;3;2), a_2(3;2;7;6)\}$,
$H_2 = c_2(3;-3;4;3) + L\{b_1(1;3;4;4), b_2(-1;4;1;2)\}$.

4. Задайте многообразие $H_3 = H_1 \cap H_2$ с помощью СЛАУ, представьте его в виде $H_3 = c_3 + L$ и укажите его размерность.

а) $H_1 = c_1(3;1;1;0) + L\{a_1(1;2;0;-1), a_2(0;1;0;1)\}$,
$H_2 : \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \\ \qquad\qquad x_3 \qquad\quad = 1 \end{cases}$.

б) $H_1 = c_1(0;-2;1;3;3) + L\{a_1(0;1;1;1;0), a_2(1;0;0;0;1), a_3(1;1;1;0;0)\}$,
$H_2 = c_2(0;-2;1;1;1) + L\{b_1(1;1;1;1;1), b_2(-1;0;0;0;-1), b_3(0;1;0;1;0)\}$.

в) $H_1 = c_1(1;-2;1;3;) + L\{a_1(1;0;-1;0), a_2(0;-1;0;1)\}$,
$H_2 = c_2(0;-2;1;1) + L\{b_1(1;0;0;1), b_2(0;1;1;0)\}$.

г) $H_1 = c_1(1;-2;1;3) + L\{a_1(1;1;1;0), a_2(0;-1;-1;1)\}$,

$$H_2 = c_2(0;-2;1;1) + L\{b_1(1;0;0;0), b_2(0;0;0;2)\}.$$

Дополнительно.

д) $H_1 = c_1(1;-2;1;3) + L\{a_1(1;2;2;0), a_2(0;-2;-2;1)\}$,

$H_2 = c_2(0;-2;1;1) + L\{b_1(1;1;1;1), b_2(0;1;1;0)\}$.

е) $H_1 : \begin{cases} x_1 - x_2 \quad + x_4 = -1 \\ \quad x_2 + x_3 \quad = 2 \end{cases}$,

$H_2 = c_2(1;3;-1;-1) + L\{b_1(1;-1;1;0), b_2(0;-1;1;2)\}$.

5. Задайте многообразие $H_3 = H_1 + H_2$ с помощью СЛАУ и укажите его размерность.

а) $H_1 : \begin{cases} x_1 - x_2 \quad - x_4 = 0, \\ \qquad x_3 \quad = 1, \end{cases}$,

$H_2 = c_2(2;0;1;0) + L\{b_1(2;1;0;0), b_2(0;1;0;1)\}$.

б) $H_1 = c_1(1;0;0;0) + L\{a_1(1;0;1;0), a_2(0;1;0;1)\}$,

$H_2 : \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 \quad + x_3 \quad = 2 \end{cases}$.

в) $H_1 = L\{\overline{a}_1(1;0;0;1),\ \overline{a}_2(-1;0;1;0)\} + \overline{c}_1(1;0;3;4)$,

$H_2 : \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 \quad + \ x_3 \quad = 1 \end{cases}$.

г) $H_1 : \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 \quad = 5 \\ x_1 - x_2 \quad + 3x_4 = 2 \end{cases}$,

$H_2 = c_2(3;0;1;0) + L\{b_1(3;1;0;0), b_2(0;1;1;1)\}$.

6. В пространстве $P_4[x]$ многочленов степени не выше четырех линейное многообразие H задано условиями на значения многочлена и его производных. Представьте многообразие в параметрическом виде $H = p_0(x) + L\{p_1(x), p_2(x), \ldots\}$, и укажите его размерность.

а) $p(-1) = 1$.

б) $p'(-1) = 2$.

в) $p(1) = 4,\ p'(1) = 8,\ p''(x) = p''(-x)$.

г) $p(-1) = 2,\ \ p''(x) = -p''(-x)$.

Дополнительно.

д) $p'(1) = -2,\ p''(x) = p''(-x)$.

е) $p'(1) = -4,\ \ p(-x) = p(x)$.

7. В пространстве функций $V = L\{ f_1(x), f_2(x), \ldots \}$ линейное многообразие H задано условиями на значения функции и ее производных вида $f(a_j) = c_j$ или $f'(b_k) = d_k$. Найдите параметрическое представление многообразия.

а) $V = L\{ \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x \}$, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $f(\pi) = 2$.

б) $V = L\{1; \sin x; \sin 2x; \cos 2x\}$, $f'(\pi) = 1$, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

в) $V = L\{\sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x\}$, $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

г) $V = L\{1, \sin^2 x, \cos^2 x, \sin 2x, \cos 2x\}$, $f(\pi) = -1$, $f(\pi/4) = -f(-\pi/4)$.

Дополнительно.

д) $V = L\{\sin x, \cos x, \sin 3x, \cos 3x\}$, $f(\pi) = -1$, $f'(\pi) = 1$.

е) $V = L\{ \sin 3x, \cos 3x, \sin 2x, \cos 2x \}$, $f(0) = 1$, $f'(\pi) = -2$.

ж) $V = L\{ 1, \sin x, \cos x, \sin 3x, \cos 3x \}$, $f(\pi) = 1$, $f'(\pi) = -1$.

з) $V = L\{ 1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x \}$, $f(x) = -f(-x)$, $f'(\pi) = 1$.

8. Найдите общий вид матриц X, удовлетворяющих матричному уравнению $AX = B$ или $XA = B$, а также представьте многообразие H всех таких матриц в параметрическом виде и укажите его размерность.

а) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 7 & 12 \end{pmatrix}$.

б) $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 5 & -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -12 \\ 10 & -20 \end{pmatrix}$.

в) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -3 & -4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -5 & 7 & 0 \\ 5 & -9 & 1 \\ -12 & 9 & 6 \end{pmatrix}$.

г) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 10 \\ 3 & -15 \end{pmatrix}$.

д) $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

е) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$

9. Установите с полным обоснованием, как взаимно расположены линейные многообразия H_1 и H_2. Определите размерность их суммы. Определите размерность их пересечения, если многообразия пересекаются.

а) $H_1 : \begin{cases} x_1 \quad -x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_2 - x_3 - 3x_4 = 2 \end{cases}, H_2 : \begin{cases} x_1 + 2x_2 \quad -x_4 = -3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = -5 \end{cases}.$

б) $H_1 : \begin{cases} 2x_1 \quad + x_3 + x_4 = 2 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}, H_2 : \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases}.$

в) $H_1 : \begin{cases} 2x_1 - x_2 \quad + x_3 - x_4 = -2 \\ 10x_1 + x_2 - 3x_3 - 3x_4 = -4 \end{cases}, H_2 : \begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 10x_2 - 3x_3 + 3x_4 = -1 \end{cases}.$

г) $H_1 : \begin{cases} x_1 \quad + x_3 - 2x_4 = 3 \\ x_2 - x_3 - 2x_4 = 1 \end{cases}, H_2 : \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -3 \\ 2x_1 - 7x_2 + 5x_3 + x_4 = 4 \end{cases}.$

д) $H_1 = \begin{cases} -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 3 \\ 5x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 7 \end{cases}, H_2 = \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 2x_4 = -2 \\ 2x_1 \quad -2x_3 + x_4 = -3 \end{cases}.$

е) $H_1 = \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 6x_4 = 12 \end{cases},$

$H_2 = \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 10 \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 8 \end{cases}.$

10. Найдите все значения параметра p, при которых многообразия H_1 и H_2 скрещиваются.

а) $H_1 = c_1(0;1;1;1) + L\{a_1(1;0;-1;0)\}$,
$H_2 = c_2(0;0;1;0) + L\{b_1(1;1;p;1)\}$.

б) $H_1 = c_1(2;2;-1;2) + L\{a_1(2;3;0;1)\}$,
$H_2 = c_2(0;1;1;3) + L\{b_1(1;0;p;-1)\}$.

в) $H_1 = c_1(2;1;0;1) + L\{a_1(2;3;-1;1)\}$,
$H_2 = c_2(0;-2;1;0) + L\{b_1(2;p;0;1)\}$.

г) $H_1 = c_1(2;1;3;1) + L\{a_1(2;1;1;3)\}$,
$H_2 = c_2(3;2;1;1) + L\{b_1(3;p-2;2;-1)\}$.

д) $H_1 = c_1(1;1;2;0) + L\{a_1(1;2;-1;-1)\}$,
$H_2 = c_2(0;0;1;1) + L\{b_1(-1;1;p;1)\}$.

11. Найдите все значения параметра p, при которых многообразия H_1 и H_2 пересекаются.

а) $H_1 = c_1(2;1;2;1) + L\{a_1(1;0;3;-1)\}$,
$H_2 = c_2(1;0;1;-1) + L\{b_1(1;1;p;2)\}$.

б) $H_1 = c_1(-2;0;1;2) + L\{a_1(1;1;-2;1)\}$,
$H_2 = c_2(1;0;p;1) + L\{b_1(2;1-p;-1;2)\}$.

в) $H_1 = c_1(-1;p;1;2) + L\{a_1(1;3;-2;2)\}$,
$$H_2 = \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 1 \\ -x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}.$$

г) $H_1 = c_1(-1;p-2;2;1) + L\{a_1(1;2;-1;1), a_2(-1;2;3;-1)\}$,
$H_2 = c_2(1;-1;3+2p;-2) + L\{b_1(1;-1;-2;3) b_2(2;3;1;1)\}$.

12. Найдите все значения параметра p, при которых многообразия H_1 и H_2 параллельны.

а) $H_1 = c_1(4;1;0;1) + L\{a_1(1;3;-1;2)\}$,
$H_2 = c_2(5;4;p;3) + L\{b_1(2;6;-2;4)\}$.

б) $M = (1;2;2;3)$,
$$H_2 = \begin{cases} x_1 + x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 \qquad\ - 2x_3 + x_4 = 3 \end{cases}.$$

в) $H_1 = c_1(0;1;1;0) + L\{a_1(-1;2;3;1)\}$,
$H_2 = c_2(1;2;3;1) + L\{b_1(1;2;2p-1;2), b_2(2;0;2;1)\}$.

г) $$H_1 = \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \end{cases},$$
$H_2 = c_2(1;2;3;1) + L\{b_1(-1;2-p;p-1;1), b_2(-2;1;1;2)\}$.

13. Определите взаимное расположение многообразий H_1 и H_2 при всех значениях параметра p.

а) $H_1 = c_1(0;3;-2) + L\{a_1(1;2;-1)\}$,
$H_2 = c_2(p;7;-1) + L\{b_1(1;0;3)\}$.

б) $$H_1 = \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 3x_4 = 14 \end{cases},$$
$$H_2 = \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 10 \\ -x_1 - 4x_2 + (p-3)x_3 + x_4 = 6 \end{cases}.$$

в) $H_1 = c_1(1; p; 9) + L\{a_1(p+1; 1-p; 0)\}$,
$H_2 = c_2(p; 2; p^2) + L\{b_1(1-p; 1; 0)\}$.

г) $H_1 = \begin{cases} 2x_1 + (p-1)x_2 + x_3 - 2x_4 = -3 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$,
$H_2 = \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 5x_4 = -12 \\ -x_1 + x_2 + px_3 - 3x_4 = -9 \end{cases}$.

д) $H_1 = \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -6 \end{cases}$,
$H_2 = c_2(-1; 3; 1; p-4) + L\{b_1(-1; p+1; 1; 0)\}$.

Дополнительные задачи

14. Верно ли следующее утверждение: множество квадратных матриц размера (2×2) с положительными элементами является линейным многообразием в пространстве всех матриц размером (2×2)?
15. Докажите, что если две плоскости в R^3 имеют общую точку, то они имеют и общую прямую.
16. Докажите, что две плоскости в R^3 либо параллельны, либо совпадают, либо пересекаются по общей прямой.
17. Могут ли два трехмерных многообразия в R^5:
    а) Не иметь общих точек.
    б) Иметь ровно одну общую точку.
    в) Иметь ровно две общие точки.
18. Докажите, что гиперплоскость не может скрещиваться ни с каким другим многообразием.
19. Докажите, что гиперплоскость и двумерная плоскость в R^4 либо параллельны, либо гиперплоскость содержит плоскость, либо они пересекаются по общей прямой.
20. Докажите, что две гиперплоскости в R^4 либо параллельны, либо совпадают, либо пересекаются по общей двумерной плоскости.
21. Пусть $H_1 = c_1 + L_1$ – гиперплоскость в R^n, $H_2 = c_2 + L\{a\}$ – прямая в R^n. Верно ли следующее утверждение: если $a \notin L_1$, то $H_1 \cap H_2 \neq \varnothing$?
22. Верно ли следующее утверждение: если H_1 и H_2 – линейные многообразия в R^n и $H_1 + H_2 = R^n$, то $H_1 \cap H_2 \neq \varnothing$?
23. Пусть H_1 и H_2 – линейные многообразия в R^8, и $\dim H_1 = 6$. Известно, что многообразия H_1 и H_2 скрещиваются. Докажите, что $\dim(H_1 + H_2) = 7$.

24. Приведите пример трехмерного линейного многообразия H_2 в R^4, которое проходит через точку M параллельно линейному многообразию H_1:

    а) $M=(-3;-1;-2;0)$,
    $H_1=c_1(1;-2;1;3)+L\{a_1(1;0;2;-4),a_2(-1;2;-2;1)\}$.

    б) $M=(1;2;0;0)$, $H_1:\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+x_4=0\\ x_1-2x_2+2x_4=0\\ -x_1+2x_2-2x_3+x_4=1\end{cases}$.

25. Может ли двумерная плоскость в R^4, содержащая точки M_1 и M_2, скрещиваться с двумерной плоскостью, содержащей точки M_3 и M_4?

    а) $M_1(0;1;-1;2)$, $M_2(-1;1;2;0)$, $M_3(3;2;-2;1)$, $M_4(-1;3;1;0)$.

    б) $M_1(0;1;-1;2)$, $M_2(-1;1;2;0)$, $M_3(2;2;0;-1)$, $M_4(1;0;-11;11)$.

26. Приведите пример двумерной плоскости H_2 в R^4, которая проходит через точку M и скрещивается с линейным многообразием H_1.

    а) $M=(3;1;3;0)$, $H_1=c_1(0;2;1;1)+L\{a_1(1;0;1;1),a_2(1;2;0;1)\}$.

    б) $M(1;2;2;3)$, $H_1:\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3+x_4=3\\ x_1+x_2+3x_3=2\end{cases}$.

27. Приведите пример двумерной плоскости H_2 в R^4, которая проходит через точку $M(2,1,2,-1)$ и пересекается с двумерной плоскостью $H_1:\begin{cases} x_1+x_2-x_3+x_4=3\\ x_1-x_2+x_3=2\end{cases}$ в одной точке.

28. Приведите пример многообразия H_2 в R^4, проходящего через точки $A=(0;3;2;0)$ и $B=(1;2;2;-3)$, и параллельного плоскости $H_1=L\{a_1(1;1;1;2),a_2(0;1;0;-1)\}+c_1(1;2;2;0)$.

29. Приведите пример двух двумерных плоскостей H_1 и H_2 в R^4, содержащих соответственно точки $A(1;0;-1;1)$ и $B(-1;1;2;0)$, пересечение которых состоит из одной точки $M(2;1;-1;2)$.

30. Приведите пример двух двумерных плоскостей в R^4, которые проходят через точки $A=(0;3;2;0)$ и $B=(1;2;2;-3)$ соответственно, и пересекаются по прямой $H=c(1;1;2;0)+L\{a(-1;2;0;1)\}$.

31. Приведите пример двух двумерных плоскостей H_1 и H_2 в R^4, содержащих соответственно точки $M_1(1;0;-1;1)$ и $M_2(-1;1;2;0)$, пересечение которых является прямой, параллельной прямой $H_3=c(-1;1;2;0)+L\{a(1;1;0;-2)\}$.

32. Приведите пример двумерного и трехмерного многообразий H_1 и H_2 в R^4, содержащих соответственно точки

$M_1=(1;1;-2;0)$ и $M_2=(-1;1;2;-1)$, пересекающихся по прямой $H_3=c(-1;1;2;0)+L\{a(1;1;0;-2)\}$.

33. Приведите пример двумерного и трехмерного многообразий H_1 и H_2 в R^5, пересекающихся в одной точке $M(1;-2;0;-1;3)$, причем H_1 содержит точку $M_1(-1;1;-1;2;1)$, а H_2 содержит прямую $H=c(1;1;2;-1;2)+L\{a(-1;1;0;1;1)\}$.
34. Приведите пример двух СЛАУ, задающих два скрещивающихся двумерных ЛМ в R^4, одно из которых лежит в ЛМ $H_1:\{\ 2x_1+x_2-x_3+3x_4=4$, а другое лежит в ЛМ $H_2:\{\ x_2-x_3+x_4=1$.
35. Приведите пример двух СЛАУ, задающих два параллельных ЛМ в R^5, одно из которых (двумерное) лежит в многообразии $H_1:\{\ x_1-2x_2+3x_4=4$, а другое (трехмерное) лежит в многообразии $H_2:\{\ x_2+2x_3+x_4=1$.

Ответы на типовые задачи

1. а) Например, $H=c(-3;0)+L\{a_1(2;1)\}$, $\dim(H)=1$.
   б) Например, $H=c(-17;13;0)+L\{a_1(23;-16;1)\}$, $\dim(H)=1$.
   в) Например, $H=c(11;0;17)+L\{a_1(-5;1;-7)\}$, $\dim(H)=1$.
   г) Например, $H=c(0;5;0;7)+L\{a_1(1;-4;0;-5),a_2(0;1;1;-1)\}$, $\dim(H)=2$.
   д) Например, $H=c(1;2;0;0;5)+L\{a_1(3;1;0;0;5),a_2(2;-5;4;7;0)\}$, $\dim(H)=2$.
   е) Например, $H=c(0;-2;0;0;6)+L\{a_1(2;0;0;-3;-8),$ $a_2(0;0;1;-1;-3)\}$, $\dim(H)=2$.
   ж) Например, $H=c(2;6;2;0;0)+L\{a_1(0;1;0;1;0),a_2(1;3;0;0;1)\}$, $\dim(H)=2$.
   з) Например, $H=c(1;1;0;0;0)+L\{a_1(5;-8;1;0;0),a_2(0;-1;0;1;0)\}$, $\dim(H)=2$.

2. а) $\{x_1+x_2=-1$.
   б) $\begin{cases}x_1+4x_2 & =-7\\ 3x_2+x_3 & =-4\end{cases}$.
   в) $\{x_1-x_2-x_3=1$.
   г) $\begin{cases}x_1-2x_2+7x_4-11x_5=0\\ x_3+7x_4-12x_5=-5\end{cases}$.
   д) $\begin{cases}3x_1+x_2+5x_3 & =0\\ x_3+x_4 & =2\end{cases}$.
   е) $\begin{cases}x_1+2x_2 & =-3\\ -8x_2-3x_3+x_4 & =16\end{cases}$.

ж) $\begin{cases} x_1 - x_5 = -2 \\ x_2 - x_4 = -1 \end{cases}.$ з) $\{2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4.$

3. а) H_1 и H_2 пересекаются,
$H_1 \cap H_2 = c(0;\ 4;\ 3;\ 0) + L\{d_1(1;\ 0;\ 0;\ 1)\}$, $\dim(H_1 \cap H_2) = 1.$
б) H_1 и H_2 скрещиваются.
в) H_1 и H_2 пересекаются,
$H_1 \cap H_2 = c(1;\ 0;\ -1;\ 0) + L\{d_1(1;\ 1;\ 1;\ 1)\}$, $\dim(H_1 \cap H_2) = 1.$
г) H_1 и H_2 скрещиваются.
д) H_1 и H_2 совпадают, $\dim(H_1 \cap H_2) = 2.$
е) H_1 и H_2 параллельны.
ж) H_2 содержится в H_1, $H_1 \cap H_2 = H_2$, $\dim(H_1 \cap H_2) = 1.$
з) H_1 и H_2 параллельны.
и) H_1 и H_2 совпадают, $\dim(H_1 \cap H_2) = 2.$

4. а) $H_3 = \begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_4 = 5 \end{cases}$, $dim(H_3) = 1,$
$H_3 = c_3(0;-3;1;5) + L\{b(1;1;0;-2)\}.$
б) $H_3 = \begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_4 = 5 \end{cases}$
$H_3 = c_3(0;\ 0;\ 3;\ 3;\ 1) + L\{a_2(1;\ 0;\ 0;\ 0;\ 1), a_1(0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0)\}.$
в) $H_3 : \begin{cases} x_1 + x_3 = 2 \\ x_2 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_4 = -1 \\ x_2 - x_3 = -3 \end{cases}$, система несовместна, пересечение пусто.
г) $H_3 = \begin{cases} x_1 - 3x_3 = 2 \\ x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_3 + x_4 = -1 \end{cases}$, $\dim(H_3) = 1,$
$H_3 = c_3(-2;-2;1;0) + L\{b(1;0;0;1)\}.$
д) $H_3 : \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_4 = -2 \\ x_1 - x_4 = -1 \\ x_2 - x_3 = -3 \end{cases}$, $\dim(H_3) = 1,$
$H_3 = c_3(0;\ 0;\ 3;\ 1) + L\{b(1;\ 0;\ 0;\ 1)\}.$

е) $H_3 = \begin{cases} x_1 - 3x_3 = \ 2 \\ x_2 + \ x_3 = \ 2 \\ 4x_3 + \ x_4 = -1 \end{cases}$, $dim(H_3) = 1$,

$H_3 = c_3(2;2;0;-1) + L\{b(3;-1;1;-4)\}$.

5. а) $H_3 : \{x_3 = 2$, $dim(H_3) = 3$.

б) $H_3 : \{2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 4$, $dim(H_3) = 3$.

в) $H_3 = R^4$, $dim(H_3) = 4$.

г) $H_3 : \{x_3 - x_4 = 2$, $dim(H_3) = 3$.

6. а) Например, $H = 1 + L\left\{x+1,\ (x+1)^2, (x+1)^3, (x+1)^4\right\}$, $dim(H) = 4$.

Или $H = 1 + L\left\{x+1,\ x^2 - 1, x^3 + 1, x^4 - 1\right\}$, $dim(H) = 4$.

б) Например, $H = 2x + L\left\{1,\ (x+1)^2, (x+1)^3, (x+1)^4\right\}$, $dim(H) = 4$.

Или $H = 2x + L\left\{1,\ x^2 + 2x, x^3 - 3x, x^4 + 4x\right\}$, $dim(H) = 4$.

в) Например, $H = (8x - 4) + L\left\{x^2 - 2x + 1,\ x^4 - 4x + 3\right\}$, $dim(H) = 2$.

г) Например, $H = 2 + L\left\{x + 1,\ x^3 + 1\right\}$, $dim(H) = 2$.

д) Например, $H = -x^2 + L\left\{1, x, x^4 - 2x^2\right\}$, $dim(H) = 3$.

е) Например, $H = -2x^2 + L\left\{1,\ x^4 - 2x^2\right\}$, $dim(H) = 2$.

7. а) $H = (\cos 2x - \cos x) + L\{\sin x,\ 2\cos x - \sin 2x + 2\cos 2x\}$, $\dim H = 2$.

б) $H = -\sin x + L\{1, \cos 2x\}$, $\dim H = 2$.

в) $H = -\cos x + L\{2\cos x - \sin 2x, \sin x - \cos 2x\}$, $\dim H = 2$.

г) $H = \sin x + L\{\sin 2x, \cos 2x\}$, $\dim H = 2$.

д) $H = (\cos x - \sin x) + L\{\cos x - \cos 3x, 3\sin x - \sin 3x\}$, $\dim H = 2$.

е) $H = (\cos 2x - \sin 2x) + L\{\cos 2x - \cos 3x, 3\sin 2x + 2\sin 3x\}$, $\dim H = 2$.

ж) $H = (1 + \sin x) + L\{1 + \cos x, \cos x - \cos 3x, 3\sin x - \sin 3x\}$, $\dim H = 3$.

з) $H = -\sin x + L\{2\sin x + \sin 2x\}$, $\dim H = 1$.

8. а) $X = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} + L\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$, $\dim(H) = 0$.

б) Нет решений, $H = \varnothing$.

в) $X=\begin{pmatrix}1&1&3\\-3&2&-1\\-2&1&3\end{pmatrix}$, $H=\begin{pmatrix}1&1&3\\-3&2&-1\\-2&1&3\end{pmatrix}+L\left\{\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right\}$, $\dim(H)=0$.

г) $X=\begin{pmatrix}-1+2\lambda&5+2\mu\\\lambda&\mu\end{pmatrix}$, где $\lambda,\mu\in R$; $H=\begin{pmatrix}-1&5\\0&0\end{pmatrix}+L\left\{\begin{pmatrix}2&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&2\\0&1\end{pmatrix}\right\}$, $\dim(H)=2$.

д) $X=\begin{pmatrix}\lambda&1+\mu&3\lambda+2\mu\\\nu&\eta&1+3\nu+2\eta\end{pmatrix}$, где $\lambda,\mu,\nu,\eta\in R$;

$H=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+L\left\{\begin{pmatrix}1&0&3\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&2\end{pmatrix}\right\}$,

$\dim(H)=4$.

е) $X=\begin{pmatrix}-1+2\lambda&4+2\mu&3+2\nu\\-\lambda&-\mu&-\nu\\\lambda&5+\mu&4+\nu\end{pmatrix}$, где $\lambda,\mu,\nu\in R$;

$H=\begin{pmatrix}1&4&3\\0&0&0\\0&5&4\end{pmatrix}+L\left\{\begin{pmatrix}2&0&0\\-1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&2&0\\0&-1&0\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&2\\0&0&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}$, $\dim(H)=3$.

9. а) Пересекаются, $dim(H_1+H_2)=3$, $dim(H_1\cap H_2)=1$.
   б) Пересекаются, $dim(H_1+H_2)=4$, $dim(H_1\cap H_2)=0$.
   в) Пересекаются, $dim(H_1+H_2)=3$, $dim(H_1\cap H_2)=1$.
   г) Скрещиваются, $dim(H_1+H_2)=3$.
   д) H_1 и H_2 параллельны, $dim(H_1+H_2)=2$.
   е) H_1 и H_2 совпадают, $dim(H_1+H_2)=2$, $dim(H_1\cap H_2)=2$.

10. а) При $p\neq-1$. б) При $p\neq-\frac{3}{2}$. в) Ни при каком p.
    г) При всех p. д) При $p\neq-5$.
11. а) При $p=1$. б) Ни при каком p.
    в) При $p=6$. г) При всех p.
12. а) При $p\neq-1$. б) При $p=1$.
    в) При $p=3$. г) При любом p.
13. а) При $p=3$ пересекаются в одной точке; при $p\neq3$ скрещиваются.
    б) При $p=4$ параллельны; при прочих p скрещиваются.
    в) При $p=0$ параллельны; при $p=3$ совпадают; при $p=-3$ пересекаются в одной точке; при прочих p скрещиваются.

г) При $p \neq 1$ пересекаются в одной точке; при $p = 1$ совпадают.

д) При $p = 1$ параллельны; при $p = 2$ пересекаются в одной точке; при прочих p скрещиваются.

Ответы на дополнительные задачи

14. Неверно.
15. Указание. Используйте формулу Грассмана.
17. а) Да. б) Нет. в) Нет.
21. Верно.
22. Верно.
23. Указание. Используйте формулу Грассмана и критерий пустого пересечения.
24. а) Например, $H_2 = M + L(a_1, a_2, b)$, где $b = (0;0;0;1)$.
    Указание. Должно быть $\dim(L_1 + L_2) = 3$,
    $rank(a_1, a_2, b, M - c_1) = 4$.
    б) Например, $H_2 : \{x_1 - 2x_2 + x_3 \ + x_4 = -3.$
    Указание. Объединение СЛАУ для H_1 и H_2 должно быть несовместной СЛАУ ранга 3.
25. а) Например, $a_1 = b_1 = (1;0;0;0)$.
    Указание. Надо подобрать a_1 и b_1 так, что:
    $H_1 = M_1 + L\{a_1, M_2 - M_1\}$, $H_2 = M_3 + L\{b_1, M_4 - M_3\}$,
    при этом $rank\{a_1, M_2 - M_1, b_1, M_4 - M_3\} = 3$,
    $rank\{a_1, M_2 - M_1, b_1, M_4 - M_3, M_3 - M_1\} = 4$.
    б) Не может.
26. а) Например, $H_2 = M + L(a_1, b)$, где $b = (0;0;0;1)$.
    Указание. Из условий задачи следует, что $\dim(L_1 + L_2) = 3$, $rank(a_1, a_2, b, M - c_1) = 4$.
    б) Например, $H_2 : \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 \qquad\qquad\quad = 1 \end{cases}.$
    Указание. Точка M должна удовлетворять СЛАУ для H_2, а объединение СЛАУ для H_1 и H_2 должно быть несовместной СЛАУ ранга 3.
27. Например, $H_2 : \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \end{cases}.$
    Указание. Точка M должна удовлетворять СЛАУ для H_2, а объединенная СЛАУ должна иметь ранг 4.

28. $H_2 = c_2(1;2;2;-3) + L\{a_1, a_2, B - A\}$, $\dim(H_2) = 3$.
 Указание. Надо проверить, что $rank\{a_1, a_2, B - A\} = 3$,
 $c_2 - c_1 \notin L\{a_1, a_2, B - A\}$.
29. Указание. Надо подобрать a_1 и b_1 так, что:
 $H_1 = A + L\{a_1, M - A\}$, $H_2 = B + L\{b_1, M - B\}$,
 $rank\{a_1, M - A, b_1, M - B\} = 4$.
30. Например, $H_1 = L\{a_1, a_2\} + c$, $H_2 = L\{b_1, b_2\} + c$, где $a_1 = b_1 = a$,
 $a_2 = A - c$, $b_2 = B - c$.
 Указание. Надо проверить, что набор $\{a, A - c, B - c\}$ ЛНЗ (это верно).
31. Указание. Должно быть $H_1 = c_1 + L\{M_1 - c_1, a)\}$,
 $H_2 = c_1 + L\{M_2 - c_1, a)\}$, где $c_4 \notin H_3$.
32. Указание. Должно быть $H_1 = c + L\{M_1 - c, a)\}$,
 $H_2 = c + L\{M_2 - c, a, b)\}$, где $rank\{M_1 - c, M_2 - c, a, b\} = 4$.
33. Указание. Должно быть $H_1 = M + L\{M_1 - M, b)\}$,
 $H_2 = M + L\{c - M, a, d)\}$, где $rank\{M_1 - M, c - M, a, b, d\} = 5$.
34. Указание. Пример получится, если добавить в каждую СЛАУ по уравнению с одинаковой левой, но разной правой частью; тогда объединение СЛАУ для H_1 и H_2 будет несовместной СЛАУ ранга 3.
35. Указание. В первую СЛАУ достаточно добавить уравнение $x_2 + 2x_3 + x_4 = a \neq 1$ и еще одно так, чтобы СЛАУ имела ранг 3; во вторую СЛАУ добавить уравнение $x_1 - 2x_2 + 3x_4 = 4$; тогда объединенная СЛАУ будет несовместной (обратите внимание на отсутствие переменной x_5).

VIII. ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА

Определения и формулы

Скалярным произведением в линейном пространстве V называется числовая функция двух векторных аргументов a и b (обозначается (a,b)), обладающая следующими свойствами:

(1) $(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2, b) = \lambda_1 (a_1, b) + \lambda_2 (x_2, b)$ (линейность по первому аргументу);

(2) $(a, \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2) = \lambda_1 (a, b_1) + \lambda_2 (a, b_2)$ (линейность по второму аргументу);

(3) $(a,b) = (b,a)$ для всех a и b (симметричность).

(4) $(a,a) > 0$ для всех $a \neq \overline{0}$ (положительная определенность).

Линейное пространство, в котором задано скалярное произведение, называется евклидовым пространством.

Длиной (или модулем) вектора a в евклидовом пространстве считается неотрицательное число $|a| = \sqrt{(a,a)}$.

Расстоянием между точками x и y в евклидовом пространстве называется длина разности $|x-y|$. Расстояние равно нулю, только если $x = y$, в остальных случаях оно положительно.

Неравенство Коши-Буняковского: для любых двух векторов a и b выполняется неравенство $|a,b| \leq |a| \cdot |b|$, причем равенство возможно только в случае, когда a и b пропорциональны.

Углом между векторами называется величина $\varphi = arccos \dfrac{(a,b)}{|a| \cdot |b|}$.

Для треугольника в евклидовом пространстве с вершинами A, B, C верна теорема косинусов:

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |AC|.$$

Для треугольника в евклидовом пространстве с вершинами A, B, C выполняется неравенство треугольника: $|BC| \leq |AB| + |AC|$.

Набор векторов $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ называется ортогональным, если векторы этого набора попарно ортогональны. Если вдобавок длина каждого вектора равна единице, то набор называется ортонормированным. Для ортонормированного набора $(a_j, a_k) = \delta_{jk}$, где δ_{jk} – символ Кронекера.

Любой ортогональный набор линейно независим.

Алгоритм ортогонализации Грама-Шмидта позволяет по произвольному линейно независимому набору $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ построить ортогональный набор $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$, удовлетворяющий двум условиям:

(1) $L\{f_1, f_2, \dots, f_k\} = L\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ для всех $j = 1,2,\dots,m$;

(2) $f_k - a_k \in L\{f_1, f_2, \dots, f_{k-1}\}$ для всех $j = 1,2,\dots,m$.

Алгоритм Грама-Шмидта представляет собой рекурсивную процедуру. На первом шаге полагается $f_1 = a_1$. Предположим, что после k-го шага для поднабора $\{a_1, \dots, a_k\}$ построен набор $\{f_1, \dots, f_k\}$ с нужными свойствами для всех $j = 1,2,\dots,k$. Тогда на $(k+1)$-ом шаге положим

$$f_{k+1} = a_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j f_j, \text{ где } \lambda_j = \frac{(a_{k+1}, f_j)}{(f_j, f_j)} \text{ для всех } j = 1,2,\dots,k.$$

Так определенный набор $\{f_1, \dots, f_k, f_{k+1}\}$ удовлетворяет обоим условиям для поднабора $\{a_1, \dots, a_k, a_{k+1}\}$. Процесс заканчивается, когда $k+1 = m$.

Вектор называется ортогональным подмножеству M евклидова пространства V, если он ортогонален всем векторам этого подмножества.

Вектор ортогонален линейной оболочке $L = L\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ тогда и только тогда, когда он ортогонален всем векторам набора $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$.

Ортогональным дополнением к линейному подпространству $L \subseteq V$ называется совокупность всех векторов, ортогональных L (обозначается $L^{\perp}$).

Ортогональное дополнение к линейному подпространству является линейным подпространством.

Соотношение двойственности перехода к ортогональному дополнению: $(L^{\perp})^{\perp} = L$.

Для подпространств L и $L^{\perp}$ верно $L \cap L^{\perp} = \{\overline{0}\}$, поэтому для любого подпространства L евклидова пространства V верно разложение в прямую сумму $V = L \oplus L^{\perp}$.

Любой вектор $x \in V$ единственным образом разлагается в сумму $x = g + h$, где $g \in L$, $h \in L^{\perp}$. В этой сумме вектор g называется ортогональной проекцией вектора x на подпространство L, а вектор h называется ортогональной составляющей при ортогональном проектировании на подпространство L.

При ортогональном проектировании на подпространство $L^{\perp}$ векторы g и h меняются местами.

Пусть $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ и $\{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ – базисы в подпространствах L и $L^{\perp}$. Образуем две системы уравнений из равенств $(a_i, y) = 0$ для всех $i = 1,2,\dots,k$ и $(b_j, x) = 0$ для всех $j = 1,2,\dots,m$. Тогда множеством решений первой системы будет подпространство $L^{\perp}$, а множеством решений второй системы будет подпространство L.

Перпендикулярным отрезком h между многообразиями $H_1 = c_1 + L_1$ и $H_2 = c_2 + L_2$ будем называть отрезок, перпендикулярный направляющим подпространствам L_1 и L_2, концы которого M_1 и M_2 лежат соответственно на многообразиях H_1 и H_2. Общим перпендикуляром будем называть прямую, проходящую через точки M_1 и M_2, с направляющим вектором h.

Перпендикулярным отрезком между многообразиями $H_1 = c_1 + L_1$ и $H_2 = c_2 + L_2$ служит ортогональная составляющая h при ортогональном проектировании вектора $c_2 - c_1 = g + h$ на подпространство $L_1 + L_2$. Если проекция $g \in L_1 + L_2$ разложена в сумму $g = a_1 + a_2$, где $a_1 \in L_1$, $a_2 \in L_2$, то концы $M_1 \in H_1$ и $M_2 \in H_2$ перпендикулярного отрезка могут быть записаны в виде $M_1 = c_1 + a_1$, $M_2 = c_2 - a_2$.

Примеры решения задач

Пример 1. Найдите базис и размерность подпространства $L^{\perp}$, ортогонального к подпространству L.

а) $L: \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 4x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$.

б) $L = L\{a_1(1;\ 3; -2;\ 1), a_2(-2;\ 1;\ 3;\ 2)\}$.

Решение. а) Подпространство L является решением СЛАУ, а подпространство $L^{\perp}$ является линейной оболочкой строк коэффициентов матрицы СЛАУ. Значит, базисом в $L^{\perp}$ является набор

$$f = \{a_1(3; -1;\ 1;\ 1),\ a_2(1; -4; -1; -2)\}, \text{ а } \dim(L^{\perp}) = 2.$$

б) Ортогональным дополнением к линейной оболочке $L = L\{a_1, a_2\}$ будет подпространство, являющееся решением СЛАУ

$$L: \begin{cases} (a_1, x) = 0 \\ (a_2, x) = 0 \end{cases} \text{ или } L: \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}.$$

Базисом подпространства решений этой СЛАУ служит ФНР

$$f = \{b_1(11;\ 1;\ 7;\ 0),\ b_2(7;\ 0;\ 4;\ 1)\}, \dim(L^{\perp}) = 2.$$

Пример 2. Ортогонализуйте набор векторов

$$\{a_1(1;1;-1), a_2(1;4;-1),\ a_3(-3;2;5)\}.$$

Решение. Согласно алгоритму Грама-Шмидта на первом шаге $f_1 = a_1$. На втором шаге получим $f_2 = a_2 - 2f_1 = (-1;2;1)$, так как

$$f_2 = a_2 - \lambda f_1, \text{ где } \lambda = \frac{(a_2, f_1)}{(f_1, f_1)} = \frac{6}{3} = 2.$$

На третьем шаге получим $f_3 = a_3 - 2f_1 - 2f_2 = (1;0;1)$, так как

$$f_3 = a_3 - \lambda_1 f_1 - \lambda_2 f_2, \text{ где } \lambda_1 = \frac{(a_3, f_1)}{(f_1, f_1)} = \frac{6}{3} = 2,\ \lambda_2 = \frac{(a_3, f_2)}{(f_2, f_2)} = \frac{12}{6} = 2.$$

Пример 3. Найдите ортогональный базис и размерность подпространства $L^{\perp}$, ортогонального к подпространству $L = L\{a_1(1;\ 1;\ 0;-1;\ 2), a_2(1;\ 0;\ 2;\ 1;\ 0)\}$

Решение. Ортогональным дополнением к линейной оболочке $L = L\{a_1, a_2\}$ в общем случае будет подпространство $L^{\perp}$, являющееся решением однородной СЛАУ

$$L^{\perp}: \begin{cases} (a_1, x) = 0 \\ (a_2, x) = 0 \end{cases} \text{или } L^{\perp}: \begin{cases} x_1 + x_2 \qquad - x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 \qquad + 2x_3 + x_4 \qquad = 0 \end{cases}.$$

Но в отличие от Примера 1б нам нужно построить ортогональный базис. Выбираем частное решение СЛАУ, например $b_1(2;\ 0;-1;\ 0;-1)$, и далее решаем систему

$$\begin{cases} (a_1, x) = 0 \\ (a_2, x) = 0 \\ (b_1, x) = 0 \end{cases} \text{или } \begin{cases} x_1 + x_2 \qquad - x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 \qquad + 2x_3 + x_4 \qquad = 0 \\ 2x_1 \qquad - x_3 \qquad - x_5 = 0 \end{cases}.$$

В качестве второго вектора базиса выберем ее частное решение, например, $b_2(0;\ 0;\ 1;-2;-1)$. Тогда $b_2 \in L^{\perp}$ и $(b_2, b_1) = 0$. Поступая аналогичным образом, составим третью систему

$$\begin{cases} (a_1, x) = 0 \\ (a_2, x) = 0 \\ (b_1, x) = 0 \\ (b_2, x) = 0 \end{cases} \text{или } \begin{cases} x_1 + x_2 \qquad - x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 \qquad + 2x_3 + x_4 \qquad = 0 \\ 2x_1 \qquad - x_3 \qquad - x_5 = 0 \\ \qquad x_3 - 2x_4 \ - x_5 = 0 \end{cases}.$$

Решив ее, получим $b_3(1;-6;\ 0;-1;\ 2)$. Итак, ортогональный базис

$$b = \{b_1(2;\ 0;-1;\ 0;-1),\ b_2(0;\ 0;\ 1;-2;-1),\ b_3(1;-6;\ 0;-1;\ 2)\},\ \dim(L^{\perp}) = 3.$$

Пример 4. Найдите ортогональный базис и размерность подпространства $L^{\perp}$, ортогонального к подпространству

$$L:\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 \phantom{{}-2x_4} - 2x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 \phantom{{}-2x_2} + 6x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}.$$

Решение. а) Подпространство L является решением СЛАУ, а подпространство $L^{\perp}$ является линейной оболочкой строк a_k коэффициентов матрицы СЛАУ. Значит, базисом в $L^{\perp}$ является набор

$$\{a_1(1;-1;\ 2;\ 0;-2),\ a_2(2;-2;\ 2;-2;-1),\ a_2(2;\ 0;\ 6;\ 3;-3)\}.$$

Этот набор не ортогонален. Его надо ортогонализовать. Положим

$$f_1 = a_1(1;-1;2;0;-2),\ f_2 = a_2 - \lambda f_1,\ \text{где } \lambda = \frac{(a_2,f_1)}{(f_1,f_1)} = \frac{10}{10} = 1.$$

Следовательно, $f_2 = a_2 - f_1 = (1;-1;\ 0;-2;1)$. На третьем шаге

$$f_3 = a_3 - \lambda_1 f_1 - \lambda_2 f_2,\ \text{где } \lambda_1 = \frac{(a_3,f_1)}{(f_1,f_1)} = \frac{20}{10} = 2,\ \lambda_2 = \frac{(a_3,f_2)}{(f_2,f_2)} = \frac{-7}{7} = -7.$$

Третий вектор $f_3 = a_3 - 2f_1 + f_2 = (1;1;2;1;2)$.

Итак, ортогональным базисом в $L^{\perp}$ может служить набор

$$f = \{f_1(1;-1;2;0;-2), f_2(1;-1;0;-2;1), f_3(1;1;2;1;2)\},\ \dim(L^{\perp}) = 3.$$

Пример 5. Найдите ортогональную проекцию g и ортогональную составляющую h вектора $a(-3;6;1;1)$ при проекции на подпространство $L\{f_1(1;2;-1;1), f_2(1;1;-1,2)\}$.

Решение. По определению $a = g + h = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + h$. Умножив скалярно обе части на векторы f_1 и f_2, и учитывая, что $(f_1,h) = (f_2,h) = 0$, получим СЛАУ вида

$$\begin{cases} (a,f_1) = \lambda_1(f_1,f_1) + \lambda_2(f_2,f_1) \\ (a,f_2) = \lambda_1(f_1,f_2) + \lambda_2(f_2,f_2) \end{cases} \text{или} \begin{cases} 7\lambda_1 + 6\lambda_2 = 9 \\ 6\lambda_1 + 7\lambda_2 = 4 \end{cases}.$$

откуда $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -2$. Следовательно, проекция $g = 3f_1 - 2f_2 = (1;4;-1;-1)$, ортогональная составляющая $h = a - g = (-4;2;2;2)$.

Пример 6. В трехмерном евклидовом пространстве E^3 даны две прямые

$$H_1 = c_1(1;\ 2;\ 3) + L\{a_1(1;\ 0;\ 1)\} \text{ и } H_2 = c_2(4;-1;\ 2) + L\{a_2(0;\ 1;\ 0)\}.$$

(1) Укажите направление общего перпендикуляра к двум прямым.
(2) Найдите расстояние между прямыми.
(3) Составьте уравнение общего перпендикуляра.

Решение. Для ответа только на пункт (1) достаточно решить СЛАУ

$$\begin{cases}(a_1,x)=0\\(a_2,x)=0\end{cases} \text{ или } \begin{cases}x_1 \ +x_3 \ =0\\x_2 \ =0\end{cases}.$$

ФНР этой СЛАУ состоит из одного вектора $h_1(1;\ 0;-1)$. Этот вектор задает направление общего перпендикуляра.

(2) Для вычисления концов и длины перпендикулярного отрезка надо спроектировать вектор $c=c_2-c_1=(3;-3;-1)$ на подпространство $L=L_1+L_2=L\{a_1,a_2\}$. Согласно общему методу построения ортогональной проекции, следует составить и решить СЛАУ вида

$$\begin{cases}(a_1,a_1)t_1+(a_2,a_1)t_2=(c,a_1)\\(a_1,a_2)t_1+(a_2,a_2)t_2=(c,a_2)\end{cases} \text{ или } \begin{cases}2t_1=2\\t_2=-3\end{cases}.$$

Получим проекцию и ортогональную составляющую

$$g=t_1a_1+t_2a_2=a_1-3a_2=g(1;-3;\ 1),\ \ h=c-g=h(2;\ 0;-2).$$

Отрезок h равен удвоенному вектору h_1, построенному в пункте (1). Расстояние между прямыми равно $r=|h|=\sqrt{2^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}$.

(3) Запишем разложение $c=c_2-c_1=g+h=a_1-3a_2+h$. Из него следует, что $c_2+3a_2=c_1+a_1+h$. Тогда

$$M_1=c_1+a_1=(2;\ 2;\ 4),\ M_2=c_2+3a_2=(4;\ 2;\ 2).$$

Уравнение общего перпендикуляра $H_3=M_1(2;\ 2;\ 4)+L\{h(2;\ 0;-2)\}$. Полезно сделать проверку: $M_2(4;\ 2;\ 2)=M_1(2;\ 2;\ 4)+h(2;\ 0;-2)$.

Пример 7. В пространстве E^4 заданы два линейных многообразия:

$$H_1=L\{a_1(1;\ 0;\ 1;\ 0)\}+c_1(1;\ 2;\ 3;\ 1),\ \ H_2=L\{a_2(0;\ 1;\ 0;\ 1)\}+c_2(4;-1;\ 2;\ 0).$$

Найдите расстояние между ними и составьте уравнение общего перпендикуляра.

Решение. Надо спроектировать вектор $c=c_2-c_1=(3;-3;-1;-1)$ на подпространство $L=L_1+L_2=L\{a_1,a_2\}$. Для этого следует решить СЛАУ

$$\begin{cases}(a_1,a_1)t_1+(a_2,a_1)t_2=(c,a_1)\\(a_1,a_2)t_1+(a_2,a_2)t_2=(c,a_2)\end{cases} \text{ или } \begin{cases}2t_1=2\\-2t_2=-4\end{cases}.$$

Получим проекцию и ортогональную составляющую

$$g=t_1a_1-t_2a_2=a_1-2a_2=(1;-2;\ 1;-2),\ h=c-g=(2;-1;-2;\ 1).$$

Расстояние между прямыми $r=|h|=\sqrt{10}$.

Запишем разложение $c = c_2 - c_1 = g + h = a_1 - 2a_2 + h$. Из него следует, что $c_2 + 2a_2 = c_1 + a_1 + h$. Тогда

$$M_1 = c_1 + a_1 = (2;2;4;1),\ M_2 = c_2 + 3a_2 = (4;\ 1;\ 2;\ 2)$$

Уравнение общего перпендикуляра

$$H_3 = M_1(2;\ 2;\ 4;\ 1) + L\{h(2;\ -1;\ -2;\ 1)\}.$$

Пример 8. Линейные многообразия:

$$H_1 = c_1(0;\ 2;\ 1;\ 1) + L\{a_1(1;\ 2;\ 2;\ 0),\ a_2(1;\ 0;\ 0;\ 1)\},$$

$$H_2 = c_2(0;\ 2;-1;\ 0) + L\{b_1(1;\ 1\ 1;\ 1),\ b_2(0;\ 1;\ 1;\ 0)\}\ .$$

Опишите множество H_4, являющееся объединением всех общих перпендикуляров к двум данным многообразиям.

Решение. Для поиска отрезка, перпендикулярного к двум многообразиям, надо спроектировать вектор $c = c_2 - c_1 = (0;\ 0;-2;-1)$ на подпространство $L = L\{a_1, a_2, b_1, b_2\}$. Для этого надо решить вспомогательную СЛАУ с неизвестными t_1, t_2, s_1, s_2 вида

$$\begin{cases} (a_1,\ a_1)t_1 + (a_2,\ a_1)t_2 + (b_1, a_1)s_1 + (b_2,\ a_1)s_2 = (c, a_1) \\ (a_1, a_2)t_1 + (a_2, a_2)t_2 + (b_1, a_2)s_1 + (b_2, a_2)s_2 = (c, a_2) \\ (a_1,\ b_1)t_1 + (a_2,\ b_1)t_2 + (b_1,\ b_1)s_1 + (b_2,\ b_1)s_2 = (c, b_1) \\ (a_1, b_2)t_1 + (a_2, b_2)t_2 + (b_1, b_2)s_1 + (b_2, b_2)s_2 = (c, b_2) \end{cases}$$

$$\text{или} \begin{cases} 9t_1 + t_2 + 5s_1 + 4s_2 = -4 \\ t_1 + 2t_2 + 2s_1 = -1 \\ 5t_1 + 2t_2 + 4s_1 + 2s_2 = -3 \\ 4t_1 + 2s_1 + 2s_2 = -2 \end{cases}.$$

Ее ранг равен трем, решение зависит от параметра t:

$$t_1 = 1,\ t_2 = -1 + t,\ s_1 = -t,\ s_2 = -3 + t.$$

Концы M_{01} и M_{02} перпендикулярного к многообразиям отрезка можно найти стандартным образом, используя частное решение $(1;-1;\ 0;-3)$ при $t = 0$:

$$g = t_1a_1 + t_2a_2 + s_1b_1 + s_2b_2 = a_1 - a_2 - 3b_2 = (0;-1;-1;-1),$$

$$h = c - g = (0;\ 1;-1;\ 0).$$

Из разложения $c = c_2 - c_1 = g + h = a_1 - a_2 - 3b_2 + h$ следует, что

$$M_{01} = c_1 + a_1 - a_2 = (0;\ 4;\ 3;\ 0),\ M_{02} = c_2 + 3b_2 = (0;\ 5;\ 2;\ 0).$$

Таким образом, параметрическое представление одного из общих перпендикуляров

$$H_3 = M_{01}(0;\ 4;\ 3;\ 0) + L\{h(0;\ 1;-1;\ 0)\}.$$

Расстояние между прямыми $r = |h| = \sqrt{2}$.

Тот факт, что ранг расположенной выше СЛАУ оказался равен трем, означает, что $\dim(L_1 + L_2) = 3$, то есть $\dim(L_1 \cap L_2) = 1$. Можно убедиться, что вектор $(1;\ 0;\ 0;\ 1) = a_2 = b_1 - b_2 \in L_1 \cap L_2$. Согласно теории, многообразие $H_4 = M_{01} + L\{h, a_2\}$ является объединением всех общих перпендикуляров.

Второй способ. Будем искать концы перпендикулярных отрезков M_1 и M_2 в общем виде, не исключая параметра t. Имеем

$$g = t_1 a_1 + t_2 a_2 + s_1 b_1 + s_2 b_2 = (a_1 - a_2 - 3b_2) + t \cdot (a_2 - b_1 + b_2) = (0;-1;-1;-1).$$

Из единственности проекции g следует, что $a_2 - b_1 + b_2 = 0$, то есть $a_2 = b_1 - b_2 \in L_1 \cap L_2$. Точки M_1 и M_2 зависят от параметра t:

$M_1 = M_{01}(0;\ 4;\ 3;\ 0) - t \cdot (1;\ 0;\ 0;\ 1)$, $M_2 = M_{02}(0;\ 5;\ 2;\ 0) - t \cdot (1;\ 0;\ 0;\ 1)$

В итоге $H_4 = M_{01} + L\{h, a_2\}$.

Типовые задачи

1. Найдите базис и размерность подпространства $L^{\perp} \in E^n$, ортогонального к подпространству L.

   а) $n = 3,\ L = \{2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0.$

   б) $n = 3,\ L = \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$

   в) $n = 3,\ L = L\{a_1(2;-1;3)\}.$

   г) $n = 3,\ L = L\{a_1(1;-1;1), a_2(3;-1;-1)\}.$

   д) $n = 4,\ L = \{2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 0.$

   е) $n = 4,\ L: \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}.$

   ж) $n = 4,\ L = L\{a_1(1;-2;3;2), a_2(-4;1;2;-1)\}.$

Дополнительно.

   з) $n = 4,\ L: \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}.$

   и) $n = 4,\ L = L\{a_1(2;1;3;-2), a_2(1;-2;2;-3)\}.$

к) $n=5,\ L=\begin{cases}2x_1+4x_2-3x_3+3x_4=0\\3x_1-2x_2+4x_3-2x_4=0\end{cases}.$

2. Найдите ортогональный базис и размерность подпространства $L\in E^n$.

а) $n=3,\ L:\{2x_1-2x_2+3x_3=0.$

б) $n=4,\ L=\begin{cases}x_1-x_2+x_3=0\\6x_1+5x_2-4x_3+4x_4=0\end{cases}.$

в) $n=4,\ L:\{-x_1+2x_2+x_3+x_4=0.$

г) $n=3,\ L:\{x_1+2x_2-3x_3=0.$

д) $n=5,\ L:\begin{cases}2x_1+x_2-x_3+2x_5=0\\x_1+2x_2+x_3-x_4+x_5=0\end{cases}.$

е) $n=5,\ L:\begin{cases}x_1+2x_2-x_3+x_4+2x_5=0\\x_1+x_2-2x_3-x_4+x_5=0\\x_1-3x_3-3x_4=0\end{cases}.$

3. Найдите ортогональный базис и размерность ортогонального дополнения $L^{\perp}$ к подпространству $L\in E^n$.

а) $n=3,\ L=L\{a_1(1;-2;-1)\}.$

б) $n=4,\ L=L\{a_1(0;1;2;0),a_2(1;-1;1;0)\}.$

в) $n=4,\ L=L\{a_1(0;1;2;0),a_2(1;-1;1;0)\}.$

г) $n=5,\ L=L\{a_1(-1;2;1;0;-2),\ a_2(1;1;2;1;-1),\ a_3(2;-1;1;1;1)\}.$

Дополнительно.

д) $n=4,\ L=L\{a_1(0;1;2;0),a_2(1;-1;1;0)\}.$

е) $n=5,\ L=L\{a_1(1;1;-2;1;0),a_2(2;1;-1;0;-1),a_3(0;1;-3;2;1)\}.$

4. Используя процесс ортогонализации, постройте ортогональный базис подпространства $L\in E^n$ и укажите его размерность

а) $n=3,\ L=L\{a_1(1;-2;-1),a_2(-1;3;5)\}.$

б) $n=4,\ L=L\{a_1(1;2;3;2),a_2(3;2;5;7)\}.$

в) $n=4,\ L=L\{a_1(1;-1;1;2),a_2(4;1;0;2),a_3(0;-3;8;-2)\}.$

г) $n=5,\ L=L\{a_1(1;2;0;-1;0),a_2(4;0;4;-2;0),a_3(0;7;0;4;15)\}.$

5. Используя процесс ортогонализации, постройте в линейной оболочке $L=L\{g_1,g_2,\ldots,g_m\}$ ортонормированный базис $\{f_1,f_2,\ldots,f_m\}$.

а) $g_1=(1;-2;5),\ g_2=(3;-1;5),\ g_3=(5;-5;3);$

б) $g_1=(1;-2;3;1)$, $g_2=(4;-3;6;2)$, $g_3=(3;-1;4;-2)$.

в) $g_1=(-1;2;1;1)$, $g_2=(1;3;2;0)$, $g_3=(-4;3;1;3)$, $g_4=(1;0;3;5)$.

6. Найдите ортогональный базис и размерность ортогонального дополнения $L^{\perp}$ к подпространству $L\in E^n$.

а) $n=3,\ L=\begin{cases}2x_1+3x_2-4x_3=0\\ x_1+5x_2-3x_3=0\end{cases}.$

б) $n=4,\ L:\begin{cases}2x_1-2x_2+3x_3+x_4=0\\ 3x_1-2x_2+7x_3+5x_4=0\end{cases}.$

в) $n=5,\ L:\{2x_1+x_2-x_3+3x_4=0.$

г) $n=5,\ L:\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_5=0\\ x_1+x_3-x_4+x_5=0\\ 2x_1+x_2-x_3+2x_5=0\end{cases}.$

Дополнительно.

д) $n=3,\ L=\begin{cases}2x_1+3x_2-4x_3=0\\ x_1+5x_2-3x_3=0\end{cases}.$

е) $n=4,\ \begin{cases}2x_1-2x_2+3x_3+x_4=0\\ 3x_1-2x_2+7x_3+5x_4=0\end{cases}.$

7. Найдите ортонормированный базис и размерность подпространства $L\in E^n$ (или его ортогонального дополнения $L^{\perp}$).

а) Базис в L, $L:\begin{cases}2x_1+x_2+2x_3-x_4=0,\\ 3x_1+x_2-x_3-2x_4-x_5=0,.\\ x_1+x_2+5x_3+x_5=0.\end{cases}$

б) Базис в $L^{\perp}$, $L=L\{a_1(-1;2;0;1),\ a_2(3;1;2;-1)\}$.

в) Базис в L, $L:\begin{cases}x_1-2x_2+x_3-x_5=0\\ 2x_2+x_3-2x_4+x_5=0\\ x_1-4x_2+2x_4-2x_5=0\end{cases}.$

г) Базис в L, $L=L\{a_1(1;1;0;2;1),\ a_2(2;-1;1;1;0),\ a_3(1;1;1;1;0)\}$.

8. Постройте ортогональный базис в линейном подпространстве L пространства E^n, и определите его размерность.

а) $L=L\{a_1(1;-2;3;2),a_2(1;6;-5;-5)\}$.

б) $L=L_1^{\perp}$, где $L_1=L\{a_1(1;-2;3;2),a_2(-4;1;2;-1)\}$.

в) $L:\begin{cases}2x_1-x_2+x_3+x_4=0\\ x_1-2x_2-x_3+2x_4=0\end{cases}.$

г) $L=L_1^{\perp}$, где $L_1:\begin{cases}2x_1-x_2+x_3+x_4=0\\ -3x_1+3x_2-3x_3-x_4=0\end{cases}.$

9. Постройте ортогональный базис в пересечении L двух линейных подпространств пространства E^n, и определите размерность пересечения.

а) $L=L_1\cap L_2$, $L_1=L\left\{a_1(-1;2;-1;1;0),a_2(1;3;1;0;1),a_3(-3;1;1;2;-1)\right\}$,

$L_2=L\left\{b_1(-2;1;1;1;-1),b_2(1;-1;2;0;1),b_3(-1;1;3;1;0)\right\}.$

б) $L=L_1^{\perp}\cap L_2^{\perp}$, $L_1:\begin{cases}x_1-x_3+2x_4-x_5=0\\ x_2+x_3+3x_4+x_5=0\\ 2x_1-x_2-3x_3+x_4+x_5=0\end{cases},$

$L_2:\begin{cases}x_1-x_2-2x_3+x_4+x_5=0\\ x_2+x_3-x_4+2x_5=0\\ x_1-x_3+x_4+3x_5=0\end{cases}.$

в) $L=L_1\cap L_2$, $L_1=L\{a_1(0;-1;2;-1;1),\ a_2(1;1;3;1;0),\ a_3(-1;-3;1;1;2)\}$,

$L_2=L\{b_1(-1;-2;1;1;1),\ b_2(1;1;-1;2;0),\ b_3(0;-1;1;3;1)\}.$

г) $L=L_1^{\perp}\cap L_2^{\perp}$, $L_1:\begin{cases}-x_1+x_2-x_4+2x_5=0\\ x_1+x_3+x_4+3x_5=0\\ x_1+2x_2-x_3-3x_4+x_5=0\end{cases},$

$L_2:\begin{cases}x_1+x_2-x_3-2x_4+x_5=0\\ 2x_1+x_3+x_4-x_5=0\\ 3x_1+x_2-x_4+x_5=0\end{cases}.$

10. Вектор a_1 дополните до ортогонального базиса в соответствующем пространстве E^n.

а) $a_1=(3;6;-2)$. б) $a_1=(-2;1;-5)$.

в) $a_1=(-2;1;3;2)$. г) $a_1=(1;-1;\ 2;\ 1)$.

11. Найдите ортогональную проекцию g и ортогональную составляющую h при проекции вектора a на линейное подпространство L.

а) $a=(4;-3;1)$, $L=L\left\{(2;1;1)\right\}$.

б) $a=(-1;5;1)$, $L:\{x-2y+2z=0.$

в) $a=(4;1;-1)$, $L:\begin{cases}-x+\ y+2z=0\\ 3x+2y+\ z=0\end{cases}.$

г) $a=(3;-2;1)$, $L:\begin{cases}x_1+\ x_2-x_3=0\\ 3x_1+4x_2-x_3=0\end{cases}.$

д) $a=(2;6;4)$, $L=L\{b_1(1;1;3),b_2(1;0;-1)\}$.

е) $a=(3;-4;-3;-1)$, $L=L\{\ b(4;-2;-1;-2)\ \}$.

ж) $a=(3;\ 4;\ 0;\ 0)$, $L=L\{\ b_1(3;-5;\ 7;\ 6),b_2(2;-1;\ 3;\ 4)\ \}$.

Дополнительно.

з) $a=(-7;7;0)$, $L:\{2x+4y-z=0$.

и) $a=(3;4;2)$, $L:\begin{cases}2x_1+x_2-x_3=0\\ x_1\qquad+x_3=0\end{cases}.$

к) $a=(0;2;1;-4)$, $L:\{x_1-2x_3+3x_4=0$.

л) $a=(5;4;3;6)$, $L=L\{b(2;-1;0;2)\}$.

12. Найдите вектор нормали к плоскости в E^n, проходящей через точки M_1,M_2,M_3.

а) $M_1=(4;-1;\ 3)$, $M_2=(6;\ 0;\ 3)$, $M_3=(3;\ 1;-2)$.

б) $M_1=(1;\ 1;\ 2)$, $M_2=(2;-1;\ 1)$, $M_3=(1;\ 2;-4)$.

в) $M_1=(1;\ 1;-2)$, $M_2=(3;\ 1;\ 2)$, $M_3=(2;\ 3;-3)$.

13. Найдите расстояние между двумя линейными многообразиями H_1 и H_2, и задайте общий перпендикуляр к ним в параметрическом виде: $H_3=c_3+L\{h\}$.

а) $H_1=c_1(-4;3;1)+L\{a_1(1;-1;-1)\}$, $H_2=c_2(3;2;2)+L\{a_2(-1;3;1)\}$.

б) $H_1=c_1(3;3;-1)+L\{a_1(1;2;2)\}$, $H_2=c_2(-5;4;-2)+L\{a_2(1;1;-2)\}$.

в) $H_1=c_1(0;0;1)+L\{a_1(2;-1;0)\}$, $H_2:\begin{cases}x-y\qquad=0\\ x+y+\ z=1\end{cases}.$

г) $H_1=c_1(2;-6;1;-1)+L\{a_1(2;-1;0;1)\}$,
$H_2=c_2(1;1;-1;-1)+L\{a_2(-2;0;1;1)\}$.

д) $H_1=c_1(2;1;1;1)+L\{a_1(1;0;0;1),a_2(1;-1;0;0)\}$,
$H_2=c_2(0;5;-2;2)+L\{b_1(2;-1;1;0)\}$.

Дополнительно.

е) $H_1=c_1(1;0;3;-2)+L\{a_1(1;1;-2;0)\}$,
$H_2=c_2(2;-5;3;-5)+L\{a_2(0;1;1;2)\}$.

ж) $H_1 = c_1(2;\ 0;\ 0) + L\{a_1(0;\ 1;-1)\}$, $H_2 = \begin{cases} 2x \quad\ - z = 1 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$.

з) $H_1 = c_1(-1;1;-4;-3) + L\{a_1(-1;1;1;0), a_2(1;3;1;2)\}$,

$H_2 = c_2(7;5;4;3) + L\{b_1(2;3;1;1)\}$.

и) $H_1 = c_1(1;2;-1;-4) + L\{a_1(2;1;-1;-2), a_2(1;1;0;-1)\}$,

$H_2 = c_2(-4;2;-2;3) + L\{b_1(3;1;1;-1)\}$.

14. Найдите расстояние между двумя линейными многообразиями H_1 и H_2, и задайте в параметрическом виде $H_3 = c_3 + L\{h\}$ какой-нибудь общий перпендикуляр к ним. Если их много, укажите многообразие $H_4 = c_4 + L_4$ концов всех общих перпендикуляров, принадлежащих H_1, и многообразие $H_5 = c_5 + L_5$, являющееся объединением всех общих перпендикуляров.

а) $H_1 = c_1(1;\ 2;\ 3) + L\{a_1(1;\ 0;\ 1), a_2(0;\ 1;\ 0)\}$, $H_2 = \begin{cases} x - \ y \quad = 1 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$.

б) $H_1 = c_1(0;\ 0;\ 2) + L\{a_1(1;\ -1;\ 1)\}$, $H_2 = \{2x + y - z = 1$.

в) $H_1 = L\{a_1(1;\ 0;\ 0), a_2(0;\ 1;\ 0;\ 1)\} + c_1(0;\ 1;\ 2;\ 3)$,

$H_2 = L\{b_1(1;\ 1;\ 0;\ 0),\ b_2(0;\ 0;\ 1;\ 1)\} + c_2(0;\ -3;\ 1;\ 6)$.

г) $H_1 = L\{a_1(1;\ 2;\ 0;\ 1), a_2(1;\ 0;\ 2;\ 1)\} + c_1(2;\ 1;\ 0;\ 0)$,

$H_2 = L\{b_1(1;\ 1;\ 0;\ 2), b_2(1;\ 0;\ 1;\ 2)\} + c_2(-1;\ 2;\ 3;\ -1)$.

Дополнительные задачи

15. Докажите формулу $(L_1 + L_2^{\perp})^{\perp} = L_1^{\perp} \cap L_2$.

16. Пусть L_1 и L_2– линейные подпространства в E^n. Верно ли утверждение:

а) $L_1 + L_2 = E^n \Rightarrow L_1 = L_2^{\perp} \oplus (L_1 \cap L_2)$.

б) $L_1 \subseteq L_2 \Rightarrow L_2 = L_1 \oplus (L_1^{\perp} \cap L_2)$.

в) $L_1 \cap L_2 = \{\bar{0}\} \Rightarrow L_1^{\perp} = L_2 \oplus (L_1^{\perp} \cap L_2^{\perp})$.

г) $L_1 + L_2 = E^n \Rightarrow L_1^{\perp} \cap L_2^{\perp} = \{\bar{0}\}$.

д) $L_1 \cap L_2^{\perp} = \{\bar{0}\} \Rightarrow L_1^{\perp} \cap L_2 = \{\bar{0}\}$.

17. Пусть L_1, L_2 и L_3 – линейные подпространства в E^n. Верно ли утверждение:

а) $(L_1 + L_2)^{\perp} = (L_1 + L_3)^{\perp} \Rightarrow L_2^{\perp} = L_3^{\perp}$.

б) $(L_1 + L_2)^{\perp} = (L_1 + L_3)^{\perp} \Rightarrow (L_1 \cap L_2)^{\perp} = (L_1 \cap L_3)^{\perp}$.

в) $(L_1 + L_2)^{\perp} = (L_1 + L_3)^{\perp} \Rightarrow L_1^{\perp} \cap L_2^{\perp} = L_1^{\perp} \cap L_3^{\perp}$.

г) $(L_1 + L_2)^{\perp} \subseteq (L_1 + L_3)^{\perp} \Rightarrow L_2^{\perp} \subseteq L_3^{\perp}$.

18. Пусть $H_1 = c_1 + L_1$ и $H_2 = c_2 + L_2$ – два линейных многообразия в E^n, причем $L_1^\perp \cap L_2^\perp = \{\bar{0}\}$. Докажите, что в этом случае $H_1 \cap H_2 \neq \varnothing$.
19. Пусть $H_1 = L_1 + c_1$ и $H_2 = L_2 + c_2$ – два линейных многообразия в E^n. Известно, что многообразия H_1 и H_2 скрещиваются. Докажите, что в этом случае $L_1^\perp \cap L_2^\perp \neq \{\bar{0}\}$.
20. Пусть $H_1 = L_1 + c_1$ и $H_2 = L_2 + c_2$ – два линейных многообразия в E^n. Докажите, что общий перпендикуляр у них существует тогда и только тогда, когда $\dim(L_1 + L_2) < n$.
21. Пусть $H_1 = L_1 + c_1$ и $H_2 = L_2 + c_2$ – два линейных многообразия в E^n. Докажите, что если общий перпендикуляр у них существует и $L_1 \cap L_2 = \{\bar{0}\}$, то этот перпендикуляр определен однозначно.
22. Два различных трехмерных линейных многообразия в E^5 имеют общие точки, и существует ненулевой вектор, ортогональный их направляющим подпространствам. Чему может равняться размерность пересечения этих многообразий?
23. Докажите, что если $a \in L\{f_1, f_2, ..., f_k) \subseteq E^n$ и $(a, f_j) = 0$ для всех j, то $a = \bar{0}$.
24. Докажите, что если набор $f = \{f_1, f_2, ..., f_k)$ линейно независим, а набор $f' = \{f_1, f_2, ..., f_k, f_{k+1})$ линейно зависим, то при ортогонализации набора f' окажется, что вектор $g_{k+1} = \bar{0}$.
25. Докажите теорему о трех перпендикулярах в пространстве E^n: если $L_1 \subseteq L_2$, b – ортогональная проекция вектора a на подпространство L_2, c – ортогональная проекция вектора b на подпространство L_1, d – ортогональная проекция вектора a на подпространство L_1, то $d = c$.

Ответы на типовые задачи

1. а) $L^\perp = L\left\{f_1\left(2;4;-3\right)\right\}$, $\dim\left(L^\perp\right) = 1$.

   б) Например, $L^\perp = L\left\{f_1\left(2;4;-5\right), f_2\left(3;-2;4\right)\right\}$, $\dim\left(L^\perp\right) = 2$.

   в) Например, $L^\perp = L\left\{f_1\left(1;2;0\right), f_2\left(0;3;1\right)\right\}$, $\dim\left(L^\perp\right) = 2$.

   г) $L^\perp = L\left\{f_1\left(1;2;1\right)\right\}$, $\dim\left(L^\perp\right) = 1$.

   д) $L^\perp = L\left\{f_1\left(2;4;-3;1\right)\right\}$, $\dim\left(L^\perp\right) = 1$.

   е) $L^\perp = L\{f_1(2;-1;\ 1;\ 1), f_2(1;-2;-1;\ 2)\}$, $\dim(L^\perp) = 2$.

   ж) Например, $L^\perp = L\left\{f_1\left(1;2;1;0\right), f_2\left(0;1;0;1\right)\right\}$, $\dim\left(L^\perp\right) = 2$.

   з) $L^\perp = L\left\{f_1\left(4;3;-2;-1\right), f_2\left(1;-2;-4;3\right)\right\}$, $\dim\left(L^\perp\right) = 2$.

   и) Например, $L^\perp = L\left\{f_1\left(-8;1;5;0\right), f_2\left(-5;0;4;1\right)\right\}$, $\dim\left(L^\perp\right) = 2$.

к) Например,
$L^{\perp} = L\left\{f_1(2;4;-3;3;0), f_2(3;-2;4;-2;0), f_3(0;0;0;0;1)\right\}$,
$\dim(L^{\perp}) = 3$.

2. а) Например, $L = L\left\{f_1(1;1;0), f_2(3;-3;-4)\right\}$, $\dim(L) = 2$.
   б) Например, $L = L\left\{f_1(1;2;1;-3), f_2(-1;2;3;2)\right\}$, $\dim(L) = 2$.
   в) Например, $L = L\left\{f_1(2;1;0;0), f_2(0;0;1;-1), f_3(2;-4;5;5)\right\}$,
   $\dim(L) = 3$.
   г) Например, $L = L\left\{f_1(1;1;1), f_2(-5;4;1)\right\}$, $\dim(L) = 2$.
   д) Например, $L = L\left\{f_1(0;1;1;3;0), f_2(1;-1;1;0;0), f_3(-2;-1;1;0;3)\right\}$,
   $\dim(L) = 3$.
   е) Например,
   $L = L\left\{f_1(0;1;0;0;-1), f_2(3;0;2;-1;0), f_3(9;-7;-8;11;-7)\right\}$,
   $\dim(L) = 3$.
3. а) Например, $L^{\perp} = L\left\{f_1(1;0;-1), f_2(-1;2;1)\right\}$, $\dim(L^{\perp}) = 2$.
   б) Например, $L^{\perp} = L\left\{f_1(3;2;-1;0), f_2(0;0;0;1)\right\}$, $\dim(L^{\perp}) = 2$.
   в) Например, $L^{\perp} = L\left\{f_1(3;2;-1;0), f_2(0;0;0;1)\right\}$, $\dim(L^{\perp}) = 2$.
   г) Например,
   $L^{\perp} = L\left\{f_1(1;0;1;-3;0), f_2(1;1;-1;0;0), f_3(1;-2;-1;0;3)\right\}$,
   $\dim(L^{\perp}) = 3$.
   д) Например, $L^{\perp} = L\left\{f_1(3;2;-1;0), f_2(0;0;0;1)\right\}$, $\dim(L^{\perp}) = 2$.
   е) Например,
   $L^{\perp} = L\left\{f_1(-1;1;0;0;-1), f_2(0;-1;0;1;-1), f_3(1;2;3;3;1)\right\}$,
   $\dim(L^{\perp}) = 3$.
4. а) Например, $L = L\left\{f_1(1;-2;-1), f_2(1;-1;3)\right\}$, $\dim(L) = 2$.
   б) Например, $L = L\left\{f_1(1;2;3;2), f_2(1;-2;-1;3)\right\}$, $\dim(L) = 2$.
   в) Например, $L = L\left\{f_1(1;-1;1;2), f_2(3;2;-1;0), f_3(1;0;3;-2)\right\}$,
   $\dim(L) = 3$.
   г) Например,
   $L = L\left\{f_1(1;2;0;-1;0), f_2(3;-2;4;-1;0), f_3(-2;3;4;4;15)\right\}$,
   $\dim(L) = 3$.
5. а) $f_1 = \dfrac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1;-2;\ 5)$, $f_2 = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \cdot (2;\ 1;\ 0)$, $f_3 = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot (1;\ -2;\ -1)$.

б) $f_1=\frac{1}{\sqrt{15}}(1;-2;3;1)$, $f_2=\frac{1}{\sqrt{5}}(2;1;0;0)$, $f_3=\frac{1}{\sqrt{10}}(0;0;1;-3)$.

в) $f_1=\frac{1}{\sqrt{7}}(-1;2;1;1)$, $f_2=\frac{1}{\sqrt{7}}(2;1;1;-1)$, $f_4=\frac{1}{\sqrt{7}}(1;-1;1;2)$ (вектор $f_3=0$).

6. а) Например, $L^{\perp}=L\left\{f_1(2;3;-4), f_2(-1;2;1)\right\}$, $\dim\left(L^{\perp}\right)=2$.

б) Например, $L^{\perp}=L\left\{f_1(2;-2;3;1), f_2(-1;2;1;3)\right\}$, $\dim\left(L^{\perp}\right)=2$.

в) Например, $L^{\perp}=L\left\{f_1(2;1;-1;3;0), f_2(0;0;0;0;1)\right\}$, $\dim\left(L^{\perp}\right)=2$.

г) Например, $L^{\perp}=L\left\{f_1(1;1;1;0;1), f_2(1;-3;1;-4;1), f_3(1;0;-2;0;1)\right\}$, $\dim\left(L^{\perp}\right)=3$.

д) Например, $L^{\perp}=L\left\{f_1(2;3;-4), f_2(-1;2;1)\right\}$, $\dim\left(L^{\perp}\right)=2$.

е) Например, $L^{\perp}=L\left\{f_1(2;-2;3;1), f_2(-1;2;1;3)\right\}$, $\dim\left(L^{\perp}\right)=2$.

7. а) Например, $L=L\left\{f_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(0;1;0;1;-1), f_2=\frac{1}{\sqrt{3}}(1;-1;0;1;0),\right.$ $\left.f_3=\frac{1}{\sqrt{111}}(2;5;-3;3;8)\right\}$, $\dim(L)=3$.

б) Например, $L^{\perp}=L\{f_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1;0;-1;1), f_2=\frac{1}{\sqrt{258}}(1;6;-10;-11)\}$. $\dim(L)=2$.

в) Например, $L=L\left\{f_1=\frac{1}{\sqrt{5}}(0;1;0;0;-2), f_2=\frac{1}{3}(2;0;-2;-1;0),\right.$ $\left.f_3=\frac{1}{3\sqrt{30}}(10;6;5;10;3)\right\}$, $\dim(L)=3$.

г) Например, $L=L\{f_1=\frac{1}{2}(1;1;1;1;0), f_2=\frac{1}{\sqrt{76}}(5;-7;1;1;0),$ $f_3=\frac{1}{\sqrt{3}}(0;0;1;-1;-1)\}$, $\dim(L)=3$.

8. а) Например, $L=L\left\{f_1(1;-2;3;2), f_2(3;2;1;-1)\right\}$, $\dim(L)=2$.

б) Например, $L=L\left\{f_1(0;1;0;1), f_2(1;1;1;-1)\right\}$, $\dim(L)=2$.

в) Например, $L=L\left\{f_1(0;1;0;1), f_2(-2;-1;2;1)\right\}$, $\dim(L)=2$.

г) Например, $L=L\left\{f_1(2;-1;1;1), f_2(5;8;-8;6)\right\}$, $\dim(L)=2$.

9. а) Например, $L=L\left\{f_1(1;3;2;0;1), f_2(26;3;-23;15;11)\right\}$, $\dim(L)=2$.

б) Например, $L = L\{f_1(1;0;-1;2;3), f_2(-11;15;26;23;-3)\}$, $\dim(L) = 2$.

в) Например, $L = L\{f_1(-3;5;7;18;8)\}$, $\dim(L) = 1$.

д) Например, $L = L\{f_1(3;1;0;-1;-2), f_2(-3;-11;15;26;-23)\}$, $\dim(L) = 2$.

10. а) Например, $a_1 = (3;6;-2)$, $a_2 = (2;-1;0)$, $a_3 = (2;4;15)$.

б) Например, $a_1 = (-2;1;-5)$, $a_2 = (1;2;0)$, $a_3 = (2;-1;-1)$.

в) Например, $a_1 = (-2;1;3;2)$, $a_2 = (1;2;0;0)$, $a_3 = (0;0;2;-3)$, $a_4 = (26;-13;15;10)$.
Другой вариант: $a_1 = (-2;1;3;2)$, $a_2 = (1;0;0;1)$, $a_3 = (0;3;-1;0)$, $a_4 = (5;2;6;-5)$.

г) $a_1 = (1;-1;\ 2;\ 1)$, $a_2 = (1;\ 1;\ 1;-2)$, $a_3 = (2;\ 1;\ -1;\ 1)$, $a_4 = (-1;\ 2;\ 1;\ 1)$.

11. а) $g = (2;1;1)$, $h = (2;-4;0)$.

б) $g = (0;3;3)$, $h = (-1;2;-2)$.

в) $g = (0;0;0)$, $h = a = (4;1;-1)$.

г) $g = (3;-2;\ 1)$, $h = (0;\ 0;\ 0)$.

д) $g = (3;2;5)$, $h = (-1;4;-1)$.

е) $g = (4;-2;-1;-2)$, $h = (-1;-2;-2;\ 1)$.

ж) $g = (1;\ 3;-1;\ 2)$, $h = (2;\ 1;\ 1;-2)$.

з) $g = \left(-\frac{25}{3};\frac{13}{3};\frac{2}{3}\right)$, $h = \left(\frac{4}{3};\frac{8}{3};-\frac{2}{3}\right)$.

и) $g = (-1;3;1)$, $h = (4;1;1)$.

к) $g = (1;\ 2;-1;-1)$, $h = (-1;\ 0;\ 2;-3)$.

л) $g = (4;-2;0;4)$, $h = (1;6;3;2)$.

12. а) $n = (1;-2;-1)$. б) $n = (3;\ 2;-1)$. в) $n = (4;-3;-2)$.

13. а) $H_3 = c_3(0;-1;-3) + L\{h(4;0;4)\}$, $\rho = 4\sqrt{2}$.

б) $H_3 = c_3(2;1;-3) + L\{h(-6;4;-1)\}$, $\rho = \sqrt{53}$.

в) $H_3 = c_3(0;0;1) + L\{h(2;4;3)\}$, $\rho = 0$.

г) $H_3 = c_3(-1;1;0;0) + L\{h(1;5;-1;3)\}$, $\rho = 6$.

д) $H_3 = c_3(3;2;1;3) + L\{h(1;1;-1;-1)\}$, $\rho = 2$.

е) $H_3 = c_3(0;-1;5;-2) + L\{h(2;-2;0;1)\}$, $\rho = 3$.

ж) $H_3 = c_3\left(2;-\frac{5}{11};\frac{5}{11}\right) + L\{(3;-1;-1)\}$, $\rho = \frac{4}{11}\cdot\sqrt{11}$.

з) $H_3 = c_3(1;3;-4;-1) + L\{h(2;-4;6;2)\}$, $\rho = 2\sqrt{15}$.

и) $H_3 = c_3(-2;1;1;-1) + L\{h(1;2;-2;3)\}$, $\rho = 3\sqrt{2}$.

14. а) $H_3 = L\{h(-1;\ 0;\ 1)\}$, $\rho = 2\sqrt{2}$,
$H_4 = M_1(-1;\ 0;\ 1) + L\{b(1;\ 1;\ 1)\}$, $H_5 = L\{h(-1;\ 0;\ 1), b(1;\ 1;\ 1)\}$.

б) $H_3 = c_3(0;\ 0;\ 2) + L\{h(2;\ 1;-1)\}$, $\rho = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{6}$,
$H_4 = c_3(0;\ 0;\ 2) + L\{b(1;-1;\ 1)\}$,
$H_5 = c_3(0;\ 0;\ 2) + L\{h(2;\ 1;-1), b(1;-1;\ 1)\}$.

в) $H_3 = c_3(1;\ 2;\ 3;\ 4) + L\{h(-1;\ 1;\ 1;-1)\}$, $\rho = 4$,
$H_4 = c_3(1;\ 2;\ 3;\ 4) + L\{b(1;\ 1;\ 1;\ 1)\}$,
$H_5 = c_3(1;\ 2;\ 3;\ 4) + L\{h(-1;\ 1;\ 1;-1), b(1;\ 1;\ 1;\ 1)\}$.

г) $H_3 = c_3(4;\ 3;\ 2;\ 2) + L\{h(3;-1;-1;-1)\}$, $\rho = 2\sqrt{3}$,
$H_4 = c_3(4;\ 3;\ 2;\ 2) + L\{b(0;\ 1;-1;\ 0)\}$,
$H_5 = c_3(4;\ 3;\ 2;\ 2) + L\{h(3;-1;-1;-1), b(0;\ 1;-1;\ 0)\}$.

Ответы на дополнительные задачи

15. Указание: используйте формулу $(L_1 + L_2)^\perp = L_1^\perp \cap L_2^\perp$.
16. а) Неверно: $L_2^\perp$ не обязано лежать в L_1.
    б) Верно.
    в) Неверно: L_2 не обязано лежать в $L_1^\perp$.
    г) Неверно.
    д) Неверно.
17. а) Неверно. б) Неверно.
    в) Верно. г) Неверно.
18. Указание: вычислите $\dim(L_1 + L_2)$.
19. Указание: покажите, что $\dim(L_1 + L_2) < n$.
21. Указание: выпишите условие неоднозначности общего перпендикуляра.
22. Указание: используйте тот факт, что $\dim(L_1 + L_2) < n$.
23. Указание: выразите вектор через набор $\{f_1, f_2, \ldots, f_k)$ и подсчитайте (a, a).
24. Указание: используйте утверждение о единственности проекции и ортогональной составляющей при ортогональной проекции на подпространство.
25. Указание: используйте теорему о существовании и единственности проекции и ортогональной составляющей при ортогональной проекции на подпространство.

IX. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Определения и формулы

Пусть задана СЛАУ $AX = B$ с матрицей A порядка $m \times n$. Будем считать, что столбцы матрицы и столбец свободных членов принадлежат евклидову пространству E^m. Приближенным решением СЛАУ по методу наименьших квадратов считается такой вектор-столбец X_0, являющийся решением СЛАУ $AX_0 = D$, для которого расстояние $r = |B - D| = \sqrt{\sum_{j=1}^{m}(b_j - d_j)^2}$ минимально. Мерой отклонения (погрешностью) приближенного решения D служит величина r.

Вектор-столбец D является ортогональной проекцией g вектора B на линейную оболочку $L\left\{A^1, A^2, \ldots, A^n\right\}$ столбцов матрицы A, а отклонение $r = |h| = |B - g|$.

Приближенным решением СЛАУ служит набор коэффициентов разложения вектора g по столбцам матрицы A. Если $B = D = g$, а $r = 0$, то приближенное решение является точным.

Как следует из теории ортогональной проекции, вектор-столбец X_0, совпадающий с набором коэффициентов разложения проекции $g = D$ по столбцам матрицы A, является решением вспомогательной СЛАУ $\left(A^T A\right)X = A^T B$.

Примеры решения задач

Пример 1. Используя метод наименьших квадратов, решить СЛАУ

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 - 2x_3 = -3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ -3x_1 + 3x_3 = -7 \\ 4x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 8 \end{cases}.$$

Указать, точное получилось решение или приближенное. Вычислить погрешность.

Решение. Согласно методу наименьших квадратов, приближенное решение СЛАУ совпадает с коэффициентами разложения проекции D вектора B на подпространство $L = L\left\{A^1, A^2, A^3\right\}$. Вектор-столбец X, состоящий из этих коэффициентов, удовлетворяет вспомогательной СЛАУ $GX = A^T B$, где $G = A^T A$. Проделав необходимые вычисления, получим вспомогательную СЛАУ:

$$\begin{cases} 35x_1 \qquad -21x_3 = 49 \\ \quad -42x_2 \qquad = 42. \\ -21x_1 \qquad +21x_3 = -21 \end{cases}$$

Эта СЛАУ имеет единственное решение $x = (2;1;1)$. Значит, $D = 2A^1 + A^2 + A^3 = (-2;2;-4;-2)$. Тогда $h = B - D = (-1;3;-3;10)$. Значит, решение x является приближенным решением исходной СЛАУ, отклонение $r = |h| = \sqrt{119}$.

	t	x
1	1	2
2	–1	2
3	0	0
4	2	6

Пример 2 (Линейная аппроксимация временных рядов). Пусть в таблице справа даны результаты нескольких измерений $\{x_1,x_2,\ldots,x_m\}$ величины $x = x(t)$ в моменты времени $\{t_1,t_2,\ldots,t_m\}$. Предполагается, что аппроксимирующая функция $x = at + b$ линейная. Найдите конкретные значения a и b, для которых измеренные величины наиболее точно ложатся на прямую.

Решение. Если все измеренные величины ложатся на прямую, то должны выполняться равенства $x_j = at_j + b$ для всех $j = 1,2,\ldots,m$. Эти равенства составляют неоднородную СЛАУ из m линейных уравнений с двумя неизвестными величинами a и b. Матрица коэффициентов СЛАУ состоит из двух столбцов: столбца аргументов $A^1 = \{t_j\}$ и столбца A^2, состоящего из единиц.

Для решения СЛАУ используем метод наименьших квадратов. Вспомогательная СЛАУ имеет вид $GX = A^T B$, где $G = A^T A$. Проделав необходимые вычисления, получим СЛАУ: $\begin{cases} 6a + 2b = 12 \\ 2a + 4b = 10 \end{cases}$. Эта СЛАУ имеет решение $(a;b) = \left(\frac{7}{5};\frac{9}{5}\right)$. Следовательно, столбец $D = \frac{7}{5}\cdot A^1 + \frac{9}{5}\cdot A^2 = \frac{1}{5}\cdot(16;2;9;23)$. Соответственно $h = B - D = \frac{1}{5}\cdot(-6;8;-9;7)$. Значит, решение $(a;b) = \left(\frac{7}{5};\frac{9}{5}\right)$ является приближенным решением исходной СЛАУ, то есть $x = \frac{7}{5}t + \frac{9}{5}$. Отклонение $r = |h| = \frac{1}{10}\cdot\sqrt{12^2 + 16^2 + 18^2 + 14^2} = \frac{1}{5}\cdot\sqrt{230}$.

Пример 3 (Квадратичная аппроксимация временных рядов). В предположениях Примера 2 будем искать квадратичное выражение $x = at^2 + bt + c$

(параболу), наилучшим образом приближающее временной ряд $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$. Теперь неоднородная СЛАУ состоит из m линейных уравнений $x_j = at_j^2 + bt_j + c$ с тремя неизвестными величинами a, b и c. Матрица коэффициентов СЛАУ состоит из столбца квадратов аргументов $A^1 = \{t_j^2\}$, столбца аргументов $A^2 = \{t_j\}$ и столбца A^3, состоящего из единиц.

Вспомогательная СЛАУ имеет вид $GX = A^T B$, где $G = A^T A$. Проделав необходимые вычисления, получим СЛАУ:

$$\begin{cases} 18a + 8b + 6c = 28 \\ 8a + 6b + 2c = 12. \\ 6a + 2b + 4c = 10 \end{cases}$$

Ее решение $(a;b;c) = \left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{10}; \frac{3}{10}\right)$.

Следовательно,

$$D = \frac{3}{2} \cdot A^1 - \frac{1}{10} \cdot A^2 + \frac{3}{10} \cdot A^3 = \frac{1}{10} \cdot (17;19;3;57).$$

Соответственно, отклонение $h = B - D = \frac{1}{10} \cdot (3;1;-3;3)$ Значит, решение $\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{10}; \frac{3}{10}\right)$ является приближенным решением исходной СЛАУ, то есть $x = \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{10}t + \frac{3}{10}$. Отклонение $r = |h| = \frac{1}{10} \cdot \sqrt{3^2 + 1^2 + 3^2 + 3^2} = \frac{\sqrt{28}}{10}$.

Пример 4 (Линейная аппроксимация для двухфакторного показателя). Пусть величина z зависит от двух числовых аргументов x и y. В таблице справа заданы m результатов $\{z_1, z_2, \ldots, z_m\}$ измерений величины z, полученных для m пар значений аргументов (x_j, y_j). Найдите наилучшее приближение данных измерений с помощью линейной функции $z = ax + by + c$.

	t	x
1	1	2
2	–1	2
3	0	0
4	2	6

Решение. Для всех j уравнения $z_j = ax_j + by_j + c$ составляют неоднородную СЛАУ из m линейных уравнений с тремя неизвестными величинами a, b и c. Матрица коэффициентов СЛАУ состоит из столбца аргументов $A^1 = \{x_j\}$, столбца аргументов $A^2 = \{y_j\}$ и столбца A^3, состоящего из единиц. Вспомогательная СЛАУ имеет вид $GX = A^T B$, где $G = A^T A$.

Вычисления дают

$$\begin{cases} 6a + 3b + 4c = 3 \\ 3a + 6b + 2c = 0. \\ 4a + 2b + 4c = 4 \end{cases}$$

Получаем решение $(a;b;c)=\frac{1}{6}\cdot(-2;-2;9)$. Значит,

$$D=\frac{1}{6}\cdot\left(-2A^1-2A^2+9A^3\right)=\frac{1}{6}(7;9;7;1).$$

Отклонение $h=B-D=\frac{1}{6}\cdot(5;-3;-1;-1)$. Значит, $z=\frac{1}{6}\cdot(-2x-2y+9)$ является наилучшим линейным приближением к экспериментальным данным, а отклонение $r=|h|=\frac{1}{6}\cdot\sqrt{5^2+3^2+1^2+1^2}=1$.

Типовые задачи

1. Решите СЛАУ точно или приближенно, используя метод наименьших квадратов. Проверьте, точное или приближенное решение в итоге получилось.

а) $\begin{cases} x_1+x_2=2 \\ -x_1+x_2=0. \\ 2x_1+x_2=1 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=2 \\ x_1+x_2+x_3=3 \\ -x_1 \quad +2x_3=2 \end{cases}$.

2. Значения y_j функции $y=f(x)$ в четырех точках заданы в таблице. Найдите квадратичную функцию $y=a_1x^2+a_2x+a_3$, приближающую $f(x)$ по методу наименьших квадратов, и проверьте, является ли полученное соотношение точным или приближенным.

а)

	x	y
1	1	2
2	–1	2
3	0	0
4	2	6

б)

	x	y
1	1	2
2	–1	0
3	2	6
4	–2	4

в)

	x	y
1	–1	3
2	1	2
3	3	9
4	–3	12

г)

	x	y
1	–1	2
2	1	3
3	2	0
4	–2	2

Дополнительно.

д)

	x	y
1	–1	1
2	1	1
3	0	2
4	2	6

3. Значения функции $y = f(x_1, x_2)$ в четырех точках заданы в таблице. Найдите линейную функцию $y = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3$, приближающую $f(x_1, x_2)$ по методу наименьших квадратов, и проверьте, является ли полученное соотношение точным или приближенным.

а)

	x_1	x_2	y
1	1	0	2
2	1	–1	1
3	0	2	2
4	1	1	0

б)

	x_1	x_2	y
1	–1	1	2
2	1	–1	1
3	1	0	1
4	–1	2	3

в)

	x_1	x_2	y
1	1	0	2
2	1	–1	1
3	0	1	1
4	2	2	0

Дополнительно.

г)

	x_1	x_2	y
1	1	0	2
2	0	–1	1
3	1	1	1
4	2	1	4

д)

	x_1	x_2	y
1	1	0	1
2	0	–1	0
3	2	–1	–2
4	–1	2	2

е)

	x_1	x_2	y
1	–1	1	2
2	1	1	4
3	1	0	1
4	–1	–1	0

4. Значения y_j функции $y = f(x_1, x_2, x_3)$ в четырех точках заданы в таблице. Найдите линейную функцию $y = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3$, приближающую $f(x_1, x_2, x_3)$ по методу наименьших квадратов, и проверьте, является ли полученное соотношение точным или приближенным.

а)

	x_1	x_2	x_3	y
1	1	0	1	2
2	1	–1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	1	1	4

б)

	x_1	x_2	x_3	y
1	1	–1	1	4
2	1	0	1	3
3	0	1	0	–1
4	1	–1	0	3

Ответы на типовые задачи

1. а) $\left(\frac{3}{7}; \frac{5}{7}\right)$; приближенное.

   б) $\left(x_1; \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_1; \frac{5}{6} + \frac{1}{2}x_1\right)$, где $x_1 \in R$; приближенное и неединственное.

2. а) $y(x) \approx \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{10}x + \frac{3}{10}$; приближенное.

   б) $y(x) \approx \frac{4}{3}x^2 + \frac{3}{5}x - \frac{1}{3}$; приближенное.

   в) $y(x) = x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$; точное.

г) $y(x) \approx \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{10}x + \frac{3}{10}$; приближенное.

д) $y(x) \approx x^2 + \frac{2}{5}x + \frac{4}{5}$; приближенное.

3. а) $y(x) \approx -2x_1 - \frac{1}{2}x_2 + 3$; приближенное.

б) $y(x) \approx -\frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}$; приближенное.

в) $y(x) \approx -\frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{3}{2}$; приближенное.

г) $y(x) \approx \frac{1}{6}x_1 + \frac{4}{3}x_2 + \frac{3}{2}$; приближенное.

д) $y(x) \approx -\frac{9}{14}x_1 + \frac{4}{7}x_2 + \frac{4}{7}$; приближенное.

е) $y(x) \approx \frac{2}{5}x_1 + \frac{7}{5}x_2 + \frac{7}{5}$; приближенное.

4. а) $y(x) \approx \frac{8}{3}x_1 + \frac{7}{3}x_2 - x_3$; приближенное.

б) $y(x) = 2x_1 - x_2 + x_3$; точное.

X. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Определения и формулы

Определителем (детерминантом) называется числовая функция $\Delta = \det(A)$, определенная на множестве квадратных матрицах порядка n, которая удовлетворяет следующим трем условиям:

(1) пусть все строки матриц A, B и C, кроме строки с номером j, одинаковые, а $C_j = \lambda \cdot A_j + \mu \cdot B_j$; тогда $\det(C) = \lambda \cdot \det(A) + \mu \cdot \det(B)$(это свойство называется линейностью определителя по строкам);

(2) при перестановке строк матрицы определитель матрицы меняет знак (это свойство называется антисимметричностью определителя);

(3) $\det(E) = 1$ (это свойство называется нормировкой на единичную матрицу).

Другие свойства определителя вытекают из определения:

(4) если одна из строк матрицы нулевая, то определитель равен нулю;

(5) если среди строк матрицы есть одинаковые, то определитель равен нулю;

(6) если две строки матрицы пропорциональны, то определитель равен нулю;

(7) определитель матрицы не изменится, если к одной строке матрицы прибавить другую строку, умноженную на некоторое число;

(8) определитель матрицы не изменится, если к одной строке матрицы прибавить любую линейную комбинацию остальных его строк;

(9) определитель транспонированной матрицы равен определителю исходной матрицы;

(10) определитель диагональной матрицы равен произведению чисел на главной диагонали;

(11) определитель треугольной матрицы равен произведению чисел на главной диагонали.

Все свойства определителя, сформулированные для строк матрицы, верны также по отношению к столбцам матрицы.

Для записи определителя матрицу нужно окаймлять прямыми скобками вместо круглых скобок.

Определитель матрицы $A = (a_{11})$ первого порядка: $\det(A) = a_{11}$.

Определитель матрицы второго порядка:

$$\det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

Определитель матрицы третьего порядка:

$$\det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32})-$$

$$-(a_{13}a_{22}a_{31}+a_{11}a_{23}a_{32}+a_{12}a_{21}a_{33}).$$

Определитель квадратной матрицы отличен от нуля тогда и только тогда, когда эта матрица невырожденная.

Определитель произведения двух матриц равен произведению их определителей.

Пусть в квадратной матрице A выбраны r произвольных строк и r произвольных столбцов. В их пересечении образуется квадратная матрица порядка r. Определитель этой матрицы называется минором r-го ранга (или r-го порядка). Если множество номеров строк совпадает с множеством номеров столбцов, то такой минор называется главным.

Ранг матрицы совпадает с наибольшим порядком ненулевого минора этой матрицы.

В квадратной матрице n-го порядка сопоставим каждому элементу a_{jk} минор M_{jk} $(n-1)$-го порядка, полученный вычеркиванием j-ой строки и k-го столбца. Выражение $A_{jk}=(-1)^{j+k}M_{jk}$ называется алгебраическим дополнением элемента a_{jk}.

Формулы разложения определителя по j-ой строке и k-му столбцу позволяют свести вычисление определителя матрицы n-го порядка к вычислению определителей матриц $(n-1)$-го порядка:

$$\det(A)=\sum_{k=1}^{n}a_{jk}A_{jk}=\sum_{j=1}^{n}a_{jk}A_{jk}.$$

Теорема о фальшивом разложении. Разложение определителя по строке (столбцу), в котором вместо алгебраических дополнений элементов данной строки (столбца) использованы алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца), равно нулю: $\sum_{k=1}^{n}a_{jk}A_{ik}=0$ при $j\neq i$.

Матрицей, присоединенной к матрице A, называется матрица B, элементы которой образуются по закону $b_{jk}=A_{kj}$, где A_{kj} – алгебраическое дополнение элемента a_{kj} (то есть составляется матрица из алгебраических дополнений и затем транспонируется). Обозначение присоединенной матрицы $\tilde{A}$.

Для присоединенной матрицы выполняется соотношение $A\cdot\tilde{A}=det(A)\cdot E$.

Если $det(A)\neq 0$, то матрица A^{-1} существует и равна $A^{-1}=\dfrac{1}{\det(A)}\cdot\tilde{A}$.

Если у квадратной матрицы есть обратная, то произведение их определителей равно единице.

Правило Крамера. Пусть задана СЛАУ $AX=B$ с невырожденной квадратной матрицей A. Введем обозначения: Δ – определитель матрицы A, Δ_k – определитель матрицы, полученной из матрицы А заменой k-ого столбца на столбец B свободных членов. Тогда решение СЛАУ дается формулами $x_k=\dfrac{\Delta_k}{\Delta}$ для всех k от 1 до n.

Примеры решения задач.

Пример 1. Вычислите определитель матрицы A.

а) $A=\begin{vmatrix}7&4\\3&2\end{vmatrix}$. б) $A=\begin{vmatrix}2&1&3\\0&2&1\\3&4&2\end{vmatrix}$. в) $A=\begin{vmatrix}2&-4&3&1\\1&-1&2&1\\1&2&3&4\\3&-5&7&6\end{vmatrix}$.

Решение. а) $\begin{vmatrix}7&4\\3&2\end{vmatrix}=7\cdot2-4\cdot3=2.$

б) Разложим определитель по первому столбцу:

$$\begin{vmatrix}2&1&3\\0&2&1\\3&4&2\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\cdot2\cdot\begin{vmatrix}2&1\\4&2\end{vmatrix}+(-1)^{3+1}\cdot3\cdot\begin{vmatrix}1&3\\2&1\end{vmatrix}=.$$

$$=2(2\cdot2-4\cdot1)+3(1\cdot1-3\cdot2)=-15$$

в) Вычисление определителя состоит из нескольких итераций.

Итерация 1. Вторую строку, умноженную на –2, –1 и –3, прибавить к первой, третьей и четвертой строкам соответственно.

Итерация 2. Разложить определитель по первому столбцу.

Итерация 3. Вторую строку, умноженную на –1, прибавить к третьей строке.

Итерация 4. Разложить определитель по третьей строке.

Итерация 5. Вычислить определитель второго порядка.

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & -5 & 7 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -5 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 5 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -10.$$

Пример 2. Дана матрица A порядка 3×3 со строками $\{a_1, a_2, a_3\}$, причем $|A| = 4$. Строки $\{b_1, b_2, b_3\}$ матрицы B являются линейными комбинациями строк матрицы A:

$$b_1 = a_1 - a_2 + 2a_3,\ b_2 = a_1 + a_2 - a_3,\ b_3 = a_1 + 3a_3.$$

Найдите определитель матрицы B.

Решение. Надо убедиться, что

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot A. \text{ Тогда } |B| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} \cdot |A| = 5 \cdot 4 = 20.$$

Пример 3. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Не вычисляя матрицы A^{-1}, найдите третий столбец A^{-1}. При вычислении определителя пользоваться только минорами одной строки или одного столбца матрицы A.

Решение. Третий столбец присоединенной матрицы $\tilde{A}$ состоит из алгебраических дополнений третьей строки матрицы A. Вычислим алгебраические дополнения:

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -7,\ A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 5.$$

Определитель разложим по третьей строке:

$$\Delta = 3 \cdot (-7) + (-2) \cdot 3 + 1 \cdot 5 = -22.$$

Итак, третий столбец матрицы A^{-1} состоит из чисел

$$\frac{A_{31}}{\Delta} = \frac{7}{22},\ \frac{A_{32}}{\Delta} = -\frac{3}{22},\ \frac{A_{33}}{\Delta} = -\frac{5}{22}.$$

Пример 4. Вычислите для всех n определитель матрицы A порядка n, элементы которой вычисляются по формулам $a_{jk} = 3jk^2 + 2k - 2^j$.

Решение. Строка с номером j матрицы A_j является линейной комбинацией трех строк B,C и D длины n, координаты которых заданы формулами $b_k = k^2$, $c_k = k$ и $d_k = 1$. В самом деле, $A_j = 3j \cdot B + 2 \cdot C - 2^j \cdot D$. Следовательно, множество строк матрицы A выражается через набор $\{B,C,D\}$. Из этого следует, что при всех n ранг матрицы A не больше 3, то есть при $n > 3$ матрица A вырожденная. Значит, при $n > 3$ ее определитель равен нулю.

Осталось вычислить $det(A)$ при $n = 1,2,3$. При $n = 1$ имеем $|A| = |3| = 3$, при $n = 2$ получим $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 14 \\ 4 & 24 \end{vmatrix} = 16$, при $n = 3$ будет $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 14 & 31 \\ 4 & 24 & 56 \\ 3 & 32 & 79 \end{vmatrix} = -24$.

Пример 5. Вычислите для всех n определитель Δ матрицы A порядка n, элементы которой вычисляются по формулам $a_{jj} = 2$, $a_{jk} = 1$ при $j \neq k$.

Решение. На главной диагонали матрицы стоят двойки, остальные элементы единицы.

Первый способ. Шаг 1. Из каждой строки, начиная с первой и кончая предпоследней, вычитаем следующую строку: $A'_j = A_j - A_{j+1}$ для $j = 1,2,\ldots,n-1$. После этого во всех строках, кроме последней, будет $a_{jj} = 1$, $a_{j,j+1} = -1$, остальные элементы нули. Последняя строка не изменится.

Шаг 2. В первом столбце $a_{11} = a_{n1} = 1$, остальные элементы нули. К каждому столбцу, начиная со второго и кончая последним, прибавить предыдущий столбец: $(A')^k = A^k + A^{k-1}$ для $k = 2,3,\ldots,n$. При каждом прибавлении элемент $a_{k-1,k}$ над главной диагональю уничтожается, и во всех столбцах, кроме последнего, в n-ой строке $a_{nk} = k$. В самом деле, если $a_{n,k-1} = k-1$, то $a'_{nk} = a_{n,k-1} + a_{nk} = (k-1) + 1 = k$. Исключение составляет последний столбец: $a'_{nn} = a_{n,n-1} + a_{nn} = (n-1) + 2 = n+1$. Элементы выше главной диагонали равны нулю.

После всех прибавлений получится нижняя треугольная матрица, у которой все элементы на главной диагонали, кроме последнего, равны единице, а последний элемент $a_{nn} = n+1$. Значит, $\Delta = n+1$.

Второй способ. Шаг 1. К первой строке прибавим все остальные. Все ее элементы будут равны $(n+1)$.

Шаг 2. Вынесем из первой строки $(n+1)$, получим строку из единиц.

Шаг 3. Вычтем первую строку из всех строк, начиная со второй. Во всех строках будут стоять единицы на главной диагонали и нули в остальных клетках.

В результате получится верхняя треугольная матрица, у которой все элементы на главной диагонали равны единице. Ее определитель равен единице. С учетом вынесенного множителя $\Delta = n+1$.

Пример 6. Решите СЛАУ $\begin{cases} x+2y-3z=-1 \\ 2x-3y+z=5 \\ -2x-y+2z=-5 \end{cases}$, используя правило Крамера.

Решение. Надо вычислить четыре определителя: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 7$,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 5 & -3 & 1 \\ -5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 35,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & 5 & 1 \\ -2 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 21,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 5 \\ -2 & -1 & -5 \end{vmatrix} = 28.$$

Тогда $x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 5$, $y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 3$, $z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 4$.

Типовые задачи

1. Вычислите определитель матрицы A.

а) $A = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$.　　б) $A = \begin{vmatrix} 3 & -27 \\ -2 & 18 \end{vmatrix}$.

в) $A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.　　г) $A = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$.

д) $A = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & -3 \end{vmatrix}$.　　е) $A = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$.

Дополнительно.

ж) $A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 7 \end{vmatrix}$.　　з) $A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

и) $A=\begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$. к) $A=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}$.

2. Дана матрица A порядка 3×3 со строками $\{a_1, a_2, a_3\}$, ее определитель $|A| = \Delta$. Строки $\{b_1, b_2, b_3\}$ матрицы B являются линейными комбинациями строк $\{a_1, a_2, a_3\}$ матрицы A. Найдите определитель матрицы B.
   а) $b_1 = a_2 - a_3$, $b_2 = a_1 + a_2 - 2a_3$, $b_3 = a_2 + 2a_3 - a_1$.
   б) $b_1 = a_1 + a_3$, $b_2 = 2a_2 - a_1$, $b_3 = a_2 + a_3$
   в) $b_1 = 3a_1 + a_3$, $b_2 = 2a_2 - 3a_3$, $b_3 = a_2 + 2a_3$.
   г) $b_1 = a_1 + 2a_3$, $b_2 = a_2 - a_1$, $b_3 = a_2 + 2a_3$.
3. Дана матрица A порядка 3×3 со столбцами $\{a^1, a^2, a^3\}$, ее определитель $|A| = \Delta$. Столбцы $\{b^1, b^2, b^3\}$ матрицы B являются линейными комбинациями столбцов $\{a^1, a^2, a^3\}$ матрицы A. Найдите определитель матрицы B.
   а) $b^1 = -3a^1 - 2a^2 + 2a^3$, $b^2 = -a^1 - a^2 + 2a^3$, $b^3 = -2a^1 + 2a^2 - a^3$.
   б) $b^1 = -2a^1 + 2a^2 + a^3$, $b^2 = 3a^1 - 3a^2 - 2a^3$, $b^3 = 3a^1 + 2a^2 + a^3$.
4. Дана матрица A. Не вычисляя матрицы A^{-1}, найдите k-ый столбец, j-ую строку и элемент b_{jk} матрицы A^{-1}. При вычислении определителя пользоваться только минорами одной строки или одного столбца матрицы A.
   а) $A=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 9 & -3 & 2 \\ -5 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $k=3$, $j=2$, b_{31}.
   б) $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \\ -1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$, $k=3$, $j=2$, b_{31}.
   в) $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $k=2$, $j=1$, b_{33}.
   г) $A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $k=1$, $j=1$, b_{23}.

5. Найдите матрицу $\tilde{A}$, присоединенную к матрице A, и матрицу A^{-1}.

а) $A=\begin{pmatrix}7 & -2\\ 5 & 3\end{pmatrix}$. б) $A=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ -5 & 11\end{pmatrix}$.

в) $A=\begin{pmatrix}0 & 3 & 3\\ 2 & -1 & 2\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}$. г) $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 5 & -2 & 2\\ -1 & -3 & 2\end{pmatrix}$.

Дополнительно.

д) $A=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 3\\ -2 & -1 & 2\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$. е) $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ -3 & -1 & 4\\ 2 & 2 & -1\end{pmatrix}$.

6. Вычислите для всех n определитель Δ_n матрицы $A=\| a_{jk} \|$ порядка n, если:

а) $a_{jk}=(-1)^{j+k}$. б) $a_{jk}=jk$.

в) $a_{jk}=1+jk$. г) $a_{jk}=j+k$.

д) $a_{jk}=(-1)^{jk}$. е) $a_{jk}=j\cdot 2^k-\dfrac{3^j}{k}$.

ж) $a_{jk}=j^2k^2-j-k$. з) $a_{jk}=(j-k)^2+j+k$.

Дополнительно.

и) $a_{jk}=j^2\cdot k$. к) $a_{jk}=1+\dfrac{j}{k}$.

л) $a_{jk}=2j^2k-jk^2$. м) $a_{jk}=(k-j)^2$.

н) $a_{jk}=\sin\dfrac{(j-k)\pi}{2}$.

7. При всех n вычислите определитель матрицы n-ого порядка $A=\| a_{jk} \|$, если:

а) $a_{jk}=\min(j,k)$.

б) $a_{jk}=\max(j,k)$.

в) $a_{jk}=|j-k|$.

г) $a_{kk}=0$ при всех k, $a_{jk}=1$ при $j\neq k$.

д) $a_{jk}=-1-\min(j,k)$.

е) $a_{jk}=\max(n+1-j,k)$.

ж) $a_{jk}=|j+k-1-n|$.

з) $a_{kk}=3$ при всех k, $a_{j,j+1}=1$ при $j<n$, $a_{n1}=1$, $a_{jk}=0$ при прочих j и k.

и) $a_{11}=1, a_{kk}=0$ при всех $k>1$, $a_{jk}=k$ при $j<k$, $a_{jk}=-k$ при $j>k$.

Дополнительно.

к) $a_{jk}=|j-k|+1$.

л) $a_{jk}=\max(j,k)-1$.

м) $a_{jk}=\max(n+1-k, j)$.

н) $a_{jk}=\min(j,k)+1$.

о) $a_{kk}=2k-1$ при всех k, $a_{jk}=k$ при всех $j\neq k$.

8. У квадратных матриц A и B k-го порядка известны $\det(A)=\Delta_1$, $\det(B)=\Delta_2$. Вычислите определитель выражения D, которое содержит A и B и присоединенные матрицы $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$.

   а) $k=4$, $\Delta_1=4$, $D=\tilde{A}A^{-3}$.

   б) $k=5$, $\Delta_1=-3$, $D=A^3\tilde{A}^{-1}$.

   в) $k=3$, $\Delta_1=2$, $\Delta_2=-3$, $D=2A^{-2}\cdot\tilde{B}$.

   г) $k=4$, $\Delta_1=6$, $\Delta_2=-3$, $D=A^2\cdot 2\tilde{B}^{-1}$.

Дополнительно.

   д) $k=4$, $\Delta_1=-3$, $D=\tilde{A}A^{-2}$.

   е) $k=5$, $\Delta_1=-5$, $D=\tilde{A}^{-1}A^2$.

   ж) $k=3$, $\Delta_1=-2$, $\Delta_2=4$, $D=3A^3\cdot\tilde{B}^{-1}$.

   з) $k=4$, $\Delta_1=-3$, $\Delta_2=-2$, $D=A^{-3}\cdot 3\tilde{B}$.

9. Решите СЛАУ, используя правило Крамера.

   а) $\begin{cases}-x+2y-2z=2\\ 2x+3y-z=8\\ 3x-2y-z=5\end{cases}$.

   б) $\begin{cases}-3x+2y-3z=7\\ 2x+3y+5z=-2\\ 3x-2y-4z=7\\ -4x+7y+6z=-2\end{cases}$.

   в) $\begin{pmatrix}1&2&4\\0&3&2\\-2&1&-6\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}3\\4\\2\end{pmatrix}$.

   г) $\begin{pmatrix}1&-1&1\\3&1&2\\5&0&3\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}-8\\7\\1\end{pmatrix}$.

10. Найдите фундаментальный набор решений, используя правило Крамера (последняя задача с параметром p).

   а) $\begin{cases}-x+y-z=0\\ 2x-3y+z=0\end{cases}$.

   б) $\begin{cases}3x-y+2z+t=0\\ -6x+2y-4z=0\end{cases}$.

   в) $\begin{cases}-x+2y-2z=0\\ 2x-3y-pz=0\end{cases}$.

Дополнительные задачи

11. Как изменится определитель квадратной матрицы порядка n, если:
    а) Умножить матрицу на число λ.
    б) Последний столбец переписать на первое место, сохраняя порядок остальных столбцов.
    в) Изменить порядок строк на обратный (от последней к первой).
    г) Отразить матрицу относительно главной диагонали.
    д) Отразить матрицу относительно побочной диагонали.
    е) Выполнить центральную симметрию относительно центра матрицы.
    ж) Повернуть матрицу на 90° против часовой стрелки.
12. Чему равен определитель матрицы, у которой элементы побочной диагонали равны единице, а остальные элементы равны нулю?
13. Дана матрица A порядка $(n\times n)$ с определителем $|A|=\Delta$, $\tilde{A}=\|b_{jk}\|$ – присоединенная матрица. Вычислить определитель:
    а) Матрицы $\tilde{A}^T$.
    б) Матрицы $A^T\cdot\tilde{A}$.
    в) Матрицы $(A\cdot\tilde{A})^{-1}$.
    г) Матрицы $A^{-2}\cdot(\tilde{A}^T)^3$.
    д) Матрицы $A\cdot C$, где $c_{jk}=b_{n+1-j,n+1-k}$.
14. Докажите, что если у квадратной матрицы размером $(n\times n)$ ранг $r(A)=n$, то $r(\tilde{A})=n$.
15. Докажите, что если у квадратной матрицы размером $(n\times n)$ ранг $r(A)<n-1$, то $\tilde{A}=0$.
16. Докажите, что если у квадратной матрицы размером $(n\times n)$ ранг $r(A)=n-1$, то $r(\tilde{A})=1$.
17. Дана матрица A (3×3) такая, что $r(A)<3$. Докажите, что при этих условиях присоединенная матрица к присоединенной матрице будет нулевой.
18. Пусть для некоторых функций $f(j)$, $g(j)$ и $h(j)$ общий член матрицы n-го порядка задается формулой $a_{jk}=f(j)\cdot k^2+g(j)\cdot 2^k+h(j)$. Докажите, что при $n>3$ определитель матрицы равен нулю.
19. Пусть общий член матрицы n-го порядка задается формулой $a_{jk}=P(j,k)$, где $P(x,y)=\sum_{m=0}^{p}\sum_{i=0}^{q}c_{mi}x^m y^i$ – многочлен от двух переменных, у которого максимальная степень по x равна p, а максимальная степень по y равна q. Докажите, что при $n>\min(p,q)$ ее определитель равен нулю.
20. Покажите, что в матрице ранга k любой минор порядка больше k равен нулю.

21. Докажите, что определитель кососимметрической матрицы 15-го порядка равен нулю.
22. Пусть A – матрица размером 4×4, $|A|=7$. Найдите в стандартном базисе координаты вектора $b=A_{13}a_1+A_{23}a_2+A_{33}a_3+A_{43}a_4$, где a_i – строки матрицы A.
23. Если в матрице A размером $n\times n$ все элементы первой строки равны единице, то $|A|=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}A_{ij}$.
24. Верно ли утверждение: если для СЛАУ $Ax=b$ с квадратной матрицей A размером (3×3) все определители, подсчитанные по Правилу Крамера, равны нулю, то система несовместна?
25. Верно ли утверждение: если для СЛАУ $Ax=b$ с квадратной матрицей A размером (3×3) все определители, подсчитанные по Правилу Крамера, равны нулю, то система имеет бесконечное множество решений?

Ответы на типовые задачи

1. а) $\Delta=1$. б) $\Delta=0$. в) $\Delta=-2$. г) $\Delta=-6$.
   д) $\Delta=0$. е) $\Delta=8$. ж) $\Delta=30$. з) $\Delta=-3$.
   и) $\Delta=90$. к) $\Delta=52$.
2. а) $\det(B)=-2\cdot\Delta$. Указание. Обоснуйте, что $B=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&1&-2\\-1&1&2\end{pmatrix}\cdot A$.

   б) $\det(B)=\Delta$. в) $\det(B)=21\cdot\Delta$. г) $\det(B)=0$.
3. а) $\det(B)=11\cdot\Delta$. Указание. Обоснуйте, что $B=A\cdot\begin{pmatrix}-3&-1&-2\\-2&-1&2\\2&2&-1\end{pmatrix}$.

   б) $\det(B)=-5\cdot\Delta$.
4. а) $b^3=-\dfrac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}9\\-1\\-42\end{pmatrix}$, $b_2=-\dfrac{1}{5}\cdot(-1;\ 0;-1)$, $b_{31}=-\dfrac{3}{5}$, $\Delta=-5$.

   б) $b^3=\dfrac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}9\\-7\\-13\end{pmatrix}$, $b_2=\dfrac{1}{2}\cdot(3;-8;-7)$, $b_{31}=\dfrac{5}{2}$, $\Delta=2$.

   в) $b^2=\begin{pmatrix}10\\-7\\8\end{pmatrix}$, $b_1=(-1;\ 10;-3)$, $b_{33}=-2$, $\Delta=-1$.

г) $b^1 = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $b_1 = \frac{1}{9} \cdot (1;\ 3; -2)$, $b_{23} = -\frac{1}{3}$, $\Delta = 9$.

5. а) $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \frac{1}{31} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$.

б) $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 11 & -3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = -\frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 11 & -3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$.

в) $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & -9 & 9 \\ 0 & -3 & 6 \\ -3 & 3 & -6 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

г) $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -12 & 3 & 3 \\ -17 & 5 & 8 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -12 & 3 & 3 \\ -17 & 5 & 8 \end{pmatrix}$.

д) $\tilde{A} = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

е) $\tilde{A} = \begin{pmatrix} -7 & 5 & 13 \\ 5 & -4 & -11 \\ -4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -7 & 5 & 13 \\ 5 & -4 & -11 \\ -4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$.

6. а) $\Delta_n = 0$ при $n > 1$, $\Delta_1 = 1$.

б) $\Delta_n = 0$ при $n > 1$, $\Delta_1 = 1$.

в) $\Delta_n = 0$ при $n > 2$, $\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = 1$.

г) $\Delta_n = 0$ при $n > 2$, $\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = -1$.

д) $\Delta_n = 0$ при $n > 2$, $\Delta_1 = -1$, $\Delta_2 = -2$.

е) $\Delta_n = 0$ при $n > 2$, $\Delta_1 = -1$, $\Delta_2 = 9$.

ж) $\Delta_n = 0$ при $n > 3$, $\Delta_1 = -1$, $\Delta_2 = -13$, $\Delta_3 = -4$.

з) $\Delta_n = 0$ при $n > 3$, $\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = -8$, $\Delta_3 = 8$.

и) $\Delta_n = 0$ при $n > 1$, $\Delta_1 = 1$.

к) $\Delta_n = 0$ при $n > 2$, $\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = -\frac{1}{2}$.

л) $\Delta_n = 0$ при $n > 2$, $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = 8$.

м) $\Delta_n = 0$ при $n > 3$, $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = -1$, $\Delta_3 = 8$.

н) $\Delta_n = 0$ при $n > 2$, $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 1$.

7. а) $\Delta_n = 1$.

б) $\Delta_n = (-1)^{n-1} \cdot n$.

в) $\Delta_n = \left(-1\right)^{n-1} \cdot 2^{n-2} \cdot \left(n-1\right)$.

г) $\Delta_n = \left(-1\right)^{n-1} \cdot \left(n-1\right)$.

д) $\Delta_n = \left(-1\right)^{n} \cdot 2$.

е) $\Delta_n = (-1)^{\frac{(n+2)(n-1)}{2}} \cdot n$.

ж) $\Delta_n = (-1)^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}} \cdot (n-1) \cdot 2^{n-2}$.

з) $\Delta_n = 3^n + \left(-1\right)^{n+1}$ при $n > 1$, $\Delta_1 = 3$.

и) $\Delta_n = n!$.

к) $\Delta_n = \left(-1\right)^{n-1} \cdot 2^{n-2} \cdot \left(n+1\right)$.

л) $\Delta_n = \left(-1\right)^{n-1} \cdot \left(n-1\right)$.

м) $\Delta_n = (-1)^{\frac{(n+2)(n-1)}{2}} \cdot n$.

н) $\Delta_n = 2$.

о) $\Delta_n = \left(n-1\right)!$.

8. а) $\det\left(D\right) = 1$. б) $\det\left(D\right) = -\dfrac{1}{3}$.

в) $\det\left(D\right) = 18$. г) $\det\left(D\right) = -\dfrac{64}{3}$.

д) $\det\left(D\right) = -3$. е) $\det\left(D\right) = \dfrac{1}{25}$.

ж) $\det\left(D\right) = -\dfrac{27}{2}$. з) $\det\left(D\right) = 24$.

9. а) $X = (2;\ 1;\ -1)$. б) $X = (1;\ 2;\ -2)$.

в) $X = (3;\ 2;\ -1)$. г) $X = (2;\ 7;\ -3)$.

10. а) $f = \{f_1(2;\ 1;\ -1)\}$. б) $f = \{f_1(1;\ 3;\ 0;\ 0), f_2(0;\ 2;\ 1;\ 0)\}$.

в) $f = \{f_1(2p+6;\ p+4;\ 1)\}$.

Ответы на дополнительные задачи

11. а) Умножится на λ^n.

б) Умножится на $(-1)^{n-1}$.

в) Умножится на $(-1)^k$, где $k = \dfrac{n}{2}$, если n – четное, $k = \dfrac{n-1}{2}$, если n – нечетное.

г) Не изменится.

д) Не изменится.

е) Не изменится.

ж) Умножится на $(-1)^k$, где $k = \dfrac{n}{2}$, если n – четное, $k = \dfrac{n-1}{2}$, если n – нечетное.

12. $\Delta = (-1)^k$, где $k = \dfrac{n}{2}$, если n – четное, $k = \dfrac{n-1}{2}$, если n – нечетное.
13. а) Δ^{n-1}. б) Δ^n. в) Δ^{-n}. г) Δ^{3n-1}. д) Δ^n.
14. Указание. Используйте теорему о ранге произведения матриц.
15. Указание. Используйте теорему о связи ранга матрицы с минорами.
16. Указание. Используйте теорему о связи ранга матрицы с минорами.
17. Указание. Следует из заданий 15 и 16.
20. Указание. Если число строк в наборе больше k, то строки матрицы линейно зависимы.
21. Указание. Рассмотрите определитель транспонированной матрицы.
22. Указание. Используйте теорему о разложении определителя и теорему о фальшивом разложении.
23. Указание. Используйте теорему о разложении определителя и теорему о фальшивом разложении.
24. Неверно.
25. Неверно.

XI. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Определения и формулы

Полем называется множество, в котором определены две операции: сложение и умножение. Для этих операций должны выполняться следующие соотношения (аксиомы поля):

(1) ассоциативность операции сложения: $(a+b)+c=a+(b+c)$;
(2) коммутативность операции сложения: $a+b=b+a$;
(3) существует элемент 0 (нуль), для которого $a+0=a$ для всех a;
(4) для любого a существует противоположный элемент b, для которого $a+b=0$;
(5) ассоциативность операции умножения: $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$;
(6) коммутативность операции умножения: $a\cdot b=b\cdot a$;
(7) существует элемент 1 (единица), для которого $a\cdot 1=a$ для всех a;
(8) для любого $a\neq 0$ существует обратный элемент b, для которого $a\cdot b=1$;
(9) дистрибутивность умножения относительно сложения: $(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$.

Элементы поля называются числами. Полями являются множество R всех действительных чисел и множество Q всех рациональных чисел. Можно определить также поле C комплексных чисел.

Поле комплексных чисел состоит из элементов линейного евклидова пространства E^2 с каноническим базисом $\{e_1,e_2\}$. Сумма и разность комплексных чисел совпадает с суммой и разностью векторов E^2. Нулем поля служит нуль-вектор. Произведение двух комплексных чисел задается формулой:

$$(x_1e_1+y_1e_2)\cdot(x_2e_1+y_2e_2)=(x_1x_2-y_1y_2)e_1+(x_1y_2+x_2y_1)e_2.$$

Единицей поля является вектор e_1. Обратным к числу $z=xe_1+ye_2\neq 0$ является число

$$z^{-1}=\frac{x}{x^2+y^2}\cdot e_1-\frac{y}{x^2+y^2}\cdot e_2.$$

Вектор e_2 обозначается символом i и называется мнимой единицей. Для него верно соотношение $i^2=-1$. Комплексное число $z=xe_1+ye_2$ обычно записывается в виде $z=x+yi$.

Координаты x и y в изображении комплексного числа называются действительной и мнимой частью комплексного числа.

Из тождества $(x_1 + 0 \cdot i)(x_2 + 0 \cdot i) = x_1 x_2 + 0 \cdot i$ следует, что поле действительных чисел можно отождествить с подмножеством чисел $x + 0 \cdot i$ с нулевой мнимой частью. Прямая $L\{e_1\}$ называется действительной осью, прямая $L\{e_2\}$ – мнимой осью.

Умножению комплексного числа $x + yi$ на действительное число $a = a + 0 \cdot i$ соответствует умножение соответствующего вектора $z = xe_1 + ye_2$ на это число: $(x + y \cdot i)(a + 0 \cdot i) = ax + ay \cdot i$.

Модуль $|z|$ комплексного числа совпадает с длиной вектора $z = xe_1 + ye_2$ в евклидовом пространстве E^2, то есть $|x + yi| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Это число равно нулю только при $z = 0$. Для действительных чисел модуль в множестве комплексных чисел совпадает с модулем в множестве действительных чисел: $|x + 0 \cdot y| = |x|$.

Число $\overline{z} = x - yi$ называется сопряженным к числу $z = x + yi$.

Сопряжение переводит сумму чисел в сумму, а произведение чисел – в произведение:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2},\ \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}.$$

Кроме того,

$$z \cdot \overline{z} = |z|^2 \text{ и } z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

Двойственность операции сопряжения: если $z_2 = \overline{z_1}$, то $z_1 = \overline{z_2}$.

Комплексные числа можно представлять в так называемой тригонометрической форме:

$$z = x + yi = r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi), \text{ где } x = r \cdot cos\varphi,\ y = r \cdot sin\varphi.$$

Переменная φ совпадает с углом, который вектор z составляет с положительным направлением действительной оси. Она называется аргументом числа z. Переменная r равна модулю числа z.

При умножении комплексных чисел, представленных в тригонометрической форме, их модули перемножаются, а аргументы складываются:

$$\begin{gathered}[r_1(cos\varphi_1 + i \cdot sin\varphi_1)] \cdot [r_2(cos\varphi_2 + i \cdot sin\varphi_2)] = \\ = (r_1 r_2) \cdot (cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot sin(\varphi_1 + \varphi_2))\end{gathered}.$$

При делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются.

Для целочисленной степени комплексного числа, записанного в тригонометрической форме, верна формула Муавра:

$$z^n = \left[r\left(cos\varphi + i\cdot sin\varphi\right)\right]^n = r^n\left(\cos(n\varphi) + i\cdot\sin(n\varphi)\right).$$

Все числа вида

$$\nu_k = cos\frac{2\pi k}{n} + i\cdot sin\frac{2\pi k}{n}, \text{ где } 0 \le k < n,$$

являются разными корнями n-ой степени из единицы. Других корней n-ой степени из единицы нет. Другими словами, уравнение $x^n - 1 = 0$ имеет ровно n комплексных корней.

Корень $\nu_1 = cos\frac{2\pi}{n} + i\cdot sin\frac{2\pi}{n}$ называют первообразным корнем n-ой степени из единицы. Из формулы Муавра следует, что $\nu_k = \nu_1^k$.

Для любого комплексного числа $z = r\left(cos\varphi + i\cdot sin\varphi\right) \ne 0$ существует ровно n разных корней n-ой степени из z. Корень с номером k, где $0 \le k < n$, задается формулой

$$z_k = \sqrt[n]{r}\cdot\left(cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\cdot sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right).$$

Другая формула для корней:

$$z_0 = \sqrt[n]{r}\cdot\left(cos\frac{\varphi}{n} + i\cdot sin\frac{\varphi}{n}\right),\ z_k = z_0\cdot\nu_k = z_0\cdot\nu_1^k.$$

Формула Эйлера: $e^{ix} = \cos x + i\cdot\sin x$. В частности, $e^{2\pi i} = 1$, $\nu_k = e^{\frac{2\pi k i}{n}}$.

Примеры решения задач

Пример 1. Вычислите комплексное выражение $z = \frac{(3+i)(2-3i)}{1+2i}$.

Решение. Сначала перемножим числа в числителе, затем умножим числитель и знаменатель на комплексное число, сопряженное к знаменателю:

$$z = \frac{(3+i)(2-3i)}{1+2i} = \frac{6+2i-9i-3i^2}{1+2i} = \frac{9-7i}{1+2i} =$$
$$\frac{(9-7i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{9-7i-18i+14i^2}{1^2+2^2} = \frac{-5-25i}{5} = -1-5i.$$

Пример 2. Найдите модуль комплексного выражения $z = \frac{(4-3i)^5(3+i)^3}{(2-i)^{11}(1+i)^7}$.

Решение. Модуль произведения комплексных чисел равен произведению модулей. Поэтому $|z| = \frac{|4-3i|^5|3+i|^3}{|2+i|^{11}|1+i|^7} = \frac{5^5\left(\sqrt{10}\right)^3}{\left(\sqrt{5}\right)^{11}\left(\sqrt{2}\right)^7} = \frac{5}{4}$.

Пример 3. Найдите тригонометрическую форму числа $z=-3+\sqrt{3}\cdot i$.

Решение. Во-первых, $r=|z|=2\sqrt{3}$. Во-вторых, $\cos\varphi=\dfrac{-3}{2\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2}$. Значит, $\varphi=\dfrac{5\pi}{6}$ (аргумент лежит во второй четверти). Итак, $z=2\sqrt{3}\cdot\left(\cos\dfrac{5\pi}{6}+i\cdot\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)$.

Пример 4. Вычислите и запишите выражение

$$z=\frac{(2+3i)^5\left(3-\sqrt{3}\cdot i\right)^{13}\left(1-\sqrt{3}\cdot i\right)^7}{(1-i)^{20}(3-2i)^5}$$

в алгебраической форме: $z=a+bi$.

Решение. Вычислим каждый сомножитель выражения для z по отдельности.

(1) Прежде всего надо заметить, что $\dfrac{2+3i}{3-2i}=i$, поэтому $\left(\dfrac{2+3i}{3-2i}\right)^5=i^5=i$.

(2) Выразим основание каждой степени в тригонометрической форме:

$$3+\sqrt{3}\cdot i=2\sqrt{3}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\cdot\sin\frac{\pi}{6}\right);$$

$$1-\sqrt{3}\cdot i=2\cdot\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right);$$

$$1-i=\sqrt{2}\cdot\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

(3) По формуле Муавра:

$$\left(3+\sqrt{3}\cdot i\right)^{13}=\left(2\sqrt{3}\right)^{13}\left(\cos\frac{13\pi}{6}+i\cdot\sin\frac{13\pi}{6}\right)=\left(2\sqrt{3}\right)^{13}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\cdot\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

$$\left(1-\sqrt{3}\cdot i\right)^{7}=2^7\cdot\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{3}\right)+i\cdot\sin\left(-\frac{7\pi}{3}\right)\right)=2^7\cdot\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

$$(1-i)^{20}=\sqrt{2}^{20}\cdot\left(\cos\left(-\frac{20\pi}{4}\right)+i\cdot\sin\left(-\frac{20\pi}{4}\right)\right)=2^{10}\cdot(\cos\pi+i\cdot\sin\pi).$$

(4) Чтобы получить тригонометрическую форму числа z, перемножим (разделим) все модули и сложим (вычтем) все аргументы:

$$r=\frac{1\cdot\left(2\sqrt{3}\right)^{13}\cdot 2^7}{2^{10}}=2^{10}\left(\sqrt{3}\right)^{13},\ \varphi=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}-\pi=-\frac{2\pi}{3}.$$

Окончательно

$$z=2^{10}\left(\sqrt{3}\right)^{13}\cdot\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\cdot\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)=-2^{9}\left(\sqrt{3}\right)^{13}-2^{9}3^{7}\cdot i.$$

Пример 5. Запишите в тригонометрической форме все комплексные корни девятой степени из числа $z_0=-3-\sqrt{3}\cdot i$, и выберите корень z с наименьшей мнимой частью.

Решение. Тригонометрическая форма числа

$$-3-\sqrt{3}\cdot i=\sqrt{12}\cdot\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\cdot\sin\frac{7\pi}{6}\right).$$

Корни девятой степени изображаются формулой

$$z_k=\sqrt[18]{12}\cdot\left(\cos\frac{7\pi+12\pi k}{54}+i\cdot\sin\frac{7\pi+12\pi k}{54}\right).$$

Для того, чтобы мнимая часть комплексного числа была наименьшей, аргумент числа z_k должен быть ближе всего к аргументу $\frac{3\pi}{2}$ числа $-i$, то есть выражение $7\pi+12\pi k$ должно быть ближе всего к числу 81π. Это произойдет при $k=6$, и тогда искомое число

$$z=z_6=\sqrt[18]{12}\cdot\left(\cos\frac{79\pi}{54}+i\cdot\sin\frac{79\pi}{54}\right).$$

Пример 6. Изобразите на координатной плоскости геометрическое место точек $z=x+yi$, удовлетворяющих соотношению

$$|z+2-i|^2-|z-1-3i|^2=z+\bar{z}-1.$$

Решение. Имеем

$$z+2-i=(x+2)+(y-1)\cdot i,$$

$$z-1-3i=(x-1)+(y-3)\cdot i,$$

$$z+\bar{z}-1=x+yi+x-yi-1=2x-1.$$

Поэтому уравнение приводится к виду

$$|z+2-i|^2-|z-1-3i|^2=(x+2)^2+(y-1)^2-(x-1)^2-(y-3)^2=$$
$$=6x+4y-5.$$

Следовательно геометрическое место точек представляет собой прямую

$$6x+4y-5=2x-1,\text{ или } y=-x+1.$$

Пример 7. Найдите точки z_{max} и z_{min}, а также значения M и m максимума и минимума выражения $f(z)=max(|z+2-4i|)$ при условии, что число z удовлетворяет уравнению $|z+2-i|^2=4(z+\overline{z})+1$.

Решение. Ограничение приводится к виду

$$x^2+4x+4+y^2-2y+1= \ =8x+1, \text{ или } (x-2)^2+(y-1)^2=1.$$

Это уравнение окружности радиуса $r=1$ с центром в точке $z_0=2+i$. Выражение $|z+2-4i|$ представляет собой расстояние от точки z до точки $z_1=-2+4i$. Максимум и минимум этого расстояния для точек окружности достигается для точек z_{max} и z_{min}, лежащих на прямой, соединяющей точку z_1 с центром окружности z_0. Уравнение этой прямой $y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{5}{2}$. Точки z_{max} и z_{min} являются решениями СЛАУ

$$\begin{cases} (x-2)^2+(y-1)^2=1 \\ y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{5}{2} \end{cases}.$$

Точка $z_{max}=\left(\dfrac{14}{5};\dfrac{2}{5}\right)$ (дальняя от z_1), точка $z_{min}=\left(\dfrac{6}{5};\dfrac{8}{5}\right)$ (ближняя к z_1).

Расстояние между точкой z_1 и центром окружности z_0 равно

$$\rho=|z_0-z_1|=|4-3i|=5.$$

В результате получим

$$M=\rho+r=6,\ m=\rho-r=4.$$

Пример 8. Решите СЛАУ

$$\begin{cases} 3iz_1 \ +(2-i)z_2 =-5 \\ (1+i)z_1 - \qquad z_2 =-2+4i \end{cases}$$

методом Гаусса и методом Крамера.

Решение. (1) Для решения СЛАУ используем схему Гаусса-Жордана:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3i & 2-i & -5 \\ 1+i & \boxed{-1} & -2+4i \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3+4i & 0 & -5+10i \\ 1+i & -1 & -2+4i \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 0 & 1+2i \\ -(1+i) & 1 & 2-4i \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1+2i \\ 0 & 1 & 1-i \end{array}\right).$$

Итак, $z_1=1+2i$, $z_2=1-i$.

(2) Подсчитаем три определителя:

$$\Delta=\begin{vmatrix}3i & 2-i\\ 1+i & -1\end{vmatrix}=-3i-(2-i)(1+i)=-3-4i,$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}-5 & 2-i\\ -2+4i & -1\end{vmatrix}=5-(2-i)(-2+4i)=5-10i,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}3i & -5\\ 1+i & -2+4i\end{vmatrix}=-7-i.$$

По правилу Крамера

$$z_1=\frac{5-10i}{-3-4i}=1+2i,\ z_2=\frac{-7-i}{-3-4i}=1-i.$$

Типовые задачи

1. Вычислите комплексное выражение.
   а) $(2-i)(3+i)-(1+i)(2-5i)$. б) $(3-2i)^2+(1-i)^2$.
   в) $\dfrac{2+3i}{1-2i}$. г) $\dfrac{(2+i)(3+2i)}{2-3i}$.
   д) $\dfrac{(2+i)(3-2i)}{2-3i}$.
2. Найдите модуль комплексного выражения.
   а) $(1+i)^2$. б) $\left(\dfrac{3-4i}{1+2i}\right)^4$.
   в) $\dfrac{(\sqrt{3}+i)^2}{(1+i)^3}$. г) $\dfrac{(1-i)(3i+1)^4(2+4i)^3}{(2-i)^8(1+i)^7}$.
   д) $\left(\dfrac{\sqrt{|3+4i|}}{1-2i}\right)^3$.
3. Найдите тригонометрическую форму числа z.
   а) $z=4$. б) $z=-1+i$. в) $z=\sqrt{3}-i$.
   г) $z=-2i$. д) $z=-1+\sqrt{3}\cdot i$. е) $z=\sqrt{3}-3i$.
   ж) $z=2+3i$. з) $z=-3-2i$.
4. Вычислите и запишите комплексное выражение в алгебраической форме: $z=a+bi$.
   а) $z=\dfrac{(-2+2i)^6(\sqrt{6}-\sqrt{2}\,i)^8}{(-4-4i)^{10}}$. б) $z=\dfrac{(-2+2\sqrt{3}\,i)^{10}(\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i)^8}{(-\sqrt{6}-\sqrt{2}\,i)^9}$.

в) $z=\dfrac{(-4-4i)^{12}(\sqrt{2}+\sqrt{6}\,i)^{13}}{(\sqrt{3}-i)^{15}}$. г) $z=\dfrac{(-1+\sqrt{3}\,i)^{7}(2-2i)^{10}}{(-\sqrt{6}-\sqrt{2}\,i)^{12}}$.

5. Запишите в тригонометрической форме все корни n-ой степени из числа z_0, и выберите корень z_k с заданным свойством.
   а) $z_0=1$, $n=7$, с наименьшей мнимой частью.
   б) $z_0=-3i$, $n=6$, с наименьшей действительной частью.
   в) $z_0=-1-i$, $n=9$, с наибольшей действительной частью.
   г) $z_0=3-\sqrt{3}\cdot i$, $n=9$, с наименьшей действительной частью.

Дополнительно.
   д) $z_0=2\sqrt{2}(1-i)$, $n=5$, с наибольшей мнимой частью.
   е) $z_0=-1-i$, $n=5$, с наибольшей действительной частью.
   ж) $z_0=-1-\sqrt{3}\cdot i$, $n=8$, с наименьшей мнимой частью.

6. Вычислите и запишите число z_0 в алгебраической форме: $z_0=a+b\cdot i$. Запишите в тригонометрической форме корень $z=\sqrt[n]{z_0}$ с определенным свойством.
   а) $z_0=\dfrac{(1-2i)(-\sqrt{3}+i)^{9}}{(\sqrt{2}+\sqrt{6}\,i)^{5}(2+i)}$, $z=\sqrt[12]{z_0}$ с наименьшей мнимой частью.
   б) $z_0=\dfrac{(3-i)(\sqrt{6}+\sqrt{2}\,i)^{7}}{(1-\sqrt{3}\,i)^{9}(1+3i)}$, $z=\sqrt[18]{z_0}$ с наибольшей мнимой частью.

7. Задайте уравнением и изобразите на координатной плоскости геометрическое место точек $z=x+yi$, удовлетворяющих заданному соотношению.
   а) $|z+3+5i|=\left|\left(\dfrac{3-4i}{1-2i}\right)^{2}\right|$. б) $|z+2i|=|z-4i-2|$.
   в) $|z-2+3i|=\sqrt{2}\cdot|z-1|$. г) $|z|^{2}+3z+3\overline{z}=0$.
   д) $2|z+i|=z+\overline{z}$. е) $(z+\overline{z})^{2}=4(z\,\overline{z}-1)$.

Дополнительно.
ж) $2|z-2|^{2}=z+\overline{z}$. з) $2|z-2|=z+\overline{z}+4$. и) $|z-i|^{2}+|z+i|^{2}=10$.

8. Найдите *max* и *min* целевой функции $f(z)$ при заданном условии, а также точки, в которых они достигаются
   а) $f(z)=|z|$ при условии $\dfrac{\pi}{6}\le\arg(z)\le\dfrac{\pi}{4}$, $z+\overline{z}=4$.
   б) $f(z)=z+\overline{z}$ при условии $\dfrac{\pi}{6}\le\arg(z)\le\dfrac{\pi}{3}$, $z\overline{z}=4$.
   в) $f(z)=|3+2i-z|$ при условии $|z|\le 1$.
   г) $f(z)=|1+4i-z|$ при условии $|z-10i+2|\le 1$.

д) $f(z)=|4-3i-z|$ при условии $|z|\le 1$.

е) $f(z)=|z-5-4i|$ при условии $|z-i-1|\le 1$

Дополнительно.

ж) $f(z)=|z+2-3i|$ при условии $|z-2i|^2=3|z+\overline{z}|+4$.

з) $f(z)=|z-1-i|$ при условии $|z+3|^2=4|z-\overline{z}|-7$.

и) $f(z)=\mathrm{Im}(z)$ при условии $2|z-2-i|=|z-\overline{z}|$.

9. Вычислите число a, после чего изобразите на координатной плоскости геометрическое место точек $z=x+y\cdot i$, удовлетворяющих условию с параметром a.

а) $a=\left|\dfrac{(1+3i)^5(i-1)^5}{(2+2i)^3(2+i)^5}\right|$, условие $a\cdot|z-2i|=|z+1|$.

б) $a=\left|\dfrac{(1+2i)^3(5i-1)^5}{(2+3i)^5(3+i)^3}\right|$, условие $a\cdot|z-2|=z+\overline{z}+4$.

10. Решите СЛАУ с комплексными коэффициентами методом Гаусса.

а) $\begin{cases}(1-i)z_1+(2+i)z_2=i\\(2-i)z_1+(2+3i)z_2=i-1\end{cases}$. б) $\begin{cases}iz_1+(1+i)z_2=-i\\(1+i)z_1+iz_2=i\end{cases}$.

в) $\begin{cases}(1-i)z_1-3iz_2=-i\\2z_1-(3+3i)z_2=3-2i\end{cases}$. г) $\begin{cases}(2+i)z_1+z_2=4i-1\\iz_1+(2+i)z_2=3-2i\end{cases}$.

Дополнительно.

д) $\begin{cases}iz_1+(1+i)z_2=2+2i\\2iz_1+(3+2i)z_2=5+3i\end{cases}$.

е) $\begin{cases}(1-i)z_1+(1+i)z_2=1+3i\\(1+i)z_1+(1-i)z_2=1+i\end{cases}$

ж) $\begin{cases}(3-i)z_1+(4+2i)z_2=2+6i\\(4+2i)z_1+(2+3i)z_2=5+4i\end{cases}$.

з) $\begin{cases}2iz_1+(-2+i)z_2=-3+5i\\(-1-i)z_1+(1+2i)z_2=3-i\end{cases}$.

11. Решите СЛАУ с комплексными коэффициентами, используя правило Крамера.

а) $\begin{cases}(2+i)z_1+2iz_2=2-i\\iz_1+(1-i)z_2=4+i\end{cases}$.

б) $\begin{cases}(1+2i)z_1+3iz_2=2-6i\\2iz_1+(1-i)z_2=-6+4i\end{cases}$.

в) $\begin{cases} (2+3i)z_1 + (1+i)z_2 = -3+3i, \\ (1-i)z_1 + (2+i)z_2 = 6-i. \end{cases}$.

г) $\begin{cases} (1-i)z_1 - \quad 3iz_2 = 10-5i \\ (2+i)z_1 + (2+i)z_2 = \ 4+8i \end{cases}$.

12. Найдите фундаментальный набор решений, используя правило Крамера.

а) $\begin{cases} (1+2i)z_1 - (2+i)z_2 + (1-i)z_3 = 0 \\ (3-i)z_1 - 2(1-i)z_2 - (1+i)z_3 = 0 \end{cases}$.

б) $\begin{cases} (1-i)z_1 + \ (2+i)z_2 - \quad iz_3 = 0 \\ (2-i)z_1 + (2+3i)z_2 + (1-i)z_3 = 0 \end{cases}$.

Дополнительные задачи

13. Для числа $z_0 = 2-3i$ укажите геометрическое место точек z, для которых:
   а) число $z_0 z$ действительное.
   б) число $z_0 z$ чисто мнимое.
14. Применив формулу Муавра и бином Ньютона, выразить через $\sin x$ и $\cos x$:
   а) $\sin 3x$ и $\cos 3x$.
   б) $\sin 4x$ и $\cos 4x$.
   в) $\sin 5x$ и $\cos 5x$.
   г) $\sin nx$ и $\cos nx$.
15. Используя формулу Эйлера $e^{ix} = \cos x + i \cdot \sin x$, выразите функции $\sin x$, $\cos x$, $\sin(ix)$, $\cos(ix)$ через экспоненты.
16. Укажите комплексное число, которое является точкой пересечения медиан треугольника с вершинами z_1, z_2, z_3.
17. Запишите в виде уравнения условие, при котором точки z_1, z_2, z_3 лежат на одной прямой.
18. Докажите, что площадь треугольника, образованного точками 0, z_1, z_2 на комплексной плоскости, выражается формулой $S = \frac{1}{2} \cdot \left| Im\left(z_1 \cdot \overline{z_2}\right) \right|$.
19. На комплексной плоскости задан луч $M = \{ z = tz_0, \text{ где } t \in [0; +\infty) \}$. Как, используя комплексные операции, изобразить луч, симметричный лучу M относительно действительной оси?
20. На комплексной плоскости задана прямая $L = \{ z = tz_2, \text{ где } t \in R \}$. Как, используя комплексные операции, изобразить луч, сим-

метричный лучу $M=\{z=tz_1,\ \text{где}\ t\in[0;+\infty)\}$, относительно прямой L?

21. Пусть задан луч $M=\{z=tz_1,\ \text{где}\ t\in[0;+\infty),\ z_1\in C\}$. Второй луч получен отражением луча M от оси OX по правилу: «угол падения равен углу отражения». Как его изобразить, используя комплексные операции?
22. Пусть заданы прямая $L=\{z=tz_2,\ \text{где}\ t\in R, z_2\in C\}$ и луч $M=\{z=tz_1, \text{где}\ t\in[0;+\infty), z_1\in C\}$. Второй луч получен отражением луча M от прямой L по правилу: «угол падения равен углу отражения». Как его изобразить, используя комплексные операции?

Ответы на типовые задачи

1. а) $2i$. б) $5-14i$. в) $-\frac{4}{5}+\frac{7}{5}i$. г) $-1+2i$. д) $\frac{19}{13}+\frac{22}{13}i$.
2. а) 2. б) 25. в) $\sqrt{2}$. г) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$. д) 1.
3. а) $z=4\cdot(\cos 0+i\cdot\sin 0)$.

   б) $z=\sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\cdot\sin\frac{3\pi}{4}\right)$.

   в) $z=2\cdot\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$.

   г) $z=2\cdot\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$.

   д) $z=2\cdot(\cos\frac{2\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{2\pi}{3})$.

   е) $z=2\sqrt{3}\cdot\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

   ж) $z=\sqrt{13}\cdot\left(\cos\left(\arcsin\frac{3}{\sqrt{13}}\right)+i\cdot\sin\left(\arcsin\frac{3}{\sqrt{13}}\right)\right)$.

   з) $z=\sqrt{13}\cdot\left(\cos\left(\pi+\arcsin\frac{2}{\sqrt{13}}\right)+i\cdot\sin\left(\pi+\arcsin\frac{2}{\sqrt{13}}\right)\right)$.
4. а) $z=2^{-4}\cdot(\cos\frac{2\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{2\pi}{3})=2^{-5}(-1+\sqrt{3}\cdot i)$.

   б) $z=2^{\frac{29}{2}}\cdot(\cos\frac{\pi}{6}+i\cdot\sin\frac{\pi}{6})=2^{\frac{27}{2}}(\sqrt{3}+i)$.

в) $z=\left(\sqrt{2}\right)^{69}\cdot\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+i\cdot\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)=\left(\sqrt{2}\right)^{69}\cdot\left(\sqrt{3}-i\right).$

г) $z=2^4\cdot(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\cdot\sin\dfrac{\pi}{6})=2^3(\sqrt{3}+i).$

5. а) $z_k=\cos\dfrac{2\pi k}{7}+i\cdot\sin\dfrac{2\pi k}{7}$, $z_5=\cos\dfrac{10\pi}{7}+i\cdot\sin\dfrac{10\pi}{7}.$

б) $z_k=\sqrt[6]{3}\cdot\left(\cos\dfrac{(3+4k)\pi}{12}+i\cdot\sin\dfrac{(3+4k)\pi}{12}\right),$

$z_2=\sqrt[6]{3}\cdot\left(\cos\dfrac{11\pi}{12}+i\cdot\sin\dfrac{11\pi}{12}\right).$

в) $z_k=\sqrt[18]{2}\cdot\left(\cos\dfrac{(5+8k)\pi}{36}+i\cdot\sin\dfrac{(5+8k)\pi}{36}\right),$

$z_8=\sqrt[18]{2}\cdot\left(\cos\dfrac{23\pi}{12}+i\cdot\sin\dfrac{23\pi}{12}\right).$

г) $z_k=\sqrt[24]{12}\cdot\left(\cos\dfrac{(-1+12k)\pi}{72}+i\cdot\sin\dfrac{(-1+12k)\pi}{72}\right),$

$z_6=\sqrt[24]{12}\cdot\left(\cos\dfrac{71\pi}{72}+i\cdot\sin\dfrac{71\pi}{72}\right).$

д) $z_k=\sqrt[10]{8}\cdot\left(\cos\dfrac{(-1+8k)\pi}{20}+i\cdot\sin\dfrac{(-1+8k)\pi}{20}\right),$

$z_1=\sqrt[10]{8}\cdot\left(\cos\dfrac{7\pi}{20}+i\cdot\sin\dfrac{7\pi}{20}\right).$

е) $z_k=\sqrt[10]{2}\cdot\left(\cos\dfrac{(5+8k)\pi}{20}+i\cdot\sin\dfrac{(5+8k)\pi}{20}\right),$

$z_1=\sqrt[10]{2}\cdot\left(\cos\left(-\dfrac{3\pi}{20}\right)+i\cdot\sin\left(-\dfrac{3\pi}{20}\right)\right).$

ж) $z_k=\sqrt[8]{2}\cdot\left(\cos\dfrac{(2+3k)\pi}{12}+i\cdot\sin\dfrac{(2+3k)\pi}{12}\right),$

$z_2=\sqrt[8]{2}\cdot\left(\cos\dfrac{17\pi}{12}+i\cdot\sin\dfrac{17\pi}{12}\right).$

6. а) $z_0=2\sqrt{2}\cdot(\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\cdot\sin\dfrac{4\pi}{3})=-\sqrt{2}-\sqrt{6}\cdot i,$

$z=\sqrt[8]{2}\cdot(\cos\dfrac{13\pi}{9}+i\cdot\sin\dfrac{13\pi}{9}).$

б) $z_0 = 2\sqrt{2}\cdot(\cos\frac{5\pi}{3} + i\cdot\sin\frac{5\pi}{3}) = \sqrt{2} - \sqrt{6}\cdot i,$

$z = \sqrt[12]{2}\cdot(\cos\frac{29\pi}{54} + i\cdot\sin\frac{29\pi}{54}).$

7. а) $(x+3)^2 + (y+5)^2 = 5^2.$ б) $y = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}x.$

в) $x^2 + (y-3)^2 = (2\sqrt{5})^2.$ г) $(x+3)^2 + y^2 = 3^2.$

д) $\begin{cases} y = -1 \\ x \geq 0 \end{cases}.$ е) $y = \pm 1.$

ж) $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2.$ з) $x = \frac{y^2}{8}.$

и) $x^2 + y^2 = 2^2.$

8. а) $z_{min} = 2 + \frac{2}{\sqrt{3}}i,\ f_{min} = \frac{4}{\sqrt{3}},\ z_{max} = 2 + 2i,\ f_{max} = 2\sqrt{2}.$

б) $z_{min} = 1 + \sqrt{3}i,\ f_{min} = 2,\ z_{max} = \sqrt{3} + i,\ f_{max} = 2\sqrt{3}.$

в) $z_{min} = \frac{3}{\sqrt{13}} + \frac{2}{\sqrt{13}}i,\ f_{min} = \sqrt{13} - 1,$

$z_{max} = -\frac{3}{\sqrt{13}} - \frac{2}{\sqrt{13}}i,\ f_{max} = \sqrt{13} + 1.$

г) $z_{min} = \left(-2 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \left(10 - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)i,\ f_{min} = 3\sqrt{5} - 1,$

$z_{max} = \left(-2 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \left(10 + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)i,\ f_{max} = 3\sqrt{5} + 1.$

д) $z_{min} = \frac{4}{5} - \frac{3}{5}i,\ f_{min} = 4,\ z_{max} = -\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i,\ f_{max} = 6.$

е) $z_{min} = \left(1 + \frac{4}{5}\right) + \left(1 + \frac{3}{5}\right)i,\ f_{min} = 4,\ z_{max} = \left(1 - \frac{4}{5}\right) + \left(1 - \frac{3}{5}\right)i,\ f_{max} = 6.$

ж) $z_{min} = \left(-3 + \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{2}}\right) + \left(2 + \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{2}}\right)i,\ f_{min} = \sqrt{13} - \sqrt{2},$

$z_{max} = \left(3 + \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{2}}\right) + \left(2 - \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{2}}\right)i,\ f_{max} = \sqrt{13} + \sqrt{26}.$

з) $z_{min} = \left(-3 + \frac{12}{5}\right) + \left(4 - \frac{9}{5}\right)i,\ f_{min} = 2,$

$z_{max} = \left(-3 - \frac{12}{\sqrt{41}}\right) + \left(-4 - \frac{15}{\sqrt{41}}\right)i,\ f_{max} = \sqrt{41} + 3.$

и) $z_{min}=2+\frac{1}{2}i$, $f_{min}=\frac{1}{2}$, f_{max} не существует.

9. а) $a=\sqrt{2}$, $(x-1)^2+(y-4)^2=10$. б) $a=2$, $x=\frac{y^2}{8}$.

10. а) $z_1=1$, $z_2=i$. б) $z_1=i$, $z_2=-i$.
в) $z_1=1-i$, $z_2=-\frac{1}{3}$. г) $z_1=3i$, $z_2=2(1-i)$.
д) $z_1=2$, $z_2=1-i$. е) $z_1=i$, $z_2=1+i$.
ж) $z_1=1+i$, $z_2=i$. з) $z_1=1+i$, $z_2=1-i$.

11. а) $z_1=1-2i$, $z_2=1+i$. б) $z_1=1+i$, $z_2=-3-i$.
в) $z_1=2i$, $z_2=1-2i$. г) $z_1=3+i$, $z_2=1+2i$.

12. а) $z_1=1$, $z_2=1$, $z_3=1$. б) $z_1=1$, $z_2=i$, $z_3=1$.

Ответы на дополнительные задачи

13. а) $z=t(2+3i)$, где $t\in R$. б) $z=t(3+2i)$, где $t\in R$.

14. а) $\cos 3x=\cos^3 x-3\cos x\cdot\sin^2 x$, $\sin 3x=3\cos^2 x\cdot\sin x-\sin^3 x$.
б) $\cos 4x=\cos^4 x-6\cos^2 x\cdot\sin^2 x+\sin^4 x$,
$\sin 3x=4\cos^3 x\cdot\sin x-4\cos x\cdot\sin^3 x$.
в) $\cos 5x=\cos^5 x-10\cos^3 x\cdot\sin^2 x+5\cos x\cdot\sin^4 x$,
$\sin 5x=5\cos^4 x\cdot\sin x-10\cos^2 x\cdot\sin^3 x+\sin^5 x$.
г) Указание: Разложите по биному Ньютона:
$$(\cos x+i\cdot\sin x)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(\cos x)^k i^{n-k}(\sin x)^{n-k}.$$

15. Указание. $e^{-ix}=\cos x-i\cdot\sin x$.

16. $\frac{z_1+z_2+z_3}{2}$.

18. Указание: воспользуйтесь представлением чисел в тригонометрической форме.

19. $M=\left\{z=t\overline{z_0}\text{ где }t\in[0;+\infty)\right\}$.

20. $M=\left\{z=t\overline{z_1}z_2^2\text{, где }t\in[0;+\infty)\right\}$.

21. $M=\left\{z=-t\overline{z_0}\text{ где }t\in[0;+\infty)\right\}$.

22. $M=\left\{z=-t\overline{z_1}z_2^2\text{, где }t\in[0;+\infty)\right\}$.

XII. МНОГОЧЛЕНЫ

Определения и формулы

Многочленом (полиномом) степени n с коэффициентами в поле K называется выражение $P(x)=\sum_{k=1}^{n} a_k x^k$, где $a_k \in K$, $a_n \neq 0$. Многочлен называется приведенным, если $a_n = 1$. Степень многочлена обозначается $\deg\left(P(x)\right)$. Под полем K подразумевается поле R действительных чисел или поле C комплексных чисел.

При умножении многочленов их степени складываются.

Деление многочленов с остатком: для любого многочлена $P(x)$ степени n (делимое) и любого многочлена $Q(x)$ степени k (делитель) существует единственный многочлен $S(x)$ степени $\max(n-k,0)$ (частное) и единственный многочлен $R(x)$ степени $r<k$ (остаток) такие, что выполняется тождество $P(x)=S(x)\cdot Q(x)+R(x)$.

Многочлен $P(x)$ нацело делится на многочлен $Q(x)$, если остаток от деления $P(x)$ на $Q(x)$ равен нулю.

Теорема Безу: если $Q(x)=x-a$, то $P(x)=S(x)\cdot Q(x)+P(a)$.

Число a является корнем многочлена $P(x)$ тогда и только тогда, когда $P(x)$ нацело делится на линейный множитель $Q(x)=x-a$.

Число k называется кратностью корня a многочлена $P(x)$, если $P(x)$ нацело делится на $(x-a)^k$, но не делится на $(x-a)^{k+1}$.

Если для многочлена $P(x)$ число a является корнем кратности k, то для производной $P'(x)$ многочлена $P(x)$ число a является корнем кратности $(k-1)$.

Основная теорема высшей алгебры: любой многочлен над полем комплексных чисел степени больше нуля имеет хотя бы один комплексный корень.

Любой многочлен степени n над полем комплексных чисел имеет (с учетом кратностей) ровно n корней (в общем случае комплексных) и раскладывается в произведение линейных множителей: $P(x)=a_n\cdot\prod_{k=1}^{n}(x-x_k)$, где x_k – корни многочлена, среди которых могут быть одинаковые.

Другая запись: $P(x) = a_n \cdot \prod_{j=1}^{m} (x - x_j)^{k_j}$, где x_j – различные корни многочлена, показатели k_j – их кратности, при этом $\sum_{j=1}^{m} k_j = n$.

Для каждого целого m от 1 до n зададим многочлен от n переменных формулой $s_m(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_J \prod_{k=1}^{m} x_{j_k}$. В каждое произведение вида $\prod_{k=1}^{m} x_{j_k}$ входят попарно различные переменные с номерами j_k, а сумма берется по всем возможным наборам $J = \{j_1 < j_2 < \ldots < j_m\}$ номеров переменных (число таких наборов C_n^m). Многочлены s_m не меняются при перестановке любой пары аргументов. Такие многочлены называются симметрическими.

Теорема Виета. Коэффициенты многочлена $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ выражаются через корни $x_1, x_2, \ldots, x_n$ этого многочлена формулами

$$a_{n-m} = (-1)^m a_n \cdot s_m(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Если многочлен $P(x)$ с действительными коэффициентами имеет комплексный корень z кратности k, то сопряженное число $\overline{z}$ также является корнем кратности k.

Каждый многочлен с действительными коэффициентами разлагается в произведение, которое содержит либо линейные множители вида $Q(x) = x - a$ с действительным a, либо квадратичные множители вида $Q(x) = x^2 + px + q$ с действительными p и q, дискриминант которых отрицателен.

Многочлен называется неприводимым над полем K, если он не раскладывается в произведение двух многочленов положительной степени над полем K.

Все неприводимые многочлены над полем комплексных чисел имеют степень один. Все неприводимые многочлены над полем действительных чисел имеют степень один или два.

Примеры решения задач

Пример 1. Найдите остаток от деления многочлена $P(x) = 3x^4 - x^3 - 4x^2 + 2x - 5$ на многочлен $Q(x) = 2x - 4$.

Решение. Остаток от деления многочлена $P(x)$ на многочлен $Q(x) = 2x - 4$ такой же, как остаток от деления многочлена $P(x)$ на многочлен $Q_1(x) = x - 2$. По теореме Безу этот остаток равен

$$P(2) = 3 \cdot 2^4 - 2^3 - 4 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 5 = 7.$$

Пример 2. Многочлен $P(x)$ при делении на $Q_1(x)=x-2$ дает остаток 4, а при делении на $Q_2(x)=x+1$ дает остаток 1. Какой остаток будет у многочлена $P(x)$ при делении на многочлен $Q_3(x)=(x-2)(x+1)$?

Решение. Пусть $P(x)=S(x)\cdot Q_3(x)+R(x)$, где $deg(R(x))<2$, то есть $R(x)=kx+b$. Так как $Q_3(2)=Q_3(-1)=0$, получим систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} P(2)\ =S(2)\cdot Q_3(2)+R(2) \qquad =2k+b=4 \\ P(-1)=S(-1)\cdot Q_3(-1)+R(-1)=-k+b=1 \end{cases}.$$

Ее решение $\begin{cases} k=1 \\ b=2 \end{cases}$, откуда $R(x)=-x+2$.

Пример 3. При каких значениях параметров a и b число $x_0=1$ является корнем многочлена $P(x)=3x^4-bx^3-4ax^2+2x+1$ кратности больше 1?

Решение. Число x_0 является корнем многочлена $P(x)$ кратности больше 1 тогда и только тогда, когда $P(x_0)=0$ и $P'(x_0)=0$. Составим систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} P(1)=3-b-4a+2+1 \quad =0 \\ P'(1)=4\cdot 3-3b-2\cdot 4a+2=0 \end{cases}. \text{ Ее решение } \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}.$$

Пример 4. Пусть многочлен $P(x)=2x^4+12ax^3-4x^2+6ax-3$ зависит от параметра a. Найдите значения a, при котором сумма обратных величин его корней равна 12.

Решение. Для многочлена с ненулевым свободным членом нуль не является корнем. Сделаем замену $x=\frac{1}{y}$. Тогда все $y_k=\frac{1}{x_k}$ будут корнями уравнения с коэффициентами $Q(x)=-3y^4+6ay^3-4y^2+12ay+2$. Сумма корней многочлена $Q(x)$ по обобщенной теореме Виета равна

$$S=-\frac{a_{n-1}}{a_n}=2a=12, \text{ откуда } a=6.$$

Пример 5. Укажите наименьшую степень и все корни приведенного многочлена $P(x)$ с действительными коэффициентами, если известно, что $P(1)=-16$, и его корнями являются числа 2, -3 и $2+i$.

Решение. Если многочлен $P(x)$ с действительными коэффициентами имеет комплексный корень $z=2+i$, то сопряженное число $\bar{z}=2-i$ также является его корнем. Сделаем замену $x=y+1$. Тогда числа 1, -4

и $1 \pm i$ будут корнями многочлена $Q(y)=\sum_{k=1}^{n} a_k (y+1)^k = \sum_{k=1}^{n} b_k y^k$, причем $Q(0)=b_0=P(1)=-16.$

Если бы у многочлена $Q(y)$ были бы только указанные четыре корня, то для свободного члена выполнялось бы равенство

$$b_0=(-1)^4\cdot 1\cdot(-4)\cdot(1-i)(1+i)=-8.$$

Но поскольку $b_0=P(1)=-16$, нужно добавить еще один корень $y_5=-2$, и тогда утверждение теоремы Виета будет верно:

$$b_0=(-1)^5\cdot 1\cdot(-4)\cdot(1-i)(1+i)(-2)=-16.$$

Степень искомого многочлена $P(x)$ равна пяти, и у него, кроме четырех перечисленных ранее, имеется корень $x_5=y_5+1=-2$.

Пример 6. У многочлена $P(x)=2x^n-20x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_1x+a_0$ с действительными коэффициентами есть корни: 3 и $i-1$ кратности один, $2+i$ и i кратности два, 1 кратности три. Найдите минимальную степень такого многочлена, его коэффициент a_0, а также его разложение в произведение неприводимых многочленов с действительными коэффициентами.

Решение. Если многочлен $P(x)$ с действительными коэффициентами имеет комплексный корень z кратности k, то сопряженное число $\bar{z}$ также является его корнем кратности k. Значит, многочлен $P(x)$ имеет корни: 3 и $-1\pm i$ кратности один, $2\pm i$ и $\pm i$ кратности два, 1 кратности три. Их сумма и произведение

$$\Sigma=3+((-1+i)+(-1-i))+2((2+i)+(2-i))+2(i+(-i))+3\cdot 1=12,$$

$$\Pi=3\cdot|1+i|^2\cdot|2+i|^4\cdot|i|^4\cdot 1^3=150.$$

Если бы не было других корней, кроме указанных выше (их общее число 14), то по теореме Виета было бы $a_{n-1}=-a_n\cdot\Sigma=-2\cdot 12=-24.$ Но так как $a_{n-1}=-20,$ надо добавить еще один корень $z_{15}=-2.$

Итак, степень многочлена равна 15. По теореме Виета

$$a_0=(-1)^{15}\cdot a_n\cdot(\Pi\cdot(-2))=(-1)\cdot 2\cdot(-300)=600.$$

Для каждой пары сопряженных корней $p\pm iq$ в разложение многочлена входит неприводимый множитель $x^2-2px+(p^2+q^2)$.Следовательно, разложение имеет вид

$$P(x)=2(x-3)(x-1)^3(x+2)(x^2+2x+2)(x^2-4x+5)^2(x^2+1)^2.$$

Типовые задачи

1. Найдите частное $S(x)$ и остаток $R(x)$ от деления многочлена $P(x)$ на $Q(x)$.
   а) $P(x)=x^6+3x^4-2x^2+x-4$, $Q(x)=x^3+2x^2-x-2$.
   б) $P(x)=x^5+3x^3-9ix+2-i$, $Q(x)=x^3+x^2-i$.
2. Найдите остаток $R(x)$ от деления многочлена $P(x)$ на многочлен $Q(x)=ax+b$.
   а) $P(x)=x^4+3x^3-2x^2+x-4$, $Q(x)=x+2$.
   б) $P(x)=8x^4+2x^2-6x+1$, $Q(x)=2x-1$.
   в) $P(x)=x^5-x^3-9ix+2-i$, $Q(x)=x-1-i$.
   г) $P(x)=6ix^{11}-4x^7-2ix^3+2-i$, $Q(x)=2x-1+\sqrt{3}i$.
   д) $P(x)=64x^9+48ix^7+4(1+i)x+6+7i$, $Q(x)=2x+1+i$.

Дополнительно.
   е) $P(x)=2x^{14}-6ix^5+4x+\sqrt{3}-i$, $Q(x)=2x+\sqrt{3}-i$.
   ж) $P(x)=64ix^{11}-24x^5+2(1+i)x+2-i$, $Q(x)=2x+1-i$.

3. Многочлен $P(x)$ при делении на $Q_1(x)$ дает остаток $R_1(x)$, а при делении на $Q_2(x)$ дает остаток $R_2(x)$. Какой остаток $R_3(x)$ будет при делении многочлена $P(x)$ на многочлен $Q_3(x)=Q_1(x)\cdot Q_2(x)$?
   а) $Q_1(x)=x-2$, $R_1(x)=3$, $Q_2(x)=x+3$, $R_2(x)=-2$.
   б) $Q_1(x)=x-1-i$, $R_1(x)=2-i$, $Q_2(x)=2x-3+i$, $R_2(x)=1+2i$.
   в) $Q_1(x)=x-1+i$, $R_1(x)=2+i$, $Q_2(x)=x-2+i$, $R_2(x)=1+i$.
   г) $Q_1(x)=x^2+1$, $R_1(x)=x-1$, $Q_2(x)=x+3$, $R_2(x)=-14$.
4. Многочлен $P(x)$ при делении на $Q_1(x)$ дает остаток $R_1(x)$, при делении на $Q_2(x)$ дает остаток $R_2(x)$, а при делении на $Q_3(x)$ дает остаток $R_3(x)$. Какой остаток $R_4(x)$ будет при делении многочлена $P(x)$ на многочлен $Q_4(x)=Q_1(x)\cdot Q_2(x)\cdot Q_3(x)$?
   а) $Q_1(x)=x-2$, $R_1(x)=3$, $Q_2(x)=x+3$, $R_2(x)=18$,
   $Q_3(x)=x+1$, $R_2(x)=6$.
   б) $Q_1(x)=x-i$, $R_1(x)=1$, $Q_2(x)=x-1$, $R_2(x)=2-i$.
   $Q_3(x)=x-1+i$, $R_3(x)=-3i$.
5. Найдите все значения параметра a, при котором многочлен $P(x)$ имеет кратные корни.
   а) $P(x)=2x^3-9x^2-24x+a$.
   б) $P(x)=x^3-3x^2+6x+a$.
   в) $P(x)=2x^3-9x^2+6(3-i)x-a$.
6. Найдите значения параметров a и b, для которых число x_0 является корнем многочлена $P(x)$ кратности больше 1.

а) $P(x)=2x^4-3ax^3+bx^2-3x+2,\ x_0=1.$

б) $P(x)=x^5-x^4-bx^3-2ax^2+5x+7,\ x_0=-1.$

в) $P(x)=x^5+3x^4-ax^3+3bx^2+5x+4,\ x_0=1.$

г) $P(x)=x^4-2ax^3+ibx^2+6(1+i)x+4(1-i),\ x_0=-1.$

Дополнительно.

д) $P(x)=x^5-3ax^4-2x^3-2x^2+7bx+7,\ x_0=1.$

е) $P(x)=x^5-3ax^4-3x^3-3bx^2-2x+2,\ x_0=-1.$

ж) $P(x)=x^5+2bx^4-2ax^3-2x^2+x+2,\ x_0=-1.$

з) $P(x)=x^4+iax^3-2x^2-b(1-i)x,\ x_0=1+i.$

7. Найдите значение параметра a, при котором сумма квадратов корней многочлена $P(x)$ равна числу b.

а) $b=8-2i$,
$P(x)=x^6+(1+i)x^5-2ax^4-(2-i)x^3-2ix^2-(1+i)x-a.$

б) $b=2-2i$,
$P(x)=4x^5+(16-8i)x^4+ax^3+(1-i)x^2+(3-4i)x+2+i.$

в) $b=\left(\dfrac{-\sqrt{3}+i}{2}\right)^9$,

$P(x)=4x^6+(1+i)x^5+ax^4+3x^3+(8-4i)x+4-2i.$

Дополнительно.

г) $b=3-4i$,
$P(x)=4x^5+(12+4i)x^4-ax^3+(1-2i)x^2+(4+3i)x-3+ai.$

д) $b=\left(\dfrac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)^{10}$, $P(x)=2x^5-(6+2i)x^4-2iax^3+7x^2-5ix+a.$

8. Укажите степень и все дополнительные корни приведенного многочлена $P(x)$ наименьшей степени со следующими условиями:

а) числа $2,3$ и -2 являются его корнями, $P(0)=36.$

б) числа $2,-2$ и -3 являются его корнями, $P(0)=-12.$

в) числа $1,2$ и 3 являются его корнями, и $P'(0)=16.$

г) числа $-1,3$ и 5 являются его корнями, и $P(1)=-16.$

Дополнительно.

д) числа $2,3$ и $1-i$ являются его корнями, и $P(0)=36.$

е) числа $-1,3,\ 2-i$ и $2+i$ являются его корнями, и $P(1)=32.$

ж) числа $-1,3,\ 2-i$ и $2+i$ являются его корнями, и $P'(1)=16.$

9. Для многочлена с действительными коэффициентами $P_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kx^k$ степени n известен старший коэффициент и несколько корней с их

кратностями. Найдите минимальную степень такого многочлена и его коэффициенты a_0 и a_{n-1}.

а) $a_n = 1$; корни 2 и $i+1$ кратности один; корни $2-i$ и i кратности два; корень 1 кратности три.

б) $a_n = 1$; корень $i+1$ кратности один; корни $i-1$ и $2-i$ кратности два; корень 1 кратности три.

в) $a_n = 3$; корни 3 и $1+i$ кратности один; корни $2-i$, i и $-1-i$ кратности два; корень 2 кратности три.

г) $a_n = 3$; корни $3-i$, i и $3+i$ кратности два; корни 1 и $i-1$ кратности три.

д) $a_n = 2$; корень $-i$ кратности два; корни $1+i$ и $1-i$ кратности три; корень 2 кратности пять.

10. Многочлен с действительными коэффициентами $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ удовлетворяет определенным ограничениям, указанным ниже. Найдите минимальную степень такого многочлена, дополнительные корни, незаданные коэффициенты a_0, a_{n-1} и a_n. Укажите его разложение в произведение неприводимых многочленов с действительными коэффициентами.

а) $a_0 = 250$; корень 2 кратности один; корни $2-i$ и i кратности два; корень 1 кратности три.

б) $a_n = 1$, $a_0 = 150$; корень 2 кратности один; корни $2-i$ и i кратности два; корень 1 кратности три.

в) $a_n = 1$, $a_{n-1} = -16$; корень $3-i$ кратности один; корни $2+i$ и 2 кратности два; корень $-i$ кратности три.

г) $a_n = 4$, $a_{n-1} = -40$, $a_0 = -4800$; корни $1-i$ и -2 кратности один; корни 2 и $2-i$ кратности два.

Дополнительно.

д) $a_n = 1$, $a_0 = 2000$; корень $3-i$ кратности один; корни $2+i$ и 2 кратности два; корень $-i$ кратности три.

е) $a_n = 2$, $a_{n-1} = -38$; корни 1 и $2+i$ кратности один; корни $3-i$ и 2 кратности два; корень $-i$ кратности четыре.

ж) $a_n = -3$, $a_0 = -9000$; корни $-i$ и $3-i$ кратности один; корни $2-i$ и 2 кратности два; корень -1 кратности шесть.

з) $a_n = 1$, $a_{n-1} = -26$; корни $2+i$ и $4-i$ кратности один; корни $3+i$ и 2 кратности два; корень $-i$ кратности три.

и) $a_n = 2$, $a_{n-1} = -36$; корни $2+i$ и $4-i$ кратности один; корни $1-i$ и 1 кратности два; корень $-i$ кратности три.

Дополнительные задачи

11. Известно, что $P(1)=2$, $P'(1)=3$, $P''(1)=4$. Найдите остаток от деления многочлена $P(x)$ на $(x-1)^3$.
12. Найдите сумму действительных частей всех корней 27 степени из числа $z=(1-i)^{11}$.
13. Укажите многочлен $P(x)$ степени не выше n, для которого $P(k)=0$ для целых $1\le k\le n$, но $P(0)=1$.
14. Разложите многочлен на неприводимые многочлены с действительными коэффициентами:
    а) $x^{12}-1$;
    б) x^6+1;
    в) $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$;
    г) $x^5-x^4+x^3-x^2+x-1$.
15. Для многочлена $P(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x+a_0$, где $a_0\ne 0$, укажите другой многочлен, все корни которого являются обратными величинами корней исходного многочлена.
16. Для многочлена $P(x)=17x^2-11x+3$ укажите другой многочлен, два корня которого являются квадратами обратных величин корней исходного многочлена.
17. Выразите через коэффициенты квадратного трехчлена $P(x)=ax^2+bx+c$, где $a\ne 0$, $c\ne 0$:
    а) Сумму обратных величин всех его корней.
    б) Сумму квадратов всех его корней.
    в) Сумму кубов всех его корней.
18. Для многочлена $P(x)=x^2+px+q$ укажите другой многочлен, все корни которого:
    а) Являются корнями исходного многочлена с противоположным знаком.
    б) Являются квадратами корней исходного многочлена.
    в) Являются кубами корней исходного многочлена.
19. Выразите через коэффициенты многочлена $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, где $a\ne 0$, $d\ne 0$:
    а) сумму обратных величин всех его корней.
    б) сумму квадратов всех его корней.
    в) сумму кубов всех его корней.
20. Для многочлена $P(x)=x^3+ax^2+bx+c$ укажите другой многочлен, все корни которого:

а) Являются корнями исходного многочлена с обратным знаком;
б) Являются квадратами корней исходного многочлена;
в) Являются попарными произведениями корней исходного многочлена;

Ответы на типовые задачи

1. а) $S(x)=x^3-2x^2+8x-16$, $R(x)=34x^2+x-36$.
   б) $S(x)=x^2-x+4$, $R(x)=(-4+i)x^2-10ix+2+3i$.
2. а) $R(x)=-22$. б) $R(x)=-1$.
   в) $R(x)=9-16i$. г) $R(x)=-3\sqrt{3}+\left(2+2\sqrt{3}\right)i$.
   д) $R(x)=1-2i$. е) $R(x)=\left(4-\sqrt{3}\right)+\left(1-4\sqrt{3}\right)i$.
   ж) $R(x)=-4+3i$.
3. а) $R_3(x)=x+1$. б) $R_3(x)=-2x+4+i$.
   в) $R_3(x)=-x+3$. г) $R_3(x)=-x^2+x-2$.
4. а) $R_3(x)=x^2-2x+3$. б) $R_3(x)=x^2-ix+1$.
5. а) $a_1=-13$, $a_2=112$. б) $a_1=-4-2i$, $a_2=-4+2i$.
   в) $a_1=8-10i$, $a_2=19-8i$.
6. а) $a=1$, $b=2$. б) $a=7$, $b=14$.
   в) $a=-4$, $b=-\dfrac{17}{3}$. г) $a=-1$, $b=i$.
   д) $a=-1$, $b=-1$. е) $a=-1$, $b=3$.
   ж) $a=-1$, $b=2$. з) $a=-2+i$, $b=1-i$.
7. а) $a=2-i$. б) $a=20-28i$.
   в) $a=\dfrac{9}{4}\cdot i$. г) $a=-10-20i$.
   д) $a=-7+8i$.
8. а) $n=4$, $x_4=-3$.
   б) $n=3$, дополнительные корни не нужны.
   в) $n=4$, $x_4=-2$.
   г) $n=4$, $x_4=2$.
   д) $n=4$, $x_4=3(1+i)$.
   е) $n=5$, $x_5=5$.
   ж) $n=5$, $x_5=-2$.
9. а) $n=14$, $a_0=100$, $a_{n-1}=-15$.
   б) $n=13$, $a_0=-200$, $a_{n-1}=-9$.
   в) $n=18$, $a_0=2^6\cdot 3^2\cdot 5^2$, $a_{n-1}=-45$.

г) $n=17$, $a_0=-2400$, $a_{n-1}=-18$.

д) $n=15$, $a_0=-2^9$, $a_{n-1}=-32$.

10. а) $n=12$, $a_n=5$, $a_{n-1}=-65$;
$P(x)=5(x-2)(x^2-4x+5)^2(x^2+1)^2(x-1)^3$.

б) $n=13$, $x_{13}=-3$, $a_{n-1}=-10$;
$P(x)=(x-2)(x^2-4x+5)^2(x^2+1)^2(x-1)^3(x+3)$.

в) $n=15$, $x_{15}=-2$, $a_0=2000$;
$P(x)=(x^2-6x+10)(x^2-4x+5)^2(x-2)^2(x^2+1)^3(x+2)$.

г) $n=11$, $x_{10}=-3$, $x_{11}=1$;
$P(x)=4(x^2-2x+2)(x+2)(x-2)^2(x^2-4x+5)^2(x+3)(x-1)$.

д) $n=15$, $x_{15}=-2$, $a_{n-1}=-16$;
$P(x)=(x^2-6x+10)(x^2-4x+5)^2(x-2)^2(x^2+1)^3(x+2)$.

е) $n=18$, $x_{18}=-2$, $a_0=-8000$;
$P(x)=2(x-1)(x^2-4x+5)(x^2-6x+10)^2(x-2)^2(x^2+1)^4(x+2)$.

ж) $n=17$, $x_{17}=-3$, $a_{n-1}=-9$;
$P(x)=-3(x-1)(x^2-4x+5)(x^2-6x+10)^2(x-2)^2(x^2+1)^4(x+2)$.

з) $n=17$, $x_{17}=-2$, $a_0=6800$;
$P(x)=(x^2-4x+5)(x^2-8x+17)(x^2-2x+2)^2(x-1)^2(x^2+1)^3$.

и) $n=16$, $a_0=340$;
$P(x)=2(x^2-4x+5)(x^2-8x+17)(x^2-2x+2)^2(x-1)^2(x^2+1)^3$.

Ответы на дополнительные задачи

11. $R(x)=2(x-1)^2+3(x-1)+2$.
12. Нуль.
13. $P(x)=\dfrac{(1-x)(2-x)\ldots(n-x)}{n!}$.
14. а) Указание: сгруппируйте множители вида $(x-a)(x-\overline{a})$.

б) Указание: сгруппируйте множители вида $(x-a)(x-\overline{a})$.

в) Указание: умножьте и разделите на $(x-1)$, после чего сгруппируйте в числителе множители вида $(x-a)(x-\overline{a})$.

г) Указание: умножьте и разделите на $(x+1)$, после чего сгруппируйте в числителе множители вида $(x-a)(x-\overline{a})$.

15. $Q(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$.

16. $Q(x)=9x^2-19x+1.$

17. а) $-\dfrac{b}{c}.$ б) $\dfrac{b^2-2ac}{a^2}.$ в) $\dfrac{-b\left(b^2-3ac\right)}{a^3}.$

18. а) $Q\left(x\right)=x^2-px+q.$

 б) $Q\left(x\right)=x^2-\left(p^2-2q\right)x+q^2.$

 в) $Q\left(x\right)=x^2+\left(p^3-3pq\right)x+q^3.$

19. а) $-\dfrac{c}{d}.$ б) $\dfrac{b^2-2ac}{a^2}.$ в) $\dfrac{-b^3+3abc-3a^2d}{a^3}.$

20. а) $Q\left(x\right)=x^3-ax^2+bx-c.$

 б) $Q\left(x\right)=x^3-\left(a^2-2b\right)x^2+\left(b^2+2c\right)x-c^2.$

 в) $Q\left(x\right)=x^3-bx^2+acx-c^2.$

Учебно-методическое пособие

Анно Е.И., Демушкина О. И., Кострикин И. А., Курош Н. А.,
Любкин А. А., Павлова Л. С., Ромашова В. М.

ЗАДАЧИ ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ

ЧАСТЬ 1

ISBN 978-5-906932-53-2

9 785906 932532