

1. Как построить доказательство?

Шаблон 1.1 Принадлежность элемента множеству.

Пусть задано множество A . Чтобы доказать, что $x \in A$, покажите, что x обладает свойством, определяющим принадлежность к A .

Пример.]

$$A = \{ n: n \in \mathbb{N} \text{ и } n = 3k + 5, \text{ для некоторых } k \in \mathbb{N} \}$$

Можно ли утверждать, что $23 \in A$?

Решение.

Чтобы показать, что $23 \in A$, мы должны найти натуральное число k_0 такое, что

$$23 = 3k_0 + 5,$$

поскольку каждый элемент множества A имеет вид $3k+5$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Чтобы выяснить, существует ли такое k , мы просто решим уравнение относительно k_0 и проверим, получился ли корень натуральным числом.

$$3k_0 + 5 = 23 \rightarrow k_0 = 6$$

Следовательно, существует такое $k = k_0 = 6$ и $3 \cdot 6 + 5 = 23 \in A$.

Шаблон 1.2 Включение множества.

Чтобы доказать, что одно множество является подмножеством другого ($A \subseteq B$), покажите, что каждый элемент x множества A также входит в множество B .

Пример.]

$$A = \{ n: n=2k + 5 \text{ для некоторых } k \in \mathbb{N} \}$$

и

$$B = \{ n: n=2j + 1 \text{ для некоторых } j \in \mathbb{N} \}$$

Верно ли, что $A \subseteq B$?

Решение.

$$A: 5, 7, 9, 11, 13, 15$$

$$B: 1, 3, 5, 7, 9, 11 \text{ - видно, что разница в первых членах.}$$

Чтобы доказать, что $A \subseteq B$, мы должны взять произвольный элемент множества A , скажем, что $n=2k_0 + 5$ для некоторого $k_0 \in \mathbb{N}$, а затем показать, что его можно записать в виде $2j + 1$ для некоторого $j \in \mathbb{N}$. Тогда $2k_0 + 5 = 2j + 1 \in B$.

Выразим j через k_0

$$2j+1 = 2k_0 + 5 \rightarrow j = k_0 + 2$$

Видим, $k_0 + 2 \in \mathbb{N}$

$$2k_0 + 5 = 2(k_0 + 2) + 1 \text{ при } k_0 + 2 \in \mathbb{N}$$

Таким образом, поскольку произвольный элемент A является элементом B , то $(A \subseteq B)$.

Шаблон 1.3 Отрицание включения множества.

Чтобы доказать, что одно множество не является подмножеством другого ($A \not\subseteq B$), покажите, что некоторый элемент x множества A не входит в B .

Пример.]

$$A = \{ n: n \in \mathbb{Z} \text{ и } n = 2k^2 - 3 \text{ для некоторых } k \in \mathbb{N} \}$$

и

$$B = \{ n: n \in \mathbb{Z} \text{ и } n = j^2 + 3 \text{ для некоторых } j \in \mathbb{N} \}$$

Докажите, что $A \not\subseteq B$.

Решение.

Выпишем несколько элементов $A = \{-3, -1, 5, 15, 29 \dots\}$ и $B = \{3, 4, 7, 12, 19 \dots\}$ один из очевидных кандидатов это -3 , поскольку $-3 \in A$ и $-3 \notin B$. Нам нужно показать, что существует некоторое фиксированное целое число вида $2k_0^2 - 3$, где $k_0 \in \mathbb{N}$, которое нельзя представить в виде $j^2 + 3$ ни при каком выборе $j \in \mathbb{N}$. Если бы такое представление было возможно, мы получили бы равенство $2k_0^2 - 3 = j^2 + 3$. В случае $k_0 = 0$ (для того, чтобы элемент -3 входил в B , число j должно было бы удовлетворить уравнению $-3 = j^2 + 3$ или $j^2 + 6 = 0$, поскольку таких j не существует, то $-3 \notin B$.

Шаблон 1.4 Собственное включение множества

Чтобы доказать, что одно множество является собственным подмножеством другого ($A \subset B$), вначале докажите, что $A \subseteq B$, а затем покажите, что существует некоторый элемент x множества B , который не входит в A .

Пример.]

$$A = \{ n \in \mathbb{N} : n \geq 2 \text{ и } n = 4j - 5 \text{ для некоторых } j \in \mathbb{N} \}$$

и

$$B = \{ n \in \mathbb{N} : n \geq 0 \text{ и } n = 2k + 1 \text{ для некоторых } k \in \mathbb{N} \}$$

Докажите, что $A \subset B$.

Решение.

Чтобы доказать, что $A \subseteq B$, мы должны показать, что каждый элемент A является элементом B , пусть $n = 4j_0 - 5$ при некотором фиксированном $j_0 \in \mathbb{N}$ — произвольный элемент A . Чтобы показать, что $n \in B$, мы должны показать, что $n = 2k + 1$ для некоторых $k \in \mathbb{N}$. Мы выясним, возможно ли такое представление, решив уравнение

$$2k + 1 = 4j_0 - 5 \rightarrow k = 2j_0 - 3$$

заметим, что $2j_0 - 3 \geq 0$, т.к. $4j_0 - 5 \geq 2 \rightarrow j_0 \geq 2$

поскольку $2 * (2j_0 - 3) + 1 = 4j_0 - 5$, каждый элемент A входит в B .

Для $0 \in \mathbb{N}$ мы получим $2 * 0 + 1 = 1 \in B$.

Если бы $1 \in A$, то $1 = 4j - 5$ для некоторых $j \in \mathbb{N}$. Решив это уравнение, получим $j = 2/3 \notin \mathbb{N}$ таким образом подходящих j не существует поэтому $1 \in B$, и $1 \notin A$, значит $A \subset B$.

Шаблон 1.5 Равенство множеств

Чтобы доказать, что $A = B$, для множества A и B , докажите, что $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$.

Пример.]

$$A = \{ n : n = 2j \text{ для некоторых } j \in \mathbb{N} \}$$

и

$$B = \{ n : n = 2k + 2 \text{ для некоторых } k \in \mathbb{Z} \text{ и } k \geq -1 \}$$

Докажите, что $A=B$.

Решение.

Чтобы показать, что произвольный элемент A , скажем $2j_0$ для некотор. $j_0 \in \mathbb{N}$, является элементом B , мы должны найти число $k \in \mathbb{Z}$ такие, что $2k + 2 = 2j_0$ и $k \geq -1$.

Решив это уравнение относительно k , получим $k = j_0 - 1$.

Поскольку $j_0 \geq 0$, $k = j_0 - 1 \geq -1$ и $2k + 2 \in B$.

Чтобы показать, что произвольный элемент B , скажем, $2k_0 + 2$ для некотор. $k_0 \geq -1$, $k_0 \in \mathbb{Z}$, является элементом A , мы должны найти число $j \in \mathbb{N}$ такое, что $2j = 2k_0 + 2$.

Отсюда следует, что если $2k_0 + 2$ — элемент A , то число j должно удовлетворять уравнению $j = k_0 + 1$, поскольку $k_0 \geq -1$, мы получаем $k_0 + 1 \geq 0$ и значит, $k_0 + 1$

определяет элемент A . Из $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$ следует, что $A=B$.

Шаблон 1.6 Неравенство множеств

Чтобы показать, что для множеств A и B выполняется соотношение $A \neq B$, докажите, что $A \not\subseteq B$ или $B \not\subseteq A$.

Пример.]

$$A = \{ n : n \in \mathbb{N} \text{ и } n = 4j - 3 \text{ для некоторых } j \in \mathbb{N} \}$$

и

$$B = \{ n \in \mathbb{N} : n = 2k^2 - 3 \text{ для некоторых } k \in \mathbb{N} \}$$

Докажите, что $A \neq B$.

Решение.

Чтобы доказать неравенство $A \neq B$, достаточно отыскать элемент A , который не является элементом B . Мы покажем, что 1 — такой элемент.

Мы можем записать $1 = 2k^2 - 3 \rightarrow k^2 = 2$, отсюда видно, что $k \notin \mathbb{N}$.

В то же время $1 = 4 * 1 - 3$ выполнено при $j = 1$ т. е. $1 \in A \rightarrow A \neq B$.

Шаблон 1.7 Импликации и "тогда и только тогда, когда"

Чтобы доказать утверждения "если a , то b " и "а тогда и только тогда, когда b ", используйте один из способов:

Способ 1: Чтобы доказать "если a , то b " предположите a и выведите b

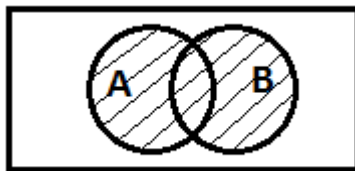
Способ 2: Чтобы доказать "а тогда и только тогда, когда b " докажите "если a , то b ", а затем "если b , то a ".

Запись "если a , то b " ($\Rightarrow$), "если b , то a " ($\Leftarrow$), "а тогда и только тогда, когда b " ($\Leftrightarrow$)

2. Операции над множествами: объединение и пересечение.

Определение 1.]

A и B - два множества. Объединением $A \cup B$ множеств A и B называется множество $\{x: x \in A \text{ или } x \in B\}$



P.S. Поясним значение слова "или" здесь.

Когда математики говорят $x \in A$ или $x \in B$, то они обычно имеют в виду, что справедливо $x \in A$, или же $x \in B$, или оба этих утверждения. "Или" в таком смысле называется **включенным "или"**.

Теорема 1.]

A , B и C - множества. Тогда

- (a) $A \cup A = A$;
- (b) $A \subseteq A \cup B$ и $B \subseteq A \cup B$
- (c) $A \cup B = B \cup A$ (коммутативный закон объединения)
- (d) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (ассоциативный закон объединения)

Доказательство (c)

Следуя шаблону доказательства равенства двух множеств, докажем, что (i) $A \cup B \subseteq B \cup A$ и (ii) $B \cup A \subseteq A \cup B$.

В части (i) воспользуемся шаблоном доказательства включения множества и докажем, что для любого $x \in A \cup B$ выполняется $x \in B \cup A$.

Предположим, что $x \in A \cup B$. Тогда (ia) $x \in A$ или (ib) $x \in B$. В случае (ia) $x \in A$, поэтому по определению 1 $x \in B \cup A$. В случае (ib) $x \in B$, поэтому по определению 1 $x \in B \cup A$. Часть (i) доказана. Аналогично проводится доказательство части (ii).

Определение 2.]

A и B - два множества. Пересечением $A \cap B$ множеств A и B называется множество $\{x: x \in A \text{ и } x \in B\}$

Теорема 2.]

A , B и C - множества. тогда.

- (a) $A \cap B = A$
- (b) $A \cap B \subseteq A$ и $A \cap B \subseteq B$
- (c) $A \cap B = B \cap A$
- (d) $A \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Доказательство (c) следует шаблону 1.5 (равенство множеств).

Докажем, что (i) $A \cap B \subseteq B \cap A$. В части (i) воспользуемся шаблоном 1.2, то есть предположим, что $x \in A \cap B$, и покажем, что $x \in B \cap A$

] $x \in A \cap B$. Тогда $x \in A$ и $x \in B$. Совершенно аналогично можно сказать, что $x \in B$ и $x \in A$, так как слово "и" не предполагает никакого порядка поэтому $x \in B \cap A$. Аналогично проводится доказательство части (ii).

Теорема 3. (Дистрибутивные законы)

- (a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (дистрибутивный закон объединения)
(b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (дистрибутивный закон пересечения)

Доказательство. Доказательство предлагается в качестве уравнения.

Определение 3.]

А и В - множества. Тогда А и В - пересекающиеся множества, если $A \cap B = \emptyset$

Теорема 4.]

А, В и С - множества, тогда

- (a) если $A \subseteq B$ или $A \subseteq C$, то $A \subseteq B \cup C$;
(b) если $B \subseteq A$ и $C \subseteq A$, то $B \cup C \subseteq A$;
(c) если $A \subseteq B$ и $A \subseteq C$, то $A \subseteq B \cap C$;
(d) если $B \subseteq A$ или $C \subseteq A$, то $B \cap C \subseteq A$.

Доказательство (a)] $A \subseteq B$ или $A \subseteq C$.

Случай 1: $A \subseteq B$. Следуя шаблону 1.2 (включение множеств) докажем, что одно множество является подмножеством другого. Покажем, что каждый элемент множества А является также элементом множества $B \cup C$.

] $x \in A$. Наша цель - показать, что $x \in B \cup C$. Поскольку $x \in A$ и $A \subseteq B$, мы получаем $x \in B$. Но $B \cup C = \{x: x \in B \text{ или } x \in C\}$ поэтому $x \in B \cup C$.

Случай 2: $A \subseteq C$. Доказательство аналогично случаю 1.

Теорема 5. (Законы поглощения)]

А и В - множества, тогда

$$A \cup (A \cap B) = A$$

Доказательство. По шаблону 1.5 докажем, что $A \cup (A \cap B) \subseteq A$ и $A \subseteq A \cup (A \cap B)$. Для доказательства первой части утверждения заметим, что $A \subseteq A$ согласно теореме 1 ((a) $A \subseteq A$; (b) $\emptyset \subseteq A$) и $A \cap B \subseteq A$ согласно теореме 2 (b). По теореме 4 (b) из этих двух соотношений следует, что $A \cup (A \cap B) \subseteq A$. При доказательстве второй части утверждения мы исходим из соотношения $A \subseteq A$, откуда по теореме 4 (a) получаем $A \subseteq A \cup (A \cap B)$.

Обобщенные объединения и пересечения.

Определение 4.] X - множество многочленом. Тогда

$$\bigcup X = \{x: x \text{ содержится в некотором множестве входящем в } X\}$$

и

$$\bigcap X = \{x: x \text{ содержится в каждом из множеств, входящем в } X\}$$

Если $X = \{X_0, X_1, \dots, X_n, \dots\}$ иначе говоря если элементы X пронумерованы натуральными числами, то

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} X_i = X_0 \cup X_1 \cup \dots \cup X_n \cup \dots,$$

$$\bigcap_{i=0}^{\infty} X_i = X_0 \cap X_1 \cap \dots \cap X_n \cap \dots$$

Разность множеств и дополнение множеств связаны с объединением и пересечением законами де Моргана.

Определение 5.]

А и В - множества. Разностью $A - B$ множеств А и В называется множество

$$\{x: x \in A \text{ и } x \notin B\}$$

Разность $A - B$ еще называют относительной. ($U - A$ - абсолютной).

Теорема 6.]

A и B - множества. Тогда:

- (a) множества $A - B$ и $B - A$ не пересекаются;
множества $A - B$ и $A \cap B$ не пересекаются;
множества $A \cap B$ и $B - A$ не пересекаются.
- (b) $A = (A - B) \cup (A \cap B)$;
- (c) $A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$;
- (d) $A \subseteq B$ - тогда и только тогда, когда $A - B = \emptyset$.

В случае, когда имеется универсальное множество, а A-подмножество U, может быть определена ещё одна операция теории множеств.

Определение 6.]

U - универсальное множество, а A - подмножество U. Дополнением $\bar{A}$ множества A называется множество

$$\{x: x \in U \text{ и } x \notin A\}$$

Иногда, чтобы подчеркнуть, что U - универсальное множество, $\bar{A}$ называют абсолютной разностью.

Теперь можно переформулировать определение 5 в виде

$$A - B = A \cap \bar{B}$$

Теорема 7.]

U - универсальное множество, A и B - подмножества U. Тогда:

- (a) $\bar{\bar{A}} = A$ ($\bar{A}$ является дополнением $\bar{A}$);
- (b) $A \subseteq B$ тогда и только тогда, когда $\bar{B} \subseteq \bar{A}$;
- (c) $A = B$ тогда и только тогда, когда $\bar{A} = \bar{B}$

Доказательство:

- (a) покажем, что (i) $\bar{\bar{A}} \subseteq A$ и (ii) $A \subseteq \bar{\bar{A}}$. Чтобы доказать (i), предположим, что $x \in \bar{\bar{A}}$. Чтобы доказать (ii), предположим, что $x \in A$. Тогда $x \notin \bar{A}$ и $x \in U$. Поэтому $x \in \bar{\bar{A}}$.
- (b) ($\Rightarrow$) Покажем, что если $A \subseteq B$, то $\bar{B} \subseteq \bar{A}$. Мы докажем это утверждение от противного (шаблон 1.3). Предположим, что для некоторых A и B универсального множества U $A \subseteq B$, и $\bar{B} \not\subseteq \bar{A}$. и придем к противоречию. Поскольку $\bar{B} \not\subseteq \bar{A}$, существует некоторый элемент $x \in \bar{B}$, но $x \notin \bar{A}$, т.е. $x \in A$. Поскольку $A \subseteq B$, то $x \in B$. Но в силу сделанного предположения $x \in \bar{B}$, следовательно x обладает свойством $x \notin B$. Мы доказали, что $x \in B$ и одновременно $x \notin B$ в чём и состоит противоречие.

Компьютерное представление множеств.

] $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ - множество, и] $X \subseteq U$. Побитовое представление множества X - это шестизначное двоичное число $x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6$, где бит x_i при $1 \leq i \leq 6$ определяются как

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i \in X \\ 0, & \text{если } i \notin X \end{cases}$$

Например, если $B = \{2, 3, 6\}$, то $B = 011001$. Операции объединения, пересечения, дополнения и разности могут быть заданы при помощи операторов UNION, INTER, COMP и DIFF, которые побитово действуют на двоичных числах.

] $B, C \subseteq U$ причем $B = b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6$, а $C = c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6$

Определим $\text{UNION}(B, C) = x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6$, где при $1 \leq i \leq 6$

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{если } b_i = 1 \text{ или } c_i = 1 \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Определим $\text{INTER}(B,C) = x_1x_2x_3x_4x_5x_6$, где при $1 \leq i \leq 6$

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{если } b_i = 1 \text{ и } c_i = 1 \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Определим $\text{COMP}(B) = x_1x_2x_3x_4x_5x_6$, где при $1 \leq i \leq 6$

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{если } b_i = 0 \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Определим $\text{DIFF}(B,C) = x_1x_2x_3x_4x_5x_6$, где при $1 \leq i \leq 6$

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{если } b_i = 1, c_i = 0 \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Пример.]

$B = \{1,2,3,4,5\}$ и $C = \{3,4,5,6,7,8\}$

B и C подмножества $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

Решение.

$B \cup C = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

$B \cap C = \{3,4,5\}$

$U - B = \{6,7,8,9\}$

$B - C = \{1,2\}$

$\text{UNION}(B,C) = 111111110$

$\text{INTER}(B,C) = 001110000$

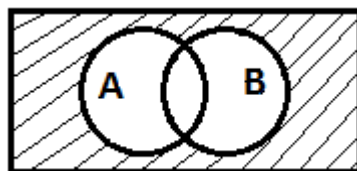
$\text{COMP}(B) = 000001111$

$\text{COMP}(C) = 110000001$

$\text{DIFF}(B,C) = 110000000$

Законы де Моргана.

Связь объединения, пересечения и дополнения



$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$



$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

Теорема 8. (Законы де Моргана)

(a) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ (закон для объединения)

(b) $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ (закон для пересечения)

Доказательство (a)

(a) Покажем, что (i) $\overline{(A \cup B)} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B}$ и (ii) $\bar{A} \cap \bar{B} \subseteq \overline{(A \cup B)}$

(i) возьмем произвольный элемент $x \in \overline{(A \cup B)}$. В силу того, что $x \in U - (A \cup B)$, мы делаем вывод, что $x \notin A \cup B$. Значит $x \notin A$ и $x \notin B$. Значит $x \in U - A = \bar{A}$ и $x \in U - B = \bar{B}$. Поэтому следует $x \in \bar{A} \cap \bar{B}$.

(ii) возьмем произвольный элемент $x \in \bar{A} \cap \bar{B}$. Тогда $x \in \bar{A}$ и значит, $x \notin A$, кроме того $x \in \bar{B}$, значит $x \notin B$, поэтому $x \in \overline{A \cup B}$.

(b) - для читателя.

Определение 7.]

А и В - множества. Множество

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

называется симметричной разностью множеств А и В.

Теорема 9.

(а) Для любого множества А выполняется $A \oplus \emptyset = A$

(б) Для любого множества А выполняется $A \oplus A = \emptyset$

(с) Для любых двух множеств А и В выполняется $A \oplus B = B \oplus A$

Доказательство

(с) $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = (B - A) \cup (A - B) = B \oplus A$

Теорема 10.

$$A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$$

Доказательство (длинное).

Логика высказываний.

Теорема 8 (б) тесно связана с одной темой в логике высказываний, а именно тем, как соотносятся высказывания вида "если-то", его конверсия, инверсия и контрапозиция.

Из элементов высказывания "если а, то b" можно составить другие высказывания, такие как "если б, то а". Можно поставить вопрос: если первое высказывания истинно, то что можно сказать об истинности второго?

Рассмотрим высказывания:

"Если Джорж — лошадь, то Джорж — животное"

Сформулируем его инверсию:

"Если Джорж — не лошадь, то Джорж — не животное"

Сформулируем его конверсию:

"Если Джорж — животное, то Джорж - лошадь"

И, наконец, сформулируем его контрапозицию:

"Если Джорж — не животное, то Джорж — не лошадь"

И само высказывание и его контрапозиция - истинны, в то время как инверсия и конверсия могут оказаться ложными (это зависит от того, кто такой Джорж).

Рассмотрим ещё один пример:

Утверждение: "Если мой кот — лошадь, то он — животное"

Инверсия: "Если мой кот — не лошадь, то он — не животное"

Конверсия: "Если мой кот —, то он — лошадь"

Контрапозиция: "Если мой кот — не животное, то он — не лошадь"

Как называют эти два примера, высказывания типа "если-то" эквивалентны своим контрапозициям.

Используя методы математической логики, можно показать, что и в общем случае высказывание истинно тогда и только тогда, когда истинна его контрапозиция. При построении доказательств бывает легче работать с контрапозицией высказывания, чем с ним самим. Доказательство контрапозиции нужного высказывания называется непрямым доказательством. В примере с котом и лошадью утверждения и его контрапозиция — тавтология, а инверсия и конверсия — ложны. Как правило, высказывание вида "если-то" не эквивалентно своей инверсии и конверсии но конверсия и инверсия всегда эквивалентны друг другу.

Новые шаблоны доказательств.

Первую из новых идей - разбор случаев - мы использовали в теореме 4.

Шаблон 1.8. Доказательство разбором случаев

Для того, чтобы доказать теорему разбором случаев,

- 1) перечислим все возможные случаи, описывающие все обязательства, в которых осуществляется предположение теоремы;
- 2) докажете утверждение теоремы для каждого случая;

Шаблон 1.9. Опровержение при помощи контрпримера

Чтобы опровергнуть утверждение, начинающееся словами "для каждого $x \in A$ ", найдите такой элемент x , для которого утверждение не выполняется.

В теории 7 (b) утверждается, что если $A \subseteq B$, то $\bar{B} \subseteq \bar{A}$. Для доказательства мы предположили, что $A \subseteq B$ и $\bar{B} \not\subseteq \bar{A}$, а затем показали, что это предположение приводит к противоречию. Такой метод доказательства описан в шаблоне 1.10.

Шаблон 1.10. Доказательство от противного

Чтобы доказать утверждение (a) от противного используйте один из двух способов.

Способ 1:

Предположите, что (a) ложно и докажите, что некоторое другое утверждение (b) ложно, в то время как известно, что утверждение (b) истинно

Способ 2:

Предположите, что утверждение (a) ложно. Для некоторого утверждения (b) докажите, что утверждение (b) оказывается одновременно и истинным и ложным.

Утверждение теоремы 7 (b) можно интерпретировать так, что утверждение и его контрапозиция имеют одинаковые значения истинности. Например, выражение " $A \subseteq B$ " можно понимать как "если $x \in A$, то $x \in B$ ". Аналогично, " $\bar{B} \subseteq \bar{A}$ " можно понимать как "если $x \notin B$, то $x \notin A$ ". Как можно доказать истинность или ложность утверждения "если-то" когда известны истинности его контрапозиции? Приблизительно так, как мы доказывали теорему 7(b). Суть этого метода изображена в шаблоне 1.11.

Шаблон 1.11. Непрямое доказательство (обратное доказательство)

Чтобы доказать теорему, используя не прямое доказательство, докажете утверждение "если p , то q ", доказав "если не q , то не p ".