Министерство образования
и науки Российской Федерации

Уральский федеральный университет
имени первого Президента
России Б.Н. Ельцина

Т.А. Матвеева, Н.Г. Рыжкова

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Учебный электронный текстовый ресурс

Учебное пособие для бакалавров, специалистов, обучающихся по программам технических направлений.

Научный редактор: профессор, доктор педагогических наук А.Г. Гейн

Подготовлено в Институте фундаментального образования

Екатеринбург

2017

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

1.1. Определение производной функции

Рассмотрим следующую задачу, которая позволит лучше понять смысл производной.

Материальная точка совершает прямолинейное неравномерное движение. Пусть s_0 – путь, пройденный за время t_0, s – путь, пройденный за время t. Отрезок пути $\Delta s = s - s_0$ точка пройдет за промежуток времени $\Delta t = t - t_0$.

Средняя скорость на интервале времени от t_0 до t, или на участке пути Δs, равна:

$$v_{cp} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Средняя скорость зависит от Δt. При уменьшении Δt соответствующий промежуток пути Δs уменьшается. Мгновенная скорость движения в момент времени t_0:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Перейдем к определению понятия производной.

Рассмотрим функцию $f(x)$, определенную на интервале (a,b), $x \in (a,b)$ – фиксированная точка. Число Δx таково, что точка $x + \Delta x \in (a,b)$.

Δx – ***приращение аргумента*** в точке x;

$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ – ***приращение функции***, соответствующее Δx;

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ – отношение приращений.

Отношение $\dfrac{\Delta y(x, \Delta x)}{\Delta x}$ зависит от x и Δx.

Определение

Производной функции $f(x)$ ***в точке*** x называется предел отношения приращений

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

при условии, что он существует.

Обозначение

$$\boxed{y' \equiv \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.}$$

Примеры

1. $y = \sin x$.

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \cos x.$$

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x.}$$

2. $y(x) = \log_a x$, $0 < a \neq 1$.

$$\Delta y = \log_a(x+\Delta x) - \log_a x = \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right),$$

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{\Delta x \to 0} \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \log_a\left(\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}\log_a e.$$

$$\boxed{(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e.}$$

Частный случай при $a = e$:

$$\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}.}$$

1.2. Односторонние производные функции

Односторонними производными называются односторонние пределы:

$$y'_{-}(x) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ – левая производная в точке } x,$$

$$y'_{+}(x) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ – правая производная в точке } x.$$

Для существования производной функции $y = f(x)$ в точке x необходимо и достаточно существование и равенство односторонних производных функции в точке x.

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

2.1. Определение дифференциала функции.

2.2. Дифференциал независимой переменной.

2.1. Определение дифференциала функции

Пусть $y = f(x)$ дифференцируема на (a,b).

$\forall x \in (a,b)\ \exists \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \Rightarrow \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$,

α – бесконечно малая при $\Delta x \to 0$.

Тогда

$$\boxed{\Delta y = \underbrace{f'(x) \cdot \Delta x}_{dy} + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x.} \qquad (*)$$

Введем обозначение $dy = f'(x) \cdot \Delta x$.

В общем случае $f'(x) \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{dy}{\Delta x} = f'(x) \Rightarrow$

$$\boxed{dy \text{ и } \Delta x \text{ – бесконечно малые одного порядка.}}$$

$\alpha \cdot \Delta x = o(\Delta x)$ – бесконечно малая более высокого порядка малости чем Δx, т. к. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = 0$.

Итак,

$$\boxed{\begin{gathered}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{dy}{\Delta x}=f'(x)\neq 0\,,\\ \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha\Delta x}{\Delta x}=0\,.\end{gathered}}$$

Определение

Величина $dy=f'(x)\cdot\Delta x$ называется ***дифференциалом функции*** $y=f(x)$ в точке x.

Из равенства (*) следует, что dy – ***главная линейная часть приращения функции***.

Главная, т. к. остаток $\alpha\Delta x$ – бесконечно малая более высокого порядка малости.

Линейная, т. к. dy пропорционален Δx в первой степени.

Теорема

Необходимым и достаточным условием существования дифференциала является существование производной функции.

2.2. Дифференциал независимой переменной

Рассмотрим $y=x$, $y'_x=1$, $\Delta y=\Delta x \;\Rightarrow\; dy=\Delta x$ (см. (*)).

Вывод

$dx=\Delta x$ $\Rightarrow$ дифференциал независимой переменной равен ее приращению.

С учетом полученного: $dy=y'_x\cdot\Delta x=y'_x\cdot dx$.

$$\boxed{dy=y'_x\cdot dx}$$

– формула для вычисления первого дифференциала.

Вывод

Дифференциал функции равен произведению производной этой функции на дифференциал независимой переменной.

Отсюда

$$\boxed{y'_x=\frac{dy}{dx}}$$

– производная есть отношение дифференциалов.

3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ И ДИФФЕРЕНЦИАЛА

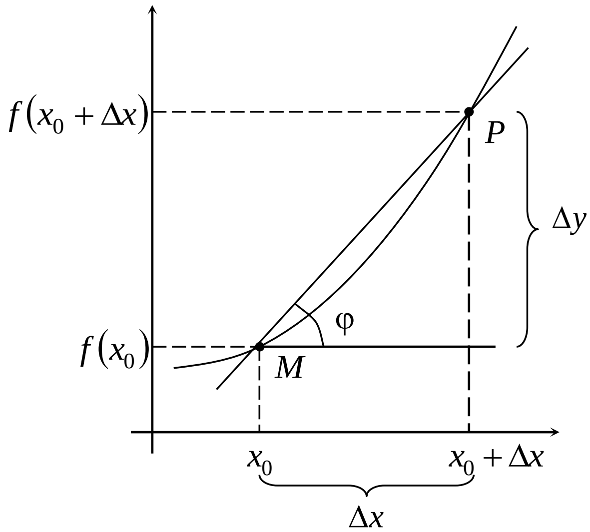
3.1. Геометрический смысл производной.

3.2. Геометрический смысл дифференциала.

3.3. Приближенное вычисление малых приращений функции.

3.1. Геометрический смысл производной

Рассмотрим график функции $y = f(x)$.



Точки графика $P(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$, $M(x_0, f(x_0))$ принадлежат секущей MP.

Определение

Касательной к графику $y = f(x)$ в точке x_0 называется предельное положение секущей при $\Delta x \to 0$ ($P \to M$).

Теорема

Если функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 производную $f'(x_0)$,

то график функции в точке x_0 имеет касательную с угловым коэффициентом $f'(x_0)$.

Доказательство

Угловой коэффициент секущей равен $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Если $\Delta x \to 0$, то $\operatorname{tg}\varphi \to \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$.

Таким образом:

1. существует предельное положение секущей;
2. $k_{касат} = f'(x_0)$.

Уравнение касательной к графику функции в точке $M(x_0, f(x_0))$

$$\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).}$$

Определение

Нормалью к графику функции $f(x)$ в точке x_0 называется прямая, проходящая через точку $M(x_0, f(x_0))$ перпендикулярно касательной в этой точке.

Угловой коэффициент нормали связан с угловым коэффициентом касательной:

$$k_н = -\frac{1}{f'(x_0)}.$$

Уравнение нормали к графику функции в точке $M(x_0, f(x_0))$:

$$\boxed{y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0).}$$

Пример

Составить уравнения касательной и нормали к графику функции $y = \ln x$ в точке $x = 1$.

Решение

$y(1) = 0$.

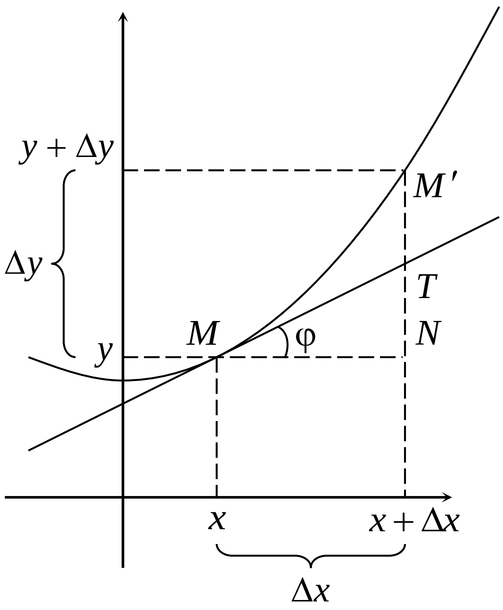
$y' = \frac{1}{x}$, $y'(1) = 1$.

$\boxed{y = x - 1}$ – уравнение касательной.

$\boxed{y = -(x - 1)}$ – уравнение нормали.

3.2. Геометрический смысл дифференциала

Рассмотрим график функции $y = f(x)$. Точки графика – $M(x, y)$, $M'(x + \Delta x, y + \Delta y)$.



MT – касательная к графику в точке M.

В треугольнике ΔMNT: $MN=\Delta x$, $NT=\Delta x\cdot \operatorname{tg}\varphi=\Delta x\cdot y'_x$. Таким образом

$$\boxed{NT=dy.}$$

Вывод

Дифференциал функции $y=f(x)$ в точке x есть приращение ординаты касательной к графику этой функции, когда x получает приращение Δx.

Приращение функции $NM'=\Delta y\neq NT$.

$$\boxed{\Delta y\neq dy.}$$

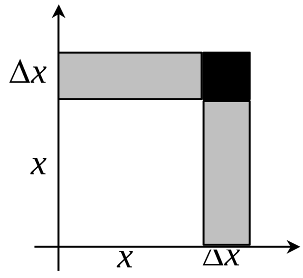
Для вогнутой кривой (выпуклой вниз) $\Delta y>dy$.

Для выпуклой кривой (выпуклой вверх) $\Delta y<dy$.

Для линейной функции $y=ax+b$: $\Delta y=dy$.

Пример

Рассмотрим функцию $y=x^2$.



$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2$.

$\Delta y = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$.

$dy = 2x \cdot \Delta x$.

Δy – площадь окрашенной части квадрата, dy – та же площадь за вычетом $(\Delta x)^2$.

Если $x = 20$, $\Delta x = 0{,}1$,

$$\Delta y = 2 \cdot 20 \cdot 0{,}1 + (0{,}1)^2 = 4{,}01.$$

$$dy = 2 \cdot 20 \cdot 0{,}1 = 4{,}00.$$

Итак, Δy и dy отличаются на величину $\alpha = 0{,}01$, что существенно меньше Δx.

3.3. Приближенное вычисление малых приращений функции

Если Δx – мало, то $\Delta f(x) \approx df(x)$.

$$\boxed{f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x.}$$

Геометрический смысл приближенного равенства: данная функция на участке Δx заменяется своей касательной, то есть, линейной функцией.

Примеры

1. Вычислить приближенно $\sqrt[3]{1{,}1}$.

Решение

$y = \sqrt[3]{x}$, $x = 1$, $\Delta x = 0{,}1$.

$y(x + \Delta x)$ – ?

$$y(x + \Delta x) \approx y(x) + y'(x)\Delta x = \sqrt[3]{1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\Bigg|_{x=1} \cdot 0{,}1 = 1{,}033.$$

2. Вычислить приближенно $\sin 46°$.

Решение

$y = \sin x$, $x = 45°$, $\Delta x = 1°$.

$$\sin(45° + 1°) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}\right) \approx \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\frac{\pi}{180} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{180} \approx$$

$$\approx 0{,}7194.$$

4. ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ. ПРОИЗВОДНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

4.1. Свойства производных (правила дифференцирования)

1. $f(x)=c,\ f'(x)=0$.

2. $\left(f(x)\pm g(x)\right)' = f'(x)\pm g'(x)$.

3. $\left(f(x)\cdot g(x)\right)' = f'(x)\cdot g(x)+ f(x)\cdot g'(x)$.

4. $\left(c\cdot f(x)\right)' = c\cdot f'(x)$.

5. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)\cdot g(x)- f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$ $(g(x)\neq 0)$.

Пример

$$y = 3\sin x + 5\log_2 x - 10.$$

$$y' = 3\cos x + \frac{5}{x}\log_2 e.$$

Свойства дифференциалов

Свойства дифференциалов аналогичны свойствам производных (предполагаем, что все рассматриваемые функции дифференцируемы).

1°. $y=c,\ y'=0,$

$$\boxed{dy = 0.}$$

2°. $y=u+v,\ y'=u'+v',$

$$\boxed{dy = du + dv.}$$

3°. $y_1=u+c,\ y_2=u,$

$$\boxed{dy_1 = dy_2.}$$

4°. $y=cu,\ y'=cu',$

$$\boxed{dy = c\,du}$$

– константу можно выносить за знак дифференциала.

5°.

$$\boxed{d(uv) = v\,du + u\,dv.}$$

6°.

$$\boxed{d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}},\ v(x) \neq 0\,.$$

4.2. Производная обратной функции

Теорема

Если

1) $f(x)$ строго монотонна и непрерывна в окрестности точки x_0;
2) $\exists f'(x_0) \neq 0,$

то

1) $\exists\left(f^{-1}(y)\right)$ в окрестности точки $y_0 = f(x_0)$;
2) $\boxed{\exists\left(f^{-1}(y)\right)'_{y=y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}.}$

Доказательство

Из условия 1 следует существование непрерывной обратной функции $x = f^{-1}(y)$ в окрестности точки $y_0 = f(x_0)$ (см. «Элементарные функции» в «Математический анализ. Введение»).

Приращению аргумента Δy соответствует приращение функции Δx. Рассмотрим их отношение

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}. \qquad (*)$$

Из строгой монотонности функции $f(x)$ следует, что условие $\Delta y \neq 0$ влечет за собой $\Delta x \neq 0$.

Устремим Δy к нулю. Из непрерывности функции $x = f^{-1}(y)$ следует, что $\Delta x \to 0$.

Но при $\Delta x \to 0$, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \to f'(x_0)$, следовательно, $\dfrac{\Delta x}{\Delta y} \to \dfrac{1}{f'(x_0)}$ (см. (*)).

То есть $\left(f^{-1}(y)\right)'_{y=y_0} = \dfrac{1}{f'(x_0)}$, что и требовалось доказать.

Применение

1. $y = a^x \;\Rightarrow\; x = \log_a y$.

$$\left(a^x\right)' = \frac{1}{(\log_a y)'} = \frac{1}{\frac{1}{y}(\log_a e)} = \frac{y}{\log_a e} = a^x \ln a.$$

$$\boxed{\left(a^x\right)' = a^x \ln a.}$$

$$\boxed{\left(e^x\right)' = e^x.}$$

2. $y = \arcsin x \;\Rightarrow\; x = \sin y$.

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\boxed{(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.}$$

3. $$\boxed{(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.}$$

4. $$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$\boxed{(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.}$$

5. $$\boxed{(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.}$$

4.3. Производные элементарных функций

Поиск производной по определению в большинстве случаев достаточно трудоемок. На практике для нахождения производных функций используются правила дифференцирования, производные элементарных функций (вывод части формул был приведен выше) и способы вычисления производных.

Перечислим производные элементарных функций, которые являются основой для нахождения производных сложных функций.

1. $\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$, $\alpha \neq 0$.

2. $\left(a^{x}\right)' = a^{x} \ln a$, $a > 0$;

   $\left(e^{x}\right)' = e^{x}$.

3. $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x} \log_a e$, $a > 0$, $a \neq 1$;

   $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$.

4. $\left(\sin x\right)' = \cos x$.

5. $\left(\cos x\right)' = -\sin x$.

6. $\left(\operatorname{tg} x\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

7. $\left(\operatorname{ctg} x\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

8. $\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

9. $\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

10. $\left(\operatorname{arctg} x\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

11. $\left(\operatorname{arcctg} x\right)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

5. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ, ФУНКЦИИ, ЗАДАННОЙ НЕЯВНО И ПАРАМЕТРИЧЕСКИ

5.1. Производная сложной функции.

5.2. Производная неявной функции.

5.3. Логарифмическая производная.

5.4. Производная функции, заданной параметрически.

5.1. Производная сложной функции

Теорема

Если

1) $y = f[\varphi(t)]$ – сложная функция (t – независимая переменная, φ – промежуточный аргумент);

2) $\exists f'(x_0)$ и $\varphi'(t_0)$, где $x_0 = \varphi(t_0)$,

то

$$\exists \{f[\varphi(t)]\}'\Big|_{t=t_0} = f'(x_0)\cdot\varphi'(t_0).$$

Доказательство

Рассмотрим $t_0 + \Delta t \Rightarrow \Delta x = \varphi(t_0 + \Delta t) - \varphi(t_0)$.

$\Delta x \Rightarrow \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Рассмотрим $\dfrac{\Delta y}{\Delta t} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$.

Пусть $\Delta t \to 0$.

Но, так как $\exists \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \Delta x \to 0$.

При этом $\exists \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow$

$$\exists \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} = f'(x_0)\cdot\varphi'(t_0) = \{f[\varphi(t_0)]\}',$$

что и требовалось доказать.

Замечание

В приведенном доказательстве независимая переменная обозначалась символом t, промежуточная переменная – символом x. Чаще встречается $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$. Тогда

$$\boxed{y' = \{f[\varphi(x)]\}' = f'(u) \cdot u'(x).}$$

Пример

$y = e^{\operatorname{arctg} x}$, y' – ?

Решение

$y = e^u$, $u = \operatorname{arctg} x$.

$$y' = e^u \cdot u' = e^{\operatorname{arctg} x} \frac{1}{1+x^2}.$$

Дифференциал сложной функции

$y = f[\varphi(x)]$, $u = \varphi(x)$, $y'_x = f'_u \cdot u'_x$.

$dy = f'_u \cdot u'_x dx = f'_u du$.

$$\boxed{dy = f'_u du.}$$

Сравним с формулой $dy = f'(x)dx$.

Вывод

Дифференциал функции равен произведению производной функции на дифференциал аргумента, при этом не важно, является этот аргумент промежуточным или независимой переменной – ***инвариантность*** формы первого дифференциала.

5.2. Производная неявной функции

Уравнение $y = f(x)$, разрешенное относительно y, задает ***явную*** функцию y аргумента x.

Уравнение $F(x, y) = 0$, неразрешенное относительно y, задает ***неявную*** функцию y аргумента x.

Пример

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ y'\ -?$$

Решение

Способ 1.

Переход к явной функции $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\ \Rightarrow$

$$y'=\pm\frac{b}{a}\cdot\frac{1}{2}\left(a^2-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2x)=\mp\frac{b}{a}\cdot\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Способ 2.

В условии $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ записано равенство двух выражений, или двух функций одного независимого аргумента x. Если равны функции, то равны и их производные

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}\cdot y'=0\ \Rightarrow\ y'=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x}{y}.$$

Правило

Чтобы найти ***первую*** производную от функции, заданной неявно, нужно ***один*** раз продифференцировать равенство, задающее эту функцию, считая y функцией аргумента x.

Примеры

1. Записать уравнение касательной к эллипсу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ в точке $M_0(x_0,y_0)$.

Решение

$$y-y_0=y'(x_0)(x-x_0),$$

$$y'(x_0)=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_0}{y_0},$$

$$y-y_0=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x-x_0).$$

$$\boxed{\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1.}$$

2. $y^2=2px$.

y' – ?

Решение

$2y\cdot y'=2p$,

$y'=\dfrac{p}{y}$.

5.3. Логарифмическая производная

Пусть $f(x)>0$, $\exists f'(x)$.

Для вычисления $f'(x)$ в ряде случаев полезен прием предварительного логарифмирования выражения, задающего функцию.

Рассмотрим равенство $y=f(x)$.

Выполним его почленное логарифмирование

$$\ln y=\ln f(x).$$

Дифференцирование последнего равенства

$$[\ln y]'=[\ln(f(x))]'$$

приводит к отношению $\dfrac{y'}{y}=[\ln(f(x))]'$, которое называется ***логарифмической производной***.

Применение

1. $\boxed{y=x^\alpha}$, α – любое действительное число.

$$\ln y=\alpha\ln x\ \Rightarrow\ (\ln y)'=\frac{\alpha}{x}\Rightarrow\frac{y'}{y}=\frac{\alpha}{x}\ \Rightarrow\ y'=\alpha\cdot\frac{x^\alpha}{x}=\alpha x^{\alpha-1}.$$

$$\boxed{(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}.}$$

2. $\boxed{y=(\sin x)^{x^2}} \Rightarrow \ln y = x^2\ln(\sin x)$.

$$\frac{y'}{y}=2x\ln(\sin x)+\frac{x^2}{\sin x}\cdot\cos x.$$

$$\boxed{y'=(\sin x)^{x^2}\left(2x\ln(\sin x)+x^2\operatorname{ctg}x\right).}$$

3. В общем случае для степенно-показательных выражений.

$\boxed{y=u(x)^{v(x)}} \Rightarrow \ln y = v(x)\cdot\ln u(x)$.

$$\frac{y'}{y}=v'(x)\ln u(x)+\frac{v(x)}{u(x)}\cdot u'(x).$$

$$\boxed{y'=u(x)^{v(x)}\cdot\left[v'(x)\ln u(x)+\frac{v(x)}{u(x)}\cdot u'(x)\right].}$$

4. Для произведения более двух функций.

$y=\sin x\cdot\cos x\cdot x,\ y' - ?$

$\ln y=\ln\sin x+\ln\cos x+\ln x;$

$$\frac{y'}{y}=\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{-\sin x}{\cos x}+\frac{1}{x} \Rightarrow y'=x\sin x\cos x\left[\operatorname{ctg}x-\operatorname{tg}x+\frac{1}{x}\right].$$

Производные гиперболических функций

$$\operatorname{sh}(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\ \operatorname{ch}(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\ \operatorname{th}(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}},\ \operatorname{cth}(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}.$$

$$\boxed{(\operatorname{sh}(x))'=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\operatorname{ch}(x),}$$

$$\boxed{(\operatorname{ch}(x))'=\operatorname{sh}(x),}$$

$$\boxed{(\operatorname{th}(x))'=\frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)},}$$

$$\boxed{(\operatorname{cth}(x))'=-\frac{1}{\operatorname{sh}^2(x)}}\ (x\neq 0).$$

Пример

$$y=\operatorname{sh}^3 5x\cdot\cos^2\frac{x}{2}.$$

$$y' = 3\mathrm{sh}^2 5x \cdot \mathrm{ch}5x \cdot 5 \cdot \cos^2 \frac{x}{2} + \mathrm{sh}^3 5x \cdot 2\cos\frac{x}{2} \cdot \left(-\sin\frac{x}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= \mathrm{sh}^2 5x \cdot \cos\frac{x}{2}\left(15\mathrm{ch}\,5x \cdot \cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2} \cdot \mathrm{sh}\,5x\right).$$

5.4. Производная функции, заданной параметрически

Рассмотрим функцию, заданную параметрическим способом

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$$

В этом случае связь аргумента x со значением функции y осуществляется через параметр t. Как вычислить y'_x?

Теорема

Если

1) $x(t)$, $y(t)$ дифференцируемы ($\exists x'(t)$, $\exists y'(t)$) на интервале (α, β), и $x(t)$ строго монотонна на (α, β);
2) $x'(t) \neq 0 \ \ \forall t \in (\alpha, \beta)$,

то

$$\boxed{y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.}$$

Доказательство

Рассмотрим систему равенств

$$y = y(t),\ t = t(x),$$

где t – промежуточный аргумент,

y – сложная функция аргумента x.

По теореме о производной сложной функции $y'_x = y'_t \cdot t'_x$. По теореме о производной обратной функции

$$t'_x = \frac{1}{x'_t}.$$

Таким образом, $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$, что и требовалось доказать.

Пример

$$\begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3, \end{cases} \quad t \in (-\infty, 0).$$

y'_x – ?

Решение

$x'_t = 2t$,

$y'_t = 3t^2$,

$y'_x = \dfrac{3}{2}t$.

6. ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

6.1. Производные высших порядков.

6.2. Дифференциалы высших порядков.

6.1. Производные высших порядков

Определение

$f''(x) = \left(f'(x)\right)'$ – ***вторая производная*** – первая производная от производной первого порядка;

$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$ – ***производная*** n***-го порядка*** – первая производная от производной $(n-1)$-го порядка.

Примеры

1. $y = \sin x$.

$y' = \cos x$,

$y'' = -\sin x$,

$y''' = -\cos x$.

2. $y = x^n$.

$y' = n \cdot x^{n-1}$,

$y'' = n(n-1)x^{n-2}$,

$\ldots$

$y^{(k)} = n(n-1)\ldots(n-k+1)x^{n-k}$ ($k \le n$).

3. $y = e^x$.

$y^{(n)} = e^x$.

Вторая производная от неявной функции

Пусть неявная функция y аргумента x задается равенством $F(x,y)=0$.

Правило

Для отыскания высшей производной от y по x, нужно соответствующее число раз дифференцировать заданное равенство, помня, что y и все ее производные являются функциями независимой переменной x.

Пример

$y^2 + x^2 = 1$.

y'' – ?

$$2y \cdot y' + 2x = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{y},$$

$$2(y')^2 + 2y \cdot y'' + 2 = 0 \Rightarrow y'' = -\frac{1+(y')^2}{y} = -\frac{x^2+y^2}{y^3}.$$

Вторая производная функции, заданной параметрически

Рассмотрим функцию y, заданную параметрическим способом

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$$

Выше была получена формула для первой производной этой функции

$$y'_x = \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

Новая задача – вычисление второй производной y''_{xx} – ?

$$y''_{xx} = \left(y'_x\right)'_x = \left[\frac{y'(t)}{x'(t)}\right]'_t \cdot t'_x = \frac{y''_t \cdot x'_t - y'_t \cdot x''_t}{\left(x'_t\right)^2} \cdot \frac{1}{x'_t} = \frac{y''_t \cdot x'_t - y'_t \cdot x''_t}{\left(x'_t\right)^3}.$$

$$\boxed{y''_{xx} = \frac{y''_t \cdot x'_t - y'_t \cdot x''_t}{\left(x'_t\right)^3}.}$$

Пример

$x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ -\infty < t < +\infty.$

y'_x – ? y''_{xx} – ?

$$y'_x = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)},$$

$$y''_{xx} = \frac{\left(\mathrm{ctg}\left(\frac{t}{2}\right)\right)'}{a(1 - \cos t)}.$$

6.2. Дифференциалы высших порядков

Дифференциал независимой переменной, как было показано выше, равен ее приращению $dx = \Delta x$, которое ***не зависит от*** x!

Дифференциал функции $dy = f'(x)dx$ – при фиксированном dx – зависит от аргумента x, то есть является функцией. Поэтому можно поставить вопрос о дифференциале этой функции или дифференциале дифференциала. Дифференциал дифференциала функции – второй дифференциал функции $f(x)$ или дифференциал второго порядка.

Определения и обозначения

$d^2 f(x) = d[df(x)]$ – дифференциал второго порядка;

$d^3 f(x) = d\left[d^2 f(x)\right]$ – дифференциал третьего порядка;

…

$d^n f(x) = d\left[d^{n-1} f(x)\right]$ – дифференциал n-го порядка.

Формула для вычисления второго дифференциала

$d[df(x)] = d[f'(x)dx] = \updownarrow$ dx - константа выносится за d $\updownarrow = dx \cdot df'(x) =$

$= dxf''(x)dx = f''(x)(dx)^2 = f''(x)dx^{2}$*.

$$\boxed{d^2 f(x) = f''(x)dx^2.}$$

Здесь x – независимая переменная.

Замечание

Форма второго дифференциала не инвариантна.

Аналогично

$$\boxed{d^3 f(x) = f'''(x)dx^3.}$$

Пусть $f(x) = x$, тогда $f''(x) = 0 \Rightarrow d^2 x = 0$.

$f'''(x) = 0 \Rightarrow d^3 x = 0$ и так далее.

Вывод

Дифференциалы высших порядков от независимой переменной равны нулю.

7. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

7.1. Теорема Ролля.

7.2. Теорема Лагранжа.

7.3. Теорема Коши.

7.1. Теорема Ролля

Теорема Ролля (о нуле производной)

Если

1) $f(x)$ – непрерывна на $[a,b]$;

2) $\exists f'(x)$ на (a,b);

3) $f(a) = f(b)$,

то $\exists \xi \in (a,b)$:

$$\boxed{f'(\xi) = 0.}$$

---

* Подчеркнем, что $dx^2 = (dx)^2$.

Доказательство

Так как $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, она достигает на $[a,b]$ наибольшего M и наименьшего m значений. Возможны два случая.

1. $M = m$.

Тогда $f(x) = M = m \Rightarrow f(x) - const$.

$f'(x) = 0$.

2. $M > m$.

Тогда хотя бы одно из этих значений достигается внутри $[a,b]$, то есть в точке $\xi \in (a,b)$,так как $f(a) = f(b)$.

Пусть $f(\xi) = M$, где $\xi \in (a,b)$. Так как ξ – внутренняя точка, то $\exists f'(\xi)$.

Докажем, что $f'(\xi) = 0$.

$$f'(\xi) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\xi + \Delta x) - f(\xi)}{\Delta x}.$$

$f(\xi) \geq f(\xi + \Delta x)\ \forall \Delta x$.

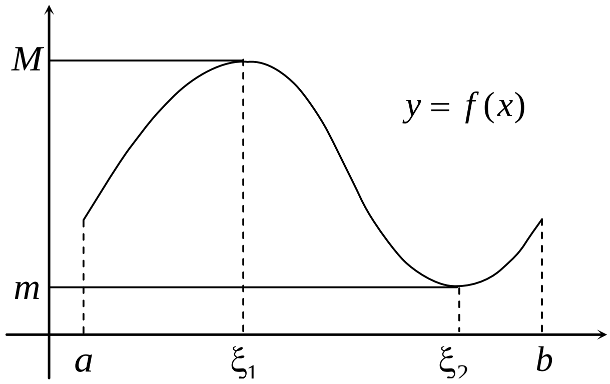
$$\lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{f(\xi + \Delta x) - f(\xi)}{\Delta x} = f'_{прав}(\xi) \leq 0, \qquad (*)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{f(\xi + \Delta x) - f(\xi)}{\Delta x} = f'_{лев}(\xi) \geq 0. \qquad (**)$$

Но из существования $f'(\xi)$ следует, что $f'(\xi) = f'_{прав}(\xi) = f'_{лев}(\xi) \Rightarrow f'(\xi) = 0$ с учетом (*) и (**), что и требовалось доказать. Аналогично выполняется доказательство для $f(\xi) = m$. Теорема доказана.

Геометрическая интерпретация

Если функция удовлетворяет условиям теоремы Ролля на отрезке $[a,b]$, то в некоторой точке отрезка ее касательная параллельна оси OX.



Теорема Ролля позволяет узнать об обращении производной в нуль без ее вычисления.

Пример

$f(x) = x(x+1)(x+2)(x+3)$.

Доказать, что все корни уравнения $f'(x) = 0$ принадлежат интервалу $(-3{,}0)$.

Доказательство

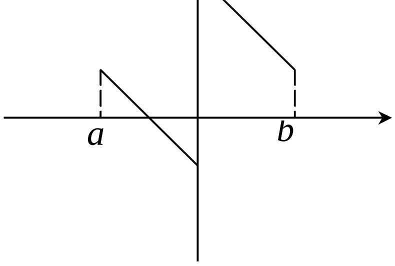
$f(0) = f(-1) = f(-2) = f(-3) = 0$.

Для каждого из отрезков $[-3,-2]$, $[-2,-1]$, $[-1{,}0]$ выполняются условия теоремы Ролля, следовательно, есть три точки, по одной на каждом из соответствующих интервалов, в которых производная обращается в нуль.

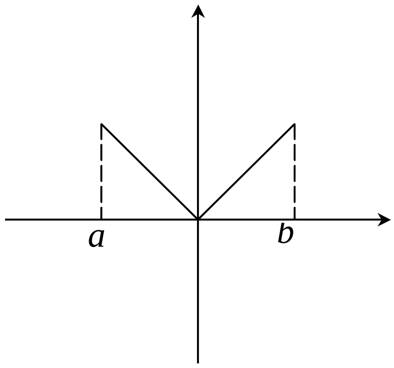
Замечание

Все условия теоремы Ролля необходимы для справедливости ее утверждения.

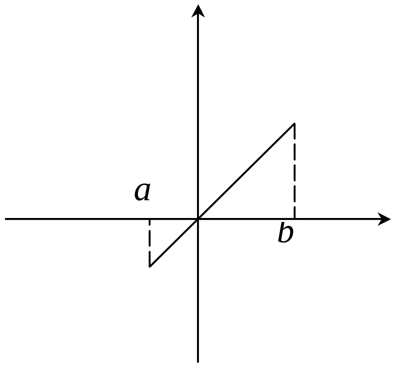
1. ***Непрерывность*** на $[a,b]$.



2. ***Дифференцируемость*** на (a,b).



3. ***Равенство*** $f(a)=f(b)$.



7.2. Теорема Лагранжа

Теорема Лагранжа

Если

1) $f(x)$ – непрерывна на $[a,b]$;

2) $\exists f'(x)$ – на (a,b),

то

$\exists c \in (a,b)$:

$$\boxed{f(b)-f(a)=f'(c)\cdot(b-a).}$$

Доказательство

Введем обозначение $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=Q$.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$F(x)=f(x)-f(a)-Q(x-a)$.

Функция $F(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля:

1) $F(x)$ непрерывна на $[a,b]$;
2) $\exists F'(x)$ на (a,b);
3) $F(a)=F(b)=0$.

Следовательно, $\exists c:\ c\in(a,b),\ F'(c)=0$.

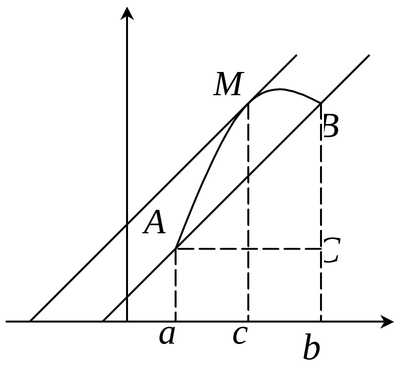
Далее $F'(x)=f'(x)-Q$,

$F'(c)=f'(c)-Q=0$,

$f'(c)=Q$,

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$, что и требовалось доказать.

Геометрический смысл теоремы Лагранжа



$\dfrac{CB}{AC}=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ – угловой коэффициент секущей AB.

$f'(c)$ – угловой коэффициент касательной к кривой $y=f(x)$ в точке $x=c$.

На дуге AB найдется, по крайней мере, одна точка M, в которой касательная параллельна хорде AB $\Rightarrow$ теорема Ролля является частным случаем теоремы Лагранжа.

Доказанная формула называется ***формулой Лагранжа*** или ***формулой конечных приращений***.

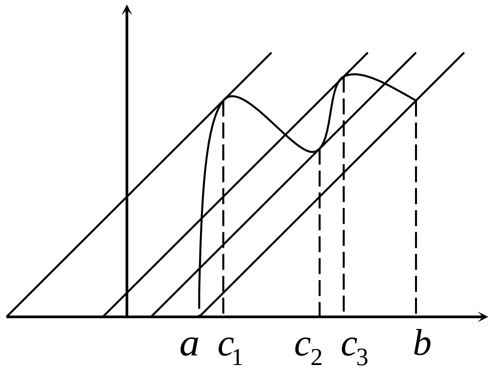
Так как $a<c<b$, то $c-a<b-a$.

$c-a=\theta(b-a)$, где $0<\theta<1$ $\Rightarrow$ $c=a+\theta(b-a)$.

$\boxed{f(b)-f(a)=f'[a+\theta(b-a)]\cdot(b-a)}$ – другая редакция формулы Лагранжа.

Замечание 3

Точек c может быть несколько.



Замечание 4

Если $f(a)=f(b)$, то $f'(c)=0$ – утверждение теоремы Ролля.

Замечание 5

Теорему Лагранжа можно использовать для приближенных вычислений.

$$f(b)-f(a)=f'[a+\theta(b-a)](b-a),\ 0<\theta<1.$$

Положим $\theta=\dfrac{1}{2}$, тогда

$$f(b)-f(a)\approx f'\left[\frac{a+b}{2}\right](b-a).$$

Погрешность тем меньше, чем ближе b к a.

Пример

$b=1{,}1$, $a=1{,}0$, $\operatorname{arctg}1{,}1$ – ?

$$\operatorname{arctg}1{,}1\approx\operatorname{arctg}1+0{,}1\cdot(\operatorname{arctg}x)'\Big|_{x=c},$$

$$(\operatorname{arctg}x)'=\frac{1}{1+x^2},\ c=\frac{(1{,}0+1{,}1)}{2},$$

$$\frac{1}{1+x^2}\Bigg|_{c=\frac{2{,}1}{2}}\approx\frac{1}{2{,}1}\approx 0{,}5,$$

$$\operatorname{arctg}1{,}1\approx\frac{\pi}{4}+0{,}05.$$

7.3. Теорема Коши

Теорема Коши

Если

1) $f(x),\ \varphi(x)$ – непрерывны на $[a,b]$;

2) $\exists f'(x),\ \varphi'(x)$ на (a,b);

3) $\varphi'(x) \neq 0\ \ \forall x \in (a,b)$,

то

$\exists c \in (a,b)$:

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.}$$

Доказательство

1. $\varphi(b) \neq \varphi(a)$, так как иначе по теореме Ролля $\varphi'(x)$ обращалась бы в нуль, по крайней мере, в одной точке $c \in (a,b)$.

Рассмотрим вспомогательную функцию:

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}[\varphi(x)-\varphi(a)].$$

Она удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля $\Rightarrow$

$\exists c \in (a,b)$ такая, что $F'(c) = 0\ \Rightarrow$

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} \cdot \varphi'(c).$$

Разделим равенство на $\varphi'(c)$ с учетом того, что $\varphi'(c) \neq 0$:

$\dfrac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \dfrac{f'(c)}{\varphi'(c)}$, что и требовалось доказать.

Замечание

Теорема Лагранжа является частным случаем теоремы Коши.

8. ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ

8.1. Теоремы

Рассмотрим $F(x)=\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$, где $f(x)$ и $\varphi(x)$ – дифференцируемы в некоторой окрестности точки a.

Если при $x\to a$ функция $f(x)\to 0$ (∞) и $\varphi(x)\to 0$ (∞), при $x\to a$ имеет место неопределенность $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ или $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

$\lim\limits_{x\to a} F(x)$ – ?

Случай 1. При $x\to a$ функции $f(x)\to 0$ и $\varphi(x)\to 0$.

Теорема

Если

1) $\exists f'(x),\ \varphi'(x)$ в промежутке $(a,b]$ ($\varphi'(x)\neq 0$);

2) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to a+0}\varphi(x)=0$;

3) $\exists \lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$,

то

$$\boxed{\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.}$$

Доказательство

Доопределим функции $f(x),\ \varphi(x)$ значениями при $x=a$:

$f(a)=\varphi(a)=0$.

В точке $x=a$ значения функций $f(x),\ \varphi(x)$ совпадают с правыми пределами при $x\to a$, то есть функции непрерывны в точке $x=a$ справа. Учитывая при этом существование производных $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ в промежутке $(a,b]$, заключаем, что функции $f(x),\ \varphi(x)$ непрерывны на $[a,b]$.

Возьмем на $[a,b]$ точку x. На отрезке $[a,x]$ по теореме Коши можно записать:

$$\frac{f(x)-f(a)}{\varphi(x)-\varphi(a)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)},\ a<c<x.$$

Но $f(a)=\varphi(a)=0 \Rightarrow \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\dfrac{f'(c)}{\varphi'(c)}$.

При $x\to a+0$ и $c\to a+0$.

Тогда:

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a+0}\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}=\lim_{c\to a+0}\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}=\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)},$$

что и требовалось доказать.

Аналогично формулируются и доказываются теоремы для случаев, когда $x\to a$ слева и $x\to a$ любым способом.

Правило Лопиталя

Предел отношения двух бесконечно малых функций равен пределу отношения их производных, если последний существует.

Замечание 1

Если $x\to\infty$, $\varphi(x)\to 0$, $f(x)\to 0$, то

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{z\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}=\lim_{z\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\left(-\frac{1}{z^2}\right)}{\varphi'\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\left(-\frac{1}{z^2}\right)}=\lim_{z\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{\varphi'\left(\frac{1}{z}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Замечание 2

Если $f'(a)=\varphi'(a)=0$ и $f'(x)$, $\varphi'(x)$ удовлетворяют условиям теоремы, то, применяя правило Лопиталя к отношению $\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, получаем

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{\varphi''(x)}.$$

Вывод

Правило Лопиталя можно применять несколько раз.

Случай 2.

При $x \to a$ функции $f(x) \to \infty$ и $\varphi(x) \to \infty$.

Теорема

Если

1) $\exists f'(x),\ \varphi'(x)$ в промежутке $(a, b]$ ($\varphi'(x) \neq 0$);

2) $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to a+0} \varphi(x) = +\infty$;

3) $\exists \lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$,

то

$$\boxed{\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.}$$

Доказательство

1. Пусть $\lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$, A – некоторое число.

Так как $\lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A \Rightarrow$

$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0\ (\delta \le b - a) : x \in (a, a + \delta) \Rightarrow \left| \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)} - A \right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Возьмем $x \in (a, a + \delta)$. На отрезке $[x, a + \delta]$ выполнены условия теоремы Коши, тогда $\exists\, c \in (x, a + \delta)$:

$\dfrac{f(a + \delta) - f(x)}{\varphi(a + \delta) - \varphi(x)} = \dfrac{f'(c)}{\varphi'(c)}$.

Учитывая, что неравенство $\left| \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)} - A \right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ справедливо $\forall\, x \in (a, a + \delta)$,

в том числе для $x = c$, переходим к неравенству

$\left| \dfrac{f(a + \delta) - f(x)}{\varphi(a + \delta) - \varphi(x)} - A \right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Умножим выражение, стоящее под знаком модуля, на $\left(1-\dfrac{\varphi(a+\delta)}{\varphi(x)}\right)$:

$$\underline{\left(\frac{f(a+\delta)-f(x)}{\varphi(a+\delta)-\varphi(x)}-A\right)\left(1-\frac{\varphi(a+\delta)}{\varphi(x)}\right)=}$$

$$=\frac{f(a+\delta)-f(x)-A\cdot(\varphi(a+\delta)-\varphi(x))}{\varphi(a+\delta)-\varphi(x)}\cdot\frac{\varphi(x)-\varphi(a+\delta)}{\varphi(x)}=$$

$$=\left[f(a+\delta)-f(x)-A\cdot(\varphi(a+\delta)-\varphi(x))\right]\cdot\frac{(-1)}{\varphi(x)}=$$

$$=\frac{f(x)-f(a+\delta)+A\cdot(\varphi(a+\delta)-\varphi(x))}{\varphi(x)}=$$

$$=\frac{f(x)-f(a+\delta)}{\varphi(x)}+\frac{A\cdot(\varphi(a+\delta)-\varphi(x))}{\varphi(x)}=$$

$$\underline{=\frac{f(x)}{\varphi(x)}-\frac{f(a+\delta)}{\varphi(x)}+A\cdot\frac{\varphi(a+\delta)}{\varphi(x)}-A.}$$

Из равенства подчеркнутых выражений, получаем:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}-A=\left(\frac{f(a+\delta)-f(x)}{\varphi(a+\delta)-\varphi(x)}-A\right)\left(1-\frac{\varphi(a+\delta)}{\varphi(x)}\right)+\frac{f(a+\delta)-A\cdot\varphi(a+\delta)}{\varphi(x)}.$$

Так как $\lim\limits_{x\to a+0}\varphi(x)=+\infty$, $\exists\delta_1>0\ (\delta_1\le\delta): x\in(a,a+\delta_1)\Rightarrow$

$\varphi(x)>\varphi(a+\delta)$ и $\left|\dfrac{f(a+\delta)-A\cdot\varphi(a+\delta)}{\varphi(x)}\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

Тогда для x из рассматриваемого промежутка $\left|\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}-A\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.

Последнее означает, что $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=A=\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

2. Пусть $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}=+\infty$.

Для значений x близких к a значение функции $f(x)\neq 0$.

$$\lim_{x\to a+0}\frac{\varphi'(x)}{f'(x)}=\lim_{x\to a+0}\frac{1}{\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}}=0.$$

В соответствии с пунктом 1 $\lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{\varphi(x)}{f(x)} = 0$.

Тогда $\lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = +\infty$, то есть $\lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$,

что и требовалось доказать.

Аналогично формулируются и доказываются теоремы для случаев $-\infty$ и ∞ во втором условии.

Предел отношения двух бесконечно больших функций равен пределу отношения их производных, если последний существует.

8.2. Применение правила Лопиталя для раскрытия неопределенностей

1. Неопределенность $\dfrac{0}{0}$.

Примеры

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(\sin 2x)'}{(x)'} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\cos 2x}{1} = 2$.

2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg\, x - x}{x^2 + \sin x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(tg\, x - x)'}{(x^2 + \sin x)'} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\dfrac{1}{\cos^2 x} - 1}{2x + \cos x} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x (2x + \cos x)} = 0$.

2. Неопределенность $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Примеры

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x+1}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}}{1} = 0$.

2. $\lim\limits_{x \to +0} \dfrac{\ln \sin(2x)}{\ln \sin(3x)} = \lim\limits_{x \to +0} \dfrac{(\ln \sin(2x))'}{(\ln \sin(3x))'} = \lim\limits_{x \to +0} \dfrac{\cos(2x) \cdot 2 \cdot \sin(3x)}{\sin(2x) \cdot \cos(3x) \cdot 3} =$

$$=\begin{bmatrix} x\to +0 \\ \sin(2x)\sim 2x \\ \sin(3x)\sim 3x \end{bmatrix} = \lim_{x\to +0}\frac{\cos(2x)\cdot 2\cdot 3x}{2x\cdot\cos(3x)\cdot 3}=1.$$

3. Неопределенность $0\cdot\infty$ сводится к $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

Пусть $f(x)\to 0,\quad \varphi(x)\to\infty$ при $x\to a$.

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot\varphi(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\dfrac{1}{\varphi(x)}}=\left[\frac{0}{0}\right] \text{ или}$$

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot\varphi(x)=\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

Пример

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(e^{\frac{2}{x}}-1\right)x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{2}{x}}-1}{\dfrac{1}{x}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{2}{x}}\cdot\left(-\dfrac{2}{x^2}\right)}{-\dfrac{1}{x^2}}=2.$$

4. Неопределенность $\infty-\infty\ \Rightarrow\ \frac{\infty}{\infty},\ \frac{0}{0}$.

Пример

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}+tgx\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}\left(1+tgx\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right)\right],$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[tg\,x\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right]=[\infty\cdot 0]=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{x-\frac{\pi}{2}}{ctg\,x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\dfrac{-1}{\sin^2 x}}=-1\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}\left(1+tgx\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right)\right]=[\infty\cdot 0]=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1+tg\,x\cdot\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}\right]=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left[\frac{\frac{1}{\cos^2 x} \cdot \left(x - \frac{\pi}{2} \right) + tg\, x \cdot 1}{1} \right] = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left[\frac{\left(x - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos^2 x}{\cos^2 x} \right] =$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left[\frac{\left(x - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{2} \cdot \sin 2x}{\cos^2 x} \right] = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left[\frac{1 + \frac{1}{2} \cdot \cos 2x \cdot 2}{2 \cos x \cdot (-\sin x)} \right] = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left[\frac{1 + \frac{1}{2} \cdot \cos 2x \cdot 2}{-\sin 2x} \right] =$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left[\frac{-\sin 2x \cdot 2}{-\cos 2x \cdot 2} \right] = 0 .$$

5. Неопределенность 0^0 сводится к $0 \cdot \infty$.

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = 0$.

$\lim\limits_{x \to a} f(x)^{\varphi(x)}$ – ?

$y = f(x)^{\varphi(x)}$, $\lim\limits_{x \to a} y$ – ?

Используем прием предварительного логарифмирования:

$$\ln y = \varphi(x) \cdot \ln f(x).$$

$\lim\limits_{x \to a} y = \lim\limits_{x \to a} e^{\ln y} = \updownarrow$ в силу непрерывности элементарной функции e^x

$\updownarrow = e^{\lim\limits_{x \to a} \ln y}$,

$$\lim_{x \to a} \ln y = \lim_{x \to a} \varphi(x) \cdot \ln f(x) = [0 \cdot \infty].$$

Пример

$y = x^{\sin x}$, $\lim\limits_{x \to 0+0} y$ – ?

Решение

$\ln y = \sin x \cdot \ln x$,

$$\lim_{x \to 0+0} \ln y = \lim_{x \to 0+0} (\sin x \cdot \ln x) = \lim_{x \to 0+0} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x \to 0+0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x} \cdot \cos x} =$$

$$= \lim_{x \to 0+0} \frac{-\sin^2 x}{x \cdot \cos x} = \lim_{x \to 0+0} \frac{-x^2}{x \cdot \cos x} = 0 .$$

$$\lim_{x\to 0+0}\ln y = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{x\to 0+0} y = e^0 = 1.$$

6. Неопределенность $\infty^0 \;\Rightarrow\; 0\cdot\infty$.

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = 0$.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)^{\varphi(x)}$ – ?

$y = f(x)^{\varphi(x)}$.

$\ln y = \varphi(x)\cdot\ln f(x)$.

$\lim\limits_{x\to a}\ln y = \lim\limits_{x\to a}\varphi(x)\cdot\ln f(x) = [0\cdot\infty]$.

Пример

$$y = (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}},\; \lim_{x\to +0} y \; – ?$$

Решение

$$\ln y = \frac{1}{\ln x}\cdot\ln\operatorname{ctg} x,$$

$$\lim_{x\to +0}\ln y = \lim_{x\to +0}\frac{\ln\operatorname{ctg} x}{\ln x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to +0}\frac{\frac{1}{\operatorname{ctg} x}\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to +0}\frac{-x}{\cos x\sin x} = -1.$$

$$\lim_{x\to +0}\ln y = -1 \;\Rightarrow\; \lim_{x\to +0} y = e^{-1}.$$

7. Неопределенность $1^\infty \;\Rightarrow\; 0\cdot\infty$.

Пример

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{1-\cos x}} \; – ?$$

Решение

$$y = (\cos x)^{\frac{1}{1-\cos x}}.$$

$$\ln y = \frac{1}{1-\cos x}\ln\cos x,$$

$$\lim_{x\to 0}\ln y = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{\cos x\cdot\sin x} = -1,$$

$$\lim_{x\to 0} y = \frac{1}{e}.$$

9. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

9.1. Линейное, квадратичное и кубическое приближения функции

Формула для приращения функции

$\Delta f(x_0, \Delta x) = f'(x_0)\cdot \Delta x + o_1$ или $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot \Delta x + o_1$,

где o_1 – бесконечно малая более высокого порядка, чем Δx, при $\Delta x \to 0$, позволяет провести приближенную замену исходной функции линейной в окрестности точки x_0

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot \Delta x.$$

Для решения задач может потребоваться повышение точности приближенного равенства. Рассмотрим возможность замены функции $f(x)$ квадратичной с некоторой погрешностью:

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot \Delta x + A_1 \cdot \Delta x^2 + o_2.$$

Слагаемое o_1 из предыдущего равенства записано в виде суммы

$$o_1 = A_1 \cdot \Delta x^2 + o_2,$$

где A_1 – число, o_2 – бесконечно малая функция более высокого порядка, чем Δx^2, при $\Delta x \to 0$.

Найдем число A_1

$$A_1 = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - f'(x_0)\cdot \Delta x}{\Delta x^2} - \frac{o_2}{\Delta x^2}.$$

Так как приближенная замена рассматривается в окрестности точки x_0, перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$

$$A_1 = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - f'(x_0)\cdot \Delta x}{\Delta x^2} - \frac{o_2}{\Delta x^2} \right) =$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)-f'(x_0)\cdot\Delta x}{\Delta x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(f(x_0+\Delta x)-f(x_0)-f'(x_0)\cdot\Delta x\right)'_{\Delta x}}{\left(\Delta x^2\right)'}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)}{2\Delta x}=\frac{1}{2}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f'(x_0,\Delta x)}{\Delta x}=\frac{1}{2}\cdot f''(x_0).$$

Подставим полученное значение A_1 в выражение для $f(x_0+\Delta x)$

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x+\frac{f''(x_0)}{2}\cdot\Delta x^2+o_2.$$

Исключая из этого равенства бесконечно малую при $\Delta x\to 0$ функцию o_2, получим приближенное равенство

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x+\frac{f''(x_0)}{2}\cdot\Delta x^2,$$

которое позволяет заменить исходную функцию многочленом второй степени в окрестности точки x_0.

Продолжая решение задачи о возможности повышения точности приближенной замены функции многочленом в окрестности точки x_0, перейдем к многочлену третьей степени

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x+\frac{f''(x_0)}{2}\cdot\Delta x^2+A_2\cdot\Delta x^3+o_3.$$

Здесь слагаемое o_2 из предыдущего равенства записано в виде суммы

$$o_2=A_2\cdot\Delta x^3+o_3,$$

где A_2 – число, o_3 – бесконечно малая функция более высокого порядка, чем Δx^3, при $\Delta x\to 0$.

Для нахождения значения коэффициента A_2, выразим его из записанного равенства и устремим $\Delta x\to 0$

$$A_2=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)-f'(x_0)\cdot\Delta x-\frac{f''(x_0)}{2}\cdot\Delta x^2}{\Delta x^3}-\frac{o_3}{\Delta x^3}\right)=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)-f'(x_0)\cdot\Delta x-\frac{f''(x_0)}{2}\cdot\Delta x^2}{\Delta x^3}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)-\dfrac{f''(x_0)}{2}\cdot 2\Delta x}{3\Delta x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f''(x_0+\Delta x)-f''(x_0)}{3\cdot 2\cdot \Delta x}=\frac{f'''(x_0)}{2\cdot 3}.$$

Тогда,

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x+\frac{f''(x_0)}{2}\cdot\Delta x^2+\frac{f'''(x_0)}{2\cdot 3}\cdot\Delta x^3+o_3.$$

Если учесть, что $x=x_0+\Delta x$, приведенные выше формулы запишутся в следующем виде:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)+o_1,$$

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}\cdot(x-x_0)^2+o_2,$$

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}\cdot(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{2\cdot 3}\cdot(x-x_0)^3+o_3.$$

Пример

Найти многочлены первой второй и третьей степени для приближенной замены функции $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^3+2}$ в окрестности точки $x_0=0$.

Для составления многочленов указанных степеней потребуются значения функции и ее производных до третьего порядка включительно в точке $x_0=0$.

$f(0)=\dfrac{1}{2}$, $f'(0)=0$, $f''(0)=1$, $f'''(0)=-\dfrac{3}{2}$ (проверьте).

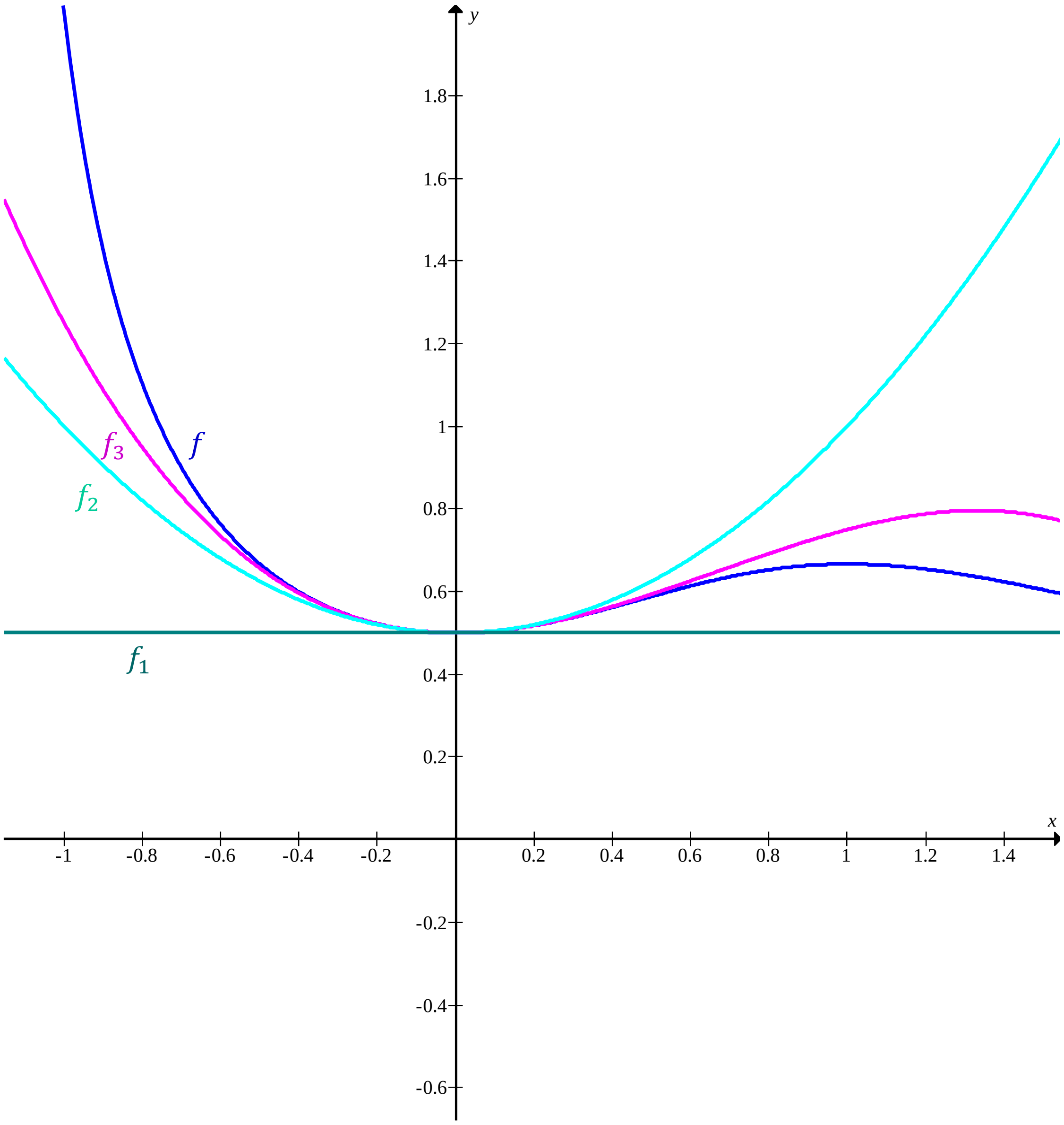
Тогда, в окрестности точки $x_0=0$ справедливы приближенные равенства:

$$f(x)\approx f(0)+f'(0)\cdot x=\frac{1}{2}=f_1(x),$$

$$f(x)\approx f(0)+f'(0)\cdot x+\frac{f''(0)}{2}\cdot x^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x^2=f_2(x),$$

$$f(x) \approx f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2} \cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{2 \cdot 3} \cdot x^3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^3 = f_3(x).$$

Рассмотрим графики исходной функции $f(x)$ и ее приближений $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$.



Можно заметить, что при переходе $f_1(x) \to f_2(x) \to f_3(x)$ размеры окрестности точки $x_0 = 0$, в которой графики функций замены близки к графику исходной функции увеличиваются.

Перейдем к рассмотрению случая замены функции многочленом произвольной степени.

9.2. Теорема Тейлора

Теорема (1715 г.)

Если $f(x)$ имеет в некоторой окрестности точки a, производные до $(n+1)$-го порядка включительно,

то для любого x из указанной окрестности **справедлива формула Тейлора n-го порядка**.

$$\boxed{f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x,a),}$$

где

$$\boxed{R_n(x,a)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}, \qquad (*)$$

c – промежуточная точка между a и x.

Доказательство

Обозначим

$$P_n(x,a)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

– многочлен n-го порядка. Тогда формула Тейлора может быть записана в виде суммы **многочлена Тейлора** $P_n(x,a)$ и ***остатка (остаточного члена)*** $R_n(x,a)$

$$f(x)=P_n(x,a)+R_n(x,a).$$

Отсюда

$$P_n(x,a)=f(x)-R_n(x,a).$$

Для доказательства теоремы достаточно доказать справедливость формулы (*).

Зафиксируем x из указанной окрестности точки a. Пусть (без ограничения общности рассуждений) $x>a$. На отрезке $[a,x]$ рассмотрим вспомогательную функцию переменной t

$$\Phi(t)=f(x)-P_n(x,t)-\frac{(x-t)^{n+1}}{(x-a)^{n+1}}R_n(x,a).$$

Функция $\Phi(t)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля. Поэтому на отрезке существует промежуточная точка с, такая что

$$\boxed{\Phi'(c)=0\,.}$$

Вычислим $\Phi'(t)$:

$$\Phi'(t)=-P_n'(x,t)-\frac{(n+1)(x-t)^n(-1)}{(x-a)^{n+1}}R_n(x,a).$$

Отдельно вычислим производную по t от многочлена Тейлора (зависимость от t содержится в двучлене $(x-t)$ и в коэффициентах $f^{(k)}(t)$).

$$P_n'(x,t)=f'(t)+\frac{f''(t)}{1!}(x-t)-f'(t)+\frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2-\frac{f''(t)}{2!}2(x-t)+\ldots+$$

$$+\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n-\frac{f^{(n)}(t)}{n!}n(x-t)^{n-1}=\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Таким образом,

$$\Phi'(t)=-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n+\frac{(n+1)(x-t)^n}{(x-a)^{n+1}}R_n(x,a).$$

При $t=c$ получаем

$$\boxed{R_n(x,a)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},}$$

что и требовалось доказать.

Так как c лежит между a и x, то c можно представить в виде $c=a+\theta(x-a),\ 0<\theta<1$.

Замечание

Формула (*) дает остаточный член в *форме Лагранжа*. Известны и другие формы остаточного члена, например, *форма Пеано*

$$\boxed{R_n(x,a)=o\left(|x-a|^n\right),}$$

в соответствии с которой остаток формулы Тейлора n-го порядка является бесконечно малой более высокого порядка малости по сравнению с $|x-a|^n$.

9.3. Частные случаи формулы Тейлора

1°. $f(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_nx^n$ – ***многочлен порядка*** n.

Так как $\forall x \;\; f^{(n+1)}(x)\equiv 0$, то $f^{(n+1)}(c)\equiv 0 \Rightarrow R_n(x,a)=0 \Rightarrow$

$$\boxed{f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.}$$

По формуле Тейлора ***любой многочлен*** порядка n можно представить в виде ***многочлена по степеням*** $(x-a)$.

2°. ***Формула Маклорена*** ($a=0$)

$$\boxed{f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x),}$$

$$\boxed{R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}},\; 0<\theta<1$$

– остаточный член в форме Лагранжа.

10. ПРИЛОЖЕНИЯ ФОРМУЛЫ ТЕЙЛОРА

10.1. Оценка остаточного члена формулы Тейлора.

10.2. Разложение по формуле Маклорена некоторых функций.

10.3. Приложения формул Тейлора и Маклорена.

10.1. Оценка остаточного члена формулы Тейлора

Пусть $f(x)$ такова, что $\forall n$ и $\forall x$ из окрестности точки a справедливо неравенство

$$\left|f^{(n)}(x)\right|\le M.$$

Рассмотрим $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$.

$$\left|R_n(x)\right|=\frac{\left|f^{(n+1)}(c)\right|}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}\le M\,\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Так как $\forall |x-a|$ отношение $\dfrac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$ при $n \to \infty$ (см. теорию рядов), то остаточный член может быть сделан сколь угодно малым путем увеличения n, если функция $f(x)$ обладает указанным выше свойством. Поэтому формулу Тейлора можно использовать для приближенных вычислений с любой наперед заданной степенью точности.

10.2. Разложение по формуле Маклорена некоторых функций

Итак, $a=0$.

1°. $\boxed{f(x)=e^x}$, $f(0)=1$;

$f'(x)=e^x$, $f'(0)=1$;

$f''(x)=e^x$, $f''(0)=1$;

…

$f^{(n)}(x)=e^x$, $f^{(n)}(0)=1$.

По формуле Маклорена

$$\boxed{e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+R_n(x).}$$

$$R_n(x)=\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1},\ 0<\theta<1.$$

Так как $\forall n$ на интервале $(-r,r)$ имеет место неравенство $\left|f^{(n)}(x)\right|<e^r$, возможна оценка остатка

$$\boxed{|R_n(x)|<\frac{e^{\theta r}}{(n+1)!}r^{n+1}.}$$

2°. $\boxed{f(x)=\sin x}$, $f(0)=0$;

$$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right),\ f^{(n)}(0)=\begin{cases}0,\ n-\textit{четн.},\\ (-1)^{\frac{n-1}{2}},\ n-\textit{нечетн.}\end{cases}$$

$$\boxed{\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+R_n(x).}$$

Нечетная функция $\sin x$ разложена в многочлен с нечетными степенями.

3°. $\boxed{f(x)=\cos x}$, $f(0)=1$;

$$f^{(n)}(x)=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right),\ f^{(n)}(0)=\begin{cases}0,\ n-\text{нечетн.},\\(-1)^{\frac{n}{2}},\ n-\text{четн.}\end{cases}$$

$$\boxed{\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+R_n(x).}$$

Четная функция $\cos x$ разложена в многочлен с четными степенями.

4°. $\boxed{f(x)=\ln(1+x)}$, $f(0)=0$;

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n},\ f^{(n)}(0)=(-1)^{(n-1)}(n-1)!.$$

$$\boxed{\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{(n-1)}\frac{x^n}{n}+R_n(x).}$$

5°. $\boxed{f(x)=(1+x)^\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $f(0)=1$;

$$f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},\ f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1).$$

$$\boxed{(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+R_n(x).}$$

Частный случай $\boxed{\alpha=n}$

$$\boxed{(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\ldots+x^n}$$

– формула ***бинома Ньютона***.

10.3. Приложения формул Тейлора и Маклорена

А. *Для приближенных вычислений значений функций*.

$$f(x)\approx f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

При этом $|R_n(x)|$ – абсолютная погрешность приближенного равенства.

Важно уметь оценивать абсолютную погрешность, то есть получать неравенство

$$|R_n(x)|\le\varepsilon,$$

где ε – точность приближенного равенства.

Пример

Вычислить значение e с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.

Рассмотрим функцию $f(x) = e^x$. Воспользуемся формулой Маклорена порядка n, положив $x = 1$

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + R_n(1),$$

$$R_n(1) = \frac{e^{\theta}}{(n+1)!},\ 0 < \theta < 1 \ \Rightarrow\ |R_n(1)| < \frac{e}{(n+1)!},$$

так как $e < 3$, то $\dfrac{e}{(n+1)!} < \dfrac{3}{(n+1)!} \ \Rightarrow\ |R_n(1)| < \dfrac{3}{(n+1)!}$.

Найдем наименьшее n, удовлетворяющее условию $\dfrac{3}{(n+1)!} \le \varepsilon$. При $\varepsilon = 0{,}001,\ n = 6\ \Rightarrow$

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{6!} = \frac{1957}{720} \approx 2{,}718.$$

Б. *Для аппроксимации функции многочленом.*

$$f(x) \approx P_n(x, a).$$

Частный случай $\boxed{n = 1}$

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$$

(справа линейная функция).

Напомним, что такая замена называется ***линеаризацией функции***.

Геометрический смысл линеаризации

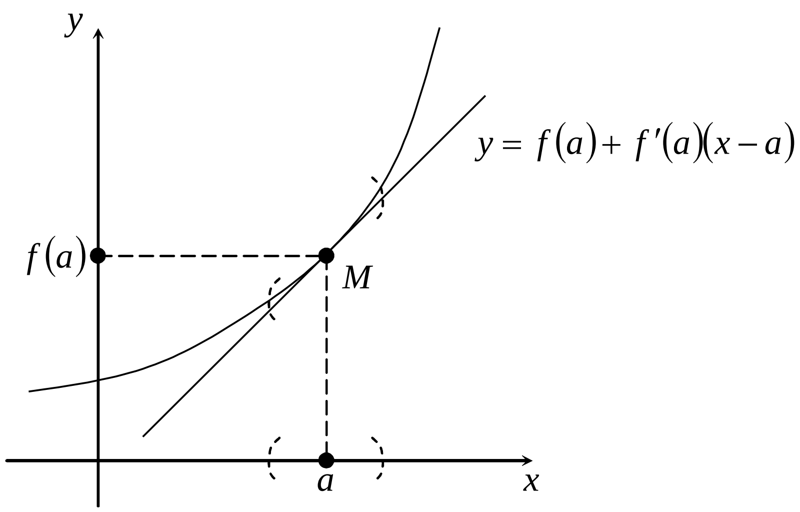


График функции $f(x)$ в окрестности точки a заменяется отрезком касательной к графику функции в этой точке.

В. *Для вычисления пределов.*

Пример

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3} - ?$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\left\{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\right\} - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots}{x^3} = -\frac{1}{3!}.$$

Этот пример является иллюстрацией ограниченности использования возможности замены бесконечно малых функций на эквивалентные под знаком предела (только множители!).

Г. *Для оценки скорости роста (убывания) функций.*

В уроке «Бесконечно малые и бесконечно большие функции» было введено обозначение O для класса функций, имеющих одинаковый порядок роста.

Формула Тейлора позволяет представить функцию в виде многочлена степени n и остаточного члена $o\left(|x-a|^n\right)$. Рассмотрим частный случай – формулу Маклорена. Заметим, что при $x \to 0$ сумма $a_n x^n + o\left(x^n\right) = O\left(x^n\right)$. Тогда, разложение рассмотренных выше функций по формуле Маклорена, используя обозначение O для оценки остатка, можно представить в следующем виде:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + O\left(x^{n+1}\right),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O\left(x^{2n+3}\right),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \ldots + \frac{(-1)^{n+1} x^{2(n-1)}}{(2(n-1))!} + O\left(x^{2n}\right),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{(n-1)}\frac{x^n}{n} + O\left(x^{n+1}\right),$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + O\left(x^{n+1}\right).$$

Пример

Найти производную $f'''(0)$ функции $y=\sin^3(5x)\cdot\cos^3(7x)$, не проводя непосредственного дифференцирования.

Решение

Воспользуемся разложением тригонометрических функций в ряд Маклорена, так как $x_0=0$.

$$y=\sin^3(5x)\cdot\cos^3(7x)=\left(5x+O\left(x^3\right)\right)^3\cdot\left(1-\frac{(7x)^2}{2}+o\left((7x)^2\right)\right)^3=$$

$$=\left(125x^3+O\left(x^5\right)\right)\cdot\left(1-49x^2+O\left(x^4\right)\right).$$

В разложении по формуле Маклорена третья производная содержится в коэффициенте перед x^3.

$$x^3:\ \frac{y'''(0)}{3!}=125\ \Rightarrow y'''(0)=125\cdot 3!=750.$$

Д. *Для решения дифференциальных уравнений*.

Дифференциальным называется уравнение, содержащее независимую переменную, искомую функцию и ее производные

$$F(x,y,y',y'',...,y^{(n)})=0.$$

Наивысший порядок производной, входящей в уравнение, определяет порядок дифференциального уравнения.

Пример

Найти функцию, удовлетворяющую уравнению (решить дифференциальное уравнение)

$$y+y'=1+2x.$$

Решение

Представим искомую функцию в виде многочлена по степеням x

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+....$$

Количество слагаемых не ограничено.

Тогда, $y'=a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+5a_5x^4+...$

Подставим y и y' в уравнение

$$\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \ldots\right) +$$

$$+ \left(a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + \ldots\right) = 1 + 2x.$$

Равенство многочленов левой и правой части означает равенство коэффициентов перед одинаковыми степенями x:

x^0: $a_0 + a_1 = 1$,

x^1: $a_1 + 2a_2 = 2$,

x^2: $a_2 + 3a_3 = 0$,

x^3: $a_3 + 4a_4 = 0$,

x^4: $a_4 + 5a_5 = 0$,

… .

Выразим коэффициенты через a_0:

$$a_1 = 1 - a_0,$$

$$a_2 = \frac{1}{2}(2 - a_1) = \frac{1}{2}(2 - (1 - a_0)) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{2}(1 + a_0),$$

$$a_3 = -\frac{1}{3}a_2 = -\frac{1}{3 \cdot 2}(1 + a_0) = -\frac{1}{3!}(1 + a_0),$$

$$a_4 = -\frac{1}{4}a_3 = \frac{1}{4!}(1 + a_0),$$

$$a_5 = -\frac{1}{5}a_4 = -\frac{1}{5!}(1 + a_0),$$

… .

Подставим выражения коэффициентов в y:

$$y = a_0 + (1 - a_0)x + \frac{1}{2}(1 + a_0)x^2 - \frac{1}{3!}(1 + a_0)x^3 + \frac{1}{4!}(1 + a_0)x^4 - \frac{1}{5!}(1 + a_0)x^5 + \ldots =$$

$$= \left[(a_0 + 1) - 1\right] + \left[2x - (a_0 + 1)x\right] +$$

$$+ \frac{1}{2}(1 + a_0)x^2 - \frac{1}{3!}(1 + a_0)x^3 + \frac{1}{4!}(1 + a_0)x^4 - \frac{1}{5!}(1 + a_0)x^5 + \ldots =$$

$$= 2x - 1 + (a_0 + 1)\left[1 + (-x) + \frac{(-x)^2}{2} + \frac{(-x)^3}{3!} + \frac{(-x)^4}{4!} + \frac{(-x)^5}{5!} + \ldots = \right]$$

$$= 2x - 1 + (a_0 + 1)e^{-x}.$$

Обозначим для упрощения записи число $a_0 + 1 = C$, получим

$y = 2x - 1 + Ce^{-x}$, $C \in \mathbb{R}$.

E. *Для решения физических задач.*

Пример из электростатики[1]

Электрический диполь – пара заряженных частиц, заряды которых равны по величине q и противоположны по знаку (расстояние между частицами r). Электростатический потенциал диполя в точке M находится по формуле

$$V = \frac{kq}{d_+} - \frac{kq}{d_-},$$

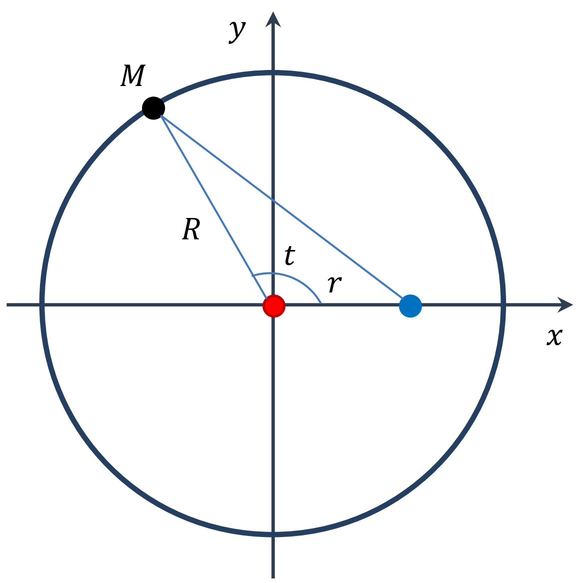
где k – константа Кулона,

d_+ – расстояние от точки M до положительного заряда,

d_- – расстояние от точки M до положительного заряда.

Пусть точка M принадлежит окружности

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t. \end{cases}$$



[1] Приведенный пример является обобщением задачи, рассмотренной в лекциях Д. Гилберта (http://calculus.seas.upenn.edu/?n=Main.Convergence).

Тогда

$$d_+ = R,$$
$$d_- = \sqrt{(r - R\cos t)^2 + R^2 \sin^2 t}\ .$$

Будем считать $r < R$, следовательно, $\dfrac{r}{R} < 1$.

$$V = \frac{kq}{R} - \frac{kq}{\sqrt{(r - R\cos t)^2 + R^2 \sin^2 t}} = \frac{kq}{R} - \frac{kq}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR\cos t}} =$$

$$= \frac{kq}{R}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{r}{R}\right)^2 + 1 - 2\left(\dfrac{r}{R}\right)\cos t}}\right) = \frac{kq}{R}\left(1 - (1+\alpha)^{-1/2}\right),$$

где $\alpha = \left(\dfrac{r}{R}\right)^2 - 2\left(\dfrac{r}{R}\right)\cos t$.

Заметим, что при $\cos t = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{r}{R}\right)$ (расстояния d_+ и d_- одинаковые) $\alpha = 0$.

Нас интересует случай $\alpha \neq 0$.

Далее воспользуемся биномиальным разложением $(1+\alpha)^{-1/2}$ по степеням α:

$$(1+\alpha)^{-1/2} = 1 - \frac{\alpha}{2} + o(\alpha).$$

Тогда

$$V = \frac{kq}{R}\left[1 - 1 + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{r}{R}\right)^2 - 2\left(\frac{r}{R}\right)\cos t\right) + o(\alpha)\right] = \frac{kq}{R}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^2 - \left(\frac{r}{R}\right)\cos t + o(\alpha)\right].$$

В зависимости от положения точки M возможно использование приближенных формул для электростатического потенциала диполя.

В частности, для $t = \dfrac{\pi}{2}$

$$V \approx \frac{kqr^2}{2R^3}.$$

Для $t = \pi$

$$V \approx \frac{kqr}{R^2}.$$

11. МОНОТОННОСТЬ ФУНКЦИИ. ЭКСТРЕМУМЫ

11.1. Условие монотонности функций.

11.2. Экстремум функции. Необходимое условие экстремума.

11.3. Первый достаточный признак экстремума.

11.4. Общая схема отыскания экстремума.

11.5. Исследование на экстремум с помощью производных высших порядков.

11.1. Условие монотонности функций

Определение

Функция $f(x)$ называется ***неубывающей*** (***невозрастающей***) на (a,b), если $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$, таких, что $x_1 < x_2$ справедливо неравенство $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$).

Теорема

Для того чтобы дифференцируемая на (a,b) функция $f(x)$ не убывала (не возрастала), необходимо и достаточно, чтобы $f'(x)$ на этом интервале была неотрицательной (неположительной).

Доказательство

Необходимость

Условие: $f(x)$ дифференцируема на (a,b).

Утверждение: $f'(x) \geq 0$.

Зафиксируем любые $x_1 < x_2$ из (a,b). По формуле Лагранжа:

$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1);$, $c \in (x_1, x_2)$.

По условию $f(x_2) \geq f(x_1)$, то есть $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$, $(x_2 - x_1) > 0$.

Следовательно, $\boxed{f'(c) \geq 0}$ (из формулы Лагранжа).

Достаточность

Условие: $f'(x) \geq 0 \;\; \forall x \in (a,b)$.

Утверждение: $f(x)$ не убывает.

Зафиксируем любые $x_1 < x_2$ из (a,b).

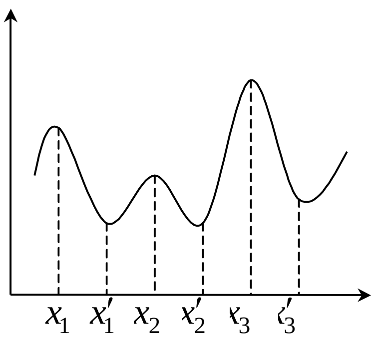
$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$.

По условию $f'(c) \geq 0$, $(x_2 - x_1) > 0 \Rightarrow \boxed{f(x_2) \geq f(x_1)}$.

11.2. Экстремум функции. Необходимое условие экстремума

Определение

Функция $f(x)$ имеет в точке x_1 ***локальный максимум*** (***минимум***), если $f(x_1 + \Delta x) < f(x_1)$ ($f(x_1 + \Delta x) > f(x_1)$) для любых $x_1 + \Delta x$ ($\Delta x > 0$ и $\Delta x < 0$) из достаточно малой окрестности точки x_1.



x_1, x_2, x_3 – точки локального максимума.

x_1', x_2', x_3' – точки локального минимума.

Локальный максимум и минимум объединим общим названием ***локальный экстремум***.

Замечание 1

Экстремум достигается только во внутренних точках $[a,b]$.

Замечание 2

Максимумы и минимумы не обязательно являются наибольшими и наименьшими значениями $f(x)$ на $[a,b]$.

Теорема (необходимое условие экстремума)

Если

1) $f(x)$ – дифференцируема;

2) x_1 – точка экстремума,

то

$$\boxed{f'(x_1)=0.}$$

Доказательство

Пусть для определенности x_1 – точка максимума. Тогда

$f(x_1+\Delta x)-f(x_1)<0$ для любого достаточного малого Δx.

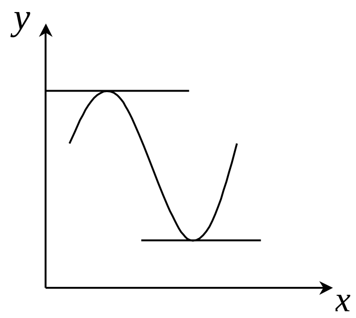
$\dfrac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}<0$, если $\Delta x>0$.

$\dfrac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}>0$, если $\Delta x<0$.

$f'(x_1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$.

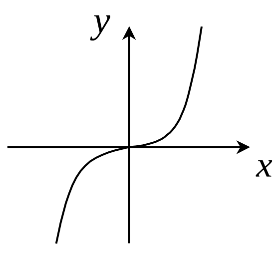
$\left.\begin{matrix} f'(x_1)\le 0 \\ f'(x_1)\ge 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{f'(x_1)=0}$, так как $f'(x_1)$ не зависит от способа стремления $\Delta x\to 0$.

Геометрический смысл необходимого условия экстремума



Если в точке локального экстремума существует касательная к графику функции, то она параллельна оси Ox.

Пример



Пример иллюстрирует необходимый, но не достаточный характер условия.

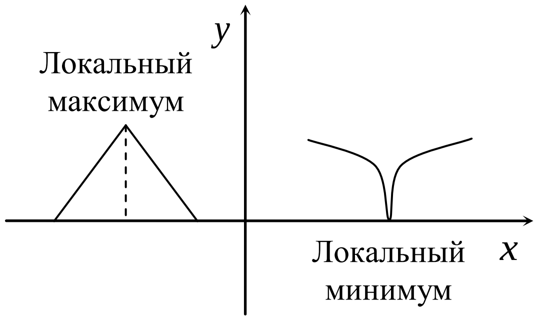
$f(x)=x^3$, $f'(0)=0$, но $x_1=0$ не является точкой экстремума.

Следствие 1

Если $f(x)$ дифференцируема на (a,b), то она ***может иметь*** экстремумы только в тех точках, где $f'(x_1)=0$.

Следствие 2

$f(x)$ может иметь экстремум в точках, где производная не существует.



11.3. Первый достаточный признак экстремума

Теорема 1 (для дифференцируемой функции)

Если

1) $f(x)$ дифференцируема всюду в некоторой окрестности точки c;

2) точка c является точкой возможного экстремума $f(x)$ ($f'(c)=0$),

тогда

1) если $f'(x)>0$ (<0) для $x<c$ и $f'(x)<0$ (>0) для $x>c$, то c – точка локального максимума (минимума);

2) если $f'(x)$ имеет один и тот же знак слева и справа от c, то экстремума в точке c нет.

Доказательство

1. Пусть $f'(x)>0$, $x<c$; $f'(x)<0$, $x>c$.

$x_0<c$,

$f(c)-f(x_0)=f'(\xi)(c-x_0)$ по теореме Лагранжа, где $\xi \in (x_0, c)$.

$f'(\xi)>0$, $(c-x_0)>0 \Rightarrow \boxed{f(c)>f(x_0)}\ \forall x_0<c$.

$x_0>c$,

$f(x_0)-f(c)=f'(\xi)(x_0-c)$.

$f'(\xi)<0$, $(x_0-c)>0 \Rightarrow \boxed{f(c)>f(x_0)}\ \forall x_0>c$.

Следовательно, c – точка максимума.

2. Пусть $f'(x)>0\ \forall x$ из окрестности c.

$x_0<c$:

$f(c)-f(x_0)=f'(\xi)(c-x_0)$.

$$\boxed{f(c)>f(x_0).}$$

$x_0>c$:

$f(x_0)-f(c)=f'(\xi)(x_0-c)$.

$$\boxed{f(x_0)>f(c).}$$

Таким образом, c не является точкой экстремума, что и требовалось доказать.

Теорема 1 (для функции, недифференцируемой в точке возможного экстремума)*

Если

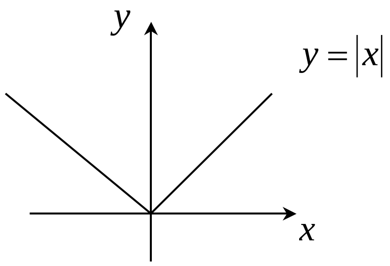
$f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки c за исключением самой точки c, и непрерывна в этой точке,

то

справедливо утверждение Теоремы 1.

(Без доказательства).

Пример



В точке $x=0$ функция $f(x)$ недифференцируема, но непрерывна.

$f'(x<0)<0$, $f'(x>0)>0$.

$x=0$ – точка локального минимума.

11.4. Общая схема отыскания экстремума

Пусть $f(x)$ непрерывна на интервале (a,b) и дифференцируема на этом интервале за исключением конечного числа точек.

1. Ищем точки возможного экстремума (критические):

   а) точки, где $f'(x)=0$;

   б) точки, где не существует $f'(x)$.

Располагаем их в порядке возрастания: $a<x_1<x_2<\ldots<x_n<b$.

2. Определяем *знак* $f'(x)$ на интервалах (a,x_1), (x_1,x_2), …, (x_n,b).

3. Вычисляем (в случае необходимости) $f(x_1)$, $f(x_2)$, …, $f(x_n)$.

4. Определяем *тип экстремума* по *Теореме 1* или *Теореме 1**.

Пример

$f(x)=3\sqrt[3]{x^2}-x^2$.

1. $f'(x)=2\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}-2x$.

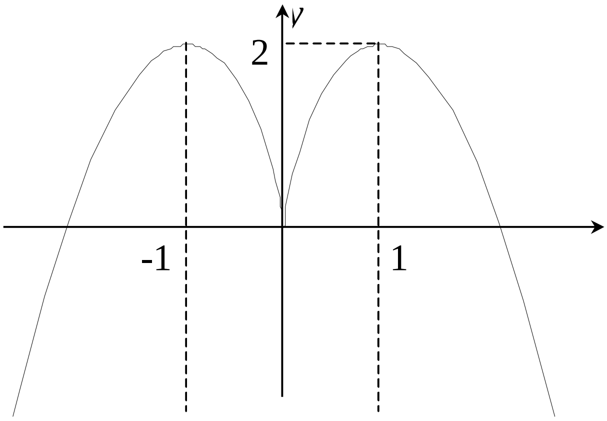
а) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}-2x=0$;

$$\boxed{x_1=-1},\ \boxed{x_2=1}.$$

б) $f'(x)$ не существует в точке $x_3=0$.

$$\boxed{x_3=0}.$$

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$
$f'(x)$	+	0	–	$\nexists$	+	0	–
		макс.		мин.		макс.	



11.5. Исследование на экстремум с помощью производных высших порядков

Теорема 2 (второй достаточный признак экстремума)

Если $f(x)$ имеет в критической точке c конечную вторую производную $f''(x)$, *тогда*

если $f''(c)>0$, то c – точка локального минимума;

если $f''(c)<0$, то c – точка локального максимума.

Доказательство

$$f''(c)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(c+\Delta x)-f'(c)}{\Delta x}.$$

Пусть $f''(c)>0$.

Так как c критическая точка, $f'(c)=0$.

Тогда, если $\Delta x<0$, то $f'(c+\Delta x)<0$,

если $\Delta x>0$, то $f'(c+\Delta x)>0$.

Таким образом, первая производная меняет знак с «–» на «+» при переходе через точку c. Следовательно, c – точка локального минимума.

Второе утверждение ($f''(c)<0$) доказывается аналогично.

Теорема 3 (третий достаточный признак экстремума)

Если

1) $f(x)$ имеет в критической точке c конечную производную порядка $2n$: $f^{(2n)}(c)$;

2) $f'(c)=f''(c)=\ldots=f^{(2n-1)}(c)=0$,

то

если $f^{(2n)}(c)>0$, c – точка локального минимума,

если $f^{(2n)}(c)<0$, c – точка локального максимума.

(Без доказательства).

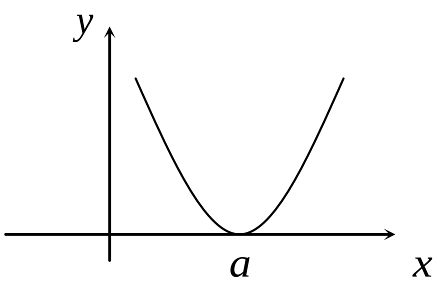
Пример

$f(x)=(x-a)^6$.

1) $f'(a)=f''(a)=\ldots=f^{(5)}(a)=0$;

2) $f^{(6)}(a)=6!>0$.

a – точка локального минимума.



12. НАПРАВЛЕНИЕ ВЫПУКЛОСТИ. ТОЧКИ ПЕРЕГИБА

12.1. Точки перегиба.

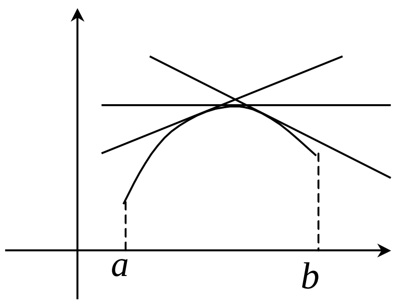
12.2. Общая схема отыскания перегиба.

12.1. Точки перегиба

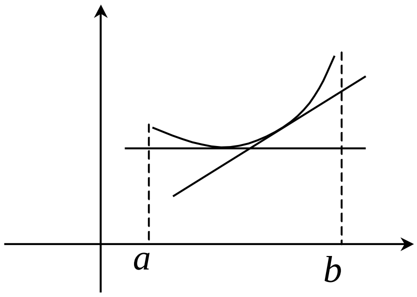
Определение

Говорят, что кривая обращена ***выпуклостью вверх*** (***вниз***) на (a,b), если все точки кривой лежат не выше (не ниже) любой касательной на (a,b).

Такие кривые называются ***выпуклыми*** (***вогнутыми***).



Выпуклая (не выше)



Вогнутая (не ниже)

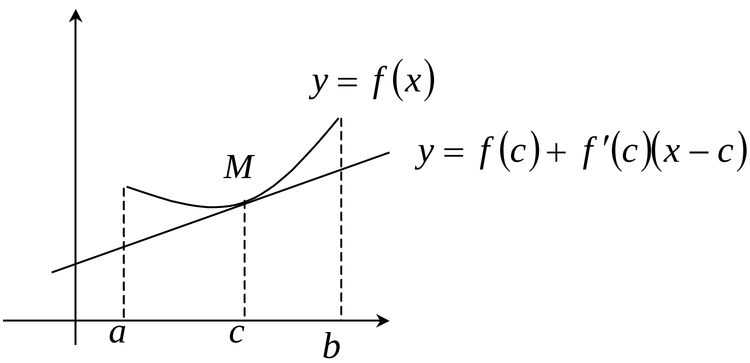
Теорема (достаточное условие выпуклости)

Если во всех точках (a,b) $f''(x) \le 0$ ($f''(x) \ge 0$),

то график $y = f(x)$ на (a,b) является выпуклым (вогнутым).

Доказательство

Пусть для определенности $f''(x) \ge 0$.



Фиксируем любую точку c на (a,b).

Уравнение касательной к кривой в точке $M(c, f(c))$

$$\bar{y} = f(c) + f'(c)(x-c).$$

Рассмотрим

$$y - \bar{y} = f(x) - f(c) - f'(c)(x-c).$$

Используя формулу Тейлора

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x-c)^2,$$

получаем

$$y - \bar{y} = \frac{f''(\xi)}{2!}(x-c)^2,$$

где точка ξ лежит между c и x.

По условию $f''(\xi) \geq 0 \Rightarrow \boxed{y - \bar{y} \geq 0}$.

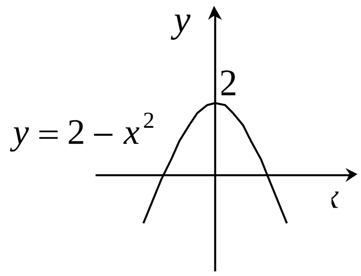
Таким образом, из условия $f''(x) \geq 0$ следует вогнутость графика.

Аналогично, из условия $f''(x) \leq 0$ следует выпуклость графика.

Примеры

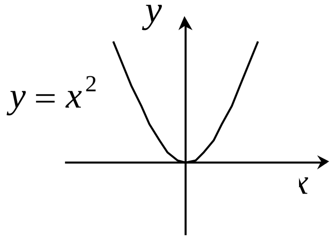
1. $y = 2 - x^2$,

$y'' = -2$ (график выпуклый).



2. $y = x^2$,

$y'' = 2$ (график вогнутый).



Определение

Точка $x=c$ называется ***точкой перегиба функции*** $y=f(x)$, если существует такая окрестность точки c, в пределах которой график $y=f(x)$ слева и справа от c имеет различное направление выпуклости. При этом точка $M(c,f(c))$ называется ***точкой перегиба графика функции*** $y=f(x)$.

Теорема (необходимое условие перегиба)

Если

1) существует $f''(x)$ на (a,b);
2) c – точка перегиба функции $y=f(x)$, $c\in(a,b)$,

то

$$f''(c)=0.$$

(Без доказательства).

Следствие 1

Если $f(x)$ дважды дифференцируема на (a,b), то перегиб функции возможен только в тех точках, где $f''(x)=0$.

Следствие 2

$f(x)$ может иметь перегиб в тех точках, где $f''(x)$ не существует.

Теорема (достаточное условие перегиба)

Если

1) c – точка возможного перегиба $f(x)$;
2) $f(x)$ дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки c за исключением, быть может, самой точки c,

то

1) если $f''(x)$ меняет знак при переходе через c, то в точке c – перегиб;
2) если $f''(x)$ не меняет знак, то перегиба нет.

Доказательство

Пусть $f''(x)\geq 0$, $x<c$ (слева); $f''(x)\leq 0$, $x>c$ (справа).

Тогда по теореме о достаточном условии выпуклости, слева – вогнутая кривая, справа – выпуклая кривая, в точке c – перегиб.

12.2. Общая схема отыскания перегиба

1. Поиск *точек возможного перегиба*:

   а) точки, где $f''(x)=0$;

   б) точки, где $f''(x)$ не существует ($a<x_1<x_2<\ldots<x_n<b$).

2. Определение *знака* $f''(x)$ в областях (a,x_1), (x_1,x_2), …, (x_n,b).

3. Установление *наличия перегиба* (достаточное условие перегиба).

13. КОМПЛЕКСНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА

13.1. Общая схема исследования функции и построения ее графика.

13.2. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке.

13.1. Общая схема исследования функции и построения ее графика

Рассмотрим $y=f(x)$. Исследование функции состоит из трех этапов.

I. Информация об особенностях $f(x)$ без производных:

   1) область определения $f(x)$;

   2) четность ($f(x)=f(-x)$), нечетность ($f(x)=-f(-x)$); периодичность ($f(x)=f(x+T)$, T – период для любого x). Сужение области изменения x для дальнейшего исследования;

   3) асимптоты:

      а) вертикальные – $\boxed{x=a}$, где a – точка разрыва второго рода;

      б) наклонные – $\boxed{\bar{y}=kx+b}$.

   4) точки пересечения с осями координат.

II. Информация из вида $f'(x)$ (схема исследования на экстремум).

III. Информация из вида $f''(x)$ (схема исследования на перегиб).

Результаты этапов I, II, III заносятся в таблицу, с ее помощью строится график: вначале проводятся асимптоты, ставятся опорные точки, найденные в I, II, III, проводится линия.

Примеры

1. $y = xe^{-4x}$.

I. $f(x)$:

1) $x \in (-\infty, +\infty)$;

2) функция общего вида;

3) асимптоты:

а) $f(x) = xe^{-4x}$ непрерывна всюду, нет вертикальных асимптот;

б) $k_+ = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^{4x}} = 0$, $b_+ = 0$,

$\boxed{\bar{y} = 0}$ – наклонная (горизонтальная) асимптота при $x \to +\infty$;

так как $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ наклонная (горизонтальная) асимптота при $x \to -\infty$ отсутствует;

4) $\boxed{x_1 = 0}$, $\boxed{y_1 = 0}$ – точка пересечения с осями.

II. $f'(x)$:

$$y' = e^{-4x} - 4xe^{-4x} = e^{-4x}(1-4x),$$

1) $y' = 0 \Rightarrow \boxed{x_2 = \dfrac{1}{4}}$;

2) отсутствуют точки, для которых производная не существует.

III. $f''(x)$:

$$y'' = -4e^{-4x}(1-4x) - 4e^{-4x} = e^{-4x}(16x-8),$$

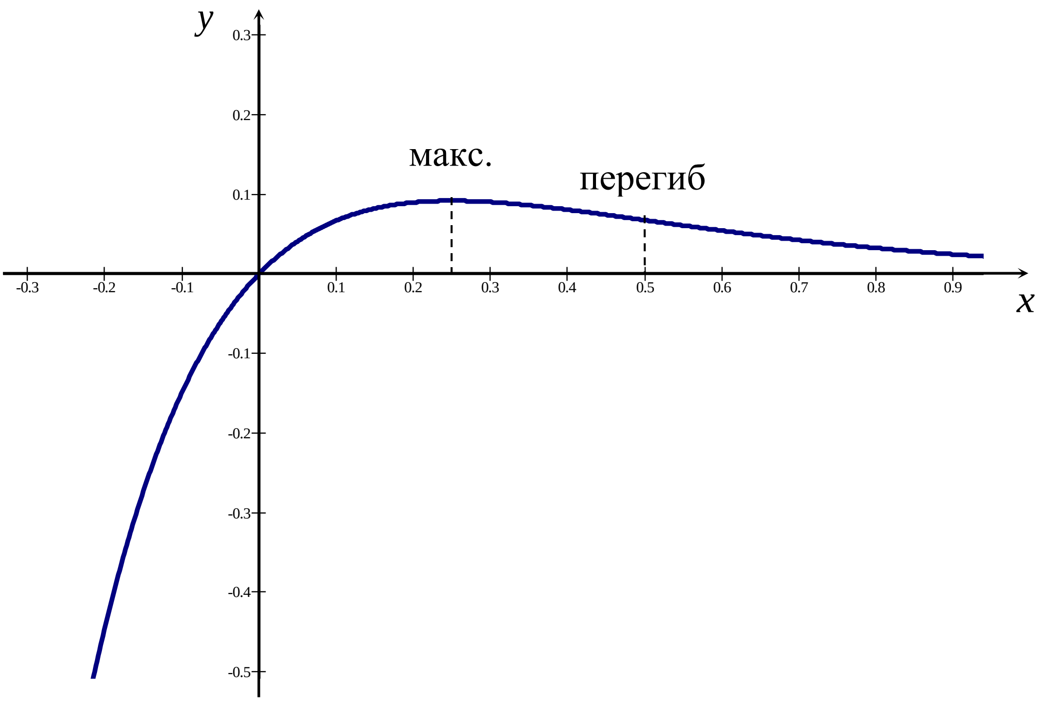
1) $y'' = 0 \Rightarrow \boxed{x_3 = \dfrac{1}{2}}$;

2) отсутствуют точки, для которых вторая производная не существует.

I, II, III $\Rightarrow\ -\infty<0<\frac{1}{4}<\frac{1}{2}<+\infty$.

x	$(-\infty,0)$	0	$\left(0,\frac{1}{4}\right)$	$\frac{1}{4}$	$\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$
y	–	0	+	$\frac{1}{4e}$	+	$\frac{1}{2e^2}$	+
y'	+	+	+	0	–	–	–
y''	–	–	–	–	–	0	+
	↗⌒	⌒	↗⌒	макс.	↘⌒	перегиб	↘◡

График



2. $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t), \end{cases}\quad t\in(-\infty,+\infty).$

Рассмотрим случай, когда $a>0$.

I. $f(x)$:

1) $x\in(-\infty,+\infty)$;

2) $x(-t)=a(-t+\sin t)=-a(t-\sin t)=-x(t)$,

$y(-t)=a(1-\cos(-t))=a(1-\cos t)=y(t)$,

функция четная, ее график симметричен относительно оси ординат;

учитывая периодичность тригонометрических функций, период данной функции $T=2a\pi$, дальнейшее исследование можно ограничить отрезком $[0, 2a\pi]$;

3) асимптоты:

а) функция не имеет точек разрыва, вертикальных асимптот нет;

б) функция периодична, следовательно, наклонных асимптот нет;

4) точки пересечения с осями координат:

с осью абсцисс

$$y(t)=0 \;\Rightarrow\; \cos t=1,\; t=2\pi k,\, k\in Z,$$

$$x(2\pi k)=a(2\pi k-\sin(2\pi k))=2a\pi k,\, k\in Z;$$

с осью ординат

$$x(t)=0 \;\Rightarrow\; t-\sin t=0,\; t=0,$$

$$y(0)=0.$$

II. y'_x:

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}=\frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}=ctg\frac{t}{2}.$$

1) $y'_x=0 \;\Rightarrow\; \frac{t}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi k,\, k\in Z,\; t=\pi+2\pi k,\, k\in Z,$

$$x(\pi+2\pi k)=a(\pi+2\pi k-\sin(\pi+2\pi k))=a(\pi+2\pi k),\, k\in Z,$$

$$y(\pi+2\pi k)=a(1-\cos(\pi+2\pi k))=2a;$$

2) $\nexists y'_x$: $\frac{t}{2}=\pi k,\, k\in Z,\; t=2\pi k,\, k\in Z,$

$$x(2\pi k)=a(2\pi k-\sin(2\pi k))=2a\pi k,\, k\in Z,$$

$$y(2\pi k)=a(1-\cos(2\pi k))=0.$$

III. y''_{xx}:

$$y''_{xx}=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}=\frac{\left(ctg\frac{t}{2}\right)'}{a(1-\cos t)}=\frac{-1}{a\cdot 2\sin^2\frac{t}{2}\cdot 2\sin^2\frac{t}{2}}=\frac{-1}{4a\cdot\sin^4\frac{t}{2}}.$$

1) $y'' = 0 \Rightarrow$ решений нет.

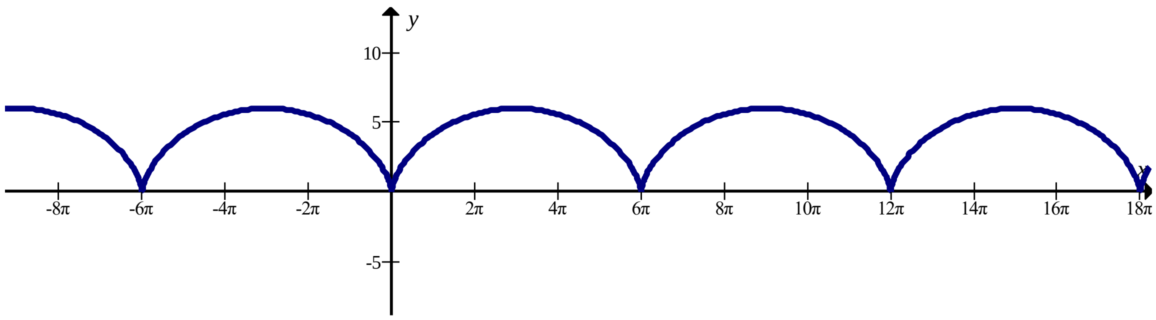
2) $\nexists y''_{xx}$: $\sin\frac{t}{2} = 0$, $\frac{t}{2} = \pi k, k \in Z$, $t = 2\pi k, k \in Z$.

Точки, в которых вторая производная не существует имеют координаты $(2\pi k, 0), k \in Z$.

x	0	$(0, a\pi)$	$a\pi$	$(a\pi, 2a\pi)$	$2a\pi$
y	0	$+$	$2a$	$+$	0
y'	$\nexists$	$+$	0	$-$	$\nexists$
y''	$\nexists$	$-$	$-$	$-$	$\nexists$
	миним.	$\nearrow \frown$	макс.	$\searrow \frown$	миним.

График

$a = 3$



В примере рассмотрена кривая, которая носит название *циклоида*. Она совпадает с траекторией точки окружности радиуса a, которая катится без скольжения по оси абсцисс.

13.2. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке

Рассмотрим $f(x)$, непрерывную на $[a,b]$. По теореме Вейерштрасса $f(x)$ достигает на $[a,b]$ своих $\sup f(x)$ и $\inf f(x)$.

$\sup f(x)$ – *наибольшее значение* $f(x)$ на $[a,b]$.

$\inf f(x)$ – *наименьшее значение* $f(x)$ на $[a,b]$.

Для определения значений $\sup f(x)$ и $\inf f(x)$ следует найти:

1) значения $f(x)$ в точках возможного экстремума;

2) значения $f(x)$ на концах интервала $[a,b]$.

Из результатов 1) и 2) выбираются $\sup f(x)$ и $\inf f(x)$.

14. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

14.1. Векторная функция скалярного аргумента

Определение

Если каждому значению $t \in D$ (множество чисел) поставлен в соответствие вектор $\vec{r}(t) \in R^3$, то говорят, что на множестве D задана ***вектор-функция*** $\vec{r}(t)$.

Под $\vec{r}(t)$ можно понимать свободные векторы или радиус-векторы с закрепленным началом.

Задание вектор-функции эквивалентно заданию трех скалярных функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ – координат вектора $\vec{r}(t)$.

Обозначения вектор-функции:

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \tag{1}$$

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}\,, \tag{2}$$

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases} \tag{3}$$

(1) и (2) – векторные формы записи $\vec{r}(t)$,

(3) – координатная форма записи.

Если t пробегает все значения из D, конец вектора $\vec{r}(t)$ описывает линию, называемую ***годографом*** вектор-функции $\vec{r}(t)$ (начало $\vec{r}(t)$ закреплено).

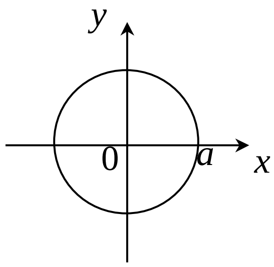
Другими словами: годограф вектор-функции $\vec{r}(t)$ – геометрическое место концов $\vec{r}(t)$, то есть точек $M(x(t), y(t), z(t))$, траектория точки M.

Пример

$$\vec{r}(t) = a\cos t\vec{i} + a\sin t\vec{j}\,.$$

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \end{cases} \quad 0 \le t < 2\pi.$$

Годографом является окружность



Рассмотрим координатную форму $\vec{r}(t)$. Уравнения (3) являются параметрическими уравнениями линии в пространстве.

Таким образом, любую линию, заданную параметрическими уравнениями (3), можно рассматривать как годограф вектор-функции и наоборот.

Частным случаем (3) являются

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \tag{3*}$$

– параметрические уравнения линии на плоскости.

(3*) задает годограф двумерной вектор-функции $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$.

Если в уравнении (3*) исключить параметр t, то (3*) преобразуется в обычное уравнение кривой на плоскости вида $f(x, y) = 0$.

Примеры

1. ***Окружность*** – годограф вектор-функции $\vec{r}(t) = (a\cos t, a\sin t)$.

$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t \end{cases}$ – параметрические уравнения.

Возведение в квадрат обеих частей каждого уравнения

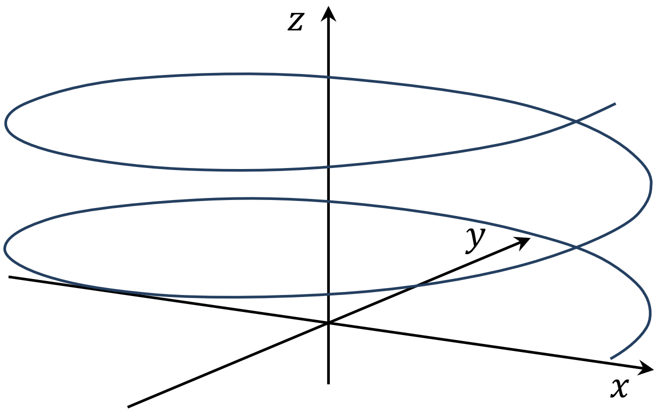
$$\begin{cases} x^2 = a^2\cos^2 t, \\ y^2 = a^2\sin^2 t, \end{cases}$$

с последующим почленным сложением, позволяющим исключить t, приводит к каноническому уравнению окружности

$$\boxed{x^2 + y^2 = a^2}.$$

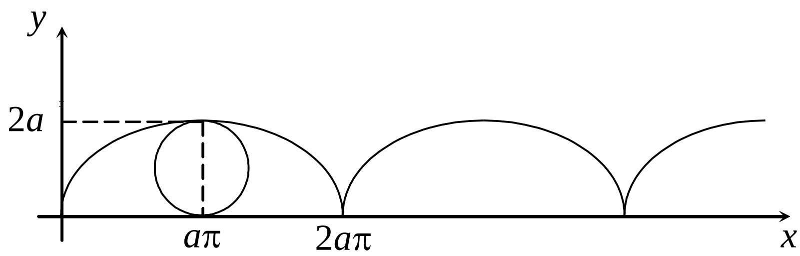
2. ***Винтовая линия*** – годограф радиус-вектора точки, движущейся по окружности в плоскости, параллельной OXY, и вдоль оси OZ с постоянной скоростью.

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \\ z = bt. \end{cases}$$



3. ***Циклоида*** – траектория точки окружности, которая без скольжения катится вдоль оси OX.

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$$



Предел и непрерывность вектор-функции в точке

Пусть $\vec{r}(t)$ определена в некоторой окрестности t_0 за исключением, быть может, самой t_0.

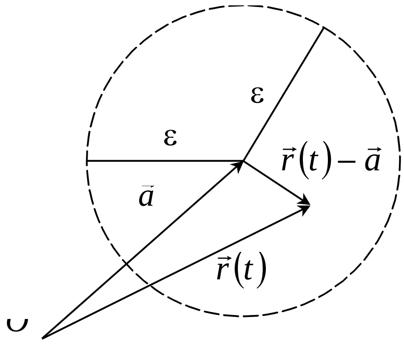
Определение

Вектор $\vec{a}$ называется ***пределом*** вектор-функции $\vec{r}(t)$ при $t \to t_0$, если $\forall \varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из условия $|t - t_0| < \delta$ следует, что $|\vec{r}(t) - \vec{a}| < \varepsilon$.

Обозначение

$$\boxed{\lim_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{a}\,.}$$

Геометрический смысл



Лемма

$\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{a}$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{t\to t_0}\left|\vec{r}(t)-\vec{a}\right|=0$ (см. чертеж).

Теорема 1

Для того чтобы

$$\lim_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{a}\,,$$

необходимо и достаточно

выполнение равенств

$$\boxed{\lim_{t\to t_0}x(t)=a_x,\ \lim_{t\to t_0}y(t)=a_y,\ \lim_{t\to t_0}z(t)=a_z}$$

(здесь $\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$, $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$).

Доказательство

Необходимость

Условие: $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{a}$.

Утверждение: $\lim\limits_{t\to t_0}x(t)=a_x$, $\lim\limits_{t\to t_0}y(t)=a_y$, $\lim\limits_{t\to t_0}z(t)=a_z$.

Рассмотрим

$\left|\vec{r}(t)-\vec{a}\right|=\sqrt{(x(t)-a_x)^2+(y(t)-a_y)^2+(z(t)-a_z)^2}\geq\left|x(t)-a_x\right|$.

По Лемме $\left|\vec{r}(t)-\vec{a}\right|\to 0$ при $t\to t_0$.

Следовательно $\left(x(t)-a_x\right)\to 0$, то есть $\boxed{\lim\limits_{t\to t_0} x(t)=a_x}$.

Аналогично доказываются утверждения для $y(t)$ и $z(t)$.

Достаточность

По условию $\lim\limits_{t\to t_0} x(t)=a_x$, $\lim\limits_{t\to t_0} y(t)=a_y$, $\lim\limits_{t\to t_0} z(t)=a_z$.

Следовательно, $\left(x(t)-a_x\right)\to 0$, $\left(y(t)-a_y\right)\to 0$, $\left(z(t)-a_z\right)\to 0$ при $t\to t_0$.

Значит и $\sqrt{\left(x(t)-a_x\right)^2+\left(y(t)-a_y\right)^2+\left(z(t)-a_z\right)^2}\to 0$, тогда по Лемме $\boxed{\lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}(t)=\vec{a}}$, что и требовалось доказать.

Следствие

$$\boxed{\lim_{t\to t_0} \vec{r}(t)=\left(\lim_{t\to t_0} x(t),\lim_{t\to t_0} y(t),\lim_{t\to t_0} z(t)\right)}.$$

Свойства пределов вектор-функций

1°. $\lim\limits_{t\to t_0}\left[\vec{r}_1(t)+\vec{r}_2(t)\right]=\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}_1(t)+\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}_2(t)$.

2°. $\lim\limits_{t\to t_0} f(t)\cdot\vec{r}(t)=\lim\limits_{t\to t_0} f(t)\cdot\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}(t)$ ($f(t)$ – скалярная функция).

3°. $\lim\limits_{t\to t_0}\left(\vec{r}_1(t),\vec{r}_2(t)\right)=\left(\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}_1(t),\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}_2(t)\right)$.

4°. $\lim\limits_{t\to t_0}\left[\vec{r}_1(t)\times\vec{r}_2(t)\right]=\left[\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}_1(t)\times\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}_2(t)\right]$.

Определение

Вектор-функция, определенная в некоторой окрестности точки t_0, называется ***непрерывной*** в точке t_0, если:

1) существует $\vec{r}(t_0)$;

2) существует $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}(t)$;

3) $\boxed{\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{r}(t_0)}$.

Из Теоремы 1 следует Теорема 1*.

*Теорема 1**

Для того чтобы
вектор-функция $\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$ была непрерывна в точке t_0,
необходимо и достаточно, чтобы
при $t\to t_0$ были непрерывны функции $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$.

Производная вектор-функции

Определение

Производной вектор-функции $\vec{r}(t)$ в точке t_0 называется $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\vec{r}(t_0+\Delta t)-\vec{r}(t_0)}{\Delta t}$.

Обозначение: $\vec{r}\,'(t_0)$.

Таким образом, по определению

$$\boxed{\vec{r}\,'(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t_0+\Delta t)-\vec{r}(t_0)}{\Delta t}.}$$

Из Теоремы 1 следует Теорема 1**.

*Теорема 1***

Для того чтобы
$\vec{r}(t)$ имела производную в точке t_0,
необходимо и достаточно, чтобы
$x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ имели производные в точке t_0.
($\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$).

Следствие

$$\boxed{\vec{r}\,'(t)=(x'(t),y'(t),z'(t)).}$$

Определение

Вектор-функция $\vec{r}(t)$ называется ***дифференцируемой*** в точке t_0, если существует $\vec{r}\,'(t_0)$.

Легко показать, что приращение вектор-функции, дифференцируемой в точке t_0, в окрестности этой точки представимо в виде

$$\Delta\vec{r}=\vec{a}\Delta t+\vec{\varepsilon}(\Delta t)\cdot\Delta t,$$

где $\vec{a}$ – вектор не зависящий от Δt, $\vec{\varepsilon}(\Delta t)\to 0$ при $\Delta t\to 0$.

Здесь $\vec{a}\Delta t$ – главная линейная часть приращения $\vec{r}(t)$, называемая ***дифференциалом*** вектор-функции и обозначаемая $d\vec{r}$.

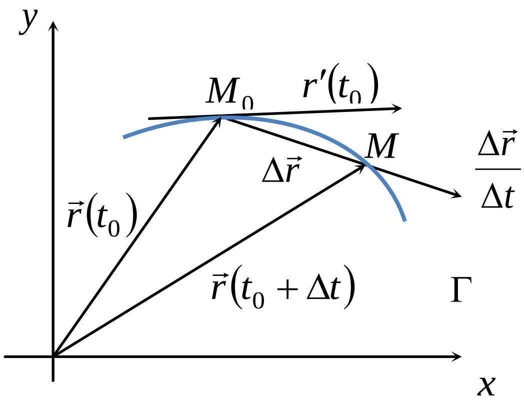
Таким образом, для дифференцируемой функции

$$\boxed{\Delta\vec{r} = d\vec{r} + \vec{\varepsilon}(\Delta t)\cdot\Delta t.}$$

Очевидно, что если $\vec{r}(t)$ дифференцируема в t_0, то $\vec{r}(t)$ непрерывна в t_0.

Геометрический смысл производной вектор-функции

Рассмотрим вектор-функцию $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$, Γ – ее годограф.



$M_0(x(t_0), y(t_0))$, $M(x(t_0+\Delta t), y(t_0+\Delta t))$ – точки годографа.

Если $t \to t_0 \Rightarrow M \to M_0$, $\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \to \vec{r}\,'(t_0)$.

Геометрический смысл

Из чертежа понятно, что $\vec{r}\,'(t_0)$ направлен по касательной к графику в точке M_0 в сторону возрастания параметра t.

Уравнение касательной к кривой в точке, соответствующей значению параметра t_0:

$$\vec{r} = \vec{r}(t_0) + \vec{r}\,'(t_0)\cdot\theta \ \ (\theta \in \mathbb{R} \ \text{– параметр})$$

– векторная форма записи,

$$\begin{cases} x = x(t_0) + x'(t_0)\cdot\theta, \\ y = y(t_0) + y'(t_0)\cdot\theta, \\ z = z(t_0) + z'(t_0)\cdot\theta \end{cases}$$

– координатная форма записи.

После исключения θ, получим канонические уравнения прямой в пространстве:

$$\frac{x-x(t_0)}{x'(t_0)}=\frac{y-y(t_0)}{y'(t_0)}=\frac{z-z(t_0)}{z'(t_0)}.$$

Свойства операции дифференцирования вектор-функции

1°. $\left(\vec{a}\pm\vec{b}\right)'=\vec{a}'\pm\vec{b}'$.

2°. $(\alpha\vec{a})'=\alpha\vec{a}'$, $\alpha - const$.

3°. $\vec{a}'=0$, $\vec{a}-const$.

4°. $(\varphi(t)\vec{a}(t))'=\varphi'(t)\vec{a}(t)+\varphi(t)\vec{a}'(t)$.

5°. $\left(\vec{a},\vec{b}\right)'=\left(\vec{a}',\vec{b}\right)+\left(\vec{a},\vec{b}'\right)$.

6°. $\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]'=\left[\vec{a}'\times\vec{b}\right]+\left[\vec{a}\times\vec{b}'\right]$.

7°. $\vec{a}'(\varphi(t))=\vec{a}'_{\varphi}\cdot\varphi'(t)$.

14.2. Дифференциальные характеристики кривых

Рассмотрим вектор-функцию $\vec{r}(t)$. Пусть $s=s(t)$ – текущая длина дуги кривой, являющейся годографом вектор-функции $\vec{r}(t)$.

Уравнение $\vec{r}=\vec{r}(s)$, задающее вектор-функцию через параметр s, называется *натуральным*.

При изменении t функция $s(t)$ возрастает.

Дифференциал длины дуги плоской кривой:

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}\,.$$

При этом, если

1) кривая задана уравнением в декартовых координатах $y=f(x)$,

$$ds=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx;$$

2) кривая задана параметрическими уравнениями $\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\end{cases}$,

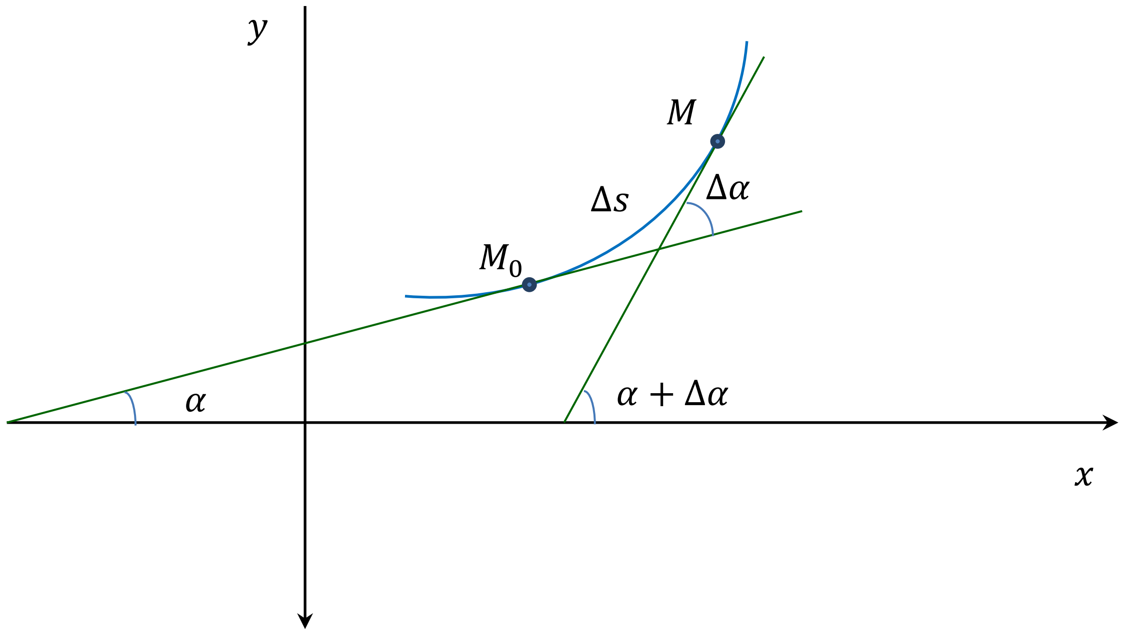
$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt\,;$$

3) кривая задана уравнением в полярных координатах $r = r(\varphi)$,

$$ds = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}\, d\varphi\,.$$

Рассмотрим годограф двумерной вектор-функции.

Пусть α – угол, образованный положительным направлением касательной в точке M_0 (в сторону возрастания s) с положительным направлением оси абсцисс.



Длина дуги $\overset{\frown}{M_0 M} = \Delta s$, угол $\Delta\alpha$ между положительными направлениями касательных в точках M_0 и M – угол смежности.

Приведем несколько дифференциальных характеристик плоских кривых, используемых в прикладных задачах, в том числе в физике, механике, сопротивлении материалов. Доказательства соответствующих формул можно найти в учебнике Е.Е. Ивановой «Дифференциальное исчисление функций одного переменного»[2], стр. 262.

---

[2] Иванова, Елена Евгеньевна. Дифференциальное исчисление функций одного переменного: Учебник для втузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1998 .– 408 с. – (Математика в техническом университете ; Вып. II).

1. *Кривизна кривой*

Кривизна кривой в точке M_0 – это число $K = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$.

Для задания кривой:

1) уравнением в декартовых координатах $y = f(x)$,

$$K = \frac{|y''(x)|}{\left(1 + (y'(x))^2\right)^{\frac{3}{2}}};$$

2) параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$,

$$K = \frac{|x'y'' - y'x''|}{\left(x'^2 + y'^2\right)^{\frac{3}{2}}};$$

3) уравнением в полярных координатах $r = r(\varphi)$,

$$K = \frac{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}{\left(r^2 + r'^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

2. *Радиус кривизны*

Радиусом кривизны в точке M_0 называется величина, обратная кривизне в данной точке

$$R = \frac{1}{K}.$$

3. *Центр кривизны*

На нормали, проведенной к кривой в точке M_0 отложим отрезок M_0C, равный R, полученная точка $C(c_1, c_2)$ называется *центром кривизны* в точке M_0

$$c_1 = x - \frac{y'\left(1 + y'^2\right)}{y''}, c_2 = y + \frac{1 + y'^2}{y''}.$$

Геометрическое место центров кривизны кривой называется ее *эволютой*. *Эвольвентой* кривой называется кривая, для которой данная кривая является эволютой.

15. МЕХАНИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ ФУНКЦИИ

15.1. Механический смысл первой производной.

15.2. Механический смысл второй производной.

15.1. Механический смысл первой производной

Рассмотрим движение точки по прямой.

Пусть функция $S = f(t)$, определяющая путь, пройденный точкой к моменту времени t, задает закон движения точки. Тогда очевидно, что $\dfrac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$ – ***средняя скорость движения*** точки за промежуток времени Δt.

$$\boxed{v = f'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}}$$

– ***мгновенная скорость движения*** в момент времени t.

Пример

Пусть закон движения точки задан формулой $S = \dfrac{gt^2}{2}$.

Скорость движения находится путем дифференцирования функции S: $v(t) = gt$.

Механический смысл производной вектор-функции

Если t – время, то для вектор-функции $\vec{r}(t)$ вектор $\vec{r}'(t_0)$ – ***вектор скорости*** точки, движущейся по годографу в момент t_0.

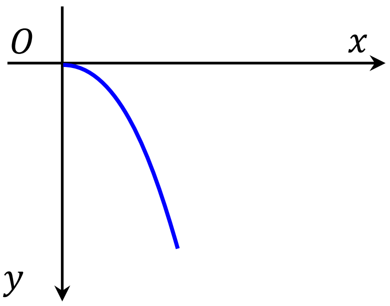
Примеры

1. Найти скорость тела, движущегося по закону

$$\begin{cases} x = v_0 t, \\ y = \dfrac{gt^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \vec{S}(t) = \left(v_0 t, \frac{gt^2}{2}\right), \ \vec{v}(t) = \vec{S}'(t) = (v_0, gt).$$

Траектория тела – годограф $\vec{S}(t)$, после исключения параметра описывается уравнением:

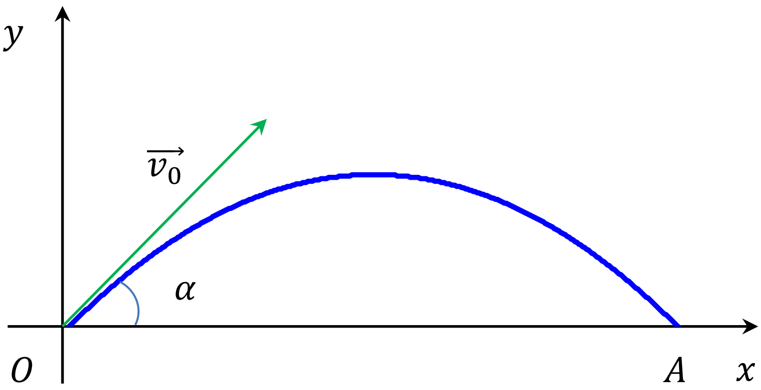
$$\boxed{y = \frac{g}{2v_0^2} x^2} \text{ – парабола.}$$



2. *Закон движения материальной точки, брошенной в вертикальной плоскости Oxy под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0, задается формулами (без учета сопротивления воздуха)

$$\begin{cases} x = v_0 t\cos\alpha, \\ y = v_0 t\sin\alpha - \dfrac{gt^2}{2}, \end{cases}$$

где t – время, g – ускорение силы тяжести.



Найти дальность полета и величину скорости движения материальной точки.

Перейдем от параметрического к явному заданию функции. Выразим t через x: $t = \dfrac{x}{v_0\cos\alpha}$. Подставим $t(x)$ в выражение для y

$$y = v_0 t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2} = \frac{v_0 x\sin\alpha}{v_0\cos\alpha} - \frac{g}{2}\left(\frac{x}{v_0\cos\alpha}\right)^2.$$

Получили уравнение траектории движения материальной точки

$$y = xtg\alpha - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2.$$

График функции $y(x)$ – парабола, пересекает ось абсцисс в точках O и A. Дальность полета – длина отрезка OA или x_A.

Решая уравнение $y(x)=0$, находим $x_A = \dfrac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$ – дальность полета.

Вектор скорости $\vec{v} = \left(\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}\right)$.

Дифференцируем функции $x(t)$ и $y(t)$:

$x' = v_0 \cos\alpha,$
$y' = v_0 \sin\alpha - gt.$

Величина скорости $|\vec{v}| = \sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{v_0^2 - 2v_0 gt \sin\alpha + g^2 t^2}$.

Более широко – если функция описывает изменение величины в некотором процессе, протекающем во времени, ее производная по времени – *скорость изменения* величины.

Пример

Закон охлаждения Ньютона $T(t) = T_s + (T_0 - T_s)e^{-kt}$,

T – температура тела,

T_s – температура окружающей среды,

T_0 – начальная температура тела,

k – коэффициент теплопроводности.

Определим скорость изменения температуры тела через 10с, если избыточная температура в начальный момент времени равна $20^\circ C$, $k = -0{,}002\, c^{-1}$.

Избыточная температура в начальный момент времени $T_0 - T_s = 20^\circ C$, в момент времени t – $\Theta(t) = T(t) - T_s = 20e^{0{,}002t}$.

Скорость изменения температуры $\Theta' = 20 \cdot 0{,}002e^{0{,}002t} = 0{,}04e^{0{,}002t}$,

$\Theta'(10) = 0{,}04e^{0{,}02} \approx 0{,}041^\circ C / c$.

15.2. Механический смысл второй производной

Пусть функция $S = f(t)$, определяющая путь, пройденный точкой к моменту времени t, задает закон прямолинейного движения точки,

$v = f'(t)$ – скорость в момент времени t,

$v + \Delta v$ – скорость в момент времени $t + \Delta t$,

$\dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ – ***среднее ускорение*** точки за время Δt,

$v'(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = a$ – ***ускорение*** точки в момент времени t.

$$\boxed{a = f''(t)}$$

Вторая производная от перемещения по времени равна величине ***ускорения*** прямолинейного движения точки.

Пример

Тело движется по закону $S = ae^{t} + be^{-t}$.

Ускорение $a = S'' = ae^{t} + be^{-t}$. Для данной зависимости $S(t)$ ускорение численно равно пройденному пути.

Механический смысл второй производной вектор-функции

Если t – время, то для вектор-функции $\vec{r}(t)$ вектор $\vec{r}''(t_0) = \vec{v}'(t_0) = \vec{w}$ – ***вектор ускорения*** точки, движущейся по годографу в момент t_0.

Пример

Закон движения точки определяется заданием ее радиус вектора $\vec{r} = t^3\vec{i} - 3t^2\vec{j} + 2\vec{k}$. Найти величину и направление ускорения движения точки в любой момент времени.

Первая производная вектор-функции определяет вектор скорости движения точки $\vec{r}\,' = 3t^2\,\vec{i} - 6t\,\vec{j} + 0\,\vec{k}$.

Вторая производная – вектор ускорения

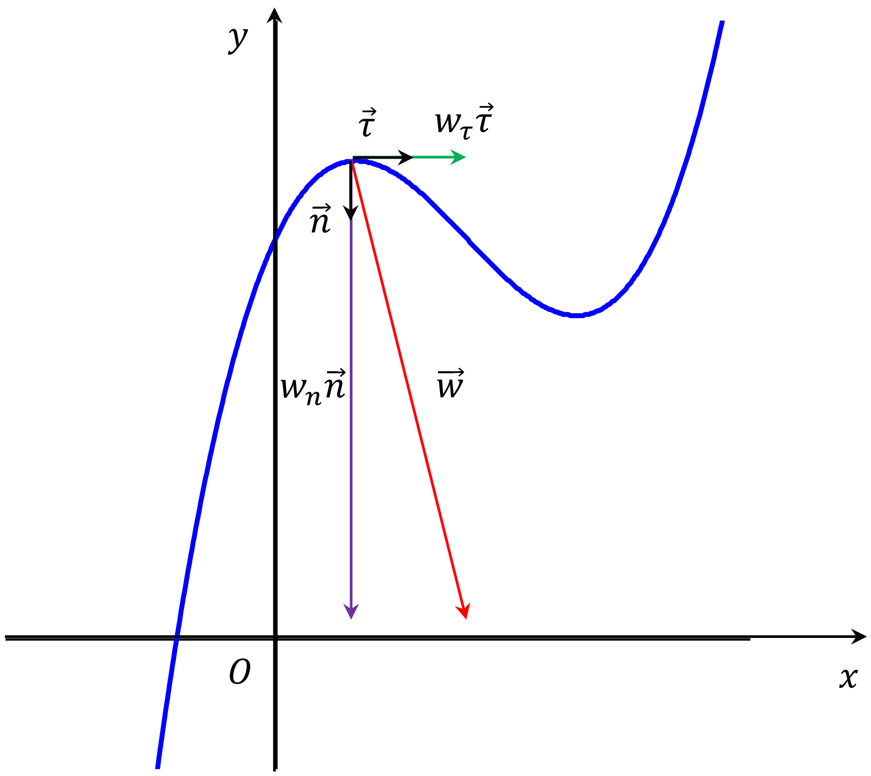
$\vec{w} = \vec{r}\,'' = 6t\,\vec{i} - 6\,\vec{j}$.

Величина ускорения

$$|\vec{w}| = \sqrt{(6t)^2 + (-6)^2} = 6\sqrt{t^2+1}.$$

Для решения прикладных задач часто требуется найти разложение вектора ускорения $\vec{w}$ не по базису $\vec{i}$, $\vec{j}$, а его выражение через векторы, направленные по касательной и нормали в соответствующей точке годографа. Пусть $\vec{\tau}$ и $\vec{n}$ – единичные векторы, направленные соответственно по касательной и нормали к кривой.

Вектор ускорения можно представить в виде $\vec{w} = w_\tau \vec{\tau} + w_n \vec{n}$ – сумма тангенциальной (первое слагаемое) и нормальной (второе слагаемое) составляющих.



Найдем тангенциальную и нормальную составляющие ускорения.

Вектор $\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t)$ коллинеарен вектору $\vec{\tau}$: $\vec{v}(t) = v\,\vec{\tau}$.

Величина w_τ является скалярной проекцией вектора $\vec{w}$ на направление вектора $\vec{v}$

$$w_\tau = np_{\vec{v}}\vec{w} = \cos\left(\widehat{\vec{w},\vec{v}}\right)\cdot|\vec{w}| = \frac{(\vec{w},\vec{v})}{|\vec{w}|\cdot|\vec{v}|}\cdot|\vec{w}| = \frac{(\vec{w},\vec{v})}{|\vec{v}|}.$$

Пусть вектор-функция $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$, тогда векторы $\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t) = (x'(t), y'(t))$, $\vec{w}(t) = \vec{r}\,''(t) = (x''(t), y''(t))$.

Длина вектора $|\vec{v}| = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}$, скалярное произведение $(\vec{w}, \vec{v}) = x'' \cdot x' + y'' \cdot y'$.

Тогда $w_\tau = \dfrac{(\vec{w}, \vec{v})}{|\vec{v}|} = \dfrac{x'' \cdot x' + y'' \cdot y'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} = \left(\sqrt{(x')^2 + (y')^2}\right)' = (|\vec{v}|)' = \dfrac{dv}{dt}$.

Величину w_n найдем по теореме Пифагора $w_n = \sqrt{w^2 - w_\tau^2}$.

С использованием формулы для радиуса кривизны годографа R можно получить следующее представление нормальной составляющей ускорения $w_n = \dfrac{v^2}{R}$.

Вектор $w_\tau \vec{\tau}$ – характеризует изменение величины скорости движения точки, вектор $w_n \vec{n}$ – характеризует изменение направления скорости движения точки, направлен к центру кривизны траектории движения точки.

Пример

Закон движения точки определяется заданием ее радиус вектора $\vec{r} = 2t^2 \vec{i} + 3t\,\vec{j}$. Найти w_τ и w_n.

Найдем вектор скорости $\vec{v} = \vec{r}\,' = 4t\,\vec{i} + 3\,\vec{j}$, тогда

$$v = \sqrt{(4t)^2 + 3^2} = \sqrt{16t^2 + 9}.$$

$$w_\tau = \frac{dv}{dt} = \left(\sqrt{16t^2 + 9}\right)' = \frac{16t}{\sqrt{16t^2 + 9}}.$$

Ускорение $\vec{w} = \vec{v}\,' = 4\,\vec{i} + 0\,\vec{j}$, величина ускорения $w = 4$.

$$w_n = \sqrt{w^2 - w_\tau^2} = \sqrt{4^2 - \left(\frac{16t}{\sqrt{16t^2 + 9}}\right)^2} = \frac{12}{\sqrt{16t^2 + 9}}.$$

16. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

16.1. Постановка задачи

Решением (корнем) уравнения

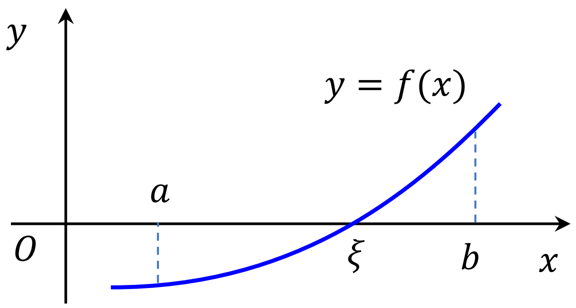
$$f(x) = 0$$

называется значение $x = \xi$, подстановка которого в уравнение приводит к верному равенству $f(\xi) \equiv 0$.

Точка $(\xi,0)$ является общей точкой графика функции $y = f(x)$ и оси Ox.

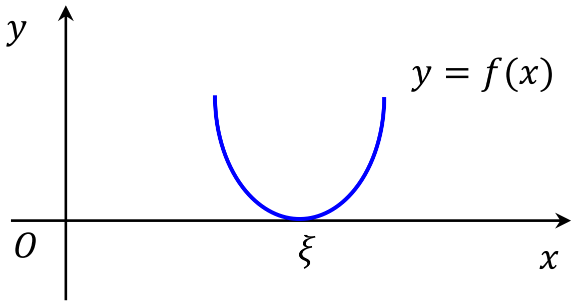
Возможны следующие случаи.

1. График функции $y = f(x)$ пересекает ось абсцисс.



Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и имеет на концах отрезка значения разных знаков. По свойству 3^0 о прохождении непрерывной функции через любое промежуточное значение $\exists \xi \in (a,b)$: $f(\xi) = 0$. Если функция $y = f(x)$ является строго монотонной на $[a,b]$, то корень $x = \xi$ единственный на данном промежутке. Если отрезок $[a,b]$ содержит единственный корень уравнения, он называется ***отрезком изоляции корня***.

2. График функции $y = f(x)$ касается оси абсцисс.



В этом случае $x = \xi$ является точкой локального экстремума (гладкого для дифференцируемой функции или острого для недифференцируемой).

Таким образом, решение задачи о нахождении корней уравнения включает два этапа:

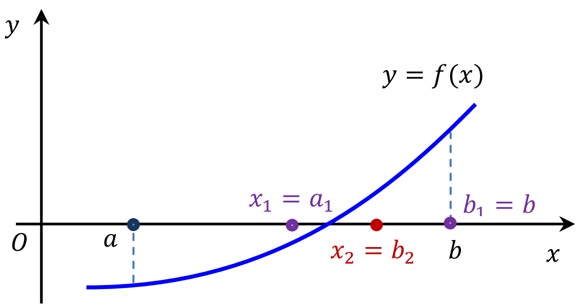
1) определение промежутка $[a,b]$, содержащего один корень уравнения, исходя из анализа функции и особенностей ее графика;

2) уточнение значения корня (в общем случае приближенное) на отрезке его изоляции с использованием численных методов.

Рассмотрим некоторые численные методы нахождения корней уравнений, основанные на разобранных ключевых положениях математического анализа.

16.2. Метод деления пополам

Отрезок $[a,b]$ является отрезком изоляции корня. Функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$.



Делим отрезок $[a,b]$ пополам, $x_1 = \dfrac{a+b}{2}$ – середина отрезка.

Если $f(x_1)=0$, то корень найден, процесс решения завершен.

Если $f(x_1)\neq 0$, то в качестве нового отрезка изоляции $[a_1,b_1]$ выбираем тот из отрезков $[a,x_1]$ и $[x_1,b]$, на концах которого функция имеет значения разных знаков. Далее делим выбранный отрезок пополам и повторяем процедуру.

Эти циклические действия прекращаются, когда значения a_n и b_n становятся равными с заданной степенью точности.

Длина каждого последующего отрезка изоляции вдвое меньше предыдущего:

$l=b-a$ – длина исходного отрезка,

$l_1 = \dfrac{b-a}{2}$ – длина отрезка $[a_1,b_1]$ (первый шаг),

$l_2 = \dfrac{b_1-a_1}{2} = \dfrac{b-a}{2^2}$ – длина отрезка $[a_2,b_2]$ (второй шаг),

…

$l_n = \dfrac{b-a}{2^n}$ – длина отрезка $[a_n,b_n]$ (n-ый шаг).

Длина отрезка позволяет определить количество шагов в вычислительном процессе для достижения необходимой степени точности.

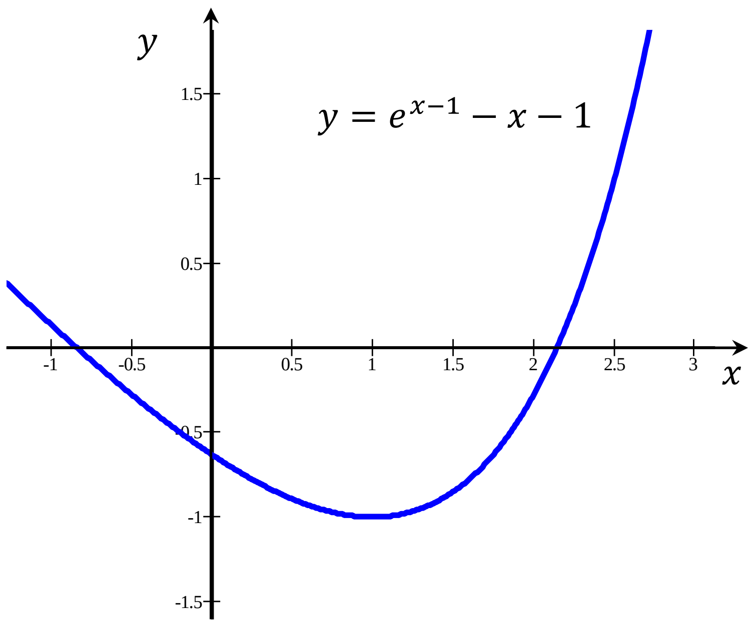
Пример

Найти корни уравнения $e^{x-1} = x+1$ с точностью 10^{-3}.

Для локализации корней преобразуем уравнение к виду $e^{x-1}-x-1=0$ и построим график функции $y=e^{x-1}-x-1$ (часть необходимого исследования здесь опускаем).

График функции пересекает ось абсцисс в двух точках. Найдем больший (положительный) корень. Отрезок его изоляции $[2,\,2{,}4]$.

Определим количество итераций (шагов) в вычислительном процессе метода деления пополам.



Длина последнего отрезка изоляции должна не превышать заданной точности

$\frac{2{,}4-2}{2^n} \le 10^{-3}, n \ge \log_2 400 \approx 8{,}6 \Rightarrow n = 9.$

Чем меньше исходный отрезок изоляции корня, тем меньше действий потребуется.

В таблице приведены значения функции для отрезка изоляции на каждом шаге, начиная с шага № 6 значения середины отрезка округлены до четвертого знака.

№ шага	x_i	$f(a_{i-1})$	$f(b_{i-1})$	$f(x_i)$	a_i	b_i
1.	2,2	$f(2) \approx -0{,}2817$	$f(2{,}4) \approx 0{,}6552$	$f(2{,}2) \approx 0{,}1201$	2	2,2
2.	2,1	$f(2) \approx -0{,}2817$	$f(2{,}2) \approx 0{,}1201$	$f(2{,}1) \approx -0{,}0958$	2,1	2,2
3.	2,15	$f(2{,}1) \approx -0{,}0958$	$f(2{,}2) \approx 0{,}1201$	$f(2{,}15) \approx 0{,}0082$	2,1	2,15
4.	2,125	$f(2{,}1) \approx -0{,}0958$	$f(2{,}15) \approx 0{,}0082$	$f(2{,}125) \approx -0{,}0448$	2,125	2,15
5.	2,1375	$f(2{,}125) \approx -0{,}0448$	$f(2{,}15) \approx 0{,}0082$	$f(2{,}1375) \approx -0{,}0185$	2,1375	2,15
6.	2,1438	$f(2{,}1375) \approx -0{,}0185$	$f(2{,}15) \approx 0{,}0082$	$f(2{,}1438) \approx -0{,}0051$	2,1438	2,15
7.	2,1469	$f(2{,}1438) \approx -0{,}0051$	$f(2{,}15) \approx 0{,}0082$	$f(2{,}1469) \approx 0{,}0015$	2,1438	2,1469
8.	2,1454	$f(2{,}1438) \approx -0{,}0051$	$f(2{,}1469) \approx 0{,}0015$	$f(2{,}1454) \approx -0{,}0017$	2,1454	2,1469
9.	2,1462	$f(2{,}1454) \approx -0{,}0017$	$f(2{,}1469) \approx 0{,}0015$	$f(2{,}1462) \approx 1{,}45 \cdot 10^{-5}$	2,1454	2,1462

Длина отрезка $[a_9, b_9]$ равна $0{,}0008 < 0{,}001$. Середина отрезка $[a_9, b_9]$: $x_9 = 2{,}1458$. С точностью до третьего десятичного знака искомый корень $\xi \approx x_9 \approx 2{,}146$.

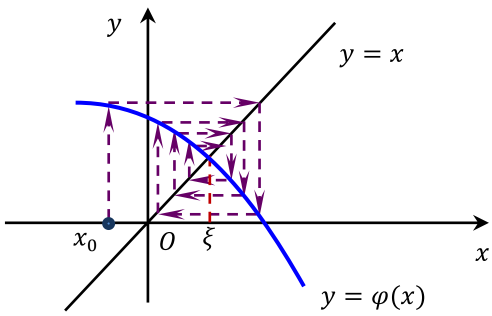
16.3. Метод итераций

Отрезок $[a,b]$ является отрезком изоляции корня $x=\xi$. Уравнение $f(x)=0$ преобразуем к виду

$$x = \varphi(x)$$

(или выполняем замену на уравнение, равносильное исходному на отрезке $[a,b]$).

Графически решением уравнения является абсцисса точки пересечения графиков левой и правой частей уравнения.



Начиная с приближения $\xi \approx x_0$ строим итерационную последовательность $\{x_n\}$:

$x_1 = \varphi(x_0)$, $x_2 = \varphi(x_1)$, …, $x_n = \varphi(x_{n-1})$, …, сходящуюся к корню ξ.

Для сходимости достаточно, чтобы $x_0 \in [a,b]$, $x_n = \varphi(x_{n-1}) \in [a,b]$ для любого $n \in \mathrm{N}$, $|\varphi'(x)| \le k < 1$ для значений $x \in [a,b]$. При выполнении этих условий $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$, ξ – единственный корень уравнения.

Если ε – заданная точность, условием завершения вычислительного процесса является выполнение неравенства $|x_n - x_{n-1}| \le \dfrac{1-k}{k}\varepsilon$.

Формула для определения количества итераций: $|\xi - x_n| \le \dfrac{k^n}{1-k}|x_1 - x_0|$.

Пример

Вернемся к решению уравнения $e^{x-1} = x+1$, точность – 10^{-3}.

Найдем отрицательный корень. Отрезок его изоляции $[-1, -0{,}5]$.

Запишем уравнение в виде $e^{x-1} - 1 = x$, отсюда $\varphi(x) = e^{x-1} - 1$.

Проверим выполнение условий сходимости последовательности $\{x_n\}$

$|\varphi'(x)| = |e^{x-1}| = e^{x-1} < 1 = e^0,\ x < 1$.

На концах отрезка $\varphi'(-1) \approx 0{,}1353$, $\varphi'(-1) \approx 0{,}2231$, функция $\varphi'(x)$ возрастает, в качестве границы выберем $k = \frac{1}{4}$.

Пусть $x_0 = -1$, тогда

$x_1 = \varphi(-1) = e^{-2} - 1 \approx -0{,}8647$.

Определим количество итераций для вычисления с заданной точностью

$$\frac{k^n}{1-k}|x_1 - x_0| \le 0{,}001,$$

$$\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}}|-0{,}8647 - (-1)| \le 0{,}001,$$

$$n > \log_4(45{,}1) + 1,$$

$$n = 4.$$

Продолжим вычисления:

$x_2 = \varphi(-0{,}8647) \approx -0{,}8451$,

$x_3 = \varphi(-0{,}8451) \approx -0{,}842$,

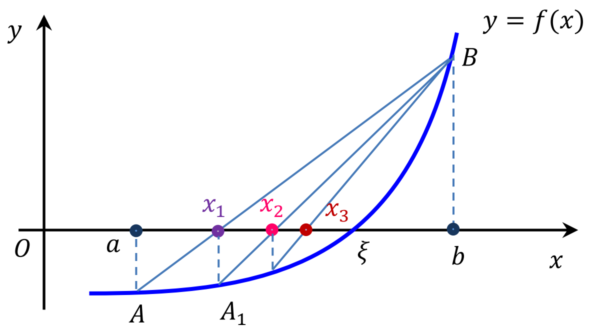
$x_4 = \varphi(-0{,}842) \approx -0{,}8414$.

Корень уравнения $\xi \approx -0{,}841$ найден с заданной точностью.

16.4. Метод хорд

Отрезок $[a,b]$ является отрезком изоляции корня. Функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, на концах отрезка принимает значения разных знаков, график функции имеет одинаковое направление выпуклости ($\forall x \in [a,b]$ $f''(x)$ сохраняет знак).

Для определенности рассмотрим случай, когда производные $f'(x) > 0$ и $f''(x) > 0$, то есть функция возрастает, кривая направлена выпуклостью вниз.



На отрезке $[a,b]$ заменим дугу кривой хордой AB, где $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$.

Составим каноническое уравнение прямой (AB):

$$M(x,y)\in(AB)\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\parallel\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow \frac{x-a}{b-a}=\frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}.$$

Точка x_1 – точка пересечения прямой (AB) с осью Ox, при этом $y=0$

$$\frac{x_1-a}{b-a}=\frac{-f(a)}{f(b)-f(a)},$$

$$x_1=a-\frac{(b-a)\cdot f(a)}{f(b)-f(a)}.$$

Так как расстояние от точки x_1 до корня ξ меньше, чем длина отрезка $[a,b]$, то при выборе x_1 в качестве новой границы отрезка, промежуток поиска сузится. Выбор между отрезками $[a,x_1]$ и $[x_1,b]$ основан на необходимости выполнения исходных условий: значения функции на концах отрезка должны быть разных знаков.

В рассматриваемом случае выбираем отрезок $[x_1,b]$. Проведем хорду A_1B и найдем ее пересечение с осью Ox:

$$x_2=x_1-\frac{(b-x_1)\cdot f(x_1)}{f(b)-f(x_1)}.$$

Продолжая этот процесс, получим общую формулу:

$$x_n=x_{n-1}-\frac{(b-x_{n-1})\cdot f(x_{n-1})}{f(b)-f(x_{n-1})}.$$

Последовательность $\{x_n\}$ возрастает, ограничена сверху

$$a<x_1<\ldots<x_n<\ldots<\xi,$$

следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$.

Для определения точности вычислений и количества шагов запишем формулу Лагранжа на отрезке $\left[x_n, \xi\right]$:

$$f(x_n) - f(\xi) = f'(c) \cdot \left(x_n - \xi\right),\ c \in \left(x_n, \xi\right).$$

$$f(\xi) = 0 \ \Rightarrow \ x_n - \xi = \frac{f(x_n)}{f'(c)}.$$

Для оценки расстояния между точками x_n и ξ используем неравенство $m \le |f'(c)|$ (m – наименьшее значение $|f'(x)|$ на отрезке $\left[x_n, \xi\right]$):

$$\left|x_n - \xi\right| \le \frac{|f(x_n)|}{m}.$$

Пример

Решим уравнение $e^{x-1} = x + 1$ с точностью 10^{-3} методом хорд. Найдем, для сравнения с первым методом, положительный корень. Начальный отрезок изоляции $\left[2,\, 2{,}4\right]$. График функции возрастает, направлен выпуклостью вниз, что совпадает с рассмотренным выше случаем.

Проведем пошаговые вычисления:

$$x_1 = a - \frac{\left(b - a\right) \cdot f(a)}{f(b) - f(a)} = 2 - \frac{0{,}4 \cdot (-0{,}2817)}{0{,}6552 - (-0{,}2817)} \approx 2{,}1203,$$

$$x_2 = x_1 - \frac{\left(b - x_1\right) \cdot f(x_1)}{f(b) - f(x_1)} = 2{,}1203 - \frac{(2{,}4 - 2{,}1203) \cdot (-0{,}0545)}{0{,}6552 - (-0{,}0545)} \approx 2{,}1418,$$

$$x_3 = x_2 - \frac{\left(b - x_2\right) \cdot f(x_2)}{f(b) - f(x_2)} = 2{,}1418 - \frac{(2{,}4 - 2{,}1418) \cdot (-0{,}0094)}{0{,}6552 - (-0{,}0094)} \approx 2{,}1455,$$

$$x_4 = x_3 - \frac{\left(b - x_3\right) \cdot f(x_3)}{f(b) - f(x_3)} = 2{,}1455 - \frac{(2{,}4 - 2{,}1455) \cdot (-0{,}0015)}{0{,}6552 - (-0{,}0015)} \approx 2{,}1461.$$

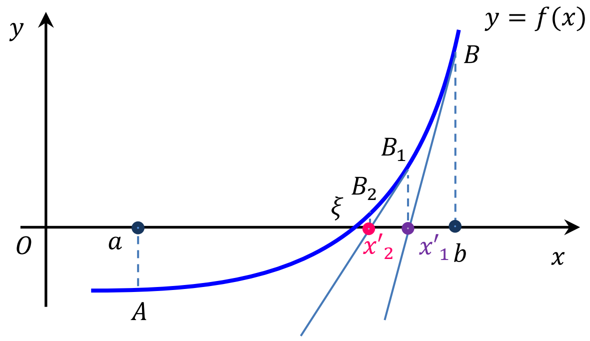
С заданной точностью достаточно вычислить x_3, так как

$$\frac{|f(x_3)|}{m} = \frac{|f(x_3)|}{|f'(x_3)|} \approx \frac{0{,}0015}{2{,}144} \approx 0{,}0007 < 0{,}001.$$

$$\xi \approx x_3 \approx 2{,}146.$$

16.5. Метод касательных

Требования для применения метода касательных к функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ совпадают с условиями в методе хорд.



В одной из точек – $A(a, f(a))$ или $B(b, f(b))$ проведем касательную к графику функции. Выбор определяется большей близостью соответствующей точки пересечения касательной с осью абсцисс к границе a или границе b. Для определенности рассмотрим, как и в предыдущем методе, случай, когда производные $f'(x) > 0$ и $f''(x) > 0$, то есть функция возрастает, кривая направлена выпуклостью вниз. Для проведения касательной выберем точку $B(b, f(b))$.

Уравнение касательной в точке $B(b, f(b))$:

$$y = f(b) + f'(b)(x - b).$$

Точка пересечения касательной с осью абсцисс ($y = 0$):

$$x_1' = b - \frac{f(b)}{f'(b)}.$$

Следующую касательную к графику функции проведем в точке $B_1(x_1', f(x_1'))$. Точка ее пересечения с осью абсцисс:

$$x_2' = x_1' - \frac{f(x_1')}{f'(x_1')}.$$

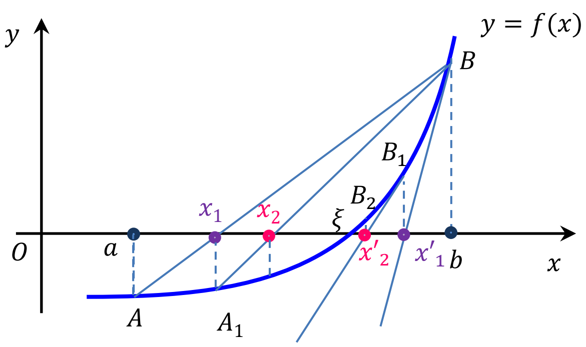
На n-ом шаге $x_n' = x_{n-1}' - \dfrac{f(x_{n-1}')}{f'(x_{n-1}')}$.

Последовательность $\{x'_n\}$ убывает, ограничена снизу, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} x'_n = \xi$.

Для оценки погрешности действует формула, полученная в методе хорд.

16.6. Комбинированный метод

Комбинированный метод представляет собой объединение метода хорд и метода касательных.



На первом шаге находим точки x_1 и x'_1. Отрезок $[a,b]$ заменим отрезком $[x_1, x'_1]$.

На втором шаге

$$x_2 = x_1 - \frac{x'_1 - x_1}{f(x'_1) - f(x_1)} f(x_1),$$

$$x'_2 = x'_1 - \frac{f(x'_1)}{f'(x'_1)}.$$

На n-ом шаге

$$x_n = x_{n-1} - \frac{x'_{n-1} - x_{n-1}}{f(x'_{n-1}) - f(x_{n-1})} f(x_{n-1}),$$

$$x'_n = x'_{n-1} - \frac{f(x'_{n-1})}{f'(x'_{n-1})}.$$

Приближение к корню происходит с двух сторон, в отличие от использования метода хорд и касательных в отдельности. Точность вычислений можно определить, оценив разность $x'_n - x_n$.

Учебный электронный текстовый ресурс

Матвеева Татьяна Анатольевна

Рыжкова Наталия Геннадьевна

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Подготовка к публикации *А.В. Ерофеевой*
Компьютерная верстка *авторская*

Рекомендовано Методическим советом УрФУ
Разрешено к публикации 21.09.2017
Электронный формат – pdf
Объем 1,3 уч.-изд. л.

620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19

Уральский федеральный университет

Информационный портал УрФУ
http://study.urfu.ru