РАЗДЕЛ 1. ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Тема 1. Матрицы и определители

План лекции:

1. Матрицы, основные понятия и определения, действия над матрицами.

2. Определители квадратных матриц, их основные свойства.

3. Обратная матрица, теорема ее существования и единственности.

1. Матрицы, основные понятия и определения, действия над матрицами

Матрицы, впервые появившиеся в середине 19-го века в работах английских математиков У. Гамильтона (1805-1865) и А. Кэли (1821-1895), в настоящее время весьма широко используются не только в прикладной математике, но и других науках. Использование математического аппарата матричной алгебры значительно упрощает решение сложных систем уравнений в том числе и с использованием компьютерных технологий.

Определение 1. **Матрицей** размера $m \times n$, называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов. Числа, составляющие матрицу, называются элементами матрицы. Место каждого элемента однозначно определяется номером строки и столбца, на пересечении которых он находится. Элементы матрицы обозначаются a_{ij}, где i- номер строки, а j- номер столбца. Матрицы обычно обозначают заглавными буквами латинского алфавита:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

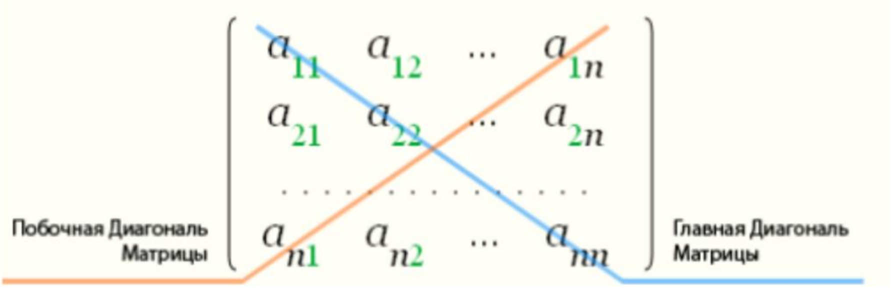
Например, рассмотрим матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 8 \\ 2 & 7 & 1{,}3 \end{pmatrix}$.

Так, у матрицы А – 2 строки и 2 столбца, а матрица В содержит 2 строки и 3 столбца.

Разновидности матриц

- Если у матрицы одинаковое число строк и столбцов, ее называют **квадратной**.

Главной диагональю квадратной матрицы называют элементы, имеющие одинаковые индексы, тоесть те элементы, у которых номер строки совпадает с номером столбца. Это элементы $a_{11}, a_{22}, \ldots$.**Побочная диагональ** идет «перпендикулярно» главной диагонали.



- Матрица называется**прямоугольной**, если количество ее строк не совпадает с количеством столбцов. Например, $B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 8\\ 2 & 7 & 1{,}3\end{pmatrix}$.

- Матрица называется **нулевой**, если все ее элементы нулевые. Например, $O=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

- Квадратная матрица называется **единичной**, если элементы по главной диагонали единицы, а остальные элементы нулевые. Например, $E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ – единичная матрица размера 2 на 2, или, ещё говорят, второго порядка.

- Квадратная матрица называется **диагональной**, если элементы по главной диагонали отличны от нуля, а остальные элементы нулевые. Например, $D=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$ – диагональная матрица.

- Квадратная матрица называется**треугольной**, если все её элементы, которые находятся под главной диагональю или над главной диагональюравны нулю, т.е. матрица вида

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 4 & 5 & 0\\ 7 & -3 & 2\end{pmatrix} \text{или}\, B=\begin{pmatrix}1 & 4 & 5 & 3\\ 0 & -3 & -9 & 8\\ 0 & 0 & 0 & 7\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

- Матрицы, имеющие одинаковое число строк и число столбцов, а также равные соответствующие элементы, называются **равными**.

- Матрица может содержать только один столбец, тогда она называется *матрицей-столбцом*, или только одну строку, тогда она называется *матрицей-строкой:* $C=\begin{pmatrix}1 & -3 & 8 & 2\end{pmatrix}$. Вообще говоря, матрица может состоять даже из одного элемента.

Действия над матрицами

Над матрицами, как и над числами, можно производить ряд операций, причем некоторые из них аналогичны операциям над числами, а некоторые – специфические.

1. Суммой (разностью) двух матриц одинаковой размерности называется матрица, элементы которой равны сумме (разности) соответствующих элементов матриц слагаемых.

Например: $\begin{pmatrix}3 & 1 & -2\\ 2 & 7 & 9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 7 & 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 9 & 7 & 12\end{pmatrix}$.

2.Произведением матрицы на число называется матрица, полученная из данной умножением всех ее элементов на число.

Например: $3\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 4 & 5 & 1\\ 7 & -3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 0 & 6\\ 12 & 15 & 3\\ 21 & -9 & 6\end{pmatrix}$ – все элементы матрицы умножаются на число 3.

3. Умножение матриц. *Умножение матрицы A на матрицу B* определено, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй.

Тогда *произведением матриц*называется такая матрица C , каждый элемент которой c_{ij} равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы *A* на соответствующие элементы j-го столбца матрицы *B*.

Пример 1.1.Пусть $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\\ -2 & 2\end{pmatrix}$. Найти произведение матрицAB.

Решение.*Умножение матрицы A на матрицу B* определено, т.к. число столбцов первой матрицы (3) равно числу строк второй (3). Тогдапроизведение матрицAB примет вид:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\\ -2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 0+0\cdot 1+(-1)\cdot(-2) & 1\cdot(-1)+0\cdot 0+(-1)\cdot 2\\ 2\cdot 0+1\cdot 1+0\cdot(-2) & 2\cdot(-1)+1\cdot 0+0\cdot 2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & -2\end{pmatrix}$$

Отметим, что AB$\neq$BA.

4. Возведение в степень. *Целой положительной степенью* $A^m\left(m>1\right)$ квадратной матрицы *A* называется произведение *m* матриц, равных *A,* т.е. $A^2=A\cdot A,\quad A^3=A\cdot A\cdot A$. Заметим, что операция возведения в степень определяется только для квадратных матриц.

5. Транспонирование матрицы – переход от матрицы *A* к матрице A^T ,в которой строки и столбцы поменялись местами с сохранением порядка. Из определения следует, что если матрица *A* имеет размер $m\times n$, то транспонированная матрица A^T имеет размер $n\times m$.

Например, пусть $A=\begin{pmatrix}1 & -6 & 0\\ 4 & 5 & -1\end{pmatrix}$, тогда

$$A^T=\begin{pmatrix}1 & -6 & 0\\ 4 & 5 & -1\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}1 & 4\\ -6 & 5\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

2. Определители квадратных матриц, их основные свойства

Определитель – число, характеризующее квадратную матрицу. Он определен только для квадратных матриц. Для неквадратных матриц определитель не вычисляется (т.е. не существует).Определитель матрицы А обозначается $|A|$ или Δ, или $det(A)$.

Определителем матрицы первого порядка $A=\left(a_{11}\right)$, или определителем первого порядка, называется элемент $a_{11}:\Delta_1=|A|=a_{11}$.

Под определителем (детерминантом) второго порядка понимается выражение

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}. \quad (1.1)$$

<u>Пример 1.2.</u> Вычислить матрицы $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$.

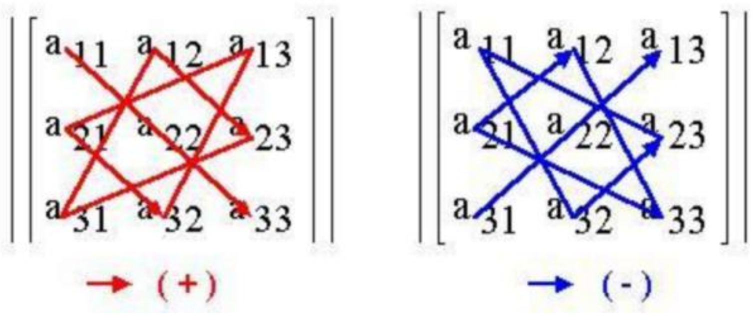
Решение. По формуле (1.1):$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}=2\cdot 4-6\cdot 5=8-30=-22$.

Под определителем третьего порядка понимается выражение

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \quad (1.2)$$

где определители второго порядка, расположенные в правой части формулы (1.2), вычисляются по правилу, определяемому формулой (1.1).

Однако определитель третьего порядка Δ_3 можно вычислить и по *правилу треугольников (правилу Саррюса)*:



Обратите внимание, что на двух картинках изображены либо прямые, либо равнобедренныетреугольники. Слева нарисована главная диагональ матрицы и два треугольника, основания которыхпараллельны главной диагонали. Справа нарисована побочная диагональ матрицы и два треугольника,основания которых параллельны побочной диагонали. Каждая прямая или треугольник «закрашивает»по три элемента матрицы.Все три элемента, которые «закрашены» одной прямой или треугольником, надо перемножить.

Получится шесть произведений. Те из них, которые относятся к левой картинке (связаны с главнойдиагональю), надо взять так, как они и получились. Те, которые относятся к правой картинке (связаны спобочной диагональю), надо взять с обратным знаком (то есть, домножить на –1). А потом всепроизведения надо сложить.

$$\Delta_3 = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - \left(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{23}a_{32}a_{11}\right).\quad(1.3)$$

Например,

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 6 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot6\cdot1 + 2\cdot5\cdot2 + 4\cdot(-1)\cdot(-3) - \left((-3)\cdot6\cdot2 + 2\cdot4\cdot1 + 5\cdot(-1)\cdot1\right) = 71.$$

На практике при вычислении определителей высоких порядков используют другие формулы. Для их рассмотрения необходимо ввести новые понятия.

<u>Определение 2.</u>Минором M_{ij} элемента a_{ij} матрицы A n-го порядка называется определитель матрицы $(n-1)$ – го порядка, полученный из матрицы A вычеркиванием i –й строки и j – го столбца.

<u>Определение 3.</u>Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} матрицы n-го порядка, называется его минор, взятый со знаком плюс, если сумма номеров его строки и его столбца $(i+j)$есть число четное, и со знаком минус, если эта сумма есть число нечетное, т.е

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij.}\quad(1.4)$$

Важное значение для вычисления определителей высоких порядков имеет следующая теорема.

Теорема Лапласа (теорема разложения). Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов любой строки (или столбца) на их алгебраические дополнения.

Замечание 1. При вычислении определителя обычно используют ряд, содержащий наибольшее число элементов, равных нулю. Если таковых нет, или несколько рядов содержит равное число нулей, то подходит любой из этих рядов.

Замечание 2. Определения миноров, алгебраических дополнений и теорема Лапласа применимы к определителям любого порядка.

Пример 1.3. Вычислить определитель матрицы 4-го порядка

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Решение. Воспользовавшись теоремой Лапласа, разложить определитель можно по любой строке (или столбцу). Однако объем вычислений значительно уменьшится, если выбрать вторую строку, так как она содержит два элемента равных нулю. Разложение по ней определителя имеет вид:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot A_{21} + 3 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{23} + 2 \cdot A_{24}.$$

Вычислим необходимыеалгебраические дополнения по формуле (1.4):

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 2 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 14 + 48 - (126 + 2 + 8) = -71;$$

$$A_{24}=(-1)^{2+4}\begin{vmatrix}1&2&4\\2&4&3\\6&3&1\end{vmatrix}=4+24+36-(48+9+4)=3.$$

Тогда $\Delta_4=3\cdot A_{22}+2\cdot A_{24}=3\cdot(-71)+2\cdot 2=-207$.

Основные свойства определителей:

1. Значение определителя не изменится при транспонировании матриц.

2. При перестановке двух строк или столбцов определитель меняет знак на противоположный.

3. Определитель равен нулю, если: все элементы любой строки (или столбца) равны нулю; элементы любых двух строк (или столбца)пропорциональными либо равны.

4.Определитель не изменится, если к элементам какой-либо строки (столбца) матрицы прибавить элементы другой строки (столбца), предварительно умноженные на число, отличное от нуля.

3. Обратная матрица, теорема ее существования и единственности

Для каждого числа $a\neq 0$ существует обратное число a^{-1} такое, что произведение $a\cdot a^{-1}=1$. Для квадратных матриц тоже вводится аналогичное понятие.

Определение 4. *Матрица A^{-1} называется* ***обратной по отношению к квадратной матрице*** *A, если при умножении этой матрицы на данную как справа, так и слева получается единичная матрица:*

$$A^{-1}\cdot A=A\cdot A^{-1}=E.$$

Из определения следует, что только квадратная матрица имеет обратную; в этом случае и обратная матрица является квадратной того же порядка.

Однако не каждая квадратная матрица имеет обратную. Если $a\neq 0$ является необходимым и достаточным условием существования обратного числа $\frac{1}{a} = a^{-1}$, то для существования обратной матрицы A^{-1} таким условием является требование $|A| \neq 0$.

Если определитель матрицы отличен от нуля, то такая квадратная матрица называется *невырожденной;* в противном случае (при $|A| = 0$) – *вырожденной.*

Теорема (необходимое и достаточное условие существования обратной матрицы). Обратная матрица A^{-1}существует (и единственна) тогда и только тогда, когда исходная матрица невырожденная.

Свойства обратных матриц:

1) $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$;   2) $\left(AB\right)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;   3) $\left(A^{T}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{T}$.

Алгоритм нахождения обратной матрицы:

1. Найти определитель $|A|$ и проверить условие: $|A| \neq 0$. Если оно не выполняется, то матрица А не имеет обратной.

2. Вычислить алгебраические дополнения всех элементов матрицы А, т.е. A_{ij}.

3. Составить матрицу A^{*} путем замены в матрице А каждого элемента его алгебраическим дополнением, т.е. a_{ij} заменить на A_{ij}.

4. Записать транспонированную матрицу $\left(A^{*}\right)^{T}$ по отношению к матрице A^{*}.

5. Вычислить обратную матрицу по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \left(A^{*}\right)^{T}. \tag{1.5}$$

Правильность вычисления обратной матрицы можно проверитьпо формуле: $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$, где Е -единичная матрица того же порядка.

<u>Пример 1.4.</u>Найти матрицу, обратную к данной:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}.$$

Решение.

1)Найдём определитель матрицы $|A|=\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1\end{vmatrix}=5$. Так как $|A|\neq 0$, следовательно, обратная матрица A^{-1}существует (и единственна).

2) Вычислим алгебраические дополнения всех элементов матрицы А, используя формулу (1.4):

$$A_{11}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-2;\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-1;\quad A_{13}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=5;$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 3 & 1\end{vmatrix}=5;\quad A_{22}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=0;\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & -2\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-5;$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-3;\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1;\quad A_{33}=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=5.$$

3) Составим матрицу A^{*}путем замены в матрице А каждого элемента его алгебраическим дополнением $A^{*}=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 5\\ 5 & 0 & -5\\ -3 & 1 & 5\end{pmatrix}$

4) Запишем транспонированную матрицу $\left(A^{*}\right)^{T}$ по отношению к матрице A^{*}:

$$\left(A^{*}\right)^{T}=\begin{pmatrix}-2 & 5 & -3\\ -1 & 0 & 1\\ 5 & -5 & 5\end{pmatrix}.$$

5) Вычислим обратную матрицу по формуле (1.5):

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\left(A^{*}\right)^{T}=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 5 & -3\\ -1 & 0 & 1\\ 5 & -5 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{5} & 1 & -\frac{3}{5}\\ -\frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5}\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

Проверим правильность вычисления обратной матрицы:

$$A^{-1}\cdot A=\begin{pmatrix}-\frac{2}{5} & 1 & -\frac{3}{5}\\ -\frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5}\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{5}+2-\frac{3}{5} & \frac{4}{5}+1-\frac{9}{5} & -\frac{2}{5}+1-\frac{3}{5}\\ -\frac{1}{5}+0+\frac{1}{5} & \frac{2}{5}+0+\frac{3}{5} & -\frac{1}{5}+0+\frac{1}{5}\\ 1-2+1 & -2-1+3 & 1-1+1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Итак, в данной теме рассмотрены вопросы:1) матрицы, основные понятия и определения, действия над матрицами; 2) определители квадратных матриц, их основные свойства; 3) обратная матрица, теорема ее существования и единственности. Излагаемый материал проиллюстрирован примерами. При подготовке по данной теме студентам рекомендуется использовать литературные источники [4,5,8] и Интернет-ресурсы [12.14].

Вопросы для самопроверки:

1. Что называется матрицей?

2. Какая матрица называется квадратной? Что понимается под ее порядком?

3. Какая матрица называется диагональной, единичной, нулевой?

4. Какая матрица называется матрицей-строкой и матрицей-столбцом? Привести примеры.

5. Что является суммой (разностью) двух матриц?

6. Как рассчитать произведение двух матриц?

7. Какие действия можно выполнять с матрицами?

8. Что является основной числовой характеристикой квадратной матрицы?

9. Какое число называется определителем 1-го, 2-го и 3-го порядка?

10. Что называется минором и алгебраическим дополнением элемента матрицы?

11. Каковы основные свойства определителей?

12. Как можно вычислить определитель любого порядка?

13. Что называют обратной матрицей?

14. Поясните алгоритм расчета обратной матрицы.

Тема 2. Системы линейных алгебраических уравнений и методы их решения

План лекции:

1. Решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) методом Крамера.
2. Решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) матричным методом.
3. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.

Системы линейных алгебраических уравнений и методы их решения являются важнейшим аспектом рассмотрения в алгебре. Нет такой отрасли науки, где в том или ином виде не использовались бы системы линейных алгебраических уравнений. При решении ряда технических и экономических задач системы линейных уравнений наиболее употребимы как в аппарате исследования, так и при рассмотрении частных проблем. Поэтому рассмотрим основные понятия, связанные с СЛАУ.

Линейными операциями над какими-либо объектами называются их сложение и умножение на число. *Линейной комбинацией* переменных называется результат применения к ним линейных операций, т.е.

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n,$$

где α_i – числа, x_i – переменные.

Линейным алгебраическим уравнением называется уравнение вида

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n = b,$$

где a_i и b – произвольные числа, x_i – неизвестные.

Таким образом, в левой части линейного алгебраического уравнения стоит линейная комбинация неизвестных, а в правой – число.

Линейное уравнение называется **однородным**, если $b = 0$. В противном случае уравнение называется **неоднородным.**

Системой m линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с *n неизвестными* называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}. \qquad (2.1)$$

Здесь a_{ij} , b_i – произвольные числа $(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$, которые называются соответственно *коэффициентами при неизвестных и свободными членами уравнений* (2.1). Первый индекс у коэффициентов при неизвестных означает номер уравнения в системе, второй индекс соответствует номеру неизвестного x_j .

Решением линейной системы (2.1) называется набор чисел: $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, ..., x_n = \alpha_n$, которые при подстановке вместо неизвестных обращают каждое уравнение системы в верное равенство.

Система (2.1) называется **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение, и **несовместной**, если она не имеет решений. Совместная линейная система называется **определенной**, если она имеет единственное решение, и **неопределенной**, если она имеет более одного решения.

Запишем коэффициентов при неизвестных в системе уравнений (2.1) в матрицу А:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \ a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} \ a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} \ a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Эта матрица состоит из m строк и n столбцов и называется *матрицей системы*. Введем в рассмотрение две матрицы-столбца: матрицу неизвестных X и матрицу свободных членов B:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Тогда систему линейных алгебраических уравнений (2.1) можно записать в матричной форме, так как размер матрицы А равен $m \times n$, а размер матрицы X равен $n \times 1$ и , значит, операция произведения для этих дух матриц имеет смысл:

$$A \cdot X = B. \tag{2.2}$$

Произведение матриц $A \cdot X$ является как и B, матрицей-столбцом размером $m \times 1$, состоящей из левых частей уравнений системы (2.1).

Рассмотрим основные методы решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

1. Решение СЛАУ методом Крамера

Данный метод применим только в случае систем линейных уравнений, где число переменных совпадает с числом уравнений. Кроме того, необходимо ввести ограничения на коэффициенты системы. Необходимо, чтобы все уравнения были линейно независимы, т.е. ни одно уравнение не являлось бы линейной комбинацией остальных. Для этого необходимо, чтобы определитель матрицы системы не равнялся 0: $|A| \neq 0$.

Рассмотрим систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{31}z = b_3 \end{cases} \qquad (2.3)$$

Составим определитель матрицы системы:

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

который называется определителем системы, а также дополнительные определители матриц $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, полученных из матрицы А заменой соответственно первого, второго и третьего столбцов столбцом свободных членов:

$$\Delta x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \Delta y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \quad \Delta z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Если определитель матрицы системы $\Delta \neq 0$, то единственное решение системы уравнений (2.3) может быть найдено с помощью формул Крамера:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta} \quad z = \frac{\Delta z}{\Delta}. \qquad (2.4)$$

Замечание. Если $\Delta = 0$, то система уравнений (2.3) или не имеет решений, или имеет бесконечно много решений.

Пример 2.1. Найти решение системы уравнений с помощью формул Крамера:

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}.$$

Решение. Составим и вычислим определитель матрицы системы:

$$\mathit{\Delta}=\begin{vmatrix}5 & -1 & -1\\ 1 & 2 & 3\\ 4 & 3 & 2\end{vmatrix}=5(4-9)+(2-12)-(3-8)=-25-10+5\ =-30\,.$$

Так как $\mathit{\Delta}=-30\neq 0$, следовательно, система имеет единственное решение. Вычислим определители матриц $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, полученных из матрицы А заменой соответственно первого, второго и третьего столбцов столбцом свободных членов:

$$\Delta x=\begin{vmatrix}0 & -1 & -1\\ 14 & 2 & 3\\ 16 & 3 & 2\end{vmatrix}=(28-48)-(42-32)=-20-10=-30;$$

$$\Delta y=\begin{vmatrix}5 & 0 & -1\\ 1 & 14 & 3\\ 4 & 16 & 2\end{vmatrix}=5(28-48)-(16-56)=-100+40=-60;$$

$$\Delta z=\begin{vmatrix}5 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 14\\ 4 & 3 & 16\end{vmatrix}=5(32-42)+(16-56)=-50-40=-90.$$

Теперь, по формулам Крамера (2.4) найдем единственное решение системы:

$$x=\frac{\Delta x}{\Delta}=\frac{-30}{-30}=1;\quad y=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{-60}{-30}=2;\quad z=\frac{\Delta z}{\Delta}=\frac{-90}{-30}=3\,.$$

Ответ: $x=1,\quad y=2,\quad z=3$.

2. Решение СЛАУматричным методом

Матричный метод применим к решению систем уравнений, где число уравнений равно числу неизвестных. Он удобен для решения систем невысокого порядка. Метод основан на применении свойств умножения матриц и нахождения обратной матрицы. Рассмотрим реализацию его на примере системы с тремя неизвестными.

Пусть имеется система уравнений (2.3). Обозначим:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Тогда систему уравнений (2.3) можем записать в матричном виде:

$$A \cdot X = B.$$

Умножим это равенство слева на матрицу A^{-1}:

$$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B.$$

Преобразуем левую часть равенства:

$$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = \left(A^{-1} \cdot A\right) \cdot X = E \cdot X = X.$$

Таким образом, решение системы в матричной форме можно записать в виде:

$$\mathrm{X} = \mathrm{A}^{-1} \cdot \mathrm{B}, \tag{2.5}$$

где A^{-1} – матрица, обратная к матрице А.

Пример 2.2. Решить матричным методом систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

Решение. Обозначим:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Тогда в матричной форме система уравнений имеет вид (2.2): $A \cdot X = B$. Определитель матрицы А:

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4-9) + 1(2-12) - 1(3-8) = -25 - 10 + 5 = -30, \text{ т.е. } |A| \neq 0,$$

следовательно, существует обратная матрица A^{-1}. Для ее нахождения, вычислим алгебраические дополнения всех элементов матрицы А, используя формулу (1.4):

$$A_{11}=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-5;\qquad A_{12}=-\begin{vmatrix}1 & 3\\ 4 & 2\end{vmatrix}=10;\qquad A_{13}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{vmatrix}=-5;$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-1;\qquad A_{22}=\begin{vmatrix}5 & -1\\ 4 & 2\end{vmatrix}=14;\qquad A_{23}=-\begin{vmatrix}5 & -1\\ 4 & 3\end{vmatrix}=-19;$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=-1;\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}5 & -1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-16;\qquad A_{33}=\begin{vmatrix}5 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=11.$$

Составим матрицу A^* путем замены в матрице A каждого элемента его алгебраическим дополнением:

$$A^*=\begin{pmatrix}-5 & 10 & -5\\ -1 & 14 & -19\\ -1 & -16 & 11\end{pmatrix}.$$

Запишем транспонированную матрицу $\left(A^*\right)^T$ по отношению к матрице A^*:

$$\left(A^*\right)^T=\begin{pmatrix}-5 & -1 & -1\\ 10 & 14 & -16\\ -5 & -19 & 11\end{pmatrix}.$$

Вычислим обратную матрицу по формуле(1.5):

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\left(A^*\right)^T=\frac{1}{-30}\cdot\begin{pmatrix}-5 & -1 & -1\\ 10 & 14 & -16\\ -5 & -19 & 11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{30} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30}\\ -\frac{10}{30} & -\frac{14}{30} & \frac{16}{30}\\ \frac{5}{30} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30}\\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15}\\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30}\end{pmatrix}.$$

Теперь, по формуле (2.5) находим матрицу X:

$$X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=A^{-1}\cdot B=\begin{pmatrix}\frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30}\\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15}\\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\ 14\\ 16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{6}\cdot 0+\frac{14}{30}+\frac{16}{30}\\ -\frac{1}{3}\cdot 0-\frac{98}{15}+\frac{128}{15}\\ \frac{1}{6}\cdot 0+\frac{266}{30}-\frac{176}{30}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}.$$

Таким образом, система имеет следующее решение:

$$x=1,\quad y=2,\quad z=3.$$

Ответ: $x = 1, \quad y = 2, \quad z = 3$.

3.Решение СЛАУ методом Гаусса

В отличие от матричного метода и метода Крамера, метод Гаусса может быть применен к системам линейных уравнений с произвольным числом уравнений и неизвестных. Метод Гаусса – метод последовательного исключения переменных – заключается в том, что с помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к равносильной системе ступенчатого (или треугольного) вида, из которой последовательно, начиная с последних по номеру переменных, находятся все остальные.

Методом Гаусса можно решить любую систему уравнений вида (2.1). Для этого составляют расширенную матрицу коэффициентов $(A|B)$, приписывая к матрице А столбец свободных членов:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{l|l} a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n} & b_1 \\ a_{21} \ a_{22} \ \dots \ a_{2n} & b_2 \\ \dots\dots\dots\dots & \dots \\ a_{m1} \ a_{m2} \dots \ a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

Затем расширенную матрицу $(A|B)$ с помощью элементарных преобразований приводят к ступенчатому виду (так называемый прямой ход), далее по полученной матрице выписывают новую систему уравнений и решают ее методом исключения переменных: начиная с последних по номеру переменных находят все остальные (обратный ход).

К **элементарным преобразованиям** относятся:

1) отбрасывание нулевой строки;

2) умножение всех элементов строки на одно и то же число, не равное нулю;

3)изменение порядка строк;

4) прибавление к обеим частям одной строки соответственно обеих частей другой строки.

Замечание. Иногда в результате преобразований в каком-либо из уравнений обращаются в нуль все коэффициенты и правая часть, то есть оно превращается в тождество 0=0. Исключив его из системы, мы уменьшим число уравнений по сравнению с числом неизвестных. Такая система не может иметь единственного решения.

Если же в процессе применения метода Гаусса какое-нибудь уравнение превратится в равенство вида 0=1 (коэффициенты при неизвестных обратились в 0, а правая часть приняла ненулевое значение), то исходная система не имеет решения, так как подобное равенство является неверным при любых значениях неизвестных.

Пример 2.3. Найти решение системы уравненийметодом Гаусса:

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}.$$

Решение. Выпишем расширенную матрицу системы. Необходимо на первом шаге, чтобы $a_{11} \neq 0$, но удобнее для вычислений, чтобы $a_{11} = 1$. Поэтому поменяем местами первую и вторую строки, чтобы $a_{11} = 1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \\ 4 & 3 & 2 & 16 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 5 & -1 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 16 \end{array}\right).$$

Шаг 1. Приведем расширенную матрицу с помощью элементарных преобразований приводят к ступенчатому (треугольному) виду, так чтобы под элементом a_{11} в первом столбце стояли нули. Для этого: 1) умножим элементы первой строки на (-5) и прибавим их к элементам второй строки, 2) умножим элементы первой строки на и (-4) и прибавим их к элементам третей строки:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -11 & -16 & -70 \\ 0 & -5 & -10 & -40 \end{array}\right).$$

Шаг 2. Для обнуления элемента a_{32} умножим все элементы третьей строки на $\left(-\frac{1}{5}\right)$, чтобы упростить вычисления:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -11 & -16 & -70 \\ 0 & -5 & -10 & -40 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -11 & -16 & -70 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \end{array}\right).$$

Теперь для обнуления элемента $a_{32} = 1$ первую и вторую строки оставляем без изменений, а третью умножаем на 11 и складываем со второй, полученный результат записываем в третьей строке:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -11 & -16 & -70 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -11 & -16 & -70 \\ 0 & 0 & 6 & 18 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & 11 & 16 & 70 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Расширенная матрица приведена к ступенчатому виду. Соответствующая ей система имеет вид:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ 11y + 16z = 70 \\ z = 3 \end{cases}.$$

Из последнего уравнения видно, что $z = 3$;

из второго: $11y = 70 - 16z = 70 - 16 \cdot 3 = 22; \quad y = 22 : 11 = 2$;

из первого: $x = 14 - 3z - 2y = 14 - 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = 1$.

Ответ: $x = 1, \quad y = 2, \quad z = 3$.

Итак, в данной теме рассмотрены основы систем линейных алгебраических уравнений и методы их решения: Крамера, матричный (метод обратной матрицы), Гаусса. Излагаемый материал проиллюстрирован примерами. При подготовке по данной теме студентам рекомендуется использовать литературные источники [4,5,8] и Интернет-ресурсы [12.14].

Вопросы для самопроверки:

1. Что представляет собой система линейных алгебраических уравнений?

2. Что называется решением системы m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными?

3. Дать определения совместной и несовместной систем уравнений.

4. Как выглядит запись системы линейных уравнений и ее решение в матричной форме?

5. Сформулировать правило Крамера для решения системы n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными.

6. При каких условиях система трех линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными: а) имеет единственное решение; б) не имеет решений; в) имеет бесконечное множество решений?

7. В чем состоит сущность метода Гаусса для решения системы линейных алгебраических уравнений?

8. В чем состоит суть матричного метода для решения системы трех линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными?

9. Что такое элементарные преобразования матрицы? В чем состоит их польза?

10. Оцените достоинства и недостатки матричного метода, правила Крамера и метода Гаусса для решения систем линейных алгебраических уравнений.

РАЗДЕЛ 2. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

Тема 3. Функция действительной переменной

План лекции:

1. Понятие множества, операции над множествами. Числовые множества.
2. Абсолютная величина действительного числа, ее основные свойства.
3. Понятие функции как соответствия между двумя множествами.Основные свойства функций.
4. Основные элементарные функции.

1. Понятие множества, операции над множествами. Числовые множества

Благодаря высокой степени обобщения теория множествстала в настоящее время признанной основой дляпостроения математических теорий и моделей, описывающих реальные процессы. Дело в том, что теория множеств – это своего рода математический язык. Без него трудно заниматься математикой, порой даже невозможно объяснить, о чем вообще идет речь.Итак, понятие множества принадлежит к числу исходных математических понятий: оно строго не определено, но можетбыть пояснено на примерах. Так, можно говорить о множестве учащихся одного выпуска, множестве всех книг, составляющих данную библиотеку, множестве всех точек данной прямой, множестве всех решений данного уравнения.

Под *множеством* понимают совокупность некоторых объектов, объединенных по какому либо признаку. Объекты, из которых состоит множество, называются его *элементами*. Множество принято обозначать заглавными буквами латинского алфавита: A, B, $X\ldots$, а их элементы – малыми буквами$a,b,\ldots,x$. Если элемент принадлежит множеству X, то пишут $x\in X$ и $x\notin X$ в случае, если элемент не принадлежит множеству X.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым*, его обозначают $\varnothing$.

Множество можно задать либо перечислением его элементов, либо указанием правила по которому элементы объединены в данное множество. Например, множество студентов СКФУ.

Множество А называется *подмножеством* множества В, если каждый элемент множества А является элементом множества В (обозначается $A \subset B$). Множества, состоящие из одних и тех же элементов, называются *равными* (обозначается $A = B$).

Операции над множествами

1. **Объединением** множеств А и В (обозначается $A \cup B$) называется множество, состоящее из элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из множеств. Кратко можно записать следующим образом: $A \cup B = \{x : x \in A \text{ или } x \in B\}$.

Геометрическое изображение множеств в виде области на плоскости называется диаграммой Эйлера – Венна.

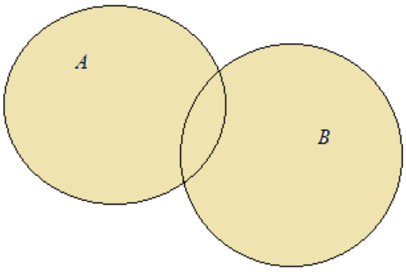


Рисунок3.1 – Объединение множеств А и В

2. **Пересечением** множеств А и В (обозначается $A \cap B$) называется множество, состоящее из элементов, каждый из которых одновременно принадлежит и множеству А и множеству В. Кратко: $A \cap B = \{x : x \in A \text{ и } x \in B\}$.

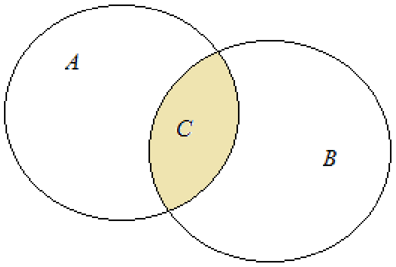


Рисунок 3.2 – Пересечение множеств А и В

3. **Разностью**множеств А и В (обозначается $A \setminus B$) называется множество, состоящее из элементов, каждый из которых принадлежит множеству А и не принадлежит множеству В. Кратко: $A \setminus B = \{x : x \in A \text{ и } x \notin B\}$.

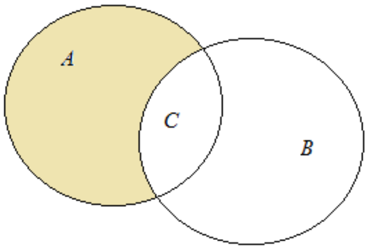


Рисунок 3.3 – Разность множеств А и В

В дальнейшем при изложении курса математики будем использовать следующие символы:

$a \Rightarrow b$ – a влечет b;

$a \Leftrightarrow b$ – a и bравносильны;

$\forall$ – «для всякого», «для любого»;

$\exists$ – «существует», «найдется»;

: – «такое что».

Числовые множества

Множества, которые состоят из чисел, называются **числовыми**. Из курса школьной математики известны следующие числовые множества:

Множество **натуральных** чисел $\mathrm{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ – числа счета.

Множество **целых** чисел $\mathrm{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ – содержит натуральные, отрицательные числа и нуль.

Множество **рациональных** чисел Q - множество чисел вида $\frac{p}{q}$, где $p \in Z,\ q \in N$, рациональные числа представимы *конечными десятичными* дробями или *десятичными бесконечными периодическими* дробями.

Множество **иррациональных** чисел J – *бесконечные непериодические* десятичные дроби (например, $\sqrt{2},\ \pi$ и др.).

Множество **действительных** чисел R включает в себя все предыдущие множества, то есть $R = Q + J$ **.**

Множество **комплексных** чисел $C = R + Ri,\ i^2 = -1$– мнимая единица.

Комплексным числомzназывается выражение вида

$$z = x + iy,$$

где x и y – действительные числа, а i –мнимая единица, удовлетворяющая условию $i^2 = -1$. Числа x и y называется соответственно ***действительной и мнимой частями*** комплексного числаz и обозначаются $x = \operatorname{Re} z,\ y = \operatorname{Im} z$.Если $x = 0$, то число $0 + iy = iy$ называется чисто мнимым; если $y = 0$, то число $x + i \cdot 0 = x$ отождествляется с действительным числом x. Это означает, что множество Rвсех действительных чисел является подмножеством множестваC всех комплексных чисел: $R \subset C$.

Геометрически множество действительных чисел R изображается точками *числовой прямой*, т. е. прямой на которой выбрано начало отсчета, положительное направление и масштабная единица. Каждому действительному числу соответствует определенная точка и наоборот.

Множество $X = \{x\}$, элементы которого удовлетворяют неравенству $a \le x \le b$, называется *отрезком*$[a,b]$.

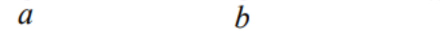


Рисунок 3.4 – Отрезок $[a,b]$

Множество $X=\{x\}$, элементы которого удовлетворяют неравенству $a<x<b$, называется *интервалом* (a,b).

Рисунок 3.5 – Интервал (a,b)

Если $a<x\le b$, то множество называется полуинтервалом $(a,b]$, и если $a\le x<b$, то – *полуинтервалом* $[a,b)$.

Рисунок 3.6 – Полуинтервал $[a,b)$

Существуют бесконечные полуинтервалы $[a,+\infty)$, $(-\infty,b]$ и интервал $(-\infty,+\infty)$.

Окрестностью точки x_0 называется любой интервал (a,b), содержащий точку x_0. В частности интервал $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$, где $\varepsilon>0$ называется $\varepsilon-$ окрестностью точки a ($\varepsilon-$ «эпсилон», буква греческого алфавита).

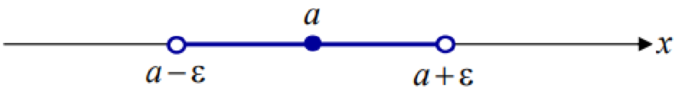


Рисунок 3.7 – $\varepsilon-$ окрестностью точки a

Далее приведем некоторые понятия, которые будут использоваться нами при изложении курса математики.

2.Абсолютная величина действительного числа, ее основные свойства

Определение 1. *Абсолютной величиной* (или модулем) действительного числа x *называется* неотрицательное число $|x|$, определяемое соотношением

$$|x|=\begin{cases} x, \text{ если } x\ge 0,\\ -x, \text{ если } x<0.\end{cases} \qquad (3.1)$$

Здесь фигурная скобка не имеет «системного смысла», модуль неотрицательного действительного числа совпадает с самим числом, тогда как модуль отрицательного числа равен противоположному числу.

Приведем без доказательства следующие свойства абсолютной величины:

1.Модуль есть величина неотрицательная: $|x| \geq 0, \forall x \in R$, а также $-|x| \leq x \leq |x|$.

2. Модули противоположных величин равны: $|-x| = |x|, \forall x \in R$.

3. Неравенство с модулем равносильно двойному неравенству:

$$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a .$$

4 .Геометрически $|x|$ выражает расстояние на числовой прямой от точки 0 до точки x. Соответственно, $|x-a|$ выражает расстояние от точки a до точки x. В частности, $\varepsilon-$окрестность точки x_0 можно описать неравенством

$$|x-x_0| < \varepsilon .$$

5. Модуль суммы не превосходит суммы модулей слагаемых: $|x+y| \leq |x| + |y|$

6. Для любых действительных x и y чисел справедливы выражения:

$|x-y| \geq |x| - |y|$; $\quad |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$; $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$, если $|y| \neq 0$.

3. Понятие функции как соответствия между двумя множествами. Основные свойства функций

Понятие функциональной зависимости (функции) принадлежит к числу первичных математических понятий наряду с уже рассмотренными выше понятиями множества и числа.

Определение 2. Пусть даны два непустых множества X и Y. Закон, по которому каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие один и только один элемент $y \in Y$, называется **функцией** и обозначается $y = f(x)$.

Здесь x – независимая переменная или аргумент, y – зависимая переменная (функция), а буква f – обозначает закон соответствия.

Множество X называется **областью определения** функции обозначается $D(y)$, а множество Y **множеством значений** функции $E(y)$.

Множество X, это множество таких значений x, при которых функция $y = f(x)$ вообще имеет смысл. Например: для функции $y = x^2 + \sqrt{10 - x}$, областью определения является интервал $(-\infty;10]$, так как на нем значение выражения $10 - x \geq 0$.

Графиком функции $y = f(x)$ называют множество точек плоскости Oxy, для каждой их которых x является значением аргумента, а y – соответствующим значением функции.

Способы задания функций:

а) Аналитический способ, если функция задана формулой вида $y = f(x)$, которая указывает какие действия нужно выполнить над аргументом, чтобы получить значения функции. Например, $y = \dfrac{1}{x-2}$, $y = 5x^2 \sin x$.Этот способ наиболее часто встречается на практике.

б) Табличный способ состоит в том, что функция задаётся таблицей, содержащей значения аргумента x и соответствующие значения функции $f(x)$, например таблица логарифмов.

в) Графический способ, если функция представлена на графике – множества точек (x,y) плоскости, абсциссы которых есть значения аргумента x, координаты – соответствующие им значения функции $y = f(x)$.

г) Словесный способ, если функция описывается правилом её составления, Например, каждому рациональному числу поставим в соответствие число 1, а каждому иррациональному числу - число 0. Полученная функция называется функцией Дирихле:

$$y=\begin{cases}1,\ \text{если}\ x\in Q;\\ 0,\ \text{если}\ x\in J.\end{cases}\quad D(y)=R,\ \ E(y)=\{0,1\}.$$

Основные свойства функций

*1. Чётность и нечётность.*Функция $y=f(x)$ называется **чётной**, если для любых значений *x* из области определения:

$$f(-x)=f(x), \tag{3.2}$$

и **нечётной**, если:

$$f(-x)=-f(x). \tag{3.3}$$

В противном случае функция $y=f(x)$ называется функцией общего вида.

Например: 1) $y=x^2$, чётная т.к.$(-x)^2=x^2$ т.е. $f(-x)=f(x)$.

2) $y=x^3$, нечётная, т.к. $(-x)^3=-x^3$ т.е. $f(-x)=-f(x)$.

3) $y=x^3+x^2$ – функция общего вида так как $(-x)^3+(-x)^2\neq x^3+x^2$ и $(-x)^3+(-x)^2\neq-(x^3+x^2)$.

График четной функции симметричен относительно оси Oy, а график нечетной функции центрально симметричен относительно начала координат.

*2. Монотонность.*Функция $y=f(x)$ называется **возрастающей** (***убывающей***) на промежутке *X*, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее (*меньшее*) значение функции.

Функции возрастающие и убывающие на всей области определения называются монотонными функциями.

*3. Ограниченность.*Функция $y=f(x)$ называется **ограниченной** на промежутке X, если существует такое положительное число M, что $\forall x\in X$ выполняется неравенство $|f(x)|\leq M$. В противном случае функция называется **неограниченной**.

Например, функция $y=\sin x$является ограниченной на всей числовой оси, поскольку выполняется условие:$|\sin x|\leq 1$.

4. Периодичность: Функция $y = f(x)$ называется **периодической**, если существует такое число T, что

$$f(x+T) = f(x). \tag{3.4}$$

Например, функция $y=\sin x$ являетсяпериодической, поскольку $y=\sin x=\sin\left(x+2\pi k\right), \quad k\in Z$.Период$T=2\pi$.

4. Основные элементарные функции

Среди огромного числа функций в ходе развития математики была выделена небольшая совокупность сравнительно простых функций, особенно часто встречающихся в самых разнообразных её приложениях и поэтому подвергнутых наиболее подробному исследованию. Их называют основными элементарными функциями.

Основными элементарными функциями называются следующие аналитически заданные функции:

1) степенная функция: $y=x^n$, где $n\in R-$ множеству действительных чисел;

2) показательная функция: $y = a^x$, где $a>0, a\neq 1$;

3) логарифмическая функция: $y=\log_a x$;

4) тригонометрические функции: $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=tg\,x$, $y=ctg\,x$.

5) обратные тригонометрические функции: $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\mathrm{arc\,tg}\,x$, $y=\mathrm{arcctg}\,x$.

Рассмотрим наиболее важные свойства и графики основных элементарных функций.

1.Степенная функция:

а) $y=x^n$**,** $n\in N$

Область определения: $D(y)=(-\infty;+\infty)$.

Область значений: 1) если n – четное, то $E(y)=[0;+\infty)$.

2) если n – нечетное, то $E(y)=(-\infty;+\infty)$.

Чётность, нечётность:1) если n – четное, тофункция – четная;

2) если n – нечетное, то – нечетная.

Монотонность:1) если n – четное, то убывает на $(-\infty;0]$ и возрастаетна $(0;\infty)$;

2) если n – нечетное, то возрастаетна $(-\infty;\infty)$.

Периодичность: непериодическая.

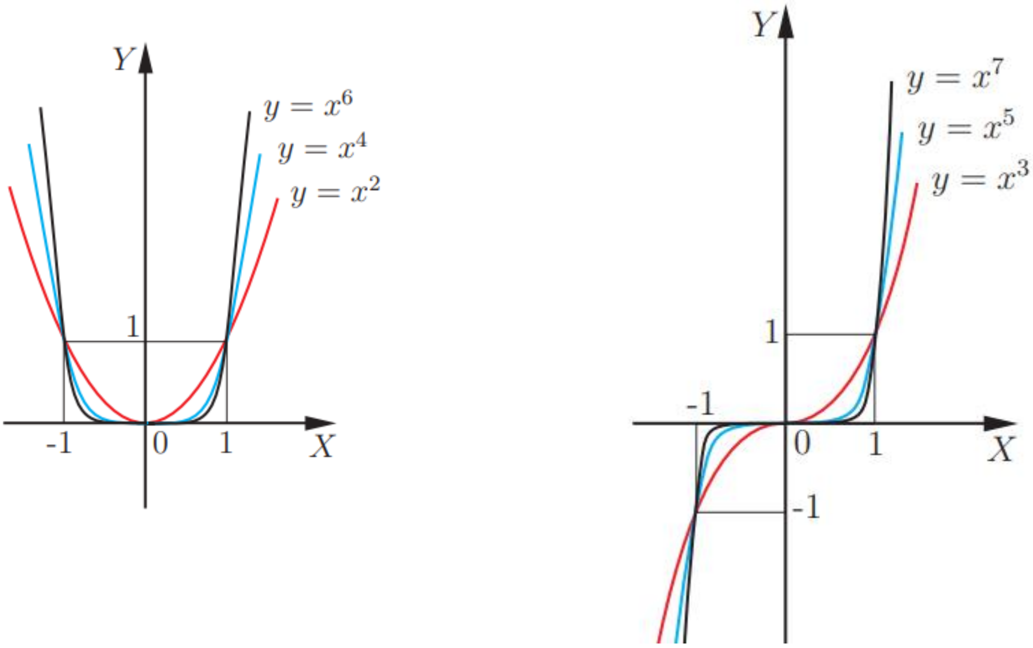


Рисунок 3.8 – Графики степенных функций $y=x^n$, $n\in N$

б) $y=x^{-n}=\dfrac{1}{x^n}$, $n\in N$

Область определения: $D(y)=(-\infty;0)\cup(0;\infty)$.

Область значений:1) если n – четное, то $E(y)=[0;+\infty)$.

2) если n – нечетное, то $E(y)=(-\infty;0)\cup(0;\infty)$.

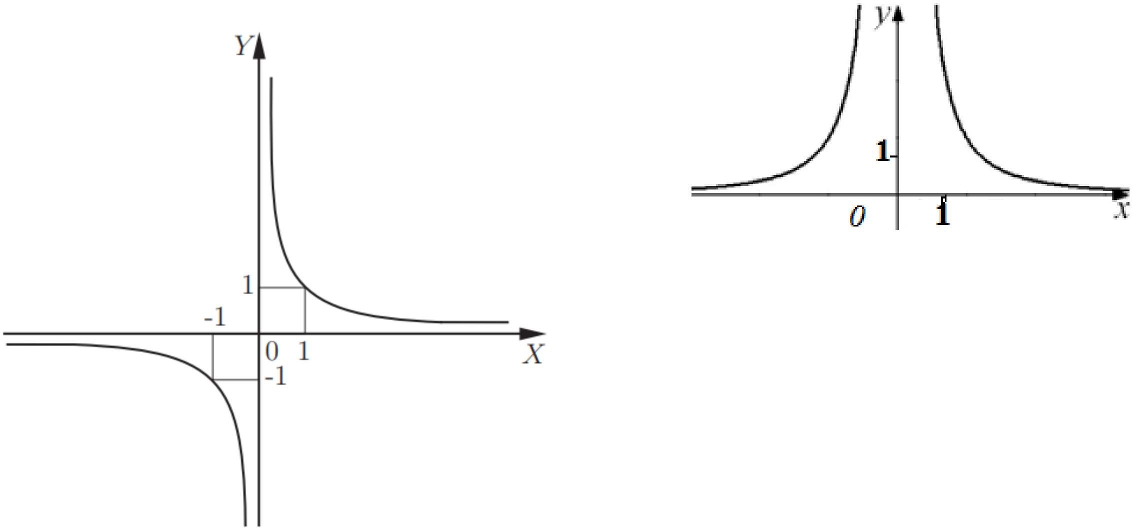
Чётность, нечётность:1) если n – четное, тофункция – четная;

2) если n – нечетное, то – нечетная.

Монотонность:1) если n – четное, товозрастаетна $(-\infty,0]$ и убывает на $(0,\infty)$;

2) если n – нечетное, тоубывает на $(-\infty;0)\cup(0;\infty)$.

Периодичность: непериодическая.



Гипербола $y=\frac{1}{x}$ $\qquad$ $y=\frac{1}{x^2}$

Рисунок 3.9 – Графики степенных функций $y=x^{-n}=\frac{1}{x^n}$**,** $n\in N$

в) $y=\sqrt[n]{x}, n\in N, n>1$

Область определения:1) если n – четное, то $D(y)=[0;+\infty)$.

2) если n – нечетное, то $D(y)=(-\infty;\infty)$.

Область значений:1) если n – четное, то $E(y)=[0;+\infty)$.

2) если n – нечетное, то $E(y)=(-\infty;\infty)$.

Чётность, нечётность:1) если n – четное, тофункция общего вида;

2) если n – нечетное, то – нечетная.

Монотонность:1) если n – четное, товозрастаетна$(0,\infty)$;

2) если n – нечетное, товозрастаетна$(-\infty;\infty)$.

Периодичность: непериодическая.

$y=\sqrt{x}$ $\qquad$ $y=\sqrt[3]{x}$

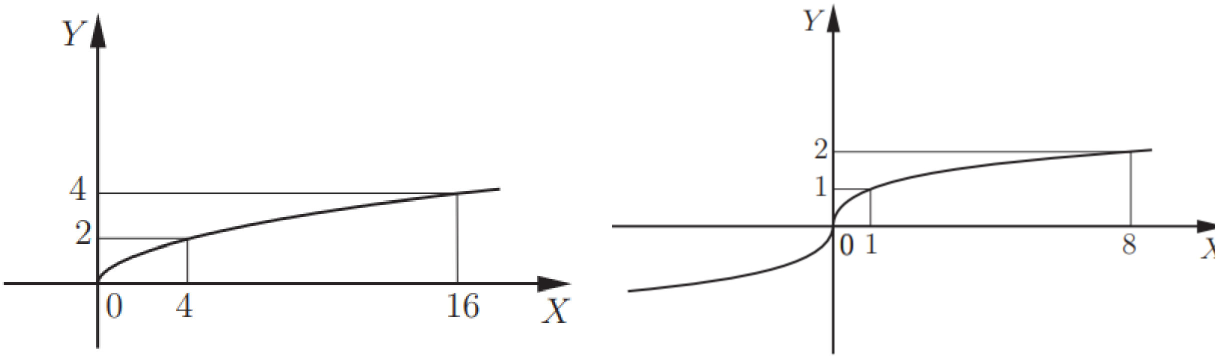


Рисунок 3.10 – Графики степенных функций $y=\sqrt[n]{x}, n\in N, n>1$

2. Показательная функция $y=a^x$, $a>0$, $a\neq 1$

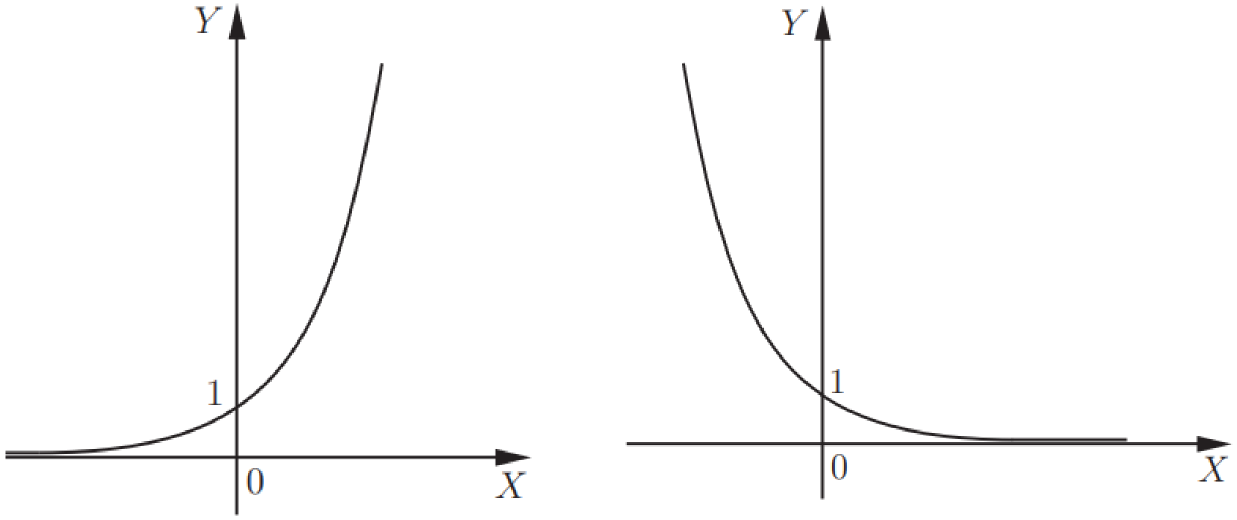
Область определения $D(y)=(-\infty;+\infty)$.

Область значений $E(y)=(0;+\infty)$.

Чётность, нечётность: функция общего вида.

Монотонность: возрастаетна $(-\infty,\infty)$, если $a>1$; убывает на $(-\infty,\infty)$, если $0<a<1$.

Периодичность: непериодическая.



$y=a^x$, $a>1$

$y=a^x, 0<a<1$

Рисунок 3.11 – Графики показательной функции

3. Логарифмическая функция $y=log_a x$, $a>0$, $a\neq 1$

Область определения $D(y)=(0;+\infty)$.

Область значений $E(y)=(-\infty;+\infty)$.

Чётность, нечётность: функция общего вида.

Монотонность: возрастаетна$\left(0,\infty\right)$, если $a>1$; убывает на $\left(0,\infty\right)$, если $0<a<1$.

Периодичность: непериодическая.

$y=log_a x,\ a>1$ $y=log_a x, 0<a<1$

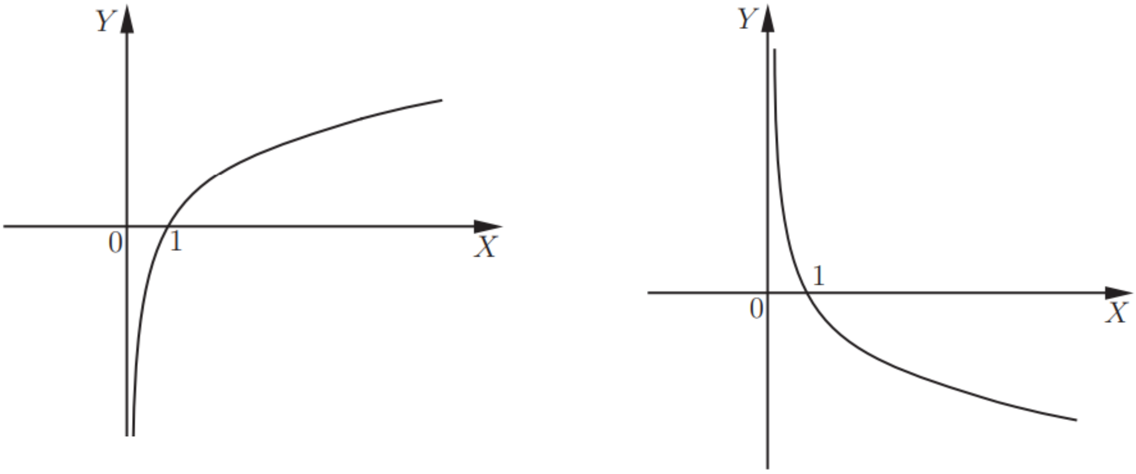


Рисунок 3.12 – Графики логарифмической функции

***4. Тригонометрические функции*:**

а) $y=\sin x$

Область определения $D(y)=(-\infty;+\infty)$.

Область значений $E(y)=[-1;1]$.

Чётность, нечётность: функция нечетная.

Монотонность: возрастаетна$\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi\mathrm{k};\frac{\pi}{2}+2\pi\mathrm{k}\right]$; убывает на $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi\mathrm{k};\frac{3\pi}{2}+2\pi\mathrm{k}\right],\quad k\in Z$.

Периодичность:период$T=2\pi$.

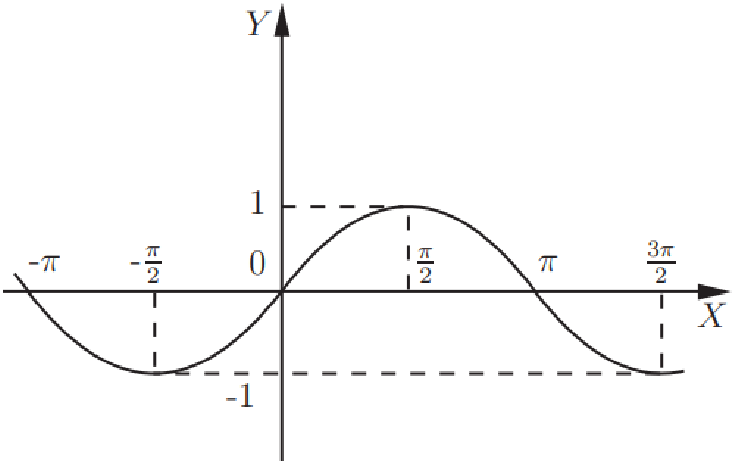


Рисунок 3.13 –График функции $y = \sin x$

б) $y = \cos x$

Область определения $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

Область значений $E(y) = [-1; 1]$.

Чётность, нечётность: функция четная.

Монотонность: возрастаетна$[-\pi + 2\pi k; 2\pi k]$; убывает на$[2\pi k; \pi + 2\pi k]$, $k \in Z$.

Периодичность:период$T = 2\pi$.

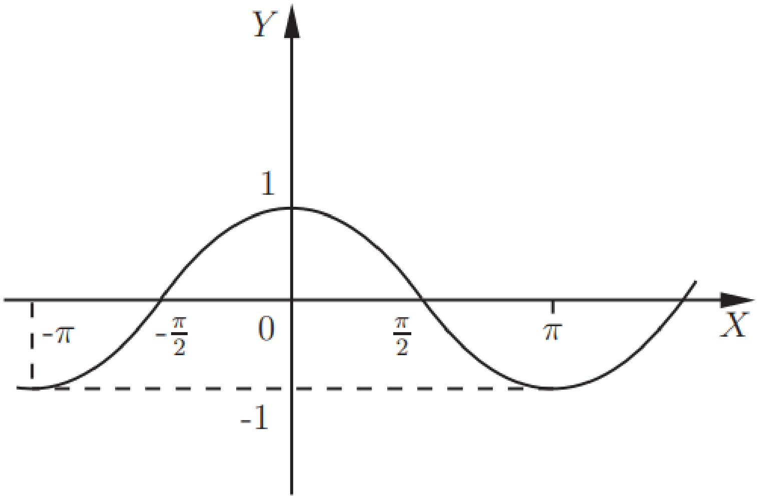


Рисунок 3.14 –График функции $y = \cos x$

в) $y = tg\, x$

Область определения $D(y) = \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in Z$.

Область значений $E(y) = (-\infty; +\infty)$.

Чётность, нечётность: функция нечетная.

Монотонность: возрастаетна всей области определения функции.

Периодичность:период$T = \pi$.

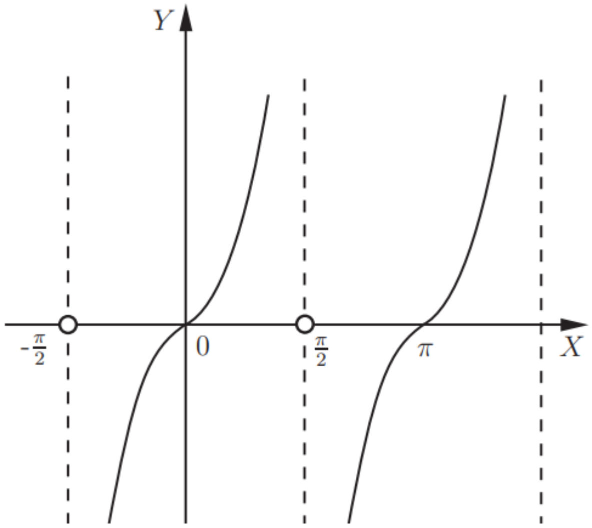


Рисунок 3.15 –График функции $y = tg\, x$

в) $y = ctg\, x$

Область определения $D(y) = (\pi k; \pi + \pi k), \quad k \in Z$.

Область значений $E(y) = (-\infty; +\infty)$.

Чётность, нечётность: функция нечетная.

Монотонность:убывает на всей области определения функции.

Периодичность:период$T = \pi$.

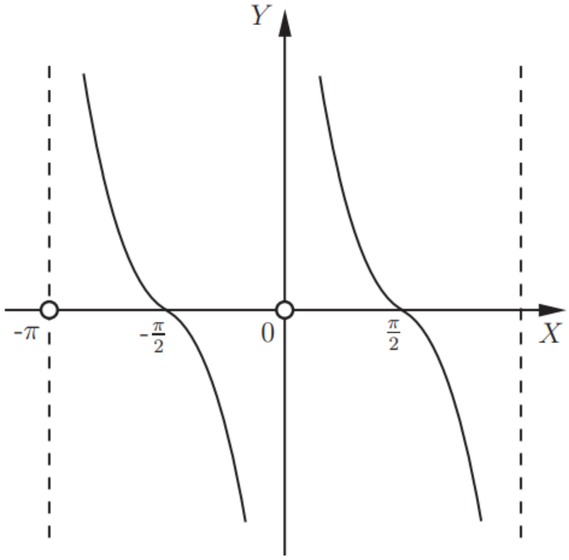


Рисунок 3.16 –График функции $y = ctg\, x$

5. Обратные тригонометрические функции:

а) $y = \arcsin x$

Область определения $D(y) = [-1; 1]$.

Область значений $E(y) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Чётность, нечётность: функция нечетная.

Монотонность:возрастает на всей области определения функции.

Периодичность:непериодическая.

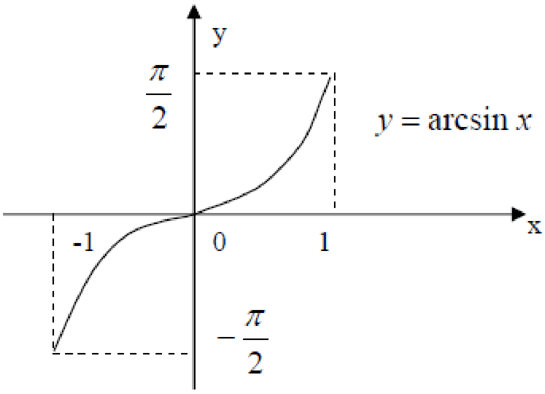


Рисунок 3.17 –График функции $y = \arcsin x$

б) $y = \arccos x$

Область определения $D(y) = [-1; 1]$.

Область значений $E(y) = [0; \pi]$.

Чётность, нечётность: функция общего вида.

Монотонность:убывает на всей области определения функции.

Периодичность:непериодическая.

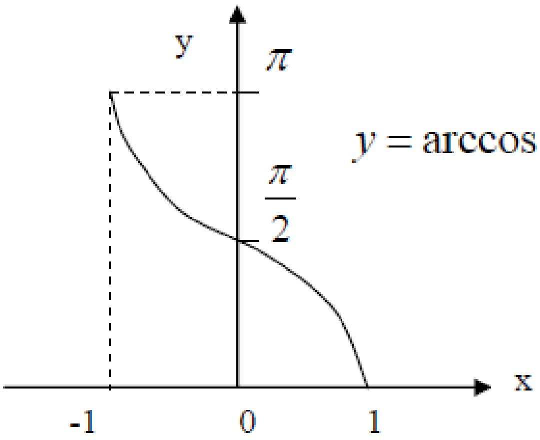


Рисунок 3.18 –График функции $y = \arccos x$

в) $y = \operatorname{arc\,tg} x$

Область определения $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

Область значений $E(y) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Чётность, нечётность: функция нечетная.

Монотонность:возрастает на всей области определения функции.

Периодичность:непериодическая.

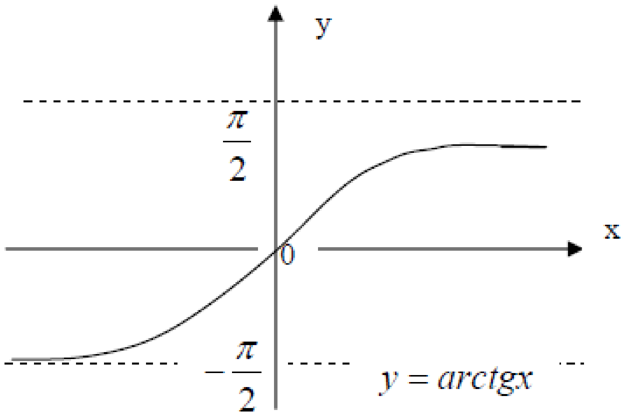


Рисунок 3.19 –График функции $y = \operatorname{arc}\operatorname{tg} x$

в) $y = \operatorname{arcc}\operatorname{tg} x$

Область определения $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

Область значений $E(y) = [0; \pi]$.

Чётность, нечётность: функция общего вида.

Монотонность:убывает на всей области определения функции.

Периодичность:непериодическая.

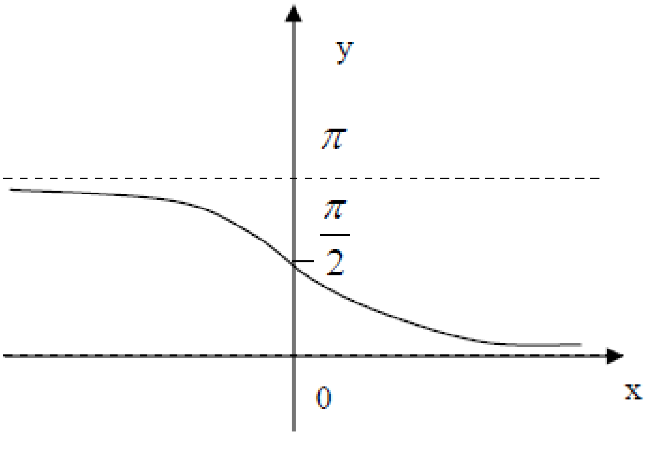


Рисунок 3.20 –График функции $y = \operatorname{arc}\operatorname{tg} x$

Итак, в данной теме рассмотрены вопросы, связанные с основами функции действительной переменной: 1) понятие множества, операции над множествами; числовые множества; окрестность точки; 2) абсолютная величина действительного числа, основные её свойства; 3) понятие функции, основные свойства функций; 4) Основные элементарные функции, их свойства и графики. Излагаемый материал проиллюстрирован примерами и многочисленными графиками. При подготовке по данной теме студентам рекомендуется использовать литературные источники [2,5,7,8] и Интернет-ресурсы [12-15].

Вопросы для самопроверки:

1. Дайте понятие множества. Что называется элементами множества?

2. Раскройте основные операции над множествами.

3.Какие числовые множества Вам известны? Дайте их характеристику.

4.Как геометрически множество действительных чисел R изображается на числовой прямой?

5. Что называют окрестность точки?

6. Дайте понятиеабсолютной величины(или модуля) действительного числа.

7. Перечислитеосновные свойства модуля.

8. Дайтепонятие функции как соответствия между двумя множествами. Раскройте способы задания функций.

9. Раскройте основные свойства функций: четность и нечетность, монотонность, ограниченность, периодичность.

10. Основные элементарные функции и их свойства: степенные функции.

11. Основные свойства и графики показательной функции.

12. Основные свойства и графики логарифмической функции.

13. Основные свойства и графики функции тригонометрических функций.

14. Основные свойства и графики функции обратных тригонометрических функций.

Тема 4. Предел числовой последовательности

План лекции:

1. Числовые последовательности и их основные свойства.

2. Предел числовой последовательности и его геометрическая интерпретация.

3. Основные теоремы о пределах.

4.Вычисление пределов числовых последовательностей. Число *e* и натуральные логарифмы.

1. Числовые последовательности и их основные свойства

Определение 1. Если по некоторому закону каждому натуральному числу n поставлено в соответствие число a_n, то говорят, что задана числовая последовательность. Кратко последовательность обозначается в виде $\{a_n\}, n \in N$, где $\{a_n\}$: $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$.

Числа $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ называют членами последовательности. Значение nбудем называть номером члена a_n, а само число a_n – общим членом или n–м членом последовательности.

Таким образом, числовую последовательность можно определить как функцию порядкового номера элемента $a_n = f(n)$.

Задать последовательность можно различными способами (перечислением элементов, формулой n–го члена, графически) – главное, чтобы был указан способ получения любого члена последовательности. Чаще всего последовательность задается формулой его общего члена. Последовательность, общий член которой записывается в следующем виде:

$$a_n = n^2 + 1, \quad в_n = \frac{1}{n}$$

можно записать следующим образом:

$$a_n = \left\{2,5,10,...,n^2+1,...\right\} \qquad в_n = \left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},...,\frac{1}{n},...\right\}.$$

Так как, числовая последовательность – частный случай числовой функции, поэтому некоторые свойства функций можно перенести и на последовательности.

Последовательность $\{a_n\}$ называется **ограниченной**, если существует такое число $M > 0$, что для любого $n \in N$ верно неравенство:

$$|a_n| < M$$

т.е. все члены последовательности принадлежат промежутку $(-M;M)$. В противном случае последовательность называется неограниченной.

Ограниченная последовательность умещается в некотором «коридоре». Например, последовательность $a_n = \frac{(-1)^n n}{n+1} = \left\{-\frac{1}{2};\frac{2}{3};-\frac{3}{4};\frac{4}{5};\cdots\right\}$ – ограниченная, так как все её члены последовательности принадлежат промежутку $(-1;1)$.

Последовательность $\{a_n\}$ называется **ограниченной сверху**, если для любого $n \in N$ существует такое число $M \in R$, что $a_n \le M$.При этом число М называется **верхней границей** последовательности.

Последовательность $\{a_n\}$ называется **ограниченной снизу**, если для любого $n \in N$ существует такое число $m \in R$, что $a_n \ge m$. При этом число m называется **нижнейграницей** последовательности. Например, последовательность $\left\{a_n\right\} = n = \left\{1,\ 2,\ 3,\ \dots\ \right\}$ – ограничена снизу.

Последовательность $\{a_n\}$ называется **возрастающей** (***убывающей***), если для каждого $n \in N$ выполняется неравенство:

$$a_{n+1} \geq a_n \ (a_{n+1} \leq a_n).$$

Последовательность **монотонная**, если она возрастающая или убывающая.

Если все элементы последовательности равны одному и тому же числу с, то ее называют **постоянной**.

2. Предел числовой последовательности и его геометрическая интерпретация

Определение предела последовательности не является простым. Математическая строгость необходима в тех случаях, когда наличие предела последовательности или его отсутствие не является очевидным и требуется проверка соблюдения условий, чтобы получить определенность.

Определение 2. Число a называется **пределом числовой последовательности** $\{x_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$, (как бы мало оно не было), существует номер *N*, зависящий от ε , что для всех для всех членов последовательности с номерами $n > N$ выполняется неравенство:

$$|x_n - a| < \varepsilon. \tag{4.1}$$

Если последовательность $\{x_n\}$сходится и имеет своим пределом число a, то символически это записывается так: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$. Можно записать определение предела при помощи кванторов:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) : \forall n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon .$$

Если не придерживаться абсолютной математической строгости, то можно сказать, что пределом последовательности называется число, к которому эта последовательность стремится при $n \to \infty$.

Определение 3. Последовательность называется **сходящейся**, если она имеет конечный предел. Последовательность называется **расходящейся**, если она предела не имеет.

Последовательность, имеющая своим пределом нуль $(a=0)$, называется **бесконечно малой последовательностью**.

Неограниченная последовательностьне имеет конечногопредела. Однако она может иметь *бесконечный* предел, что записывается в следующем виде:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty.$$

Если при этом, начиная с некоторого номера, все члены последовательности положительны (отрицательны), то пишут

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \left(\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \right)$$

Теорема. Если $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая последовательность $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, то $\left\{\dfrac{1}{\alpha_n}\right\}$ – бесконечно большая последовательность, имеющая бесконечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\alpha_n} = \infty$, и наоборот.

Выясним **геометрический смысл предела** числовой последовательности. Неравенство (4.1) равносильно неравенству: $|x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, то есть получим интервал $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ – который является ε-окрестностью точки a.

Рисунок 4.1 – ε-окрестность точки a

Если a является пределом последовательности $\{x_n\}$, то, как бы мало ни было $\varepsilon > 0$ все члены последовательности, начиная с некоторого номера, будут попадать в ε-окрестность точки a, а вне этой окрестности может быть, лишь конечное число членов этой последовательности.

Пример 4.1. Пользуясь определением предела числовой последовательности доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2n+1}=\dfrac{1}{2}$.

Решение. Возьмем произвольное положительное число $\varepsilon>0$. Пользуясь определением предела числовой последовательности требуется доказать, что существует такое число $N=N(\varepsilon)$, что при $n>N$ выполняется неравенство $\left|x_n-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$. Составим и решим неравенство: $\left|\dfrac{n}{2n+1}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$.

$$\left|\frac{n}{2n+1}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon\Leftrightarrow\left|\frac{2n-2n-1}{2(2n+1)}\right|<\varepsilon\Leftrightarrow\left|\frac{-1}{2(2n+1)}\right|<\varepsilon.$$

Учитывая, что $n\in N$, т.е. $n>0$ и используя свойства модуля, получим неравенство:

$$\frac{1}{2(2n+1)}<\varepsilon,\text{ откуда } 2(2n+1)\varepsilon>1 \text{ или } 2n+1>\frac{1}{2\varepsilon},\quad 2n>\frac{1}{2\varepsilon}-1\Rightarrow n>\frac{1}{4\varepsilon}-\frac{1}{2}.$$

В качестве числа N можно взять целую часть числа $\dfrac{1}{4\varepsilon}-\dfrac{1}{2}$, то есть $N=\left[\dfrac{1}{4\varepsilon}-\dfrac{1}{2}\right]$. Положив $N=\left[\dfrac{1}{4\varepsilon}-\dfrac{1}{2}\right]$, получим, что для всех $n>N$ справедливо неравенство: $\left|x_n-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$. Это и требовалось доказать.

Зададим $\varepsilon=\dfrac{1}{80}$, тогда $n>\dfrac{1}{4\cdot\frac{1}{80}}-\dfrac{1}{2}=19\dfrac{1}{2}$. Следовательно, начиная с номера $n=20$, будет выполняться неравенство $\left|x_n-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$, то есть $\left|\dfrac{n}{2n+1}-\dfrac{1}{2}\right|<\dfrac{1}{80}$, что означает $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2n+1}=\dfrac{1}{2}$.

С геометрической точки зрения это означает, что вне интервала $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{80},\frac{1}{2}+\frac{1}{80}\right)$ находятся 19 первых членов данной последовательности $x_1, x_2, \dots, x_{19}$, а начиная с двадцатого, все члены последовательности будут попадать в указанный интервал.

3.Основные теоремы о пределах

Теорема 1 (единственность предела). Последовательность не может иметь больше одного предела.

Доказательство. Это следует из того, что последовательность не может одновременно приближаться к двум разным числам одновременно. Формально, выберем ε значительно меньше разницы между числами *A* и *B*.

которого одновременно будут выполнены два условия:

$$\left|x_n - A\right| < \varepsilon \quad \left|x_n - B\right| < \varepsilon \; .$$

Теорема 2. Сумма (разность) сходящихся последовательностей есть сходящаяся последовательность, предел которой равен сумме (разности) пределов последовательностей

$$\lim_{n\to\infty}\left(x_n \pm y_n\right) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n$$

Теорема 3. Произведение сходящихся последовательностей есть сходящаяся последовательность, предел которой равен произведению пределов последовательностей

$$\lim_{n\to\infty}\left(x_n \cdot y_n\right) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n .$$

Следствие: Постоянную можно выносить за знак предела и $\lim\limits_{n\to\infty} cx_n = c\lim\limits_{n\to\infty} x_n, \quad c = const$.

Теорема 4. Частное двух сходящихся последовательностей при условии, что $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$, есть сходящаяся последовательность, предел которой равен частному пределов последовательностей

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}$$

Теорема 5. Если последовательность ограничена и монотонна, то она сходится.

Теорема 6. Если одна последовательность заключена между двумя другими, имеющими одинаковый предел, то она имеет тот же предел.

$$\begin{array}{l} a_n \le b_n \le c_n \\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \\ \lim\limits_{n\to\infty} c_n = A \end{array} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = A$$

Теорема 7. Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную последовательность или на число есть бесконечно малая последовательность.

Теорема 8. Произведение конечного числа бесконечно малых последовательностей есть последовательность бесконечно малая.

4. Вычисление пределов числовых последовательностей.Число*е*и натуральные логарифмы

При вычислении пределов числовых последовательностей часто получаем отношение или разность двух бесконечно больших величин, то есть $\left(\frac{\infty}{\infty}\right),(\infty-\infty)$. Этот предел может быть равен как числу, так и вообще не существовать, то есть равен ∞. В этом случае говорят, что получили неопределенность.

Правило 1. Чтобы раскрыть неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ надо многочлены, стоящие в числителе и знаменателе разделить почленно на *n* в наибольшей степени, а затем применить основные теоремы о пределах последовательности.

Правило 2. Чтобы раскрыть неопределенность вида $(\infty - \infty)$ надо простейшими преобразованиями привести выражение к неопределенности $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, а затем действовать по правилу 1.

Пример 4.2. Найти предел числовых последовательностей:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{35n^4+7n^3-4n+2}{5n^4+3n^2-150n-4}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{25n^4+5n^3-7n+4}{n^5+n-9}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{30-n+8n^2+5n^5}{15n+4n^2+n^3}$.

Решение.

$$\text{а) } \lim_{n\to\infty}\frac{35n^4+7n^3-4n+2}{5n^4+3n^2-150n-4}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{35+\frac{7}{n}-\frac{4}{n^3}+\frac{2}{n^4}}{5+\frac{3}{n^2}-\frac{150}{n^3}-\frac{4}{n^4}}=\frac{35}{5}=7;$$

$$\text{б) } \lim_{n\to\infty}\frac{25n^4+5n^3-7n+4}{n^5+n-9}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{25}{n}+\frac{5}{n^2}-\frac{7}{n^4}+\frac{4}{n^5}}{1+\frac{1}{n^4}-\frac{9}{n^5}}=\frac{0}{1}=0;$$

$$\text{в) } \lim_{n\to\infty}\frac{30-n+8n^2+5n^5}{15n+4n^2+n^3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{30}{n^5}-\frac{1}{n^4}+\frac{8}{n^3}+5}{\frac{15}{n^4}+\frac{4}{n^3}+\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{\underset{0}{\downarrow}}=\infty.$$

Из приведенного решения следует сделать вывод:

- если старшие степени в числителе и знаменателе равны, то предел равен отношению коэффициентов при старших степенях;
- если степень числителя меньше степени знаменателя, то предел равен 0;
- если степень числителя больше степени знаменателя, то предел равен ∞.

Пример 4.3. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n(n-3)}-(n+2))$.

Решение. Избавимся от разности бесконечно больших величин, для этого умножим и разделим на выражение, сопряженное данному, получая при этом разность квадратов:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n(n-3)}-(n+2))(\sqrt{n(n-3)}+(n+2))}{\sqrt{n(n-3)}+n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n(n-3)-(n+2)^2)}{\sqrt{n(n-3)}+2+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-3n-n^2-4n-4}{\sqrt{n(n-3)}+2+n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-7n-4}{\sqrt{n(n-3)}+2+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{-7-\frac{4}{n}}{\sqrt{1-\frac{3}{n}+\frac{2}{n}}+1}=-\frac{7}{2}.$$

Рассмотрим важную последовательность с общим членом $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ и вычислим ее предел. Отметим, что в данном случае имеем неопределенность вида $\left(1^\infty\right)$. Так как основание $\left(1+\frac{1}{n}\right)$ больше единицы, то, казалось бы, последовательность должна быть бесконечно большой, но с другой стороны, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$ и можно было бы ожидать, что искомый предел равен 1. Оказывается, оба противоречащих друг другу предположения неверны, и $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ является числом, отличным от 1. Это число играет важную роль в самых разных вопросах математики, и потому ему присвоено особое обозначение *e*: число Эйлера, неперово число. Таким образом, число *e* определяют следующим равенством: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$. Обоснование такого определения основано на доказательстве существования данного предела. Итак, дадим следующее определение числа *e*.

Определение 4.Числом *e* называется предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$.

Число *e* является иррациональным трансцендентным числом (то есть не алгебраическим, не является корнем никакого алгебраического числа)

e = 2,71628184590, $e\approx 2{,}7,\ldots$ то есть2<*e*<3.

График функции $y=e^x$ получил название экспоненты. Логарифмы, у которых основание *e*, называются натуральными логарифмами и обозначаются *lnx*.

Метод пределов не возник в математике сам собой, он оформился постепенно в результате труда многих математиков, которые начали рассматривать новые для своего времени задачи, не решаемые элементарными методами.

Постепенно накапливался опыт и вырабатывались приёмы решения подобных задач в общей постановке, например задач, когда требовалось определить мгновенную скорость не в данном конкретном движении, а в любом, если только была известна зависимость пути от времени. Это привело к формированию на основе понятия предела новых понятий интеграла и производной, к созданию математического анализа. Очевидно, что с применением метода пределов потребовалось развить способы вычисления пределов, установить правила действий с пределами, т.е. создать теорию пределов. Основным понятием в этой теории стало понятие бесконечно малой – переменной, предел которой равен нулю. В этот период математический анализ назывался анализом бесконечно малых.

Итак, в данной теме рассмотрены вопросы: 1) числовые последовательности и их основные свойства; 2) предел последовательности и его геометрическая интерпретация; 3) основные теоремы о пределах; 4) вычисление пределов числовых последовательностей;число е и натуральные логарифмы. Излагаемый материал проиллюстрирован примерами. При подготовке по данной теме студентам рекомендуется использовать литературные источники [2,5,7,8] и Интернет-ресурсы [12-15].

Вопросы для самопроверки:

1. Дать понятие числовой последовательности. Освятить различные способы задания последовательности.

2. Раскрыть основные свойства числовой последовательности: ограниченность, монотонность.

3. Дать определение предела числовой последовательности.

4. Какая последовательность называется сходящейся (расходящейся)?

5. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности. Теорема о связи между ними.

6. Раскрыть геометрический смысл предела числовой последовательности.

7. Сформулировать основные теоремы о пределах: единственность предела; предел суммы произведения и частного; признак существования предела и др.

8. Вычисление пределов числовых последовательностей при раскрытии неопределенностей вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ или $(\infty-\infty)$.

9. Что называют числом e? Где в математике оно используется?

Тема 5. Предел функции

План лекции:

1.Предел функции в точке и его свойства.

2. Односторонние пределыфункции в точке. Вычисление предела функции в точке.

3. Бесконечно малые и бесконечно большие величины и их свойства.

4. Первый замечательный пределі основные следствия из него. Второй замечательный предел.

1. Предел функции в точке и его свойства

Пусть функция $y=f(x)$ определена на некотором множестве X. Возьмемиз X бесконечную последовательность точек

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \qquad (5.1)$$

сходящуюся к точке a. Причемточкаa может как принадлежать множеству X ($a \in X$), так и не принадлежать ему ($a \notin X$). Соответствующие значения функции в точках этой последовательности также образуют числовую последовательность

$$f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots \quad (5.2)$$

Рассмотрим вопрос о ее сходимости.

В математике существует два определения предела функции:

1) основанное на понятии предела числовой последовательности – определение на языке последовательности (предел функции по Гейне – нем мат. 19 в.);

2) определение носит название «на языке ε-δ» –предел функции по Коши.

<u>Определение 1 (по Гейне).</u>Число A называется ***пределом функции*** $f(x)$ в точке a (или при $x \to a$),если для любой сходящейся к a последовательности (5.1) значений аргумента x $\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a\right)$, *отличных* от *a,* соответствующая последовательность значений функции (5.2) сходится к числу $A \left(\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A\right)$.

В этом случае пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ или $f(x) \to A$ при $x \to a$. Геометрический смысл предела функции: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ означает, что для всех точек x, достаточно близких к точке a, соответствующие значения функции как угодно мало отличаются от А.

<u>Определение 2 (по Коши на языке "$\varepsilon - \delta$").</u> Число A называется ***пределом функции*** $f(x)$ в точке a (или при $x \to a$),если для любого сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$ найдется такое положительное число $\delta > 0$, зависящее от ε (то есть $\delta = \delta(\varepsilon)$), что для всех $x \neq a$, удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$, выполняется неравенство:

$$|f(x) - A| < \varepsilon. \quad (5.3)$$

Это определения коротко можно записать так:

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \forall x : |x - a| < \delta, x \neq a \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon .$$

Геометрический смысл предела функции:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ означает, что из того, что точка x окажется в δ - окрестности точки a, будет следовать, что значение функциииокажется в ε - окрестности точки А. Иными словами, точки графика функции $y=f(x)$ лежат внутри полосы, шириной 2ε, ограниченной прямыми $y=A+\varepsilon$, $y=A-\varepsilon$ (рисунок 5.1). Очевидно, что величина δ зависит от выбора ε, поэтому $\delta=\delta(\varepsilon)$.

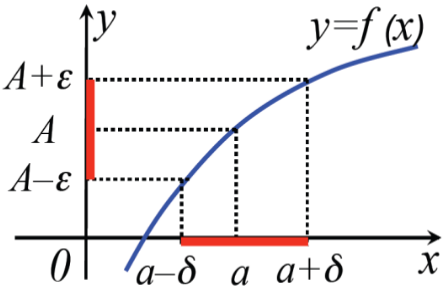


Рисунок 5.1 – Геометрический смысл определения предела функции

Определения предела функций по Коши и по Гейне эквивалентны, поэтому на предел функций в точке переносится все основные теоремы о пределе числовой последовательности:

1) единственность предела;

2) теоремы о пределе алгебраической суммы, произведения и частного. Если существуют $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, то

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right]=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x),$$

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x), \qquad \lim_{x\to a} c\cdot f(x)=c\cdot\lim_{x\to a} f(x)$$

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)},\text{ если } \lim_{x\to a} g(x)\neq 0;$$

3) признаки существования предела.

2. Односторонние пределы функции в точке. Вычисление предела функции в точке

Рассмотрим функцию $y=\frac{1}{x}$ (рисунок 5.2). Если $x\to 1$, то $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x}=\frac{1}{1}=1$. Если $x\to 0$, то $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}=\left(\frac{1}{0}\right)$, следовательно, предела не существует. Посмотрим на то, как ведет себя функция справа от точки нуль, это отмечают так: $x\to 0+0$. Из графика видно, что функция стремится кплюс бесконечности $y\to +\infty$. Слева от точки нуль, отмечают: $x\to 0-0$ функция стремится к минус бесконечности $y\to -\infty$. Бывают и другие случаи, когда способ приближения $x\to a$ существенно сказывается на значении предела функции, поэтому вводят понятия односторонних пределов.

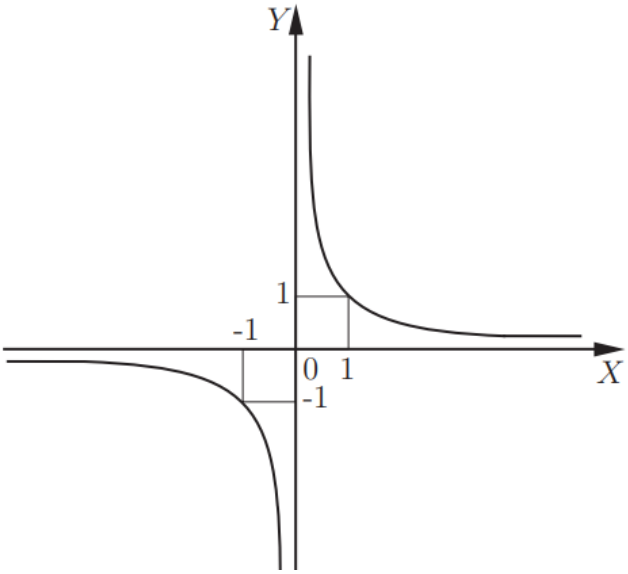


Рисунок 5.2 – График функции $y=\frac{1}{x}$

<u>Определение 3.</u> Если функция $f(x)\to A_1$ при $x\to a$ только при $x<a$, то

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = A_1$$

называется **пределом** функции $f(x)$ в точке $x=a$ **слева**, а если функция $f(x)\to A_2$ при $x\to a$ только при $x>a$, то

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = A_2$$

называется **пределом** функции $f(x)$ в точке $x=a$ **справа**.

Приведенное выше определение относится к случаю, когда функция $f(x)$ не определена в самой точке $x=a$, но определена в некоторой сколь угодно малой окрестности этой точки.

Пределы А$_1$ и А$_2$ называются также **односторонними пределами** функции $f(x)$ в точке $x=a$.

Теорема. Функция $f(x)$ имеет в точке $x=a$ предел $\lim\limits_{x\to a} f\left(x\right)=A$ тогда и только тогда, если в этой точке существуют левый и правый предел, причем они равны $A=A_1=A_2$.

Если же $A_1\neq A_2$, то $\lim\limits_{x\to a} f\left(x\right)$ не существует.

Кроме понятия предела функции в точке, существует также и понятие предела функции при стремлении аргумента к бесконечности. Для обозначения предела функции при $x\to\infty$ используется символ: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\mathrm{A}$.

Для существования предела при $x\to a$ значение функции всамой точке a неважно. Функция может даже не приниматьникакого значения, а ее предел в этой точке существует. На практике при вычислении предела функции при $x\to a$ часто приходится сталкиваться с отношением двух бесконечно малых функций, что является неопределенностью.

<u>**Правило.**</u> Чтобы раскрыть неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ нужно числитель и знаменатель разбить на множители, сократить, а затем применить основные теоремы о пределе.

<u>Пример 5.1</u>. Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to 1}=\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^2-x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x-1\right)^2}{x\left(x-1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x}=\frac{0}{1}=0.$$

<u>Пример 5.2.</u> Найти пределы функции $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{2x^2-5x+2}{3x^2-4x-4}$ при:

а) $a=-1$; б) $a=2$; в) $a=\infty$.

Решение.

а) Подставим в данную функцию предельное значение переменной $a=-1$:

$$\lim_{x\to-1}\frac{2x^2-5x+2}{3x^2-4x-4}=\frac{2(-1)^2-5(-1)+2}{3(-1)^2-4(-1)-4}=\frac{2+5+2}{3+4-4}=\frac{9}{3}=3;$$

б) Подставим в данную функцию $a=2$:

$$\lim_{x\to2}\frac{2x^2-5x+2}{3x^2-4x-4}=\frac{2\cdot2^2-5\cdot2+2}{3\cdot2^2-4\cdot2-4}=\frac{0}{0}.$$

Имеем неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Раскроем ее, разложив числитель и знаменатель на множители, используя формулу:

$ax^2+вx+c=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$, где x_1 и x_2 – корни квадратного трехчлена. Для их нахождения решим квадратное уравнение:

$2x^2-5x+2=0$

$\text{D}=b^2-4ac=25-4\cdot2\cdot2=9$

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{5-\sqrt{9}}{4}=\frac{1}{2}\qquad x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}\frac{5+\sqrt{9}}{4}=2$$

$3x^2-4x-4=0$

$\text{D}=4^2-4\cdot3\cdot\left(-4\right)=64$

$$x_1=\frac{4-\sqrt{64}}{6}=-\frac{2}{3}\qquad x_2=\frac{4+\sqrt{64}}{6}=2$$

Имеем:

$$\lim_{x\to2}\frac{2x^2-5x+2}{3x^2-4x-4}=\lim_{x\to2}\frac{2(x-1/2)(x-2)}{3(x+2/3)(x-2)}=\lim_{x\to2}\frac{2x-1}{3x+2}=\frac{2\cdot2-1}{3\cdot2+2}=\frac{3}{8}.$$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-5x+2}{3x^2-4x-4}=\frac{\infty}{\infty}.$

Подставив предельное значение переменной, получим неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Раскроем ее, разделив числитель и знаменатель дроби на наивысшую степень переменной, входящей в данную функцию, т.е. на x^2:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}}{3-\frac{4}{x}-\frac{4}{x^2}}=\frac{2-\frac{5}{\infty}+\frac{2}{\infty^2}}{3-\frac{4}{\infty}-\frac{4}{\infty^2}}=\frac{2-0-0}{3-0-0}=\frac{2}{3}.$$

Ответ: а) 3; б)3/8; в) 2/3.

3. Бесконечно малые и бесконечно большие величины и их свойства

Функция $\alpha(x)$ называется **бесконечно малой величиной** при $x\to a$ или $x\to\infty$, если ее предел равен нулю, то есть $\lim\limits_{x\to a(\infty)}\alpha(x)=0$.

Бесконечно малой функция может быть, только если указать к какому числу стремится аргумент x. При различных значениях аргумента функция может быть бесконечно малой или нет. Например, функция $f(x)\ =x^n$ является бесконечно малой при $x\to 0$ и не является бесконечно малой при $x\to 1$, т.к. $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=1$.

Теорема (Связь бесконечно малых величин с пределом функции). Если функция $f(x)$ при $x\to a\ (x\to\infty)$ имеет предел, равный А, то ее можно представить в виде суммы этого числа A и бесконечно малой $\alpha(x)$ при $x\to a\ (x\to\infty)$:

$$f(x)\ =A+\alpha(x).$$

Верна и обратная теорема. Если функцию $f(x)$ можно представить как сумму числа A и бесконечно малой $\alpha(x)$ при $x\to a\ (x\to\infty)$, то число A есть предел этой функциипри $x\to a\ (x\to\infty)$: $\lim\limits_{x\to a(\infty)}f(x)=A$

Свойства бесконечно малых величин:

1.Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых величин есть величина бесконечно малая.

2. Произведение бесконечно малой величины на ограниченную функцию (в том числе на постоянную, на другую бесконечно малую функцию) есть бесконечно малая.

3. Частное от деления бесконечно малой величины на функцию, предел которой отличен от нуля, есть величина бесконечно малая.

Бесконечно большой величиной называется переменная величина, абсолютное значение которой неограниченно возрастает

$$\lim_{x\to a(\infty)} f(x) = \pm\infty.$$

Никакая постоянная величина не является бесконечно большой величиной.

Свойства бесконечно больших величин:

1. Произведение бесконечно большой величинойна функцию, предел которой отличен от нуля, есть величина бесконечно большая.

2. Сумма бесконечно большой величины и ограниченной функции есть величина бесконечно большая.

3. Частное от деления бесконечно большой величины на функцию, имеющую предел естьвеличина бесконечно большая.

4. Если функция $\alpha(x)$ есть бесконечно малая величина при $x\to a$ или $x\to\infty$, то функция $\varphi(x)=\dfrac{1}{\alpha(x)}$ является бесконечно большой величиной при $x\to a$ или $x\to\infty$. И обратно, если функция $\varphi(x)$ бесконечно большая величина при $x\to a$ или $x\to\infty$, то функция $\alpha(x)=\dfrac{1}{\varphi(x)}$ – бесконечно малая величина при $x\to a$ или $x\to\infty$.

4. Первый замечательный предел и основные следствия из него. Второй замечательный предел

Первый замечательный пределимеет вид формулы**:**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \qquad (5.4)$$

Он раскрывает неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$. Из первого замечательного предела следует, что:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}=1;$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x\cdot x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1;$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{tgx}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\frac{tgx}{x}}=1;$

4. Рассмотрим предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}$. Положим $t=\arcsin x$, тогда $\sin t=\sin\arcsin x=x$. Если $x\to 0$, то и $t\to 0$. Таким образом получаем, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=1;$$

5.Аналогично можнопоказать, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\arcsin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\arcsin x}{x}}=1;$

$$\lim_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}=1; \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x}{arctgx}=1.$$

Пример 5.3.Найти предел функции $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg3x}{\sin 4x}$.

Решение. Подставим предельное значение аргумента $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg3x}{\sin 4x}=\frac{tg0}{\sin 0}=\frac{0}{0}$; имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Преобразуем функцию под знаком предела для использования I замечательного предела.

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg3x}{\sin 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\cos 3x\sin 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 3x}{3x}3x}{\cos 3x\frac{\sin 4x}{4x}4x}=$$

$$=\frac{3}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 3x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin 4x}{4x}}=\frac{3}{4}\cdot 1\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{1}=\frac{3}{4}.$$

Ответ: 3/4.

Второй замечательный пределимеет вид формулы**:**

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e, \qquad (5.5)$$

где e – число Эйлера.

Рассмотрим примеры нахождения пределов с использованием этой формулы.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{k}{x}\right)^{\frac{x}{k}}\right)^{k}=e^{k}$.

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{5x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1-\frac{3}{5x}\right)^{\frac{-5x}{3}}\right)^{-\frac{3}{5}}=e^{-\frac{3}{5}}=\frac{1}{\sqrt[5]{e^{3}}}$.

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n+2}{3n-1}\right)^{2n+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}$. Преобразуем функцию под знаком предела для использования II замечательного предела. $\frac{3n+2}{3n-1}=\frac{3n-1+3}{3n-1}=1+\frac{3}{3n-1}$.

Имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+2}{3n-1}\right)^{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{3n-1}\right)^{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{3n-1}\right)^{\frac{3n-1}{3}}\right]^{\frac{3}{3n-1}\cdot(2n+1)}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{6n+3}{3n-1}}=e^{2}.$$

Итак, в данной теме рассмотрены основы предела функции:1) предел функции в точке и его свойства; 2) односторонние пределы функции в точке; вычисление предела функции в точке; 3) бесконечно малые и бесконечно большие величины и их свойства; 4) первый замечательный предел и основные следствия из него;второй замечательный предел. Излагаемый материал проиллюстрирован примерами и графиками. При подготовке по данной теме студентам рекомендуется использовать литературные источники [2,5,7,8] и Интернет-ресурсы [12-15].

Вопросы для самопроверки:

1. Сформулируйте определения предела функциипо Гейне («на языке последовательностей»).

2.Сформулируйте определения предела функциипо Коши(«на языке ε-δ»).

3. В чем состоит геометрический смысл предела функции $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$?

4. Перечислите основные свойствапредела функции.

5. Дать понятие односторонних пределов функции в точке.

6. Есть ли связь между односторонними пределами и пределом функции в точке?

7. Как вычислить предел функции в точке?

8. Перечислите основные свойства и приведите примеры бесконечно малых величин.

9. Перечислите основные свойства и приведите примеры бесконечно больших величин.

10. Что называется первым замечательным пределом? Приведите основные следствия из него.

11.Что называется вторым замечательным пределом? Приведите две формы записи второго замечательного предела.

Тема 6: Непрерывность функций

План лекции:

1.Понятие непрерывности функции.

2. Точки разрыва функции и их классификация.

3. Свойства функций, непрерывных в точке.

4. Свойства функций, непрерывных на отрезке.

1. Понятие непрерывности функции

Понятие непрерывности функции, так же как и понятие предела, является основным в математическом анализе. Существует два определения непрерывности функции: на языке пределов и на языке приращений. Мы рассмотрим их, а затем убедимся в их эквивалентности.

Определение 1. Функция $y=f(x)$ называется **непрерывной** в точке x_0, если она удовлетворяет следующим трем условиям:

1) функция $y=f(x)$ определена в точке x_0 (т.е. существует $f(x_0)$);

2) имеет конечный предел при $x\to x_0$;

3) этот предел равен значению функции в этой точке $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Из определения и из того, что $\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0$, следует одно из важных свойств:

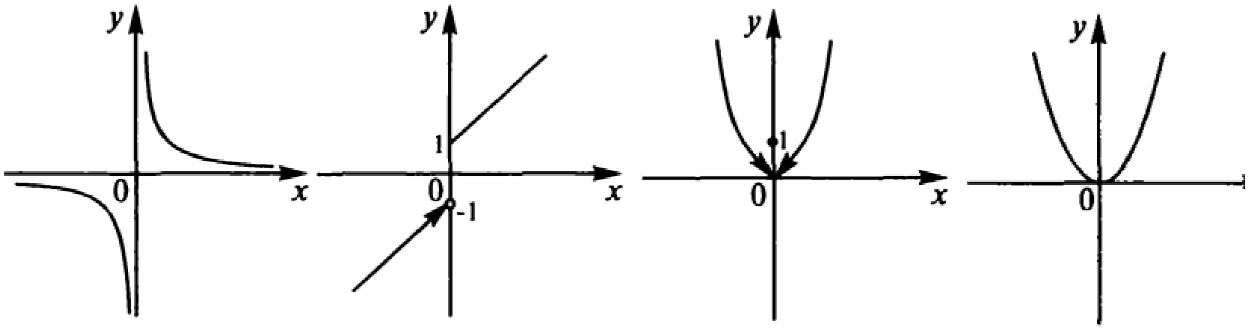
$$f(x_0)=f\left(\lim_{x\to x_0}(x)\right)=\lim_{x\to x_0} f(x).$$

Если функция $y=f(x)$ непрерывна в точке, то знак функции и знак предела можно поменять местами.

Пример 6.1. Исследовать на непрерывность в точке $x=0$ функции:

а) $y=\dfrac{1}{x}$; б) $y=\begin{cases} x+1 & при\ x\ge 0 \\ x-1 & при\ x<0 \end{cases}$

в) $y=\begin{cases} x^2 & при\ x\ne 0 \\ 1 & при\ x=0 \end{cases}$ г) $y=x^2$



а) б) в) г)

Рисунок 6.1– Графики функций

Решение.

а). В точке $x=0$функция $y=\dfrac{1}{x}$ (рисунок 1 а) не является непрерывной, так как нарушено первое условие непрерывности – существование $f\left(0\right)$.

б). В точке $x=0$ функция $y=\begin{cases} x+1 & при\ x\geq 0 \\ x-1 & при\ x<0 \end{cases}$ (рисунок 1 б) не является непрерывной – первое условие непрерывности выполнено, $f\left(0\right)$ существует ($f\left(0\right)=1$), но нарушено второе условие – отсутствует $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ (точнее говоря, здесь существует односторонние пределы функции слева $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=-1$ и справа $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)=1$, но общего предела при $x\to 0$ не существует).

в). В точке $x=0$функция $y=\begin{cases} x^2 & при\ x\neq 0 \\ 1 & при\ x=0 \end{cases}$ (рисунок 1 в)не является непрерывной – первые два условия непрерывности выполнены – существуют $f\left(0\right)$ ($f\left(0\right)=1$) и конечный предел $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$, но нарушено третье основное условие: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\neq f(x)$.

г). В точке $x=0$функция $y=x^2$ (рисунок 1г) непрерывна, т.к. выполнены все три условия непрерывности и$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=0$.

Очевидно, что непрерывность функции в данной точке выражается непрерывностью ее графика при прохождении данной точки (без отрыва карандаша от листа бумаги).

Сформулируем еще одно, второе определение непрерывности.

Придадим аргументу x_0 приращение Δx, тогда и сама функция $y = f(x)$получит приращение $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

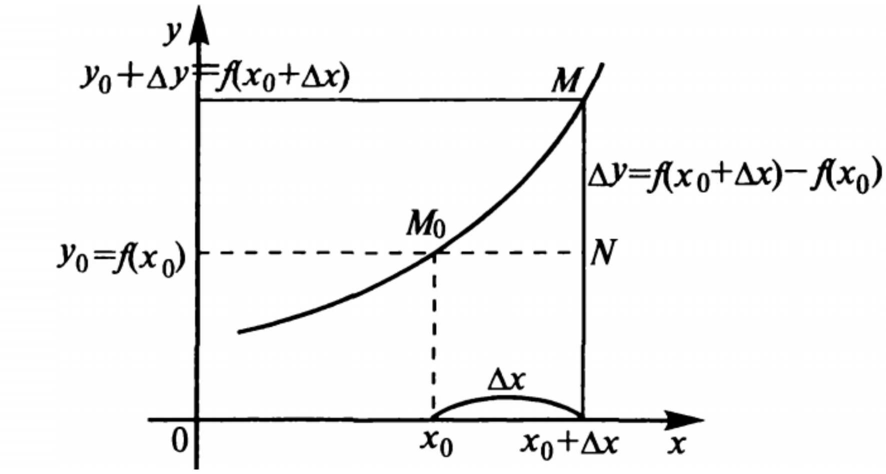


Рисунок 6.2 – График функций $y = f(x)$

<u>**Определение 2.**</u>Функция $y = f(x)$ называется **непрерывной** в точке x_0, если она определена в этой точке и бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции, то есть

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

Первое и второе определения непрерывностиравносильны (см. схему на рисунке 6.3).

$$\boxed{1} \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x - x_0 \to 0} \left(f(x) - f(x_0) \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x_0 + \Delta x - x_0 \to 0} \left(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \right) = 0 \Leftrightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0 \Rightarrow \boxed{2}$$

Рисунок 6.3 – Схема доказательства равносильности двухопределений непрерывности

<u>Пример 6.2.</u> Исследовать на непрерывность функцию $y = 3x^2 - 2x$.

Решение. Функцияопределена в промежутке $(-\infty;+\infty)$.Дадим аргументу x приращение Δx и найдем приращение функции Δy.

$$y+\Delta y=3(x+\Delta x)^2-2(x+\Delta x),$$

$$y+\Delta y=3x^2+6x\Delta x+3(\Delta x)^2-2x-2\Delta x$$

$-$

$$y=3x^2-2x$$

$$\Delta y=6x\cdot\Delta x+3(\Delta x)^2-2\Delta x$$

Вычислим предел Δy при $\Delta x\to 0$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\left(6x\cdot\Delta x+3(\Delta x)^2-2\Delta x\right)=6x\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x+3\left(\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\right)^2-2\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x=$$

$$6x\cdot 0+3\cdot 0^2-2\cdot 0=0.$$

Согласно определению 2, данная функция непрерывна при любом конечном значении x.

Функция $y=f(x)$ называется **непрерывной на промежутке X**, если она непрерывна в каждой точке этого промежутка.

Теорема. Все элементарные функции непрерывны в области их определения.

2. Точки разрыва функции и их классификации

Рассмотрим функцию $y=f(x)$, определенную на промежутке X, кроме, может быть, точки $x_0\in X$.

Определение 3.Точка x_0 называется точкой разрыва функции $y=f(x)$, если эта функция в данной точке не является непрерывной.

В зависимости от характера поведения функции в окрестности точки разрыва различают два основных вида разрывов: разрыв I рода и разрыв II рода.

К **точкам разрыва I рода** относятся такие точки, в которых существуют конечные односторонние пределы:

$\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$(левый предел) и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$(правый предел).

К **точкам разрыва II рода** относятся те точки, в которых хотя бы один из односторонних пределов не существует или равен бесконечности.

В свою очередь точки разрыва I рода подразделяются на точки *устранимого разрыва* (когда $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) \neq f(x_0)$, т.е. когда левый и правый пределы функции в точке x_0 равны между собой, но не равны значению функции в этой точке) и на точки *скачка* (когда $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, т.е. когда левый и правый пределы функции в точке x_0 различны); в последнем случае разность $d = f(x_0+0) - f(x_0-0)$ – называется **скачком** функции $f(x)$ в точке x_0. Причем, если $d > 0$, то скачок вверх на *d* масштабных единиц, если $d < 0$ – вниз.

Пример 6.3. Исследовать на непрерывность функцию и определить тип точек разрыва, если они есть

$$f(x) = \begin{cases} x+4, & x < -1 \\ x^2+2, & -1 \le x \le 1 \\ 2x, & x \ge 1 \end{cases}.$$

Решение. Найдем односторонние пределы:

$$\lim_{x\to -1-0} f(x) = 3 \quad \lim_{x\to 1-0} f(x) = 3$$

$$\lim_{x\to -1+0} f(x) = 3 \quad \lim_{x\to 1+0} f(x) = 2$$

Таким образом, в точке $x = -1$функция непрерывна, точка $x = 1$ - точка разрыва первого рода, определим скачок функции в этой точке $d = f(x_0+0) - f(x_0-0) = 2 - 3 = -1$ (рисунок 6.4).

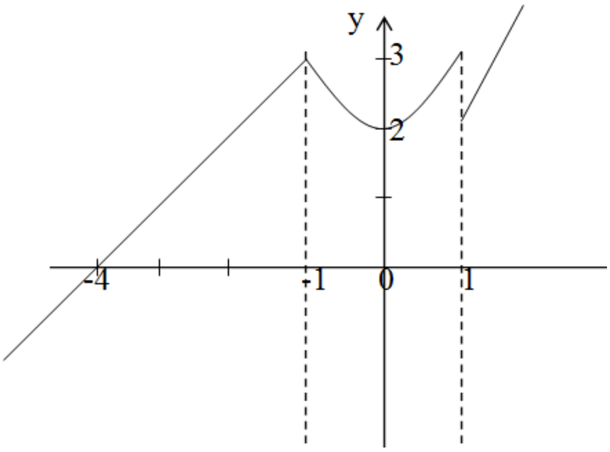


Рисунок 6.4

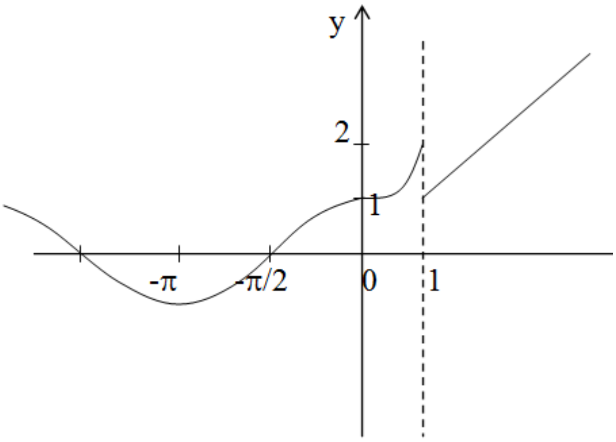


Рисунок 6.5

Пример 6.4. Исследовать на непрерывность функцию и определить тип точек разрыва, если они есть

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \le 0 \\ x^2 + 1, & 0 < x < 1 \\ x, & x \ge 1 \end{cases}.$$

Решение. Найдем односторонние пределы:

$$\lim_{x \to 0-0} f(x) = 1 \quad \lim_{x \to 1-0} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \to 0+0} f(x) = 1 \quad \lim_{x \to 1+0} f(x) = 1 \,.$$

Приходим к заключению, что в точке $x = 0$ функция непрерывна, точка $x = 1$ – точка разрыва первого рода, определим скачок функции в этой точке $d = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0) = 1 - 2 = -1$, что хорошо видно на графике функции (рисунок 6.5).

3. Свойства функций, непрерывных в точке

Рассмотрим основные свойства функций, непрерывных в точке:

1. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны в точке x_0 ,то их сумма $f(x) + \varphi(x)$, произведение $f(x) \cdot \varphi(x)$ и частное $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ (при условии $\varphi(x) \ne 0$) являются функциями, непрерывными в точке x_0.

Доказательство этого следует из определения непрерывности и аналогичных свойств пределов функций.

2.Если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) > 0$, то существует такая окрестность точки x_0, в которой $f(x) > 0$.

Доказательство этого свойстваосновывается на том, что при малых приращениях аргумента $\Delta x \to 0$ в соответствии со вторым определением непрерывности функции можно получить как угодно малое приращение функции Δ y ,так что знак функции $y = f(x)$в окрестности не измениться.

3.Если функция $y = f(u)$ непрерывна в точке u_0 , а функция $u = \varphi(x)$ непрерывна в точке $u_0 = \varphi(x_0)$, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ непрерывна в точке x_0.

Доказательство состоит в том, что малому приращению аргумента $\Delta x \to 0$ в силу второго определения непрерывности функции $u = \varphi(x)$ соответствует как угодно малое приращение $\Delta u \to 0$, приводящее в свою очередь в силу того же определения непрерывности функции $y = f(u)$ к как угодно малому приращению $\Delta y \to 0$.

Свойство 3 может быть записано в виде:

$$\lim_{x \to x_0} f(\varphi(x)) = f\left(\lim_{x \to x_0} \varphi(x)\right),$$

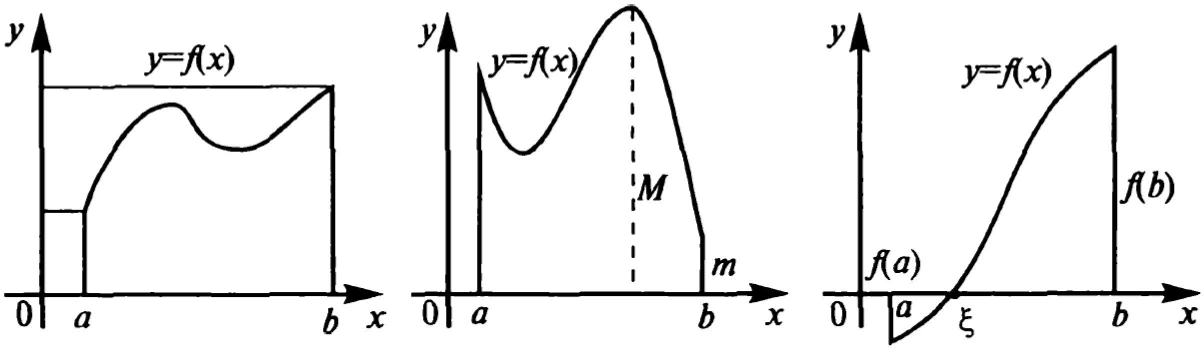
т.е. под знаком непрерывной функции можно переходить к пределу.

4. Свойства функций, непрерывных на отрезке

Рассмотрим основные свойства функций, непрерывных на отрезке

1. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\mathrm{b}]$, то она ограничена на этом отрезке (рисунок 6.6а). Это свойство называют первой теоремой Вейерштрасса (Вейерштрасс Карл (1815-1897) – немецкий математик).

Доказательство этого свойства основано на том, что функция, непрерывная в точке x_0, ограничена в некоторой ее окрестности, а если разбивать отрезок $[a;\mathrm{b}]$ на бесконечное количество отрезков, которые “стягиваются” к точке x_0, то образуется некоторая окрестность точки x_0.



а б в

Рисунок 6.6 – Графики функций, непрерывных на отрезке

2.Если функция $y = f(x)$непрерывна на отрезке $[a;\mathrm{b}]$, то она достигает на этом отрезке наименьшего значения *m* и наибольшего значения *M* (вторая теорема Вейерштрасса), рисунок 6.6 б.

Тогда существуют такие значения x_1и x_2, что $f(x_1) = m,\quad f(x_2) = M$, причем

$$m \leq f(x) \leq M\,.$$

Отметим эти наибольшие и наименьшие значения функция может принимать на отрезке и несколько раз (например, $y = sin x$).

Разность между наибольшим и наименьшим значением функции на отрезке называется колебаниемфункции на отрезке.

3.Если функция $y = f(x)$непрерывна на отрезке $[a;\mathrm{b}]$, и значения ее на концах отрезка *f(a)*и *f(b)*имеют противоположные знаки, то внутри отрезка найдется точка $\xi \in (a;\mathrm{b})$ такая что $f(\xi) = 0$ (теорема Больцано-Коши), рисунок 6.6 в.

Итак, в данной теме рассмотрены вопросы, связанные с непрерывностью функции: 1) понятие непрерывности функции; 2) точки разрыва функции и их классификации; 3) свойства функций, непрерывных в точке; 4) свойства функций, непрерывных на отрезке. Излагаемый материал проиллюстрирован примерами. При подготовке по данной теме студентам рекомендуется использовать литературные источники [2,5,7,8,11] и Интернет-ресурсы [12-15].

Вопросы для самопроверки:

1. Как определяется непрерывность функции в точке и на множестве?

2. Сформулируйте два эквивалентных определения непрерывности функции в точке.

3. Что можно сказать о непрерывности элементарных функций?

4. Дать понятие точки разрыва функции.

5. Как классифицируются точки разрыва функции?

6. Приведите примеры точек разрыва первого и второгорода.

7. Охарактеризуйте точки устранимого разрыва.

8. В каком случае возникает скачок функции?

9. Какие действия над непрерывными функциями сохраняют свойство непрерывности (сформулируйте соответствующие теоремы)?

10. Сформулируйтесвойства функций, непрерывных в точке.

11. Дайте геометрические иллюстрации теорем о функциях, непрерывных на отрезке. Покажите графически существенность условий этих теорем, т.е. случаи нарушения вывода при невыполнении одного из условий теоремы.

Раздел 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Тема 7. Производная и дифференциал функции

План:

1. Определение производной, ее геометрический и механический смысл.

2.Основные правила дифференцирования. Производная сложной функции.

3. Формулы дифференцирования основных элементарных функций (таблица производных).

4. Дифференцирование неявных функций и функций, заданных параметрически.

5. Дифференциал функции, его геометрический смысл и свойства.

6. Производные и дифференциалы высших порядков.

1. Определение производной, ее геометрический и механический смысл

Пусть функция $y=f(x)$ определена на промежутке X . Возьмем точку $x_0 \in X$, дадим значению x_0 приращение $\Delta x \neq 0$, тогда функция получит приращение $\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.

<u>Определение 1.</u>*Производной функции* $y=f(x)$ называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении последнего к нулю (при условии, что этот предел существует)

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}. \tag{7.1}$$

Производная функции имеет несколько обозначений: y' , $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$, y'_x . Операция нахождения производной функции называется ***дифференцированием*** этой функции.

Если функция имеет конечную производную в точке x_0, то она дифференцируема в этой точке. Функция, дифференцируемая в каждой точке промежутка X, называется дифференцируемой на этом промежутке.

Теорема 1 (Зависимость между непрерывностью функции и дифференцируемостью).Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.

Доказательство. По условию функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, т.е. существует конечный предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0),$$

где $f'(x_0)$– постоянная величина, не зависящая от Δx.

Тогда на основании теоремы о связи бесконечно малых с пределами функций можно отметить

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x),$$

где $\alpha(\Delta x)$– бесконечно малая величина при $\Delta x \to 0$ или

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)^2$$

При $\Delta x \to 0$ на основании свойств бесконечно малых заключаем, что $\Delta y \to 0$ и, следовательно, по определению 2, функция $y = f(x)$ в точке x_0 является непрерывной.

Обратная теорема, вообще говоря, неверна, т.е. если функция непрерывна в данной точке, то она не обязательно дифференцируема.

Геометрический смысл производной из задачи о касательной. Пусть на плоскости Oxy дана непрерывная кривая $y = f(x)$ и необходимо найти уравнение касательной к этой кривой в точке $M_0(x_0, y_0)$ (рисунок 7.1).

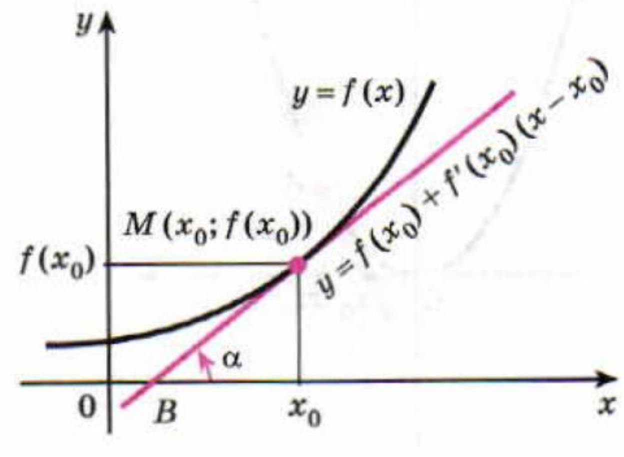


Рисунок 7.1 – График функции $y = f\left(x\right)$

Производная $f'(x_0)$ является ***угловым коэффициентом касательной*** (тангенс угла наклона), проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

$$f'(x_0) = k = tg\alpha \qquad (7.2)$$

где α – величина угла между касательной и положительным направлением оси *Ox*. Тогда ***уравнение касательной***к кривой $y = f(x)$ в точке x_0 примет вид

$$y - y_0 = f'(x_0)\left(x - x_0\right), \qquad (7.3)$$

где $\left(x_0; f\left(x_0\right)\right)$ – координаты точки касания; $f'(x_0)$ – производная функции в точке x_0.

Из решения задачи о скорости движения следует ***механический смысл производной***: производная пути по времени $s'\left(t_0\right)$ является скоростью точки в момент времени t_0:

$$s'\left(t_0\right) = v\left(t_0\right). \qquad (7.4)$$

2.Основные правила дифференцирования. Производная сложной функции

Основные правила дифференцирования:

1) Производная постоянной равна нулю, то есть

$$c' = 0.$$

2) Производная аргумента равна единице, то есть

$$x' = 1.$$

3) Производная алгебраической суммы дифференцируемых функций равна алгебраической сумме производных этих функций, то есть

$$(u \pm v)' = u' \pm v'.$$

4) Производная произведения дифференцируемых функций равна:

$$(u \cdot v)' = u'v + uv'; \tag{7.5}$$

$$(u \cdot v \cdot w)' = u'vw + uv'w + uvw'.$$

5) Постоянный множитель можно выносить за знак производной:

$$(cf(x))' = c(f(x))'.$$

6) Производную частного двух дифференцируемых функций можно найти по формуле:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, v(x) \neq 0. \tag{7.6}$$

Пусть y есть функция от переменной u $(y = f(u))$, а u в свою очередь есть функция от независимой переменной x $(u = \varphi(x))$, то есть задана *сложная функция* $y = f[u(x)]$.

Теорема 2 (Производная сложной функции). Если $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$ – дифференцируемые функции от своих аргументов, то производная сложной функции существует и равна производной данной функции по промежуточному аргументу, умноженной на производную самого промежуточного аргумента по независимой переменной x, то есть

$$y' = f'(u) \cdot u'. \tag{7.7}$$

3. Формулы дифференцирования основных элементарных функций (таблица производных).

Для нахождения производных необходимо хорошо знать и уметь применять основные правила и формулы дифференцирования (таблицу производных):

$$\left(x^n\right)' = n \cdot x^{n-1}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \left(x^{-1}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\left(e^x\right)' = e^x$$

$$\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a$$

$$\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

$$\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$$

$$\left(\sin x\right)' = \cos x$$

$$\left(\cos x\right)' = -\sin x$$

$$\left(tgx\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\left(ctgx\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\left(\arccos x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\left(arctgx\right)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\left(arcctgx\right)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

Пример7.1. Найти производную функции

1. $y=\left(2x^4-\dfrac{3}{\sqrt[3]{x}}+3\right)^4.$

Используя теорему нахождения производной сложной функции имеем:

$$y'=4\left(2x^4-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}+3\right)^3\left(2x^4-3x^{-1/3}+3\right)'=$$

$$=4\left(2x^4-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}+3\right)^3\left(8x^3-3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-4/3}+0\right)=4\left(2x^4-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}+3\right)^3\left(8x^3+\frac{1}{x\sqrt[3]{x}}\right).$$

2. $y=\ln\sqrt[3]{\left(\dfrac{1-3x}{1+3x}\right)^2}.$

Преобразуем данную функцию:

$y=\ln\left(\dfrac{1-3x}{1+3x}\right)^{\frac{2}{3}}=\dfrac{2}{3}\left[\ln(1-3x)-\ln(1+3x)\right]$. Тогда

$$y'=\frac{2}{3}\left[\frac{(1-3x)'}{1-3x}-\frac{(1+3x)'}{1+3x}\right]=\frac{2}{3}\left(\frac{-3}{1-3x}-\frac{3}{1+3x}\right)=\frac{2}{3}\cdot\frac{-3-9x-3+9x}{1-9x^2}=$$

$$=-\frac{4}{1-9x^2}.$$

3. $y=3^{\cos x}-x^2\cos 3x.$

Используем правило $(uv)'=u'v+uv'$ и формулы $\left(a^x\right)'=a^x\cdot\ln a,\ (\cos x)'=-\sin x$, получим

$$y'=3^{\cos x}\ln 3(\cos x)'-\left(x^2\right)'\cos 3x-x^2(\cos 3x)'=-3^{\cos x}\ln 3\sin x-$$
$$-2x\cos 3x+3x^2\sin 3x.$$

4. $y=e^{4x}-2x\,tg\,4x.$

$$y' = e^{4x}(4x)' - 2x'\,tg\,4x - 2x(tg\,4x)' = 4e^{4x} - 2tg\,4x - 2x\frac{(4x)'}{\cos^2 4x} =$$

$$= 4e^{4x} - 2tg\,4x - \frac{8x}{\cos^2 4x}.$$

5. $y = \dfrac{x^2 e^{x^2}}{x^2+1}$.

$$y' = \frac{(2xe^{x^2} + x^2 2xe^{x^2})(x^2+1) - (2x)x^2 e^{x^2}}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^3 e^{x^2} + 2x^5 e^{x^2} + 2xe^{x^2} + 2x^3 e^{x^2} - 2x^3 e^{x^2}}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{2xe^{x^2}(x^4 + 1 + x^2)}{(x^2+1)^2}$$

6. $y = arctg\dfrac{2x^4}{1-x^8}$

$$y' = \frac{1}{\left(1 + \dfrac{4x^8}{(1-x^8)^2}\right)} \cdot \frac{8x^3(1-x^8) - (-8x^7)2x^4}{(1-x^8)^2} = \frac{(1-x^8)^2(8x^3 - 8x^{11} + 16x^{11})}{(1+x^8)^2(1-x^8)^2} = \frac{8x^3 + 8x^{11}}{(1+x^8)^2} =$$

$$= \frac{8x^3(1+x^8)}{(1+x^8)^2} = \frac{8x^3}{1+x^8}$$

4. Дифференцирование неявных функций и функций, заданных параметрически

Если зависимость между аргументом x и функцией y задана уравнением $y = f(x)$, то есть уравнением, которое разрешено относительно функции y, то y называется **явной** функцией от аргумента x. Если же зависимость между переменными x и y задана уравнением $F(x,y) = 0$, которое не разрешено относительно функции y, то y называется **неявной** функцией от аргумента x.

Чтобы найти производную y' неявной функции y, определяемой уравнением $F(x,y) = 0$, надо продифференцировать по переменной x обе части этого равенства, считая, что y есть функция от x, затем полученное уравнение разрешить относительно производной y'.

Пример 7.2. Найти производную y' функции y, определяемой уравнением $x^3+x^2y+y^2=0$.

Решение. Дифференцируем по переменной x обе части равенства, считая, что y есть функция от x: $3x^2+2xy+x^2y'+2yy'=0$, разрешаем полученное уравнение относительно искомой производной y':
$y'\left(x^2+2y\right)=-3x^2-2xy$,

$$y'=-\frac{3x^2+2xy}{x^2+2y}.$$

Зависимость функции y от аргумента xможет осуществляться посредством третьей переменной t, которая называется *параметром.* Эта зависимость имеет вид:

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}, \qquad a\le t\le b.$$

В этом случае считают, что функция $y=y(x)$ задана параметрически.

Её производную находят по формуле:

$$y'_x=\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \qquad (7.8)$$

Пример 7.3. Найти производную $\frac{dy}{dx}$ функции y, заданной параметрическими уравнениями $\begin{cases} x=\cos^3 t, \\ y=\sin^3 t \end{cases}$.

Решение. Предварительно найдем x'_t и y'_t и затем воспользуемся формулой (7.8):

$$x'_t=3\cdot\cos^2 t\cdot(-\sin t)=-3\cdot\sin t\cdot\cos^2 t, \quad y'_t=3\cdot\sin^2 t\cdot\cos t.$$

Следовательно, $\frac{dy}{dx}=\frac{3\cdot\sin^2 t\cdot\cos t}{-3\cdot\sin t\cdot\cos^2 t}=-tg\,t$.

5. Дифференциал функции, его геометрический смысл и свойства

Пусть функция $y=f(x)$ определена на некотором промежутке X и дифференцируема в некоторой точке $x\in X$. Тогда существует конечная производная $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$. На основании теоремы о связи бесконечно малых величин с пределами можно записать

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\alpha(\Delta x),\text{ где } \alpha(\Delta x)\to 0 \text{ при } \Delta x\to 0.$$

Отсюда следует

$$\Delta y=f'(x)\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x.$$

Таким образом, приращение функции Δy состоит из двух слагаемых: $f'(x)\Delta x$ – линейное относительно Δx слагаемое; $\alpha(\Delta x)\Delta x$ – нелинейное относительно Δx слагаемое.

Определение 2. ***Дифференциалом функции*** называется главная, линейная относительно Δx часть приращения функции, равная произведению производной на приращение независимой переменной

$$dy=f'(x)\Delta x.$$

Дифференциалом аргумента называется приращение аргумента:

$$dx=\Delta x,$$

тогда дифференциал функции можно записать:

$$dy=f'(x)dx. \qquad (7.9)$$

Отсюда можно записать $f'(x)=\frac{dy}{dx}$.

Пример 7.4. Найти дифференциал функции $y=arctg\,3x$.

Решение.Воспользуемся формулой (7.9):

$$dy = f'(x)dx = (arctg3x)' dx = \frac{3\,dx}{1+(3x)^2}.$$

Геометрический смысл дифференциала. Возьмем на графике функции $y = f(x)$ произвольную точку $M(x, y)$. Дадим аргументу x приращение Δx ,тогда функция получит приращение $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ (рисунок 7.2)

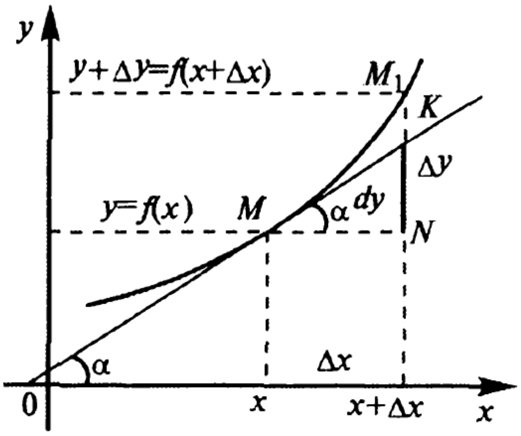


Рисунок 7.2 – Геометрический смысл дифференциала

Проведем касательную к кривой $y = f(x)$в точке *M,* которая образует угол α с положительным направлением оси *Ox,* т.е. $f'(x) = tg\alpha$. Из прямоугольного треугольника *MKN:*

$$KN = MN \cdot tg\alpha = \Delta x \cdot tg\alpha = f'(x) \cdot \Delta x,$$

т.е. в соответствии с определением дифференциала *dy* = *KN.*

Таким образом, *дифференциал функции есть приращение ординаты касательной*, проведенной к графику функции $y = f(x)$в данной точке, когда xполучает приращение Δx.

Свойства дифференциала аналогичны свойствам производной

1) $dc = 0$, $c = const$;

2) $d(cu) = cdu$, $c = const$;

3) $d(u \pm v) = du \pm dv$;

4) $d(uv) = udv + vdu$;

5) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$.

Отметим, что дифференциал обладает *инвариантностью формы*, то есть та же формула применяется и для вычисления дифференциала от сложной функции:

если $y = f(u), \quad u = u(x)$, то $dy = f'(u)du = f'(u)u'(x)dx$.

6. Производные и дифференциалы высших порядков

Производная $y' = f(x)$ является также функцией от x и называется производной *первого порядка*.

Если функция $f'(x)$ дифференцируема, то ее производная называется производной второго порядка и обозначается y''. Итак, $y'' = (y')'$.

Производная от производной второго порядка, если она существует, называется производной третьего порядка и обозначается y'''. Итак, $y''' = (y'')'$.

Производной n-го порядка называется производная от производной $(n-1)$ порядка:

$$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'.$$

Производные порядка выше первого называются производными высших порядков.

Пример 7.5. 1) Найти производную 3-го порядка для функции $y = arctgx$.2) Найти производную n-го порядка для функции $y = \ln(1+x)$.

Решение.

1) Имеем: $y' = \dfrac{1}{1+x^2}$; $\quad y'' = \dfrac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2}$;

$$y''' = \frac{-2\left(1+x^2\right)^2 - 4x\left(1+x^2\right)(-2x)}{\left(1+x^2\right)^4} = \frac{6x^2-2}{\left(1+x^2\right)^3}.$$

2) Имеем: $y' = \dfrac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$; $\quad y'' = -(1+x)^{-2}$; $\quad y''' = 2(1+x)^{-3}$;

$y^{(4)}=-6(1+x)^{-4}$; $y^{(5)}=24(1+x)^{-5}=(-1)^4\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot(1+x)^{-5}$.

Таким образом, $y^{(n)}=\dfrac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!}{(1+x)^n}$.

Пусть функция $y=f(x)$ имеет производные n-го порядка на некотором промежутке. Согласно определению дифференциала функции имеем:

$$dy=f'(x)dx,$$

где $dx=\Delta x-$ приращение независимой переменной x.

Дифференциал от дифференциала dy называется дифференциалом второго порядка функции $y=f(x)$ и обозначается d^2y. Таким образом, по определению имеем:

$$d^2y=d(dy)=(dy)'dx=\left(f'(x)dx\right)'dx=f''(x)\cdot(dx)^2.$$

Или

$$d^2y=f''(x)\cdot dx^2.$$

Таким образом, дифференциал второго порядка от данной функции равен произведению производной второго порядка этой функции на квадрат дифференциала независимой переменной.

Аналогично,

$$d^3y=d(d^2y)=(d^2y)'dx=\left(f''(x)dx^2\right)'dx=f'''(x)\cdot(dx)^3.$$

Вообще, дифференциал n-го порядка функции $y=f(x)$ определяется как дифференциал от дифференциала (n-1)-го порядка этой функции и обозначается d^ny. При этом

$$d^ny=f^{(n)}(x)dx^n,$$

то есть дифференциал n-го порядка от данной функции равен произведению производной n-го порядка этой функции на дифференциал независимой переменной в n-ой степени. Из выражения для дифференциала n-го порядка получаем

$$f^{(n)}(x)=\frac{d^n y}{dx^n},$$

иначе говоря, производная n-го порядка может быть представлена в виде отношения дифференциала n-го порядка данной функции к дифференциалу независимой переменной в n-ой степени.

Итак, в данной теме рассмотрены основы дифференциального исчисления:1) определение производной, ее геометрический и механический смысл; 2) основные правила дифференцирования, производная сложной функции; 3) формулы дифференцирования основных элементарных функций (таблица производных); 4) дифференцирование неявных функций и функций, заданных параметрически; 5) дифференциал функции, его геометрический смысл и свойства; 6) производные и дифференциалы высших порядков. Излагаемый материал проиллюстрирован многочисленными примерами. При подготовке по данной теме студентам рекомендуется использовать литературные источники [2,5,7,8,9, 11] и Интернет-ресурсы [12-15].

Вопросы для самопроверки:

1. Дайте определение производнойфункции.

2. Что называют дифференцированиемфункции?

3. Сформулируйте и докажите теорему о зависимости между непрерывностью и дифференцируемостью функции.

4. В чем состоит геометрический и механический смыслпроизводнойфункции?

5. Сформулируйтеосновные правила дифференцирования.

6. Как найтипроизводную сложной функции?

7. Приведите формулы дифференцирования основных элементарных функций (таблицу производных).

8. Какие функции называют явными, неявными? Как происходит их дифференцирование?

9. Как найти производную функций, заданных параметрически?

10.Дайте определение дифференциала функции. В чем состоит его геометрический смысл?

11. Сформулируйте свойствадифференциала функции.

12. Дать понятие производных высших порядков. Привести примеры их нахождения.

13. Дать понятиядифференциаловвторого и третьегопорядковдля функции $y=f(x)$.

14. Дать понятие дифференциалаn-го порядка функции$y=f(x)$.

Тема 8. Применение производной для исследования функции

План лекции:

1. Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностейвида $\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty}$.
2. Признаки возрастания и убывания функций. Экстремум функции.
3. Выпуклость, вогнутость и точки перегиба графика функции.
4. Асимптоты графика функции.
5. Исследование функции и построение ее графика.

1. Правило Лопиталядля раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty}$

К разряду неопределенностей принято относить следующие соотношения:

$$\frac{0}{0};\ \frac{\infty}{\infty};\ \infty\cdot 0;\ \infty^0;\ 1^\infty;\ \infty-\infty.$$

Для вычисления пределов часто используют следующую теорему, которую впервые сформулировал швейцарский ученый Бернулли, но опубликовал французский математик Мишель Лопиталь.

Теорема (Правило Лопиталя). Предел отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших функций равен пределу отношения их производных (конечному или бесконечному), если последний существует в указанном смысле.

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в некоторой окрестности точки x_0 (за исключением может быть самой точки), $f(x_0)=0$ и $g(x_0)=0$ (или $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$), причем $g'(x)\neq 0$ в некоторой окрестности точки x_0, тогда

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\left\{\left\{\frac{0}{0}\right\}или\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}\right\}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{8.1}$$

<u>Пример 8.1.</u> Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}=\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{2x+\frac{1}{x}}{e^x}=\frac{2+1}{e}=\frac{3}{e}$$

Замечания:

1.Иногда приходится применять правило Лопиталя последовательно несколько раз, если от неопределенности не удается избавиться на первом шаге. Однако условия теоремы на каждом шаге должны оставаться справедливыми.

2.Хотя правило Лопиталя работает только с неопределенностями $\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty}$, неопределенности других типов могут быть раскрыты с помощью этого правила, если путем преобразований удастся привести изучаемую неопределенность к такому типу. Так, неопределенности вида $\{0\cdot\infty\}$ или $\{\infty-\infty\}$ приводятся к неопределенностям вида $\left\{\frac{0}{0}\right\}или\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$ с помощью алгебраических преобразований. Неопределенности вида $\{1^\infty\},\{\infty^0\},\{0^0\}$ с помощью логарифмирования сводятся к неопределенности вида $\{0\cdot\infty\}$. В некоторых случаях для решения задачи требуется неоднократное применение правила Лопиталя.

Пример 8.2. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$.

Решение. $f'(x)=e^x+e^{-x}-2$; $\qquad g'(x)=1-\cos x$;

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\dfrac{1+1-2}{1-1}=\dfrac{0}{0}$ – опять получилась неопределенность. Применим правило Лопиталя еще раз:

$f''(x)=e^x-e^{-x}$; $\qquad g''(x)=\sin x$;

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\dfrac{1-1}{0}=\dfrac{0}{0}$ - применяем правило Лопиталя еще раз.

$f'''(x)=e^x+e^{-x}$; $\qquad g'''(x)=\cos x$; $\qquad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=\dfrac{2}{1}=2$.

2. Признаки возрастания и убывания функций. Экстремум функции

Напомним, функция $y=f\left(x\right)$ называется **возрастающей** на промежутке X, если для любых двух значений x_1и x_2из этого промежутка большему значению аргумента соответствует большее значение функции:

$$x_2>x_1 \quad\Rightarrow\quad f(x_2)>f(x_1).$$

Теорема – достаточные условия возрастания (убывания) функции. Если производная дифференцируемой функции **положительна (отрицательна)** внутри некоторого промежутка X, то функция **возрастает (убывает)** в этом промежутке:

$f'(x)>0\Rightarrow f(x)-\text{возрастает на } X$;

$f'(x)<0\Rightarrow f(x)-\text{ убывает на } X$.

Геометрический смысл этой теоремы в том, что касательные к графику дифференцируемой возрастающей функции образуют острые углы, а убывающей функции – тупые углы с положительным направление оси $0x$.

Далее выделим наиболее важные, «узловые» точки функции, нахождение которых во многом определяет структуру графика. Это точки максимум и минимум функции.

Определение 1. Точка x_0 называется точкой **максимума (минимума)** функции $y = f\left(x\right)$, если существует интервал, содержащий точку x_0, такой что для всех x из этого интервала имеет место неравенство:

$$f(x_0) \geq f(x) \ \ (f(x_0) \leq f(x)).$$

Максимум и минимум функции часто называют локальными **экстремумами**(extremum – крайний), подчеркивая тот факт, что понятие экстремума связано лишь с достаточно малой окрестностью точки x_0 . Поэтому функция может иметь несколько экстремумов.

Теорема (необходимое условие экстремума). Для того, чтобы функция $y = f\left(x\right)$ имела экстремум в точке x_0, **необходимо**, чтобы ее производная в этой точке равнялась нулю или не существовала.

Точки, в которых выполняется необходимое условие экстремума для непрерывной функции, называются ***критическими точками*** этой функции. Они определяются из уравнения $f'(x) = 0$ (*стационарные точки*) или $f'(x) = \infty$. Обращаем внимание на то, что эти точки должны входить в область определения функции.

Таким образом, если в какой-либо точке имеется экстремум, то эта точка критическая. Очень важно, однако, заметить, что обратное утверждение неверно. Критическая точка вовсе не обязательно является точкой экстремума.

Не в каждой своей критической точке функция обязательно имеет максимум или минимум. Так, например, функция $y = \sqrt[3]{x^2}$ имеет в точке $x = 0$ минимум (рисунок 1), а производная ее $y' = \left(x^{\frac{2}{3}} \right)' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ вэтой точке бесконечна: $y'\left(0\right) = \infty$.

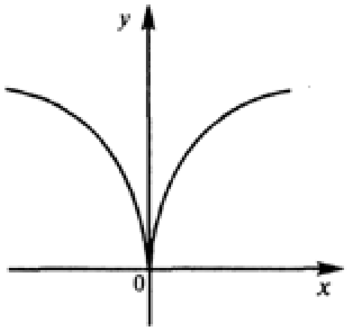


Рисунок 8.1– График функции $y = \sqrt[3]{x^2}$

Таким образом, для нахождения экстремумов функции требуется дополнительное исследование критических точек. Иными словами, требуется знать достаточное условие экстремума.

Теорема (*первое достаточноеусловие экстремума*). Если в точке x_0 функция $y = f(x)$ непрерывна, а производная $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет свой знак с плюса на минус, то точка x_0 есть точка максимума функции, а если с минуса на плюс, – то точка минимума.

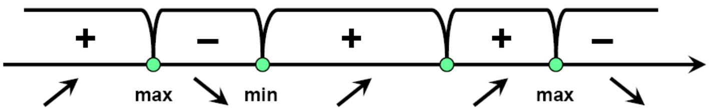
Если при переходе через точку x_0 производная не меняет свой знак, то в точке x_0 экстремума нет.

Схема исследования функции на экстремум:

1. Найти *производную* функции $f'(x)$.

2. Определяем *критические точки* (в которых $f'(x) = 0$ или не существует), а сама функция в этих точках определена и непрерывна.

3. Отмечаем на числовой оси критические точки и находим *знак производной* в каждом из интервалов области определения. Находим точки экстремума (по теореме).



4. Вычисляем значения функции в точках экстремума.

Пример 8.3. Исследовать на экстремум функцию $y = x(x-1)^3$.

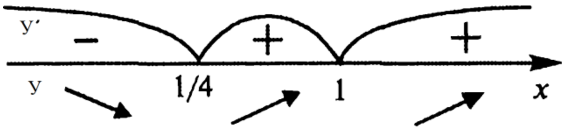
Решение.

1). Производная функции:

$$y' = \left(x(x-1)^3\right)' = (x-1)^3 + 3x(x-1)^2 = (x-1)^2(4x-1)$$

2). Определим критические точки: $(x-1)^2(4x-1)=0$. Отсюда $x_1 = \frac{1}{4}$; $x_2 = 1$. Точек, в которых производная не существует, у данной функции нет – $f'(x)$ определена на всей числовой оси.

3). Нанесем критические точки на числовую прямую:



Для определения знака производной слева и справа от критической точки $x_1 = \frac{1}{4}$ выберем, например, значения $x = 0$ и $x = \frac{1}{2}$, найдем $f'(0) = -1 < 0$ и $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} > 0$; следовательно $f'(x) < 0$, при всех $x < \frac{1}{4}$ и $f'(x) > 0$ на интервале $\left(\frac{1}{4};1\right)$.

Аналогично устанавливаем, что $f'(x) > 0$ и на интервале $(1;+\infty)$.

Согласно достаточному условию $x_1 = \frac{1}{4}$ – точка минимума данной функции. В точке $x_2 = 1$ экстремума нет.

4). Находим $f_{\min}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)^3 = -\frac{27}{256}$.

Теорема (***второе достаточное условие экстремума***). Если первая производная $f'(x)$ дважды дифференцируемой функции равна нулю в некоторой точке x_0, а вторая производная в этой точке $f''(x_0)$ положительна, то x_0 есть точка минимума функции; если отрицательна, то x_0 – точка максимума.

<u>Пример 8.4.</u> Исследовать на экстремум функцию $y = e^{-x^2}$.

Решение.

1) Находим первую производную: $y' = -2xe^{-x^2}$.

2) Приравнивая производную к нулю находим единственную критическую точку $x = 0$.

3) Находим вторую производную: $y'' = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2}$. Ее значение в точке $x = 0$ равно -2 .4) Делаем вывод о наличии максимума функции и вычисляем $y_{\max}(0) = 1$

3. Выпуклость, вогнутость и точки перегиба графика функции

<u>Определение 2.</u>График функции $y = f(x)$, дифференцируемой на интервале (a,b), имеет на этом интервале *выпуклость, направленную вверх (вниз),* если график этой функции в пределах интервала (a,b) лежит не выше (не ниже) любой своей касательной (рисунок 8. 2).

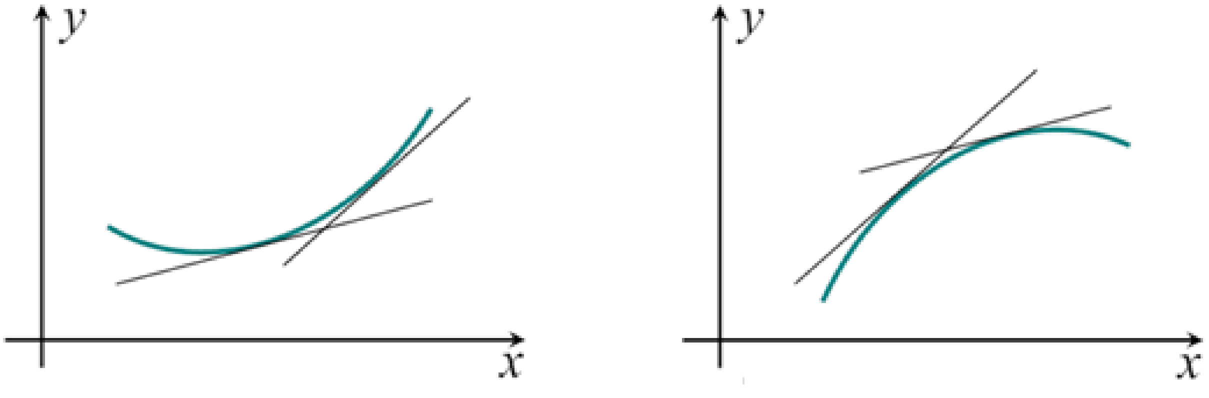


График выпуклый вниз

График выпуклый вверх

Рисунок 8. 2 – Выпуклость, вогнутость графика функции

Способ определения направления выпуклости графика функции дается следующей теоремой:

Теорема (достаточные условия выпуклости). Если функция $y = f(x)$ имеет на интервале (a,b) вторую производную и $f''(x) \ge 0$ $(f''(x) \le 0)$ на (a,b) , то график функции имеет на (a,b) выпуклость, направленную вниз (вверх).

Определение 3. **Точкой перегиба** графика непрерывной функции называется точка, разделяющая интервалы, в которых функция выпукла вниз и вверх.

Теорема (достаточное условие существования точки перегиба). Если вторая производная дважды дифференцируемой функции при переходе через некоторую точку x_0 меняет знак, то x_0 есть точка перегиба графика.

Нужно иметь в виду следующую геометрическую интерпретацию точек перегиба (рисунок 8.3). В окрестности точки x_1 функция выпукла вверх и график ее лежит *ниже* касательной, проведенной в этой точке. В окрестности точки x_2, на которой функция выпукла вниз, картина обратная – график лежит *выше* касательной. В точке же перегиба x_0 касательная разделяет график – он лежит по разные стороны касательной.

Следует отметить, что *если критическая точка дифференцируемой функции не является точкой экстремума, то она есть точка перегиба.*

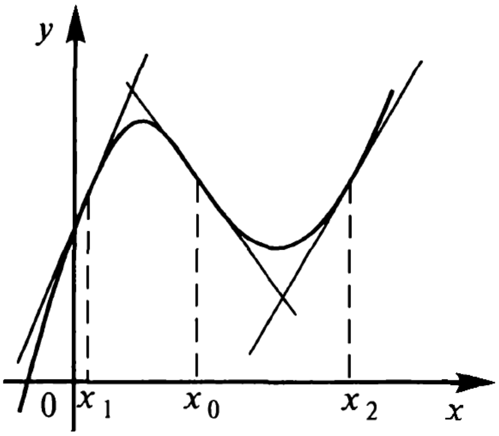


Рисунок 8.3 – Точка перегибаграфика функции

Схема исследования на выпуклость и точки перегиба графика функции:

1. Найти вторую производную функции.

2. Определить точки, в которых вторая производная равна нулю или не существует.

3. Исследовать знак второй производной слева и справа от найденных точек и сделать вывод об интервалах выпуклости и наличии точек перегиба.

4. Найти значение функции в точках перегиба.

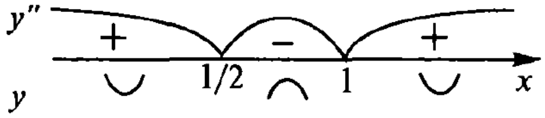
Пример 8.5. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции $y = x(x-1)^3$.

Решение. 1). $y' = \left(x(x-1)^3\right)' = (x-1)^3 + 3x(x-1)^2 = (x-1)^2(4x-1)$.

$$y'' = \left((x-1)^2(4x-1)\right)' = 2(x-1)(4x-1) + 4(x-1)^2 = 12(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right).$$

2). $y'' = 0$ при $x_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = 1$.

3).



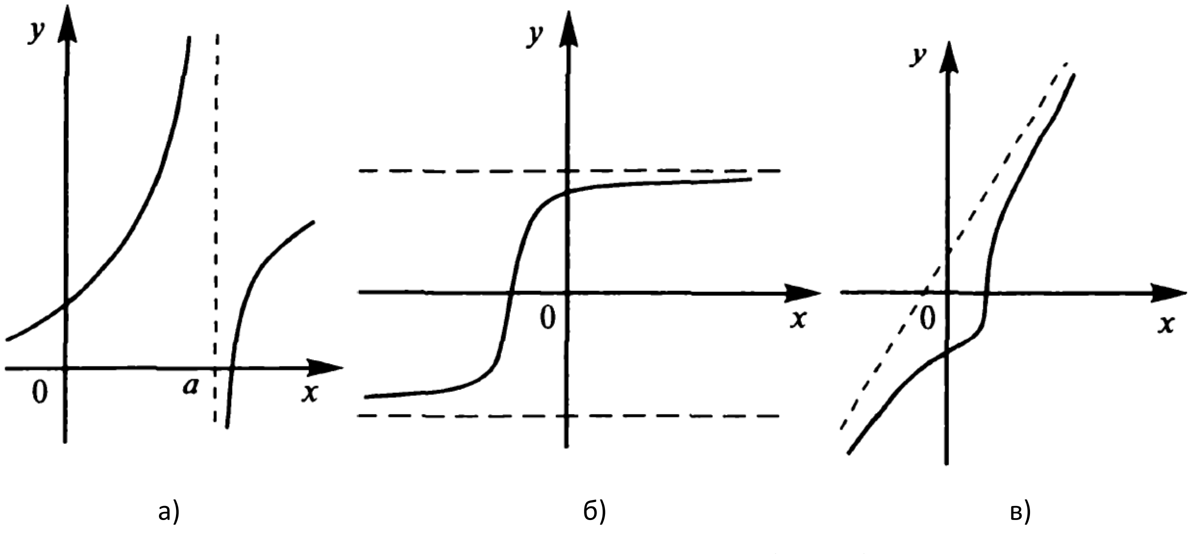
Отсюда $x_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = 1$ – точки перегиба графика функции.

4). Значения функции в точках перегиба $y\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{16}$; $y(1) = 0$.

4. Асимптоты графика функции

Определение 4.Асимптотой графика функции $y = f(x)$ называется прямая, обладающая тем свойством, что расстояние между этой прямой и графиком функции стремится к нулю при неограниченном удалении от начала координат.

По способу отыскания выделяют три вида асимптот: вертикальные $x=a$, горизонтальные $y=b$ и наклонные $y=kx+b$ (рисунок 8.4).



а) б) в)

Рисунок 8.4 – Асимптоты графика функции

Прямая $x=a$ является **вертикальной асимптотой** графика функции $y=f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов равен бесконечности $\lim\limits_{x\to a\pm 0} f(x)=\pm\infty$ (рисунок 8.4а).

Очевидно, что прямая $x=a$ не может быть вертикальной асимптотой, если функция непрерывна в точке a, так как в этом случае $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$. Следовательно, *вертикальные асимптоты* $x=a$ *следует искать в точках разрыва функции* $y=f(x)$ или *на концах ее области определения* $(a,\ b)$, *если* a и b *конечные числа.*

Наклонной асимптотой графика функции называется прямая, заданная уравнением $y=kx+b$ (рисунок 8.4в). Для ее существования необходимо, чтобы существовали конечные пределы:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}, \qquad b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right).$$

Если хотя бы один из указанных пределов не существует или равен бесконечности, то наклонной асимптоты график функции не имеет.

В частности, если $k=0$, то $y=b$ – уравнение **горизонтальной асимптоты** (рисунок 8.4б). В этом случае $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$.

<u>Пример 8.6.</u> Найти асимптоты графика функции $y=\dfrac{x^2+2x-1}{x}$.

1) Функция определена в интервалах: $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$. Проверим на вертикальную асимптоту точку $x=0$:

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{x^2+2x-1}{x}=\lim_{x\to 0+0}\frac{(0+0)^2+2(0+0)-1}{(0+0)}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to 0-0}\frac{x^2+2x-1}{x}=\lim_{x\to 0-0}\frac{(0-0)^2+2(0-0)-1}{(0-0)}=+\infty.$$

Следовательно, $x=0-$ вертикальная асимптота.

2) Для определения наклонной асимптоты найдем пределы:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-1}{x^2}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x-1}{x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x-1-x^2}{x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{x}\right)=2.$$

Таким образом, прямая $y=x+2$ является наклонной асимптотой.

5. Исследование функции и построение ее графика

Полное исследование функции проводится по следующему плану.

1) Найти область определения функции.

2) Исследовать функцию на четность-нечетность, периодичность. В случае, когда, функция является нечетной или четной, достаточно проводить исследования и строить эскиз графика при $x\geq 0$. Далее его можно симметрично отобразить относительно начала координат для нечетной функции, или относительно оси Oy для четной.

3) Исследовать поведение функции вблизи границ области определения и точек разрыва.

4) Найти $f'(x)$ и с ее помощью определить интервалы монотонности функции, точки экстремума и экстремальные значения функции.

5) Найти $f''(x)$, с ее помощью определить направления выпуклости графика функции и найти точки перегиба графика функции.

6) Определить координаты точек пересечения графика функции с осями координат (для нахождения точки пересечения графика с осью Ox решаем уравнение $f(x)=0$; для нахождения точки пересечения графика с осью Oy подставляем в аналитическое выражение функции значение $x=0$); другие вспомогательные точки.

7) Найти асимптоты графика.

8) Используя все полученные результаты, построить график функции.

<u>Пример 8.7.</u> Исследовать функцию $y=\dfrac{x^2}{2(x-1)}$ и построить ее график.

Решение.

1) $D(y)=(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

2) $y(-x)=\dfrac{(-x)^2}{2(-x-1)}=-\dfrac{x^2}{2(x+1)}$, т.е. $y(-x)\neq -y(x)$ и $y(-x)\neq y(x)$.

Функция является функцией общего вида, непериодической.

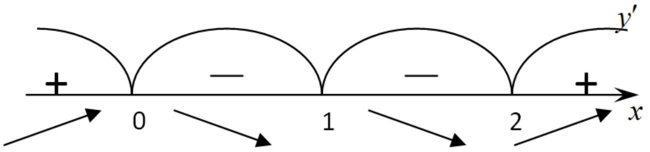
3)
$$\lim_{x\to 1-0}\frac{x^2}{2(x-1)}=\lim_{x\to 1-0}\frac{(1-0)^2}{2(1-0-1)}=-\infty;$$
$$\lim_{x\to 1+0}\frac{x^2}{2(x-1)}=\lim_{x\to 1-0}\frac{(1+0)^2}{2(1+0-1)}=+\infty$$

4) $y'=\dfrac{2x\cdot 2(x-1)-2x^2}{4(x-1)^2}=\dfrac{4x^2-4x-2x^2}{4(x-1)^2}=\dfrac{2x^2-4x}{4(x-1)^2}=\dfrac{x^2-2x}{2(x-1)^2}$.

$y'=0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-2x=0 \quad x=0$ или $x=2$.

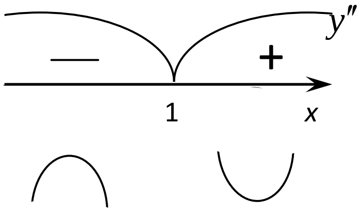
y' не существует в точке $x=1$, но она не входит в область определения функции. Следовательно, имеются две стационарные точки $x=0$ и $x=2$.

Разобьем этими точками область определения на интервалы: $(-\infty;0)$, $(0;1)$, $(1;2)$, $(2;+\infty)$. Определим знаки производной в этих интервалах.



Используя достаточные условия монотонности и экстремума, можно сделать следующие выводы: функция возрастает в интервалах $(-\infty;0)$ и $(2;+\infty)$, убывает в $(0;1)$ и $(1;2)$. Значение максимума $y_{\max} = y(0) = 0$, значение минимума $y_{\min} = y(2) = 2$.

5) $y'' = \dfrac{(2x-2)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^2-2x)}{2(x-1)^4} = \dfrac{1}{(x-1)^3}$.



y'' не обращается в 0, а в точке 1, где y'' не существует, функция не определена, поэтому график функции не имеет точки перегиба. В силу достаточных условий выпуклости и вогнутости графика в интервале $(-\infty;1)$ график выпуклый (вверх), а в интервале $(1;+\infty)$ график вогнутый (выпуклый вниз).

6) Так как $\dfrac{x^2}{2(x-1)} = 0 \iff x = 0$, то график пересекает оси координат только в точке $(0;0)$.

7)Так как $\lim\limits_{x\to 1-0} \dfrac{x^2}{2(x-1)} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 1+0} \dfrac{x^2}{2(x-1)} = +\infty$, то прямая $x = 1$ – вертикальная асимптота графика функции.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{2x(x-1)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{2x^2-2x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2\left(2-\frac{2}{x}\right)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{2-\frac{2}{x}} = \frac{1}{2}.$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2}{2(x-1)}-\frac{x}{2}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-x^2+x}{2x}=\frac{1}{2}.$$

Следовательно, прямая $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ – наклонная асимптота графика функции при $x\to\pm\infty$.

8) Построим график функции. Сначала изобразим асимптоты $x=1$ и $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ (пунктирной линией). Наносим на чертеж точки (0, 0) и (2, 2), найденные в пункте 4. Проводим через эти точки линию, согласно результатам исследования функции в пунктах 4, 5, 6. Еще раз сравниваем полученный график с результатами исследования и убеждаемся в правильности построения графика.

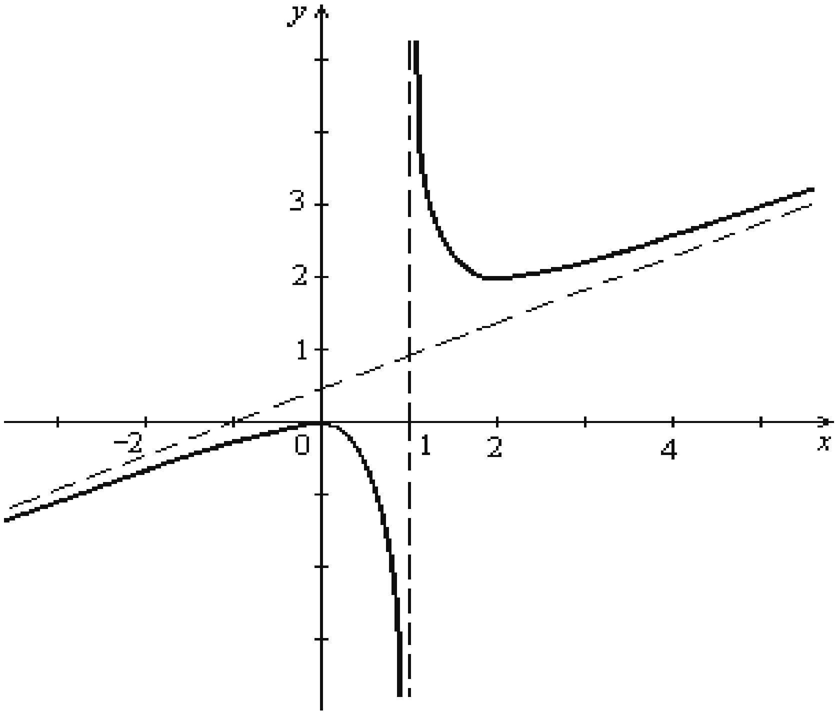


Рисунок 8.5 – Графика функции $y=\dfrac{x^2}{2(x-1)}$

Итак, в данной теме рассмотрены вопросы: 1) правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей; 2 признаки возрастания и убывания функций, экстремум функции; 3) выпуклость, вогнутость и точки перегиба графика функции; 4) асимптоты графика функции; 5) схема исследования функции и построение ее графика. Излагаемый материал проиллюстрирован примерами. При подготовке по данной теме студентам рекомендуется использовать литературные источники [2,5,7,8,9, 11] и Интернет-ресурсы [12-15].

Вопросы для самопроверки:

1. Сформулируйте правило Лопиталя для раскрытия неопределенностейвида $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$. Каковы особенности его применения?

2. Сформулируйтедостаточные условия возрастания (убывания) функции. В чемгеометрический смысл этой теоремы?

3. Дать понятие экстремума функции.

4. Сформулируйтенеобходимое условие экстремумафункции.

5. Какие точки называют критическими точкамифункции?

6. Сформулируйте первое достаточное условие экстремума. Приведите схему исследования функции на экстремум по этому условию.

7.Сформулируйте второе достаточное условие экстремума. Приведите схему исследования функции на экстремум по этому условию.

8.Дать понятиевыпуклости, вогнутости графика функции.

9. Сформулируйтедостаточные условиявыпуклости графика функции.

10. Дать понятиеточки перегиба графика функции.Сформулируйте достаточное условиесуществования точки перегиба.

11. Приведите схемуисследования на выпуклость и точки перегиба графика функции.

12. Асимптоты графика функции: понятие и виды.Нахождение асимптот.

13. Приведите схемуисследования функции и построения ее графика.

Тема 9. Функции нескольких переменных

План лекции:

1. Функции двух и многих переменных. Область определения функции.

2.Частные производныепервогопорядка от функции нескольких переменных.

3. Частные производныевысших порядков от функции нескольких переменных

4.Дифференциал I-го порядка функций нескольких переменных,свойство инвариантности.

5.Дифференциалы высших порядковфункций нескольких переменных.

1. Функции двух и многих переменных. Область определения функции

Многим явлениям, в том числе и в информационной среде,присуща многофакторная зависимость. Исследование такихзависимостей потребовало совершенствования математическогоаппарата, в частности введения понятия функции несколькихпеременных.

Остановимся, в основном, на случае функции двух переменных. Определения и полученные результаты легко распространить и на случай большего числа переменных.

Определение 1. Если каждой паре $(x;y)$ значений двух независимых переменных из некоторой области D соответствует по некоторому правилу или закону определённое значение величины z, то z называется **функцией двух переменных** в области D, и пишут $z=f(x,y)$.

Если паре чисел $(x;y)$ соответствует одно значение z, то функция называется однозначной, а если более одного, то – многозначной.

Например, закон Ома: $U=IR$ – функция двух переменных; работа постоянной силы на прямолинейном перемещении: $A=FS\cos\alpha$ – функция трёх переменных.

Определение 2. Множество значений $(x;y)$, при которых функция $z=f(x,y)$ существует, называется**областью определения** функции.

Пример 9.1.Найти область определения функций:

1. $z=\sqrt{1-x^2-y^2} \Rightarrow 1-x^2-y^2 \geq 0$, т.е. областью определения данной функции является круг $x^2+y^2 \leq 1$.

2. $z=\ln(xy) \Rightarrow xy>0$, т.е. область определения – первая и третья координатные четверти без координатных осей.

Геометрически функцию двух переменных можно представить как поверхность, уравнение которой $z=f(x, y)$. Например, уравнение функции $z=f(x, y)$геометрически представляет параболоид.

2.Частные производные первого порядка от функции нескольких переменных

Дадим независимой переменной x приращение Δx , тогда функция $z=f(x, y)$ получит приращение, которое называется **частным приращением**функцииz по x; обозначается так

$$\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x, y) .$$

Аналогично определяется**частное приращение**z по y:

$$\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x, y) .$$

Если же приращение получают одновременно x и y, то приращение

$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$называется **полным**.

Определение 3.Частной производной функции несколькихпеременных по одной изэтих переменных называетсяпредел отношения соответствующегочастного приращенияфункции к приращениюрассматриваемой независимойпеременной при стремлениипоследнего к нулю (если этотпредел существует)

Частной производной от функции $z=f(x, y)$ по переменной x называется предел

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\frac{\partial z}{\partial x}, \qquad (9.1)$$

или другие обозначения: z'_x, $f'_x(x,\ y)$.

Аналогично,

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\frac{\partial z}{\partial y}, \qquad (9.2)$$

или z'_y, $f'_y(x,\ y)$.

Геометрическим смыслом частной производной (допустим $\frac{\partial z}{\partial x}$) является тангенс угла наклона касательной, проведенной в точке $N_0(x_0, y_0, z_0)$к сечению поверхности плоскостью$y = y_0$.

Из определения частных производных следует,что для *нахождения производной* $z'_x(x;y)$ надо считать постояннойпеременную y , а для нахождения $z'_y(x;y)$ – переменную x .При этомсохраняются известные правила и формулы дифференцирования функции одного переменного.

Пример9.2.Найти частные производные функции

$$z=(x^2+y^3)\sin(xy).$$

Решение:

$$z'_x=\frac{\partial z}{\partial x}=2x\sin(xy)+(x^2+y^3)y\cos(xy);$$

$$z'_y=\frac{\partial z}{\partial y}=3y^2\sin(xy)+(x^2+y^3)x\cos(xy).$$

3. Частные производные высших порядков от функции нескольких переменных

Пусть имеем функцию $z = f(x,y)$, тогда частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}=f'_x(x,y)$, $\frac{\partial z}{\partial y}=f'_y(x,y)$также являются функциями двух переменных x и y . Поэтому от них можно снова находить частные производные.

Следовательно, частных производных второго порядка от функции двух переменных – четыре, так как каждую функцию $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ можно дифференцировать как по x, так и по y.

Вторые частные производные обозначаются так:

1) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=z''_{xx},$ – вторая производная функции z по x;

2) $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=z''_{yy}$– вторая производная функции z по y;

3) $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=z''_{xy}$ – от первой производной по x берется вторая производная по y.

4) $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=z''_{yx}$ - от первой производной по y берется вторая производная по x.

Производные вида $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ называются **смешанными** производными.

Производную второго порядка можно снова дифференцировать как по x, так и по y. Получим частные производные третьего порядка, их будет уже восемь:

1) $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$, 2) $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$, 3) $\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y\partial x}$, 4) $\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$,

5) $\frac{\partial^3 z}{\partial y\partial x^2}$, 6) $\frac{\partial^3 z}{\partial y\partial x\partial y}$, 7) $\frac{\partial^3 z}{\partial y^2\partial x}$, 8) $\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$.

В общем случае частная производная $n-$го порядка есть производная от производной $(n-1)-$го порядка.

<u>Пример 9.3.</u> Для функции $z=\sin(xy)$ найти частные производные второго порядка.

Решение. Найдем производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(\sin xy)=y\cos(xy); \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(\sin xy)=x\cos(xy).$$

Тогда производные второго порядка будут равны:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(y\cos(xy))=-y^2\sin(xy);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(y\cos(xy))=\cos(xy)-xy\sin(xy);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(x\cos(xy))=\cos(xy)-xy\sin(xy);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(x\cos(xy))=-x^2\sin(xy).$$

Из решения видно, что смешанные производные данной функции равны, что не является частным случаем. Имеет место теорема, которую приведем без доказательства.

Теорема Шварца. Если частные производные высшего порядка непрерывны, то смешанные производные одного порядка, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, равны между собой.

В частности, для функция $z=f(x,y)$ верно соотношение

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}. \tag{9.3}$$

4.Дифференциал I-го порядка функций нескольких переменных, свойство инвариантности

Функция $z=f(x,y)$ называется дифференцируемой в точке M если её полное приращение $\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$ в этой точке может быть представлено в виде:

$$\Delta z=A\cdot\Delta x+B\cdot\Delta y+\alpha\cdot\Delta x+\beta\cdot\Delta y,$$

где $\alpha=\alpha(\Delta x,\Delta y)\to 0$ и $\beta=\beta(\Delta x,\Delta y)\to 0$ при $\Delta x\to 0,\quad \Delta y\to 0$. Сумма первых двух слагаемых в этом равенстве представляет собой главную часть приращения функции.

Определение 4. Главная часть приращения функции $z=f(x,y)$, линейная относительно Δx и Δy называется полным **дифференциалом** этой функции:

$$dz=A\cdot\Delta x+B\cdot\Delta y.$$

Выражения $A\cdot\Delta x$ и $B\cdot\Delta y$ называются частными дифференциалами. Для независимых переменных x и y полагают $\Delta x=dx,\quad \Delta y=dy$. Если функция дифференцируема в точке M, то в этой точке существуют производные $A=\frac{\partial z}{\partial x}$ и $B=\frac{\partial z}{\partial y}$ и дифференциал функции имеет вид

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy. \tag{9.4}$$

Для функции $u=f(x,y,z)$ дифференциал I-го порядка имеет вид:

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz \text{ .(9.5)}$$

Дифференциал I-го порядка функций нескольких переменных обладает свойством **инвариантности**, т.е. его форма не меняется в случае, если переменные сами являются функциями других переменных. Так, если и $x=x(u,v)$ $y=y(u,v)$, то

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv.$$

Пример 9.4. Найти полный дифференциал функции $z=\frac{y}{x^2-y^2}$.

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-2yx}{(x^2-y^2)^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y'(x^2-y^2)-y(-2y)}{(x^2-y^2)^2}=\frac{x^2-y^2+2y^2}{(x^2-y^2)^2}=\frac{x^2+y^2}{(x^2-y^2)^2}.$$

Тогдаполный дифференциал функции имеет вид:

$$dz=-\frac{2xy}{(x^2-y^2)^2}dx+\frac{x^2+y^2}{(x^2-y^2)^2}dy.$$

5. Дифференциалы высших порядков функций нескольких переменных

Полный дифференциал функции, также называют дифференциалом первого порядка:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Дифференциалом 2-го порядка называют дифференциал от дифференциала I-го порядка, т.е.

$$d^2z=d\left(dz\right)=d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.$$

Аналогичным образом определяются $d^3z=d\left(d^2z\right);\ldots d^nz=d\left(d^{n-1}z\right)$. Имеет место символическая формула

$$d^nz=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n\cdot z.$$

Например:

$$d^3z=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3\cdot\left(z\right)==\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3+3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}dx^2dy+3\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}dxdy^2+\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3.$$

<u>Пример 9.5.</u> Найти дифференциал dz и d^2z функции $z=\frac{x}{y}$.

<u>Решение</u>: Найдём частные производные I-го и 2-го порядков:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\frac{x}{y}\right)'_x=\frac{1}{y};\ \frac{\partial z}{\partial y}=\left(\frac{x}{y}\right)'_y=x\left(\frac{1}{y}\right)'_y=-\frac{x}{y^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(\frac{1}{y}\right)_x^{'}=0;\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\left(\frac{x}{y^2}\right)_y^{'}=-x\left(y^{-2}\right)_y^{'}=2xy^{-3}=\frac{2x}{y^3};\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(\frac{1}{y}\right)_y^{'}=-\frac{1}{y^2}$$

В общем виде дифференциалы имеют вид:

$$dz=\frac{1}{y}dx-\frac{x}{y^2}dy; \qquad d^2z=-\frac{2}{y^2}dxdy+\frac{2x}{y^3}dy^2.$$

Итак, в данной теме рассмотрены вопросы: 1) функции двух и многих переменных; область определения функции; 2) частные производные первого порядка от функции нескольких переменных; 3) частные производные высших порядков от функции нескольких переменных; 4) дифференциал I-го порядка функций нескольких переменных, свойство инвариантности; 5) дифференциалы высших порядков функций нескольких переменных. Излагаемый материал проиллюстрирован примерами. При подготовке по данной теме студентам рекомендуется использовать литературные источники [2,5,7,8,9,10] и Интернет-ресурсы [12-15].

Вопросы для самопроверки:

1. Дайте понятие функции нескольких переменных.

2. Как определяется область определения функциинескольких переменных?

3.Что представляет геометрически функция двух переменных? Приведите примеры.

4. Дайте понятия частных производных первого порядка от функции нескольких переменных.

5. Как находят частную производную функции несколькихпеременных $z'_x(x;y)$ и $z'_y(x;y)$?

6. Дайте понятия частных производных высших порядков от функции нескольких переменных.

7. Какие производные называются смешанными производными?Приведите примеры.

8. Сформулируйте теорему Шварца.

9.Дайте понятиедифференциалаI-го порядка функций нескольких переменных. В чем состоит свойство его инвариантности?

10. Дайте понятие дифференциалов высших порядков функций нескольких переменных.

РАЗДЕЛ 4. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Тема 10: Неопределенный интеграл и его свойства

План лекции:

1. Первообразная функция и неопределенный интеграл.
2. Основные свойства неопределенного интеграла.
3. Таблица основных интегралов. Непосредственное интегрирование.

1. Первообразная функция и неопределенный интеграл

Основной задачей дифференциального исчисления является нахождение производной или дифференциала данной функции. Интегральное исчисление решает обратную задачу – нахождение самой функции по ее производной или дифференциалу.

<u>**Определение 1.**</u> Функция $F(x)$ называется **первообразной** функции $f(x)$ на промежутке X, если в каждой точке этого промежутка выполнятся равенство:

$$F'(x)=f(x). \tag{10.1}$$

Например, $F(x)=x^4$ является первообразной для $f(x)=4x^3$, так как $(x^4)'=4x^3$. Любая функция вида $F(x)=x^4+C$, где C – произвольная постоянная также является первообразной для $f(x)=4x^3$.

Приведем основные теоремы о первообразных без доказательства.

Теорема 1. Если $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$, то функция $F(x)+C$, где $C=const$ определяет все возможные первообразные функции $f(x)$.

Теорема 2. Если $F_1(x)$и $F_2(x)$ – две первообразные для функции $f(x)$ на некотором промежутке X, то найдется такоечисло C, что будет справедливо равенство:

$$F_2(x)=F_1(x)+\mathrm{C}$$

(две первообразные одной функции отличаются на постоянную).

Определение 2.Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$на промежутке X называется **неопределенным интегралом** отфункции $f(x)$и обозначается $\int f(x)\,dx$,где $\int$ – знак интеграла; $f(x)$ –подынтегральнфя функция; $f(x)dx$ – подынтегральное выражение. ; $F(x)$ - первообразная функция; C - произвольная постоянная.Таким образом,

$$\int f(x)dx = F(x) + C ,(10.2)$$

где, $F(x)$ – некоторая первообразная для $f(x)$; C – произвольная постоянная.

Знак интеграла есть вытянутый символ S от латинского Summa.Введен Лейбницем. Термин «интеграл» введен ЯкобомБернулли от латинского слова integralis(целостный) или, подругому предположению от integro(восстанавливать).

Отыскание для даннойпроизвольнойфункции $f(x)$ ее первообразной называется *интегрированием*(а весь комплекс связанных с этим вопросов — *интегральнымисчислением).* Как видим, эта задача является обратной поотношению к дифференцированию, поэтому верность интегрирования проверяется дифференцированием функции, полученной в результате решения.

Геометрически неопределенный интеграл представляет собой семейство «параллельных» кривых $y = F(x) + C$ (каждому числовому значению Cсоответствует определенная кривая семейства). График каждой первообразной (кривой) называется интегральной кривой.

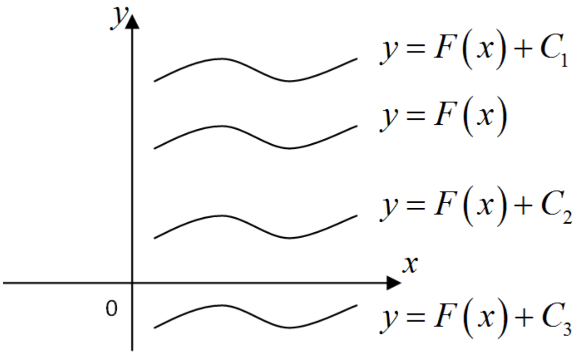


Рисунок 10.1– семействоинтегральных кривых

Имеет место **теорема**, утверждающая, что всякая непрерывная на интервале $(a;b)$ функция имеет на этом интервале первообразную, а следовательно, и неопределенный интеграл.

2. Основные свойства неопределенного интеграла

1.Производная от неопределённого интеграла равна подынтегральной функции, т.е.

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

Доказательство:$\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x)+C\right)' = F'(x)+C' = f(x)$.

2.Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральномувыражению ,т.е.

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$$

Доказательство:$d\left(\int f(x)dx\right) = \left(\int f(x)dx\right)' dx = f(x)dx$

3. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторойфункции равенэтой функции с точностью до постоянного слагаемого,т.е.

$$\int dF(x) = F(x)+C.$$

Доказательство:$\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x)+C$.

4. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx,$$

где k – некоторое число.

5. Интеграл от алгебраической суммы двух функций равен такойже сумме интегралов от этих функций:

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

Это свойство остается справедливым для любого конечного числа слагаемых.

6.(Инвариантность формулы интегрирования). Если $\int f(x)dx = F(x) + C,$ то и $\int f(u)du = F(u) + C,$ где $u = \varphi(x)$ – произвольная функция, имеющая непрерывную производную.

Это свойство говорит о том, что формула для неопределенного интеграла остается справедливой независимо от того, является ли переменная интегрирования независимой переменной или любой функцией от неё, имеющей непрерывную производную.

3. Таблица основных интегралов.Непосредственное интегрирование

Нахождение значения неопределенного интеграла связано главным образом с нахождением первообразной функции. Для удобства значения неопределенных интегралов большинства элементарных функций собраны в специальные таблицы интегралов, которые бывают иногда весьма объемными. В них включены различные наиболее часто встречающиеся комбинации функций. Но большинство представленных в этих таблицах формул являются следствиями друг друга, поэтому ниже приведем таблицу основных интегралов, с помощью которой можно получить значения неопределенных интегралов различных функций:

1) $\int 0 \cdot dx = C.$

2) $\int 1\cdot dx = x + C.$

3) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C(n \neq -1).$

4) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C(x \neq 0).$

5) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C(0 < a \neq 1).$

6) $\int e^x dx = e^x + C.$

7) $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

8) $\int \cos x dx = \sin x + C.$

9) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C.$

10) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C.$

11) $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C.$ $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C.$

12) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$

13) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + k}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + k}\right| + C.$

14) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C(a \neq 0).$

15) $\int tgxdx = -\ln|\cos x| + C$

16) $\int \mathrm{c}tgxdx = \ln|\sin x| + C$

Справедливость записанной таблицы интегралов проверяется непосредственным дифференцированием.

Метод непосредственного интегрирования основан на применении таблицы интегралов, свойств неопределенного интеграла и на тождественных преобразованиях подынтегральной функции. Рассмотрим его на примерах.

Пример 10.1.Найти интеграл $\int \frac{dx}{x^3}$ и проверить результат дифференцированием.

Решение.Преобразуем подынтегральную функцию $\frac{1}{x^3}=x^{-3}$, тогда

$$\int \frac{dx}{x^3}=\int x^{-3}dx=\frac{x^{-3+1}}{-3+1}+C=\frac{x^{-2}}{-2}+C=-\frac{1}{2x^2}+C.$$

Проверка.Найдем дифференциал полученной функции:

$$d\left(-\frac{1}{2x^2}+C\right)=d\left(-\frac{1}{2x^2}\right)+d\left(C\right)=d\left(-\frac{1}{2}x^{-2}\right)+0=$$

$$=\left(-\frac{1}{2}x^{-2}\right)'\cdot dx=-\frac{1}{2}\cdot\left(-2\right)x^{-2-1}\cdot dx=x^{-3}dx=\frac{dx}{x^3}.$$

Пример 10.2.Найти неопределенный интеграл $\int 3^x\cdot 5^x dx$ и проверить результат дифференцированием.

Решение.Так как $3^x\cdot 5^x=\left(3\cdot 5\right)^x=15^x$, тогда получим

$$\int 3^x\cdot 5^x\cdot dx=\int 15^x dx=\frac{15^x}{\ln 15}+C.$$

Проверка.Найдем производную от полученного результата:

$$\left(\frac{15^x}{\ln 15}+C\right)'=\left(\frac{15^x}{\ln 15}\right)'+\left(C\right)'=\frac{1}{\ln 15}\left(15^x\right)'+0=\frac{1}{\ln 15}\cdot 15^x\cdot\ln 15=15^x.$$

Пример 10.3. Найти неопределенный интеграл $\int \frac{du}{2u^2-6}$.

Решение.В знаменателе подынтегральной функции общий множитель 2 вынесем за скобку, тогда постоянный множитель подынтегральной функции $\frac{1}{2}$ вынесем за знак интеграла (используем четвертое свойство):

$$\int\frac{du}{2u^2-6}=\int\frac{du}{2\left(u^2-3\right)}=\frac{1}{2}\int\frac{du}{u^2-3}=\frac{1}{2}\int\frac{du}{u^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}.$$

Воспользуемся формулой из таблицы интегралов, где $a=\sqrt{3},$ тогда получим:

$$\int\frac{du}{2u^2-6}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{u-\sqrt{3}}{u+\sqrt{3}}\right|+C=\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\left|\frac{u-\sqrt{3}}{u+\sqrt{3}}\right|+C.$$

Пример 10.4.Найти неопределенный интеграл $\int x\sqrt{x}dx.$

Решение.Так как $x\sqrt{x}=x\cdot x^{\frac{1}{2}}=x^{1+\frac{1}{2}}=x^{\frac{3}{2}}$, тогда получим:

$$\int x\sqrt{x}dx=\int x^{\frac{3}{2}}dx=\frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}+C=\frac{x^{\frac{5}{2}}}{5/2}+C=\frac{2}{5}\sqrt{x^5}+C.$$

Пример 10.5.Найти неопределенный интеграл $\int\left(x-\frac{1}{x}\right)^2dx.$

Решение.Преобразуем подынтегральную функцию:

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=x^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=x^2-2+x^{-2}.$$

Тогда получим (согласно пятому свойству)

$$\int\left(x-\frac{1}{x}\right)^2dx=\int\left(x^2-2+x^{-2}\right)dx=\int x^2dx-\int 2dx+\int x^{-2}dx=$$

$$=\frac{x^{2+1}}{2+1}-2\int dx+\frac{x^{-2+1}}{-2+1}=\frac{x^3}{3}-2x+\frac{x^{-1}}{-1}+C=\frac{x^3}{3}-2x-\frac{1}{x}+C.$$

Пример 10. 6.Найти неопределенный интеграл $\int tg^2xdx.$

Решение.$tg^2x=\frac{\sin^2x}{\cos^2x}=\frac{1-\cos^2x}{\cos^2x}=\frac{1}{\cos^2x}-\frac{\cos^2x}{\cos^2x}=\frac{1}{\cos^2x}-1.$

Используя преобразованный вид функции и свойства интегралов, получим:

$$\int tg^2xdx=\int\left(\frac{1}{\cos^2x}-1\right)dx=\int\frac{dx}{\cos^2x}-\int dx=tgx-x+C.$$

Пример 10.7.Найти неопределенный интеграл $\int \frac{x^3 - 5x^2 + 7\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\,dx.$

Решение.Преобразуем подынтегральную функцию:

$$\frac{x^3 - 5x^2 + 7\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} = \frac{x^3}{x^{1/3}} - \frac{5x^2}{x^{1/3}} + \frac{7x^{1/2}}{x^{1/3}} =$$

$$= x^{3-\frac{1}{3}} - 5x^{2-\frac{1}{3}} + 7x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = x^{\frac{8}{3}} - 5x^{\frac{5}{3}} + 7x^{\frac{1}{6}}.$$

Данный интеграл будет равен:

$$\int \frac{x^3 - 5x^2 + 7\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx = \int\left(x^{8/3} - 5x^{5/3} + 7x^{1/6}\right)dx = \int x^{8/3}dx - 5\int x^{5/3}dx +$$

$$+7\int x^{1/6}dx = \frac{x^{8/3+1}}{8/3+1} - 5\cdot\frac{x^{5/3+1}}{5/3+1} + 7\cdot\frac{x^{1/6+1}}{1/6+1} + C = \frac{x^{11/3}}{11/3} - 5\frac{x^{8/3}}{8/3} +$$

$$+7\cdot\frac{x^{7/6}}{7/6} + C = \frac{3}{11}x^{11/3} - 5\cdot\frac{3}{8}x^{8/3} + 7\cdot\frac{6}{7}x^{7/6} + C = \frac{3}{11}\sqrt[3]{x^{11}} - \frac{15}{8}\sqrt[3]{x^8} +$$

$$+6\sqrt[6]{x^7} + C.$$

Итак, в данной теме рассмотрены основы интегрального исчисления:1) первообразная функция и неопределенный интеграл; 2) основные свойства неопределенного интеграла; 3) таблица основных интегралов и метод непосредственного интегрирования. Излагаемый материал проиллюстрирован примерами. При подготовке по данной теме студентам рекомендуется использовать литературные источники [1,5,7,8,9,11] и Интернет-ресурсы [12-15].

Вопросы для самопроверки:

1. Дайте определение первообразной функции для функции $f(x)$ на промежутке X.

2. Приведите примеры функций, имеющих первообразные.

3. Приведите примеры двух различных первообразных для одной и той же функции $f(x)$.

4. Что называется неопределенным интегралом?

5.Сформулируйте основные свойства неопределенного интеграла.

6. Напишите таблицу основных интегралов.
7. В чем состоит метод непосредственного интегрирования?

Тема11. Основные методы интегрирования

План лекции:

1. Замена переменной (подстановка) в неопределенном интеграле.
2. Интегрирование по частям.
3. Интегрирование некоторых рациональных выражений.

1. Замена переменной (подстановка) в неопределенном интеграле

В отличие от дифференцирования, где для нахождения производной использовались четкие приемы и методы, правила нахождения производной, наконец, определение производной, для интегрирования такие методы недоступны. Если при нахождении производной мы пользовались, так сказать, конструктивными методами, которые, базируясь на определенных правилах, приводили к результату, то при нахождении первообразной приходится в основном опираться на знания таблиц производных и интегралов (первообразных).

Метод непосредственного интегрирования применим только для некоторых весьма ограниченных классов функций. Функций, для которых можно с ходу найти первообразную очень мало. Поэтому в большинстве случаев при интегрировании применяются метод замены переменной и метод интегрирования по частям.

Теорема. Если требуется найти интеграл $\int f(x)dx$, но сложно отыскать первообразную, то с помощью замены $x=\varphi(t)$ и $dx=\varphi'(t)dt$ получается:

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \qquad (11.1)$$

где $x=\varphi(t)$ – функция, дифференцируемая на рассматриваемом промежутке.

Доказательство. Найдем производные по переменной t от левой и правой частей (11.1):

$$\left(\int f(x)dx\right)'_t = \left(\int f(x)dx\right)'_x \cdot x'_t = f(x)\cdot \varphi'(t),$$

$$\left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\right)'_t = f(\varphi(t))\varphi'(t)$$

(свойство 1 неопределенного интеграла).

Так как $x = \varphi(t)$, то эти производные равны,что с учетом введенных обозначений и является исходным предположением.

Замечание. После интегрирования в новой переменной необходимо от переменной t вернуться к переменной x.

Формула (11.1) показывает, что переходя к новой переменной, достаточно выполнить замену переменной в подынтегральном выражении. Удачная замена переменной позволяет упростить исходный интеграл, а в простейших случаях свести его к табличному.

Пример 11.1. Найти неопределенный интеграл $\int \sqrt{\sin x}\cos x dx$.

Решение. Сделаем замену $t = sinx$, тогда $dt = cosx dt$.

$$\int \sqrt{\sin x}\cos x dx = \begin{vmatrix} t = sinx \\ dt = cosx\, dt \end{vmatrix} \int \sqrt{t}dt = \int t^{1/2}dt = \frac{2}{3}t^{3/2} + C = \frac{2}{3}\sin^{3/2} x + C.$$

Пример 11.2. Найти интеграл $\int x(x^2+1)^{3/2}dx.$

Решение:

$$\int x(x^2+1)^{3/2}dx = \begin{vmatrix} t = x^2+1 \\ dt = 2xdx; \\ dx = \dfrac{dt}{2x} \end{vmatrix} = \int t^{3/2}\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int t^{3/2}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}t^{5/2} + C = \frac{t^{5/2}}{5} + C =$$

$$= \frac{(x^2+1)^{5/2}}{5} + C.$$

Пример 11.3. Найти $\int \sqrt[3]{x-2}\, x dx$.

Решение:

$$\int\sqrt[3]{x-2}\;x\,dx=\left|\begin{array}{c} x-2=t^3,\quad x=t^3+2\\ dx=3t^2dt,\\ t=\left(x-2\right)^{\frac{1}{3}}\end{array}\right|=\int t\left(t^3+2\right)3t^2dt==3\int\left(t^6+2t^3\right)dt=$$

$$=3\left(\frac{t^7}{7}+2\frac{t^4}{4}\right)+C=\frac{3}{7}\left(x-2\right)^{\frac{7}{3}}+\frac{3}{2}\left(x-2\right)^{\frac{4}{3}}+C$$

Следует отметить, что новую переменную можно не выписывать явно (в таких случаях говорят о *преобразовании функции под знаком дифференциала* или о введении постоянных и переменных под знак дифференциала).

Пример 11.4. Найти интеграл $\int\cos\left(3x+2\right)dx.$

Решение. Используя свойства дифференциала, получим:

$$dx=\frac{1}{3}d\left(3x\right)=\frac{1}{3}d\left(3x+2\right).$$

Тогда

$$\int\cos\left(3x+2\right)dx=\int\frac{1}{3}\cos\left(3x+2\right)d\left(3x+2\right)=\frac{1}{3}\int\cos\left(3x+2\right)d\left(3x+2\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\sin\left(3x+2\right)+C.$$

В этом примере для нахождения интеграла была использована линейная подстановка $t=kx+b$, где k и $b-$ некоторые числа $k\neq 0$. В общем случае справедлива следующая теорема, которая тоже позволяет упрощать процесс нахождения интегралов.

Теорема. Пусть $F(x)$ – некоторая первообразная для функции $f(x)$. Тогда

$$\int f(kx+b)dx=\frac{1}{k}F(kx+b)+\mathrm{C}, \tag{11.2}$$

где k и $b-$ некоторые числа $k\neq 0$.

Доказательство. Используя определение интеграла, отметим

$$\int f(kx+b)d(kx+b)=F(kx+b)+\mathrm{C}.$$

Но $d(kx+b)=(kx+b)'dx=kdx$. Вынося постоянный множитель k за знак интеграла и деля левую и правую части равенства на k, приходим к (11.2).

Данная теорема утверждает, что если вместо аргумента x подынтегральной функции $f(x)$ и первообразной $F(x)$ подставить выражение $(kx+b)$, то этоприведет к появлению дополнительного множителя $\frac{1}{k}$ перед первообразной.

2. Интегрирование по частям

Теорема.Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы и интеграл $\int vdu$ существует, то и интеграл $\int udv$ также существует и

$$\int udv = uv - \int vdu. \tag{11.3}$$

Доказательство. Дифференциал произведения двух функций:

$$d(uv) = vdu + udv.$$

Интегрируя последнее равенство, получим

$$\int d(uv) = \int (vdu + udv),\ uv = \int vdu + \int udv \Rightarrow \int udv = uv - \int vdu .$$

Формула (11.3) называется **формулой интегрирования по частям**для неопределенного интеграла. Эта формула дает возможность свести вычисление интеграла $\int udv$ к вычислению интеграла $\int vdu$, который может оказаться существенно более простым, чем исходный, или когда он будет ему подобен.

Для применения формулы (11.3) к некоторому интегралу $\int f(x)dx$ следует подынтегральное выражение $f(x)dx$ представить в виде произведения двух множителей: u и dv; за dv всегда выбирается такое выражение, содержащее dx, из которого посредством интегрирования можно найти v; за u в большинстве случаев принимается функция, которая при дифференцировании упрощается. Иногда формулу интегрирования по частям приходится использовать несколько раз.

Укажем некоторые типы интегралов, которые удобно вычислить методом интегрирования по частям.

1. Интегралы вида $\int P(x)e^{ax}dx,$ $\int P(x)\sin(ax)dx,$ $\int P(x)\cos(ax)dx,$ где $P(x)-$ многочлен, $a-$ число, $a \neq 0$. Удобно положить $u = P(x)$, а за dv обозначить все остальные сомножители подынтегрального выражения, то есть

$$dv = \begin{cases} e^{ax}dx, \\ \sin(ax)dx, \\ \cos(ax)dx. \end{cases}$$

В данном случае формула (3) применяется столько раз, какова степень многочлена $P(x)$.

2. Интегралы вида $\int P(x)\arcsin x dx,$ $\int P(x)\arccos x dx,$ $\int P(x) arctgx dx,$ $\int P(x) arcctgx dx,$ $\int P(x)\ln x dx.$ В таких интегралах удобно положить $dv = P(x)dx$, а за u обозначить остальные сомножители, то есть

$$u = \begin{cases} \arcsin x, \\ \arccos x, \\ arctgx, \\ arcctgx, \\ \ln x. \end{cases}$$

3. Интегралы вида $\int e^{ax} \cdot \sin(bx)dx,$ $\int e^{ax} \cdot \cos(bx)dx,$ где a и $b-$ числа. В таком случае за u можно принять функцию $u = e^{ax}$ или $u = \sin(bx)$ $(u = \cos(bx))$ Формула интегрирования по частям будет применяться два раза. В повторном интегрировании по частям за u необходимо принять аналогичную в первом применении функцию. В таком случае получается уравнение относительно данного по условию интеграла,

из которого легко найти этот интеграл. При неудачном выборе u и dv в повторном интегрировании получается бесполезное тождество.

Пример 11.5. Вычислить $\int x\cos xdx$.

Решение.Данный интеграл относится к первой группе интегралов, берущихся по частям. Используя, соответствующие обозначения и формулу (3), получим:

$$\int x\cos xdx = \begin{vmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \cos dx & v = \int \cos dx = -\sin x \end{vmatrix} = -x\sin x + \int \sin xdx = .$$

$$= -x\sin x - \cos x + C$$

Пример 11.6.Найти интеграл $\int \frac{\ln x}{x^3}dx$.

Решение.

Интеграл относится ко второй группе интегралов, берущихся по частям. Пусть $u = \ln x$, $dv = \frac{dx}{x^3}$, тогда $du = (\ln x)' dx,$ $du = \frac{1}{x}dx,$

$$v = \int \frac{dx}{x^3} = \int x^{-3}dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} = \frac{x^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2x^2}.$$

Подставляя полученные результаты в формулу (3) получим

$$\int \frac{\ln x}{x^3}dx = -\frac{\ln x}{2x^2} - \int \left(-\frac{1}{2x^2}\right) \cdot \frac{1}{x}dx = -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^3} =$$

$$= -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2x^2}\right) + C = C - \frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2}.$$

Пример 11.7. Вычислить $\int e^{2x}\cos xdx$.

Решение.

Интеграл относится ктретьей группе.

$$\int e^{2x}\cos xdx = \begin{vmatrix} u = e^{2x} & du = 2e^{2x}dx \\ dv = \cos xdx & v = \sin x \end{vmatrix} = e^{2x}\sin x - \int \sin x \cdot 2e^{2x}dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u = e^{2x} & du = 2e^{2x}dx \\ dv = \sin xdx & v = -\cos x \end{vmatrix} = e^{2x}\sin x - 2\left[-e^{2x}\cos x - \int -\cos x \cdot 2e^{2x}dx\right] =$$

$$=e^{2x}\sin x+2e^{2x}\cos x-4\int\cos x e^{2x}dx.$$

Видно, что в результате повторного применения интегрирования по частям функцию не удалось упростить к табличному виду. Однако, последний полученный интеграл ничем не отличается от исходного. Поэтому перенесем его в левую часть равенства.Таким образом, мы получили алгебраическое уравнение с неизвестным интегралом:

$5\int e^{2x}\cos x dx=e^{2x}(\sin x+2\cos x)$, отсюда

$$\int e^{2x}\cos x dx=\frac{e^{2x}}{5}(\sin x+2\cos x)+C.$$

3. Интегрирование некоторых рациональных выражений

Дробно-рациональной функцией (или рациональной дробью) называется функция, равная отношению двух многочленов, то есть $f(x)=\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, где $P_m(x)$ – многочлен степени m, а $Q_n(x)$ – многочлен степени n.

Рациональная дробь называется *правильной*, если степень числителя меньше степени знаменателя, то есть $m<n$; в противном случае (если $m\geq n$) рациональная дробь называется неправильной.

Всякую неправильную рациональную дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ можно, путем деления числителя на знаменатель, представить в виде суммы многочлена (целой части) и правильной рациональной дроби.

Следующие правильные дроби называются простейшими или элементарными:

1. $\frac{A}{x-a}$;
2. $\frac{A}{(x-a)^m}$, где m – целое число, больше единицы (то есть $m\geq 2,\ m\in N$);

3. $\dfrac{ax+b}{x^2+px+q}$, где знаменатель дроби не имеет действительных корней, то есть $D=p^2-4q<0$.

Здесь $A,\ a,\ b,\ p,\ q$ – действительные числа.

Перед интегрированием рациональной дроби $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ необходимо сделать следующие алгебраические преобразования и вычисления:

1)если дана неправильная рациональная дробь, то выделить из неё целую часть, т.е. представить в виде

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=M(x)+\frac{P_1(x)}{Q(x)},$$

где $M(x)$ – многочлен, а $\dfrac{P_1(x)}{Q(x)}$ – правильная рациональная дробь;

2) разложить знаменатель дроби на линейные и квадратичные множители:

$$Q(x)=(x-a)^m\ldots(x^2+px+q)^n\ldots,\text{где}\left(\frac{p^2}{4}-q<0\right).$$

3) правильную рациональную дробь разложить на простейшие дроби:

$$\frac{P_1(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_k}{(x-a)^k}+\frac{B_1}{x-b}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\ldots+\frac{B_l}{(x-b)^l}+\ldots+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+$$

$$+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\ldots+\frac{M_mx+N_m}{(x^2+px+q)^m}+\ldots,\quad(11.4)$$

где $A_1,A_2,\ldots,M_1,N_1,\ldots$ – неопределенные (неизвестные) коэффициенты (некоторые из них могут равняться нулю).

4) Для нахождения неопределенных коэффициентов все простейшие дроби приводим к общему знаменателю $Q(x)$ и приравниваем числители обеих частей равенства. Затем сравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x. Это приводит к системе уравнений, из которых и находим значения интересующих нас коэффициенты.

Наконец, находки интегралы выделенной целой части и всех простевших дробей, которые затем складываем.

Пример 11.8. Вычислим интеграл $\int \frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x}dx$.

Решение. Так как подынтегральная функция является неправильной дробью, то вначале выделяем целую часть

$$\begin{array}{r|l} -\begin{array}{l} 5x^3+9x^2-22x-8 \\ \underline{5x^3 \qquad -20x} \end{array} & \begin{array}{l} \underline{x^3-4x} \\ 5 \end{array} \\ \hline 9x^2-2x-8 \qquad & \end{array}$$

Тогда подынтегральное выражение можно представить в виде суммы, а знаменатель разложим на множители

$$\int \frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x}dx = \int\left(5+\frac{9x^2-2x-8}{(x-2)(x+2)x}\right)dx = 5x+\int\frac{9x^2-2x-8}{(x-2)(x+2)x}dx$$

Теперь разложим дробь на сумму дробей

$$\frac{9x^2-2x-8}{(x-2)(x+2)x} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2}$$

Найдем A, B, C для этого приведем к общему знаменателю правую часть

$$\frac{9x^2-2x-8}{(x-2)(x+2)x} = \frac{A(x^2-4)+B(x^2+2x)+C(x^2-2x)}{(x-2)(x+2)x}$$

приравниваем числители

$$9x^2-2x-8 = x^2(A+B+C)+x(2B-2C)-4A,$$

тогда два многочлена одной степени равны, если равны коэффициенты при одинаковых степенях независимой переменной x

$$\begin{array}{ll} x^2: & 9=A+B+C, \\ x: & -2=2B-2C,\ B=3,\ \ C=4,\ \ A=2. \\ x^0: & -8=-4A. \end{array}$$

Вернемся к интегралу и распишем его в виде суммы дробей с найденными коэффициентами

$$\int\frac{9x^2-2x-8}{(x-2)(x+2)x}dx = 2\int\frac{1}{x}dx+3\int\frac{1}{x-2}dx+4\int\frac{1}{x+2}dx = 2\ln|x|+3\ln|x-2|+4\ln|x+2|+C.$$

Возвращаясь к исходному интегралу и используя свойства логарифмической функции, получим

$$\int \frac{5x^3 + 9x^2 - 22x - 8}{x^3 - 4x} dx = \int \left(5 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x-2} + \frac{4}{x+2} \right) dx =$$

$$= 5x + 2\ln|x| + 3\ln|x-2| + 4\ln|x+2| + C,$$

или

$$\int \frac{5x^3 + 9x^2 - 22x - 8}{x^3 - 4x} dx = 5x + \ln\left| x^2 (x-2)^3 (x+2)^4 \right| + C.$$

Замечание. Прием, которым были найдены коэффициенты A, B, C, называется способом *сравнения коэффициентов*.

Для определения коэффициентов можно применять способ *частных значений*, состоящий в следующем: аргументу x придают некоторые «удобные» значения (ими могут быть значения корней).

Вернемся к рассмотренному случаю:

$$\begin{array}{r|l} x = 0 & -8 = -4A, \quad A = 2, \\ x = 2 & 24 = 8B, \quad B = 3, \\ x = -2 & 32 = 8C, \quad C = 4. \end{array}$$

Те же самые значения коэффициентов получены проще.

Замечание. При поиске неизвестных коэффициентов рекомендуется комбинировать оба этих метода.

Итак, в данной теме рассмотрены основные методы интегрирования:1) замена переменной (подстановка) в неопределенном интеграле; 2) интегрирование по частям; 3) интегрирование некоторых рациональных выражений. Излагаемый материал проиллюстрирован многочисленными примерами. При подготовке по данной теме студентам рекомендуется использовать литературные источники [1,3,6,8,9,11] и Интернет-ресурсы [12-15].

Вопросы для самопроверки:

1. Как осуществляется замена переменной (подстановка) в неопределенном интеграле? Когда удобно использовать метод замены переменной?

2. Что значит подвести функцию под знак дифференциала? Как и когда удобно использовать подведение под знак дифференциала? Приведите примеры.

3. Как осуществляется метода интегрирования по частям?

4. Какие функции удобно интегрировать по частям?

5. Укажите три типа интегралов, вычисление которых целесообразно производить с помощью метода интегрирования по частям.

6. Изложите методы интегрирования простейших рациональных дробей I, II, III типов.

7. Изложите правило разложения правильной рациональной дроби на простейшие дроби в случае простых вещественных (действительных) корней знаменателя.

8. Какие алгебраические преобразования и вычисления необходимо сделать перед интегрированием рациональной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$?

Тема 12. Определенный интеграл и его свойства

План лекции:

1. Понятие определённого интеграла.

2.Геометрический, физический и экономический смысл определенного интеграла.

3. Основные свойства определенного интеграла.

4.Связь определенного интеграла с неопределенным, формула Ньютона-Лейбница.

1. Понятие определённого интеграла

Пусть на отрезке $[a;b]$ задана неотрицательная функция $y = f(x)$ и необходимо найти площадь S криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью абсцисс.

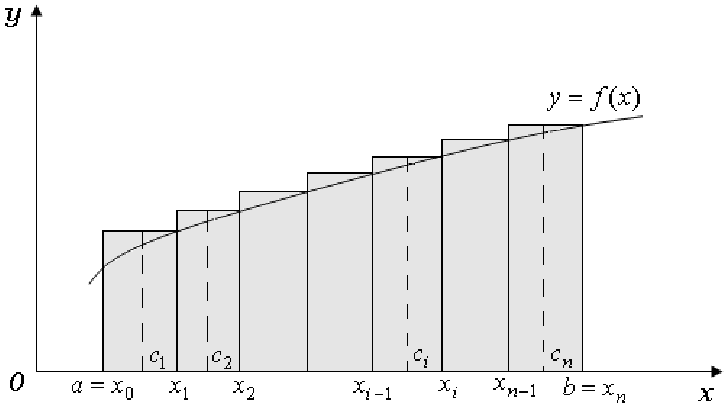


Рисунок 12.1 – Криволинейная трапеция

Выполним следующие действия:

1) с помощью точек $x_0 = a,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n = b$ $(x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n)$ разобьем отрезок $[a;b]$ произвольным способом на n частичных отрезков длиною $\mathit{\Delta} x_1 = x_1 - x_0,\quad \mathit{\Delta} x_2 = x_2 - x_1,\ \ldots\mathit{\Delta} x_n = x_n - x_{n-1};$

2) в каждом частичном отрезке $[x_{i-1};x_i]$, $i = 1,2,\ldots,n$ выберем произвольную точку $c_i \in [x_{i-1}x_i]$ и вычислим значение функции в ней, то есть величину $f(c_i)$;

3) умножим найденное значение функции $f(c_i)$ на длину Δx_i соответствующего частичного отрезка: $f(c_i)\Delta x_i$;

4) составим сумму S_n всех таких произведений

$$S_n = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \ldots + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i\ . \qquad (12.1)$$

Сумма вида (12.1) называется **интегральной суммой** функции $y=f(x)$ на отрезке $[a;b]$.Обозначим через α длину наибольшего частичного отрезка: $\alpha=\max\Delta x_i$ $(i=1,2,\dots,n)$;

5) найдем предел интегральной суммы (12.1), когда $n\to\infty$ так, что $\alpha\to0$.

<u>Определение 1</u>. Если интегральная сумма S_n (12.1) имеет предел, который не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a;b]$ на частичные отрезки, ни от выбора точек в них, то этот предел называется **определенным интегралом** от функции $y=f(x)$ на отрезке $[a;b]$ и обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx.$

Таким образом,

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\lim_{\substack{n\to\infty\\ \alpha\to0}}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i. \tag{12.2}$$

Числа a и b называются соответственно нижним и верхним пределами интегрирования, $f(x)$ – подынтегральной функцией, $f(x)dx$ подынтегральным выражением, x – переменной интегрирования, отрезок $[a;b]$– областью (отрезком) интегрирования.

Функция $y=f(x)$, для которой на отрезке $[a;b]$ существует определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$, называется **интегрируемой** на этом отрезке.

Теорема. Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ то определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ существует.

Непрерывность функции является достаточным условием её интегрируемости.

Следует заметить, что не имеет значения, какой буквой обозначена переменная интегрирования определенного интеграла:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy = \int_a^b f(t)dt$$

поскольку смена обозначений такого рода никак не влияет на поведение интегральной суммы.

Несмотря на сходство в обозначениях и терминологии, определенный и неопределенный интеграл существенно различные понятия. Так неопределенный интеграл $\int f(x)dx$ – это совокупность первообразных функций, а определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ – это число.

2.Геометрический, физический и экономический смысл определенного интеграла

Геометрический смысл определенного интеграла состоит в том, что определенный интеграл от неотрицательной функции численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x) \geq 0$, снизу – осью Ox, сбоку – прямыми $x = a$ и $x = b$.

$$\int_a^b f(x)dx = S\ .$$

Физический смысл определенного интеграла неоднозначен.

1. Если $F(x)$ − сила, параллельная оси $0X$ и ориентированная в положительном направлении оси $0X$, действующая на материальную точку при прямолинейном перемещении по промежутку $[a;b]$, то работа Aсилы $F(x)$при этом равна:

$$A = \int_a^b F(x)dx\,.$$

2. Если $V(t)$ − скорость неравномерного прямолинейного движения материальной точки, то путь S , пройденный точкой за промежуток времени $[t_1, t_2]$, при этом равен:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} V(t)\,dt.$$

3. Если $\rho(x)$ − плотность неоднородного прямолинейного стержня с концами в точках $x = a, \quad x = b$, то масса mтакого стержня равна:

$$m = \int_a^b \rho(x)dx.$$

Экономическийсмысл интеграла. Если $f(t)$ – производительность труда в момент времени t, то объем выпускаемой продукции за промежуток $[0;T]$равен:

$$V = \int_0^T f(t)dt.$$

3. Основные свойства определенного интеграла

Рассмотрим основные свойства определенного интеграла, считая подынтегральную функцию интегрируемой на отрезке $[a;b]$.

1. Если c – постоянное число и функция $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$, то

$$\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx,$$

то есть постоянный множитель c можно выносить за знак определенного интеграла.

2. Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ интегрируемы на $[a;b]$, тогда интегрируема на $[a;b]$ их алгебраическая сумма и

$$\int_a^b \left(f_1(x) \pm f_2(x) \right) dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx$$

то есть интеграл от алгебраической суммы равен алгебраической сумме интегралов. Это свойство распространяется на сумму любого конечного числа слагаемых.

3. При перестановке пределов интегрирования знак интеграла изменяется на противоположный:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

4. Определенный интеграл с одинаковыми пределами интегрирования (интеграл в точке) равен нулю:

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

5. Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$ и $a < c < b$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

то есть интеграл по всему отрезку равен сумме интегралов по частям этого отрезка. Это свойство называют аддитивностью определенного интеграла. Кроме того, свойство справедливо при любом расположении точек a,b,c (считаем, что функция $f(x)$ интегрируема на большем из получающихся отрезков).

6. «Теорема о среднем». Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то существует точка $c \in [a;b]$ такая, что

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)\cdot(b-a).$$

7. Если функция $f(x)$ сохраняет знак на отрезке $[a;b]$, где $a < b$, то интеграл $\int_a^b f(x)dx$ имеет тот же знак, что и функция. Так, если $f(x) \geq 0$ на отрезке $[a;b]$, то $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

8. Неравенство между непрерывными функциями на отрезке $[a;b]$ $(a < b)$ можно интегрировать. Так, если $f_1(x) \leq f_2(x)$ при $x \in [a;b]$, то

$$\int_a^b f_1(x)dx \leq \int_a^b f_2(x)dx.$$

4.Связь определенного интеграла с неопределенным, формула Ньютона-Лейбница

Рассмотримосновную формулу интегрального исчисления, традиционно связываемую с именами великих ученых И. Ньютона и Г.В. Лейбница. Для этого воспользуемся условием следующей вспомогательной теоремы.

Теорема. Непрерывная на отрезке $[a;b]$ функция $f(x)$ имеет на этом отрезке первообразную. Одной из первообразных является функция:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt\,.$$

Здесь переменная интегрирования обозначена буквой t , чтобы избежать путаницы с верхним переменным пределом x.

Поскольку всякая другая первообразная отличается от $F(x)$ на постоянную величину, то связь между неопределенным и определенным интегралами имеет вид:

$$\int f(x)dx = \int_a^x f(t)dt + C\,,$$

где C – произвольная постоянная.

Согласно рассмотренной теореме, непрерывная на отрезке $[a;b]$ функция $f(x)$ имеет на этом отрезке первообразную, которая определяется формулой

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + \mathrm{C}\,, \qquad (12.3)$$

где C – некоторая постоянная. Подставляя в это равенство $x = a$ и учитывая свойства определенного интеграла, получим:

$$\int_a^a f(t)dt = F(a)+\text{C}, \quad \Rightarrow \quad 0 = F(a)+\text{C}, \quad \Rightarrow \quad C = -F(a).$$

Тогда из (12.3)имеем

$$\int_a^x f(t)dt = F(x)-F(a).$$

Полагая $x = b$, получим формулу

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a). \qquad (12.4)$$

Равенство (12.4) называется **основной формулой интегрального исчисления**, или **формулой Ньютона-Лейбница**.

Если ввести обозначение $F(b)-F(a) = F(x)\Big|_a^b$ то формулу Ньютона-Лейбница (12.4) можно переписать так:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b \qquad (12.5)$$

Формула Ньютона-Лейбница дает удобный способ вычисления определенного интеграла. Чтобы вычислить определенный интеграл от непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ надо найти её первообразную функцию $F(x)$ (в этом состоит связь определенного интеграла с неопределенным) и взять разность $F(b)-F(a)$ значений этой первообразной на концах отрезка$[a;b]$.

Итак, в данной теме рассмотрены вопросы: 1) понятие определённого интеграла; 2) геометрический, физический и экономический смысл определенного интеграла; 3) основные свойства определенного интеграла; 4) связь определенного интеграла с неопределенным, формула Ньютона-Лейбница. Излагаемый материал проиллюстрирован примерами. При подготовке по данной теме студентам рекомендуется использовать литературные источники [1,3,6,8,9,11] и Интернет-ресурсы [12-15].

Вопросы для самопроверки:

1. Дать понятие интегральной суммы.
2. Дать понятие определенного интеграла.
3. В чем состоит достаточное условие интегрируемости функции.
4. В чем существенное различие понятий неопределенного и определенного интегралов?
5. Поясните геометрический, физический и экономический смысл определенного интеграла.
6. Основные свойства определенного интеграла.
7. Вывести формулу Ньютона-Лейбница.
8. При каких условиях справедлива формула Ньютона-Лейбница?
9. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на $[a;c]$ и неинтегрируема на $[c;b]$. Что можно сказать о ее интегрируемости на $[a;b]$?

Тема13. Методы вычисления определенного интеграла

План лекции:

1. Метод непосредственного интегрирования
2. Замена переменной в определенном интеграле
3. Интегрирование по частям в определенном интеграле

1. Метод непосредственного интегрирования

Согласно формуле Ньютона-Лейбница (12.4):

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

при вычислении определенного интеграла надо сначала найти первообразную $F(x)$ или неопределенный интеграл $\int f(x)dx = F(x) + C$, а затем вычислить разность $F(b) - F(a)$ значений первообразной, поэтому таблица неопределенных интегралов, справедлива и для определенных интегралов.

Метод непосредственного интегрирования в определенном интеграле основывается не только на формуле Ньютона-Лейбница, включающей умение находить первообразные по таблице интегралов, использованию основных свойств определенного интеграла, а так же на тождественных преобразованиях подынтегральной функции.

<u>Пример 13.1.</u>Вычислить интеграл $\int_0^1 \left(1+\sqrt{x}\right)^2 dx$

Решение.Преобразуем подынтегральную функцию, используя тождество квадрата суммы двух слагаемых:

$$\int_0^1 \left(1+\sqrt{x}\right)^2 dx = \int_0^1 \left(1+2\sqrt{x}+x\right)dx = \int_0^1 dx + 2\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}dx + \int_0^1 xdx =$$

$$= x\Big|_0^1 + 2\cdot \left.\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right|_0^1 + \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = 1-0+\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 + \frac{1}{2}-0 = 1+\frac{4}{3}-0+\frac{1}{2} = \frac{17}{16}.$$

<u>Пример 13.2.</u>Вычислить интеграл $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 x}dx$

Решение. Используя таблицу интегралов и формулу Ньютона-Лейбница, получим:

$$\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 x}dx = tgx\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = tg\frac{\pi}{4} - tg\frac{\pi}{6} = 1-\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3-\sqrt{3}}{3}.$$

<u>Пример 13.3.</u> Вычислить интеграл $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

Решение.Используя таблицу интегралов и формулу Ньютона-Лейбница, получим:

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x\Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} - \arcsin 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

2.Замена переменной в определенном интеграле

При вычислении определенных интегралов с использованием формулы Ньютона-Лейбница предпочтительно жестко не разграничивать этапы решения задачи (нахождение первообразной подынтегральной функции, нахождение приращения первообразной). Такой подход, использующий, в частности, формулы замены переменной и интегрирования по частям для определенного интеграла, обычно позволяет упростить запись решения.

Теорема. Пусть функция $\varphi(t)$ имеет непрерывную производную на отрезке $[\alpha;\beta]$**,** $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$ и функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке x вида $x=\varphi(t)$, где $t\in[\alpha;\beta]$.

Тогда справедливо следующее равенство:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)dt. \tag{13.1}$$

Формула (13.1) носит название *формулы замены переменной в определенном интеграле*.

Доказательство. По нашему предположению левая и правая части равенства (1) существуют и существуют первообразные подынтегральных функций. Пусть $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$. Тогда

$$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t=F[\varphi(t)]+C.$$

Это можно проверить дифференцированием обеих частей, причем правая часть дифференцируется как сложная функция. Применим формулу Ньютона-Лейбница к рассматриваемым интегралам:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a),$$

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t=F[\varphi(\beta)]-F[\varphi(\alpha)]=F(b)-F(a).$$

Так как правые части одинаковы, то одинаковы и левые части. Приравняв их, переходим к равенству (13.1). Теорема доказана.

Подобно тому, как это было в случае неопределенного интеграла, использование замены переменной позволяет упростить интеграл, приблизив его к табличному. При этом в отличие от неопределенного интеграла в данном случае нет необходимости возвращаться к исходной переменной интегрирования. Достаточно лишь найти пределы интегрирования α и β по новой переменной t как решение относительно переменной t уравнений $\varphi(t)=a$ и $\varphi(t)=b$. На практике, выполняя замену переменной, часто начинают с того, что указывают выражение $t=\psi(x)$ новой переменной через старую. В этом случае нахождение пределов интегрирования по переменной t упрощается: $\alpha=\psi(a), \quad \beta=\psi(b)$.

Пример 13.4. Вычислить интеграл $\int\limits_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx$.

Решение. Положим $\ln x=t$, тогда $\frac{dx}{x}=dt$. Если $x=1$, то $t=0$; если $x=e$, то $t=1$. Следовательно,

$$\int\limits_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx=\left|\begin{array}{c} \ln x=t \\ \frac{dx}{x}=dt \\ x=1\Rightarrow t=0 \\ x=e\Rightarrow t=1 \end{array}\right|=\int\limits_0^1 t^2dt=\frac{1}{3}t^3\Big|_0^1=\frac{1}{3}\left(1^3-0^3\right)=\frac{1}{3}.$$

Пример 13.5. Вычислить $\int\limits_3^8 \frac{1-x}{\sqrt{1+x}}dx$

Решение.

$$\int_3^8 \frac{1-x}{\sqrt{1+x}}dx = \left|\begin{array}{c} 1+x=t,\, x=t-1 \\ dx=dt \\ x=3 \Rightarrow t=4 \\ x=8 \Rightarrow t=9 \end{array}\right| = \int_4^9 \frac{1-t+1}{\sqrt{t}}dt = \int_4^9 \frac{2-t}{\sqrt{t}}dt = 2\int_4^9 \frac{dt}{\sqrt{t}} - \int_4^9 \frac{t}{\sqrt{t}}dt =$$

$$= 2\int_4^9 t^{-\frac{1}{2}}dt - \int_4^9 t^{\frac{1}{2}}dt = \left.\frac{2\cdot 2\cdot t^{\frac{1}{2}}}{1}\right|_4^9 - \left.\frac{2t^{\frac{3}{2}}}{3}\right|_4^9 = 4\left(\sqrt{9}-\sqrt{4}\right) - \frac{2}{3}\left(9\cdot 3 - 4\cdot 2\right) = 4 - \frac{38}{3} = -\frac{26}{3}$$

Пример 13.6. Вычислить $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{tg^3 x}{\cos^2 x}dx$

Решение.

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{tg^3 x}{\cos^2 x}dx = \left|\begin{array}{c} tgx = t, \quad \dfrac{dx}{\cos^2 x} = dt \\ x=0 \Rightarrow t=0 \\ x=\dfrac{\pi}{3} \Rightarrow t=\sqrt{3} \end{array}\right| = \int_0^{\sqrt{3}} t^3 dt = \left.\frac{t^4}{4}\right|_0^{\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3})^4}{4} - \frac{0^4}{4} = \frac{9}{4}.$$

Пример 13.7. Вычислить интеграл $\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}dx$.

Решение.

Положим $x = 2\sin t$, тогда $dx = 2\cos tdt$. Если $x = 0$, то $t = 0$; если $x = 2$, то $t = \frac{\pi}{2}$. Поэтому

$$\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sin^2 t\cdot\sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos tdt = 16\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cos^2 tdt =$$

$$= 16\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}\sin^2 2tdt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 4t}{2}dt = 2\left(t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4}\sin 4t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = 2\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \pi .$$

3. Интегрирование по частям в определенном интеграле

Теорема. Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a;b]$. Тогда

$$\int_a^b u\mathrm{d}v = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\mathrm{d}u, \quad (13.2)$$

где $uv\Big|_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$.

Формула (13.2) называется **формулой интегрирования по частям** для определенного интеграла.

Доказательство. Проинтегрируем равенство $d(uv) = udv + vdu$ в пределах от a до b(используя формулу Ньютона – Лейбница):

$$\int_a^b \mathrm{d}(uv) = \int_a^b u\mathrm{d}v + \int_a^b v\mathrm{d}u,$$

где $\int_a^b \mathrm{d}(uv) = uv\Big|_a^b$.

Тогда

$$\int_a^b u\mathrm{d}v = \int_a^b \mathrm{d}(uv) - \int_a^b v\mathrm{d}u,$$

$$\int_a^b u\mathrm{d}v = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\mathrm{d}u.$$

Пример 13.8. Вычислить следующие интегралы:

1) $\int_1^2 x^3 \ln x dx$;2) $\int_0^4 x\cos 2x dx$.

Решение.

$$1)\ \int_1^2 x^3 \ln x dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x, & du = \frac{1}{x}dx \\ dv = x^3 dx, & v = \frac{x^4}{4} \end{array} \right| = \ln x \frac{x^4}{4}\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^4}{4}\frac{1}{x}dx = 4\ln 2 - \frac{1}{4}\int_1^2 x^3 dx =$$

$$= 4\ln 2 - \frac{1}{16}x^4\Big|_1^2 = 4\ln 2 - 1 + \frac{1}{16} = 4\ln 2 - \frac{15}{16}$$

2) $$\int_0^4 x\cos 2x dx = \left| \begin{array}{c} u = x, \quad du = dx \\ dv = \cos 2x,\ v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{array} \right| = \frac{1}{2} x\sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x dx =$$

$$= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$$

Итак, в данной теме рассмотрены особенности основных методов интегрирования в определенном интеграле:непосредственного интегрирования, замены переменной и по частям. Излагаемый материал проиллюстрирован многочисленными примерами. Излагаемый материал проиллюстрирован примерами. При подготовке по данной теме студентам рекомендуется использовать литературные источники [1,3,6,8,9,11] и Интернет-ресурсы [12-15].

Вопросы для самопроверки:

1. В чем состоит сущность и особенности метода непосредственного интегрированияв определенном интеграле?

2. В чем состоит сущность и особенности методазамены переменной в определенном интеграле?

3. В чем состоит сущность и особенности методаинтегрирования по частям в определенном интеграле?

4. Какие функции удобно интегрировать по частям?

5. Укажите 3 типа интегралов, вычисление которых целесообразно производить с помощью метода интегрирования по частям.

6. Для вычисления, каких типов интегралов удобен метод интегрирования по частям?

Тема 14. Геометрические приложения определенного интеграла. Несобственные интегралы

План лекции:

1.Вычисление площадей плоских фигур.

2. Вычисление объемов тел вращения.

3. Несобственные интегралыс бесконечными пределами интегрирования(первого рода).

4. Несобственные интегралы от неограниченных функций(второго рода).

1.Вычисление площадей плоских фигур

Задача об определении площадей фигур, ограниченных кривыми линиями, рассматривалась ещё Архимедом (3 век до нашей эры), который, применив совершенно новый метод, определив площадь сегмента параболы и площади некоторых других фигур. При решении этой задачи Архимед разбивал данную фигуру не всё более мелкие части, площади которых было легко найти, и затем, выражаясь современным языком, находил предел суммы площадей этих частей. Между тем развитие астрономии и физики требовало нахождения общего метода решения поставленных задач. Таким общим методом и явилось интегральное исчисление.

Вычисление площадей плоских фигур в декартовой системе координат основано на геометрическом смысле определённого интеграла.Возможны несколько случаев расположения кривых на отрезке $[a,b]$.

а) Пусть функция $y = f(x)$ неотрицательна и непрерывна на отрезке $[a;b]$. Тогда по геометрическому смыслу определенного интеграла площадь S под кривой $y = f(x)$ на $[a;b]$ (рисунок 14.1) численно равна определенному интегралу от $f(x)$ на данном отрезке:

$$S = \int_a^b f(x)dx. \qquad (14.1)$$

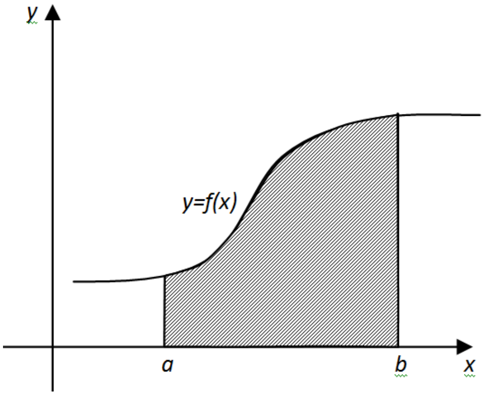


Рисунок 14.1 – Криволинейная трапеция

б) Пусть функция $x = f(y)$ неотрицательна и непрерывна на отрезке $[c; d]$. Тогда площадь фигуры S, ограниченная кривой $x = f(y)$, прямыми $y = c,\quad y = d$ и осью Oy (рисунок 14.2), численно равна определенному интегралу от $x = f(y)$ на данном отрезке:

$$S = \int_c^d f(y)dy \quad (14.2)$$

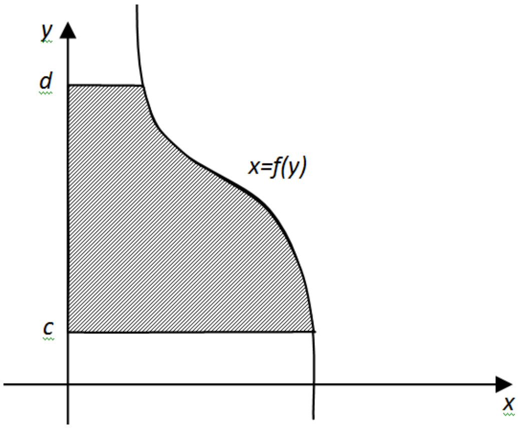


Рисунок 14.2 – Площадь фигуры, ограниченная кривой $x = f(y)$

в)Пусть функция $y = f(x)$ неположительна и непрерывна на отрезке $[a,b]$, то площадь S надкривой $y = f(x)$ на $[a; b]$ (рисунок 14.3) равна определенному интегралу от $f(x)$ на $[a,b]$, взятому со знаком «минус»:

$$S = -\int_a^b f(x)dx. \qquad (14.3)$$

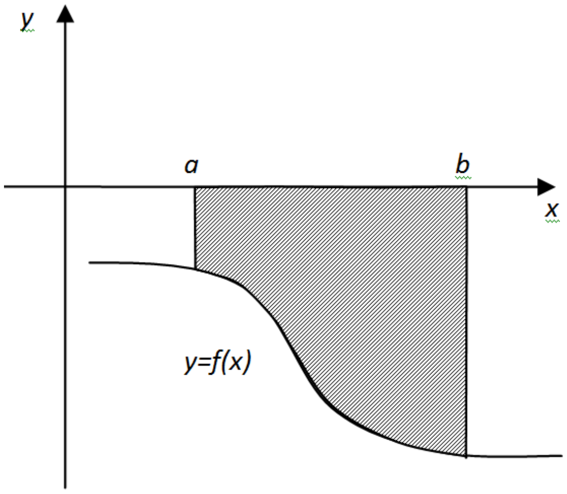


Рисунок 14.3 – Площадь фигуры надкривой $y = f(x)$ на $[a; b]$

г) Пусть на отрезке $[a,b]$ заданы непрерывные функции $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ такие, что $f_2(x) \geq f_1(x)$ (рисунок 14.4). Тогда площадь S фигуры, заключенной между кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, на отрезке $[a,b]$ вычисляется по формуле:

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x) \right) dx. \qquad (14.4)$$

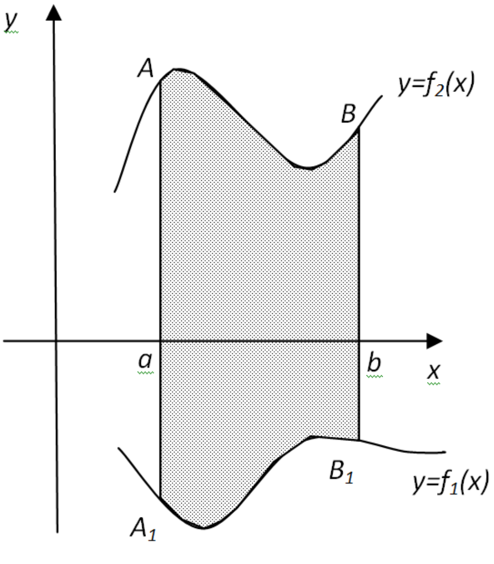


Рисунок 14.4 – Площадь фигуры,заключенной между кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, на отрезке $[a,b]$

Если фигура имеет сложную Форму, то прямыми, параллельными оси Oy, ее следует разбить на части, чтобы можно было бы применить уже известные формулы.

Пример 14.1. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y=\sin x$, прямыми $x=-\frac{7}{6}\pi,\quad x=\frac{\pi}{4},\quad y=0$.

Решение.

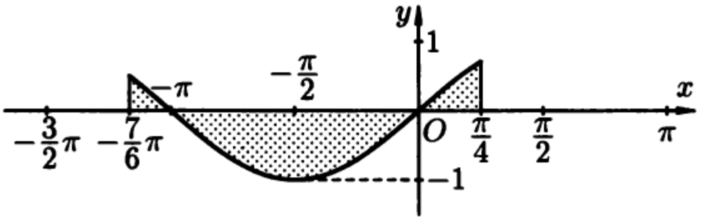


Рисунок 14.5 – Площадь фигуры, примера 14.1

Фигура имеет вид, изображенный на рисунке 14.5. Площадь ее состоит их трех частей, две из которых расположины выше оси абсцисс, одна – ниже, поэтому

$$S=\int\limits_{-\frac{7}{6}\pi}^{-\pi}\sin x\,dx-\int\limits_{-\pi}^{0}\sin x\,dx+\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin x\,dx=-\cos x\Big|_{-\frac{7}{6}\pi}^{-\pi}+\cos x\Big|_{-\pi}^{0}-\cos x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}}=$$

$$=1-\frac{\sqrt{3}}{2}+1+1-\frac{\sqrt{2}}{2}+1=\frac{1}{2}\left(8-\sqrt{3}-\sqrt{2}\right).$$

2. Вычисление объемов тел вращения

Пусть на отрезке $[a,b]$ задана непрерывная знакопостоянная функция $y=f(x)$. Необходимо найти объем V_x тела, образованного при вращении вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y=f(x),\ x=a,\ x=b$ и осью абсцисс(рисунок 14.6).

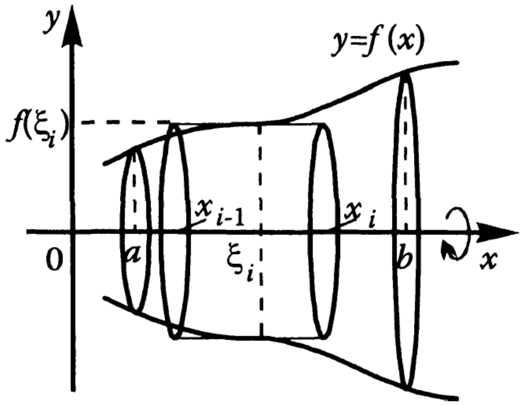


Рисунок 14.6 – Тело вращения

Для решения задачи применим тот же подход, который был использован для нахожденияплощади криволинейной трапеции. Разобьем отрезок на элементарные отрез отрезки точками: $x_0 = a,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n = b$ и на каждом из отрезков разбиения $[x_{i-1}; x_i]$ некоторым образом выберем точку ,ξ_i где $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда некоторое приближение для искомого объема даст следующая сумма:

$$\sum_{i=1}^{n} \pi f^2(\xi_i)\Delta x_i$$

i -е слагаемое которой $i = 1, 2, \ldots, n$) – это объем цилиндра с высотой $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ и радиусом основания $f(\xi_i)$ (рисунок 14.6).Бесспорно, что приближение для искомого объемаV_x будет тем лучше, чем меньше длина отрезков разбиения Δx_i ,поэтому за искомый объем V_x нужно взять следующий предел

$$V_x = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi f^2(\xi_i)\Delta x_i$$

где $\max \Delta x_i$ – максимальная из длин отрезков разбиения. Но выражение, стоящее в правой части этого равенства, не что иное, как предел интегральной суммы для функции $\varphi(x) = \pi f^2(\xi_i)\Delta x_i$. Поэтому(см. определение определенного интеграла) окончательно получаем, что объем тела вращения может быть легко найден по полученной выше формуле:

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx \tag{14.5}$$

Аналогично, можно показать, чтообъём тела, образованного вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной линией $x = \varphi(y)$, отрезком оси ординат $c \le y \le d$ и прямыми $y = c, y = d$, вычисляется по формуле:

$$V_y = \pi \int_c^d x^2 dy\,. \tag{14.6}$$

Пример 14.2. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{x^2}{2}, \quad x = 0, \quad y = 2\sqrt{2}$ вокруг оси Oy.

Решение.Фигура имеет вид, изображенный на рисунке 14.7.

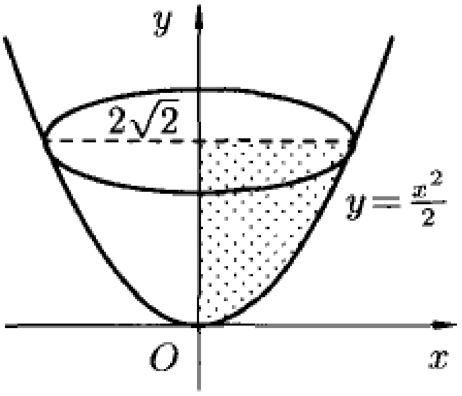


Рисунок 14.7 – К примеру 14. 2

По формуле (14.6) находим:

$$V_y = \pi \int_0^{2\sqrt{2}} 2y\, dy = \pi y^2 \Big|_0^{2\sqrt{2}} = 8\pi.$$

Таким образом, объем тела $V_y = 8\pi$.

3. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования (первого рода)

Определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$, где промежуток интегрирования $[a;\, b]$ конечный, а подынтегральная функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\, b]$, называют также собственным интегралом.

Рассмотрим теперь так называемые несобственные интегралы, то есть определенный интеграл от непрерывной функции, но с бесконечным промежутком интегрирования или определенный интеграл с конечным промежутком интегрирования, но от функции, имеющей на нем бесконечный разрыв.

Определение 1.Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a;\, +\infty)$. Если существует конечный предел $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$, то его называют **несобственным интегралом первого рода** и обозначают $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

Таким образом, по определению:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx. \tag{14.7}$$

В этом случае говорят, что несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ **сходится**. Если же указанный предел не существует или он бесконечен, то говорят, что интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ **расходится**.

Аналогично определяется несобственный интеграл на промежутке $(-\infty;\, b]$:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx.$$

Несобственный интеграл с двумя бесконечными пределами определяется формулой:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx,$$

где c – произвольное число.

В этом случае интеграл слева сходится лишь тогда, когда сходятся оба интеграла справа. Отметим, что если непрерывная функция $f(x) \geq 0$ на промежутке $[a;+\infty)$ и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то он выражает площадь бесконечно длинной криволинейной трапеции (рисунок 14.8).

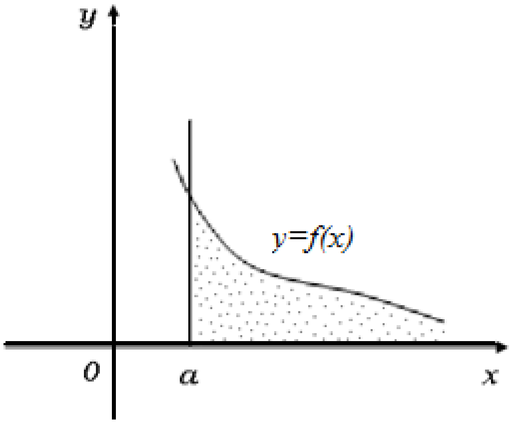


Рисунок 14.8 – Площадь бесконечно длинной криволинейной трапеции

Пример 14.3.Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость: 1) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$; 2) $\int\limits_{-\infty}^{0}\cos xdx$; 3) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$.

Решение. Работая по определению (14.7), переход, получим:

1) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_1^b x^{-2}dx = -\lim\limits_{b\to+\infty}\frac{1}{x}\Big|_1^b = -(0-1) = 1,$

следовательно, несобственный интеграл сходится.

2) $\int\limits_{-\infty}^{0}\cos xdx = \lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^0\cos xdx = \lim\limits_{a\to-\infty}\sin x\Big|_a^0 = 0 - \lim\limits_{a\to-\infty}\sin a$,

интеграл расходится, так как при $a\to-\infty$ предел $\lim\limits_{a\to-\infty}\sin a$ не существует.

3) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_1^b\frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to+\infty}\ln b = \infty$,интеграл расходится.

В некоторых задачах нет необходимости вычислять интеграл; достаточно лишь знать, сходится ли он или нет.

Используя формулу Ньютона - Лейбница можно убедиться, что $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^m}$ является сходящимся к $\frac{1}{m-1}$ при $m > 1$, и расходящимся при $m \le 1$.

4. Несобственные интегралы от неограниченных функций (второго рода)

Определение 2. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a; b)$ и имеет бесконечный разрыв при $x = b$. Если существует конечный предел $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$, то его называют **несобственным интегралом второго рода** и обозначают $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Таким образом, по определению

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx. \tag{14.8}$$

Если предел в правой части существует, то несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ **сходится**. Если же указанный предел не существует или бесконечен, то говорят, что интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ **расходится**.

Аналогично, если функция $f(x)$ терпит бесконечный разрыв в точке $x = a$, то полагают

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx.$$

Если функция $f(x)$ терпит разрыв во внутренней точке c отрезка $[a; b]$, то несобственный интеграл второго рода определяется формулой

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

В этом случае интеграл слева называют сходящимся, если оба несобственных интеграла, стоящих справа, сходятся.

В случае, когда $f(x) > 0$, несобственный интеграл второго рода $\int_a^b f(x)dx$ (разрыв в точке $x = b$) можно истолковать геометрически как площадь бесконечно высокой криволинейной трапеции (рисунок 14.9).

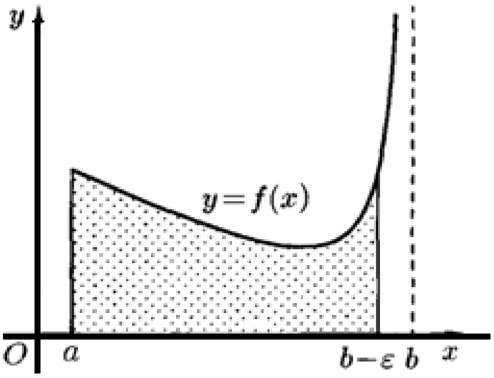


Рисунок 14.9 – Площадь бесконечно высокой криволинейной трапеции

<u>Пример 14.4.</u> Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость: 1) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$; 2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos x}$.

Решение. 1) При $x = 0$ функция $y = \frac{1}{x^2}$ терпит бесконечный разрыв;

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{0+\varepsilon}^1 x^{-2}dx = -\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{x}\bigg|_{0+\varepsilon}^1 = -\left(1 - \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}\right) = \infty,$$

следовательно, интеграл расходится.

2) Подынтегральная функция $f(x) = \frac{1}{\cos x}$ неограниченна в окрестности точки $x = \frac{\pi}{2}$ и интегрируема на любом отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2} - \varepsilon\right]$ как непрерывная функция. Тогда

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\cos x}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\frac{dx}{\cos x}=\lim_{\varepsilon\to 0}\ln tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0}\ln tg\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)=\infty,$$

следовательно, интеграл расходится.

Итак, в данной теме рассмотрены некоторые геометрические приложения определенного интеграла и несобственные интегралы: 1) вычисление площадей плоских фигур; 2) вычисление объемов тел вращения; 3) несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования (первого рода); 4) несобственные интегралы от неограниченных функций (второго рода). Излагаемый материал проиллюстрирован примерами. При подготовке по данной теме студентам рекомендуется использовать литературные источники [1,3,6,8,9,11] и Интернет-ресурсы [12-15].

Вопросы для самопроверки:

1.Запишите формулы позволяющие вычислить площадь плоской фигуры с помощью определенного интеграла. В каких случаях их удобно применять?

2. Запишите формулы позволяющие вычислить объемы тел вращенияс помощью определенного интеграла. В каких случаях их удобно применять?

3.Дать понятие несобственных интегралов с бесконечными пределами интегрирования(первого рода).

4. Дать понятие несобственных интегралов от неограниченных функций(второго рода).

5. В каком случае несобственный интегралсходится (расходится)?

6. Как выражается площадь бесконечно длинной криволинейной трапеции?

7. Как выражается площадьбесконечно высокой криволинейной трапеции?

Раздел 5. РЯДЫ

Тема 15.Ряды с положительными членами

План лекции:

1. Основные понятия числового ряда. Свойства сходящихся рядов.
2. Необходимый признак сходимости числовых рядов. Гармонический ряд.
3. Признаки сравнения положительных рядов.
4. Признак Даламбера.
5. Радикальный и интегральный признаки Коши.

1. Основные понятия числового ряда.Свойства сходящихся рядов

При решении ряда математических задач, в том числе и в приложениях математики в техники, экономике, приходится рассматривать суммы, составленные из бесконечного множества слагаемых. Из теории действительных чисел известно лишь, что означает сумма любого конечного числа чисел. Задача суммирования бесконечного множества слагаемых решается в теории рядов.

Определение 1. Сумма членов бесконечной числовой последовательности $u_1,u_2,...,u_n,...$ называется **числовым рядом**

$$u_1+u_2+...+u_n+...=\sum_{n=1}^{\infty}u_n\,. \qquad (15.1)$$

При этом числа $u_1,u_2,...$ называют членами ряда, а u_n – общим членом ряда.

Ряд (15.1) считается заданным, если известен его общий член $u_n=f(n)\,(n=1,2,\ldots)$, т.е. задана функция $f(n)$ натуральногоаргумента.Например, ряд с общим членом $u_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2(n+1)}$ имеет вид

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{12}+\frac{1}{36}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n^2(n+1)}+\cdots$$

Рассмотрим суммы конечного числа членов ряда:

$S_1=u_1, \qquad S_2=u_1+u_2, \quad \ldots, \quad S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$

Сумма n первых членов ряда S_n называется ***n-й частичной суммой ряда.***

Таким образом, возможно рассматривать последовательности частичных сумм ряда $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ \ldots$.

<u>Определение 2.</u>Ряд называется **сходящимся**, если существуетконечный предел последовательности его частичных сумм, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \,. \ (15.2)$$

Число S называется ***суммой*** ряда. В этом смысле можно записать

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S \ .(15.3)$$

Если последовательность частных сумм ряда не имеет предела, или $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\infty$, то ряд называется **расходящимся**.

Свойства сходящихся рядов:

1.Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится и его сумма равна S, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} C\cdot u_n$ (полученныйумножением данного ряда на число C≠ 0)тоже сходится, и его сумма равна CS.

2.Если ряды $u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $v_1+v_2+\ldots+v_n+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся и их суммы соответственно равны S_1 и S_2 , то и ряд (представляющий сумму данных рядов): $(u_1+v_1)+(u_2+v_2)+\ldots+(u_n+v_n)+\ldots$ также сходится, и его сумма равна S_1+S_2.

Свойства 1 и 2 непосредственно вытекают из свойств пределовчисловых последовательностей.

3.Если ряд сходится, то сходится и ряд, полученный из данного путем отбрасывания (или приписывания) конечного числа членов.

Доказательство. Пусть в сходящемся ряде (15.1) отброшены n членов (впринципе можно отбрасывать члены с любыми номерами, лишьбы их было конечное число). Покажем, что полученный ряд

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+m} + \ldots, \quad (15.4)$$

имеющий частичную сумму $\sigma_m = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+m}$, такжесходится.

Очевидно, что $S_{n+m} = S_n + \sigma_m$.Отсюда следует, что при фиксированном n конечный предел $\lim\limits_{m\to\infty} S_{n+m}$ существует тогда итолько тогда, когда существует конечный предел $\lim\limits_{m\to\infty} \sigma_m$. А это означает, что ряд (15.4) сходится.

Ряд (15.4), полученный из данного отбрасыванием его первых n членов, называется n*-м* ***остатком ряда.***

Если сумму n-го остатка ряда обозначить через r_n, т.е.

$$r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+m} + \ldots = \lim_{m\to\infty} \sigma_m, \quad (15.5)$$

то сумму ряда (15.1) можно представить в виде:

$$S = S_n + r_n. \quad (15.6)$$

4.Для того чтобы ряд (15.1) сходился, необходимо и достаточно,чтобы при $n \to \infty$остаток ряда стремился к нулю, т.е. чтобы$\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$.

Это свойство вытекает из теоремы о связи бесконечно малыхс пределами функций.

<u>Пример 15.1</u>. Исследовать сходимость ***геометрического ряда***,т.е. ряда, составленного из членов геометрической прогрессии

$$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} . \quad (15.7)$$

Решение. Необходимо установить, при каких значенияхзнаменателя прогрессии q ряд (15.7) сходится и при каких –расходится.

Из школьного курса алгебры известно, что сумма n первыхчленов геометрической прогрессии, т.е. n-ячастичная суммаряда при $q \neq 1$равна

$$S_n = \frac{a\left(q^n - 1\right)}{q-1}.$$

Найдем предел этой суммы:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a\left(q^n - 1\right)}{q-1} = \frac{a}{q-1} - a\lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{q-1}$$

Возможны несколько случаев:

1) если $|q| < 1$, то $q^n \to 0$, при $n \to \infty$.Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{q-1},$$

т.е. ряд (15.7) сходится и его сумма равна $S = \frac{a}{q-1}$.

2) если $|q| > 1$, то $q^n \to \infty$, при $n \to \infty$.Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty,$$

следовательно, ряд (15.7) расходится;

3) если $|q| = 1$, то при $q = 1$ряд (15.7) примет вид$a + a + ... + a + ...$, для него

$$S_n = n \cdot a, \quad \lim_{n\to\infty} S_n = \infty,$$

т.е. ряд расходится; при $q = -1$ряд (15.7) примет вид$a - a + a - a + ...$, для него$S_n = 0$при четномn и $S_n = a$ при нечетномn. Следовательно, $\lim_{n\to\infty} S_n$не существует, и ряд (15.7) расходится.

Таким образом, **ряд геометрическойпрогрессии сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \geq 1$.**

Установить сходимость (расходимость) ряда путем определения частичной суммы S_n и вычисления $\lim_{n\to\infty} S_n$ возможно далеко не всегда из-за принципиальных трудностейпри нахождении выражения S_n . Прощеэто можно сделать на основании признаков сходимости, к изучениюкоторых мы переходим.

2. Необходимый признак сходимости числовых рядов. Гармонический ряд

Теорема (необходимый признак сходимости).Если ряд сходится,то предел его общего члена стремиться к нулю, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

Доказательство. Выразим n-й член ряда через сумму его n и $(n-1)$ членов,т.е.$u_n = S_n - S_{n-1}$. Так как ряд сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S$.Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\left(S_n - S_{n-1}\right) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

Следствие (достаточное условие расходимости ряда).Если предел общего члена ряда (15.1) при $n \to \infty$ не равен нулю $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$ или не существует, то ряд расходится.

*Доказательство.*Предположим противное, т.е. ряд (15.1) сходится. Но вэтом случае из приведенной выше теоремы следует $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$,что противоречит условию, заданному в следствии, т.е. ряд (15.1) расходится.

<u>Пример 15.2.</u> Члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + ...$, называемого **гармоническим**, стремятся к нулю с ростом их номеров ($\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$), однако этот ряд расходится, его $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$. (Расходимость может быть доказана, например, интегральным признаком).

<u>Пример 15.3.</u>Проверить, выполняется ли необходимый признак сходимости для ряда: 1)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$; 2)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n^2+1}$.

Решение.

1)Общий член этого ряда$u_n = \frac{n}{n+1}$.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1, \text{ т. е. } \lim_{n\to\infty} u_n \neq 0.$$

На основании следствия из необходимого признака заключаем, что данный ряд расходится.

2)$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{2/n}{1+1/n^2} = 0$.

Необходимый признак выполняется, поэтому ряд может быть как сходящимся, так и расходящимся, что можно установить лишь после дополнительного исследования.

3. Признаки сравнения положительных рядов

Теорема 1 (признак сравнения).Пусть даны два ряда с положительными членами: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ (1) и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ (2), причем члены первого рядане превосходят членов второго, т.е. при любом n

$$u_n \le v_n. \quad (15.8)$$

Тогда: а) если сходится ряд 2, то сходится и ряд 1; б) если расходитсяряд 1, то расходится и ряд 2**.**

Доказательство. Обозначим n -е частичные суммы рядов 1 и 2 соответственно через $S_n^{(u)}$ и $S_n^{(v)}$. Из неравенства $u_n \le v_n \Rightarrow S_n^{(u)} \le S_n^{(v)}$. Пусть ряд 2 сходиться и его сумма равна S_2. Тогда $\lim_{n\to\infty} S_n^{(v)} = S_2$. Члены ряда (2) положительны, поэтому и $S_n^{(v)} < S_2$, следовательно, с учетом неравенства (8) $S_n^{(u)} < S_2$. Таким образом, последовательность $S_1^{(u)}, S_2^{(u)}, \ldots S_n^{(u)}, \ldots$ монотонно возрастает $(u_n > 0)$ и ограничена сверху числом S_2

.Следовательно, на основании признака существования предела последовательность $\left\{S_n^{(u)}\right\}$имеет предел, т.е. ряд 1сходится.

Пусть теперь ряд 1 расходиться. Применим метод доказательства от противного. Предположим,что ряд 2 сходится. Тогда согласно первой части теоремысходится и ряд 1, что противоречит предположению; т.е.ряд 2 расходится.

Замечание. Так как сходимость ряда не изменяется приотбрасывании конечного числа членов ряда, то условие (15.8)не обязательно должно выполняться с первых членов рядов итолько для членов с одинаковыми номерами n .Достаточно, чтобыоно выполнялось, начиная с некоторого номера $n=k$,иличтобы имело место неравенство $u_n \le v_{m+n}$, где m– некотороецелое число.

Отметим ***«эталонные»*** ряды, часто используемые для сравнения:

1) **геометрический** ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ – сходится при $|q|<1$, расходится при $|q|\ge 1$;

2) **гармонический** ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – расходится;

3) **обобщенный гармонический ряд**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}=1+\frac{1}{2^{\alpha}}+\cdots+\frac{1}{n^{\alpha}}+\cdots,$$

сходится при$\alpha>1$,расходится при $\alpha\le 1$.

Пример 15.4. Исследовать на сходимость ряд $\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+...+\frac{1}{\ln n}+....$

Решение. Так как $\frac{1}{\ln n}>\frac{1}{n}$, а гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится, то расходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$.

Пример 15.5. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$.

Решение. Так как $\frac{1}{n2^n}<\frac{1}{2^n}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ сходится (как ряд геометрической прогрессии, $q=\frac{1}{2}<1$), то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$ тоже сходится.

Теорема 2 (предельный признак сравнения). Пусть даны два знакоположительных ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$. Если существует конечный, отличный от нуля, предел $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=A \quad (0<A<\infty)$, то оба ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ сходятся и расходятся одновременно.

Замечание. Если общий член ряда является дробно-рациональной функцией, то есть вида $\frac{P_k(n)}{Q_m(n)}$, где $P_k(n)$и $Q_m(n)-$ многочлены степени *к* и *m* соответственно, то для сравнения рекомендуют использовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$, где $\alpha=m-k$, то есть от степени знаменателя вычитаем степень числителя.

Пример15. 6. Выяснить, сходится или расходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$.

Решение. Применим предельный признак сравнения, для сравнения возьмём гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, который является расходящимся. Найдём

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=\left|\begin{array}{l}\frac{1}{n}=\alpha\\ \alpha\to 0\end{array}\right|=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1.$$

По предельному признаку сравнения данный ряд и гармонический ведут себя одинаково, т. е. из расходимости гармонического следует, что и данный ряд расходится.

Пример 15.7. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+2)^3}$.

Решение. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится. Применяя предельный признак сравнения, получим

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{(n+2)^3}:\frac{1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot n^2}{(n+2)^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{(n+2)^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+2/n)^3}=1\neq 0,$$

следовательно, данный ряд сходится.

4. Признак Даламбера

В отличие от признаков сравнения, где все зависит от подбора известных сходящихся и расходящихся рядов, признак Даламбера (1717-1783, французский математик) позволяет решать вопрос о сходимости ряда, проделав лишь некоторые операции над самим рядом.

Теорема (признак Даламбера). Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ с положительными членами существует предел отношения $(n+1)$-гочлена к n-му члену $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=d$. Тогда, если $d<1$, то ряд сходится; если $d>1$, то ряд расходится.

Замечание 1.Признак Даламбера целесообразно применять. когда общий член ряда содержит выражение вида $n!$ или a^n.

Замечание 2.Если $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\infty$, то ряд расходится.

Замечание 3.Если $d=1$, то ряд может сходиться, а может и расходиться. В этом случае признак Даламбера ответа не дает, приходится исследовать на сходимость ряд с помощью других признаков.

Пример 15.8. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$.

Решение.По условию$u_n = \dfrac{1}{n!}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)!}$,

$d = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{(n+1)!} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0 < 1$, то есть ряд сходится.

Пример 15.9. Исследовать на сходимость ряд$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n}{n^5}$.

Решение.По условию $u_n = \dfrac{3^n}{n^5}$, $u_{n+1} = \dfrac{3^{n+1}}{(n+1)^5}$, тогда

$d = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^{n+1} \cdot n^5}{(n+1)^5 \cdot 3^n} = 3\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n}{n+1} \right)^5 = 3 > 1$,ряд расходится.

5. Радикальный и интегральный признаки Коши

Теорема (радикальный признак Коши).Если для знакоположительного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = k$, то если $k < 1$, то ряд сходится, если $k > 1$, то ряд расходится.Если $k = 1$, то радикальный признак не дает ответа о сходимости ряда.

Пример 15.10. Исследовать на сходимость ряд$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2n^2+1}{3n^2+5} \right)^n$.

Решение.По условию $u_n = \left(\dfrac{2n^2+1}{3n^2+5} \right)^n$, тогда, согласно радикальному признаку Коши,

$k = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+1}{3n^2+5} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2+\dfrac{1}{n^2}}{3+\dfrac{5}{n^2}} = \dfrac{2}{3} < 1$,то есть ряд сходится.

Пример 15.11. Исследовать на сходимость ряд$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\dfrac{1}{n} \right)^n$.

Решение. Воспользуемся радикальным признаком Коши: $k=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$,то есть признак Коши не дает ответа на вопрос о сходимости ряда.

Проверим выполнение достаточного условия расходимости ряда. Если предел общего члена ряда $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$ или не существует, то ряд расходится: $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\neq 0$, следственно, ряд расходится.

Теорема (интегральный признак Коши).Пусть члены знакоположительного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ могут быть представлены как числовые значения некоторой непрерывной монотонно убывающей на промежутке $[1;+\infty)$ функции $f(x)$ так, что $u_1\geq u_2\geq u_3\geq\ldots$ и $f(1)=u_1$, $f(2)=u_2$,…, $f(n)=u_n$,…. Тогда, если несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty}f(x)dx$ сходится, то и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ сходится, а если он расходится, то и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ расходится.

Замечание.Вместо интеграла $\int\limits_1^{+\infty}f(x)dx$ можно брать интеграл $\int\limits_k^{+\infty}f(x)dx$, где $k\in N,\quad k>1$. Отбрасывание k первых членов в ряде, как известно, не влияет на сходимость (расходимость) ряда.

Пример 15.12. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$.

Решение. Воспользуемся интегральным признаком Коши. Функция $f(x)=\frac{1}{x\ln^2 x}$ при $x\geq 2$ непрерывна и монотонно убывает. Вычислим интеграл

$$\int_{2}^{\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}=\int_{2}^{\infty}\frac{d(\ln x)}{\ln^2 x}=-\lim_{b\to\infty}\frac{1}{\ln x}\bigg|_2^b=\frac{1}{\ln 2}-\lim_{b\to\infty}\frac{1}{\ln b}=\frac{1}{\ln 2}.$$

Так как несобственный интеграл существует, то данный ряд сходится.

Пример 15.13. Исследовать на сходимость **обобщенный гармонический**ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}=1+\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{3^{\alpha}}+...+\frac{1}{n^{\alpha}}+....$

Решение. Воспользуемся интегральным признаком Коши. Функция $f(x)=\frac{1}{x^{\alpha}}$ – непрерывна и монотонно убываетна промежутке $[1;+\infty)$. Вычислим интеграл

$$\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\lim_{b\to\infty}\int_{1}^{\infty}x^{-\alpha}dx=\lim_{b\to\infty}\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\bigg|_1^b=\lim_{b\to\infty}\left(\frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{1}{1-\alpha}\right)=$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{\alpha-1}, & \text{если} \quad \alpha>1\\ \infty, & \text{если} \quad \alpha<1.\end{cases}$$

При $\alpha=1$имеем гармонический ряд, который расходиться $\left(\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x}=\infty\right)$.Таким образом,**обобщенный гармонический**ряд сходится при $\alpha\geq 1$ и расходится $\alpha<1$ так как соответствующий несобственный интеграл.

Итак, в данной теме рассмотрены особенности сходимости рядов с положительными членами: 1) основные понятия числового ряда, свойства сходящихся рядов; 2) необходимый признак сходимости числовых рядов, гармонический ряд; 3) признаки сравнения положительных рядов; 4) признак Даламбера; 5) радикальный и интегральный признаки Коши. Излагаемый материал проиллюстрирован многочисленными примерами. При подготовке по данной теме студентам рекомендуется использовать литературные источники [1,3,6,8,9,11] и Интернет-ресурсы [12-15].

Вопросы для самопроверки:

1. Дать понятие: числового ряда, члена ряда, общего члена ряда.

2. Что называют частичной суммой ряда?
3. Дать определение сходящихся и расходящихся рядов. Привести примеры.
4. Сформулировать основные свойства рядов.
5. Дать понятие n-го остатка ряда.
6. Как ведет себя ряд геометрической прогрессии?
7. В чем состоит необходимый признак сходимости ряда? Привести пример, показывающий, что он не является достаточным.
8. Указать простейший достаточный признак расходимости ряда.
9. Какой ряд называется гармоническим? Как ведет себя обобщенный гармонический ряд?
10. Сформулировать теорему о сравнении двух рядов с положительными членами. Какие ряды чаще принимают за эталонные и как они ведут себя в смысле сходимости?
11. Сформулировать предельный признак сравнения. Какие ряды чаще принимают за эталонные и как они ведут себя в смысле сходимости?
12. В чем состоит признак сходимости Даламбера? Когда его целесообразно применять?
13. Сформулировать радикальный признак сходимости Коши. Когда его целесообразно применять?
14. В чем состоит интегральный признак сходимости Коши?

Тема 16. Ряды с членами произвольного знака

План лекции:

1. Знакочередующиеся ряды. Теорема Лейбница.
2. Общий достаточный признак сходимости знакопеременного ряда.
3. Абсолютно и условно сходящиеся ряды. Свойства абсолютно сходящихся рядов.

1. Знакочередующиеся ряды. Теорема Лейбница.

Под ***знакочередующимся*** рядом понимается ряд, в котором члены попеременно то положительны, то отрицательны:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n+1} u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n \,, \qquad (16.1)$$

где $u_n > 0$ для всех $n \in N$.

Для знакочередующегося ряда имеет место достаточный признак сходимости, который называют признаком Лейбница.

Теорема (признак Лейбница).Если члены знакочередующегосяряда:

1) убывают по абсолютной величине $|u_1| > |u_2| > \ldots > |u_n| > \ldots$и

2) предел его общего члена при $n \to \infty$ равен нулю, т.е. $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$,

то ряд сходится, а его сумма положительная и не превосходит первого члена ряда ($0 < S < u_1$).

Доказательство. Рассмотрим последовательность частичных сумм четного числа $(2m)$членов ряда (16.1):

$$S_{2m} = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + u_{2m-1} - u_{2m} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \cdots$$
$$+ (u_{2m-1} - u_{2m}).$$

Выражение в каждой скобке положительно, согласно условию теоремы. Следовательно, сумма$S_{2m} > 0$и возрастает с возрастанием номера $(2m)$. С другой стороны, S_{2m}можно переписать так:

$$S_{2m} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \ldots < u_1, \ \textit{т.к.} \quad u_2 - u_3 > 0, \quad u_4 - u_5 > 0 \ldots$$

Т.е. последовательность $\{S_{2m}\}$ возрастает и ограничена сверху. Следовательно, она имеет предел $\lim\limits_{m \to \infty} S_{2m} = S$, причем $0 < S < u_1$.

Рассмотрим последовательность частичных сумм нечетного числа $(2m+1)$членов ряда (16.1): $S_{2m+1} = S_{2m} + u_{2m+1}$. Отсюда

$$\lim_{m \to \infty} S_{2m+1} = \lim_{m \to \infty} (S_{2m} + u_{2m+1}) = \lim_{m \to \infty} S_{2m} + 0 = S \,,$$

т.к. по условию $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, т.е. $\lim\limits_{m\to\infty} u_{2m+1} = 0$. Итак, при любом n (четном или нечетном) $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, следовательно, ряд сходится, причем $0 < S < u_1$.

Пример16.1.Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n^5}}$.

Решение. Ряд знакочередующийся, поэтому применим признак Лейбница.

1) $1 > \frac{1}{\sqrt[4]{2^5}} > \frac{1}{\sqrt[4]{3^5}} > \frac{1}{\sqrt[4]{4^5}} > \ldots$ первое условие признака выполнено,

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n^5}} = 0$ второе условие признака выполнено, значит, ряд сходится.

Замечание 1. Исследование знакочередующегося ряда вида

$$-u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \ldots \quad (16.2)$$

(с отрицательным первым членом) сводится путем умножения всех его членов на (-1) к исследованию ряда (16.1).

Ряды (16.1) и (16.2), для которых выполняются оба условия теоремы Лейбница, называются лейбницевскими (или рядами Лейбница).

Замечание 2.Погрешность при приближенном вычислении суммы сходящегося знакочередующегося ряда, удовлетворяющего условиям теоремы Лейбница, по абсолютной величине не превышает абсолютной величины первого отброшенного члена.

Если знакочередующийся ряд удовлетворяет условию признака Лейбница, то можно оценить ошибку, которая получится, если заменить его сумму S частичной суммой S_n. При такой замене мы отбрасываем все члены ряда, начиная с u_{n+1}. Но отбрасываемые члены образуют знакочередующийся ряд, сумма которого меньше первого члена этого ряда, т.е. меньше u_{n+1}.

Ошибка, совершаемая при замене суммы ряда S на частичную сумму S_n, равна $\delta = |r_n| = |S - S_n|$ и не превосходит по абсолютной величине первого из отброшенных членов ряда, т. е. $|r_n| < u_{n+1}$.

Пример16.2.Вычислить приблизительно сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{1}{n^n}$.

Решение. Ряд знакочередующийся, поэтому применим признак Лейбница.

1) $1 > \frac{1}{2^2} > \frac{1}{3^3} > \cdots$ первое условие признака выполнено,

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^n} = 0$ второе условие признака выполнено, значит, ряд сходится. Отметим: $S = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \cdots$. Возьмем пять членов ряда,

$$S_5 = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} = \frac{3}{4} + \frac{1}{27} - \frac{1}{256} + \frac{1}{3125} \approx 0{,}7834.$$

Ошибка, совершаемая при замене суммы ряда S на частичную сумму S_5, не превосходит по абсолютной величине первого из отброшенных членов ряда, т. е. $\frac{1}{6^6} = \frac{1}{46656} < 0{,}00003$.

2. Общий достаточный признак сходимости знакопеременного ряда

Знакочередующийся ряд является частным случаем знакопеременного ряда. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ называется **знакопеременным**, если среди членов ряда содержится бесконечное количество отрицательных членов и бесконечное количество положительных членов.

Для знакопеременных рядов имеет место следующий общий достаточный признак сходимости.

Теорема (достаточный признак сходимости знакопеременного ряда). Пусть дан знакопеременный ряд:

$$u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \,. \qquad (16.3)$$

Если сходиться ряд

$$|u_1| + |u_2| + ... + |u_n| + ... = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \qquad (16.4)$$

составленный из абсолютных величин членов данного ряда, то сходится и сам знакопеременный ряд (16.3).

Доказательство. Рассмотрим вспомогательный ряд, составленный из членов ряда (16.3) и (16.4):

$$(u_1 + |u_1|) + (u_2 + |u_2|) + \cdots + (u_n + |u_n|) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n + |u_n|) \,.$$

Очевидно, $0 \le u_n + |u_n| \le 2|u_n|$ для всех $n \in N$. Но ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 2\,|\,u_n\,|$сходится в силу условия теоремы и свойства числовых рядов.Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n + |\,u_n\,|$ – знакоположительный, и сходится по первому признаку сравнения рядов.

Так как данный знакопеременный ряд представляет собой разность двух рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n + |u_n|) - \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \,,$$

то, на основании свойства 2 числовых рядов, он сходится.

Следует отметить, что обратное утверждение неверно. Ряд(16.3) может расходиться, а ряд (16.4) сходиться.

Пример16.3.Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$.

Решение. Это знакочередующиеся ряд, для которого выполнены условия признака Лейбница. Следовательно, данный ряд сходиться. Однако, ряд, оставленный из абсолютных величин членов данного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (гармонический ряд) расходится.

3. Абсолютно и условно сходящиеся ряды. Свойства абсолютно сходящихся рядов.

Определение 1.Ряд называется **абсолютно сходящимся**, если сходится как сам ряд, так и ряд, составленный из абсолютных величин его членов.

Определение 2.Ряд называется **условно сходящимся**, если сам ряд сходится, а ряд, составленный из абсолютных величин его членов, расходится.

Таким образом, рассмотренный в примере 3 ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ условно сходящийся.

Грубо говоря, различие между абсолютно сходящимися и условносходящимися рядами заключается в следующем: абсолютносходящиеся ряды сходятся в основном в силу того, что ихчлены быстро убывают, а условно сходящиеся – в результатетого, что положительные и отрицательные слагаемые уничтожаютдруг друга.

Основные свойства абсолютно сходящихся рядовприводим без доказательства.

1) Если ряд абсолютно сходится и имеет сумму S, то ряд, полученный из него перестановкой членов, также сходится и имеет ту же сумму S, что и исходный ряд (теорема Дирихле) .

2)Абсолютно сходящиеся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ с суммами S_1 и S_2 можно почленно складывать (вычитать). В результате получается абсолютно сходящийся ряд с суммой $S_1 + S_2 (S_1 - S_2)$.

3)Под произведение двух рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + u_n + \ldots \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + \ldots + v_n + \ldots$$

понимают ряд вида:

$$\left(u_1v_1\right)+\left(u_1v_2+u_2v_1\right)+\left(u_1v_3+u_2v_2+u_3v_1\right)+\cdots$$
$$+\left(u_1v_n+u_1v_{n-1}+\ldots+u_nv_1\right)$$

Произведение двух абсолютно сходящихся рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ с суммами S_1 и S_2 есть абсолютно сходящийся ряд, сумма которого равна $S_1\cdot S_2$.

Для условно сходящихся рядов соответствующие свойства не имеют места. Поэтому действия над рядами нельзя производить, не убедившись в их абсолютной сходимости.

Пример 16.4. Исследовать на сходимость знакочередующийся числовой ряд и установить характер сходимости (абсолютная, условная):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{n\left(n+1\right)}.$$

Решение. Члены данного знакочередующегося ряда убывают по абсолютной величине, стремясь к нулю

$$1)\frac{1}{2}>\frac{1}{6}>\frac{1}{12}>\ldots,\qquad 2)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\left(n+1\right)}=0.$$

Поэтому, согласно признаку Лейбница, он сходится. Рассмотрим далее ряд, составленный из абсолютных значений исходного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\left(n+1\right)}$.

Для исследования вопроса его сходимости воспользуемся интегральным признаком Коши

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x\left(x+1\right)}=\lim_{b\to\infty}\int_1^b\frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}=\lim_{b\to\infty}\ln\frac{x}{x+1}\Bigg|_1^b=\ln\lim_{b\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\Bigg|_1^b=\ln 2,$$

т. е. ряд сходится.

Следовательно, исходный знакочередующийся ряд сходится абсолютно.

Пример 16.5. Исследовать, сходится или расходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}.$$

Решение. Данный ряд знакочередующийся. Абсолютная величина его общего члена

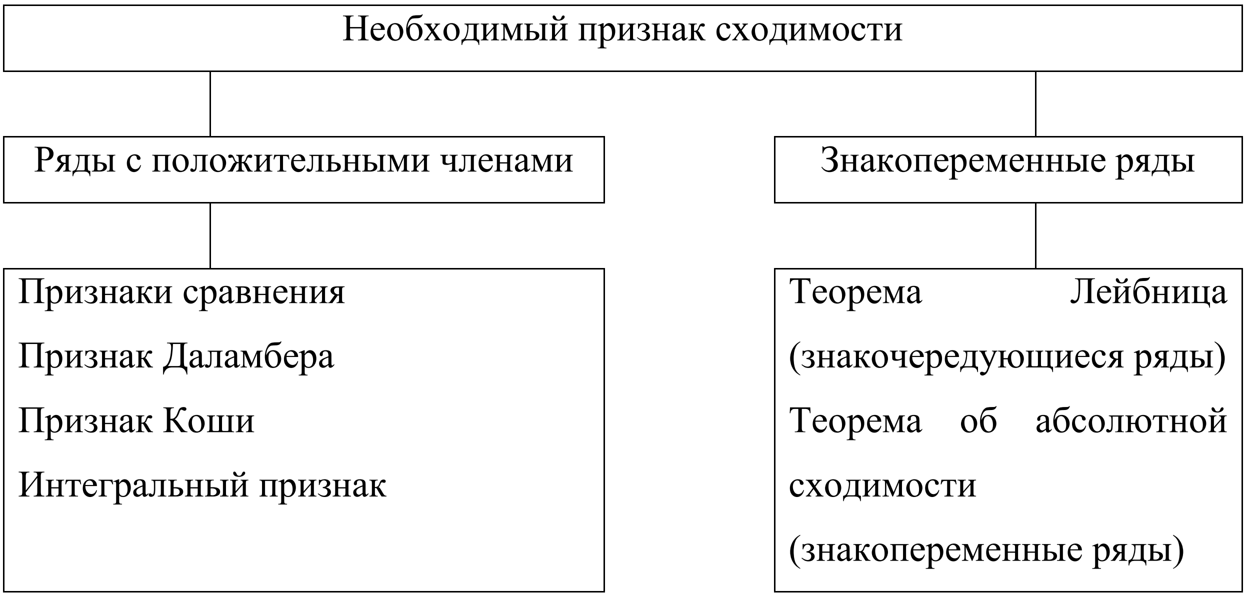
$$u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}.$$

Поскольку

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e,$$

т. е. общий член ряда к нулю не стремится, ряд расходится (не выполнен необходимый признак сходимости).

Отметим, какие признаки сходимости можно применять к рядам с положительными членами, и какие – к знакопеременным рядам:



Необходимый признак сходимости

Ряды с положительными членами

Признаки сравнения
Признак Даламбера
Признак Коши
Интегральный признак

Знакопеременные ряды

Теорема Лейбница (знакочередующиеся ряды)
Теорема об абсолютной сходимости (знакопеременные ряды)

Итак, в данной теме рассмотрены особенности, позволяющие определить сходимость рядов с членами произвольного знака: теорема Лейбница; общий достаточный признак сходимости знакопеременного ряда; абсолютно и условно сходящиеся ряды, свойства абсолютно сходящихся рядов.. Излагаемый материал проиллюстрирован многочисленными примерами. При подготовке по данной теме студентам рекомендуется использовать литературные источники [1,3,6,8,9,11] и Интернет-ресурсы [12-15].

Вопросы для самопроверки:

1. Какой ряд называется знакочередующимся? В чем состоит признак Лейбница для такого ряда?
2. Привести общий достаточный признак сходимости ряда с произвольными членами.
3. Что называется абсолютной сходимостью ряда? Условной сходимостью? Привести пример абсолютно и не абсолютно сходящихся рядов.
4. Свойства абсолютно сходящихся рядов.
5. Отметить, какие признаки сходимости можно применять к рядам с положительными членами, и какие – к знакопеременным рядам.

Тема 17. Функциональные и степенные ряды

План лекции:

1. Функциональные ряды, основные понятия.
2. Сходимость степенных рядов. Теорема Н. Абеля.
3. Интервал и радиус сходимости степенного ряда.
4. Свойства степенных рядов.

1. Функциональные ряды, основные понятия

Определение 1.Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \qquad (17.1)$$

называется **функциональным**, если его членами являются функции от аргумента *x*.

При каждом фиксированном значении $x = x_0$ функциональный ряд (17.1) становится числовым рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = u_1(x_0) + u_2(x_0) + \ldots + u_n(x_0) + \ldots, \qquad (17.2)$$

который может быть как сходящимся, так и расходящимся.

Если ряд (17.2) сходится, то x_0 называется **точкой сходимости** ряда (17.1), если ряд (17.2) расходится, то x_0 называется **точкой расходимости** ряда.

Совокупность всех точек сходимости x функционального ряда (17.1) называется его **областью сходимости**.

В области сходимости функционального ряда его сумма сама является некоторой функцией от переменной x : $S = S(x)$. Определяется она в области сходимости равенством:

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x).$$

где $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x)$ – сумма n членов ряда (17.1).

Пример 17.1. Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots.$$

Решение. Исходный ряд является рядом геометрической прогрессии со знаменателем $q = x$. Тогда если $|x| < 1$, то ряд сходится, т.е. область сходимости $x \in (-1;1)$. Сумма ряда при $|x| < 1$равна:

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

В простейших случаях для определения области сходимости ряда (17.1) можно применять к нему известные признаки сходимости числовых рядов, считая x фиксированным.

Среди функциональных рядов в математике и её приложениях особую роль играют степенные ряды, членами которых являются степенные функции аргумента*x*.

Определение 2. Степенным рядом называется функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots. \qquad (17.3)$$

Действительные (или комплексные) числа a_n ($n = 0, 1, 2, \ldots$) называются**коэффициентами ряда**; $x \in R$ – действительная переменная; x_0 – некоторое постоянное число. Ряд (17.3) расположен по степеням$(x - x_0)$. Рассматривают также ряд, расположенный по степенямx, когда $x_0 = 0$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots. \qquad (17.4)$$

Ряд (17.3) легко привести к виду (17.4), если положить$x - x_0 = z$. Поэтому при изучении степенных рядов ограничимся рядами вида (17.4).

2. Сходимость степенных рядов. Теорема Н. Абеля

Область сходимости степенных рядов описывается следующей теоремой.

ТеоремаАбеля(Нильс Хенрик Абель (1802 – 1829) – норвежский математик). Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ сходится при некотором значении $x = x_0 \neq 0$, то он сходится абсолютно при всех значенияхx, для которых

$$|x| < |x_0|.$$

*Доказательство.*По условию теоремы ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ сходится. Тогда по необходимому признаку сходимости $\lim_{x \to \infty} a_n x_0^n = 0$. Следовательно, величина

$a_n x_0^n$ ограничена, т. е. найдется такое число $M > 0$, что для всех n выполняется неравенство:

$$\left|a_n x_0^n\right| \le M, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

Пусть $|x| < |x_0|$, тогда величина $q = \left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$ и

$$\left|a_n x^n\right| = \left|a_n x_0^n\right| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \le Mq^n.$$

Из этого неравенства видно, что при $|x| < |x_0|$ численные величины членов ряда (17.4) не превосходят соответствующих членов ряда, которые образуют геометрическую прогрессию. Знаменатель этой прогрессии $q = \left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$, следовательно, эта прогрессия представляет собой сходящийся ряд. Поэтому на основании признака сравнения ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ сходится абсолютно.

Следствие. Если ряд (17.4) расходится при $x = x_0$, то он расходится при всех значениях x, для которых

$$|x| > |x_0|.$$

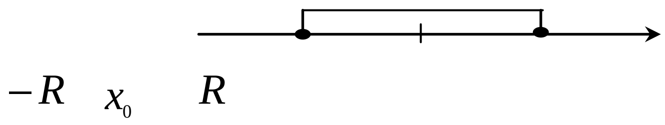
3. Интервал и радиус сходимости степенного ряда

Из теоремы Абеля и следствия из этой теоремы вытекает следующее предположение. Для каждого степенного ряда, имеющего как точки сходимости, так и точки расходимости, существует такое положительное число R, что для всех x, $|x| < R$, ряд абсолютно сходится, а для значений x, $|x| > R$, ряд расходится.

Что касается значений $x = R$ или $x = -R$, то здесь возможны ситуации, когда ряд сходится в обеих точках, или только в одной из них, или ни в одной.

<u>Определение 3.</u> Число R такое, что для всех x, $|x| < R$, степенной ряд сходится, а для всех x, $|x| > R$, расходится, называется **радиусом сходимости** ряда, а интервал $(-R;R)$ называется **интервалом сходимости**.

Для ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ интервал сходимости имеет вид $x \in (x_0 - R,\ x_0 + R)$ с центром в точке x_0.



Для ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ интервал сходимости имеет вид $x \in (-R,\ R)$ с центром в точке 0:

Рисунок 17.1 – Радиус сходимости степенного ряда

В граничных точках $x = \pm R$ поведение ряда требует дополнительного исследования. Можно указать правило для нахождения радиуса сходимости степенного ряда.

Найдем выражение радиуса сходимости степенного ряда(17.4) через его коэффициенты. Рассмотрим ряд, составленныйиз абсолютных величин его членов

$$|a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \ldots + |a_n x^n| + \ldots \tag{17.5}$$

в котором все коэффициенты a_n, по крайней мере начиная снекоторого номера n,отличны от нуля.

По признаку Даламбераряд (17.5) сходится, если

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

будет меньше 1, т.е.

$$|x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \text{ или } |x| < \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

Если этот предел существует, то он и является радиусом абсолютной сходимостиряда (4), т.е.

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|. \qquad (17.6)$$

Аналогично, используя признак сходимости Коши можно получить:

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}. \qquad (17.7)$$

Замечания:

1. Интервал сходимости степенного ряда (17.4) находят из неравенства $|x - x_0| < R$ и он имеет вид $(x_0 - R; x_0 + R)$.

2. Если степенной ряд содержит не все степени x, т.е. задан неполный степенной ряд, то интервал сходимости ряда находят без определения радиуса сходимости, а непосредственно применяют признак Даламбера (или признак Коши)для ряда, составленного из модулей членов данного ряда.

Пример 17. 2. Найти радиус и интервал сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

Решение. Применим формулу (17.6):

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n!} : \frac{1}{(n+1)!}\right| = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty.$$

$R = \infty$, значит, ряд абсолютно сходится при всех x, т. е. в интервале $(-\infty, +\infty)$.

Пример 17.3. Найти область сходимости степенного ряда

$$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+...+\left(-1\right)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+....$$

Решение. Заданный ряд не полный. Воспользуемся признаком Даламбера.

$$\left|u_n\right|=\left|\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right|,\qquad \left|u_{n+1}\right|=\left|\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right|,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\cdot\frac{2n-1}{x^{2n-1}}\right|=\left|x^2\right|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1}=x^2.$$

Ряд абсолютно сходится, если $x^2<1$ или $-1<x<1$. Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости.

При $x=-1,\qquad -1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-...$, сходится по признаку Лейбница.

При $x=1,\qquad 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+...$, тоже сходится по признаку Лейбница.

Следовательно, областью сходимости является отрезок $\left[-1;1\right]$.

Пример 17.4.Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n\cdot 3^{n-1}}.$$

Решение. Находим радиус сходимости ряда по формуле (17.6)

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n\cdot 3^{n-1}}:\frac{1}{(n+1)\cdot 3^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)3^n}{n\cdot 3^{n-1}}=3.$$

Следовательно, ряд сходится при $-3<x-3<3$, то есть при $0<x<6$.

При $x=0,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-3\right)^n}{n}=3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{n}$ – сходится по признаку Лейбница.

При $x=6,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n}=3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – расходится как гармонический ряд.

Следовательно, областью сходимости является интервал $\left[0;6\right)$.

4. Свойства степенных рядов.

Сформулируем основные свойства степенных рядов, которые широко применяются в различных приложениях.

1. Сумма $S(x)$степенного ряда является непрерывной функцией в интервале сходимости $(-R;R)$.

2. Степенные ряды $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, имеющие радиусы сходимости соответственно R_1 и R_2 можно почленноскладывать, вычитать и умножать. Радиус сходимости произведения, суммы и разности Рядов не меньше, чем меньшее из чисел R_1 и R_2.

3. Степенной ряд внутри интервала сходимости можно почленно дифференцировать. При этом для ряда

$$S(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ...$$

при $-R < x < R$ выполняется равенство

$$S'(x) = a_1 + 2a_2 x + ... + n \cdot a_n x^{n-1} + ...$$

4. Степенной ряд можно почленноинтегрировать на каждом отрезке, расположенном внутри интервала сходимости. При этом для ряда (4)при $-R < a < x < R$выполняется равенство

$$\int_a^x S(t)\, dt = \int_a^x a_0 dt + \int_a^x a_1 t dt + \int_a^x a_2 t^2 dt + ... + \int_a^x a_n t^n dt + ...$$

Свойства 1-4 остаются справедливыми и для рядов вида (17.3).

Итак, в данной теме рассмотрены вопросы сходимости функциональных и степенных рядов: 1) функциональные ряды, основные понятия; 2) сходимость степенных рядов, теорема Н. Абеля; 3) интервал и радиус сходимости степенного ряда; 4) свойства степенных рядов.. Излагаемый материал проиллюстрирован многочисленными примерами. При подготовке по данной теме студентам рекомендуется использовать литературные источники [1,3,6,8,9,11] и Интернет-ресурсы [12-15].

Вопросы для самопроверки:

1. Дать понятие функционального ряда и области его сходимости.
2. Дать понятие степенного ряда.
3. Сформулировать теорему Абеля о сходимости степенного ряда.
4. Дать понятие интервала и радиуса сходимости степенного ряда.
5. Записать расчетные формулы для определения радиуса сходимости степенного ряда.
6. Сформулировать свойства степенных рядов.