МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ВОЛОГОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Н. С. Матвеев, Н. А. Никитина, Л. В. Ярыгина

МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Учебное пособие

ВОЛОГДА
2017

УДК 519.8(075.8)
ББК 65в631+22.18я73
М33

Утверждено редакционно-издательским советом ВоГУ

Рецензенты:

канд. экон. наук, доцент, доцент кафедры экономики и финансов Вологодского филиала РАНХиГС при Президенте РФ М. А. Логунов,

канд. экон. наук, главный экономист отдела банковского надзора Отделения по Вологодской области Северо-Западного главного управления Центрального банка Российской Федерации Е. Н. Степанова

Матвеев, Н. С.
М33 Методы оптимальных решений : учебное пособие / Н. С. Матвеев, Н. А. Никитина, Л. В. Ярыгина ; М-во образ. и науки РФ, Вологод. гос. ун-т. – Вологда : ВоГУ, 2017. – 92 с. : ил.

В учебном пособии рассматриваются теория линейного программирования и отдельные аспекты её применения для решения других классов задач математического программирования. Основные положения сопровождаются примерами. Учебное пособие предназначено для студентов всех форм обучения.

УДК 519.8(075.8)
ББК 65в631+22.18я73

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Одним из основных разделов учебного предмета «Методы оптимальных решений» является математическое программирование. *Математическое программирование* представляет собой математическую дисциплину, занимающуюся изучением экстремальных задач и разработкой методов их решения.

В общем виде математическая постановка экстремальной задачи состоит в определении наибольшего или наименьшего значения функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ при условиях $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \{\le, =, \ge\} b_i$ $\left(i=\overline{1,m}\right)$, где f и g_i – заданные функции, а b_i – некоторые действительные числа.

В зависимости от свойств функций f и g_i задачи математического программирования делятся на несколько классов. Прежде всего, различают задачи линейного и нелинейного программирования. При этом если все функции f и g_i линейные, то соответствующая задача является задачей *линейного программирования*. В *задачах нелинейного программирования* хотя бы одна из указанных функций является нелинейной.

Наиболее изученным разделом математического программирования является линейное программирование. Для решения задач линейного программирования разработан универсальный метод. Кроме того, для отдельных классов линейных оптимизационных задач можно использовать специальные методы [1, 2, 4, 5, 7, 8].

Задачи нелинейного программирования настолько разнообразны, что для них не существует универсального метода решения [12]. Имеются лишь специальные методы, позволяющие решать только отдельные группы таких задач. Иногда удаётся свести задачу нелинейного программирования к задаче линейного программирования.

Отдельными классами задач математического программирования являются задачи *целочисленного*, *дробно-линейного*, *параметрического программирования* и *многоцелевой оптимизации*, для решения которых также может использоваться аппарат линейного программирования [3, 6, 9, 10].

В настоящем учебном пособии показана возможность применения линейного программирования для решения разных классов задач математического программирования.

1. ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

1.1. Примеры задач линейного программирования

Во многих экономических задачах требуется найти максимум или минимум линейной функции при условии, что её переменные удовлетворяют некоторой системе линейных ограничений. Примером тому являются следующие задачи [2, 14].

Простейшая задача производственного планирования

Постановка задачи. Предприятие может выпускать n типов продукции, используя m видов ресурсов. Известно: нормы затрат ресурсов при производстве единицы продукции каждого типа, запасы ресурсов в плановом периоде, цены на продукцию.

Определить план производства продукции предприятием, позволяющий при наличных ресурсах максимизировать выпуск продукции в стоимостном выражении. Сбыт всей выпускаемой продукции обеспечен.

Условные обозначения:

n – количество типов продукции,

j – порядковый номер типа продукции $\left(j=\overline{1,n}\right)$,

m – количество видов ресурсов,

i – порядковый номер вида ресурсов $\left(i=\overline{1,m}\right)$,

a_{ij} – расход i-го ресурса на производство единицы j-й продукции,

b_i – запас i-го ресурса,

p_j – цена единицы j-ой продукции.

x_j – планируемое к выпуску количество j-й продукции.

Математическая модель задачи. Продукция j произведённая в количестве x_j, имеет стоимость $p_j x_j$ д.е., а стоимость всей выпускаемой предприятием продукции составит $p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + \ldots + p_n \cdot x_n$ (д.е.).

Так как стоимость продукции должна быть максимальной, то

$$F(x) = p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + \ldots + p_n \cdot x_n \to max. \qquad (1.1)$$

Расход i-го ресурса на производство x_j единиц продукции j составит $a_{ij} x_j$ единиц, а на производство всей выпускаемой предприятием продукции будет израсходовано i-го ресурса $a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 + \ldots + a_{in} \cdot x_n$ (единиц).

Так как запас ресурса каждого вида ограничен, должны выполняться следующие условия:

$$Расход\ i-го\ ресурса \le Запас\ i-го\ ресурса\ .$$

Таким образом, приходим к следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \ \ldots + a_{1n}\cdot x_n \le b_1, \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + \ \ldots + a_{2n}\cdot x_n \le b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + \ \ldots + a_{mn}\cdot x_n \le b_m. \end{cases} \tag{1.2}$$

Если продукция j не выпускается, то $x_j = 0$, в противном случае – $x_j > 0$. Таким образом, на неизвестные должно быть наложено ограничение неотрицательности:

$$x_1 \ge 0\ ,\ x_2 \ge 0\ , \ldots\ ,\ x_n \ge 0\ . \tag{1.3}$$

Функция $F(x)$, подлежащая максимизации, называется целевой, а условия (1.2), (1.3) – ограничениями задачи.

Задачу (1.1)-(1.3) также можно записать с использованием *знаков суммирования*:

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \to max,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i\ (i = \overline{1, m}\ ),$$

$$x_j \ge 0\, (j = \overline{1, n}\ ).$$

Кроме того, иногда применяются векторная и матричная формы записи. *Векторная форма записи* имеет вид:

$$F(x) = PX \to max,$$

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ \ldots + A_n x_n \le B,$$

$$X \ge 0,\ \ B \ge 0,$$

где PX – скалярное произведение векторов $P = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$, $X = (x_1, x_2, \ldots,\ x_n)$,

A_j и B – вектор-столбцы:

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots,\ A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Матричная форма записи:

$$F(x) = PX \to max,$$

$$AX \le B,$$

$$X \ge 0,\ B \ge 0,$$

где $P = (p_1, p_2, ..., p_n)$ – вектор-строка,

$A = (a_{ij})_{m \times n}$ – матрица размерности $m \times n$, столбцами которой являются вектор-столбцы A_j ,

X и B – вектор-столбцы:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Задача рационального раскроя материала

Постановка задачи. Листовой материал поступает на предприятия обычно в виде стандартных форм, из которых нарезают заготовки определённых размеров. Выход заготовок зависит от принятых вариантов раскроя. Каждый вариант характеризуется количеством заготовок различного вида, получаемых из одного листа, и величиной отходов. Требуется определить план раскроя, т.е. указать, сколько листов кроить по каждому из рассматриваемых вариантов, чтобы нарезать необходимое количество заготовок каждого вида при минимуме суммарных отходов.

Условные обозначения:

n – количество вариантов раскроя;

j – порядковый номер варианта раскроя $\left(j = \overline{1, n}\right)$;

m – количество видов заготовок;

i – порядковый номер вида заготовок $\left(i = \overline{1, m}\right)$;

a_{ij} – выход заготовок i-го вида при раскрое одного листа по j-му варианту;

b_i – необходимое количество заготовок i-го вида;

c_j – отходы при раскрое одного листа по j-му варианту.

x_j – количество листов, раскраиваемых по j-му варианту.

Математическая модель задачи.

$$F(x) = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \ldots + c_n \cdot x_n \to min, \quad (1.4)$$

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n = b_1, \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n = b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n = b_m, \end{cases} \quad (1.5)$$

$$x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0, \ldots, \; x_n \geq 0. \quad (1.6)$$

Задача составления оптимальной смеси

Постановка задачи. Для составления смеси можно использовать n исходных материалов, в состав каждого из которых входят m различных компонентов. Известно: содержание каждого компонента в единице каждого исходного материала, требуемое количество каждого компонента в составе смеси, цена единицы каждого исходного материала. Требуется отыскать наиболее дешёвый набор из исходных материалов, обеспечивающий получение смеси с заданными свойствами.

Условные обозначения:

n – количество исходных материалов;

j – порядковый номер исходного материала $\left(j = \overline{1, n}\right)$;

m – количество компонентов;

i – порядковый номер компонента $\left(i = \overline{1, m}\right)$;

a_{ij} – содержание i-го компонента в единице j-го исходного материала;

b_i – минимальное необходимое количество i-го компонента в смеси;

c_j – цена единицы j-го исходного материала.

x_j – искомое количество j-го исходного материала в смеси.

Математическая модель задачи.

$$F(x) = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \ldots + c_n \cdot x_n \to min, \quad (1.7)$$

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n \geq b_1, \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n \geq b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n \geq b_m, \end{cases} \tag{1.8}$$

$$x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, \ldots, \ x_n \geq 0. \tag{1.9}$$

1.2. Эквивалентные формы задач линейного программирования

При постановке задач линейного программирования возможны различные случаи: целевая функция в одних задачах максимизируется, в других минимизируется; ограничения на переменные могут задаваться неравенствами и/или равенствами; требование неотрицательности не обязательно распространяется на все переменные. В зависимости от особенностей ограничений различают три эквивалентные формы задач линейного программирования: стандартную, каноническую и общую. Задача (1.1)-(1.3) имеет стандартную форму. Итак, *стандартная задача* – это задача с однотипными ограничениями–неравенствами и неотрицательными переменными.

Канонической называется задача, где ограничения системы имеют форму равенств и все переменные неотрицательны. (Задача (1.4)–(1.6) имеет канонический вид.) Частным случаем канонической задачи является задача в *базисной форме*, отличающаяся тем, что все $b_i \geq 0$ $\left(i = \overline{1, m}\right)$, и в каждом условии имеется переменная с коэффициентом $+1$, которая не входит ни в одно из остальных уравнений. Переменная с таким свойством называется *базисной*.

Общей называется задача, в которой имеются ограничения в виде, как равенств, так и неравенств, а требование неотрицательности может быть наложено не на все переменные. (Задачу (1.7)–(1.9) можно рассматривать как частный случай общей задачи.)

1.3. Нахождение решения задач линейного программирования

Совокупность чисел $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющих ограничениям задачи, называется *допустимым решением* (или *допустимым планом*), а план $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$, при котором целевая функция задачи примет своё экстремальное значение, называется *оптимальным*.

При решении задач двумерного пространства в основном применяется **графический метод.**

Пусть дана задача:

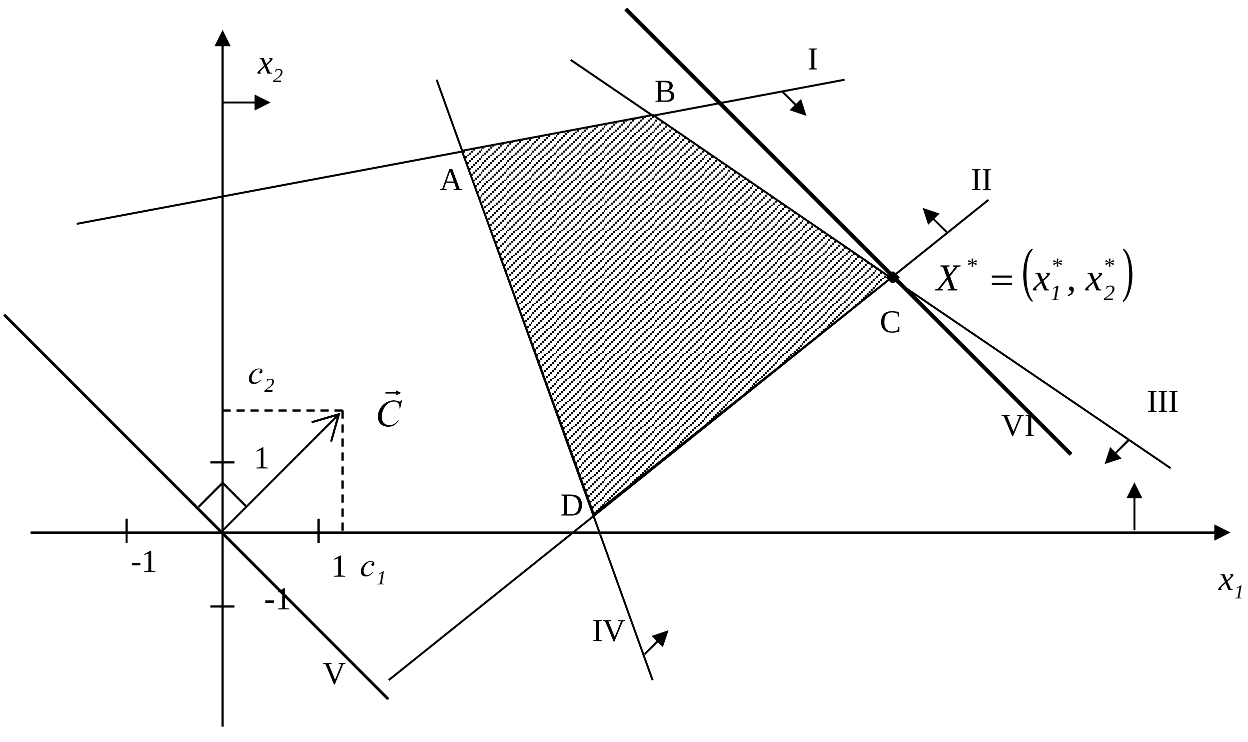
$$F(x) = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 \to max, \tag{1.10}$$

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 \le b_1, \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 \le b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 \le b_m, \end{cases} \tag{1.11}$$

$$x_1 \ge 0, \; x_2 \ge 0. \tag{1.12}$$

Каждое неравенство системы (1.11) геометрически определяет полуплоскость с граничной прямой $a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 = b_i$ $\left(i = \overline{1, m}\right)$. Условие неотрицательности (1.12) определяет полуплоскости соответственно с граничными прямыми $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. Если система условий задачи совместна (т. е. имеет хотя бы одно решение), то полуплоскости, пересекаясь, образуют общую часть, называемую многоугольником решений (рис. 1). Он может быть точкой, отрезком, лучом, многоугольником, неограниченной многоугольной областью.

Таким образом, допустимыми решениями являются только точки заштрихованной области. Оптимальными решениями будут те из них, в которых целевая функция максимальна.



Линии I, II, III, IV: $a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 = b_i$.

Линия V:. $c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 = 0$

Линия VI: $c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 \to max$.

Рис. 1. Графическое изображение задачи линейного программирования

Уравнение целевой функции $c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 = h$ для любого фиксированного h представляет собой прямую. При различных значениях h получаются параллельные между собой прямые. Поэтому, приравняв $F(x)$ к некоторой постоянной, например к 0, и построив соответствующую прямую, нужно передвигать её параллельно самой себе в направлении увеличения h, которое определяется направляющим вектором $\vec{C} = (c_1, c_2)$. При этом последняя общая точка (или точки) заштрихованной области и прямой $c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 = h$ и определяет (-ют) оптимальный план (планы) задачи. Возможна также ситуация, когда целевая функция неограниченна сверху.

Итак, нахождение решения задачи линейного программирования графическим методом включает следующие этапы:

1) Строят прямые, уравнения которых получаются в результате замены в ограничениях (1.11), (1.12) знаков неравенств на знаки точных равенств.

2) Находят полуплоскости, определяемые каждым из ограничений задачи.

3) Находят многоугольник решений.

4) Строят вектор $\vec{C} = (c_1, c_2)$.

5) Строят прямую $c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 = h$.

6) Передвигают прямую $c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 = h$ в направлении вектора $\vec{C}$, в результате чего либо находят точку (точки), в которой (которых) целевая функция принимает максимальное значение, либо устанавливают неограниченность сверху функции на множестве планов.

7) Определяют координаты точки максимума функции и вычисляют значение целевой функции в этой точке.

Из геометрического представления задачи линейного программирования видно, что для её решения необходимо исследовать только вершины многоугольного множества – *опорные* планы задачи. Этот вывод сохраняется и при переходе к задачам с большим числом переменных, где вместо многоугольного рассматривается многогранное множество допустимых решений. Выбор среди всех вершин многогранника решений той, в которой целевая функция достигает своего экстремального значения, осуществляется **симплексным методом**, разработанным применительно к задачам в базисной форме.

Рассмотрим стандартную задачу:

$$F(x) = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \ldots + c_n \cdot x_n \to max, \qquad (1.1')$$

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n \le b_1, \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n \le b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n \le b_m, \end{cases} \qquad (1.2')$$

$$x_1 \ge 0, \; x_2 \ge 0, \ldots, \; x_n \ge 0. \qquad (1.3')$$

Для решения симплекс-методом задачи (1.1')-(1.3') следует сначала привести её к каноническому виду. В каждое ограничение системы (1.2') необходимо добавить дополнительную неотрицательную переменную $x_{n+i} \geq 0$ $\left(i = \overline{1, m}\right)$. В целевую функцию дополнительные переменные войдут с нулевыми коэффициентами. В результате получается задача в базисной форме:

$$F(x) = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \ldots + c_n \cdot x_n + \\ + 0 \cdot x_{n+1} + 0 \cdot x_{n+2} + \ldots + 0 \cdot x_{n+m} \to max, \tag{1.13}$$

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n + x_{n+m} = b_m, \end{cases} \tag{1.14}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \ldots,\ x_n \geq 0,\ x_{n+1} \geq 0, \\ x_{n+2} \geq 0, \ldots, x_{n+m} \geq 0. \tag{1.15}$$

Вычислительная схема симплекс-метода для задачи в базисной форме ($F(x)$ максимизируется):

1. Находят первое опорное решение: $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, $x_{n+1} = b_1$, $x_{n+2} = b_2, \ldots, x_{n+m} = b_m$.

2. Составляют симплекс-таблицу (таблица 1.1). Первые m строк заполняют, используя запись задачи в базисной форме и найденный опорный план. В столбце i записывают номера строк. В столбце $Б$ перечисляются базисные переменные. Соответствующие базисным переменным коэффициенты целевой функции заносят в столбец C_i, а значения базисных переменных при рассматриваемом опорном плане – в столбец b_i. В столбцах переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ записывают коэффициенты a_{ij} из системы (1.14). Показатели $(m+1)$-й строки вычисляют. Для определения значения $F(x)$ используется формула:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{m} c_i \cdot b_i\,, \tag{1.16}$$

а для расчёта $\varDelta$-оценок –

$$\varDelta_j = \sum_{i=1}^{m} c_i \cdot a_{ij} - c_j\,,\ \left(j = \overline{1, n+m}\right). \tag{1.17}$$

Таблица 1.1

Первая симплексная таблица

i	C_i	$Б$	b_i	c_1	c_2	…	c_n	c_{n+1}	c_{n+2}	…	c_{n+m}	Θ_i
				x_1	x_2	…	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	…	x_{n+m}	
1	c_{n+1}	x_{n+1}	b_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	$a_{1\ n+1}$	$a_{1\ n+2}$	…	$a_{1\ n+m}$	
2	c_{n+2}	x_{n+2}	b_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	$a_{2\ n+1}$	$a_{2\ n+2}$	…	$a_{2\ n+m}$	
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
m	c_{n+m}	x_{n+m}	b_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	$a_{m\ n+1}$	$a_{m\ n+2}$	…	$a_{m\ n+m}$	
$m+1$			$F(x)$	Δ_1	Δ_2	…	Δ_n	Δ_{n+1}	Δ_{n+2}	…	Δ_{m+n}	

3. Опорный план проверяют на оптимальность: если все $\Delta_j \geq 0$, то задача решена (признак оптимальности для нахождения минимума функции цели – все $\Delta_j \leq 0$). Если не все $\Delta_j \geq 0$ $(\Delta_j \leq 0)$, то переходят к шагу 4.

4. Среди значений $\Delta_j < 0$ находят наибольшее по абсолютной величине (если находится минимум функции цели, выбирают наибольшее значение Δ_j из $\Delta_j > 0$). Соответствующий ему столбец называется *ключевым*. Он указывает на переменную, которую необходимо ввести в базис. Пусть это будет столбец с номером S. Если в ключевом столбце все элементы $a_{is} \leq 0$ $(i = \overline{1, m})$, целевая функция не ограничена. Решение окончено. Если не все $a_{is} \leq 0$, то переходят к шагу 5.

5. Для каждого элемента $a_{is} > 0$ ключевого столбца находят отношение:

$$\Theta_i = {b_i}/{a_{is}}. \tag{1.18}$$

Полученные значения Θ_i записывают в Θ-столбец, выбирают наименьшее из них и ту строку, где оно достигается, называют *ключевой*. Она указывает на переменную, которая их базиса выйдет. Пусть это будет строка с номером r. Элемент a_{rs} на пересечении ключевого столбца и ключевой строки называется *ключевым*.

6. Составляют новую симплекс-таблицу. В столбце $Б$ в r-й строке записывают переменную x_s, а в столбце C_i – соответствующий ей коэффициент C_s. Остальные элементы столбцов $Б$ и C_i переносят из предыдущей таблицы без изменений. Элементы $b_r^н$ и $a_{rj}^н$ $(j = \overline{1, n+m})$ получают из соответствующих элементов ключевой строки предыдущей таблицы делением их на величину ключевого элемента. В s-м столбце в r-й строке получается 1, а

в остальные строки этого столбца записывают нули. Остальные элементы $b_i^н$ и $a_{ij}^н$ пересчитывают из элементов предыдущей таблицы по правилу прямоугольника (формулы (1.19), (1.20)):

$$b_i^н = b_i - \frac{b_r \cdot a_{is}}{a_{rs}}, \tag{1.19}$$

$$a_{ij}^н = a_{ij} - \frac{a_{rj} \cdot a_{is}}{a_{rs}}. \tag{1.20}$$

Для определения показателей оценочной строки снова используют формулы (1.16), (1.17) или правило прямоугольника (формулы (1.21), (1.22)):

$$F^н(x) = F(x) - \frac{b_r \cdot \Delta_s}{a_{rs}}, \tag{1.21}$$

$$\Delta_j^н = \Delta_j - \frac{a_{rj} \cdot \Delta_s}{a_{rs}}. \tag{1.22}$$

Переходят к шагу 3.

Пример 1. Решить симплекс-методом задачу:

$$F(x) = -x_1 + 3 \cdot x_2 - x_3 \to max, \tag{1.1''}$$

$$\begin{cases} 3 \cdot x_1 - x_2 + 2 \cdot x_3 \le 7, \\ -2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \le 12, \\ -4 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 8 \cdot x_3 \le 10, \end{cases} \tag{1.2''}$$

$$x_1 \ge 0, \; x_2 \ge 0, \; x_3 \ge 0. \tag{1.3''}$$

Приведём задачу к каноническому виду:

$$F(x) = -x_1 + 3 \cdot x_2 - x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 \to max, \tag{1.4''}$$

$$\begin{cases} 3 \cdot x_1 - x_2 + 2 \cdot x_3 + x_4 = 7, \\ -2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + x_5 = 12, \\ -4 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 8 \cdot x_3 + x_6 = 10, \end{cases} \tag{1.5''}$$

$$x_1 \ge 0, \; x_2 \ge 0, \; x_3 \ge 0, \; x_4 \ge 0, \; x_5 \ge 0, \; x_6 \ge 0. \tag{1.6''}$$

Получили задачу в базисной форме, где переменные x_4, x_5, x_6 – базисные. Находим первое опорное решение: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $x_4 = 7$, $x_5 = 12$, $x_6 = 10$ Значение целевой функции при данном плане равно $F(x) = 0$.

Используя запись задачи в базисной форме и найденный опорный план, заполняем первые три строки первой симплексной таблицы (таблица 1.2).

Таблица 1.2

Первая симплексная таблица

i	C_i	$Б$	b_i	-1	3	-1	0	0	0	Θ_i
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
1	0	x_4	7	3	-1	2	1	0	0	–
2	0	x_5	12	-2	$\boxed{4}$	0	0	1	0	3
3	0	x_6	10	-4	3	8	0	0	1	10/3
4			0	1	-3	1	0	0	0	

Показатели четвёртой строки рассчитываем при помощи формул (1.16) и (1.17):

$$F(x) = \sum_{i=1}^{3} c_i \cdot b_i = 0 \cdot 7 + 0 \cdot 12 + 0 \cdot 10 = 0,$$

$$\Delta_1 = \sum_{i=1}^{3} c_i \cdot a_{i1} - c_1 = 0 \cdot 3 + 0 \cdot (-2) + 0 \cdot (-4) - (-1) = 1,$$

$$\Delta_2 = -3,\ \Delta_3 = 1,\ \Delta_4 = 0,\ \Delta_5 = 0,\ \Delta_6 = 0.$$

Так как оценка Δ_2 отрицательна, то ключевым на данной итерации будет столбец переменной x_2. Наличие в ключевом столбце положительных элементов позволяет определить ключевую строку. Выбираем её по наименьшему из отношений $\Theta_2 = 12/4 = 3$ и $\Theta_3 = 10/3 = 3\,1/3$. Ключевой элемент $a_{22} = 4$ возьмём в рамку.

Переходим ко второй симплексной таблице (таблица 1.3). В столбце $Б$ вместо переменной x_5 записываем переменную x_2. Соответствующий переменной x_2 коэффициент в столбце C_i равен 3. Остальные элементы столбцов $Б$ и C_i переносим из предыдущей таблицы без изменений. Элементы $b_2^н$ и $a_{2j}^н$ $\left(j = \overline{1,6}\right)$ получаем из соответствующих элементов первой симплексной таблицы делением их на 4. В столбце переменной x_2 в $1, 3$ строках записываем 0.

Таблица 1.3

Вторая симплексная таблица

i	C_i	$Б$	b_i	-1	3	-1	0	0	0	Θ_i
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
1	0	x_4	10	$\boxed{5/2}$	0	2	1	1/4	0	4
2	3	x_2	3	-1/2	1	0	0	1/4	0	–
3	0	x_6	1	-5/2	0	8	0	-3/4	1	–
4			9	-1/2	0	1	0	3/4	0	

Остальные элементы $b_j^н$ и $a_{ij}^н$ пересчитываем по формулам (1.19), (1.20). Например, для вычисления $b_1^н$ находим в таблице 1.2:

1) Число, соответствующее старому значению пересчитываемого элемента (*7*);

2) Число, стоящее на пересечении столбца, в котором расположен пересчитываемый элемент, и ключевой строки (*12*);

3) Число, стоящее на пересечении ключевого столбца и строки, в которой расположен пересчитываемый элемент (-*1*);

4) Число, соответствующее ключевому элементу (*4*).

Искомый элемент равен:

$$b_1^н = 7 - \frac{12 \cdot (-1)}{4} = 10.$$

Показатели оценочной строки определим по формулам (1.16), (1.17) или (1.21), (1.22). Например,

$$\Delta_5^н = 0 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{-3}{4} - 0 = \frac{3}{4} \text{ или } \Delta_5^н = 0 - \frac{1 \cdot (-3)}{4} = \frac{3}{4}.$$

Новый опорный план задачи: $x_1 = x_3 = x_5 = 0$, $x_2 = 3$, $x_4 = 10$, $x_6 = 1$; $F(x) = 9$ (см. столбцы $Б$ и b_i второй симплексной таблицы). Так как в оценочной строке имеется оценка $\Delta_1 < 0$, то полученное решение не является оптимальным. Наличие в столбце переменной x_1 положительного элемента позволяет перейти к следующему опорному плану: $x_1 = 4$, $x_2 = 5$, $x_3 = x_4 = x_5 = 0$, $x_6 = 11$; $F(x) = 11$ (таблица 1.4).

Таблица 1.4

Третья симплексная таблица

i	C_i	$Б$	b_i	-1	3	-1	0	0	0
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
1	-1	x_1	4	1	0	4/5	2/5	1/10	0
2	3	x_2	5	0	1	2/5	1/5	3/10	0
3	0	x_6	11	0	0	10	1	-1/2	1
4			11	0	0	7/5	1/5	4/5	0

Значения всех Δ-оценок неотрицательны, поэтому полученное решение $X^* = (4, 5, 0, 0, 0, 11)$ является оптимальным и при этом решении целевая функция принимает значение $F_{max}(X^*) = 11$.

Если каноническая задача не имеет базисной формы, то для её решения можно использовать **симплексный метод с искусственным базисом.**

Пусть дана задача:

$$F(x) = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \ \dots \ + c_n \cdot x_n \to max, \tag{1.23}$$

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1, \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n = b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mn} \cdot x_n = b_m, \end{cases} \tag{1.24}$$

$$x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0, \dots, \ x_n \ge 0. \tag{1.25}$$

В данном случае ограничения системы (1.24) не содержат базисных переменных. К каждому равенству прибавляют по одной переменной, которые называются *искусственными*. При этом величина C_{n+i} $(i = \overline{1, m})$ предполагается достаточно малым отрицательным числом, если задача решается на отыскание максимального значения целевой функции $(C_{n+i} = -M)$ и достаточно большим положительным числом, если задача решается на отыскание минимального значения целевой функции $(C_{n+i} = M)$. В результате получают так называемую *расширенную задачу*. Так, для задачи (1.23)-(1.25) расширенная задача имеет вид:

$$\begin{gathered} F'(x) = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \ \dots \ + c_n \cdot x_n - \\ - M \cdot x_{n+1} - M \cdot x_{n+2} - \dots - M \cdot x_{n+m} \to max, \end{gathered} \tag{1.26}$$

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n + x_{n+m} = b_m, \end{cases} \tag{1.27}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \ldots,\ x_n \geq 0,\ x_{n+1} \geq 0,$$
$$x_{n+2} \geq 0,\ \ldots, x_{n+m} \geq 0. \tag{1.28}$$

Задача (1.26)-(1.28) записана в базисной форме, поэтому её решение можно найти симплексным методом. В первоначальном опорном плане базис образован искусственными переменными, однако коэффициенты C_{n+i} $\left(i = \overline{1, m}\right)$, по абсолютной величине значительно превосходящие остальные коэффициенты целевой функции, позволяют выводить из базиса искусственные переменные и вводить в базис переменные исходной задачи.

Для отыскания оптимального плана исходной задачи используют следующую теорему.

<u>Теорема.</u> Если в оптимальном плане $X^* = \left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{m}\right)$ расширенной задачи переменные $x_{n+i} = 0$ $\left(i = \overline{1, m}\right)$, то план $X^* = \left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\right)$ является оптимальным планом исходной задачи.

Решая расширенную задачу симплексным методом, необходимо руководствоваться следующим.

При первом опорном плане $X = \left(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n}, b_1, b_2, \ldots, b_m\right)$ расширенной задачи значение целевой функции есть $F'(x) = -M \cdot \sum_{i=1}^{m} b_i$, а значения Δ-оценок равны $\Delta_j = -M \cdot \sum_{i=1}^{m} a_{ij} - c_j$ $\left(j = \overline{1, n+m}\right)$.Таким образом, $F'(x)$ и Δ-оценки состоят из двух частей, одна из которых зависит от M, а другая – нет. Поэтому после вычисления $F'(x)$ и Δ_j $\left(j = \overline{1, n+m}\right)$ их значения, а также исходные данные расширенной задачи заносят в таблицу, которая содержит на одну строку больше, чем обычная симплекс-таблица. При этом, в $(m+2)$-ю строку помещают коэффициенты при M, а в $(m+1)$-ю – слагаемые, не содержащие M. Проверка рассматриваемого опорного плана на оптимальность, а также выбор ключевого столбца осуществляются по оценкам $(m+2)$-й строки. Искусственная переменная, исключённая из базиса на некоторой итерации, в дальнейшем не может быть введена в базис, и соответствующий столбец можно не заполнять.

Пересчёт симплекс-таблицы при переходе от одного опорного плана к другому производят по общим правилам симплексного метода. Итерационный процесс по $(m+2)$-й строке проводят до тех пор, пока не исключат из базиса все искусственные переменные, затем процесс отыскания оптимального плана продолжают по $(m+1)$-й строке.

Доказано, что:

1) если в оптимальном плане расширенной задачи хотя бы одна из искусственных переменных положительна, то исходная задача не имеет допустимых планов – её условия несовместны;

2) если расширенная задача не имеет решения, то и исходная задача неразрешима.

Итак, процесс нахождения решения задачи (1.23)-(1.25) методом искусственного базиса включает следующие основные этапы:

1. Составляют расширенную задачу (1.26)-(1.28).
2. Находят опорный план расширенной задачи.
3. При помощи симплекс-метода исключают искусственные переменные из базиса. В результате либо находят опорный план задачи (1.23)-(1.25), либо устанавливают её неразрешимость.
4. Используя найденный опорный план задачи (1.23)-(1.25), либо находят симплекс-методом оптимальный план исходной задачи, либо устанавливают её неразрешимость.

Пример 2. Решить симплекс-методом с искусственным базисом задачу:

$$F(x) = -8\cdot x_1 - 2\cdot x_2 + 2\cdot x_3 + 5\cdot x_4 + 6\cdot x_5 \to min, \qquad (1.7'')$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 16, \\ 4\cdot x_1 - 2\cdot x_2 + 2\cdot x_3 - x_5 = 20, \end{cases} \qquad (1.8'')$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0. \qquad (1.9'')$$

Так как уравнения системы (1.8") не содержат базисных переменных, к каждому равенству прибавим по искусственной переменной $(x_6 \ge 0$ и $x_7 \ge 0)$, включив их в целевую функцию с коэффициентом M. Получим расширенную задачу

$$\begin{gathered} F'(x) = -8\cdot x_1 - 2\cdot x_2 + 2\cdot x_3 + 5\cdot x_4 + 6\cdot x_5 + \\ + M\cdot x_6 + M\cdot x_7 \to min, \end{gathered} \qquad (1.10'')$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_6 = 16, \\ 4\cdot x_1 - 2\cdot x_2 + 2\cdot x_3 - x_5 + x_7 = 20, \end{cases} \qquad (1.11'')$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0,$$
$$x_6 \geq 0,\ x_7 \geq 0, \qquad (1.12'')$$

для которой можно найти первоначальный опорный план: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$, $x_6 = 16$, $x_7 = 20$. Решаем расширенную задачу симплекс-методом (таблица 1.5).

Таблица 1.5

Симплексные таблицы решения расширенной задачи

i	C_i	$Б$	b_i	-8	-2	2	5	6	M	M	Θ
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
1	M	x_6	16	1	1	-1	-1	0	1	0	16
2	M	x_7	20	$\boxed{4}$	-2	2	0	-1	0	1	5
3			0	8	2	-2	-5	-6	0	0	
4			$36M$	$5M$	$-M$	M	$-M$	$-M$	$0M$	$0M$	
1	M	x_6	11	0	$\boxed{3/2}$	-3/2	-1	1/4	1		8/3
2	-8	x_1	5	1	-1/2	1/2	0	-1/4	0		-
3			-40	0	6	-6	-5	-4	0		
4			$11M$	$0M$	$3/2M$	$-3/2M$	$-3/2M$	$1/4M$	$0M$		
1	-2	x_2	22/3	0	1	-1	-2/3	1/6			
2	-8	x_1	26/3	1	0	0	-1/3	-1/6			
3			-84	0	0	0	-1	-5			

Оптимальный план расширенной задачи: $x_1 = 26/3$, $x_2 = 22/3$, $x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = x_7 = 0$. Отметим, что искусственные переменные x_6, x_7 равны нулю. Следовательно, план $X^* = (26/3, 22/3, 0, 0, 0)$ является оптимальным решением исходной задачи, а минимальное значение целевой функции равно $F(X^*) = -84$.

1.4. Двойственность в линейном программировании

Иногда для нахождения решения задачи линейного программирования можно использовать **теорию двойственности**, согласно которой каждой задаче линейного программирования можно определённым образом сопоставить некоторую другую задачу (линейного программирования), называемую *двойственной* по отношению к исходной или *прямой*. Связь взаимодвойственных задач заключается в том, что решение одной из них можно получить непосредственно из решения другой, используя теоремы двойственности.

Правила составления двойственной задачи

По отношению к задаче (1.1')-(1.3') двойственной является следующая задача:

$$F^*(y) = b_1 \cdot y_1 + b_2 \cdot y_2 + \ldots + b_m \cdot y_m \to min, \qquad (1.29)$$

$$\begin{cases} a_{11} \cdot y_1 + a_{21} \cdot y_2 + \ldots + a_{m1} \cdot y_m \geq c_1, \\ a_{12} \cdot y_1 + a_{22} \cdot y_2 + \ldots + a_{m2} \cdot y_m \geq c_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{1n} \cdot y_1 + a_{2n} \cdot y_2 + \ldots + a_{mn} \cdot y_m \geq c_n, \end{cases}, \qquad (1.30)$$

$$y_1 \geq 0, \; y_2 \geq 0, \ldots, \; y_m \geq 0. \qquad (1.31)$$

1. Число переменных в двойственной задаче равно числу ограничений в системе (1.2') исходной задачи, а число ограничений в системе (1.30) двойственной задачи равно числу переменных в исходной задаче.

2. Матрица, составленная из коэффициентов a_{ij} при неизвестных в системе ограничений (1.2') исходной задачи, и аналогичная матрица

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

в двойственной задаче получаются друг из друга транспонированием (т. е. заменой строк столбцами, а столбцов – строками).

3. Коэффициентами перед переменными в целевой функции (1.29) двойственной задачи являются свободные члены из системы (1.2') исходной задачи, а правыми частями в ограничениях системы (1.30) двойственной задачи – коэффициенты при неизвестных в целевой функции (1.1') исходной задачи.

4. Целевая функция исходной задачи задаётся на максимум, а целевая функция двойственной задачи – на минимум.

5. Если переменная x_j исходной задачи может принимать лишь неотрицательные значения, то j-е условие в системе (1.30) двойственной задачи является неравенством. Если же переменная x_j не ограничена по знаку, то j-е ограничение в системе (1.30) представляет собой уравнение. Если j-е ограничение в системе (1.2') исходной задачи является неравенством, то переменная y_i двойственной задачи должна быть неотрицательна. В противном случае переменная y_i не ограничена по знаку.

Замечание: Если в исходной задаче целевая функция максимизируется, а система ограничений содержит неравенства разного смысла, то целесообразно привести их к виду «$\le$». В этом случае неравенства системы ограничений двойственной задачи будут иметь вид «$\ge$».

Теоремы двойственности

Теорема 1. Если одна из пары двойственных задач имеет оптимальный план, то и другая задача имеет оптимальный план и значения целевых функций задач при оптимальных планах равны между собой, т.е.

$$F_{max}\left(X^*\right) = F^*_{min}\left(Y^*\right). \tag{1.32}$$

Если же целевая функция одной из них не ограничена, то другая задача вообще не имеет решения.

Теорема 2. (На примере взаимодвойственных задач (1.1')-(1.3') и (1.29)–(1.31)).

План $X^* = \left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\right)$ прямой задачи и план $Y^* = \left(y_1^*, y_2^*, \ldots, y_m^*\right)$ двойственной задачи являются оптимальными планами этих задач тогда и только тогда, когда выполняются условия:

$$\left(a_{1j}\cdot y_1^* + a_{2j}\cdot y_2^* + \ldots + a_{mj}\cdot y_m^* - c_j\right)\cdot x_j^* = 0 \quad \left(j=\overline{1,n}\right), \tag{1.33}$$

$$\left(b_i - \left(a_{i1}\cdot x_1^* + a_{i2}\cdot x_2^* + \ldots + a_{in}\cdot x_n^*\right)\right)\cdot y_i^* = 0 \quad \left(i=\overline{1,m}\right). \tag{1.34}$$

Алгоритм нахождения решения двойственной задачи (1.29)-(1.31) по оптимальному решению исходной задачи (1.1')-(1.3'):

1. Приводят системы ограничений (1.2') и (1.30) к канонической форме:

$$a_{i1}\cdot x_1 + a_{i2}\cdot x_2 + \ldots + a_{in}\cdot x_n + x_{n+i} = b_i \quad \left(i=\overline{1,m}\right),$$

$$a_{1j}\cdot y_1 + a_{2j}\cdot y_2 + \ldots + a_{mj}\cdot y_m + y_{m+j} = c_j \quad \left(j=\overline{1,n}\right).$$

2. Составляют условия (1.33), (1.34):

$$y_{m+j}^*\cdot x_j^* = 0 \quad \left(j=\overline{1,n}\right), \qquad x_{n+i}^*\cdot y_i^* = 0 \quad \left(i=\overline{1,m}\right).$$

3. Определяют переменные двойственной задачи, принимающие в оптимальном плане нулевые значения.
4. Удаляют из системы уравнений двойственной задачи переменные, принимающие в оптимальном плане нулевые значения.
5. Решают сокращённую систему уравнений двойственной задачи.
6. Проверяют выполнение равенства (1.32).

Пример 3. Для задачи из примера *1* составить двойственную задачу и, используя теоремы двойственности, найти по оптимальному решению исходной задачи оптимальный план двойственной.

Применяя правила составления двойственной задачи, получаем следующую задачу:

$$F^*(y) = 7 \cdot y_1 + 12 \cdot y_2 + 10 \cdot y_3 \to min, \tag{1.13''}$$

$$\begin{cases} 3 \cdot y_1 - 2 \cdot y_2 - 4 \cdot y_3 \ge -1, \\ -y_1 + 4 \cdot y_2 + 3 \cdot y_3 \ge 3, \\ 2 \cdot y_1 \qquad\quad + 8 \cdot y_3 \ge -1, \end{cases}, \tag{1.14''}$$

$$y_1 \ge 0, \; y_2 \ge 0, \; y_3 \ge 0. \tag{1.15''}$$

Запишем системы ограничений прямой и двойственной задач в канонической форме:

<u>Прямая задача</u>	<u>Двойственная задача</u>
$\begin{cases} 3 \cdot x_1 - x_2 + 2 \cdot x_3 + x_4 = 7, \\ -2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + x_5 = 12, \\ -4 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 8 \cdot x_3 + x_6 = 10 \end{cases}$	$\begin{cases} 3 \cdot y_1 - 2 \cdot y_2 - 4 \cdot y_3 - y_4 = -1, \\ -y_1 + 4 \cdot y_2 + 3 \cdot y_3 - y_5 = 3, \\ 2 \cdot y_1 + 8 \cdot y_3 - y_6 = -1. \end{cases}$

Составим условия (1.32), (1.33):

$$x_1^* \cdot y_4^* = 0; \qquad\qquad y_1^* \cdot x_4^* = 0;$$
$$x_2^* \cdot y_5^* = 0; \qquad\qquad y_2^* \cdot x_5^* = 0;$$
$$x_3^* \cdot y_6^* = 0; \qquad\qquad y_3^* \cdot x_6^* = 0.$$

Так как в оптимальном плане прямой задачи переменные x_1, x_2, x_6 отличны от нуля, то в оптимальном плане двойственной задачи переменные y_4, y_5, y_3 равны нулю. Тогда система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} 3\cdot y_1 - 2\cdot y_2 = -1, \\ -y_1 + 4\cdot y_2 = 3, \\ 2\cdot y_1 - y_6 = -1. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем: $y_1 = 1/5$, $y_2 = 4/5$, $y_6 = 1\,2/5$. Подставляем найденные значения переменных двойственной задачи в $F^*(y)$:

$$F^*(y) = 7\cdot 1/5 + 12\cdot 4/5 + 10\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 1\,2/5 = 11\,.$$

Так как значения целевых функций при оптимальных решениях взаимодвойственных задач совпадают $F_{max}(X^*) = F^*_{min}(Y^*) = 11$, то полученный план двойственной задачи является оптимальным.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. В чём заключается общая постановка задачи математического программирования?
2. Назовите основные классы задач математического программирования.
3. Простейшая задача производственного планирования как пример задачи линейного программирования.
4. Приведите другие примеры типовых задач линейного программирования.
5. Из каких элементов состоит математическая модель задачи оптимизации?
6. Что называется целевой функцией задачи линейного программирования?
7. Что такое область допустимых значений задачи линейного программирования?
8. Обязательны ли условия неотрицательности переменных в математической модели задачи линейного программирования?
9. Какие существуют формы записи задач линейного программирования?
10. Назовите эквивалентные формы задач линейного программирования.
11. Как перейти от задач линейного программирования, записанных в стандартной и общей формах, к каноническому виду?
12. В чём заключается геометрическая интерпретация задачи линейного программирования?
13. Каковы основные этапы графического метода решения задач линейного программирования?
14. Дайте определение следующих понятий: допустимый план, оптимальный план, опорный план.
15. Что означает понятие «задача в базисном виде»?

16. Каковы основные этапы симплексного метода решения задач линейного программирования?

17. Приведите алгоритм нахождения первоначального допустимого базисного решения задач линейного программирования, записанных в стандартном, каноническом и общем виде.

18. Сформулируйте критерий оптимальности допустимого базисного плана, применяемый в симплекс-методе.

19. При каких условиях делается вывод о неограниченности целевой функции в решаемой задаче? Какая геометрическая интерпретация соответствует данному случаю?

20. Когда возникает необходимость использования симплексного метода с искусственным базисом? В чём суть метода искусственного базиса?

21. Дайте определения двойственной задачи линейного программирования. Приведите правила составления двойственной задачи.

22. Сформулируйте теоремы двойственности.

23. Каковы основные этапы нахождения оптимального решения одной из пары взаимодвойственных задач по оптимальному решению другой задачи при помощи теорем двойственности.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Составить математические модели следующих задач:

а) Трудовые ресурсы, полуфабрикаты и станочное оборудование предприятия используются не полностью. В связи с этим организуется производство новых, пользующихся спросом трёх типов продукции – $П_1$, $П_2$, $П_3$. Нормы расхода ресурсов на производство единицы продукции каждого типа, месячное количество ресурсов каждого вида, которое может быть использовано, а также цена одного изделия приведены в таблице:

Ресурсы	Нормы затрат ресурсов на производство единицы продукции			Запасы ресурсов
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	
Трудовые ресурсы, чел.-нед.	*2*	*1*	*1*	*280*
Полуфабрикаты, кг	*1*	*0*	*1*	*80*
Станочное оборудование, станко-смены	*1*	*2*	*0*	*250*
Цена изделия, д.е.	*4*	*3*	*7*	

Требуется определить план производства продукции, при котором выручка от реализации продукции максимальна.

б) Необходимо из листового проката определённой толщины вырезать заготовки двух типов (*А* и *Б*) для производства *300* изделий. Для одного изделия требуются *2* детали *А* и *8* деталей *Б*. Размеры листа, конфигурация и размеры заготовок приведены на рисунке:

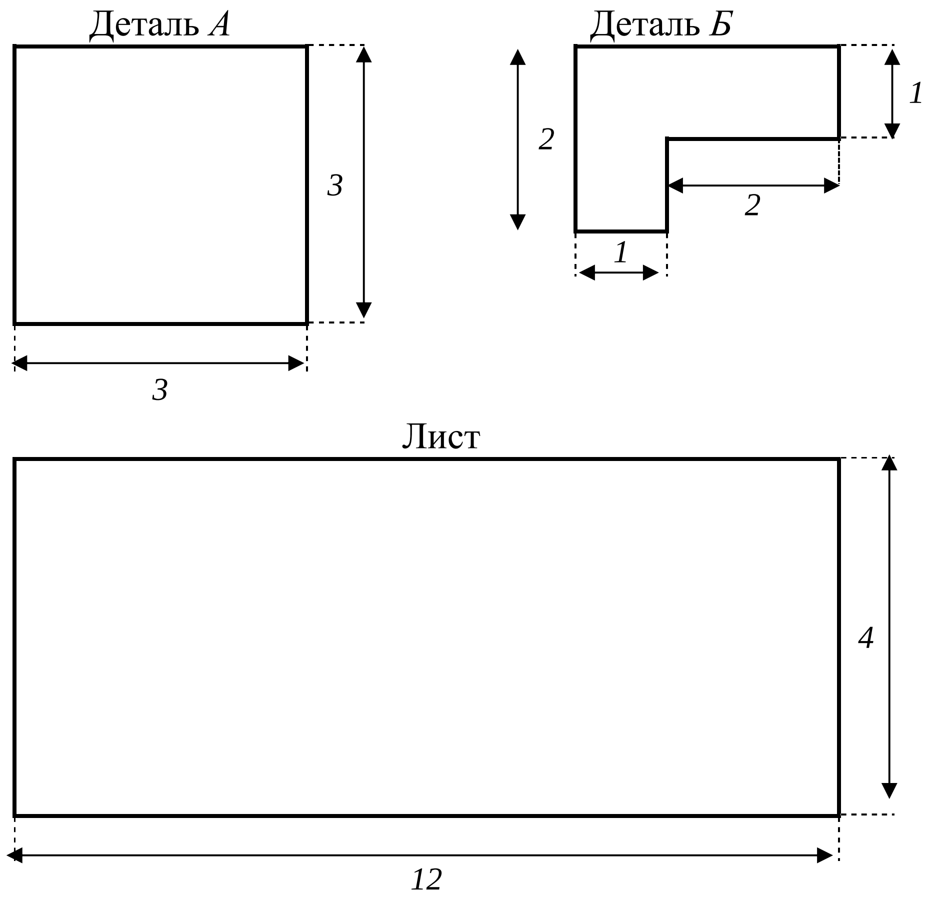


Рис. Размер и форма листа и деталей, выкраиваемых из него

Составить оптимальный план раскроя, т.е. указать, сколько листов кроить по каждому из предлагаемых Вами вариантов, чтобы получить необходимое количество заготовок каждого типа при минимальных суммарных отходах.

Примечание. Предложить пять различных вариантов раскроя. Количество деталей каждого вида и отходы, получаемые при раскрое одного листа по каждому варианту, оформить в таблицу:

№ варианта раскроя	Количество деталей, получаемых при раскрое одного листа		Отходы, усл. ед.
	А	*Б*	
1 2 3 4 5			

в) Витамины A, B_3 и C, которых требуется в день *2,5*, *10* и *75* мг соответственно, содержатся в трёх продуктах (молоко, апельсины и морковь). Цена первого продукта равна *60* д.е./кг, второго продукта – *90* д.е./кг, третьего продукта – *25* д.е./кг. В *100* г первого продукта содержится *0,1* мг витамина A, *1,3* мг витамина B_3 и *1,3* мг витамина C; в *100* г второго продукта – *0,058*, *0,3* и *60* мг витаминов A, B_3 и C соответственно; в *100* г третьего продукта – *0,018*, *1,1* и *5* мг витаминов A, B_3 и C соответственно.

Требуется определить, какое количество каждого продукта следует включить в суточную диету, чтобы получить необходимое количество витаминов A, B_3 и C. Критерий оптимальности – минимум затрат на покупку продуктов.

2. Привести к каноническому виду следующие задачи:

а) $F = -2\cdot x_1 + x_2 + 5\cdot x_3 \to max$,

$$\begin{cases} 4\cdot x_1 + 2\cdot x_2 + 5\cdot x_3 \le 12, \\ 6\cdot x_1 - 3\cdot x_2 + 4\cdot x_3 = 18, \\ 3\cdot x_1 + 3\cdot x_2 - 2\cdot x_3 \ge 16, \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3 \ge 0$.

в) $F = 8\cdot x_1 + 2\cdot x_2 \to max$,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 16, \\ 4\cdot x_1 - 2\cdot x_2 \le 20, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0$.

б) $F = 2\cdot x_1 - 5\cdot x_2 - 3\cdot x_3 \to min$,

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \ge 4, \\ 2\cdot x_1 - x_2 + x_3 \le 16, \\ 3\cdot x_1 + x_2 + x_3 \ge 18, \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3 \ge 0$.

3. Найти графическим методом оптимальный план следующих задач:

а) $F = x_1 + x_2 \to max$,

$$\begin{cases} x_1 + 2\cdot x_2 \le 14, \\ -5\cdot x_1 + 3\cdot x_2 \le 15, \\ 4\cdot x_1 + 6\cdot x_2 \ge 24, \end{cases}$$

$x_1, x_2 \ge 0$.

г) $F = x_1 - 2\cdot x_2 \to \begin{matrix} max \\ min \end{matrix}$,

$$\begin{cases} 3\cdot x_1 + x_2 \ge 12, \\ x_1 + x_2 \ge 8, \\ x_1 + 6\cdot x_2 \ge 12, \end{cases}$$

$x_1, x_2 \ge 0$.

б) $F = -2\cdot x_1 + x_2 \to min$,

$$\begin{cases} 3\cdot x_1 - 2\cdot x_2 \le 12, \\ -x_1 + 2\cdot x_2 \le 8, \\ 2\cdot x_1 + 3\cdot x_2 \ge 6, \end{cases}$$

$x_1, x_2 \ge 0$. $x_1, x_2 \ge 0$.

д) $F = x_1 - 2\cdot x_2 \to max$,

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 1, \\ x_1 + x_2 \ge 2, \\ x_1 - 2\cdot x_2 \le 0, \end{cases}$$

$x_1, x_2 \ge 0$.

в) $F = 4\cdot x_1 + 6\cdot x_2 \to max$,

$$\begin{cases} 3\cdot x_1 + x_2 \ge 12, \\ 3\cdot x_1 + 2\cdot x_2 \le 6, \\ x_1 + 6\cdot x_2 \ge 12, \end{cases}$$

$x_1, x_2 \ge 0$.

4. Найти симплексным методом решения следующих задач:

а) задача а) из упражнения 1;

б) задача б) из упражнения 1;

в) $F = 5 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 - x_4 \to max$

$$\begin{cases} x_1 + 3 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 + 2 \cdot x_4 = 3, \\ 2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + x_3 + x_4 = 3, \end{cases}$$

$x_j \geq 0 \quad \left(j = \overline{1,\ 4}\right)$.

г) $F = 2 \cdot x_1 - x_2 - x_4 \to max$

$$\begin{cases} x_1 - 2 \cdot x_2 + x_3 = 10, \\ -2 \cdot x_1 - x_2 - 2 \cdot x_4 \geq 18, \\ 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + x_4 \geq 36, \end{cases}$$

$x_j \geq 0 \quad \left(j = \overline{1,\ 4}\right)$.

5. Сформулировать двойственные задачи по отношению к задачам:

а) $F = 6 \cdot x_1 - x_2 + 3 \cdot x_3 \to max$,

$$\begin{cases} 3 \cdot x_1 - 7 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 \leq 15, \\ 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 - 4 \cdot x_3 = 16, \\ 6 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 - 8 \cdot x_3 \leq 12, \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$.

в) $F = x_1 - 2 \cdot x_2 - 4 \cdot x_3 + 2 \cdot x_4 + 3 \cdot x_5 \to max$,

$$\begin{cases} 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 18, \\ -2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 + x_4 \geq 12, \\ -x_1 + 4 \cdot x_2 - x_4 \geq 16, \end{cases}$$

$x_j \geq 0, \left(j = \overline{1,5}\right)$.

б) $F = -2 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 - 4 \cdot x_3 \to min$,

$$\begin{cases} 4 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 - 3 \cdot x_3 \geq 9, \\ 3 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 \geq 8, \\ x_1 + 3 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 \geq 12, \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$.

6. Для задачи

$F = 6 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 + x_3 \to max$,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 3, \\ x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 4, \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$.

а) сформулировать двойственную задачу и найти её решение графическим методом;

б) зная оптимальный план двойственной задачи и используя теоремы двойственности, найти оптимальный план.

7. Сформулировать двойственную задачу по отношению к задаче а) из упражнения 1 и найти её решение, используя теоремы двойственности.

2. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

2.1. Транспортная задача линейного программирования

Симплексный метод является универсальным методом решения задач линейного программирования. Однако среди задач линейного программирования имеются такие, решение которых можно найти при помощи более простых специальных методов, как например, в случае с транспортной задачей.

Математическая модель транспортной задачи

Постановка задачи. Пусть имеется m пунктов производства некоторого однородного продукта и n пунктов его потребления. Известно: запас продукта в каждом пункте-поставщике, спрос в каждом пункте-потребителе и расходы на перевозку единицы груза от каждого отправителя к каждому потребителю. Требуется составить план перевозок продукта от производителей к пунктам назначения, при котором общие транспортные расходы минимальны.

Условные обозначения:

m – количество пунктов отправления;

i – порядковый номер пункта отправления $\left(i=\overline{1,m}\right)$;

n – количество пунктов потребления;

j – порядковый номер пункта потребления $\left(j=\overline{1,n}\right)$;

a_i – количество единиц груза в i-м пункте отправления;

b_j – потребность в единицах груза в j-м пункте назначения;

c_{ij} – расходы на перевозку единицы груза из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения.

x_{ij} – искомый объём перевозки продукта из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения.

Математическая модель:

$$F(x)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}\cdot x_{ij}\to min, \tag{2.1}$$

$$\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}x_{ij}\le a_i,\left(i=\overline{1,m}\right)\\ \sum\limits_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j,\left(j=\overline{1,n}\right)\end{cases} \tag{2.2}$$

$$x_{ij}\ge 0\ \left(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}\right). \tag{2.3}$$

Если общая потребность в грузе в пунктах назначения $\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right)$ равна запасу груза в пунктах отправления $\left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right)$, т.е.:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \,, \qquad (2.4)$$

то модель такой транспортной задачи называется *закрытой*. Если же указанное условие не выполняется, то модель называется *открытой*.

Для разрешимости транспортной задачи необходимо и достаточно, чтобы запасы груза в пунктах отправления были равны потребностям в грузе в пунктах назначения. Поэтому, приступая к нахождению оптимального плана транспортной задачи, следует проверить выполнение равенства (2.4).

В случае превышения запаса над потребностью, т. е. $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, вводится фиктивный $(n+1)$-й пункт назначения с потребностью $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$ и соответствующие тарифы считаются равными нулю: $c_{i\,n+1} = 0 \quad \left(i = \overline{1, m}\right)$. Аналогично, при $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$ вводится фиктивный $(m+1)$-й пункт отправления с запасом груза $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$ и соответствующие тарифы полагаются равными нулю: $c_{m+1\,j} = 0 \ \left(j = \overline{1, n}\right)$.

Благодаря особенностям ограничений системы (2.2) [каждая переменная входит лишь в два уравнения и коэффициенты при неизвестных равны единице], для определения оптимального плана транспортной задачи разработаны специальные методы. Один из них – **метод потенциалов**. Общий принцип нахождения оптимального плана транспортной задачи методом потенциалов аналогичен принципу решения задачи линейного программирования симплекс-методом, а именно: сначала строят опорный план, затем его последовательно улучшают до получения оптимального плана.

Определение оптимального плана транспортной задачи методом потенциалов

На первом этапе метода потенциалов строят первый опорный план. Для определения первого опорного плана транспортной задачи можно воспользоваться различными методами, например методом северо-западного угла, минимального элемента или методом аппроксимации Фогеля.

Сначала составляют таблицу условий транспортной задачи (таблица 2.1).

Таблица 2.1

Таблица условий транспортной задачи

Пункты отправления	Пункты назначения					Запасы
	B_1	…	B_j	…	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	…	c_{1j} x_{1j}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1
…	…	…	…	…	…	…
A_i	c_{i1} x_{i1}	…	c_{ij} x_{ij}	…	c_{in} x_{in}	a_i
…	…	…	…	…	…	…
A_m	c_{m1} x_{m1}	…	c_{mj} x_{mj}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потребности	b_1	…	b_j	…	b_n	$\sum$

В ней все переменные x_{ij} полагают равными *0*, клетки таблицы условий считаются *свободными*. После того как определено значение какой-либо переменной x_{ij}, оно заносится в соответствующую клетку $(i,\ j)$, которая теперь будет называться *занятой*.

Построение первого опорного плана транспортной задачи

Алгоритм метода северо-западного угла

Заполнение клеток таблицы условий начинается с левой верхней клетки для неизвестного x_{11}.

<u>Шаг 1.</u> Выбранной переменной x_{ij} присваивают значение $x_{ij} = min\{a_i, b_j\}$, где a_i и b_j – текущие значения запаса и спроса.

<u>Шаг 2.</u> Если $x_{ij} = a_i < b_j$, то исключают из дальнейшего рассмотрения i-ю строку и устанавливают текущее значение b_j равным $b_j - x_{ij}$.

Переходят к шагу 5.

<u>Шаг 3</u>. Если $x_{ij} = b_j < a_i$, то исключают из дальнейшего рассмотрения j-й столбец и текущее значение a_i определяют как $a_i - x_{ij}$.

Переходят к шагу 5.

<u>Шаг 4.</u> Если $x_{ij} = a_i = b_j$, то исключают из дальнейшего рассмотрения сначала i-ю строку (или j-й столбец). Затем в j-м столбце (или i-й строке)

выбирают одну из переменных, не исключённых ранее, полагают её равной 0, и также исключают соответствующий (-ую) столбец (строку).

Переходят к шагу 5.

Шаг 5. Если присвоены значения менее чем $m+n-1$ переменным, выбирают не исключённую переменную «северо-западного» угла и возвращаются к шагу 1. Если определены значения $m+n-1$ переменных, алгоритм закончен.

Несомненным достоинством данного метода является его простота. Однако, построенный таким способом первый опорный план, как правило, далёк от оптимального плана транспортной задачи.

Алгоритм метода минимального элемента

В методе северо-западного угла на каждом шаге потребности первого из оставшихся пунктов назначения удовлетворялись за счёт запасов первого из оставшихся пунктов отправления. Очевидно, что выбор пунктов назначения и отправления целесообразно производить, ориентируясь на тарифы перевозок: на каждом шаге следует выбирать какую-нибудь клетку, отвечающую минимальному тарифу (если таких клеток несколько, то можно выбрать любую из них). Поэтому в методе минимального элемента заполнение клеток таблицы условий начинается с клетки с минимальным тарифом.

Шаги 1, 2, 3, 4 аналогичны шагам 1, 2, 3, 4 алгоритма метода северо-западного угла.

Шаг 5. Если присвоены значения менее чем $m+n-1$ переменным, среди оставшихся клеток снова выбирают клетку с минимальным тарифом и возвращаются к шагу 1. Если определены значения $m+n-1$ переменных, алгоритм закончен.

Как правило, при использовании этого метода план перевозок значительно ближе к оптимальному, чем в случае с методом северо-западного угла.

Алгоритм метода аппроксимации Фогеля

Шаг 1. Для всех столбцов находят разность между двумя записанными в них минимальными тарифами. Эти разности заносят в специально отведённую строку в таблице условий задачи.

Шаг 2. Для всех строк находят разность между двумя записанными в них минимальными тарифами. Эти разности заносят в столбец разностей в таблице условий задачи.

Шаг 3. Среди всех указанных разностей выбирают максимальную.

Шаг 4. В строке (или столбце), которой (-му) соответствует максимальная разность, определяют минимальный тариф. Он указывает на клетку, заполняемую на данной итерации.

Шаги 5, 6, 7 аналогичны шагам 2, 3, 4 алгоритма метода северо-западного угла, но переходить следует к шагу 8.

Шаг 8. Если присвоены значения менее чем $m+n-1$ переменным, возвращаются к шагу 1. Если определены значения $m+n-1$ переменных, алгоритм закончен.

Замечание: Если наибольших (одинаковых) разностей окажется несколько, то предпочтение отдают той, которой соответствует наименьший тариф.

Преимуществом метода аппроксимации Фогеля является то, что его применение также позволяет получить либо опорный план, близкий к оптимальному, либо сам оптимальный план.

В рассмотренных метода построения первого опорного плана при заполнении некоторой клетки, кроме последней, вычёркивается или только строка таблицы условий, или только столбец; лишь при заполнении последней клетки вычёркиваются и строка, и столбец одновременно. (Если при заполнении некоторой не последней клетки запас груза у поставщика равен потребности в грузе потребителя, то вычёркивается, например, только строка, а в столбце заполняется любая незанятая клетка так называемой «нулевой» поставкой, после чего вычёркивается и столбец. Или наоборот, сначала вычёркивается, только столбец, а в строке «нулевой» поставкой заполняется любая незанятая клетка, после чего вычёркивается и строка.) Это гарантирует получение в исходном плане $m+n-1$ занятых клеток, опорный план является *невырожденным*.

Пример 4. В трёх пунктах отправления сосредоточен однородный груз в количествах, соответственно равных *200*, *270* и *130* т. Этот груз необходим в трёх пунктах потребления в количествах, соответственно равных *120*, *180* и *220* т. Расходы на перевозку единицы груза из каждого пункта отправления в каждый пункт потребления являются известными величинами (д. е.) и задаются матрицей С:

$$C=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 11 \\ 5 & 1 & 7 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти план перевозок груза, при котором общие транспортные расходы минимальны.

Общий запас груза в пунктах отправления составляет *600* т, а общая потребность в грузе в пунктах потребления – *520* т. Следовательно, модель транспортной задачи открытая. Введём фиктивный четвёртый пункт назначения с потребностью *80* т, а c_{i4} $\left(i=\overline{1,3}\right)$ будем считать равными *0*.

Для определения опорного плана задачи сначала воспользуемся методом северо-западного угла. Заполнение клеток таблицы условий (таблица 2.2) начнём с левой верхней клетки.

Таблица 2.2

Построение первого опорного плана по методу северо-западного угла

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	*2* *120*	*4* *80*	*11*	*0*	*200*
A_2	*5*	*1* *100*	*7* *170*	*0*	*270*
A_3	*3*	*6*	*2* *50*	*0* *80*	*130*
Потребности	*120*	*180*	*220*	*80*	*600*

Так как запасы пункта A_1 больше, чем потребности пункта B_1, то полагаем $x_{11}=120$ (записываем это значение в клетке (1,1) таблицы 2.2) и временно исключаем из рассмотрения столбец B_1, считая при этом запасы пункта A_1 равными *80* т. На второй итерации будем заполнять клетку (1,2), т.к. теперь она соответствует северо-западному углу. Потребности пункта B_2 больше оставшихся запасов пункта A_1. Положим $x_{12}=80$ и исключим из рассмотрения строку A_1. Значение $x_{12}=80$ запишем в клетку (1,2) таблицы 2.2, а потребности пункта B_2 считаем равными *100* т. Затем перейдем к заполнению клетки (2,2) и т.д. Через пять итераций алгоритма остаётся один пункт отправления A_3 с запасом груза *80* т и один пункт потребления B_4 с потребностью *80* т. Соответственно имеется одна свободная клетка, которую и заполняем, полагая $x_{34}=80$ (табл. 2.2). В результате получаем опорный план:

$$X=\begin{pmatrix} 120 & 80 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 170 & 0 \\ 0 & 0 & 50 & 80 \end{pmatrix}.$$

Согласно данному плану перевозок, транспортные расходы составляют:

$$F(x)=2\cdot 120+4\cdot 80+1\cdot 100+7\cdot 170+2\cdot 50+0\cdot 80=1950\ (д.е.).$$

Полученный опорный план невырожденный, так как количество занятых клеток равно $3+4-1=6$.

В таблице 2.3 представлен первый опорный план, построенный по методу минимального элемента. В данной задаче заполнение клеток таблицы условий можно начать с любой из клеток $(1,4)$, $(2,4)$, $(3,4)$, соответствующих фиктивному потребителю, т.к. в них одинаковые минимальные тарифы, равные *0*. Однако обычно в первую очередь заполняют клетки, соответствующие реальным поставщикам и потребителям. В рассматриваемом примере наименьший тариф находится в клетке $(2,2)$, следовательно, она заполняется первой. Переменной x_{22} присваивается значение 180, и из рассмотрения исключается второй столбец.

Таблица 2.3

Построение первого опорного плана по методу минимального элемента

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2 / 120	4	11	0 / 80	200
A_2	5	1 / 180	7 / 90	0 / 0	270
A_3	3	6	2 / 130	0	130
Потребности	120	180	220	80	600

Далее заполняется клетка $(1,1)$ или $(3,3)$, т.к. в этих клетках одинаковые минимальные тарифы. Пусть для определённости выбирается клетка $(1,1)$. Значение переменной x_{11} полагается равным 120, из рассмотрения исключается первый столбец. Следующей необходимо заполнить клетку $(3,3)$. Переменная x_{33} равна 130. Теперь из рассмотрения исключается третья строка. На следующей итерации заполняется клетка $(2,3)$. При этом одновременно исчерпывается запас второго поставщика и удовлетворяется потребность третьего потребителя. Переменной x_{23} присваивается значение 90. Далее можно поступить одним из двух способов: 1) из рассмотрения необходимо исключить сначала вторую строку, в третьем столбце в оставшейся свободной клетке $(1,3)$ записать 0 и затем исключить из рассмотрения и столбец; 2) сначала исключить из рассмотрения третий столбец, во второй строке в оставшуюся свободную клетку $(2,4)$ записать 0 и затем исключить из рассмотрения и строку. В данном примере выбран второй вариант. Последней заполняется клетка $(1,4)$. В неё заносится значение переменной x_{14}, равное 80.

При данном плане перевозок транспортные расходы составляют:

$$F(X) = 2\cdot 120 + 0\cdot 80 + 1\cdot 180 + 7\cdot 90 + 0\cdot 0 + 2\cdot 130 = 1310 \text{ (д. е.)}.$$

Для определения опорного плана рассматриваемой задачи воспользуемся также и методом аппроксимации Фогеля. Для каждой строки и каждого столбца таблицы условий найдём разности между двумя минимальными тарифами, записанными в строке и столбце соответственно, и поместим их в дополнительном столбце и дополнительной строке таблицы 2.4.

В строке A_1 минимальный тариф равен 0, а следующий за ним 2, разность между ними $2-0=2$. Точно так же разность между минимальными тарифами в столбце B_1 равна $3-2=1$. Вычислив все разности, видим, что наибольшая из них соответствует столбцу B_3. В этом столбце минимальный тариф записан в клетке (3,3). Значит, эту клетку следует заполнить. При этом мы исчерпаем запасы пункта A_3. Исключим из рассмотрения строку A_3, а потребности пункта B_3 будем считать равными *90* т.

Таблица 2.4

Построение первого опорного плана по методу аппроксимации Фогеля

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы	Разности по строкам				
	B_1	B_2	B_3	B_4						
A_1	*2* / *120*	*4* / *0*	*11*	*0* / *80*	*200*	*2*	*2*	*2*	***2***	*0*
A_2	*5*	*1* / *180*	*7* / *90*	*0*	*270*	*1*	*1*	*1*	–	–
A_3	*3*	*6*	*2* / *130*	*0*	*130*	*2*	–	–	–	–
Потребности	*120*	*180*	*220*	*80*	*600*					
Разности по столбцам	*1*	*3*	***5***	*0*						
	3	*3*	***4***	*0*						
	3	***3***	–	*0*						
	0	–	–	–						
	0	–	–	–						

Теперь выберем следующую клетку для заполнения. Найдем разности между двумя минимальными тарифами в оставшихся строках и столбцах и запишем их во втором дополнительном столбце и во второй дополнительной строке таблицы 2.4. На второй итерации наибольшая разность соответствует столбцу B_3. Минимальный тариф в этом столбце записан в клетке (2,3). Следовательно, заполняем эту клетку. Поместив в неё число *90*, предполагаем, что потребности в пункте B_3 полностью удовлетворены, а запасы в пункте A_2 стали равными *180* т. Исключим из рассмотрения столбец B_3 и определим следующую клетку для заполнения. Как видно из таблицы 2.4, это будет клетка (2,2), в которую записываем число *180*. Тем самым мы одновременно исчерпаем запасы пункта A_2 и удовлетворим потребности пункта B_2. Чтобы получить невырожденный опорный план, необходимо исключить из рассмотрения сначала, к примеру, строку A_2, а затем, заполнив клетку (1,2) нулевой перевозкой, и столбец B_2. Продолжая итерационный процесс, далее заполняем клетки (1,4) и (1,1). Заметим, что данный опорный план является оптимальным планом задачи.

Когда первоначальный опорный план транспортной задачи построен, переходят *к следующим этапам метода потенциалов*:

1. Составляют систему потенциалов. Для каждого из пунктов отправления и назначения определяют потенциалы U_i (потенциалы поставщиков) и V_j (потенциалы потребителей) $\left(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}\right)$. Значение одного из потенциалов можно положить равным произвольному числу, например $U_1=0$, значения остальных потенциалов определяются однозначно из условий:

$$U_i+V_j=c_{ij}, \tag{2.5}$$

которые выполняются для занятых клеток. Найденные значения потенциалов записывают в строку и столбец, добавляемые к таблице условий задачи.

2. Проверяют выполнение условия оптимальности. Для каждой свободной клетки определяют Δ_{ij} равные:

$$\Delta_{ij}=U_i+V_j-c_{ij}. \tag{2.6}$$

Если среди чисел Δ_{ij} нет положительных, то получен оптимальный план транспортной задачи; иначе, переходят к новому опорному плану.

3. Строят новый опорный план. Из $\Delta_{ij}>0$ выбирают максимальное. Клетку, которой это число соответствует, делают занятой. Заполняя выбранную клетку, необходимо изменить объёмы поставок, записанных в ряде занятых клеток, связанных с заполняемой так называемым циклом. Цикл – это ломаная линия, выходящая из заполняемой клетки и возвращающаяся в неё, вершины которой расположены в занятых клетках, а звенья – вдоль строк и столбцов, причём в каждой вершине цикла встречаются ровно два звена, одно из которых находится в строке, а другое – в столбце. Если ломаная линия, образующая цикл, пересекается, то точки самопересечения не являются вершинами. Каждой из клеток, соответствующих вершинам цикла, приписывают определённый знак, причем свободной клетке – знак плюс, а всем остальным клеткам – поочередно знаки минус и плюс. В заполняемую клетку переносят меньшее из чисел x_{ij}, стоящих в минусовых клетках. Одновременно это число прибавляют к числам, стоящим в плюсовых клетках, и вычитают из чисел, стоящих в минусовых клетках. Клетка, которая ранее была свободной, становится занятой, а минусовая клетка, в которой стояло минимальное из чисел x_{ij}, считается свободной. В результате сдвига по циклу пересчёта определяют новый опорный план транспортной задачи.

4. Возвращаются к этапу 1.

Замечание 1: Если наибольших положительных Δ_{ij} окажется несколько, то предпочтение отдают той, которой соответствует наименьший тариф.

Замечание 2: Если в минусовых клетках имеются два (или более) одинаковых минимальных числа x_{ij}, то освобождают лишь одну из таких клеток, а другую (-ие) оставляют занятой (-ыми) (с нулевыми поставками).

Вернёмся к ранее рассмотренному примеру. Воспользуемся первым опорным планом, построенным по методу северо-западного угла (таблица 2.2). Чтобы проверить опорный план на оптимальность, определим потенциалы поставщиков и потребителей. Положим $U_1 = 0$, тогда, работая с занятыми клетками, получаем из условий (2.5):

$$V_1 = 2 - 0 = 2,\ V_2 = 4 - 0 = 4,\ U_2 = 1 - 4 = -3,\ V_3 = 7 - (-3) = 10,$$
$$U_3 = 2 - 10 = -8,\ V_4 = 0 - (-8) = 8.$$

Найденные значения потенциалов запишем в дополнительные строку и столбец (таблица 2.5).

Таблица 2.5

Построение цикла пересчёта

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы	U_i
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	2 120	4 - 80	11	0 + *	200	0
A_2	5	1 + 100	7 - 170	0	270	-3
A_3	3	6	2 + 50	0 - 80	130	-8
Потребности	120	180	220	80	600	
V_j	2	4	10	8		

Для каждой свободной клетки вычисляем Δ_{ij} по формуле (2.6):

$$\Delta_{13} = U_1 + V_3 - c_{13} = 0 + 10 - 11 = -1,\ \Delta_{14} = 8,\ \Delta_{21} = -6,$$
$$\Delta_{24} = 5,\ \Delta_{31} = -9,\ \Delta_{32} = -10.$$

Так как среди чисел Δ_{ij} имеются положительные, то построенный план перевозок не является оптимальным и надо перейти к новому опорному плану. Наибольшей из положительных оценок является $\Delta_{14} = 8$, поэтому для свободной клетки (1,4) строим цикл пересчёта. Наименьшее из чисел в минусовых клетках равно *80*. Так как в минусовых клетках имеются два одинаковых минимальных числа, то в новой таблице (таблица 2.6) свободной делаем лишь одну из клеток (1,2) или (3,4), к примеру, клетку (3,4), а вторую оставляем занятой с нулевой поставкой.

Таблица 2.6

Оптимальный план

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы	U_i
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	*2* / *120*	*4* / *0*	*11*	*0* / *80*	*200*	*0*
A_2	*5*	*1* / *180*	*7* / *90*	*0*	*270*	*-3*
A_3	*3*	*6*	*2* / *130*	*0*	*130*	*-8*
Потребности	*120*	*180*	*220*	*80*	*600*	
V_j	*2*	*4*	*10*	*0*		

Клетка (1,4) становится занятой $(x_{14}=80)$. Числа в клетках (2,2), (2,3) и (3,3) таблицы 2.6 получаются так: к числам, стоящим в плюсовых клетках таблицы 2.5, добавляем *80* и вычитаем *80* из числа, стоящего в минусовой клетке. После этих преобразований получаем новый невырожденный опорный план (см. табл. 2.6), который проверяем на оптимальность. Снова находим потенциалы поставщиков и потребителей (см. последний столбец и нижнюю строку табл. 2.6), а затем для свободных клеток вычисляем Δ_{ij}:

$$\Delta_{13}=-1,\ \Delta_{21}=-6,\ \Delta_{24}=-3,\ \Delta_{31}=-9,\ \Delta_{32}=-10,\ \Delta_{34}=-8.$$

Так как среди чисел Δ_{ij} нет положительных, то полученный план

$$X^*=\begin{pmatrix}120 & 0 & 0 & 80\\ 0 & 180 & 90 & 0\\ 0 & 0 & 130 & 0\end{pmatrix}$$

является оптимальным. При данном плане перевозок транспортные расходы составляют:

$$F(X^*)=2\cdot120+4\cdot0+0\cdot80+1\cdot180+7\cdot90+2\cdot130=1310\ (д.\ е.)$$

Таким образом, минимальные суммарные транспортные расходы, равные *1310* д.е., будут получены, если от первого пункта отправления перевезти *120* т груза в первый пункт назначения, от второго пункта отправления – *180* т во второй пункт назначения и *90* т – в третий, а из третьего пункта отправления весь запас перевезти к третьему потребителю. При этом в первом пункте отправления останется невостребованный груз в количестве *80* т.

Некоторые усложнения в постановке транспортной задачи

Выше была рассмотрена классическая транспортная задача. Однако такие задачи встречаются в социально-экономических исследованиях крайне редко. Обычно при составлении экономико-математической модели задачи транспортного типа приходится вводить целый ряд дополнительных ограничений, а затем пользоваться методом потенциалов.

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся ситуации в экономике.

1 случай. Поставки запрещены

Отдельные поставки от определённых поставщиков некоторым потребителям должны быть исключены (из-за отсутствия необходимых условий хранения, чрезмерной перегрузки коммуникаций и т.д.). Это ограничение требует, чтобы в матрице перевозок, содержащей оптимальный план, определённые клетки оставались свободными. Последнее достигается искусственным завышением затрат на перевозки c_{ij} в клетках, перевозки через которые следует запретить. При этом производят завышение величины c_{ij} до таких значений M, которые заведомо больше всех и с которыми их придется сравнивать в процессе решения задачи.

2 случай. Производственно-транспортные расходы

На предприятии необходимо определить минимальные суммарные затраты на производство и транспортировку продукции. С подобной задачей сталкиваются при решении вопросов, связанных с оптимальным размещением производственных объектов. Здесь может оказаться экономически более выгодным доставлять сырье из более отдалённых пунктов, но зато при меньшей его себестоимости. В таких задачах за критерий оптимальности принимают сумму затрат на производство и транспортировку продукции.

3 случай. Пропускная способность маршрутов ограничена

а) Доставка невозможна

Некоторые транспортные маршруты, по которым необходимо доставить грузы, имеют ограничения по пропускной способности. Если, например, по маршруту (A_i, B_j) можно провезти не более q единиц груза, то B_j-й столбец матрицы разбивается на два столбца – B_j^* и B_j^{**}. В столбце B_j^* спрос принимается равным разности между действительным спросом и ограничением q: $b_j^* = b_j - q$, в столбце B_j^{**} – равным ограничению q, т.е. $b_j^{**} = q$. Затраты c_{ij} в обоих столбцах одинаковы и равны данным, но в первом столбце, в клетке, соответствующей ограничению $b_j^* = b_j - q$, вместо истинного тарифа c_{ij} ставится искусственно завышенный тариф M (клетка блокируется). Затем задача решается обычным способом.

б) Отгрузка невозможна

Если со склада A_i по маршруту (A_i, B_j) можно вывезти не более q единиц груза, то A_i-я строка матрицы разбивается на две строки – A_i^* и A_i^{**}. В строке A_i^* запас принимается равным разности между действительным запасом и ограничением q: $a_i^* = a_i - q$, в строке A_i^{**} – равным ограничению q, т.е. $a_i^{**} = q$. Затраты c_{ij} в обеих строках одинаковы и равны данным, но в первой строке, в клетке, соответствующей ограничению $a_i^* = a_i - q$, вместо истинного тарифа c_{ij} ставится искусственно завышенный тариф M (клетка блокируется). Затем задача решается обычным способом.

4 случай. Обязательные поставки

Поставки по определённым маршрутам обязательны и должны войти в оптимальный план независимо от того, выгодно это или нет. В этом случае уменьшают запас груза у поставщиков и спрос потребителей и решают задачу относительно тех поставок, которые необязательны. Полученное решение корректируют с учётом обязательных поставок.

Математическая модель распределительной задачи

Постановка задачи. На предприятии имеется m типов станков. На станках каждого из типов могут производиться n видов изделий. Известно: фонд рабочего времени станков каждого типа, планируемый объём производства изделий каждого вида, производительность станков каждого типа при изготовлении изделий каждого вида, денежные затраты, связанные с производством изделий каждого вида на станках каждого типа в единицу времени.

Требуется составить план загрузки станков, т.е. определить, в течение какого времени и на станках какого типа следует изготовлять изделия каждого вида так, чтобы затраты на производство изделий были минимальными.

Условные обозначения:

m – количество типов станков,

i – порядковый номер типа станков $\left(i = \overline{1, m}\right)$,

n – количество видов изделий,

j – порядковый номер вида изделий $\left(j = \overline{1, n}\right)$,

A_i – фонд рабочего времени станков i-го типа,

B_j – объём производства изделий j-го вида,

p_{ij} – производительность станков i-го типа при изготовлении изделий j-го вида,

c_{ij} – затраты, связанные с производством изделий j-го вида на станках i-го типа в единицу времени.

t_{ij} – время, в течение которого на станках i-го типа следует изготовлять изделия j-го вида.

Математическая модель:

$$F(t) = c_{11} \cdot t_{11} + c_{12} \cdot t_{12} + ... + c_{mn} \cdot t_{mn} \to min, \tag{2.7}$$

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} t_{11} + t_{12} + ... + t_{1n} \le A_1, \\ t_{21} + t_{22} + ... + t_{2n} \le A_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ t_{m1} + t_{m2} + ... + t_{mn} \le A_m, \end{array}\right] & \text{Ограничения по использованию фонда рабочего времени станков каждого типа} \\ \left.\begin{array}{l} p_{11} \cdot t_{11} + p_{21} \cdot t_{21} + ... + p_{m1} \cdot t_{m1} = B_1, \\ p_{12} \cdot t_{12} + p_{22} \cdot t_{22} + ... + p_{m2} \cdot t_{m2} = B_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ p_{1n} \cdot t_{1n} + p_{2n} \cdot t_{2n} + ... + p_{mn} \cdot t_{mn} = B_n, \end{array}\right] & \text{Ограничения по выполнению программы выпуска изделий каждого вида} \end{cases} \tag{2.8}$$

$$t_{11} \ge 0, t_{12} \ge 0, \; \dots \;, \; t_{m\,n} \ge 0. \tag{2.9}$$

Предложенная модель определения оптимальной загрузки оборудования является задачей линейного программирования, поэтому для её решения можно воспользоваться универсальными методами, например, симплексным. В то же время рассмотренную модель можно свести к модели транспортной задачи, которая может быть решена более простыми специальными методами [16].

Алгоритм сведения модели распределительной задачи
к модели транспортной задачи

1. Взять за эталон 1 ч. работы одного из типов оборудования (удобнее взять за эталон 1 ч. работы оборудования того типа, производительность которого выше).

2. Рассчитать коэффициенты пропорциональности производительности всех типов оборудования по отношению к производительности эталонного оборудования по формуле:

$$\alpha_i = \frac{\dfrac{p_{i1}}{p_{э1}} + \dfrac{p_{i2}}{p_{э2}} + \ldots + \dfrac{p_{in}}{p_{эn}}}{n} \qquad \left(i = \overline{1,m}\right), \tag{2.10}$$

где $p_{эj}$ $\left(j = \overline{1,n}\right)$ – производительность эталонного оборудования при изготовлении изделий j-го вида.

3. Определить фонд рабочего времени оборудования каждого типа в эталонных часах по формуле:

$$a_i = A_i \cdot \alpha_i \quad \left(i = \overline{1,m}\right). \tag{2.11}$$

4. Рассчитать, какое время в эталонных часах требуется для изготовления нужного количества каждого из видов изделий по формуле:

$$b_j = \frac{B_j}{p_{э\,j}} \qquad \left(j = \overline{1, n}\right). \tag{2.12}$$

5. Определить новые значения затрат, связанных с производством в течение 1 ч. изделий каждого вида на каждом типе оборудования по формуле:

$$c_{i\,j} = \frac{c_{i\,j}}{\alpha_i} \qquad \left(i = \overline{1, m};\;\; j = \overline{1, n}\right). \tag{2.13}$$

6. Обозначить через $x_{i\,j}$ время в эталонных часах, в течение которого на i-м оборудовании следует изготовлять изделия j-го вида $\left(i = \overline{1, m};\;\; j = \overline{1, n}\right)$.

7. Записать математическую модель исходной задачи с учётом проведённых преобразований:

$$F(t) = c_{11} \cdot x_{11} + c_{12} \cdot x_{12} + \ldots. + c_{mn} \cdot x_{mn} \to min, \tag{2.14}$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \ldots. + x_{1n} \le a_1, \\ x_{21} + x_{22} + \ldots. + x_{2n} \le a_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x_{m1} + x_{m2} + \ldots. + x_{mn} \le a_m \\ x_{11} + x_{21} + \ldots. + x_{m1} = b_1, \\ x_{12} + x_{22} + \ldots. + x_{m2} = b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x_{1n} + x_{2n} + \ldots. + x_{mn} = b_n, \end{cases} \tag{2.15}$$

$$x_{11} \ge 0,\; x_{12} \ge 0,\; \ldots\;,\; x_{m\,n} \ge 0\,. \tag{2.16}$$

Таким образом, исходная задача сведена к задаче, математическая модель которой ничем не отличается от математической модели транспортной задачи. Полученную задачу далее решают методом потенциалов.

Оптимальные значения переменных исходной задачи (2.7)-(2.9) определяют по формуле:

$$t_{i\,j} = \frac{x_{i\,j}}{\alpha_i} \qquad \left(i = \overline{1, m};\;\; j = \overline{1, n}\right) \tag{2.17}$$

и вычисляют $F_{min}(t)$.

2.2. Задачи целочисленного линейного программирования

Экстремальная задача, переменные которой принимают лишь целочисленные значения, называется *задачей целочисленного программирования*. Огромная часть экономических задач, относящихся к задачам математического программирования, требует целочисленного решения. В них переменные величины обозначают неделимые элементы расчёта: например, нельзя построить два с половиной завода или купить полтора автомобиля. Если отдельная единица составляет очень малую часть всего объёма, то оптимальное решение находится обычными методами с последующим округлением до целых чисел, исходя из смысла задачи. В противном случае такой подход может привести к значительным искажениям оптимального целочисленного решения. Поэтому разработаны специальные методы решения задач целочисленного программирования, которые делятся на две группы: *методы отсечения* (отсекающих плоскостей) и *комбинаторные методы*. Среди методов отсекающих плоскостей наиболее известным является *метод Гомори* [13, 17]. Из комбинаторных методов на практике чаще всего используется *метод ветвей и границ*.

В математической модели задачи целочисленного программирования, как целевая функция, так и функции в системе ограничений могут быть линейными, нелинейными и смешанными. Ограничимся случаем, когда целевая функция и ограничения задачи являются линейными.

Постановка задачи целочисленного линейного программирования

В общем виде математическая постановка задачи целочисленного линейного программирования состоит в определении наибольшего или наименьшего значения функции

$$F(x) = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \ldots + c_n \cdot x_n \qquad (2.18)$$

при условиях

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n \le b_1, \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n \ge b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n = b_m, \end{cases} \qquad (2.19)$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ \ldots,\ x_n \ge 0, \qquad (2.20)$$

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n \text{ – целые.} \qquad (2.21)$$

Если найти решение задачи (2.18) – (2.21) симплексным методом, то оно может оказаться как целочисленным, так и нецелочисленным. В общем же случае для определения оптимального плана такой задачи требуются специальные методы. В настоящее время существует несколько методов решения задач целочисленного линейного программирования, из которых наиболее известным является метод Гомори.

Геометрическая интерпретация задачи целочисленного линейного программирования

Предположим, что задача линейного программирования имеет многогранник решений, приведённый на рисунке 2.

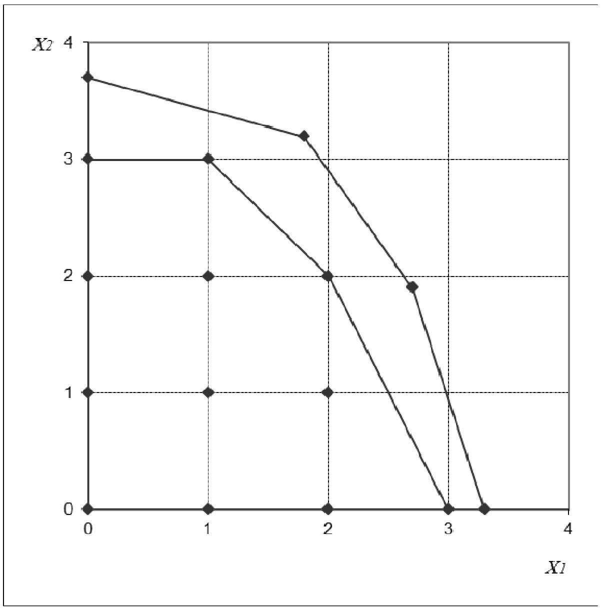


Рис. 2. Формирование многоугольника решений задачи целочисленного линейного программирования

Если наложить требование целочисленности, то допустимое множество решений выродится в систему точек и уже не будет выпуклым. Если добавить новые ограничения, связывающие внешние целочисленные точки, а затем в качестве многогранника решений использовать всё выпуклое множество, ограниченное осями координат и новым контуром, то получим новую задачу линейного программирования со следующими свойствами:

1) новый многогранник решений содержит все целые точки, заключавшиеся в первоначальном многограннике решений; любая его угловая точка является целой;

2) так как линейная функция достигает оптимума в угловой точке многогранника решений, то построением такого многогранника и обеспечивается целочисленность оптимального решения.

Таким образом, используя геометрическую интерпретацию, можно найти решение двумерной задачи целочисленного линейного программирования **графическим методом**. Пусть дана задача:

$$F(x) = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 \to max, \qquad (2.22)$$

при условиях

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 \le b_1, \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 \ge b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 \le b_m, \end{cases} \tag{2.23}$$

$$x_1 \ge 0, \; x_2 \ge 0, \tag{2.24}$$

$$x_1, \; x_2 \text{ – целые.} \tag{2.25}$$

Определение оптимального решения включает следующие этапы:

1) Строят прямые, уравнения которых получаются в результате замены в ограничениях (2.23), (2.24) знаков неравенств на знаки точных равенств.

2) Находят полуплоскости, определяемые ограничениями (2.23), (2.24).

3) На пересечении построенных полуплоскостей находят многоугольник решений задачи (2.22)–(2.24).

4) Получают многоугольник решений задачи (2.22)–(2.25). Он содержит все целые точки многоугольника решений задачи (2.22)–(2.24). Новый контур связывает все внешние целочисленные точки.

5) Строят вектор $\vec{C} = (c_1, c_2)$.

6) Строят прямую $c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 = h$.

7) Передвигают прямую $c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 = h$ в направлении вектора $\vec{C}$, в результате чего либо находят точку (точки), в которой (которых) целевая функция принимает максимальное значение, либо устанавливают неограниченность сверху функции на множестве планов.

8) Определяют координаты точки (точек) максимума функции и вычисляют значение целевой функции в этой точке (точках).

Метод Гомори

Нахождение решения задачи целочисленного линейного программирования **методом Гомори** начинают с определения симплексным методом оптимального плана задачи (2.18)-(2.21) без учёта условия целочисленности переменных [13, 17]. Просматривают компоненты этого плана, и если среди компонент нет дробных чисел, то получен искомый оптимальный план. Если же в оптимальном плане задачи (2.18)-(2.20) имеется дробная переменная x_i, то в систему ограничений (2.19) добавляют неравенство

$$f\left(a_{i1}^*\right) \cdot x_1 + f\left(a_{i2}^*\right) \cdot x_2 + \dots + f\left(a_{in}^*\right) \cdot x_n \ge f\left(b_i^*\right), \tag{2.26}$$

где a_{ij}^*, b_i^* – преобразованные исходные величины a_{ij}, b_i, значения которых взяты из последней симплексной таблицы, а $f\left(a_{ij}^*\right), f\left(b_i^*\right)$ – дробные части этих чисел. В оптимальном плане задачи (2.18)-(2.20) нецелочисленные значения могут принимать несколько переменных. Тогда дополнительное неравенство (2.26) строится для переменной x_i с наибольшей дробной частью.

Далее решают задачу (2.18)-(2.20) с учётом ограничения (2.26). Если в оптимальном плане этой задачи какие-то переменные опять принимают дробные значения, то снова добавляют дополнительное условие в систему ограничений (2.19) и процесс вычислений повторяют. Проведя конечное число итераций, либо получают оптимальный план задачи (2.18)-(2.21), либо устанавливают её неразрешимость.

Пример 5. Найти решение задачи

$$F(x) = 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \to max, \qquad (2.1')$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 13, \\ x_1 - x_2 \le 6, \\ -3x_1 + x_2 \le 9, \end{cases} \qquad (2.2')$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \qquad (2.3')$$

$$x_1,\ x_2 \text{ – целые.} \qquad (2.4')$$

Задача (2.1')-(2.4') является задачей целочисленного линейного программирования. Сначала определим симплексным методом оптимальный план задачи без учёта условия целочисленности переменных. Для этого введём в ограничения системы (2.2') дополнительные неотрицательные переменные x_3, x_4, x_5. В целевую функцию эти переменные запишем с нулевыми коэффициентами. Получим задачу

$$F(x) = 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 \to max, \qquad (2.5')$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 13, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 6, \\ -3x_1 + x_2 + x_5 = 9, \end{cases} \qquad (2.6')$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0. \qquad (2.7')$$

Задача (2.5')-(2.7') имеет базисный вид, где переменные x_3, x_4, x_5, – базисные. Можно применять алгоритм симплексного метода. Строим первое опорное решение: $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 13$, $x_4 = 6$, $x_5 = 9$. При этом $F(x) = 0$. Заносим первый опорный план в симплексную таблицу (таблица 2.7).

Таблица 2.7

Первая симплексная таблица

i	C_i	$Б$	b_i	3	2	0	0	0	Θ
				$\downarrow x_1$	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	0	x_3	13	1	1	1	0	0	13
2	0	$\leftarrow x_4$	6	1	-1	0	1	0	6
3	0	x_5	9	-3	1	0	0	1	-
4			0	-3	-2	0	0	0	

Находим оптимальный план (таблица 2.8).

Таблица 2.8

Последняя симплексная таблица

i	C_i	$Б$	b_i	3	2	0	0	0
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	2	x_2	7/2	0	1	1/2	-1/2	0
2	3	x_1	19/2	1	0	1/2	1/2	0
3	0	x_5	34	0	0	1	2	1
4			71/2	0	0	5/2	1/2	0

Как видно из таблицы 2.8, найденный оптимальный план $X^* = (19/2, 7/2, 0, 0, 10)$ задачи (2.1')-(2.3') не является оптимальным планом задачи (2.1')-(2.4'), поскольку две компоненты x_1 и x_2 имеют нецелочисленные значения. Определим дробные части этих чисел: $f(19/2) = 19/2 - 9 = 1/2$, $f(7/2) = 7/2 - 3 = 1/2$. Так как дробные части чисел x_1 и x_2 равны, то дополнительное ограничение можно составить для любой переменной, например, для x_2.

Сначала по данным таблицы 2.8 запишем соответствующее этой переменной ограничение: $0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 1/2 \cdot x_3 - 1/2 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 = 7/2$. Затем найдём дробные части чисел a_{ij}^*, b_i^* :

$$f(0) = 0 - 0 = 0,\quad f(1) = 1 - 1 = 0,\quad f(1/2) = 1/2 - 0 = 1/2,$$
$$f(-1/2) = -1/2 - (-1) = 1/2,\quad f(0) = 0 - 0 = 0 \text{ и } f(7/2) = 7/2 - 3 = 1/2.$$

Таким образом, в систему ограничений (2.6') задачи (2.5')-(2.7') добавляем неравенство $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1/2 \cdot x_3 + 1/2 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 \geq 1/2$.

Решаем задачу

$$F(x) = 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 \to max, \qquad (2.5')$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 13, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 6, \\ -3x_1 + x_2 + x_5 = 9, \\ 1/2 \cdot x_3 + 1/2 \cdot x_4 \geq 1/2 \end{cases} \qquad (2.6'')$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0. \qquad (2.7')$$

Запишем задачу (2.5'), (2.6''), (2.7') в канонической форме. Для этого введём в четвёртое ограничение системы (2.6'') дополнительную неотрицательную переменную x_6, которую включим в целевую функцию (2.5') с нулевым коэффициентом. Получим задачу

$$F(x) = 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 \to max, \qquad (2.8')$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 13, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 6, \\ -3x_1 + x_2 + x_5 = 9, \\ 1/2 \cdot x_3 + 1/2 \cdot x_4 - x_6 = 1/2, \end{cases} \qquad (2.9')$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0,\ x_6 \geq 0. \qquad (2.10')$$

В первом, втором и четвёртом ограничениях системы (2.9') нет базисных переменных, следовательно, нельзя применять алгоритм симплексного метода. Для решения задачи (2.8')-(2.10') воспользуемся методом искусственного базиса. Добавим в первое, второе и четвёртое ограничения системы (2.9') искусственные переменные ($x_7, x_8, x_9 \geq 0$), которые запишем в целевую функцию с коэффициентами $-M$. Получим расширенную задачу

$$\begin{aligned} F(x) = 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 - M \cdot x_7 - \\ - M \cdot x_8 - M \cdot x_9 \to max, \end{aligned} \qquad (2.11')$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_7 = 13, \\ x_1 - x_2 + x_4 + x_8 = 6, \\ -3x_1 + x_2 + x_5 = 9, \\ 1/2 \cdot x_3 + 1/2 \cdot x_4 - x_6 + x_9 = 1/2, \end{cases} \qquad (2.12')$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0,\ x_6 \geq 0, x_7 \geq 0,$$
$$x_8 \geq 0,\ x_9 \geq 0. \qquad (2.13')$$

Строим первое опорное решение: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_6 = 0$, $x_7 = 13$, $x_8 = 6$, $x_5 = 9$, $x_9 = 1/2$. Можно составлять симплексную таблицу. Однако из-за большого числа переменных она будет очень громоздкой. Вычисления упростятся, если для построения первого опорного плана задачи (8')-(10') воспользоваться данными таблицы 2.8. Систему ограничений (9') можно переписать в следующем виде:

$$\begin{cases} x_2 + 1/2 \cdot x_3 - 1/2 \cdot x_4 = 7/2, \\ x_1 + 1/2 \cdot x_3 + 1/2 \cdot x_4 = 19/2, \\ x_3 + 2 \cdot x_4 + x_5 = 34, \\ 1/2 \cdot x_3 + 1/2 \cdot x_4 - x_6 = 1/2. \end{cases} \qquad (2.9'')$$

Базисной переменной нет только в четвёртом ограничении системы (2.9''). Добавим в него искусственную переменную ($x_7 \geq 0$), которую запишем в целевую функцию с коэффициентом $-M$. Получим расширенную задачу

$$F(x) = 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 - M \cdot x_7 \to max, \qquad (2.14')$$

$$\begin{cases} x_2 + 1/2 \cdot x_3 - 1/2 \cdot x_4 = 7/2, \\ x_1 + 1/2 \cdot x_3 + 1/2 \cdot x_4 = 19/2, \\ x_3 + 2 \cdot x_4 + x_5 = 34, \\ 1/2 \cdot x_3 + 1/2 \cdot x_4 - x_6 + x_7 = 1/2, \end{cases} \qquad (2.15')$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0, x_6 \geq 0,\ x_7 \geq 0. \qquad (2.16')$$

Строим первое опорное решение: $x_3 = x_4 = x_6 = 0$, $x_1 = 19/2$, $x_2 = 7/2$, $x_5 = 34$, $x_7 = 1/2$. Заносим первый опорный план в симплексную таблицу (таблица 2.9).

Находим оптимальный план (таблица 2.10).

Из таблицы 2.10 видно, что исходная задача целочисленного программирования имеет оптимальный план $X^* = (9, 4, 0, 1, 32)$. Максимальное значение целевой функции равно 35 .

Если требование целочисленности относится лишь к некоторым переменным, то такие задачи называются *частично целочисленными*. Решение частично целочисленных задач линейного программирования также начинают с определения симплексным методом оптимального плана задачи без учёта условия целочисленности переменных.

Таблица 2.9

Первая симплексная таблица для расширенной задачи

i	C_i	Б	b_i	3	2	0	0	0	0	-M	Θ
				x_1	x_2	$\downarrow x_3$	x_4	x_5	x_6	x_7	
1	2	x_2	7/2	0	1	1/2	-1/2	0	0	0	7
2	3	x_1	19/2	1	0	1/2	1/2	0	0	0	19
3	0	x_5	34	0	0	1	2	1	0	0	34
4	-M	$\leftarrow x_7$	1/2	0	0	1/2	1/2	0	-1	1	1
5			0	0	0	5/2	1/2	0	0	0	
6				0M	0M	-1/2M	-1/2M	0M	M	0M	

Таблица 2.10

Последняя симплексная таблица для расширенной задачи

i	C_i	Б	b_i	3	2	0	0	0	0
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
1	2	x_2	4	0	1	1	0	0	-1/2
2	3	x_1	9	1	0	0	0	0	1/2
3	0	x_5	32	0	0	-1	0	1	2
4	0	x_4	1	0	0	1	1	0	-1
5			35	0	0	2	0	0	1/2

В том случае, когда среди компонент этого плана имеется дробная переменная x_i, которая обязательно должна быть целочисленной, то в систему ограничений добавляют неравенство

$$\gamma_{i\,1} \cdot x_1 + \gamma_{i\,2} \cdot x_2 + \ \ldots + \gamma_{i\,n} \cdot x_n \geq f\left(b_i^*\right), \qquad (2.27)$$

где

$$\gamma_{i\,j} = \begin{cases} a_{i\,j}^* \ \text{при} \ a_{i\,j}^* \geq 0, \\ \dfrac{f\left(b_i^*\right)}{1 - f\left(b_i^*\right)} \cdot \left|a_{i\,j}^*\right| \ \text{при} \ a_{i\,j}^* < 0 \end{cases} \qquad (2.28)$$

для x_i, которые могут принимать нецелочисленные значения,

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} f\left(a^*_{ij}\right) \text{при } f\left(a^*_{ij}\right) \le f\left(b^*_i\right), \\ \dfrac{f\left(b^*_i\right)}{1 - f\left(b^*_i\right)} \cdot \left[1 - f\left(a^*_{ij}\right)\right] \text{при } f\left(a^*_{ij}\right) > f\left(b^*_i\right) \end{cases} \qquad (2.29)$$

для x_i, которые должны быть целочисленными,

a^*_{ij}, b^*_i – преобразованные исходные величины a_{ij}, b_i, значения которых приняты из последней симплексной таблицы, а $f\left(a^*_{ij}\right)$, $f\left(b^*_i\right)$ – дробные части этих чисел.

Далее решают задачу частично целочисленного программирования с учётом ограничения (2.27). Если в оптимальном плане новой задачи опять имеется дробная переменная x_i, которая обязательно должна быть целочисленной, то итерационный процесс продолжают. В результате, либо получают оптимальный план исходной задачи, либо устанавливают её неразрешимость.

2.3. Задачи дробно-линейного программирования

Некоторые задачи нелинейного программирования можно свести к задачам линейного программирования. Примером тому являются задачи дробно-линейного программирования.

Постановка задачи дробно-линейного программирования

Задача дробно-линейного программирования состоит в определении максимального или минимального значения функции

$$F(x) = \frac{d_1x_1 + d_2x_2 + \ldots + d_nx_n}{c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n} \qquad (2.30)$$

при условиях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \ge b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (2.31)$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0, \qquad (2.32)$$

где a_{ij}, b_i, d_j, c_j $(i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$ – некоторые постоянные числа, $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \ne 0$ в области неотрицательных решений системы (2.31). При этом будем предполагать, что $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n > 0$ (такое условие не нарушает общности задачи, поскольку в том случае, когда эта величина отрицательна, знак минус можно отнести к числителю).

Задача (2.30) – (2.32) может быть сведена к задаче линейного программирования.

Алгоритм сведения задачи дробно-линейного программирования к задаче линейного программирования

Чтобы свести задачу (2.30) – (2.32) к задаче линейного программирования следует обозначить

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = v, \qquad (2.33)$$

разделить на v ограничения системы (2.31) и уравнения (2.33), а затем ввести новые переменные

$$y_1 = \frac{x_1}{v},\ y_2 = \frac{x_2}{v},\ \ldots,\ y_n = \frac{x_n}{v},\ y_0 = \frac{1}{v}. \qquad (2.34)$$

В результате получим задачу

$$F(y) = d_1y_1 + d_2y_2 + \ldots + d_ny_n \to max, \qquad (2.35)$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n - b_1y_0 \le 0, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n - b_2y_0 \ge 0, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \ldots + a_{mn}y_n - b_my_0 = 0, \\ c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_ny_n = 1, \end{cases} \qquad (2.36)$$

$$y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, \ldots, y_n \ge 0, y_0 > 0. \qquad (2.37)$$

Задача (2.35) – (2.37) является задачей линейного программирования, следовательно, её решение можно найти известными методами. Зная оптимальные значения переменных $y_1, y_2, \ldots, y_n, y_0$, рассчитаем оптимальные значения переменных исходной задачи по формулам:

$$x_1 = \frac{y_1}{y_0},\ x_2 = \frac{y_2}{y_0},\ \ldots,\ x_n = \frac{y_n}{y_0}. \qquad (2.38)$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Сформулируйте постановку транспортной задачи линейного программирования.

2. Какие специфические свойства позволяют выделить транспортные задачи в отдельный класс из множества задач линейного программирования?

3. Что означают понятия: закрытая модель транспортной задачи, открытая модель транспортной задачи?

4. Что является необходимым и достаточным условием разрешимости транспортной задачи?

5. Как перейти от открытой модели транспортной задачи к закрытой?

6. Какие тарифы на перевозку принимаются для фиктивных отправителей и потребителей?

7. Перечислите основные этапы метода потенциалов.

8. Какие существуют методы для построения первого опорного плана транспортной задачи. Назовите их достоинства и недостатки.

9. Каковы основные этапы метода «северо-западного угла»?

10. В чём отличие метода минимального элемента от метода «северо-западного угла»?

11. Перечислите основные этапы метода аппроксимации Фогеля.

12. Если наибольших положительных разностей при построении первого опорного плана методом аппроксимации Фогеля окажется несколько, то какой из них следует отдать предпочтение?

13. Сколько занятых клеток должен содержать невырожденный опорный план транспортной задачи?

14. Что следует делать при возникновении ситуации вырожденности текущего плана транспортной задачи?

15. Что такое «нулевая загрузка»? Зачем она нужна?

16. По каким ячейкам транспортной таблицы расставляется система потенциалов?

17. Для каких ячеек транспортной таблицы рассчитываются дельта-оценки? Зачем они нужны?

18. Сформулируйте критерий оптимальности плана транспортной задачи.

19. Если наибольших положительных дельта-оценок окажется несколько, то какой из них следует отдать предпочтение?

20. Перечислите правила построения цикла пересчета транспортной таблицы.

21. Как следует поступить, если в минусовых вершинах цикла окажутся два и более одинаковых объёмов перевозки?

22. Что означает наличие нулевых дельта-оценок в оптимальном плане транспортировки груза?

23. Назовите возможные усложнения в постановке классической транспортной задачи.

24. Сформулируйте постановку распределительной задачи линейного программирования.

25. Приведите алгоритм сведения модели распределительной задачи к модели транспортной задачи.

26. Поясните суть задач целочисленного программирования. Приведите конкретные примеры таких задач и назовите известные Вам методы их решения.

27. В чём заключается геометрическая интерпретация задачи целочисленного линейного программирования?

28. Каковы основные этапы графического метода решения задач целочисленного линейного программирования?

29. Перечислите основные этапы метода Гомори.

30. Как поступить, если требование целочисленности накладывается на все переменные задачи линейного программирования?

31. Как поступить, если требование целочисленности накладывается только на некоторые переменные задачи линейного программирования?

32. В чём отличие задачи дробно-линейного программирования от задачи линейного программирования? Приведите примеры экономических задач дробно-линейного программирования.

33. Приведите алгоритм сведения задачи дробно-линейного программирования к задаче линейного программирования.

УПРАЖНЕНИЯ

1. В трех пунктах сосредоточен однородный груз в количествах *160*, *140* и *60* тонн соответственно. Этот груз необходим четырем потребителям, в количествах *80*, *80*, *60* и *80* тонн соответственно. Тарифы на перевозку одной тонны (д.е.) задаются матрицей C:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 \\ 8 & 4 & 1 & 4 \\ 9 & 7 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Найти план перевозок груза от пунктов отправления к потребителям, при котором общие транспортные расходы минимальны.

2. На три базы поступил однородный груз в количествах, соответственно равных *40*, *180* и *160* единиц. Этот груз требуется в четырёх пунктах потребления в количествах, равных *160*, *70*, *120* и *100* единиц соответственно. Тарифы на перевозку единицы груза от каждого пункта отправления в пункты назначения (д.е.) задаются матрицей C:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 \\ 8 & 4 & 1 & 4 \\ 9 & 7 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Составить такой план закрепления поставщиков за потребителями, при котором общие транспортные расходы минимальны.

3. Необходимо выполнить перевозки однородного груза от трёх поставщиков, запасы которых *420*, *380* и *400* тонн соответственно к четырём потребителям, потребности которых *100*, *260*, *520* и *400* т соответственно. Расстояния от поставщиков до потребителей (км) задаются матрицей C:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 6 \\ 7 & 5 & 8 & 5 \\ 6 & 9 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

Определить план перевозок груза, минимизирующий суммарный пробег автомобилей.

4. Из отходов производства предприятие может организовать выпуск четырёх видов продукции. Для этого оно планирует использовать два типа взаимозаменяемого оборудования. Количество изделий каждого вида, которое может быть изготовлено на соответствующем оборудовании в течение *1* ч., а также затраты, связанные с производством одного изделия, приводятся в следующей таблице:

Тип оборудования	Количество производимых в течение 1 ч. изделий вида				Затраты (д.е.), связанные с производством в течение 1 ч. изделий вида			
	1	*2*	*3*	*4*	*1*	*2*	*3*	*4*
I	*8*	*6*	*4*	*6*	*1*	*4*	*2*	*5*
II	*4*	*3*	*2*	*3*	*2*	*5*	*2*	*7*

Фонд рабочего времени оборудования *I* типа равен *80* час., а оборудования *II* типа – *100* час. План по выпуску изделий *1* вида – *240* ед., изделий *2* вида – *180* ед., изделий *3* вида – *160* ед., изделий *4* вида – *240* ед.

Определить, в течение какого времени и на каком оборудовании следует изготавливать изделия каждого вида так, чтобы затраты на производство были минимальны.

5. В цехе предприятия решено установить дополнительное оборудование, для размещения которого имеется $6\frac{1}{3}$ м^2. На приобретение оборудования выделено *10000* д.е. Можно купить оборудование двух видов. Известно, что для установки комплекта оборудования *I* вида требуется *2* м^2 площади, а оборудования *II* вида – *1* м^2; цена комплекта оборудования *I* вида *1000* д.е., а *II* вида – *3000* д.е. Использование комплекта оборудования *I* вида позволит увеличить выпуск продукции в смену на *2* ед., а комплекта оборудования *II* вида – на *4* ед. Требуется определить такой набор дополнительного оборудования, который позволит максимально увеличить выпуск продукции.

Найти целочисленное решение задачи, используя её геометрическую интерпретацию.

6. Предприятие может выпускать продукцию двух видов. Для производства изделий необходимы трудовые ресурсы, полуфабрикаты, станочное оборудование, запасы которых ограничены. Нормы затрат ресурсов при выпуске единицы продукции каждого вида, запасы ресурсов и цены изделий представлены в таблице:

Ресурсы	Нормы затрат ресурсов на производство единицы продукции		Запасы ресурсов
	1 вида	*2* вида	
Трудовые ресурсы, чел.-час.	*1*	*4*	*22*
Полуфабрикаты, кг	*7*	*5*	*47*
Станочное оборудование, станко-смены	*8*	*5*	*50*
Цена единицы продукции, д.е.	*15*	*13*	

Требуется определить производственную программу предприятия, при которой стоимость продукции будет максимальна.

Найти решение задачи, используя её геометрическую интерпретацию и метод Гомори.

7. Сведите задачу

$$F(x) = \frac{-5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2}{3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2} \to max,$$

$$\begin{cases} x_1 + 4 \cdot x_2 + x_3 = 16, \\ 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 - x_4 = 12, \\ 3 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 + x_3 = 18, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0$$

к задаче линейного программирования.

3. ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОИЗВОДСТВЕННОГО ПЛАНА

3.1. Анализ оптимальных значений переменных

Математическое моделирование производственной программы является одним из перспективных направлений эффективного планирования на предприятии. Оно позволяет выбрать из возможных вариантов плана лучший с точки зрения принятого критерия. Задача разработки оптимального производственного плана была рассмотрена в первой главе (задача (1.1)-(1.3)). Она записана при помощи линейной модели. В этом случае выбор наилучшего варианта осуществляется симплексным методом. Немаловажное значение имеет также анализ полученных результатов, который позволяет оценить возможность реализации найденного решения. Экономико-математический анализ оптимальной производственной программы включает анализ оптимальных значений переменных и исследование устойчивости структуры оптимального решения [14].

Пример 6. Предприятие может выпускать продукцию трёх типов: $П_1$, $П_2$, $П_3$. Для производства этой продукции оно располагает ограниченным количеством трудовых ресурсов, полуфабрикатов, станочного оборудования (таблица 3.1). Цена одного изделия $П_1$ составляет *10* д.е., $П_2$ – *14* д.е., $П_3$ – *12* д.е. Необходимо определить план выпуска продукции, при котором стоимость продукции максимальна.

Таблица 3.1

Исходные данные для примера

Ресурсы	Нормы затрат ресурсов на производство единицы продукции			Ежедневные объёмы ресурсов, ед.
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	
Трудовые, чел.-час.	*4*	*2*	*1*	*180*
Полуфабрикаты, кг	*3*	*1*	*3*	*210*
Станочное оборудование, станко-смены	*1*	*2*	*5*	*244*

Обозначим планируемое к производству количество изделий $П_1$ через x_1, $П_2 - x_2$, $П_3 -$ x_3 (шт.). Тогда можно записать

$$F(x) = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3 \to max, \quad (3.1')$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 1x_3 \le 180, \\ 3x_1 + 1x_2 + 3x_3 \le 210, \\ 1x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 244, \end{cases} \tag{3.2'}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0. \tag{3.3'}$$

Запишем задачу (3.1′)-(3.3′) в канонической форме. Для этого введём в первое ограничение системы (3.2′) дополнительную неотрицательную переменную x_4 – неиспользованные трудовые ресурсы (чел.-час.), во второе – x_5 - неиспользованный остаток полуфабрикатов (кг), в третье $-x_6$ – неиспользованное рабочее время станочного оборудования (станко-смены).

В результате получим задачу

$$F(x) = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 \to max, \tag{3.1''}$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 1x_3 + x_4 = 180, \\ 3x_1 + 1x_2 + 3x_3 + x_5 = 210, \\ 1x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_6 = 244, \end{cases} \tag{3.2''}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0,\ x_6 \ge 0, \tag{3.3''}$$

которую можно решить симплексным методом.

Анализ оптимальных значений переменных основывается на использовании информации, содержащейся в последней симплексной таблице. Прежде всего, из последней симплексной таблицы находят оптимальное значение целевой функции $F(X^*)$, а также соответствующие ему значения основных $x_j^*\ (j = \overline{1,n})$ и дополнительных $x_{n+i}^*\ (i = \overline{1,m})$ переменных. Каждая из этих переменных представляет собой важную характеристику полученного оптимального плана. Состав и значения основных переменных определяют номенклатуру и количество продукции, при которых будет достигнута максимальная стоимость продукции. Значения дополнительных переменных показывают резервы (остатки) по рассматриваемым видам ресурсов.

При решении задачи (3.l")-(3.3") получена следующая заключительная симплексная таблица (таблица 3.2).

Таблица 3.2

Последняя симплексная таблица

i	P_i	$Б$	b_i	10	14	12	0	0	0
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
1	14	x_2	82	$\frac{19}{8}$	1	0	$\frac{5}{8}$	0	$-\frac{1}{8}$
2	0	x_5	80	$\frac{23}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$	1	$-\frac{5}{8}$
3	12	x_3	16	$-\frac{3}{4}$	0	1	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
4			1340	$\frac{57}{4}$	0	0	$\frac{23}{4}$	0	$\frac{5}{4}$
				y_4	y_5	y_6	y_1	y_2	y_3

Производственная программа, предполагающая выпуск *82* изделий *П₂* и *16* изделий *П₃*, обеспечит максимальную стоимость продукции, равную *1340* д.е. При этом останутся неиспользованными *80* кг полуфабрикатов.

В последней симплексной таблице также имеются соответствующие оптимальному решению задачи (1.1)-(1.3) значения переменных двойственной задачи, дающие ответ на ряд практически важных вопросов.

По отношению к исходной задаче (1.1)-(1.3) двойственной является следующая задача:

$$f(y) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to min, \tag{3.1}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge p_j \ (j = \overline{1,n}\ ), \tag{3.2}$$

$$y_i \ge 0 \ (i = \overline{1,m}\ ). \tag{3.3}$$

Дадим экономическую интерпретацию задачи (3.1)-(3.3). Пусть заданы величины $a_{ij}, b_i, p_j \ (i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}\ )$ того же смысла, что и в исходной задаче. Требуется оценить дефицитность каждого из ресурсов, используемых для производства продукции. Оценки дефицитности, приписываемые ресурсам, должны быть такими, чтобы:

1) оценка всех запасов ресурсов была минимальной;

2) суммарная оценка ресурсов, необходимых для изготовления единицы продукции каждого типа, была не меньше цены единицы продукции соответствующего типа.

Пусть y_i – искомая оценка единицы ресурса i-го вида (д.е.). Оценка запаса i-го ресурса равна $b_i y_i$ д.е., а общая оценка всех ресурсов, которыми располагает предприятие, составит $\sum_{i=1}^{m} b_i y_i$ (д.е.). В соответствии с условием 1) $f(y)$ минимизируется, т.е. имеем целевую функцию (3.1).

Оценка i-го ресурса, используемого на производство единицы j-й продукции, составит $a_{ij} y_i$ д.е., а оценка всех ресурсов, расходуемых для изготовления единицы j-й продукции, равна $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i$ (д.е.). В соответствии с требованием 2) оценки ресурсов y_i должны удовлетворять условиям (3.2).

Оценки ресурсов не могут быть отрицательными, таким образом, имеем условия (3.3).

Задачи (1.1)-(1.3) и (3.1)-(3.3) образуют симметричную пару взаимно двойственных задач: для любой производственной программы $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и при любом векторе оценок $Y = (y_1, y_2, ..., y_m)$ выполняется неравенство $F(X) \le f(Y)$, т.е. стоимость всей выпущенной продукции не превосходит суммарной оценки имеющихся ресурсов. Значит, величина $f(Y) - F(X)$ характеризует, в некотором смысле, производственные потери стоимости продукции по сравнению с суммарной оценкой имеющихся ресурсов (в зависимости от рассматриваемой производственной программы и соответствующих оценок ресурсов).

Из первой теоремы двойственности следует, что при оптимальных производственной программе и векторе оценок ресурсов производственные потери равны нулю.

Согласно второй теореме двойственности к оптимальной производственной программе $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ и оптимальному вектору оценок $Y^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_m^*)$ предъявляются следующие требования:

$$x_j^* \cdot y_{m+j}^* = 0\ (j = \overline{1,n}),\quad y_i^* \cdot x_{n+i}^* = 0\ (i = \overline{1,m}).$$

Другими словами:

$$\left.\begin{array}{l} \text{если } x_j^* > 0\ \text{, то } y_{m+j}^* = 0\text{, т.е. } \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* = p_j\text{,} \\ \text{если } x_j^* = 0\ \text{, то } y_{m+j}^* > 0\text{, т.е. } \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* > p_j\text{,} \end{array}\right\} \quad (j = \overline{1,n}) \qquad (3.4)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{если } y_i^* > 0\ \text{, то } x_{n+i}^* = 0\text{, т.е. } \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* = b_i\text{,} \\ \text{если } y_i^* = 0\ \text{, то } x_{n+i}^* > 0\text{, т.е. } \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* < b_i\text{.} \end{array}\right\} \quad (i = \overline{1,m}) \qquad (3.5)$$

Примечание. Переменные $y_{m+j} \geq 0 \quad (j = \overline{1, n})$ являются дополнительными переменными задачи (3.1)-(3.3). Они показывают, насколько суммарная оценка ресурсов, потреблённых для производства единицы j-й продукции, превосходит цену этой продукции, т.е. убыток от её производства.

Вернёмся к примеру 6. Для задачи (3.1')-(3.3') двойственной является задача:

$$f(y) = 180y_1 + 210y_2 + 244y_3 \to min, \tag{3.4'}$$

$$\begin{cases} 4y_1 + 3y_2 + 1y_3 \geq 10, \\ 2y_1 + 1y_2 + 2y_3 \geq 14, \\ 1y_1 + 3y_2 + 5y_3 \geq 12, \end{cases} \tag{3.5'}$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, \tag{3.6'}$$

где y_1 – оценка человеко-часа (д.е.),
y_2 – оценка килограмма полуфабрикатов (д.е.),
y_3 – оценка станко-смены (д.е.).

Запишем двойственную задачу в канонической форме:

$$f(y) = 180y_1 + 210y_2 + 244y_3 + 0y_4 + 0y_5 + 0y_6 \to min, \tag{3.4''}$$

$$\begin{cases} 4y_1 + 3y_2 + 1y_3 - y_4 = 10, \\ 2y_1 + 1y_2 + 2y_3 - y_5 = 14, \\ 1y_1 + 3y_2 + 5y_3 - y_6 = 12, \end{cases} \tag{3.5''}$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, y_4 \geq 0, y_5 \geq 0, y_6 \geq 0. \tag{3.6''}$$

Оптимальные значения оценок ресурсов и дополнительных двойственных переменных находятся в четвертой строке таблицы 3.2:

$$y_1 = \frac{23}{4}, y_2 = 0, y_3 = \frac{5}{4}, y_4 = \frac{57}{4}, y_5 = 0, y_6 = 0.$$

Свойства двойственных оценок

Свойство 1. Положительную двойственную оценку имеют лишь дефицитные ресурсы, т.е. те, которые полностью используются в производстве. Для недефицитных ресурсов двойственная оценка равна нулю (см. условия (3.5)). Таким образом, оценки выступают как мера дефицитности ресурсов. Использование данного свойства позволяет вскрыть «узкие места», сдерживающие рост производства, помогает выбрать правильное решение, если предполагается расширение производства и требуется привлечение дополнительных ресурсов.

Кроме того, из условий (3.4) следует, что для тех типов продукции, которые вошли в оптимальный план, дополнительные двойственные оценки равны нулю, т.е. их выпуск не приносит убытка; типы продукции, которые не вошли в оптимальный план, были бы убыточными в случае их производства.

Свойство 2. Переменные двойственной задачи используются для определения влияния изменения запасов ресурсов, а также введения в производство тех типов продукции, которые не вошли в оптимальный план, на целевую функцию. Изменение ресурса, по которому есть резерв, не вызовет изменения целевой функции. Увеличение или уменьшение дефицитного ресурса на единицу приведет к увеличению или уменьшению целевой функции на величину соответствующей двойственной оценки.

Следует иметь в виду, что при увеличении дефицитного ресурса на единицу прирост целевой функции достигается за счёт перераспределения всех ресурсов по видам продукции, что приводит к количественным изменениям в оптимальном плане. Эти изменения могут быть определены при помощи последней симплексной таблицы решения задачи (1.1)-(1.3) на основании коэффициентов замещения при дополнительных небазисных переменных (т.е. рассматриваются столбцы дефицитных ресурсов). При этом положительные коэффициенты означают увеличение значений соответствующих базисных переменных, а отрицательные – уменьшение.

Для анализируемого предприятия дефицитными ресурсами выступают трудовые ресурсы и станочное оборудование. (Оценки y_1 и y_3 положительны). Увеличение их объёмов на единицу приведет к изменению ранее найденного оптимального производственного плана, при этом максимальная стоимость продукции увеличится. Например, если количество трудовых ресурсов будет на один человеко-час больше, то выпуск изделий П-2 вырастет на $\frac{5}{8}$ шт., изделий П-3 – снизится на $\frac{1}{4}$ шт., а неиспользованных полуфабрикатов станет больше на $\frac{1}{8}$ кг. В результате максимальная стоимость продукции увеличится на: $\frac{5}{8}\cdot 14+\frac{1}{8}\cdot 0+(-\frac{1}{4})\cdot 12=\frac{23}{4}$ (д.е.), т.е. она составит $1345{,}75$ д.е. ($1340+5{,}75$).

Вызывают интерес также значения дополнительных двойственных переменных. При введении в производство единицы продукции того типа, который не вошёл в оптимальный план, максимальное значение целевой функции исходной задачи уменьшится на величину соответствующей дополнительной двойственной оценки. Это произойдет за счёт перераспределения всех ресурсов по видам продукции. Количественные изменения в оптимальном плане могут быть определены при помощи последней симплексной таблицы решения задачи (1.1)-(1.3) на основании коэффициентов замещения при основных небазисных переменных. При этом положительные коэффициенты показывают уменьшение, а отрицательные – увеличение значений соответствующих базисных переменных.

Производство продукции $П_1$ на рассматриваемом предприятии невыгодно, т.к. оценка y_4 положительна (см. табл. 3.2). При включении в план выпуска изделий единицы продукции первого типа, ранее найденное оптимальное решение изменится: количество изделий $П_2$ уменьшится на $\frac{19}{8}$ шт., изделий $П_3$ – увеличится на $\frac{3}{4}$ шт., а неиспользованных полуфабрикатов будет меньше на $\frac{23}{8}$ кг. В результате максимальная стоимость продукции снизится на $\frac{57}{4}$ д.е. ($\Delta F(x) = 10 \cdot 1 - 14 \cdot \frac{19}{8} - 0 \cdot \frac{23}{8} + 12 \cdot \frac{3}{4} = -\frac{57}{4}$) и составит $1325{,}75$ д.е. ($1340 - 14{,}25$).

Следует иметь в виду, что дополнительные двойственные оценки не меняются, если включить в производство такое количество продукции, не предусмотренной оптимальной программой, которое не нарушает набор переменных базиса ранее найденного плана. Пределом введения в базис основной небазисной переменной является минимальное из отношений значений базисных переменных к положительным коэффициентам замещения вводимой небазисной переменной.

Предположим, что для поддержания ассортимента продаваемых товаров в фирменном магазине предприятия, необходимо выпускать хотя бы несколько единиц продукции первого типа (т.е. невыгодной продукции). В этой связи определим сначала максимально возможное количество изделий $П_1$ (шт.), при котором сохраняется набор переменных оптимального базиса. Из таблицы 3.2 получаем: $0 \le \Delta x_1 \le min\left\{82 \div \frac{19}{8}; 80 \div \frac{23}{8}\right\}$. Следовательно, $0 \le \Delta x_1 \le 27\frac{19}{23}$.

Посмотрим теперь, как изменится производственная программа предприятия и максимальная стоимость продукции, если будет принято решение выпускать 8 единиц продукции первого типа. Используя коэффициенты замещения при переменной x_1 из таблицы 3.2, получим, что объём производства изделий $П_2$ составит $82 - 8 \cdot \frac{19}{8} = 63$ (шт.), неиспользованный остаток полуфабрикатов – $80 - 8 \cdot \frac{23}{8} = 57$ (кг), объём производства изделий $П_3$ – $16 - 8 \cdot (-\frac{3}{4}) = 22$ (шт.). В результате выпуск продукции в стоимостном выражении уменьшится на 114 д.е. ($\Delta F(x) = 10 \cdot 8 - 14 \cdot 19 + 12 \cdot 6 = -114$ или $\Delta F(x) = -\frac{57}{4} \cdot 8$).

Свойство 3. Двойственные оценки применяются в расчётах взаимозаменяемости ресурсов. Взаимозаменяемость определяется по соотношению двойственных оценок. Следует подчеркнуть, что эквивалентная замена одних ресурсов другими приведет к изменению оптимального плана, но значение целевой функции сохранится.

Свойство 4. Оценки ресурсов выступают как инструмент балансирования суммарных затрат и результатов. Это свойство вытекает из первой теоремы двойственности, где устанавливается связь между оптимальными значениями целевых функций прямой и двойственной задач: $F_{max}(X^*) = f_{min}(Y^*)$. В экономическом смысле это означает равенство стоимости продукции суммарной оценке всех затрачиваемых ресурсов.

3.2. Исследование устойчивости оптимального решения

Исследование устойчивости оптимального решения – это изучение влияния изменений отдельно взятых параметров модели (коэффициентов целевой функции, технико-экономических коэффициентов, объёмов ограничений по ресурсам и др.) и её структуры (введение новых ограничений и переменных или их сокращение) на показатели оптимального решения. Рассмотрим наиболее часто используемые направления такого анализа.

Устойчивость оптимального решения
к изменению коэффициентов целевой функции

Пусть параметры p_j изменятся на величину Δp_j, т.е. $p_j^н = p_j + \Delta p_j$. Тогда Δ-оценки в последней симплексной таблице примут новые значения. Чтобы найденное ранее решение оставалось оптимальным, изменение коэффициентов целевой функции допустимо в таком интервале, для которого $\Delta_j \ (j = \overline{1, m+n})$ остаются неотрицательными. Этим и руководствуются при определении устойчивости оптимального решения по отношению к изменению коэффициентов целевой функции.

Следует иметь в виду, что увеличение или уменьшение p_j при базисной переменной в установленном интервале вызовет соответственно увеличение или уменьшение значения $F_{max}(X^*)$.

Так, для изучаемого предприятия $p_1^н = 10 + \Delta p_1$, $p_2^н = 14 + \Delta p_2$, $p_3^н = 12 + \Delta p_3$, $p_4^н = 0 + \Delta p_4$, $p_5^н = 0 + \Delta p_5$, $p_6^н = 0 + \Delta p_6$.

Оптимальная производственная программа останется прежней, если выполняются условия:

$$\begin{cases} \Delta_1^н = (14+\Delta p_2)\cdot\dfrac{19}{8} + (12+\Delta p_3)\cdot\left(-\dfrac{3}{4}\right) - (10+\Delta p_1) \ge 0, \\ \Delta_4^н = (14+\Delta p_2)\cdot\dfrac{5}{8} + (12+\Delta p_3)\cdot\left(-\dfrac{1}{4}\right) - (0+\Delta p_4) \ge 0, \\ \Delta_6^н = (14+\Delta p_2)\cdot\left(-\dfrac{1}{8}\right) + (12+\Delta p_3)\cdot\dfrac{1}{4} - (0+\Delta p_6) \ge 0, \end{cases} \qquad (3.7')$$

где $\Delta_1^н$, $\Delta_4^н$, $\Delta_6^н$ – новые оценки небазисных переменных x_1, x_4, x_6. (Значения Δ-оценок базисных переменных x_2, x_3, x_5 как и прежде равны нулю).

Пусть $\Delta p_1 \ne 0$, а $\Delta p_2 = \Delta p_3 = \Delta p_4 = \Delta p_5 = \Delta p_6 = 0$, т.е. изменяется только цена продукции П-1. При подстановке заданных $\Delta p_j\ (j=\overline{1,6})$ в систему неравенств (3.7′) получим $\Delta p_1 \le \dfrac{57}{4}$. В оптимальном плане выпуск продукции первого типа, реализуемой по цене 10 д.е. за штуку, не предусмотрен. Понятно, что при снижении цены (по смыслу задачи до 0 д.е.) изделия $П_1$ также производить не следует. Ранее рассчитанная оптимальная производственная программа сохранится и при повышении p_1 на величину, не превосходящую $\dfrac{57}{4}$ д.е. Таким образом, пока цена продукции $П_1$ меньше $24{,}25$ д.е. ($10+14{,}25$), ассортимент, объёмы выпуска продукции и её стоимость не изменятся.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда $\Delta p_2 \ne 0$, а $\Delta p_1 = \Delta p_3 = \Delta p_4 = \Delta p_5 = \Delta p_6 = 0$. Это означает, что происходит изменение только цены продукции второго типа. Система неравенств (3.7′) при этом будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} \Delta_1^н = (14+\Delta p_2)\cdot\dfrac{19}{8} + 12\cdot\left(-\dfrac{3}{4}\right) - 10 \ge 0, \\ \Delta_4^н = (14+\Delta p_2)\cdot\dfrac{5}{8} + 12\cdot\left(-\dfrac{1}{4}\right) \ge 0, \\ \Delta_6^н = (14+\Delta p_2)\cdot\left(-\dfrac{1}{8}\right) + 12\cdot\dfrac{1}{4} \ge 0, \end{cases}$$

откуда следует

$$\begin{cases} \frac{57}{4} + \frac{19}{8} \cdot \Delta p_2 \geq 0, \\ \frac{23}{4} + \frac{5}{8} \cdot \Delta p_2 \geq 0, \\ \frac{5}{4} - \frac{1}{8} \cdot \Delta p_2 \geq 0, \end{cases} \quad \text{а значит} \quad \begin{cases} \Delta p_2 \geq -6, \\ \Delta p_2 \geq -9{,}2, \\ \Delta p_2 \leq 10. \end{cases}$$

Итак, $-6 \leq \Delta p_2 \leq 10$. Если цена изделия $П_2$ будет принимать значение, большее 8 д.е. ($14-6$) и меньшее 24 д.е. ($14+10$), то останутся прежними ассортимент и объёмы выпуска продукции каждого типа, однако, максимальная стоимость продукции будет меняться.

Устойчивость оптимального решения к изменению объемов ограничений

Двойственные оценки позволяют судить об эффекте не любых, а лишь сравнительно небольших изменений объёмов ресурсов. (При больших изменениях сами оценки могут стать другими). В связи с этим необходимо определить такие интервалы изменения каждого из свободных членов системы (1.2), в которых оптимальный план двойственной задачи остается прежним. Известно, что оценки ресурсов y_i^* не меняют своей величины, если не меняется набор переменных, входящих в базис оптимального плана исходной задачи, тогда как их значения в плане могут меняться.

Запишем систему ограничений исходной задачи (1.1)-(1.3) в канонической форме, используя следующие обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & a_{1\,n+1} & \dots & a_{1\,n+m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & a_{2\,n+1} & \dots & a_{2\,n+m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & a_{m\,n+1} & \dots & a_{m\,n+m} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \\ x_{n+1} \\ \dots \\ x_{n+m} \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$A \cdot X = B. \tag{3.6}$$

Пусть известен оптимальный план. Разобьём вектор X на два вектора: $X_б > 0$ и $X_{нб} = 0$. В первый включим неизвестные, вошедшие в оптимальном решении в базис, во второй – небазисные переменные. Матрицу A также разобьём на две: $A_б$ (размерность $m \times m$) и $A_{нб}$ (размерность $m \times n$). Первую из них сформируют те столбцы матрицы A, которые соответствуют базисным переменным оптимального плана, вторую – небазисным. Тогда выражение (3.6) примет вид:

$$A_б \cdot X_б + A_{нб} \cdot X_{нб} = B.$$

Так как $A_{нб} \cdot X_{нб} = 0$, то $A_б \cdot X_б = B$.

Умножив обе части последнего равенства на матрицу, обратную матрице $A_б$, и учитывая, что $A_б \cdot A_б^{-1} = E$ (E – единичная матрица), получим:

$$X_б = A_б^{-1} \cdot B. \tag{3.7}$$

<u>Примечание.</u> При решении задачи (1.1)-(1.3) симплексным методом вычисляется и матрица $A_б^{-1}$. Она располагается в последней таблице на месте единичной матрицы в первой таблице.

Изменим запасы ресурсов, т.е. дадим приращение ΔB вектору B. Тогда изменятся значения компонент вектора $X_б$. Оптимальный план двойственной задачи не меняется при изменении свободных членов системы (1.2) в таких интервалах, для которых компоненты вектора $X_б$ остаются положительными. Этим руководствуются при установлении пределов неизменности оценок ресурсов.

Обозначим, Δb_1 – приращение объема трудовых ресурсов (чел.-час.), Δb_2 – полуфабрикатов (кг), Δb_3 – фонда рабочего времени станочного оборудования (станко-смены). Тогда, новые значения переменных, вошедших в оптимальном решении задачи (3.1"), (3.2"), (3.3") в базис $(x_2^н, x_5^н, x_3^н)$, можно рассчитать как результат перемножения матриц $A_б^{-1}$ и $B^н$:

$$A_б^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{8} & 0 & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & 1 & -\frac{5}{8} \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad B^н = \begin{pmatrix} 180 + \Delta b_1 \\ 210 + \Delta b_2 \\ 244 + \Delta b_3 \end{pmatrix}.$$

То есть по формуле (3.7) получим:

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{8} & 0 & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & 1 & -\frac{5}{8} \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 180+\Delta b_1 \\ 210+\Delta b_2 \\ 244+\Delta b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2^н \\ x_5^н \\ x_3^н \end{pmatrix}.$$

Чтобы рассчитанные ранее оценки ресурсов y_i^* остались прежними, должны выполняться следующие условия:

$$\begin{cases} x_2^н = 82+\frac{5}{8}\cdot\Delta b_1-\frac{1}{8}\cdot\Delta b_3>0, \\ x_5^н = 80+\frac{1}{8}\cdot\Delta b_1+\Delta b_2-\frac{5}{8}\cdot\Delta b_3>0, \\ x_3^н = 16-\frac{1}{4}\cdot\Delta b_1+\frac{1}{4}\cdot\Delta b_3>0. \end{cases} \qquad (3.8')$$

Предположим, что на анализируемом предприятии изменяется только запас полуфабрикатов, т.е. $\Delta b_2 \neq 0$, а $\Delta b_1 = \Delta b_3 = 0$. При подстановке заданных приращений, объёмов ресурсов в систему неравенств (3.8′) получаем $-80 < \Delta b_2$. Значит, оптимальные оценки ресурсов не изменятся, если количество полуфабрикатов снижается не больше чем на 80 кг, т.е. на величину остатка. В этом случае и производственная программа предприятия останется прежней, лишь будет уменьшаться размер неиспользованных полуфабрикатов.

Пусть изменяется только фонд рабочего времени станочного оборудования (см. табл. 3.2), т.е. $\Delta b_3 \neq 0$, а $\Delta b_1 = \Delta b_2 = 0$. Тогда систему неравенств (3.8′) можно представить в виде:

$$\begin{cases} 82-\frac{1}{8}\cdot\Delta b_3>0, \\ 80-\frac{5}{8}\cdot\Delta b_3>0, \\ 16+\frac{1}{4}\cdot\Delta b_3>0, \end{cases}$$

откуда получаем $-64<\Delta b_3<128$. Следовательно, оптимальные оценки ресурсов остаются прежними, если фонд рабочего времени станочного оборудования составляет от 180 ($244-64$) до 372 ($244+128$) станко-смен. При изменении объёма дефицитного ресурса в указанном интервале ассортимент выпускаемой продукции сохраняется, однако количество изделий и их стоимость будут другими. Соответствующие коррективы следует внести в оптимальный производственный план, используя коэффициенты замещения при переменной x_6 и значение переменной y_3 из таблицы 3.2.

Можно также рассмотреть ситуацию, когда меняются величины всех ресурсов одновременно. Например: $\Delta b_1 = 10, \Delta b_2 = -50, \Delta b_3 = 10$. Подставляя эти изменения объёмов ресурсов в систему неравенств (3.8′), получим:

$$\begin{cases} x_2^н = 82 + \dfrac{5}{8} \cdot 10 - \dfrac{1}{8} \cdot 10 = 87 > 0, \\ x_5^н = 80 + \dfrac{1}{8} \cdot 10 - 50 - \dfrac{5}{8} \cdot 10 = 25 > 0, \\ x_3^н = 16 - \dfrac{1}{4} \cdot 10 + \dfrac{1}{4} \cdot 10 = 16 > 0, \end{cases}$$

где все неравенства истинные. Значит, если количество дефицитных ресурсов (трудовых и станочного оборудования) будет больше на 10 единиц, а полуфабрикатов меньше на 50 кг, то оптимальные оценки y_1, y_2, y_3 останутся неизменными. В новых условиях предприятию выгодно производить 87 изделий $П_2$ (больше на 5 единиц) и 16 изделий $П_3$ (столько же), что позволит увеличить стоимость продукции на величину $\Delta F(x) = 14 \cdot 5 + 12 \cdot 0 = 70$ (д.е.) или через двойственные оценки: $\Delta f(y) = \dfrac{23}{4} \cdot 10 + 0 \cdot (-50) + \dfrac{5}{4} \cdot 10 = 70$ (д.е.).

Устойчивость к изменению технико-экономических коэффициентов при основных небазисных переменных

Пусть коэффициент a_{lk} $(l \in [1, m], k \in [1, n])$ при небазисной переменной x_k изменится на величину Δa_{lk}, т.е. $a_{lk}^н = a_{lk} + \Delta a_{lk}$. Тогда ограничение двойственной задачи (3.1)-(3.3), определяемое переменной x_k, примет вид:

$$a_{1k} y_1 + \ldots + (a_{lk} + \Delta a_{lk}) y_l + \ldots + a_{mk} y_m \geq p_k . \qquad (3.8)$$

При подстановке оптимальных оценок ресурсов в неравенство (3.8) можно рассчитать Δa_{lk}, для которого найденная ранее производственная программа остаётся неизменной.

Рассмотрим, например, какое изменение величины $a_{11} = 4$ не повлияет на оптимальное решение задачи (3.1')-(3.3'). Для этого используем ограничение задачи (3.4')-(3.6'), соответствующее переменной x_1:

$$(4+\Delta a_{11})\cdot y_1+3\cdot y_2+1\cdot y_3\ge 10\,.$$

Отсюда находим, что $-2{,}48\le\Delta a_{11}$. Таким образом, если расход трудовых ресурсов на выпуск изделия $П_1$ больше $1{,}52$ чел.-час. ($4-2{,}48$), то ранее найденный оптимальный план сохраняется.

Устойчивость оптимального решения
к включению в модель новой переменной

На основании уже полученного решения задачи можно ответить на вопрос о целесообразности включения в модель нового $(n+1)$-го типа продукции, для которого известны нормы затрат ресурсов и цена: $a_{i\,n+1}\ (i=\overline{1,m})$ и p_{n+1}. Если $\sum_{i=1}^{m}a_{i\,n+1}y_i\ \ge\ p_{n+1}$, то $(n+1)$-й тип продукции убыточен и включать его в модель нецелесообразно, иначе – целесообразно. Это следует из условий (3.4).

Предположим, что технологические возможности производства позволяют использовать имеющиеся ресурсы также и для выпуска новой, пользующейся спросом на рынке продукции $П_4$. Если при этом расход трудовых ресурсов на одно изделие составляет 4 чел.-час., полуфабрикатов – 1 кг, рабочего времени станочного оборудования – 2 станко-смены, а цена 1 штуки – 20 д.е., то целесообразно ли пересматривать ранее найденную оптимальную программу деятельности? Для ответа на поставленный вопрос запишем ограничение двойственной задачи, соответствующее переменной, обозначающей объём производства продукции $П_4$:

$$4y_1+1y_2+2y_3\ge 20\,.$$

Подставляя $y_1^*,\,y_2^*,\,y_3^*$, имеем $4\cdot\dfrac{23}{4}+1\cdot 0+2\cdot\dfrac{5}{4}\ge 20$, следовательно, $25{,}5\ge 20$. Так как суммарная оценка ресурсов, необходимых при изготовлении нового изделия, выше его цены, выпуск продукции $П_4$ нецелесообразен и рассчитанный оптимальный план не изменится.

Устойчивость оптимального решения
к включению в модель нового ограничения

На предприятии может возникнуть необходимость решения вопроса о целесообразности включения в модель ограничения на объём $(m+1)$-го ресурса, для которого известны нормы расхода $a_{m+1\,j}\ (j=\overline{1,n})$ и объём ресурса b_{m+1}. В этом случае проверяется истинность неравенства $\sum_{j=1}^{n}a_{m+1\,j}x_j\le b_{m+1}$. Если оно выполняется, то добавление нового условия нецелесообразно, поскольку $(m+1)$-й ресурс будет избыточным и не окажет никакого воздействия на оптимальный план. В противном случае ограничение существенно, полностью изменит оптимальный план, его целесообразно включить в модель и решить задачу заново.

Например, после того как оптимальная производственная программа была рассчитана, оказалось, что в плановом периоде у предприятия будет ограничено количество комплектующих изделий. Оно составит *350* штук. Потребность в комплектующих для единицы продукции $П_1$, $П_2$, $П_3$ равна *5*, *4* и *2* ед. соответственно. Следует ли пересмотреть уже найденную производственную программу?

Определим, сколько потребуется комплектующих изделий для выпуска запланированного количества продукции: $5 \cdot 0 + 4 \cdot 82 + 2 \cdot 16 = 360$ (шт.). Это больше, чем тот запас, который будет на предприятии. Значит, в систему ограничений (3.2') необходимо ввести дополнительное условие $5x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 350$ и, с учётом его, заново решить задачу (3.1')–(3.3').

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. В чём заключается экономико-математический анализ оптимального производственного плана?
2. Дайте интерпретацию оптимальных значений переменных задачи оптимального использования ресурсов.
3. Приведите экономическую интерпретацию двойственной задачи.
4. Поясните экономический смысл оценок ресурсов.
5. Какую единицу измерения имеют переменные двойственной задачи линейного программирования?
6. Каков экономический смысл теорем двойственности?
7. Где в последней симплексной таблице находятся оптимальные значения переменных двойственной задачи?
8. Сформулируйте свойства двойственных оценок.
9. Как интерпретировать оптимальные значения основных и дополнительных переменных двойственной задачи?
10. Поясните экономический смысл коэффициентов замещения в последней симплексной таблице.
11. Что означает понятие «устойчивость оптимального решения». Назовите основные направления исследования устойчивости оптимального решения.
12. Сформулируйте условия допустимых изменений коэффициентов целевой функции, при которых сохраняется оптимальный производственный план.
13. Как определить интервалы допустимых изменений объёмов ресурсов, при которых сохраняется базис оптимального производственного плана?

14. Как установить интервалы допустимых изменений технико-экономических коэффициентов при основных небазисных переменных?

15. Как определяется предел введения в базис основной небазисной переменной?

16. Как решить вопрос о целесообразности включения в модель исходной задачи нового типа продукции?

17. Как решить вопрос о целесообразности включения в модель исходной задачи нового ограничения по ресурсам?

УПРАЖНЕНИЯ

Фирма выпускает продукцию *A*, *B*, *C*, *D*, используя для её производства три вида ресурсов в количестве соответственно *260*, *400*, *240* единиц. Расход каждого ресурса на единицу выпускаемой продукции и цена единицы каждого вида продукции заданы таблицей:

Виды ресурсов	Расход ресурсов на производство единицы продукции				Объёмы ресурсов
	A	*B*	*C*	*D*	
1	*2*	*1*	*3*	*1*	*260*
2	*1*	*2*	*1*	*2*	*400*
3	*2*	*0*	*1*	*2*	*240*
Цена единицы продукции, д.е.	*1*	*4*	*2*	*5*	

Требуется:

1. Определить план выпуска продукции, обеспечивающий фирме максимальную выручку от реализации продукции.

2. Построить двойственную задачу и дать её экономическую интерпретацию.

3. Проанализировать оптимальные значения переменных прямой и двойственной задач.

4. Исследовать устойчивость оптимального решения к изменению:

а) цен на продукцию;

б) запасов ресурсов,

в) технико-экономических коэффициентов.

5. Оценить целесообразность введения в модель пятого вида продукции, нормы затрат ресурсов на единицу которого равны *3*, *2*, *4* ед. соответственно, а цена изделия составляет *9* д.е.

6. Оценить целесообразность включения в модель ограничения по использованию четвёртого вида ресурсов. Нормы затрат четвёртого ресурса на единицу каждого вида продукции равны *1*, *2*, *8* и *5* ед. соответственно, а запас составляет *500* ед.

4. МНОГОЦЕЛЕВАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ

4.1. Задачи многокритериальной оптимизации

В практической деятельности часто встречаются задачи, заключающиеся поиске лучшего (оптимального) решения при наличии различных несводимых друг к другу критериев оптимальности. Рассмотрим задачу составления производственной программы предприятия в многоцелевой постановке [11, 15].

Задача производственного планирования

Постановка задачи. Предприятие может выпускать продукцию n типов. Для производства изделий необходимы m различных видов ресурсов. Известно: нормы затрат ресурсов при выпуске единицы продукции каждого типа, запасы ресурсов в плановом периоде, а также спрос на продукцию. Эффективность возможных вариантов производственной программы предприятия оценивается совокупностью критериев, каждый из которых характеризует некоторую локальную цель. Например, максимизировать выручку от реализации продукции, максимизировать прибыль от реализации продукции и т. д. Требуется определить план производства продукции, оптимизирующий значения всех локальных критериев эффективности.

Условные обозначения:

n – количество типов продукции $\left(j=\overline{1,n}\right)$,

j – порядковый номер типа продукции $\left(i=\overline{1,m}\right)$,

m – количество видов ресурсов,

i – порядковый номер вида ресурсов,

a_{ij} – расход i-го ресурса при производстве единицы j-го типа продукции,

b_i – запас i-го ресурса,

α_j, β_j – обязательный и максимально возможный объемы производства j-го типа продукции,

k – количество локальных критериев эффективности,

q – порядковый номер локального критерия эффективности.

x_j – планируемое к выпуску количество j-го типа продукции.

Математическая модель задачи.

$$\begin{aligned} &F^1(x) \to opt, \\ &F^2(x) \to opt, \\ &\dots\ \dots\ \dots \quad , \\ &F^k(x) \to opt, \end{aligned} \qquad (4.1)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{i\,j} \cdot x_j \le b_i \; \left(i = \overline{1, m}\right), \\ \alpha_j \le x_j \le \beta_j \; \left(j = \overline{1, n}\right), \end{cases} \tag{4.2}$$

$$x_j \ge 0 \; \left(j = \overline{1, n}\right). \tag{4.3}$$

Очевидно, что одновременное достижение целей по всем частным критериям за счёт выбора единого плана производства продукции невозможно. Обратимся к примеру.

Пример 7. При производстве изделий $П_1$, $П_2$, $П_3$ используются трудовые ресурсы, полуфабрикаты, станочное оборудование. Нормы расхода ресурсов при выпуске единицы продукции каждого типа, запасы ресурсов в плановом периоде, отпускные цены изделий, общая сумма постоянных затрат и условно-переменные затраты на одно изделие представлены в таблице 4.1. На основании информации об условиях, складывающихся на рынке сбыта продукции, установлены максимально возможные объёмы выпуска названных изделий. Также известны минимальные объёмы их производства, необходимые для поддержания ассортимента продукции в фирменном магазине предприятия.

Таблица 4.1

Исходные данные для примера

Производственные и финансовые показатели	Нормы затрат ресурсов при производстве изделия			Запасы ресурсов
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	
Трудовые ресурсы, чел.-нед.	$a_{11}=2$	$a_{12}=0$	$a_{13}=4$	$b_1=360$
Полуфабрикаты, кг	$a_{21}=0$	$a_{22}=2$	$a_{23}=4$	$b_2=480$
Станочное оборудование, станко-смен.	$a_{31}=8$	$a_{32}=4$	$a_{33}=0$	$b_3=1600$
Цена одной штуки, д.е.	$p_1=12$	$p_2=9$	$p_3=12$	
Условно-переменные затраты на одно изделие, д.е.	$c_1=11$	$c_2=7$	$c_3=7$	
Постоянные затраты на выпуск общего количества всех видов продукции, д.е.	$C=38$			
Нижняя граница объема производства, ед.	$\alpha_1=75$	$\alpha_2=0$	$\alpha_3=5$	
Верхняя граница объема производства, ед.	$\beta_1=90$	$\beta_2=220$	$\beta_3=0$	

Требуется составить производственную программу предприятия, используя следующие локальные критерии оптимальности:

1) максимум выручки от реализации продукции – $F^1(x)$,

2) минимум затрат на производство изделий – $F^2(x)$,

3) максимум прибыли от реализации продукции – $F^3(x)$,

4) максимум рентабельности продукции – $F^4(x)$.

1 этап. Используя исходные данные из таблицы 4.1, составим математическую модель задачи.

Пусть x_1 – план по выпуску изделий $П_1$, ед.,

x_2 – план по выпуску изделий $П_2$, ед.,

x_3 – план по выпуску изделий $П_3$, ед.

Тогда структурная модель задачи имеет вид:

$$F^1(x) = p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 \to max, \quad (4.4)$$

$$F^2(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + C \to min, \quad (4.5)$$

$$F^3(x) = (p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3) - (c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + C) \to max, \quad (4.6)$$

$$F^4(x) = \frac{(p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3) - (c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + C)}{c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + C} \to max, \quad (4.7)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \le b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \le b_3, \\ x_1 \ge \alpha_1, \\ x_1 \le \beta_1, \\ x_2 \ge \alpha_2, \\ x_2 \le \beta_2, \\ x_3 \ge \alpha_3, \\ x_3 \le \beta_3, \end{cases} \quad (4.8)$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0. \quad (4.9)$$

Числовая модель задачи:

1. Целевые функции:

1) «Максимум выручки от реализации продукции»:

$$F^1(x) = 12x_1 + 9x_2 + 12x_3 \to max. \quad (4.1')$$

2) «Минимум затрат на производство продукции»:

$$F^2(x) = 11x_1 + 7x_2 + 7x_3 + 38 \to min. \quad (4.2')$$

3) «Максимум прибыли от реализации продукции»:

$$F^3(x) = (12x_1 + 9x_2 + 12x_3) - (11x_1 + 7x_2 + 7x_3 + 38) = \\ = 1x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 38 \to max. \qquad (4.3')$$

4) «Максимум рентабельности продукции»:

$$F^4(x) = \frac{1x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 38}{11x_1 + 7x_2 + 7x_3 + 38} \to max. \qquad (4.4')$$

2. Система ограничений задачи состоит из двух блоков: первый блок включает ограничения по запасу имеющихся ресурсов, а второй блок – ограничения по спросу на все типы продукции. Поскольку ограничения обоих блоков должны выполняться одновременно, они объединены совместной скобой:

$$\begin{cases} 0{,}2x_1 + 0\ x_2 + 0{,}4x_3 \le 36, \\ 0\ x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}4x_3 \le 48, \\ 0{,}8x_1 + 0{,}4x_2 + 0\ x_3 \le 160, \\ x_1 \ge 75, \\ x_1 \le 90, \\ x_2 \ge 0, \\ x_2 \le 220, \\ x_3 \ge 5, \end{cases} \qquad (4.5')$$

3. Условия неотрицательности переменных:

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0. \qquad (4.6')$$

<u>2 этап.</u> Сведём задачу дробно-линейного программирования (определения оптимальной производственной программы предприятия по критерию «максимум рентабельности продукции») к задаче линейного программирования. Алгоритм сведения рассмотрен в главе 2 данного пособия.

После раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых в числителе целевая функция F^4 примет вид:

$$F^4(x) = \frac{d_1x_1 + d_2x_2 + d_3x_3 - C}{c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + C} \to max. \qquad (4.10)$$

Чтобы свести задачу (4.7)-(4.9) к задаче линейного программирования, следует обозначить:

$$c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + C = v, \qquad (4.11)$$

разделить на v ограничения системы (4.8) и уравнение (4.11), а затем ввести новые переменные:

$$y_1 = \frac{x_1}{v},\ y_2 = \frac{x_2}{v},\ y_3 = \frac{x_3}{v},\ y_0 = \frac{1}{v}. \tag{4.12}$$

В результате получим задачу:

$$F(y) = d_1 y_1 + d_2 y_2 + d_3 y_3 - C y_0 \to max, \tag{4.13}$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 - b_1 y_0 \le 0, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 - b_2 y_0 \le 0, \\ a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 - b_3 y_0 \le 0, \\ y_1 - \alpha_1 y_0 \ge 0, \\ y_1 - \beta_1 y_0 \le 0, \\ y_2 - \alpha_2 y_0 \ge 0, \\ y_2 - \beta_2 y_0 \le 0, \\ y_3 - \alpha_3 y_0 \ge 0, \\ y_3 - \beta_3 y_0 \le 0, \\ c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 + C y_0 = 1, \end{cases} \tag{4.14}$$

$$y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0, y_0 > 0. \tag{4.15}$$

Задача (4.13)-(4.15) является задачей линейного программирования, следовательно, её решение можно найти известными методами.

Зная оптимальные значения переменных y_1, y_2, y_3, y_0, нужно рассчитать оптимальные значения переменных исходной задачи по формулам:

$$x_1 = \frac{y_1}{y_0},\ x_2 = \frac{y_2}{y_0},\ x_3 = \frac{y_3}{y_0}. \tag{4.16}$$

В рассмотренном примере задача (4.5′)-(4.7′) является задачей дробно-линейного программирования. Следовательно, её необходимо свести к задаче линейного программирования. Для этого обозначим знаменатель дроби (4.4′) $11x_1 + 7x_2 + 7x_3 + 38 = v$.

Теперь разделим на v целевую функцию (4.4′), каждое из неравенств системы ограничений (4.5′):

$$F^4(x) = \frac{1x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 38}{v} \to max, \quad \text{или} \quad F^4(x) = \frac{1x_1}{v} + \frac{2x_2}{v} + \frac{5x_3}{v} - \frac{38}{v} \to max,$$

$$\begin{cases} \dfrac{0{,}2x_1 + 0\,x_2 + 0{,}4x_3}{v} \le \dfrac{36}{v}, \\ \dfrac{0\,x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}4x_3}{v} \le \dfrac{48}{v}, \\ \dfrac{0{,}8x_1 + 0{,}4x_2 + 0\,x_3}{v} \le \dfrac{160}{v}, \\ \dfrac{x_1}{v} \ge \dfrac{75}{v}, \\ \dfrac{x_1}{v} \le \dfrac{90}{v}, \\ \dfrac{x_2}{v} \ge \dfrac{0}{v}, \\ \dfrac{x_2}{v} \le \dfrac{220}{v}, \\ \dfrac{x_3}{v} \ge \dfrac{5}{v}, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dfrac{0{,}2x_1}{v} + \dfrac{0\,x_2}{v} + \dfrac{0{,}4x_3}{v} \le \dfrac{36}{v}, \\ \dfrac{0\,x_1}{v} + \dfrac{0{,}2x_2}{v} + \dfrac{0{,}4x_3}{v} \le \dfrac{48}{v}, \\ \dfrac{0{,}8x_1}{v} + \dfrac{0{,}4x_2}{v} + \dfrac{0\,x_3}{v} \le \dfrac{160}{v}, \\ \dfrac{x_1}{v} \ge \dfrac{75}{v}, \\ \dfrac{x_1}{v} \le \dfrac{90}{v}, \\ \dfrac{x_2}{v} \ge \dfrac{0}{v}, \\ \dfrac{x_2}{v} \le \dfrac{220}{v}, \\ \dfrac{x_3}{v} \ge \dfrac{5}{v}. \end{cases}$$

Введём новые переменные:

$$y_1 = \frac{x_1}{v},\ y_2 = \frac{x_2}{v},\ y_3 = \frac{x_3}{v},\ y_0 = \frac{1}{v}.$$

В результате получим задачу линейного программирования:

$$F(y) = 1y_1 + 2y_2 + 5y_3 - 38y_0 \to max, \tag{4.7′}$$

$$\begin{cases} 0{,}2y_1 + 0y_2 + 0{,}4y_3 - 36y_0 \le 0, \\ 0y_1 + 0{,}2y_2 + 0{,}4y_3 - 48y_0 \le 0, \\ 0{,}8y_1 + 0{,}4y_2 + 0y_3 - 160y_0 \le 0, \\ y_1 - 75y_0 \ge 0, \\ y_1 - 90y_0 \le 0, \\ y_2 - 0y_0 \ge 0, \\ y_2 - 220y_0 \le 0, \\ y_3 - 5y_0 \ge 0, \\ 11y_1 + 7y_2 + 7y_3 + 38y_0 = 1, \end{cases} \tag{4.8′}$$

$$y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0, y_0 > 0. \tag{4.9′}$$

<u>3 этап.</u> Определим оптимальные варианты производственного плана по каждому из локальных критериев эффективности. Для выполнения расчётов

можно воспользоваться надстройкой «Поиск решения» MS Excel. Подробнее о применении названной надстройки для решения задач линейного программирования изложено в [11].

4 этап. Результаты решения задачи по разным критериям оптимальности запишем в графы 2–5 таблицы 4.2.

Таблица 4.2

Результаты расчётов

Критерии оптимальности / Показатели	Максимум выручки от реализации продукции	Минимум затрат на производство изделий	Максимум прибыли от реализации продукции	Максимум рентабельности продукции
1	**2**	**3**	**4**	**5**
Производство продукции, ед.				
П1	x_1^1	x_1^2	x_1^3	x_1^4
П2	x_2^1	x_2^2	x_2^3	x_2^4
П3	x_3^1	x_3^2	x_3^3	x_3^4
Использование ресурсов				
Трудовые ресурсы, чел.- дни	b_1^1	b_1^2	b_1^3	b_1^4
Полуфабрикаты, кг	b_2^1	b_2^2	b_2^3	b_2^4
Станочное оборудование, станко-смены	b_3^1	b_3^2	b_3^3	b_3^4
Результативные показатели				
Выручка от реализации продукции, д.е.	F_{max}^1	F_2^1	F_3^1	F_4^1
Затраты на производство продукции, д.е	F_1^2	F_{min}^2	F_3^2	F_4^2
Прибыль от реализации продукции, д.е.	F_1^3	F_2^3	F_{max}^3	F_4^3
Рентабельность продукции, %	F_1^4	F_2^4	F_3^4	F_{max}^4

По данным примера 7 получены оптимальные планы производства продукции для каждого из локальных критериев оптимальности (таблица 4.3).

Видим, что оптимальные производственные планы, полученные при решении задачи с разными целевыми функциями, отличаются. Это вполне объяснимо, т.к. некоторые частные критерии оптимальности противоречат друг другу (например, «максимум выручки» и «минимум затрат»), другие действуют в одном направлении («максимум выручки», «максимум прибыли»), третьи – индифферентны, безразличны друг к другу.

Таблица 4.3

Результаты расчётов по данным примера

Критерии оптимальности / Показатели	Максимум выручки от реализации продукции	Минимум затрат на производство изделий	Максимум прибыли от реализации продукции	Максимум рентабельности продукции
1	2	3	4	5
Производство продукции, ед.				
П1	$x_1^1=90$	$x_1^2=75$	$x_1^3=90$	$x_1^4=75$
П2	$x_2^1=220$	$x_2^2=0$	$x_2^3=150$	$x_2^4=135$
П3	$x_3^1=10$	$x_3^2=5$	$x_3^3=45$	$x_3^4=52{,}5$
Использование ресурсов				
Трудовые ресурсы, чел.- дни	$b_1^1=220$	$b_1^2=170$	$b_1^3=360$	$b_1^4=360$
Полуфабрикаты, кг	$b_2^1=480$	$b_2^2=20$	$b_2^3=480$	$b_2^4=480$
Станочное оборудование, ст.-см.	$b_3^1=1600$	$b_3^2=600$	$b_3^3=1320$	$b_3^4=1140$
Результативные показатели				
Выручка от реализации продукции, д.е.	$F_{max}^1=\mathbf{3180}$	$F_2^1=960$	$F_3^1=2970$	$F_4^1=2745$
Затраты на производство продукции, д.е	$F_1^2=2638$	$F_{min}^2=\mathbf{898}$	$F_3^2=2393$	$F_4^2=2175{,}5$
Прибыль от реализации продукции, д.е.	$F_1^3=542$	$F_2^3=62$	$F_{max}^3=\mathbf{577}$	$F_4^3=569{,}5$
Рентабельность продукции, %	$F_1^4=20{,}5$	$F_2^4=6{,}9$	$F_3^4=24{,}1$	$F_{max}^4=\mathbf{26{,}2}$

При необходимости достижения нескольких целей одновременно следует прибегнуть к определённому компромиссу.

4.2. Построение компромиссного плана выпуска продукции

Компромиссное решение многокритериальной задачи – это решение, которое, во-первых, является допустимым и, во-вторых, удовлетворяет принятой схеме компромисса.

Для получения компромиссных решений можно использовать разные **схемы компромисса**, например, минимум максимального отклонения, принцип выделения главного критерия и принцип последовательной уступки.

5 этап. Построим компромиссный производственный план.

Минимум максимального отклонения

Данную схему компромисса можно использовать, если все локальные критерии оптимальности описываются линейными функциями. (Среди рассмотренных ранее частных критериев эффективности линейными являются первые три: максимум выручки от реализации продукции, минимум затрат на производство продукции и максимум прибыли от реализации продукции.)

Пусть $f_1, f_2, \dots, f_s$ – веса *разных* (отличающихся между собой) вариантов производственного плана, полученных при решении задачи с использованием вышеназванных локальных критериев эффективности $(s \le k)$. Причем $f_1 + f_2 + \ldots + f_s = 1$, $f_1 \ge 0$, $f_2 \ge 0$, ... , $f_s \ge 0$.

Тогда $F^1_{max} - \left(F^1_1 \cdot f_1 + F^1_2 \cdot f_2 + \ldots + F^1_s \cdot f_s\right)$ – отклонение выручки от реализации продукции при компромиссном плане от максимальной (д.е.),

$\left(F^2_1 \cdot f_1 + F^2_2 \cdot f_2 + \ldots + F^2_s \cdot f_s\right) - F^2_{min}$ – отклонение затрат на производство продукции при компромиссном плане от минимальных (д.е.),

$F^3_{max} - \left(F^3_1 \cdot f_1 + F^3_2 \cdot f_2 + \ldots + F^3_s \cdot f_s\right)$ – отклонение прибыли от реализации продукции при компромиссном плане от максимальной (д.е.).

Если максимальное из рассмотренных отклонений равно ε $(\varepsilon \ge 0)$, то выполняются условия:

$$\begin{cases} F^1_{max} - \left(F^1_1 \cdot f_1 + F^1_2 \cdot f_2 + \ldots + F^1_s \cdot f_s\right) \le \varepsilon, \\ \left(F^2_1 \cdot f_1 + F^2_2 \cdot f_2 + \ldots + F^2_s \cdot f_s\right) - F^2_{min} \le \varepsilon, \\ F^3_{max} - \left(F^3_1 \cdot f_1 + F^3_2 \cdot f_2 + \ldots + F^3_s \cdot f_s\right) \le \varepsilon. \end{cases} \tag{4.17}$$

Веса $f_1, f_2, \ldots, f_s$ должны быть такими, чтобы ε было минимальным, т.е. $F(f,\ \varepsilon) = \varepsilon \to min$.

Таким образом, имеет место следующая задача линейного программирования:

$$F(f,\ \varepsilon) = \varepsilon \to min, \tag{4.18}$$

$$\begin{cases} F^1_1 \cdot f_1 + F^1_2 \cdot f_2 + \ldots + F^1_s \cdot f_s + \varepsilon \ge F^1_{max}, \\ F^2_1 \cdot f_1 + F^2_2 \cdot f_2 + \ldots + F^2_s \cdot f_s - \varepsilon \le F^2_{min}, \\ F^3_1 \cdot f_1 + F^3_2 \cdot f_2 + \ldots + F^3_s \cdot f_s + \varepsilon \ge F^3_{max}, \\ f_1 + f_2 + \ldots + f_s = 1, \end{cases} \tag{4.19}$$

$$f_1 \ge 0,\ f_2 \ge 0,\ \ldots,\ f_s \ge 0,\ \varepsilon \ge 0. \tag{4.20}$$

Так как использованные при составлении системы ограничений (4.19) экономические показатели разнородны, необходимо нормализовать локальные критерии эффективности. (*Нормализовать критерии* – привести их к единому, желательно безразмерному, масштабу измерения.) Для этого обе части каждого из неравенств системы можно разделить на F^1_{max}, F^2_{min}, F^3_{max} соответственно.

Пусть теперь $f^н_1, f^н_2, \ldots, f^н_s$ – веса различных вариантов производственного плана, а максимальное из относительных отклонений результативных показателей при компромиссном плане от оптимальных значений – $\varepsilon^н$, тогда имеет место следующая задача:

$$F\left(f^н,\ \varepsilon^н\right) = \varepsilon^н \to min, \tag{4.21}$$

$$\begin{cases} \dfrac{F_1^1}{F_{max}^1}\cdot f_1^н + \dfrac{F_2^1}{F_{max}^1}\cdot f_2^н + \ldots + \dfrac{F_s^1}{F_{max}^1}\cdot f_s^н + \varepsilon^н \geq 1, \\ \dfrac{F_1^2}{F_{min}^2}\cdot f_1^н + \dfrac{F_2^2}{F_{min}^2}\cdot f_2^н + \ldots + \dfrac{F_s^2}{F_{min}^2}\cdot f_s^н - \varepsilon^н \leq 1, \\ \dfrac{F_1^3}{F_{max}^3}\cdot f_1^н + \dfrac{F_2^3}{F_{max}^3}\cdot f_2^н + \ldots + \dfrac{F_s^3}{F_{max}^3}\cdot f_s^н + \varepsilon^н \geq 1, \\ f_1^н + f_2^н + \ldots + f_s^н = 1, \end{cases} \qquad (4.22)$$

$$f_1^н \geq 0,\ f_2^н \geq 0,\ \ldots,\ f_s^н \geq 0,\ \varepsilon^н \geq 0. \qquad (4.23)$$

Найдя веса $f_1^н, f_2^н, \ldots, f_s^н$, можно вычислить значения объёмов выпуска изделий при компромиссном плане $\left(x_j^k,\ \ j = 1, 2, 3\right)$:

$$\begin{aligned} x_1^k &= x_1^1\cdot f_1^н + x_1^2\cdot f_2^н + \ldots + x_1^s\cdot f_s^н, \\ x_2^k &= x_2^1\cdot f_1^н + x_2^2\cdot f_2^н + \ldots + x_2^s\cdot f_s^н, \\ x_3^k &= x_3^1\cdot f_1^н + x_3^2\cdot f_2^н + \ldots + x_3^s\cdot f_s^н. \end{aligned} \qquad (4.24)$$

Первый компромиссный план производства, затраты ресурсов и результативные показатели при компромиссном плане занесём в графу 2 таблицы 4.4.

Таблица 4.4

Результаты расчётов для различных схем компромисса

Схема компромисса / Показатели	Минимум максимального отклонения	Принцип выделения главного критерия	Принцип последовательной уступки
1	**2**	**3**	**4**
Производство продукции, ед.			
П1	$x_1^{ком\ 1}$	$x_1^{ком\ 2}$	$x_1^{ком\ 3}$
П2	$x_2^{ком\ 1}$	$x_2^{ком\ 2}$	$x_2^{ком\ 3}$
П3	$x_3^{ком\ 1}$	$x_3^{ком\ 2}$	$x_3^{ком\ 3}$
Использование ресурсов			
Трудовые ресурсы, чел.- дни	$b_1^{ком\ 1}$	$b_1^{ком\ 2}$	$b_1^{ком\ 3}$
Полуфабрикаты, кг	$b_2^{ком\ 1}$	$b_2^{ком\ 2}$	$b_2^{ком\ 3}$
Станочное оборудование, станко-смены	$b_3^{ком\ 1}$	$b_3^{ком\ 2}$	$b_3^{ком\ 3}$
Результативные показатели			
Выручка от реализации продукции, д.е.	$F_{ком\ 1}^1$	$F_{ком\ 2}^1$	$F_{ком\ 3}^1$
Затраты на производство продукции, д.е	$F_{ком\ 1}^2$	$F_{ком\ 2}^2$	$F_{ком\ 3}^2$
Прибыль от реализации продукции, д.е.	$F_{ком\ 1}^3$	$F_{ком\ 2}^3$	$F_{ком\ 3}^3$
Рентабельность продукции, %	$F_{ком\ 1}^4$	$F_{ком\ 2}^4$	$F_{ком\ 3}^4$

В примере 7 найдём компромиссное решение по схеме «минимум максимального отклонения» (таблица 4.5).

Таблица 4.5

Результаты расчётов для различных вариантов оптимального плана производства

Критерии оптимальности / Показатели	Максимум выручки от реализации продукции	Минимум затрат на производство изделий	Максимум прибыли от реализации продукции	Компромиссное решение по схеме минимума максимального отклонения
1	**2**	**3**	**4**	**5**
Производство продукции, ед.				
П1	$x_1^1=90$	$x_1^2=75$	$x_1^3=90$	$x_1^{ком\ 1}=82{,}7$
П2	$x_2^1=220$	$x_2^2=0$	$x_2^3=150$	$x_2^{ком\ 1}=113{,}5$
П3	$x_3^1=10$	$x_3^2=5$	$x_3^3=45$	$x_3^{ком\ 1}=7{,}6$
Использование ресурсов				
Трудовые ресурсы, чел.- дни	$b_1^1=220$	$b_1^2=170$	$b_1^3=360$	$b_1^{ком\ 1}=195{,}8$
Полуфабрикаты, кг	$b_2^1=480$	$b_2^2=20$	$b_2^3=480$	$b_2^{ком\ 1}=257{,}4$
Станочное оборудование, станко-смены	$b_3^1=1600$	$b_3^2=600$	$b_3^3=1320$	$b_3^{ком\ 1}=1116{,}1$
Результативные показатели				
Выручка от реализации продукции, д.е.	$F_{max}^1=\mathbf{3180}$	$F_2^1=960$	$F_3^1=2970$	$F_{ком\ 1}^1=2105{,}7$
Затраты на производство продукции, д.е.	$F_1^2=2638$	$F_{min}^2=\mathbf{898}$	$F_3^2=2393$	$F_{ком\ 1}^2=1796{,}0$
Прибыль от реализации продукции, д.е.	$F_1^3=542$	$F_2^3=62$	$F_{max}^3=\mathbf{577}$	$F_{ком\ 1}^3=309{,}7$
Рентабельность продукции, %	$F_1^4=20{,}5$	$F_2^4=6{,}9$	$F_3^4=24{,}1$	$F_{ком\ 1}^4=17{,}2$

Принцип выделения главного критерия

Из совокупности локальных критериев $F^1(x), F^2(x),\ldots,F^k(x)$ выделяется один, который принимается в качестве главного. К уровням остальных локальных критериев предъявляется требование, чтобы они были не хуже некоторых заданных значений. Например, пусть в задаче (4.4)-(4.9) критерий $F^3(x)$ является главным. Тогда задача (4.4)-(4.9) сводится к задаче:

$$F^3(x)=(p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3)-\\-(c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3+C)\to max, \qquad (4.25)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \le b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \le b_3, \\ x_1 \ge \alpha_1, \\ x_1 \le \beta_1, \\ x_2 \ge \alpha_2, \\ x_2 \le \beta_2, \\ x_3 \ge \alpha_3, \\ x_3 \le \beta_3, \\ p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 \ge F^1_{зад}(x), \\ c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + C \le F^2_{зад}(x), \\ \dfrac{(p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3) - (c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + C)}{c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + C} \ge F^4_{зад}(x), \end{cases} \tag{4.26}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, \tag{4.27}$$

где $F^1_{зад}(x)$, $F^2_{зад}(x)$, $F^4_{зад}(x)$ – заданные значения локальных критериев $F^1(x)$, $F^2(x)$, $F^4(x)$ соответственно.

Второй компромиссный план производства, затраты ресурсов и результативные показатели при компромиссном плане заносятся в графу 3 таблицы 4.4.

Принцип последовательной уступки

Локальные критерии $F^1(x), F^2(x), \ldots, F^k(x)$ располагаются в порядке убывания важности, например, $F^1(x), F^2(x), \ldots, F^k(x)$. Построение компромиссного решения сводится к следующему. Сначала определяется план производства, обеспечивающий оптимум самого важного локального критерия. Затем назначается некоторая «уступка» $\Delta F^1_{max}(x)$, которую мы согласны допустить, чтобы оптимизировать второй по важности локальный критерий. Далее назначается «уступка» в показателе $F^2(x)$, ценой которой можно оптимизировать $F^3(x)$ и т.д. Например, пусть в задаче (4) – (9) локальные критерии располагаются в порядке убывания важности следующим образом: $F^3(x), F^1(x), F^4(x), F^2(x)$. Тогда сначала решается задача (6), (8), (9), т.е. определяется производственный план, при котором будет получена максимальная прибыль от реализации продукции. Затем назначается некоторая «уступка» $\Delta F^3_{max}(x)$, и решается задача по оптимизации локального критерия $F^1(x)$:

$$F^1(x) = p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 \to max\,, \tag{4.28}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \le b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \le b_3, \\ x_1 \ge \alpha_1, \\ x_1 \le \beta_1, \\ x_2 \ge \alpha_2, \\ x_2 \le \beta_2, \\ x_3 \ge \alpha_3, \\ x_3 \le \beta_3, \\ (p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3) - \\ -(c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + C) \ge F^3_{max}(x) - \Delta F^3_{max}(x), \end{cases} \tag{4.29}$$

$$x_1 \ge 0\,, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0\,. \tag{4.30}$$

Далее назначается «уступка» в показателе $F^1(x)$, ценой которой можно максимизировать критерий $F^4(x)$, т.е. решается следующая задача:

$$F^4(x) = \frac{(p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3) - (c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + C)}{c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + C} \to max\,, \tag{4.31}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \le b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \le b_3, \\ x_1 \ge \alpha_1, \\ x_1 \le \beta_1, \\ x_2 \ge \alpha_2, \\ x_2 \le \beta_2, \\ x_3 \ge \alpha_3, \\ x_3 \le \beta_3, \\ (p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3) - \\ -(c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + C) \ge F^3_{max}(x) - \Delta F^3_{max}(x), \\ p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 \ge F^{1'}_{max}(x) - \Delta F^{1'}_{max}(x), \end{cases} \tag{4.32}$$

$$x_1 \ge 0\,, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0\,, \tag{4.33}$$

где $F^{1'}_{max}(x)$ – максимальное значение критерия $F^1(x)$, полученное при решении задачи (4.28) – (4.30),

$\Delta F^{1'}_{max}(x)$ – «уступка», назначенная по критерию $F^1(x)$.

На последнем этапе назначается «уступка» в показателе $F^4(x)$, ценой которой можно минимизировать критерий $F^2(x)$. Таким образом, имеем задачу:

$$F^2(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + C \to min\ , \tag{4.34}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \le b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \le b_3, \\ x_1 \ge \alpha_1, \\ x_1 \le \beta_1, \\ x_2 \ge \alpha_2, \\ x_2 \le \beta_2, \\ x_3 \ge \alpha_3, \\ x_3 \le \beta_3, \\ (p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3) - (c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + C) \ge F^3_{max}(x) - \Delta F^3_{max}(x), \\ p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 \ge F^{1'}_{max}(x) - \Delta F^{1'}_{max}(x), \\ \dfrac{(p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3) - (c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + C)}{c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + C} \ge F^{4'}_{max}(x) - \Delta F^{4'}_{max}(x), \end{cases} \tag{4.35}$$

$$x_1 \ge 0\,, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0\,, \tag{4.36}$$

где $F^{4'}_{max}(x)$ – максимальное значение критерия $F^4(x)$, полученное при решении задачи (4.31) – (4.33),

$\Delta F^{4'}_{max}(x)$ – «уступка», назначенная по критерию $F^4(x)$.

Третий компромиссный план производства, затраты ресурсов и результативные показатели при компромиссном плане заносятся в графу 4 таблицы 4.4.

<u>6 этап.</u> Выбираем план выпуска изделий, принимаемый к реализации.

Все полученные варианты производственного плана следует проанализировать с точки зрения: полноты представленного ассортимента продукции; объёмов использования ресурсов; значений результативных показателей. Сочетание данных параметров позволяет лицу, принимающему решение, осуществить аргументированный выбор плана выпуска изделий.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. В чём сущность задач многоцелевой оптимизации? Приведите примеры многоцелевых задач.
2. Назовите возможные критерии оптимизации производственной программы предприятия.
3. Возможно ли одновременное достижение целей по всем локальным критериям оптимальности за счёт выбора единого плана производства продукции?
4. Всегда ли локальные критерии эффективности противоречат друг другу?
5. Приведите примеры противоречивости локальных критериев.
6. Что означает компромиссное решение?
7. Перечислите известные Вам схемы компромисса.
8. Как построить компромиссное решение по критерию минимума максимального отклонения?
9. Что означает нормализация локальных критериев оптимальности?
10. Каким способом можно нормализовать локальные критерии эффективности?
11. В чём заключается принцип выделения главного критерия?
12. Дайте характеристику метода последовательных уступок.
13. На чём основан выбор производственного плана, принимаемого к реализации?

УПРАЖНЕНИЯ

1. При производстве изделий $П_1$, $П_2$, $П_3$ используются трудовые ресурсы, полуфабрикаты, станочное оборудование. Нормы расхода ресурсов при выпуске единицы продукции каждого типа, запасы ресурсов в плановом периоде, отпускные цены изделий, общая сумма постоянных затрат и условно-переменные затраты на одно изделие представлены в таблице:

Ресурсы	Нормы затрат ресурсов при производстве изделия			Запасы ресурсов
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	
Трудовые, чел.-нед.	*2*	*4*	*6*	*2000*
Полуфабрикаты, кг	*4*	*1*	*2*	*1400*
Станочное оборудование, станко-смен	*2*	*1*	*3*	*800*
Цена одной штуки, д.е.	*40*	*60*	*80*	
Условно-переменные затраты на одно изделие, д.е.	*35*	*50*	*62*	
Постоянные затраты на выпуск общего количества всех видов продукции, д.е.	*500*			

На основании информации об условиях, складывающихся на рынке сбыта продукции, установлены максимально возможные объемы выпуска названных изделий. Также известны минимальные объемы их производства, необходимые для поддержания ассортимента продукции в фирменном магазине предприятия. Данная информация представлена в таблице:

Нижняя граница спроса, ед.			Верхняя граница спроса, ед.		
α_1	α_2	α_3	β_1	β_2	β_3
100	-	25	220	500	-

Требуется составить производственную программу предприятия, используя следующие локальные критерии оптимальности:

а) максимум выручки от реализации продукции – F^1,

б) минимум затрат на производство изделий – F^2,

в) максимум прибыли от реализации продукции – F^3,

г) максимум рентабельности продукции – F^4.

2. При производстве изделий $П_1$, $П_2$, $П_3$ используются трудовые ресурсы, полуфабрикаты, станочное оборудование. Нормы расхода ресурсов при выпуске единицы продукции каждого типа, запасы ресурсов в плановом периоде, отпускные цены изделий, общая сумма постоянных затрат и условно-переменные затраты на одно изделие представлены в таблице:

Ресурсы	Нормы затрат ресурсов при производстве изделия			Запасы ресурсов
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	
Трудовые, чел.-нед.	1	1	1	280
Полуфабрикаты, кг	0	1	1	80
Станочное оборудование, станко-смен	2	1	0	250
Цена одной штуки, д.е.	3	8	6	
Условно-переменные затраты на одно изделие, д.е.	2	5	5	
Постоянные затраты на выпуск общего количества всех видов продукции, д.е.	80			

На основании информации об условиях, складывающихся на рынке сбыта продукции, установлены максимально возможные объемы выпуска названных изделий. Также известны минимальные объемы их производства, необходимые для поддержания ассортимента продукции в фирменном магазине предприятия. Данная информация представлена в таблице:

Нижняя граница спроса, ед.			Верхняя граница спроса, ед.		
α_1	α_2	α_3	β_1	β_2	β_3
95	10	-	125	-	100

Требуется составить производственную программу предприятия, используя следующие локальные критерии оптимальности:

а) максимум выручки от реализации продукции – $F^1(x)$,

б) минимум затрат на производство изделий – $F^2(x)$,

в) максимум прибыли от реализации продукции – $F^3(x)$,

г) максимум использования полуфабрикатов – $F^4(x)$.

3. Решить задачу методом последовательных уступок, если уступка по первому критерию составляет 10% от его оптимального значения.

$$F^1(x) = x_1 + 3x_2 \to max,$$
$$F^2(x) = 40x_1 + 10x_2 \to max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 90, \\ x_1 + x_2 \le 60, \\ x_2 \le 50, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

4. Производство продукции A и B предполагает выполнение двух технологических операций. Время выполнения технологических операций при изготовлении изделия A равно 3 ч., а при изготовлении изделия B – 4 и 5 ч. соответственно. Фонд рабочего времени оборудования, применяемого для выполнения первой операции составляет 18 ч., для второй – 21 ч. Цена единицы продукции A равна 3 д.е., а продукции B – 8 д.е.

Провести анализ работы предприятия с учётом различных целей:

а) максимум прибыли от реализации продукции;

б) максимум выпуска продукции;

в) максимум использования фондов рабочего времени оборудования.

5. Методом последовательных уступок решить оптимизационную задачу:

$$F^1(x) = 2x_1 + 4x_2 \to max,$$

$$F^2(x) = 45x_1 + 15x_2 \to max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 18, \\ x_1 + x_2 \le 15, \\ x_2 \le 8, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Примечание: в задаче критерии пронумерованы в порядке убывания важности. Считается, что уступка по первому критерию составляет 15% от его оптимального значения.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акулич, И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах: учеб. пособие/ И.Л. Акулич. – Москва: Высш. шк, 1986. – 319 с.

2. Бережная, Е. В. Математические методы моделирования экономических систем: учеб. пособие / Е. В. Бережная, В. И. Бережной. – Изд. 2-е, перераб. и доп. – Москва: Финансы и статистика, 2006. – 430 с.

3. Исследование операций в экономике: учеб. пособие / [Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин, М. Н. Фридман]; под ред. Н. Ш. Кремера. – 3-е изд., перераб. и доп. – Москва: Юрайт, 2013. – 438 с.

4. Красс, М. С. Математические методы и модели для магистрантов экономики: учеб. пособие / М. С. Красс, Б. П. Чупрынов. – 2-изд., доп. – Санкт-Петербург [и др.]: Питер, 2010. – 496 с.

5. Покровский, В. В. Математические методы в бизнесе и менеджменте: учеб. пособие / В. В. Покровский. – 2-е изд., испр. – Москва: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. – 109 с.

6. Савиных, В. Н. Математическое моделирование производственного и финансового менеджмента: учеб. пособие / В. Н. Савиных. – Москва: КНОРУС, 2012. – 191 с.

7. Соловьев, В.И. Методы оптимальных решений: учебное пособие / В. И. Соловьёв. – Москва: Финансовый университет, 2012. – 364 с.

8. Федосеев, В. В. Экономико-математические методы и прикладные модели: учебник / В. В. Федосеев, А. Н. Гармаш, И. В. Орлова; под ред. В. В. Федосеева. – 3-е изд., перераб. и доп. – Москва: Юрайт, 2013. – 328 с.

9. Шапкин, А. С. Математические методы и модели исследования операций: учебник/ А. С. Шапкин, Н. П. Мазаева. – 4-е изд. – Москва: Дашков и К, 2007. – 395 с.

10. Методы оптимальных решений в экономике и финансах: учебник / под ред. В. М. Гончаренко, В. Ю. Попова. – 2-е изд. стер. – Москва: КНОРУС, 2014. – 398 с.

11. Анализ вариантов производственной программы предприятия при помощи надстройки «Поиск решения» MS Excel»: лабораторный практикум для студентов очной формы обучения/ сост.: Л.В. Ярыгина, Н.А. Никитина. – Вологда: ВоГТУ, 2013. – 49 с.

12. Математические методы и модели исследования операций в экономике: метод. указания и задания к лаборатор. работам по теме «Нелинейное программирование»: ЭФ: специальность 080116/ сост. Л. В. Ярыгина. – Вологда: ВоГТУ, 2009. – 15 с.

13. Методы оптимальных решений: методические указания к выполнению контрольной работы по теме «Разработка целочисленной программы производства продукции» для студентов заочной формы обучения / [сост.: Н. А. Никитина]. – Вологда: ВоГУ, 2014. – 44 с.

14. Методы оптимальных решений: методические указания к практическим занятиям по теме «Экономико-математический анализ оптимального производственного плана предприятия» для студентов всех форм обучения / [сост.: Н.С. Матвеев, Л.В. Ярыгина]. – Вологда: ВоГУ, 2014. – 20 с.

15. Моделирование производственных систем: методические указания и задания к лабораторным работам по теме «Моделирование производственной программы промышленного предприятия»: ЭФ: специальность 080502/ сост. Л. В. Усов, Л. В. Ярыгина. – Вологда: ВоГТУ, 2008. – 16 с.

16. Теория принятия решений: метод. указания и задания к практическим занятия по теме «Оптимальное оперативно-календарное планирование» для студентов очной формы обучения / [сост.: Л. В. Усов, Л. В. Ярыгина]. – Вологда: ВоГТУ, 2000. – 16 с.

17. Целочисленное программирование: метод. указания для самостоят. работы студентов эконом. специальностей / [сост.: О. В. Авдеева, О. И. Микрюкова]. – Вологда: ВоГТУ, 2007. – 19 с.

Учебное издание

Матвеев Николай Сергеевич, **Никитина** Надежда Анатольевна,
Ярыгина Любовь Васильевна

МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Учебное пособие

Редактор – Л. А. Перерукова
Компьютерная верстка – О. М. Ванчугова

Подписано в печать 26.10.2016 г. Формат 60 × 84/16.
Усл. п. л. 5,75. Тираж экз. Заказ № .

РИО ВоГУ. 160000, г. Вологда, ул. С. Орлова, 6.