

Задача № 15.

Даны вершины треугольника ABC $A(-7; 5)$, $B(5; -4)$, $C(3; 10)$.

Найти: 1) длину стороны AB; 2) уравнения сторон AB и AC и их угловые коэффициенты; 3) внутренний угол A в радианах; 4) уравнение высоты CD и ее длину; 5) систему линейных неравенств, определяющих треугольник ABC.

Решение.

1). Расстояние d между точками $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ определяется по формуле

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Подставив в эту формулу координаты точек A и B, получаем

$$AB = \sqrt{(5 - (-7))^2 + (-4 - 5)^2} = 15.$$

2). Уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$, имеет вид:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Подставив в эту формулу координаты точек A и B, получаем:

$$(AB): \frac{x - (-7)}{5 - (-7)} = \frac{y - 5}{-4 - 5}; \quad \frac{x + 7}{12} = \frac{y - 5}{-9}; \quad \frac{x + 7}{4} = \frac{y - 5}{-3}; \quad 3x + 4y + 1 = 0.$$

$$\text{Отсюда } y = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{4} \rightarrow k_{AB} = -\frac{3}{4}.$$

$$(AC): \frac{x - (-7)}{3 - (-7)} = \frac{y - 5}{10 - 5}; \quad \frac{x + 7}{10} = \frac{y - 5}{5}; \quad \frac{x + 7}{2} = \frac{y - 5}{1}; \quad x - 2y + 17 = 0.$$

$$\text{Откуда } y = \frac{1}{2}x + 8\frac{1}{2} \rightarrow k_{AC} = \frac{1}{2}.$$

3). Угол α между двумя прямыми, угловые коэффициенты которых равны k_1 и k_2 , определяется по формуле

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|.$$

Подставив в эту формулу $k_1 = -\frac{3}{4}$ и $k_2 = \frac{1}{2}$, имеем

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{\frac{1}{2} - (-\frac{3}{4})}{1 + \frac{1}{2} \cdot (-\frac{3}{4})} \right| = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{5}{8}} = 2.$$

Тогда $\angle A = \operatorname{arctg} 2 = 63,4^\circ = 1,107$ рад.

4). Так как высота CD перпендикулярна стороне AB, то угловые коэффициенты этих прямых обратные по величине и противоположны по знаку, то есть

$$k_{CD} = -\frac{1}{k_{AB}} = -\frac{4}{3}.$$

Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_1(x_1; y_1)$ в заданном угловым коэффициентом к направлению, имеет вид

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

Подставим в эту формулу координаты точки C и $k_{CD} = -\frac{4}{3}$, получим

уравнение высоты CD: $y - 10 = -\frac{4}{3}(x - 3)$ или $4x + 3y - 42 = 0$.

Расстояние d от точки $M_1(x_1; y_1)$ до прямой, заданной уравнением

$Ax + By + C = 0$ вычисляется по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Отсюда
$$d = \frac{|3 \cdot 3 + 4 \cdot 10 + 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{50}{5} = 10.$$

5). Множество точек треугольника ABC есть пересечение трех полуплоскостей, первая из которых ограничена прямой AB и содержит точку C, вторая ограничена прямой BC и содержит точку A, а третья ограничена прямой AC и содержит точку B.

Для получения неравенства, определяющего полуплоскость, ограниченную прямой AB и содержащую точку C, подставим в уравнение прямой AB координаты точки C: $3 \cdot 3 + 4 \cdot 10 + 1 = 50 > 0$.

Поэтому искомое неравенство имеет вид $3x + 4y + 1 \geq 0$.

Для составления неравенства, определяющего полуплоскость, ограниченную прямой ВС и содержащую точку А, составим уравнение прямой ВС:

$$\frac{x-5}{3-5} = \frac{y-(-4)}{10-(-4)}; \quad \frac{x-5}{-2} = \frac{y+4}{14}; \quad \frac{x-5}{-1} = \frac{y+4}{7}; \quad 7x + y - 31 = 0.$$

Подставив в последнее уравнение координаты точки А, имеем $7 \cdot (-7) + 5 - 31 = -61 < 0$. Искомое неравенство есть $7x + y - 31 \leq 0$.

Подобным образом составляем неравенство, определяющее полуплоскость, ограниченную прямой АС и содержащую точку В :

$$x - 2y + 17 \geq 0.$$

Итак, множество точек треугольника АВС определяется системой неравенств

$$\begin{cases} 3x + 4y + 1 \geq 0 \\ 7x + y - 31 \leq 0. \\ x - 2y + 17 \geq 0 \end{cases}$$

Задача № 35.

Решить систему уравнений двумя способами: 1) при помощи определителей (по формулам Крамера); 2) с помощью обратной матрицы.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = -1 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

Решение

1). Вычислим определитель Δ системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 15$$

Так как $\Delta \neq 0$, данная система имеет единственное решение. Вычисляем определители Δx_1 , Δx_2 , Δx_3 .

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 5 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 15; \quad \Delta x_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 0; \quad \Delta x_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 30.$$

По формулам Крамера имеем:

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{15}{15} = 1; \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{0}{15} = 0; \quad x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} = \frac{30}{15} = 2.$$

Ответ: (1; 0; 2).

2). Данную систему уравнений записать в матричной форме и решить с помощью обратной матрицы.

Запишем систему в виде $A X = B$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Находим A^{-1} :

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 15;$$

$$A_{11} = 5; A_{21} = 3; A_{31} = 1; A_{12} = -5; A_{22} = 3;$$

$$A_{32} = -4; A_{13} = 0; A_{23} = -3; A_{33} = 9;$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -5 & 3 & -4 \\ 0 & -3 & 9 \end{bmatrix}; \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{15} & \frac{3}{15} & \frac{1}{15} \\ -\frac{5}{15} & \frac{3}{15} & -\frac{4}{15} \\ \frac{0}{15} & -\frac{3}{15} & \frac{9}{15} \end{bmatrix};$$

Теперь получаем:

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{5}{15} & \frac{3}{15} & \frac{1}{15} \\ -\frac{5}{15} & \frac{3}{15} & -\frac{4}{15} \\ \frac{0}{15} & -\frac{3}{15} & \frac{9}{15} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix};$$

Ответ: $x_1 = 1; x_2 = 0; x_3 = 2$.

Задача № 55.

Даны координаты точек A, B, C, D: A (7; 3; -4) , B (8; 1; -2) , C (18; 5; 6) , D (5; 3; 0).

Требуется: 1) записать векторы AB, AC, AD в системе орт и найти модули этих векторов; 2) найти величину угла между векторами AB и AC; 3) найти площадь треугольника ABC; 4) найти объем пирамиды ABCD.

Решение.

1). Если даны точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$, то вектор M_1M_2 в системе орт i, j, k (единичные векторы, направления которых совпадают с положительным направлением координатных осей) имеет следующий вид:

$$M_1M_2 = (x_2 - x_1)i + (y_2 - y_1)j + (z_2 - z_1)k.$$

Подставив координаты точек A и B, получим

$$AB = (8 - 7)i + (1 - 3)j + (-2 - (-4))k = i - 2j + 2k.$$

Подобным образом находим

$$AC = 11i + 2j + 10k, AD = -2i + 4k.$$

Модуль вектора M_1M_2 , определяемый в координатной форме, находится по формуле

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Подставив в формулу координаты векторов AB, AC, AD, имеем:

$$|AB| = \sqrt{(8 - 7)^2 + (1 - 3)^2 + (-2 - (-4))^2} = 3;$$

$$|AC| = \sqrt{(18 - 7)^2 + (5 - 3)^2 + (6 - (-4))^2} = 15;$$

$$|AD| = \sqrt{(5 - 7)^2 + (3 - 3)^2 + (0 - (-4))^2} = 2\sqrt{5}.$$

2). Косинус угла α , образованного векторами $a = a_x i + a_y j + a_z k$ и $b = b_x i + b_y j + b_z k$, равен скалярному произведению этих векторов, деленному на произведение их модулей, то есть определяется формулой.

$$\cos \alpha = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

Подставляя в формулу координаты векторов АВ и АС, получим

$$\cos \alpha = \frac{1 \cdot 11 + (-2) \cdot 2 + 2 \cdot 10}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} \sqrt{11^2 + 2^2 + 10^2}} = \frac{27}{45} = 0,6; \rightarrow \alpha \approx 53^\circ 8'.$$

3). Известно, что модуль вектора, равного векторному произведению двух векторов, равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах. Тогда площадь треугольника АВС равна половине модуля векторного произведения векторов АВ и АС, то есть

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |AB \times AC|.$$

Тогда

$$AB \times AC = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 2 \\ 11 & 2 & 10 \end{vmatrix} = -24i + 12j + 24k,$$

$$|AB \times AC| = \sqrt{(-24)^2 + 12^2 + 24^2} = 36; \rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 36 = 18 \text{ кв.ед}$$

4). Объем V пирамиды ABCD равен одной шестой объема параллелепипеда, построенного на трех некомпланарных векторах АВ, АС, АД, то есть равен одной шестой абсолютной величины смешанного произведения этой тройки векторов, то есть

$$V = \frac{1}{6} |(AB \times AC) \cdot AD| = \frac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 11 & 2 & 10 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot 144 = 24 \text{ куб.ед.}$$

Задача № 75.

Вычислить указанные пределы.

$$a) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x-1)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-1}{x+3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3};$$

$$б) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-4}{x + \sqrt[3]{x}} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{4}{x}}{1 + \sqrt[3]{\frac{1}{x^2}}} = 2;$$

$$в) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\arctg 2x} = \left| \frac{0}{0} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{1 + (2x)^2} \cdot 2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 4x^2}{2} = \frac{1}{2};$$

$$г) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-2} \right)^{4x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-2+3}{2x-2} \right)^{4x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{2x-2} \right)^{4x}$$

Пусть

$$\frac{3}{2x-2} = \frac{1}{y}; \rightarrow 3y = 2x-2; \quad 2x = 3y+2;$$

$$4x = 6y+4$$

Если

$$x \rightarrow \infty, \Rightarrow y \rightarrow \infty.$$

Таким образом, искомый предел имеет вид

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y} \right)^{6y+4} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{y} \right)^y \right]^6 \cdot \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y} \right)^4 = e^6 \cdot 1^4 = e^6.$$

Задача № 95.

Найти производные данных функций.

$$a) y = \frac{(2x+1)\sqrt{x^2-x}}{x^2};$$

$$y' = \frac{\left[2\sqrt{x^2 - x} + (2x+1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 - x}} \cdot (2x-1) \right] \cdot x^2 - (2x+1)\sqrt{x^2 - x} \cdot 2x}{x^4} =$$

$$= \frac{3}{2x^2\sqrt{x^2 - x}};$$

$$б) \quad y = e^{-x^2} \ln x;$$

$$y' = -2xe^{-x^2} \ln x + e^{-x^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{e^{-x^2}}{x} (1 - 2x^2 \ln x)$$

$$в) \quad \sin x + xy^2 = 0$$

Данная функция задана в неявной форме. Дифференцируя по x обе части уравнения, имеем

$$\cos x + y^2 + x \cdot 2yy' = 0 \quad \rightarrow \quad y' = -\frac{\cos x + y^2}{2xy}$$

$$\text{Из уравнения имеем:} \quad y^2 = -\frac{\sin x}{x}.$$

Подставив это выражение, получим

$$y' = -\frac{x \cos x - \sin x}{2x\sqrt{-x \sin x}}$$

Задача № 115.

Исследовать данную функцию методами дифференциального исчисления и построить их графики. Исследование функции рекомендуется проводить по следующей схеме: 1) найти область определения функции; 2) исследовать функцию на непрерывность; 3) определить, является ли данная функция четной, нечетной; 4) найти интервалы возрастания и убывания функции и точки ее экстремума; 5) найти интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба графика функции; 6) найти асимптоты графика функции.

$$y = \frac{3 \ln x}{x}.$$

Решение.

1. Функция определена при значениях аргумента $x > 0$.

2. Данная функция является элементарной, поэтому она непрерывна на всей области определения, то есть на интервале $(0; \infty)$.

3. Установить четность или нечетность функции обычным методом, подставляя $(-x)$ вместо x , мы не можем, так как при $(-x)$ функция не будет существовать. Следовательно, можно сделать вывод, что функция не является ни четной, ни нечетной (функция общего вида).

4. Для исследования функции на экстремум найдем ее первую производную:

$$y' = \frac{3\frac{1}{x} \cdot x - 3\ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{3 - 3\ln x}{x^2}.$$

$y' = 0$ при $x = e$ и y' — не существует при $x \leq 0$ так же как и y , то есть этот интервал не принадлежит области определения функции, экстремума в нем быть не может. Тем самым имеем критическую точку $x = e$. Разобьем числовую ось на два интервала: $(0; e)$, $(e; \infty)$. В первом интервале первая производная положительная, здесь функция возрастает, во втором интервале — отрицательная и функция убывает. При переходе через точку $x = e$ первая производная меняет свой знак с плюса на минус, поэтому в этой точке функция имеет максимум: $y_{\max} = y(e) = \frac{3\ln e}{e} = \frac{3}{e}$. Значит $A(e; 3/e)$ — точка максимума.

5. Для определения точек перегиба графика функции и интервалов выпуклости и вогнутости кривой найдем вторую производную:

$$y'' = \frac{-3\frac{1}{x} \cdot x^2 - (3 - 3\ln x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{-9 + 6\ln x}{x^3}.$$

$y'' = 0$ при $\ln x = 1,5$ т.е. при $x = 4,48$ и y'' — не существует при $x \leq 0$ так же как и y , то есть этот интервал не принадлежит области определения функции. Тем самым имеем критическую точку $x = 4,48$. Разобьем числовую ось на два

интервала: $(0; 4,48)$; $(4,48; \infty)$. При переходе через точку $x=4,48$ вторая производная меняет свой знак, поэтому $x=4,48$ – абсцисса точки перегиба. Следовательно, $B(4,48; 1,005)$ – точка перегиба графика функции.

6. Точек разрыва функции нет. Рассмотрим поведение функции на границах области определения $(0; \infty)$.

Для определения уравнений наклонных асимптот $y = kx + b$ воспользуемся формулами

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx]$$

Тогда

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 \ln x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 \frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{2x^2} = 0, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{3 \ln x}{x} - 0 \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 \frac{1}{x}}{1} = 0$$

При вычислении пределов использовалось правило Лопиталя. Значит, прямая $y = 0$ (ось Ox) есть горизонтальная асимптота графика исследуемой функции.

Рассмотрим поведение функции около левой границы области определения $x \rightarrow 0$

Найдем предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x} = 0,$$

Следовательно, прямая $x=0$ (ось Oy) является вертикальной асимптотой функции.



Задача № 125.

Сумма двух положительных чисел равна a . Каковы эти числа, если сумма их кубов будет наименьшей?

Решение:

Примем первое число за x , отсюда – второе будет равно $(a-x)$.

Найдем сумму их кубов

$$\Sigma = x^3 + (a-x)^3$$

Найдем критические точки в интервале $(0, +\infty)$, в которых эта сумма будет наименьшей:

$$\left[x^3 + (a-x)^3 \right]' = 3x^2 + 3(a-x)^2 \cdot (-1) = 6ax - 3a^2 = 0$$

$$x = \frac{a}{2}; \quad (a-x) = \frac{a}{2}.$$

Ответ: $a/2$; $a/2$.

Задача № 145.

Вычислить неопределенные интегралы.

$$a) \quad \int x(1-5x^2)^7 dx = \left| 1-5x^2 = t; dt = -10x dx \right| = -\frac{1}{10} \int t^7 dt = -\frac{1}{10} \cdot \frac{t^8}{8} + C = -\frac{(1-5x^2)^8}{80} + C.$$

$$b) \quad \int \frac{x^3 - 5}{x^2 + 4x + 3} dx = \int (x-4) dx + \int \frac{13x+7}{(x+1)(x+3)} dx = \left| \frac{13x+7}{(x+1)(x+3)} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{x+3} \right| =$$

$$= \frac{x^2}{2} - 4x - \int \frac{3}{x+1} dx + \int \frac{16}{x+3} dx = \frac{x^2}{2} - 4x - 3\ln(x+1) + 16\ln(x+3) + C.$$

$$e) \quad \int \frac{dx}{x^2 + 6x + 10} = \int \frac{dx}{x^2 + 6x + 9 + 1} = \int \frac{d(x+3)}{(x+3)^2 + 1^2} = \frac{1}{1} \arctg \frac{x+3}{1} + C =$$

$$= \arctg(x+3) + C.$$

$$\begin{aligned}
 e) \quad \int \arccos 6x dx &= \left| \begin{array}{l} u = \arccos 6x; \quad dv = dx \\ v = x; \quad du = \frac{-6dx}{\sqrt{1-(6x)^2}} \end{array} \right| = x \cdot \arccos 6x - \int x \cdot \frac{-6dx}{\sqrt{1-36x^2}} = \\
 &= x \cdot \arccos 6x - \frac{1}{12} \int \frac{d(1-36x^2)}{\sqrt{1-36x^2}} = x \cdot \arccos 6x - \frac{1}{6} \sqrt{1-36x^2} + C.
 \end{aligned}$$

Задача № 165.

Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры, ограниченной параболой

$$y^2 = 4x \quad \text{и} \quad x^2 = 4y.$$

Решение.

Координаты центра тяжести $(x; y)$ плоской фигуры, ограниченной параболой $y^2 = 4x$ и $x^2 = 4y$, определяются по формулам

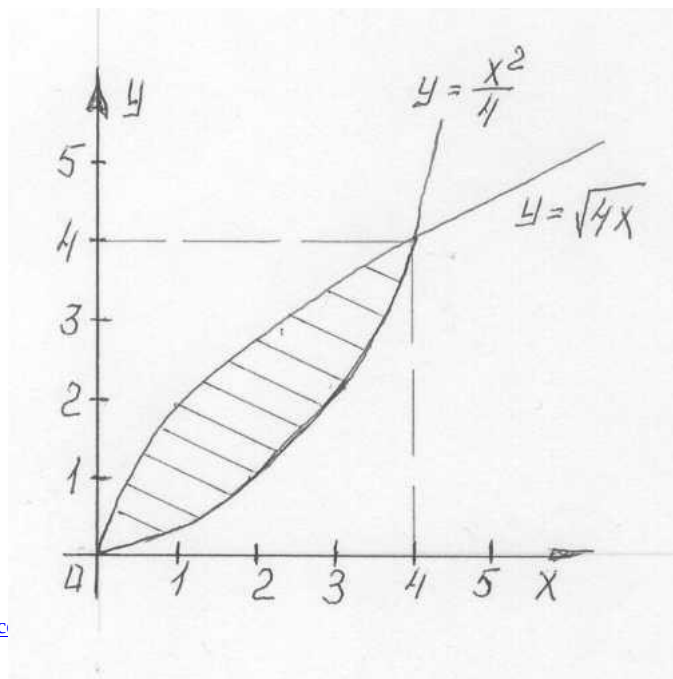
$$x_c = \frac{1}{S} \int_a^b xy dx; \quad \text{и} \quad y_c = \frac{1}{2S} \int_a^b y^2 dx$$

где S – площадь фигуры, ограниченной кривыми

$$y = 2\sqrt{x} \quad \text{и} \quad y = \frac{x^2}{4}.$$

Находим точки пересечения кривых :

$$2\sqrt{x} = \frac{x^2}{4}; \quad x_1 = 0; x_2 = 4.$$



Следовательно,

$$S = \int_0^4 2\sqrt{x} - \int_0^4 \frac{x^2}{4} = \frac{4}{3} \sqrt{x^3} \Big|_0^4 - \frac{x^3}{12} \Big|_0^4 = \frac{4\sqrt{64}}{3} - \frac{64}{12} = \frac{32}{3} - \frac{16}{3} = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}.$$

$$x_c = \frac{1}{\frac{16}{3}} \int_0^4 x \left[2\sqrt{x} - \frac{x^2}{4} \right] dx = \frac{3}{8} \int_0^4 x^{\frac{3}{2}} dx - \frac{3}{64} \int_0^4 x^3 dx = 4\frac{4}{5} - 3 = 1\frac{4}{5}.$$

$$y_c = \frac{1}{2 \cdot \frac{16}{3}} \int_0^4 \left[\left(2\sqrt{x} \right)^2 - \left(\frac{x^2}{4} \right)^2 \right] dx = \frac{3}{32} \int_0^4 \left(4x - \frac{x^4}{16} \right) dx = \frac{3}{32} \left(\frac{4x^2}{2} - \frac{x^5}{16 \cdot 5} \right) \Big|_0^4 = 1\frac{4}{5}.$$

Ответ: $1\frac{1}{4}; 1\frac{4}{5}$ -координаты центра тяжести.