
Н. В. ГОЛУБЕВА

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ И ПРОЦЕССОВ

Издание второе, стереотипное

*РЕКОМЕНДОВАНО
УМО в качестве учебного пособия
для студентов вузов
железнодорожного транспорта*



САНКТ-ПЕТЕРБУРГ • МОСКВА • КРАСНОДАР
2016

ББК 22.1я73

Г 62

Голубева Н. В.

Г 62 Математическое моделирование систем и процессов: Учебное пособие. — 2-е изд., стер. — СПб.: Издательство «Лань», 2016. — 192 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

ISBN 978-5-8114-1424-6

Учебное пособие отражает содержание дисциплины «Математическое моделирование систем и процессов», относящейся к дисциплинам базовой части математического и научно-инженерного цикла государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования третьего поколения.

Цель данного пособия — раскрыть суть математического моделирования как научного метода, инструмента исследования технических систем, показать его роль и возможности для решения различных научных и инженерных задач, познакомить студента с основами моделирования систем и процессов, в том числе систем электроснабжения железных дорог, с принципами выбора математического аппарата для описания объектов различных классов.

Предназначено для студентов очной и заочной форм обучения технических вузов, а также для обучения с использованием дистанционных образовательных технологий.

ББК 22.1я73

Рецензенты:

М. П. БАДЁР — доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой «Электроснабжение электрических железных дорог» МИИТа; *Б. А. ДУДИН* — кандидат технических наук, доцент кафедры «Электротехника, метрология и электроэнергетика» МИИТа; *В. Н. ГОРЮНОВ* — доктор технических наук, профессор, директор энергетического института, зав. кафедрой «Электроснабжение промышленных предприятий» ОГТУ; *В. В. СУКАЧЕВ* — главный инженер Омской дистанции электроснабжения Западно-Сибирской железной дороги.

Обложка Е. А. ВЛАСОВА

© Издательство «Лань», 2016

© Н. В. Голубева, 2016

© Издательство «Лань»,

художественное оформление, 2016



ВВЕДЕНИЕ

Математическое моделирование — это научный прием, способ исследования объектов и получения новой информации о них. Решение подавляющего большинства научных и инженерно-технических задач (проектирование и оптимизация систем, оптимальное управление объектом, изучение механизма явлений, прогнозирование развития процессов во времени и др.) базируется на математическом моделировании.

Владение теоретической базой и инструментами математического моделирования должно быть неотъемлемым атрибутом современного специалиста в области систем электроснабжения железных дорог.

Математическое моделирование предполагает описание исследуемых явлений, процессов, систем различной физической природы языком математических соотношений. Класс математической модели определяется постановкой задачи и целью исследования, а также уровнем знаний экспериментатора о моделируемом объекте.

Выдающиеся ученые в области прикладной математики и математического моделирования А. Н. Тихонов и Д. П. Костомаров в своей книге «Вводные лекции по прикладной математике» подчеркивали, что «благодаря замене реального объекта соответствующей ему моделью появляется возможность сформулировать задачу его изучения как математическую и воспользоваться для анализа универсальным математическим аппаратом, который не зависит от конкретной природы объекта. Математика позволяет

единообразно описать широкий круг фактов и наблюдений, провести их детальный количественный анализ, предсказать, как поведет себя объект в различных условиях, т. е. спрогнозировать результаты будущих наблюдений».

Создание адекватной и эффективной модели, способствующей достижению поставленной цели, требует не только глубоких знаний исследователя в данной прикладной области и в смежных областях, владения соответствующим математическим аппаратом, но и интуиции, опыта, способности анализировать полученную информацию и предвидеть дальнейшее течение процессов.

Высочайший уровень отечественной научной школы математического моделирования обеспечил многие выдающиеся достижения: создание ракетно-ядерного щита, запуск искусственных спутников и пилотируемых космических аппаратов, открытие нового физического явления в плазме — образования самоподдерживающегося высокотемпературного электропроводного слоя (T -слоя) при нестационарном движении в магнитном поле сжимаемой среды, создание науки о прочности авиационных конструкций и др.

В настоящее время разработкой оптимальных математических моделей для решения актуальных задач техники, создания новых технологий, космических исследований, изучения природных явлений и др. занимаются специально созданные институты, среди которых Институт математического моделирования РАН, Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН.

ОАО «ВНИИЖТ» (Научно-исследовательский институт железнодорожного транспорта) совместно с «Российским федеральным ядерным центром — Всероссийским научно-исследовательским институтом экспериментальной физики» (РФЯЦ-ВНИИЭФ, г. Саров) планируют создание Центра математического моделирования для решения проблем железнодорожной отрасли.

Центр будет заниматься задачами моделирования свойств материалов и конструкций, контактным моделированием (колесо — рельс, токоприемник — контактный провод), аэродинамическими испытаниями и др.

Цель данной книги:

- познакомить студента:
 - с основами математического моделирования систем и процессов, с которыми придется иметь дело будущим выпускникам;
 - с кругом задач, решаемых посредством моделирования;
 - с этапами математического моделирования;
 - с классификациями моделей по характеру, по форме представления, по способу получения;
 - с достоинствами и недостатками математических моделей различных классов;
 - с детерминированным и стохастическим подходами к решению задач моделирования;
 - с приемами преобразования модели одного класса в другой;
 - с методами решения и анализа моделей различных классов;
- показать студенту, что успех решения любой инженерно-технической и научной задачи в большой степени определяется:
 - корректностью (правильностью) постановки задачи;
 - выбором целесообразного математического аппарата для построения модели, обеспечивающего адекватность описания исследуемого объекта;
 - правильной интерпретацией результатов моделирования.

Материал, представленный в учебном пособии, будет способствовать формированию у студентов таких компетенций, как способность к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей ее достижения, к применению методов математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования, к приобретению новых математических и естественнонаучных знаний на основе использования современных информационных технологий.

МОДЕЛИРОВАНИЕ КАК НАУЧНЫЙ ПРИЕМ

1.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Моделирование — это научный прием, метод изучения, познания реального окружающего мира.

Моделирование подразумевает следующее: реальный изучаемый объект (физическая система, процесс, явление), называемый *оригиналом*, замещается его моделью (физическим или абстрактным объектом). При этом модель воспроизводит (имитирует) те свойства и характеристики оригинала, которые существенны для достижения поставленной цели моделирования (для решения конкретной задачи). Над моделью проводятся эксперименты и исследования, на основе которых делаются выводы о свойствах объекта-оригинала.

Роль моделирования:

- в некоторых случаях моделирование может быть единственным способом изучения сложного объекта или процесса, над которым невозможно проведение эксперимента (например, экономические процессы, экологические системы, взаимодействие элементов Солнечной системы, процессы в недрах звезд, полет космического корабля, сложнейшие технологические процессы, прогнозирование техногенного риска в промышленности и на транспорте, последствия возможной масштабной ядерной войны с точки зрения ее влияния на биосферу Земли и т. д.);
- моделирование позволяет сократить время изучения реального объекта и сроки проектирования нового объекта, снизить материальные затраты и повысить эффек-

- тивность исследований, что особенно важно при создании и анализе сложных технических систем (производственных, энергетических, коммуникационных и др.);
- моделирование — незаменимый научный инструмент для изучения медленно протекающих процессов, таких как коррозия металлов, деформация и движение земной коры, разрушение материалов и конструкций, образование минералов, тепловое старение изоляции электрических проводов и кабелей и т. д.;
 - моделирование дает возможность исследовать механизм быстро протекающих процессов, к числу которых относятся: образование электрической дуги, термоядерная реакция, детонация, кинетика фазовых переходов в твердых телах, кинетика носителей заряда в полупроводниках, обработка металлов взрывом и т. д.;
 - моделирование является средством исследования и анализа мелкомасштабных процессов, таких как газокинетические процессы в микро- и наноструктурах.

Форма и содержание модели определяются:

- объемом накопленных знаний об оригинале;
- постановкой задачи и целью исследования.

1.2. КЛАССИФИКАЦИЯ МОДЕЛЕЙ

Единую классификацию моделей составить практически невозможно из-за многозначности понятия «модель» в современной жизни.

Рассмотрим классификацию моделей по *степени их абстрагирования от оригинала* (рис. 1.1).

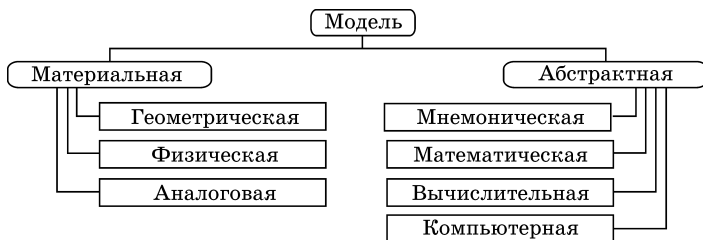


Рис. 1.1

Классификация моделей по степени абстрагирования от оригинала

Геометрическая модель отображает пространственные и геометрические свойства объекта-оригинала (например, макеты архитектурных сооружений, выставочные модели самолетов, локомотивов, судов, автомобилей).

Физическая модель воспроизводит физические свойства оригинала. Такая модель представляет собой увеличенную или уменьшенную копию оригинала. Физическая модель создается по строгим законам теории подобия.

Пример 1. Токамак — установка для магнитного удержания высокотемпературной плазмы, в которой реализуется термоядерная реакция в микромасштабе. Токамак представляет собой физическую модель термоядерных реакторов атомных электростанций. Благодаря этим установкам ученые вплотную приблизились к заветной цели — осуществлению управляемого термоядерного синтеза.

Пример 2. Физические модели играют важнейшую роль в развитии авиационной науки и авиационного строительства. Гордостью Центрального аэрогидродинамического института (ЦАГИ) является комплекс аэродинамических труб, предназначенных для испытания проектируемых летательных аппаратов различных классов на разных режимах работы и разных скоростях. Уменьшенную физическую модель самолета (космического аппарата, ракеты) помещают в аэродинамическую трубу, внутри которой создается поток воздуха с такой же скоростью, как и предполагаемая скорость испытываемой модели (принцип обратимости движения: перемещение тела в неподвижном воздухе может быть заменено движением воздуха относительно неподвижного тела). Комплекс специальных прецизионных тензометрических весов (датчиков) позволяет измерить аэродинамические силы и моменты любых конструктивных элементов модели. Аэродинамическая труба оснащена автоматизированным измерительно-вычислительным и управляющим комплексом, позволяющим оценить влияние упругих деформаций конструкции на характеристики устойчивости и управляемости, исследовать способы управления испытываемым объектом.

Аналоговая модель отличается от оригинала по своей физической природе, но динамика ее внутренних процес-

сов может быть описана теми же математическими соотношениями, которыми описывают процессы в моделируемой системе-оригинале.

В качестве аналоговых моделей используются электрические, электронные, механические, гидравлические, пневматические, тепловые и другие системы.

Рассмотрим примеры.

Пример 3. Оригинал — механическая система — маятник, совершающий колебания $x(t)$ относительно положения равновесия (рис. 1.2). Модель — электрическая система, представляющая собой колебательный контур (рис. 1.3).

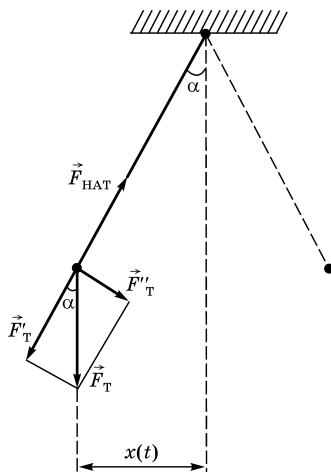


Рис. 1.2
Маятник:

$\vec{F}_{\text{нат}}$ — сила натяжения нити; \vec{F}_T — сила тяжести маятника; $|\vec{F}_{\text{нат}}| = -|\vec{F}_T|$; $F_T' = F_T \sin \alpha$.

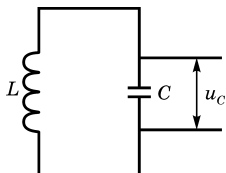


Рис. 1.3
Колебательный контур:

$$u_C(t) = x(t).$$

Процесс колебания маятника и процесс изменения напряжения конденсатора u_C во времени (в установившемся режиме) описываются одним и тем же дифференциальным уравнением для незатухающих гармонических колебаний:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \quad (1.1)$$

где ω — частота колебаний.

Возможность взаимного замещения механической и электрической систем при моделировании основана на следующих положениях:

- аналогом кинетической энергии механической системы является энергия магнитного поля электрической системы (накапливается на индуктивности);
- аналогом потенциальной энергии механической системы является энергия электрического поля электрической системы (накапливается в конденсаторе).

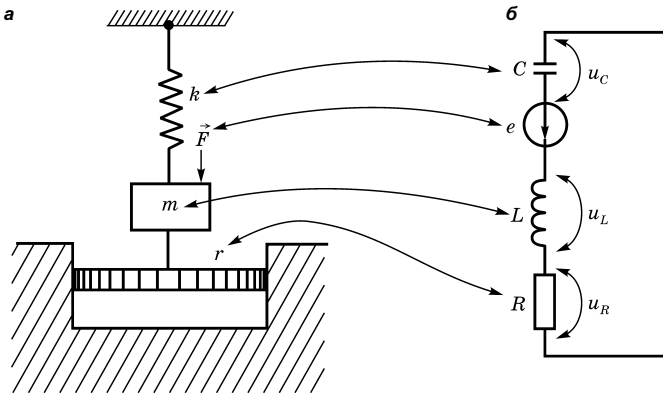


Рис. 1.4

Пример аналогового моделирования:

a — оригинал — механическая система: k — коэффициент упругости пружины, r — коэффициент скоростного трения, \vec{F} — механическая сила ($\vec{F} = \text{const}$); *б* — модель — электрическая система: e — источник постоянной ЭДС.

Пример 4. Оригиналу — механическая система, модель — электрическая система (рис. 1.4).

Для механической системы выполняется условие

$$\sum_{i=1}^n F_i = 0, \quad (1.2)$$

т. е. сумма всех сил, действующих в системе, равна нулю.

Таким образом,

$$F = -vr + mg - kx. \quad (1.3)$$

Для электрической системы (аналоговой модели) (рис. 1.4б) выполняется аналогичное условие:

$$\sum_{i=1}^n e_i = \sum_{j=1}^m u_j, \quad (1.4)$$

т. е. сумма электродвижущих сил в замкнутой цепи равна сумме падений напряжения на отдельных ее элементах. Следовательно,

$$e = u_R + u_L + u_C. \quad (1.5)$$

Таким образом, наличие упругой силы в механической системе соответствует наличие напряжения u_C на обкладках конденсатора. Инерционные свойства механической системы (за счет наличия массы m) в электрической систе-

ме отражаются с помощью индуктивности L . Наличие сил трения в механической системе соответствует наличие активного сопротивления R .

Мнемоническая модель отображает свойства объекта (оригинала) посредством схемы, графа, графика, чертежа, диаграммы, химической формулы и т. д. (рис. 1.5).

Математическая модель отображает свойства объекта (оригинала) на языке математических и логических соотношений.

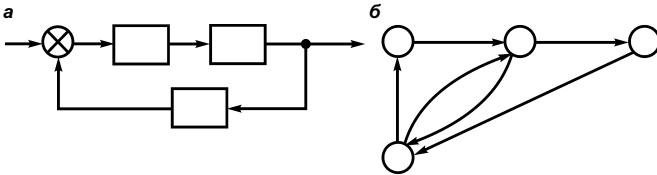


Рис. 1.5
Мнемонические модели:
а — структурная схема; б — граф.



Рис. 1.6
Компьютерное моделирование

Вычислительная модель — программа, реализующая алгоритм (вычислительную схему) решения математической модели.

Компьютерная модель представляет собой электронный эквивалент исследуемого объекта. Это комплекс специальных программных и аппаратных средств (абстрактная и физическая составляющие). Схема, представленная на рисунке 1.6, отражает основные элементы компьютерного моделирования.

Имитационная модель представляет по своей сути компьютерную модель, воспроизводящую (имитирующую) структуру и алгоритм функционирования сложной системы во времени. При имитационном моделировании учитываются (воспроизводятся) взаимодействие элементов системы между собой и с внешней средой, последовательность и динамика процессов, протекающих в системе, характер входных воздействий, случайные факторы, влияющие на работу системы. В зависимости от класса моделируемой системы и характера исследуемых процессов задается механизм (закон) изменения и масштаб модельного времени.

1.3. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Математическое моделирование занимает ведущее место среди всех видов моделирования.

Первые математические модели появились на заре развития математики, когда возникла необходимость количественного описания объектов и явлений окружающего мира: теорема Пифагора (VI в. до н. э.), законы Ньютона (XVIII в.), волновые уравнения Максвелла (XIX в.), теория относительности Эйнштейна (XX в.).

В послевоенные годы XX в., когда возникает угроза национальной безопасности СССР, перед советскими учеными и инженерами ставится стратегическая задача — создать «ракетно-ядерный щит» страны. К решению этой сложнейшей проблемы были привлечены лучшие ученые, научные коллективы, институты. Залогом успеха проделанной огромной работы явилось создание математических моделей изучаемых явлений и проектируемых систем и исследование этих

моделей методами вычислительной математики. Великие достижения того периода жизни и развития нашей страны позволили оценить роль, возможности и потенциал математического моделирования как научной методологии. Огромный неоценимый вклад в эти достижения и в развитие вычислительных методов прикладной математики внесли выдающиеся ученые академики М. В. Келдыш, М. А. Лаврентьев, А. Н. Тихонов, И. М. Гельфанд, Н. Н. Моисеев, А. А. Самарский, А. А. Дородницын, С. П. Курдюмов, Д. Е. Охоцимский, С. Л. Соболев и многие другие.

В настоящее время в условиях активного развития и внедрения новых информационных технологий, возрастания информационного потенциала науки математическое моделирование становится одним из главенствующих методов научного познания, стимулирующим развитие различных направлений науки и способствующим зарождению новых.

Математическая модель является базовой категорией при проектировании технических объектов, при разработке автоматизированных систем управления технологическими процессами, при прогнозировании процессов экономики, экологии и т. д.

Академик А. А. Самарский, первый директор Института математического моделирования РАН, основоположник отечественного математического моделирования, утверждал, что «математическое моделирование является неизбежной составляющей научно-технического прогресса» [1].

Пример 5. Авиастроение. В предвоенные годы начала развиваться скоростная авиация. Авиаконструкторы столкнулись с серьезной проблемой — явлением флаттера. Оно заключалось в следующем. Во время экспериментальных полетов на некоторых критических режимах неожиданно возникали резкие вибрации конструкции и самолет в считанные секунды разваливался на части. Причина — резонансные явления, вызванные взаимодействием элементов конструкции самолета и вихревых воздушных потоков на определенных скоростях полета. Проблема была решена академиком М. В. Келдышем. Он разработал математическую модель этого явления, создал на ее основе теорию флаттера и определил средства борьбы с ним.

Пример 6. Энергетика. Прогнозирование будущего поведения атомных и термоядерных реакторов. Моделирование режимов работы энергетических систем и объектов.

Пример 7. Геофизика, астрофизика. Моделирование процессов развития звезд и солнечной активности, долгосрочных прогнозов землетрясений, цунами и т. д. Моделирование сейсмических, электромагнитных, гравитационных полей и магнитных аномалий Земли в георазведке полезных ископаемых.

Пример 8. Генетика. Моделирование законов наследственности и изменчивости организмов.

Пример 9. Биотехнология. Моделирование кинетики биотехнологических процессов с целью создания на их основе новых видов горючего, новых лекарств, вакцин, биудобрений, регуляторов роста и средств защиты растений, пищевых продуктов и т. д.

Пример 10. Космическая техника. В 50-е гг. академиком М. В. Келдышем и его коллегами была разработана схема разгона космического аппарата с использованием выхода на промежуточную орбиту искусственного спутника Земли, а также решена задача целенаправленного изменения траектории движения на основе использования гравитационного поля планеты. Полученные результаты имели огромное значение для реализации всех последующих космических проектов.

В настоящее время посредством математического моделирования исследуются режимы нагружения конструкций МКС, воздействия космических излучений на материалы, проблема астероидной опасности, решаются такие задачи, как обеспечение обтекаемости конструкции, создание перспективного космического аппарата с ядерной энергодвигательной установкой, разработка систем управления и навигации космических аппаратов в реальном времени и др.

Пример 11. Нанотехнологии. Создание новых конструкционных материалов для космических аппаратов на основе наночастиц и нанотрубок, обеспечивающих значительное снижение веса конструкции без ущерба для ее прочности. Разработка новой элементной базы для вычислительных систем и суперкомпьютеров. Создание нано-

структурированных термостойких, износостойких, защищающих от коррозии покрытий для оборудования нефтегазовой, авиационной, атомной, машиностроительной, металлургической отраслей, строительных конструкций и т. д.

Пример 12. Оптимизация технологических процессов в металлургии, машиностроении, химическом производстве, приборостроении.

Пример 13. Анализ надежности технических объектов и прогнозирования отказов и аварийных ситуаций. Моделирование последствий техногенных катастроф.

Пример 14. Разработка систем автоматического управления движением, технологическими процессами, двигателями, энергетическими установками, освещением, электроподвижным составом и т. д.

Пример 15. Системы электроснабжения железных дорог. Контактное моделирование системы «токоприемник — контактный провод»; исследование рабочих и аварийных режимов в системах тягового электроснабжения, в контактной сети; решение таких задач, как снижение потерь электроэнергии, повышение качества питающего напряжения, уменьшение несимметрии токов, компенсация реактивной мощности и т. д.

Огромное прикладное значение для авиастроения, ракетно-космической техники, атомной энергетики, химического производства, металлургии, машиностроения имеет исследование путем математического моделирования явлений тепло- и массообмена.

Построение математической модели означает представление задачи изучения объекта (явления, процесса) в математической форме, что дает возможность исследовать модель математическими методами.

1.3.1. ЦЕЛИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

1. Интерпретация прошлого поведения объекта и обобщение имеющихся знаний о нем на основе выявления основных причинно-следственных связей. Определение факторов, оказывающих существенное влияние на свойства и характеристики изучаемого объекта.

2. Прогнозирование будущего поведения объекта, дальнейшего развития процесса, явления:

а) при варьировании условий испытания объекта (влияние внешних электрических и магнитных полей, вибрации, колебания температуры, давления, наличие источника радиоактивного излучения и т. д.);

б) при имитации экстремальных режимов работы исследуемого технического объекта.

3. Обновление и совершенствование ранее построенной модели на основе получения новой информации об оригинале.

4. Оптимизация параметров системы или ее структуры.

5. Создание алгоритма оптимального управления системой с точки зрения заданного критерия.

6. Проектирование технического объекта, расчет режимов его функционирования, экспериментальные исследования (выбор структуры, параметров, алгоритмов управления, оценка их эффективности).

1.3.2. ТРЕБОВАНИЯ К МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

1. Модель должна *соответствовать цели моделирования*. Модель предопределяется поставленной задачей (целью). Поэтому создаваемая модель должна воспроизводить (отображать) только те свойства и аспекты изучаемого (создаваемого) объекта, которые являются существенными для решения конкретной задачи исследования или проектирования [2].

Следовательно, для обеспечения глубокого, полноценного и всестороннего изучения объекта требуется разработка комплекса (совокупности, ансамбля) его математических моделей, каждая из которых будет отображать определенные стороны, свойства и особенности оригинала.

Пример 16. Анализ и расчет параметров и характеристик полупроводникового диода в ходе проектирования осуществляется на основе ряда (совокупности) математических моделей. Каждая из этих моделей отображает свойства диода и характер протекающих в нем процессов в конкретном режиме его работы: в статическом (при постоянном токе)

и динамическом (при переменном токе), в режиме малых сигналов и в режиме больших сигналов, для прямого и обратного направлений и т. д.

2. *Адекватность*. Модель считается адекватной, если она отображает заданные свойства объекта (процесса) с требуемой точностью. Математическая модель не может быть адекватной на всем множестве значений ее параметров. Всегда существует *область адекватности модели* (ОА) (рис. 1.7), которая задается диапазонами значений параметров модели (ΔB_1 и ΔB_2), в пределах которых она должна быть адекватной реальному объекту.

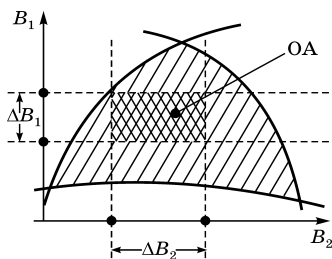


Рис. 1.7
Область адекватности модели

3. *Робастность модели* означает ее устойчивость к погрешностям (неточностям) в исходных данных.

4. Академик Н. Н. Моисеев в своем определении модели выделяет еще одно важное требование к ней — *потенциальность*. «Под моделью мы будем понимать упрощенное, если угодно, упакованное знание, несущее вполне определенную, ограниченную информацию о предмете (явлении), отражающее те или иные его отдельные свойства. Модель можно рассматривать как специальную форму кодирования информации. В отличие от обычного кодирования, когда известна вся исходная информация и мы лишь переводим ее на другой язык, модель, какой бы язык она ни использовала, кодирует и ту информацию, которую люди раньше не знали. Можно сказать, что модель содержит в себе потенциальное знание, которое человек, исследуя ее, может приобрести, сделать наглядным и использовать в своих практических жизненных нуждах».

1.3.3. ЭТАПЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Этап 1. Постановка цели моделирования. Модель должна замещать реальный объект с такой степенью абстракции, которая более всего выгодна для достижения заданной цели.

Этап 2. Создание *концептуальной модели*, т. е. содержательного описания моделируемого объекта. Концептуальная модель включает в себя следующие сведения:

- состав и структура объекта;
- свойства и роль каждого элемента моделируемого объекта, обеспечивающие его функционирование;
- количество и перечень параметров, достаточных для адекватного описания объекта;
- причинно-следственные связи между параметрами объекта;
- класс исследуемого объекта и создаваемой модели;
- условия функционирования объекта.

На этом этапе разработчику математической модели приходится решать три проблемы.

Проблема 1. Поиск *компромисса* между простотой модели и ее адекватностью реальному объекту.

Любой реальный объект в процессе функционирования подвергается влиянию множества факторов (внешних и внутренних). Чем большее количество факторов учитывается в модели, тем более адекватной становится модель. Однако при этом она может стать настолько сложной и громоздкой, что возникнут следующие проблемы:

- отсутствие эффективных методов исследования такой модели;
- затраты на моделирование объекта превысят эффект от внедрения полученной модели.

Нельзя входить и в другую крайность — чрезмерно упрощать модель за счет пренебрежения влиянием существенных факторов. Это приведет к неадекватности модели и, соответственно, к искажению результатов моделирования.

Поэтому необходим жесткий отбор (ранжирование) влияющих факторов, их четкое разграничение на *основные (О)* и *второстепенные (В)*.

Основные факторы должны быть учтены в модели, а от второстепенных факторов следует абстрагироваться (отбросить их)

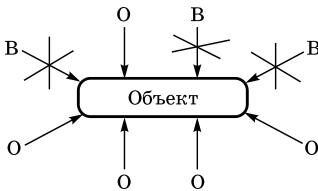


Рис. 1.8

Отбор основных факторов, учитываемых в модели

(рис. 1.8). При этом не наносится существенного ущерба качеству модели. «Простота модели, умение выделить, схематизировать основное — это и есть в конечном счете главное в искусстве исследователя», — утверждал академик Н. Н. Моисеев [3].

Проблема 2. Определение *границ применимости* создаваемой модели.

Результаты, полученные с помощью конкретной модели, считаются справедливыми только в рамках оговоренных условий (в пределах области адекватности). Попытка использовать модель за пределами границ ее применимости может привести к ложным выводам.

Пример 17. Сформировать математическую модель, описывающую процесс падения тела на Землю.

В основе этого явления лежит закон всемирного тяготения, сформулированный Ньютоном: любые два тела притягиваются с силой, прямо пропорциональной произведению их масс и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними.

Если в качестве этих двух тел рассматривать металлический шарик и Землю, то на языке математики процесс падения шарика можно описать соотношением

$$F = G \frac{mM_3}{R^2}, \quad (1.6)$$

где G — постоянная; m, M_3 — масса шарика и Земли; R — расстояние между центрами притягивающихся тел.

Согласно второму закону Ньютона, если на тело действует сила F , то его движение описывается соотношением

$$F = ma. \quad (1.7)$$

Так как рассматривается процесс падения тела, то следует ускорение a заменить на ускорение свободного падения g . Тогда модель падения шара примет вид

$$mg = G \frac{mM_3}{R^2} \quad \text{или} \quad g = G \frac{M_3}{R^2} \quad (1.8)$$

— это модель в общем виде.

Теперь необходимо ее конкретизировать для данных условий проведения эксперимента. Опыт с шаром проводится

в лаборатории (т. е. вблизи поверхности Земли). Следовательно, можно принять, что расстояние между центрами Земли и шарика равно радиусу Земли: $R = R_3$. Тогда математическая модель примет вид

$$g = G \frac{M_3}{R_3^2}. \quad (1.9)$$

Эта модель позволяет дать исчерпывающее описание процесса падения шара в любой момент времени t : определить высоту h , на которой находится шар, а также его скорость v :

$$h(t) = H_0 - \frac{gt^2}{2}; \quad (1.10)$$

$$v(t) = v_0 + gt. \quad (1.11)$$

Границы применимости этой модели:

- тело падает с небольшой высоты, пренебрежимо малой по сравнению с радиусом Земли;
- тело имеет компактную форму и обладает достаточной массой;
- можно пренебречь фактором сопротивления воздуха.

При нарушении хотя бы одного из этих условий данная модель не будет адекватной. Например, эту модель нельзя применить для описания следующих процессов: приземления парашютиста, падения листьев с дерева, падения осколка метеорита на Землю и т. д.

В каждом из перечисленных случаев в различной степени сказывается влияние таких ранее не учтенных факторов, как сила сопротивления воздуха, притяжение Луны, Солнца, убывание плотности атмосферы с высотой, вращение Земли, ветер, по-разному дующий на разных высотах, фактическое отличие формы Земли от шара (она является телом более сложной геометрической формы).

Проблема 3. Определение *уровня детализации* исследуемого объекта.

Любая физическая система представляет собой совокупность элементов. Каждый элемент, в свою очередь, можно расчленить на подэлементы. Процесс расчленения теоретически может быть бесконечным. Задача исследо-

вателя — выбрать оптимальный уровень детализации моделируемого объекта. Уровень детализации определяется целью моделирования и степенью знаний о свойствах элементов объекта.

Детализацию целесообразно производить до такого уровня, на котором для каждого элемента можно определить зависимость параметров выходных сигналов от параметров входных сигналов. Стремление повысить уровень детализации приводит к чрезмерной громоздкости модели и резкому увеличению ее размерности.

Этап 3. Формирование математической модели, т. е. запись модели в формализованном виде:

- все соотношения записывают в аналитической форме;
- логические условия выражают в виде систем неравенств;
- случайные процессы заменяют их типовыми моделями.

Этап 4. Исследование построенной математической модели. Инструментами исследования являются численные и аналитические методы.

Этап 5. Анализ результатов моделирования с последующим выводом об адекватности модели, либо о необходимости ее доработки, либо о ее непригодности.

Моделирование — это циклический процесс. По мере накопления новой информации об исследуемом объекте модель последовательно уточняется и модифицируется.

1.3.4. КЛАССИФИКАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Математические модели можно классифицировать по форме их представления (см. рис. 1.9).

На рисунке 1.10 приведена классификация, за основу которой принят характер модели.

В зависимости от способа получения математические модели делят на *теоретические* и *эмпирические* (формальные).

Теоретические модели получают на основе изучения свойств исследуемого объекта и процессов, происходящих в нем [4]. Теоретическая модель описывает физические закономерности, наблюдаемые в объекте-оригинале.



Рис. 1.9

Классификация моделей по форме представления

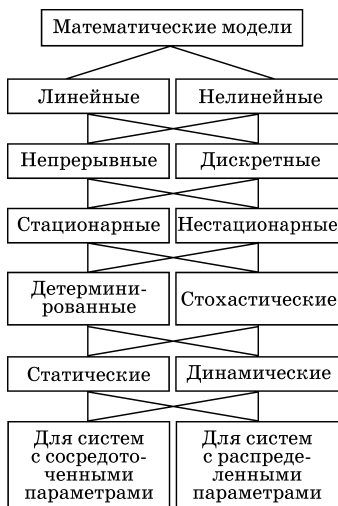


Рис. 1.10

Классификация по характеру модели

В основу таких моделей могут быть положены:

- *фундаментальные законы природы* — законы сохранения энергии, массы, импульса, момента импульса, электрического заряда и т. д. [1];
- *феноменологические законы* (описательные, выведенные на основе наблюдений, опытов, не разъясняющие физической сущности явлений, имеющие ограниченную область действия). К ним относятся законы Ома, Ампера, законы Ньютона (при скоростях движения тел v , много меньших скорости света c), закон Гука, выражающий связь между силой упругости и упругой деформацией тела (при малых деформациях), закон теплопроводности Фурье, связывающий градиент температуры в среде с плотностью теплового потока (для изотропных сред), уравнения теории сильного и слабого взаимодействия заряженных (или нейтральных) элементарных частиц, возникшей в результате отклонения наблюдаемых явлений от законов электродинамики Максвелла — Лоренца — Дирака, и т. д.

Структура и параметры теоретических моделей имеют определенное физическое толкование.

Эмпирические модели применяют в следующих случаях:

- когда отсутствует информация о физических свойствах изучаемого объекта и о механизме протекающих в нем процессов;
- когда исследуемый технический объект настолько сложен, что не представляется возможным математически адекватно описать сущность его внутренних процессов.

Эмпирические модели получают экспериментальным путем. Моделируемый объект рассматривается как *черный ящик*. Для измерения доступны только его входные сигналы (управляющие воздействия) и выходные сигналы (отклики или реакции). Абстрагируясь от внутреннего устройства и физической сущности объекта, изучают его реакции на различные внешние воздействия.

Различают *активный эксперимент* над объектом, когда на его вход подаются специально сформированные

воздействия — тестовые сигналы, и *пассивный эксперимент* — регистрация входных и выходных сигналов объекта в режиме нормальной эксплуатации. Обработка результатов измерений входных и выходных сигналов объекта позволяет выявить связь (соответствие) между ними и определить математическую модель, адекватно описывающую эту связь. Однако построенная эмпирическая модель может считаться адекватной только в ограниченной области — в пределах заданного диапазона значений управляющих воздействий.

Формирование математической модели объекта на основе наблюдений его входных и выходных сигналов называют *идентификацией*. Решить задачу идентификации (в общем случае) — значит определить структуру и параметры модели, обеспечивающие наилучшую с точки зрения заданного критерия близость выходных функций модели и объекта при совпадающих входных воздействиях [6].

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ФОРМЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

2.1. ОБЛАСТИ ПРИМЕНЕНИЯ

Исследование некоторых физических систем приводит к математическим моделям в форме систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Иногда необходимость в решении СЛАУ появляется в процессе анализа или проектирования технического объекта как промежуточный шаг (этап) в решении более сложной задачи. Есть значительное число научно-технических задач, в которых математические модели сложных нелинейных систем посредством линеаризации или дискретизации сводятся к решению СЛАУ. Такой подход к решению задач используется в электротехнике, теплотехнике, акустике, электродинамике, гидродинамике, геофизике, в строительной механике и во многих других областях.

СЛАУ относятся к классу *статических моделей*.

Статические математические модели описывают *установившиеся (равновесные) режимы* работы физических систем. В них фактор времени не учитывается. В статические модели время t не входит в качестве независимой переменной.

Примеры задач, решение которых осуществляется с привлечением математического аппарата СЛАУ:

1) анализ статических состояний технических систем. Статический режим функционирования объекта характеризуется неизменностью реакций взаимодействия всех его элементов при постоянных внешних воздействиях [2];

2) при проектировании и эксплуатации электротехнических устройств требуется проведение расчета и анализа

их работы в стационарных режимах. Задача сводится к расчету соответствующих эквивалентных схем. В основе расчета лежит формирование и решение СЛАУ;

3) при построении математической модели, связывающей функциональной зависимостью некоторые параметры x , y исследуемого объекта на основании полученных в результате эксперимента результатов измерений x_i, y_i , где $i = 1, 2, 3, \dots, n$ (задачи аппроксимации данных);

4) при решении краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений разностными методами;

5) при исследовании процессов в системах, математические модели которых строятся в классе дифференциальных уравнений в частных производных. В результате разностной аппроксимации (дискретизации) исходной модели при определенных условиях приходят к математическим соотношениям в форме СЛАУ;

6) сущность многих физических процессов математически отображается с помощью интегральных уравнений. Ввиду сложности решения многих из них исследователь предпочитает свести задачу к решению модели в форме СЛАУ, используя для этого известные методы аппроксимации или дискретизации;

7) исследование систем автоматического регулирования в установившемся режиме приводит во многих случаях к статическим моделям в форме СЛАУ;

8) анализ прочности и устойчивости инженерных конструкций и сооружений в условиях равновесия.

2.2. БАЗОВЫЕ ПОНЯТИЯ

Система линейных алгебраических уравнений порядка n имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (2.1)$$

или в векторно-матричной форме:

$$A \cdot X = B, \quad (2.2)$$

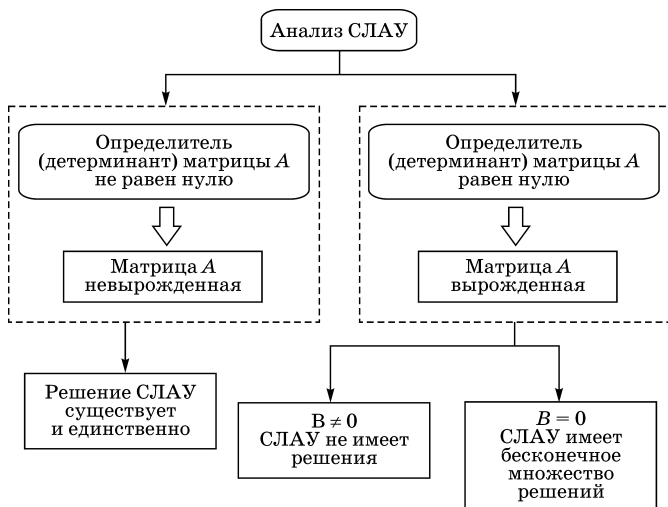


Рис. 2.1
К анализу СЛАУ:
решение вопроса о существовании решения

где $B = [b_1 b_2 \dots b_n]^T$ — вектор-столбец свободных членов (правых частей системы); $X = [x_1 x_2 \dots x_n]^T$ — вектор-столбец неизвестных; A — матрица коэффициентов при неизвестных, размером $n \times n$.

Решением СЛАУ (2.1) называют набор чисел $x_1^*, x_2^*, x_3^*, \dots, x_n^*$, которые при подстановке в систему вместо соответствующих неизвестных обращают все ее уравнения в тождества.

При моделировании объектов на основе математического аппарата СЛАУ необходимо предусматривать следующие возможные ситуации, отраженные на схеме (рис. 2.1). Если определитель (детерминант) матрицы A не равен нулю, т. е. $\det A \equiv |A| \neq 0$, то решение СЛАУ (2.1) существует и оно единственное. В этом случае матрица A называется *невырожденной*, или *неособенной*.

Если определитель (детерминант) матрицы A равен нулю, т. е. $\det A \equiv |A| = 0$, то система (2.1) либо не имеет решения (при $B \neq 0$), либо имеет бесконечное множество решений (при $B = 0$). Матрица A такой СЛАУ называется *вырожденной (особенной)*.

Система, имеющая бесконечное множество решений, называется *неопределенной*.

В практических задачах важна *чувствительность (устойчивость)* решения системы к малым погрешностям (ошибкам) задания коэффициентов матрицы A и правых частей (свободных членов). Систему называют *плохо обусловленной*, если малые изменения исходных данных приводят к большим изменениям решения. Обусловленность СЛАУ можно оценить с помощью так называемого числа обусловленности.

В качестве количественной скалярной вещественной характеристики (меры) матрицы используют различные матричные *нормы*.

При анализе и решении СЛАУ часто применяют следующие нормы:

$$\|A\| = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad (2.3)$$

— максимальная сумма модулей элементов матрицы по строкам;

$$\|A\| = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \quad (2.4)$$

— максимальная сумма модулей элементов матрицы по столбцам.

2.3. ПРИМЕРЫ ФОРМИРОВАНИЯ МОДЕЛЕЙ

Пример 18. Моделируемый объект — линейная цепь постоянного тока (рис. 2.2).

Воспользуемся *методом контурных токов*.

Положим, что в независимых контурах цепи протекают условные контурные токи: $i_{k1}, i_{k2}, i_{k3}, i_{k4}$. Направления контурных токов и токов ветвей цепи $i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6, i_7, i_8$ выбираем произвольно. Количество уравнений n формируемой модели (СЛАУ) равно количеству рассматриваемых независимых контуров и определяется по формуле

$$n = \text{количество ветвей} - \text{количество узлов} + 1. \quad (2.5)$$

В данном случае $n = 8 - 5 + 1 = 4$.

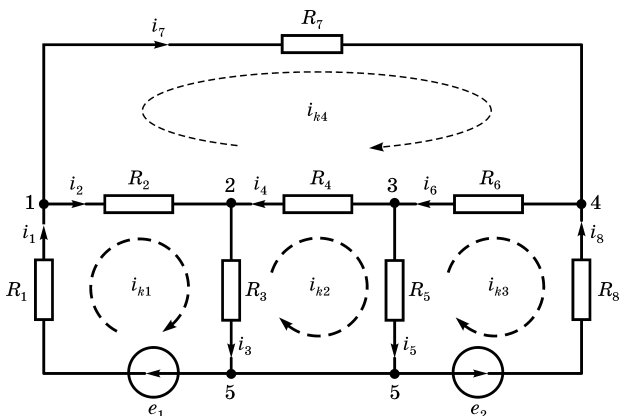


Рис. 2.2

Объект моделирования — линейная цепь постоянного тока

Для каждого контура составим уравнения по второму закону Кирхгофа относительно контурных токов:

$$\begin{cases} (R_1 + R_2 + R_3)i_{k1} - R_3i_{k2} - R_2i_{k4} = e_1; \\ -R_3i_{k1} + (R_3 + R_4 + R_5)i_{k2} - R_5i_{k3} - R_4i_{k4} = 0; \\ -R_5i_{k2} + (R_5 + R_6 + R_8)i_{k3} - R_6i_{k4} = e_2; \\ -R_2i_{k1} - R_4i_{k2} - R_6i_{k3} + (R_2 + R_7 + R_6 + R_4)i_{k4} = 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} R_{11} &= R_1 + R_2 + R_3; & R_{12} &= -R_3; & R_{13} &= 0; & R_{14} &= -R_2; \\ R_{21} &= -R_3; & R_{22} &= R_3 + R_4 + R_5; & R_{23} &= -R_5; & R_{24} &= -R_4; \\ R_{31} &= 0; & R_{32} &= -R_5; & R_{33} &= R_5 + R_6 + R_8; & R_{34} &= -R_6; \\ R_{41} &= -R_2; & R_{42} &= -R_4; & R_{43} &= -R_6; \\ R_{44} &= R_2 + R_7 + R_6 + R_4. \end{aligned} \quad (2.7)$$

В результате подстановки соотношений (2.7) в систему (2.6) получим математическую модель заданной электрической цепи в форме СЛАУ:

$$\begin{cases} R_{11}i_{k1} + R_{12}i_{k2} + R_{13}i_{k3} + R_{14}i_{k4} = e_1; \\ R_{21}i_{k1} + R_{22}i_{k2} + R_{23}i_{k3} + R_{24}i_{k4} = 0; \\ R_{31}i_{k1} + R_{32}i_{k2} + R_{33}i_{k3} + R_{34}i_{k4} = e_2; \\ R_{41}i_{k1} + R_{42}i_{k2} + R_{43}i_{k3} + R_{44}i_{k4} = 0. \end{cases} \quad (2.8)$$

Решая модель (2.8) при заданных значениях сопротивлений и ЭДС, находим контурные токи i_{k1} , i_{k2} , i_{k3} , i_{k4} .

Токи в ветвях цепи (см. рис. 2.2) определяются как алгебраические суммы соответствующих контурных токов:

$$\begin{aligned} i_1 &= i_{k1}; & i_2 &= i_{k1} - i_{k4}; & i_3 &= i_{k1} - i_{k2}; & i_4 &= i_{k4} - i_{k2}; \\ i_5 &= i_{k2} - i_{k3}; & i_6 &= i_{k4} - i_{k3}; & i_7 &= i_{k4}; & i_8 &= -i_{k3}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Пример 19. На этапе проектирования участка электроснабжения, схема которого приведена на рисунке 2.3, требуется провести приближенный (прикидочный) расчет его основных параметров (токов, напряжений, мощностей) в установившемся режиме.

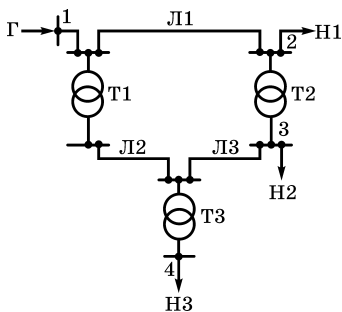


Рис. 2.3
Схема участка
электроснабжения:

Г — генератор (1 — генерирующий узел); Л — линия; Н — нагрузка (2, 3, 4 — нагрузочные узлы); Т — трансформатор.

Решение данной задачи начинается с составления *схемы замещения* проектируемого участка электроснабжения. В схеме замещения электрической сети каждый ее компонент заменяется его электрическим аналогом или его схемой замещения.

Участок электроснабжения может быть представлен различными схемами замещения в зависимости от решаемой задачи, от режима работы сети, от необходимости учета тех или иных факторов, влияющих

на параметры исследуемого объекта и определяющих особенности протекающих в нем процессов.

В данном случае при составлении схемы замещения (рис. 2.3) были приняты следующие допущения:

- пассивные элементы участка электроснабжения — линии и трансформаторы — рассматриваются как линейные (их активные сопротивления, индуктивности и емкости не зависят от токов и напряжений);
- активные элементы схемы — нагрузки и генераторы — задаются токами, постоянными по модулю и фазе;
- электрическая сеть трехфазного переменного тока рассматривается как линейная симметричная электрическая цепь, поэтому схема замещения (однолинейная)

составляется для одной фазы (однофазное представление трехфазной сети).

Однолинейную схему замещения (рис. 2.4) посредством объединения комплексных сопротивлений $Z_{Т1}$ и $Z_{Л2}$ и преобразования звезды в треугольник приводим к виду (рис. 2.5).

Воспользуемся *методом узловых потенциалов (напряжений)*.

Количество уравнений n формируемой математической модели определяется как количество узлов минус 1. В данном случае необходимо три уравнения.

Узел 1 принимаем (произвольно) в качестве *базисного* по напряжению и *балансирующего* по току (мощности). Его потенциал (узловое напряжение) полагаем равным нулю. Таким образом, напряжения между другими узлами и базисным узлом будут равны потенциалам соответствующих узлов.

Задаем произвольно направления токов в ветвях (рис. 2.5).

На основании первого закона Кирхгофа запишем уравнения баланса токов для узлов 2, 3 и 4:

$$\begin{cases} \dot{I}_{Л1} - \dot{I}_{Т2} = -\dot{I}_{Н1}; \\ \dot{I}_{Т2} + \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = -\dot{I}_{Н2}; \\ \dot{I}_3 - \dot{I}_2 = -\dot{I}_{Н3}, \end{cases} \quad (2.10)$$

где $\dot{I}_{Н1}$, $\dot{I}_{Н2}$, $\dot{I}_{Н3}$ — задающие нагрузочные (узловые) токи.

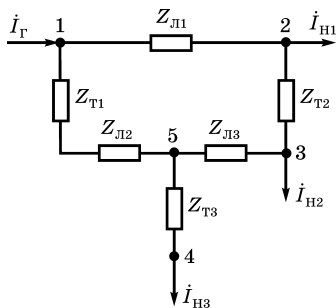


Рис. 2.4

Схема замещения участка электроснабжения

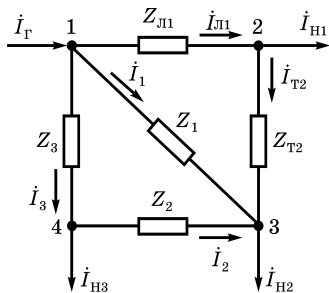


Рис. 2.5

Эквивалентная схема замещения участка электроснабжения

Согласно закону Ома, ток в ветви между узлами k и n определяется соотношением

$$\dot{I}_{kn} = \frac{\dot{U}_n - \dot{U}_k}{Z_{kn}} = (\dot{U}_n - \dot{U}_k)Y_{kn}, \quad (2.11)$$

где Y_{kn} — взаимная комплексная проводимость между узлами k и n .

Напряжение между любым n -м узлом и базисным узлом будет равно

$$\dot{U}_n - \dot{U}_{\text{баз}} = \dot{U}_n. \quad (2.12)$$

Учитывая (2.12), делаем подстановку соотношений (2.11) в систему (2.10) и группируем подобные члены.

В итоге получаем математическую модель проектируемого участка электроснабжения (рис. 2.2) в виде системы линейных алгебраических уравнений вида

$$\begin{cases} Y_{22}\dot{U}_2 + Y_{23}\dot{U}_3 + Y_{24}\dot{U}_4 = -\dot{I}_{Н1}; \\ Y_{32}\dot{U}_2 + Y_{33}\dot{U}_3 + Y_{34}\dot{U}_4 = -\dot{I}_{Н2}; \\ Y_{42}\dot{U}_2 + Y_{43}\dot{U}_3 + Y_{44}\dot{U}_4 = -\dot{I}_{Н3}, \end{cases} \quad (2.13)$$

где Y_{ii} — собственная проводимость i -го узла, представляющая сумму комплексных проводимостей ветвей, сходящихся в узле i .

Взаимные проводимости Y_{ij} входят в уравнения системы (2.13) со знаком минус.

Для рассматриваемого участка электроснабжения, представленного схемой замещения (рис. 2.5), учитываем соотношения

$$\begin{aligned} Y_{22} &= Y_{Л1} + Y_{Т2}; & Y_{33} &= Y_{Т2} + Y_1 + Y_2; \\ Y_{23} &= Y_{32} = -Y_{Т2}; & Y_{34} &= Y_{43} = -Y_2; \\ Y_{24} &= Y_{42} = 0; & Y_{44} &= Y_3 + Y_2. \end{aligned} \quad (2.14)$$

В результате решения модели (2.13) определяют напряжения в узлах, по которым на основании соотношений (2.11) находят токи в ветвях (задача расчета распределения токов) и мощности в начале и в конце каждой ветви (задача расчета распределения мощностей).

К моделям в форме СЛАУ приходят также при расчетах токов короткого замыкания в электрических сетях в послеаварийных установившихся режимах.

2.4. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

Методы решения моделей в форме СЛАУ делятся на две группы: *прямые (точные)* и *итерационные (приближенные)*.

Прямые методы позволяют получить решение системы (2.1) за конечное число шагов.

Итерационные методы построены по принципу многократного вычисления последовательных приближений, сходящихся к искомому решению. Чем больше требуемая точность вычисления решения, тем большее количество итераций потребуется произвести.

Прямые методы целесообразно использовать для решения систем сравнительно небольшой размерности с плотно заполненной матрицей (матрицей, имеющей малое количество нулевых элементов).

Итерационные методы предпочтительнее в задачах большой размерности со слабо заполненными матрицами.

К прямым методам относятся метод определителей, метод Гаусса и его модификации, метод LU -разложения, матричный метод, метод Крамера, метод Халецкого и др.

К разряду итерационных методов принадлежат метод простой итерации, методы Якоби, Зейделя и пр.

2.4.1. ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ

2.4.1.1. МЕТОД ГАУССА

Решение СЛАУ осуществляется в два этапа (прямой и обратный ход).

Прямой ход. Исходная система уравнений (2.1) путем последовательных преобразований приводится к треугольному виду. Это достигается последовательным исключением неизвестных x_i из уравнений. В результате получается эквивалентная система

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + a_{12}^* x_2 + a_{13}^* x_3 + \dots + a_{1n}^* x_n = b_1^*; \\ \quad x_2 + a_{23}^* x_3 + \dots + a_{2n}^* x_n = b_2^*; \\ \quad \quad x_3 + \dots + a_{3n}^* x_n = b_3^*; \\ \quad \quad \quad \dots \\ \quad \quad \quad \quad x_n = b_n^*. \end{array} \right. \quad (2.15)$$

Обратный ход. С помощью подстановки x_n в предпоследнее $(n - 1)$ -е уравнение системы (2.15) вычисляется x_{n-1} . Подстановкой x_n и x_{n-1} в $(n - 2)$ -е уравнение определяют x_{n-2} . Таким же образом последовательно определяют неизвестные x_{n-3}, \dots, x_2, x_1 .

Пример 20. Решить СЛАУ (2.8) из примера 18 методом Гаусса.

Система (2.8) представляет собой модель линейной цепи постоянного тока (рис. 2.2).

Зададим параметры цепи:

$$R_1 = R_7 = 3 \text{ Ом}; \quad R_2 = R_6 = 1 \text{ Ом}; \\ R_3 = R_4 = R_5 = 2 \text{ Ом}; \quad R_8 = 4 \text{ Ом}; \quad e_1 = 24 \text{ В}; \quad e_2 = 42 \text{ В}.$$

Сделав подстановку значений параметров в соотношения (2.7), получим систему

$$\begin{cases} 6i_{k1} & - & 2i_{k2} & - & & i_{k4} & = & 24; \\ - & 2i_{k1} & + & 6i_{k2} & - & 2i_{k3} & - & 2i_{k4} & = & 0; \\ & & - & 2i_{k2} & + & 7i_{k3} & - & i_{k4} & = & 42; \\ - & i_{k1} & - & 2i_{k2} & - & i_{k3} & + & 7i_{k4} & = & 0. \end{cases} \quad (2.16)$$

Прямой ход. Первое уравнение системы (2.16) разделим на 6:

$$i_{k1} - \frac{1}{3}i_{k2} - \frac{1}{6}i_{k4} = 4. \quad (2.17)$$

Из второго уравнения исключим неизвестное i_{k1} . Для этого ко второму уравнению прибавим преобразованное первое уравнение (2.17), умноженное на 2. Получим

$$(-2 + 2)i_{k1} + \left(6 - \frac{2}{3}\right)i_{k2} - 2i_{k3} + \left(-2 - \frac{1}{3}\right)i_{k4} = 0 + 8 \quad (2.18)$$

или

$$5\frac{1}{3}i_{k2} - 2i_{k3} - 2\frac{1}{3}i_{k4} = 8. \quad (2.19)$$

Разделим уравнение (2.17) на коэффициент $5\frac{1}{3}$. Получим

$$i_{k2} - \frac{3}{8}i_{k3} - \frac{7}{16}i_{k4} = \frac{3}{2}. \quad (2.20)$$

Из третьего уравнения системы (2.16) следует исключить неизвестные i_{k1} и i_{k2} . Но член уравнения, содержащий i_{k1} , изначально отсутствует. Поэтому будем сразу исклю-

чать i_{k2} . Для этого третье уравнение системы (2.16) разделим на 2:

$$-i_{k2} + \frac{7}{2}i_{k3} - \frac{1}{2}i_{k4} = 21. \quad (2.21)$$

К третьему преобразованному уравнению (2.21) прибавим второе преобразованное (2.20):

$$(-1 + 1)i_{k2} + \left(\frac{7}{2} - \frac{3}{8}\right)i_{k3} + \left(-\frac{1}{2} - \frac{7}{16}\right)i_{k4} = 21 + \frac{3}{2} \quad (2.22)$$

или

$$\frac{25}{8}i_{k3} + \left(-\frac{15}{16}\right)i_{k4} = 22\frac{1}{2}. \quad (2.23)$$

Из четвертого уравнения системы (2.16) исключим неизвестное i_{k1} . Для этого к четвертому уравнению прибавим преобразованное первое уравнение (2.17):

$$(-1 + 1)i_{k1} + \left(-2 - \frac{1}{3}\right)i_{k2} - i_{k3} + \left(7 - \frac{1}{6}\right)i_{k4} = 0 + 4 \quad (2.24)$$

или

$$-2\frac{1}{3}i_{k2} - i_{k3} + 6\frac{5}{6}i_{k4} = 4. \quad (2.25)$$

Из четвертого преобразованного уравнения (2.25) исключим неизвестное i_{k2} . Для этого разделим его на $\left(-2\frac{1}{3}\right)$:

$$i_{k2} + \frac{3}{7}i_{k3} - \frac{41}{14}i_{k4} = -\frac{12}{7}. \quad (2.26)$$

К преобразованному четвертому уравнению (2.26) прибавим преобразованное третье (2.21):

$$(1 - 1)i_{k2} + \left(\frac{3}{7} + \frac{7}{2}\right)i_{k3} + \left(-\frac{41}{14} - \frac{1}{2}\right)i_{k4} = -\frac{12}{7} + 21 \quad (2.27)$$

или

$$\frac{55}{14}i_{k3} - \frac{48}{14}i_{k4} = 19\frac{2}{7}. \quad (2.28)$$

Из четвертого преобразованного уравнения (2.28) исключим неизвестное i_{k3} . Для этого разделим его на $\frac{55}{14}$:

$$i_{k3} - \frac{48}{55}i_{k4} = \frac{54}{11}. \quad (2.29)$$

Уравнение третье преобразованное (2.23) разделим на $\left(-\frac{25}{8}\right)$:

$$-i_{k3} + \frac{3}{10}i_{k4} = -\frac{36}{5}. \quad (2.30)$$

К преобразованному четвертому уравнению (2.29) прибавим преобразованное третье (2.30):

$$(1-1)i_{k3} + \left(-\frac{48}{55} + \frac{3}{10}\right)i_{k4} = \frac{54}{11} - \frac{36}{5} \quad (2.31)$$

или

$$-\frac{63}{110}i_{k4} = -\frac{126}{55}. \quad (2.32)$$

Из уравнения (2.32) выразим i_{k4} . Получим $i_{k4} = 4$.

Тогда эквивалентная система уравнений с треугольной матрицей примет вид

$$\begin{cases} i_{k1} - \frac{1}{3}i_{k2} - \frac{1}{6}i_{k4} = 4; \\ i_{k2} - \frac{3}{8}i_{k3} - \frac{7}{16}i_{k4} = \frac{3}{2}; \\ -i_{k3} + \frac{3}{10}i_{k4} = -\frac{36}{5}; \\ i_{k4} = 4. \end{cases} \quad (2.33)$$

Обратный ход. Подставим значение i_{k4} в третье уравнение системы (2.33) и найдем $i_{k3} = 8,4$.

Подстановкой значений i_{k4} и i_{k3} во второе уравнение найдем $i_{k2} = 6,4$. Подстановкой значений i_{k4} и i_{k2} в первое уравнение найдем $i_{k1} = 6,8$.

2.4.1.2. МЕТОД LU-РАЗЛОЖЕНИЯ

Если квадратная матрица A линейной системы

$$A \cdot X = B \quad (2.34)$$

имеет отличные от нуля главные диагональные миноры, т. е.

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= a_{11} \neq 0, \\ \Delta_2 &= \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \neq 0, \quad \dots, \quad \Delta_n = \det A \neq 0, \end{aligned} \quad (2.35)$$

то она может быть разложена на произведение двух треугольных матриц — нижней L с ненулевыми диагональными элементами и верхней U с единичными диагональными элементами:

$$A = L \cdot U. \quad (2.36)$$

Причем это разложение будет единственным.

Поэтому матричное уравнение (2.34) можно заменить уравнением

$$L \cdot U \cdot X = B. \quad (2.37)$$

Введем вектор вспомогательных переменных $G = [g_1 g_2 \dots g_n]^T$.

Тогда уравнение (2.37) можно записать в виде системы двух векторно-матричных уравнений:

$$\begin{cases} L \cdot G = B; \\ U \cdot X = G. \end{cases} \quad (2.38)$$

Таким образом, решение исходной системы (2.34) сводится к последовательному решению двух систем с треугольными матрицами типа (2.15) или (2.33), из которых неизвестные x_i определяются путем последовательной подстановки.

Математически это выражается так: из первого уравнения системы (2.38) определяется вектор G :

$$G = L^{-1} \cdot B, \quad (2.39)$$

после чего из второго уравнения системы (2.38) определяется вектор X :

$$X = U^{-1} \cdot G. \quad (2.40)$$

Обратные матрицы L^{-1} и U^{-1} существуют, так как делители треугольных матриц L и U , вычисляемые как произведения их диагональных элементов, отличны от нуля.

Метод LU -разложения — это фактически метод Гаусса, выраженный в векторно-матричной форме, отличающийся от классического варианта способом хранения матриц.

2.4.1.3. МАТРИЧНЫЙ МЕТОД

Если для системы $A \cdot X = B$ выполняется *условие невырожденности матрицы A*

$$\det A = \Delta \neq 0, \quad (2.41)$$

то решение этой системы можно представить в виде

$$X = A^{-1} \cdot b, \quad (2.42)$$

где A^{-1} — обратная матрица.

2.4.2. ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ

2.4.2.1. МЕТОД ПРОСТЫХ ИТЕРАЦИЙ
(МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ)

Исходная СЛАУ (2.1) приводится к эквивалентной системе одним из известных приемов. Например:

$$\begin{cases} x_1 = -[(a_{11} - 1)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n - b_1]; \\ x_2 = -[a_{21}x_1 + (a_{22} - 1)x_2 + \dots + a_{2n}x_n - b_2]; \\ \dots \\ x_n = -[a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn} - 1)x_n - b_n] \end{cases} \quad (2.43)$$

ИЛИ

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n + b_1; \\ x_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \dots + c_{2n}x_n + b_2; \\ \dots \\ x_n = c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + \dots + c_{nn}x_n + b_n. \end{cases} \quad (2.44)$$

В векторно-матричной форме эквивалентная система (2.44) имеет вид

$$X = CX + B. \quad (2.45)$$

Задаем начальные (нулевые) приближения для искомым неизвестных (решения системы):

$$x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}. \quad (2.46)$$

Это могут быть приближенные значения решения системы (2.1), полученные грубой прикидкой, или значения соответствующих элементов вектора-столбца свободных членов (правых частей) СЛАУ (2.1).

Делаем подстановку начальных (нулевых) приближений (2.46) в правую часть эквивалентной системы (2.44). Получаемые при этом в левой части системы значения

$$x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, \dots, x_n^{(1)} \quad (2.47)$$

представляют собой первые приближения решения СЛАУ:

$$x_i^{(1)} = c_{i1}x_1^{(0)} + c_{i2}x_2^{(0)} + \dots + c_{in}x_n^{(0)} - b_i, \quad (2.48)$$

где $i = 1, 2, \dots, n$.

Подставив первые приближения $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}$ в правую часть системы (2.44), в левой ее части получим вторые приближения решения СЛАУ — $x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_n^{(2)}$:

$$x_i^{(2)} = c_{i1}x_1^{(1)} + c_{i2}x_2^{(1)} + \dots + c_{in}x_n^{(1)} - b_i. \quad (2.49)$$

Таким образом, итерационный процесс решения СЛАУ описывается рекуррентными соотношениями:

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = c_{11}x_1^{(k-1)} + c_{12}x_2^{(k-1)} + \dots + c_{1n}x_n^{(k-1)} - b_1; \\ x_2^{(k)} = c_{21}x_1^{(k-1)} + c_{22}x_2^{(k-1)} + \dots + c_{2n}x_n^{(k-1)} - b_2; \\ \dots \\ x_n^{(k)} = c_{n1}x_1^{(k-1)} + c_{n2}x_2^{(k-1)} + \dots + c_{nn}x_n^{(k-1)} - b_n. \end{cases} \quad (2.50)$$

Полученные в результате последовательности итераций приближения $x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, x_i^{(3)}, \dots, x_i^{(k)}$ сходятся к истинному решению системы (2.1), и это решение единственно в том случае, если для матрицы C коэффициентов системы (2.44) выполняется хотя бы одно из условий:

$$\sum_{j=1}^n |c_{ij}| < 1 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n); \quad (2.51)$$

$$\sum_{i=1}^n |c_{ij}| < 1 \quad (j = 1, 2, 3, \dots, n). \quad (2.52)$$

Если в качестве нормы матрицы коэффициентов C принять норму (2.3) или (2.4), то сходимость метода простых итераций будет обеспечена при выполнении одного из условий:

$$\max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}| < 1; \quad (2.53)$$

$$\max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}| < 1. \quad (2.54)$$

Вычисления приближений продолжают до тех пор, пока не будет выполнено условие

$$|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}| \leq \varepsilon, \quad (2.55)$$

где ε — заданная точность.

2.4.2.2. МЕТОД ЗЕЙДЕЛЯ

Метод Зейделя — модификация метода простых итераций, обеспечивающая ускорение сходимости итерационного процесса к истинному решению системы за счет следующего приема.

Уточненное значение (приближение) $x_1^{(k)}$, полученное из первого уравнения системы (2.44), вводится сразу во второе уравнение системы и используется для вычисления приближения $x_2^{(k)}$. Затем уточненные значения $x_1^{(k)}$, $x_2^{(k)}$ вводятся в третье уравнение системы (2.44) и используются для вычисления приближения $x_3^{(k)}$.

Таким образом, значение k -го приближения $x_n^{(k)}$ будет определяться через уточненные в процессе k -й итерации значения приближений $x_1^{(k)}$, $x_2^{(k)}$, ..., $x_{n-1}^{(k)}$.

Следовательно, итерационный процесс, реализуемый в методе Зейделя, может быть выражен следующими соотношениями:

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = c_{11}x_1^{(k-1)} + c_{12}x_2^{(k-1)} + c_{13}x_3^{(k-1)} + \dots + c_{1n}x_n^{(k-1)} - b_1; \\ x_2^{(k)} = c_{21}x_1^{(k)} + c_{22}x_2^{(k-1)} + c_{23}x_3^{(k-1)} + \dots + c_{2n}x_n^{(k-1)} - b_2; \\ x_3^{(k)} = c_{31}x_1^{(k)} + c_{32}x_2^{(k)} + c_{33}x_3^{(k-1)} + \dots + c_{3n}x_n^{(k-1)} - b_3; \\ \dots \\ x_n^{(k)} = c_{n1}x_1^{(k)} + c_{n2}x_2^{(k)} + c_{n3}x_3^{(k)} + \dots + c_{nn}x_n^{(k-1)} - b_n. \end{cases} \quad (2.56)$$

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ФОРМЕ НЕЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ И ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ

3.1. ПРИМЕР ФОРМИРОВАНИЯ МОДЕЛИ

Пример 21. Моделируемый объект — нелинейная цепь постоянного тока (рис. 3.1). R_2 — нелинейное сопротивление.

Вольт-амперная характеристика (ВАХ) нелинейного элемента R_2 определена экспериментальным путем и представлена, например, в виде таблицы измеренных значений тока и напряжения.

Для формирования математической модели цепи (рис. 3.1) необходимо иметь аналитическое выражение для ВАХ нелинейного элемента R_2 . Поэтому осуществляют *аппроксимацию*: исходную ВАХ представляют (заменяют, приближают) достаточно простой и легко вычисляемой аналитической функцией соответствующего класса.

Согласно второму закону Кирхгофа,

$$R_1 i + u(i) = u_{\text{вх}}. \quad (3.1)$$

Нелинейную ВАХ элемента R_2 аппроксимируем функцией

$$u(i) = i + 0,2i^3. \quad (3.2)$$

Сделаем подстановку выражения (3.2) в уравнение (3.1):

$$R_1 i + i + 0,2i^3 = u_{\text{вх}} \quad (3.3)$$

или

$$\underbrace{0,2i^3 + (R_1 + 1)i - u_{\text{вх}}}_{f(i)} = 0. \quad (3.4)$$

Соотношение $f(i) = 0$ представляет собой *математиче-*

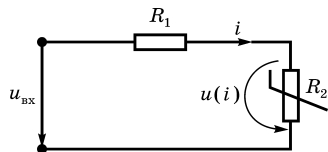


Рис. 3.1
Объект моделирования —
нелинейная цепь
постоянного тока

скую модель электрической цепи (см. рис. 3.1) в форме нелинейного алгебраического уравнения относительно тока i . Решение этой модели позволит определить ток i в цепи при заданных значениях $u_{\text{вх}}$ и R_1 .

Исследование объектов различной физической природы в установившемся режиме часто приводит к *статическим моделям* в форме нелинейных алгебраических уравнений.

Алгебраическое уравнение $f(x) = 0$ может содержать только алгебраические функции, в которых над переменной x производятся арифметические операции, возведение в степень с рациональным показателем и извлечение корня. Например:

$$x^3 + 151 = 12\sqrt{x}; \quad \frac{43}{x-17} - \frac{\sqrt{2}}{x+3} = 0; \quad (3.5)$$

$$\sqrt[3]{x} - 11 = 0,04x^2 - \frac{5}{x} - 1,207x. \quad (3.6)$$

При решении некоторых задач моделирование приводит к трансцендентным уравнениям.

Трансцендентным называется уравнение, в состав которого входят трансцендентные функции: показательная, логарифмическая, тригонометрические функции, возведение в иррациональную степень.

Примеры трансцендентных уравнений:

$$\arcsin x - 5^x = 0; \quad \frac{x^{\sqrt{2}}}{x^3 - 7} = 11 \cos x. \quad (3.7)$$

3.2. БАЗОВЫЕ ПОНЯТИЯ

Уравнение с одним неизвестным x в общем случае имеет вид

$$z(x) = g(x), \quad (3.8)$$

где $z(x)$ и $g(x)$ — функции, определенные на некотором числовом множестве X , называемом *областью допустимых значений уравнения*.

Другая форма записи уравнения с одним неизвестным имеет вид

$$f(x) = 0, \quad (3.9)$$

где $f(x) = z(x) - g(x)$ получается в результате переноса функции $g(x)$ в левую часть уравнения (3.8).

Всякое значение x^* , которое при подстановке в уравнение (3.9) обращает его в числовое равенство, а функцию $f(x)$ — в нуль, т. е. такое, что

$$f(x^*) = 0, \quad (3.10)$$

называется *корнем уравнения (3.9)* или *нулем функции $f(x)$* .

Решить уравнение — значит найти все его корни (решения) или доказать, что уравнение не имеет корней.

Для алгебраических уравнений число корней известно заранее. Каждое алгебраическое уравнение степени n имеет в множестве комплексных чисел n корней с учетом кратности.

3.3. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

Аналитическое (явное) решение, т. е. решение в виде готовой формулы, выражающей неизвестное x через параметры уравнения, можно получить только для ограниченного круга уравнений, например формулы для вычисления корней квадратного ($ax^2 + bx + c = 0$) и кубического ($x^3 + px + q = 0$) уравнений.

Решение некоторых простейших трансцендентных уравнений может быть получено в аналитической форме с использованием степенных рядов, непрерывных дробей и т. д.

В большинстве случаев найти *явное решение* уравнения очень сложно или невозможно. Кроме того, использование аналитических формул для решения большинства уравнений не может обеспечить получение точного значения корня, поскольку коэффициенты уравнения являются приближенными величинами, определенными в результате измерений. Поэтому задача отыскания точного значения корня теряет смысл.

Ставится задача определить приближенное значение корня уравнения с заданной точностью.

Приближенное решение математических задач лежит в основе *численных методов*.

3.3.1. ОСОБЕННОСТИ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ

3.3.1.1. ЭТАПЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ

Численное решение уравнения $f(x) = 0$ (речь идет о действительных корнях) проводят в два этапа:

1) *отделение корней*, т. е. отыскание таких достаточно малых отрезков в области допустимых значений x , в которых содержится только один корень (задача локализации корней);

2) *уточнение корней*, т. е. вычисление корней с заданной точностью с помощью какого-либо итерационного метода.

3.3.1.2. ОТДЕЛЕНИЕ КОРНЕЙ

Рассмотрим несколько способов отделения корней.

Способ 1 — по графику функции $y = f(x)$.

Корень уравнения

$$f(x) = 0 \quad (3.11)$$

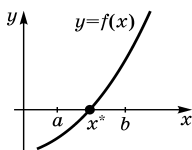


Рис. 3.2
Отделение
корней способом 1

приблизительно определяется как абсцисса точки пересечения графика с осью Ox (рис. 3.2). Устанавливаются границы a и b отрезка, в пределах которого заключен только один корень x^* .

Способ 2 — уравнение $f(x) = 0$ заменяют равносильным:

$$z(x) = g(x). \quad (3.12)$$

Строят графики функций $y_1 = z(x)$ и $y_2 = g(x)$.

Приближенное значение корня определяют как абсциссу точки пересечения этих графиков.

Например: произведем отделение корня (локализуем корень) трансцендентного уравнения

$$8 \lg x - \frac{9}{\sqrt{x}} - 5 = 0 \quad (3.13)$$

для области положительных значений аргумента $x > 0$.

Преобразуем исходное уравнение (3.13) к виду

$$8 \lg x = \frac{9}{\sqrt{x}} + 5, \tag{3.14}$$

где $z(x) = 8 \lg x$; $g(x) = \frac{9}{\sqrt{x}} + 5$.

Строим графики функций (рис. 3.3) $y_1 = z(x)$ и $y_2 = g(x)$.

Находим приближенно корень x^* уравнения $f(x) = 0$ как абсциссу точки пересечения графиков функций $y_1 = z(x)$ и $y_2 = g(x)$ и отрезок локализации этого корня $[a, b]$.

Способ 3 — по таблице значений функции $f(x)$ на интересующем интервале изменения аргумента x .

Например, представим таблицу (табл. 3.1) значений функции

$$f(x) = 8 \lg x - \frac{9}{\sqrt{x}} - 5. \tag{3.15}$$

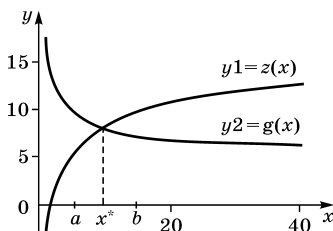


Рис. 3.3
Отделение корней способом 2

Из данных таблицы 3.1 видно, что корень уравнения существует и его следует искать на отрезке $[7,0; 10,0]$, так как значения функции на концах этого отрезка имеют разные знаки.

Способ 4 — *аналитический метод* отделения корней, который базируется на знании следующих свойств функции:

а) если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и принимает на концах этого отрезка значения разных знаков, то внутри отрезка $[a, b]$ существует по крайней мере один корень уравнения $f(x) = 0$;

б) если функция $f(x)$ непрерывна и монотонна на отрезке $[a, b]$ и принимает на концах отрезка значения разных знаков, а производная $f'(x)$ сохраняет постоянный знак внутри отрезка, то внутри этого отрезка существует корень уравнения $f(x) = 0$, и при том единственный.

Таблица 3.1

Таблица значений функции

x	1,0	4,0	7,0	10,0	13,0	16,0	19,0	22,0	25,0
$f(x)$	-14,0	-4,7	-1,6	0,2	1,4	2,4	3,2	3,8	4,4

Функция $y = f(x)$ называется *монотонной* в заданном интервале, если при любых $x_2 > x_1$ из этого интервала она удовлетворяет условию $f(x_2) \geq f(x_1)$ (*монотонно возрастающая функция*) или $f(x_2) \leq f(x_1)$ (*монотонно убывающая функция*).

Необходимым и достаточным *условием монотонности* функции в заданном интервале является выполнение для всех внутренних точек этого интервала условия $f'(x) \geq 0$ или $f'(x) \leq 0$.

Зная свойства функции $f(x)$, можно сделать вывод о характере графика $y = f(x)$, что может существенно облегчить процесс отыскания корней.

Продемонстрируем это для непрерывной и монотонной на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$, которая принимает на концах отрезка значения разных знаков, имеет во всех точках интервала первую и вторую производные $f'(x)$ и $f''(x)$, сохраняющие постоянный знак (рис. 3.4).

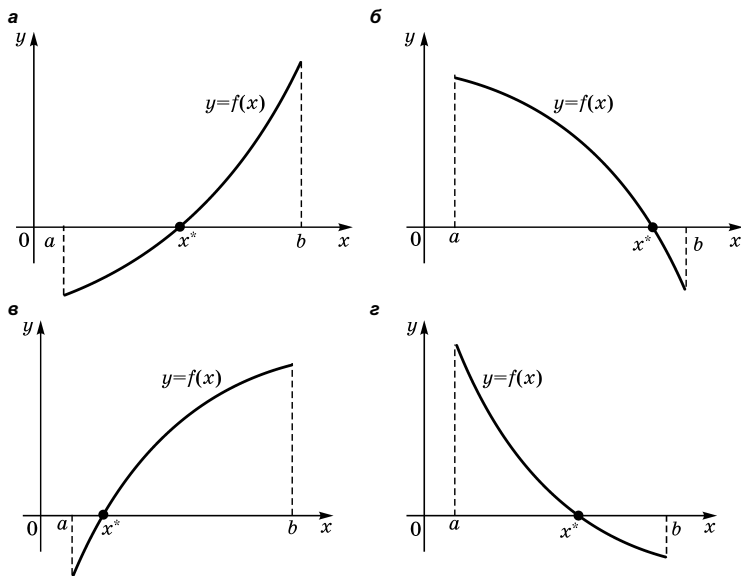


Рис. 3.4

Графики функций, иллюстрирующие аналитический способ отделения корней:

a — при $f(a) < 0, f(b) > 0, f'(x) > 0, f''(x) > 0$; $б$ — при $f(a) > 0, f(b) < 0, f'(x) < 0, f''(x) < 0$;
 $в$ — при $f(a) < 0, f(b) > 0, f'(x) > 0, f''(x) < 0$; $з$ — при $f(a) > 0, f(b) < 0, f'(x) < 0, f''(x) > 0$.

3.3.1.3. УТОЧНЕНИЕ КОРНЕЙ

Рассмотрим несколько численных *методов уточнения корней*, применяемых для решения как алгебраических, так и трансцендентных нелинейных уравнений. Эти методы относятся к разряду *итерационных*.

Итерационный процесс состоит в последовательном, шаг за шагом, уточнении начального (нулевого) приближения x_0 искомого значения корня x^* .

Каждый шаг итерационного метода называется *итерацией*.

В результате реализации итерационного метода получают последовательность приближенных значений корня $x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, \dots, x_n$.

Если эти значения (*приближения корня*) с увеличением n приближаются к истинному значению корня x^* , то говорят, что итерационный процесс *сходится*.

3.3.1.3.1. МЕТОД ПОЛОВИННОГО ДЕЛЕНИЯ
(ДИХОТОМИИ, БИСЕКЦИИ)

Пусть дано нелинейное уравнение

$$f(x) = 0, \quad (3.16)$$

где функция $f(x)$ непрерывна и монотонна на отрезке $[a, b]$ и имеет на концах отрезка разные знаки:

$$f(a)f(b) < 0. \quad (3.17)$$

Требуется найти корень x^* уравнения (3.16) с точностью до ε .

График функции $f(x)$ представлен на рисунке 3.5.

Рассмотрим суть и этапы реализации *метода половинного деления (дихотомии, бисекции)*.

1. Отрезок $[a, b]$ делим пополам и определяем середину отрезка:

$$\bar{x} = \frac{a + b}{2}. \quad (3.18)$$

2. Вычисляем значение функции в точке \bar{x} .

Если $f(\bar{x}) = 0$, то \bar{x} является корнем уравнения.

Если $f(\bar{x}) \neq 0$, то поиск корня продолжится на одном из двух полученных отрезков — $[a, \bar{x}]$ или $[\bar{x}, b]$. Следует

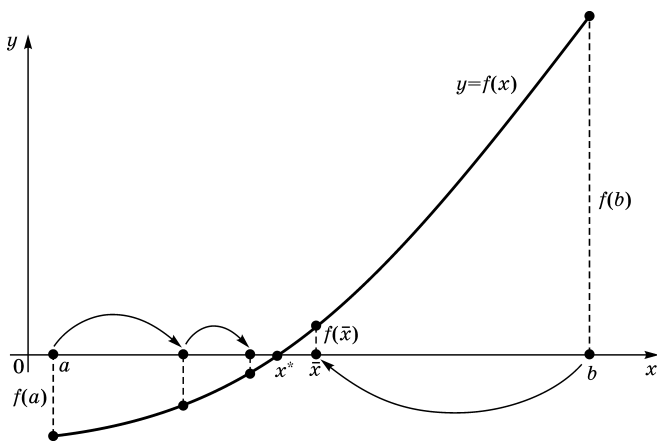


Рис. 3.5

Геометрическая интерпретация метода половинного деления

выбрать тот отрезок, на концах которого функция $f(x)$ принимает значения противоположных знаков.

В данном случае (рис. 3.5) выбираем отрезок $[a, \bar{x}]$, так как для него выполняется условие $f(a)f(\bar{x}) < 0$.

Для того чтобы сохранить в последующих расчетах единое обозначение $[a, b]$ текущего отрезка, на котором ведется поиск корня на данном шаге вычислений, необходимо параметру b присвоить новое значение $\bar{x} : b = \bar{x}$. С точки зрения геометрической интерпретации (рис. 3.5) это означает, что правая граница исходного отрезка — точка b переносится в точку \bar{x} , а оставшаяся за пределами точки \bar{x} часть графика функции дальше не рассматривается.

3. Новый отрезок $[a, b]$ снова делим пополам:

$$\bar{x} = \frac{a+b}{2}. \quad (3.19)$$

4. Вычисляем $f(\bar{x})$ и проводим анализ двух вновь полученных отрезков — $[a, \bar{x}]$ и $[\bar{x}, b]$. Для продолжения поиска корня выбираем тот из отрезков, для которого выполняется условие противоположности знаков функции в граничных точках.

В результате каждой i -й итерации отрезок, на котором существует корень, уменьшается в два раза (сжимается).

5. Процесс деления пополам текущего отрезка продолжаем до тех пор, пока очередной отрезок $[a, b]$ не будет удовлетворять условию

$$|b - a| < \varepsilon, \quad (3.20)$$

где ε — требуемая точность расчета.

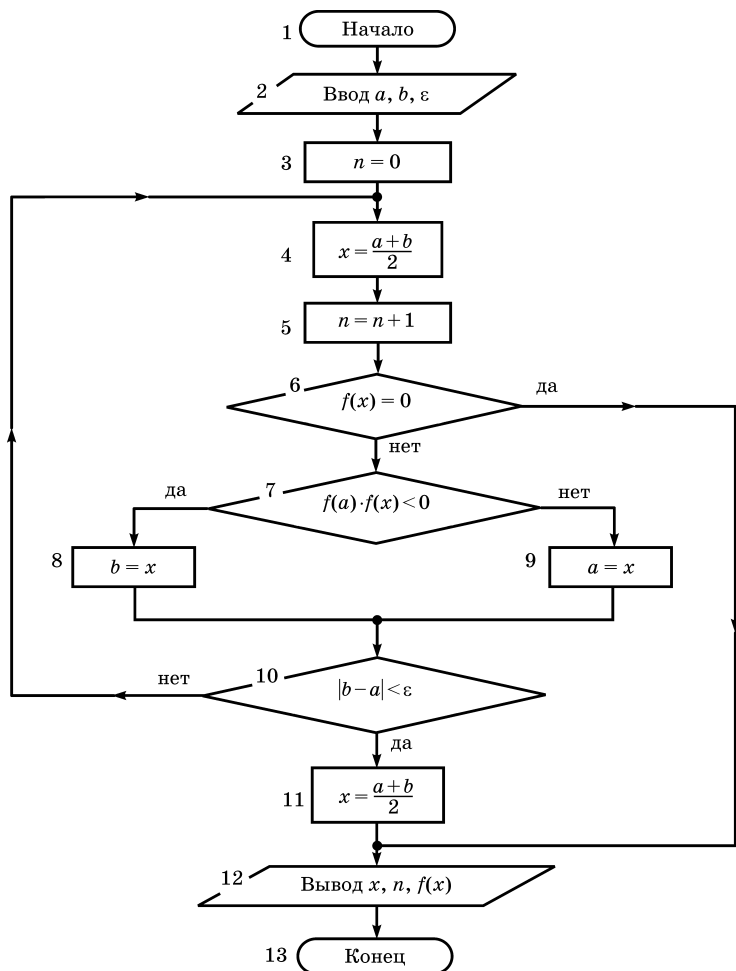


Рис. 3.6
Алгоритм метода половинного деления

За приближенное значение корня x^* принимаем значение середины последнего отрезка $[a, b]$, т. е.

$$x^* = \frac{a+b}{2}. \quad (3.21)$$

При этом погрешность вычисления корня не будет превышать значения $\frac{b-a}{2^{n+1}}$, где n — количество произведенных делений отрезков, т. е. количество итераций.

Алгоритм, реализующий метод половинного деления (дихотомии, бисекции), представлен на рисунке 3.6.

В блоке 3 (см. рис. 3.6) задается начальное значение счетчика n количества итераций (делений отрезка $[a, b]$ пополам). Блоки 7–9 реализуют выбор того из двух отрезков, на котором следует продолжать поиск корня и, соответственно, корректировку границы выбранного отрезка (b — при выборе левого отрезка, a — при выборе правого).

В блоке 10 проверяется условие: не стал ли текущий отрезок $[a, b]$ по абсолютной величине меньше заданной точности ε . Это условие завершения итерационного процесса уточнения корня.

Метод половинного деления — один из самых простых и надежных. Сходимость метода обеспечена для любых непрерывных функций, в том числе и для недифференцируемых.

Метод устойчив к ошибкам округления.

Однако по скорости сходимости он уступает методам, которые будут рассмотрены ниже.

3.3.1.3.2. МЕТОД НЬЮТОНА

Требуется решить нелинейное уравнение $f(x) = 0$. Первая и вторая производные $f'(x)$ и $f''(x)$ определены, непрерывны и сохраняют постоянные знаки на отрезке $[a, b]$.

Рассмотрим *геометрическую интерпретацию метода Ньютона* и этапы его реализации (рис. 3.7).

1. Выбираем начальное (нулевое) приближение x_0 искомого корня x^* заданного уравнения.

При этом надо придерживаться *следующего правила*: за начальное приближение корня следует принять тот конец заданного отрезка $[a, b]$, в котором знак функции сов-

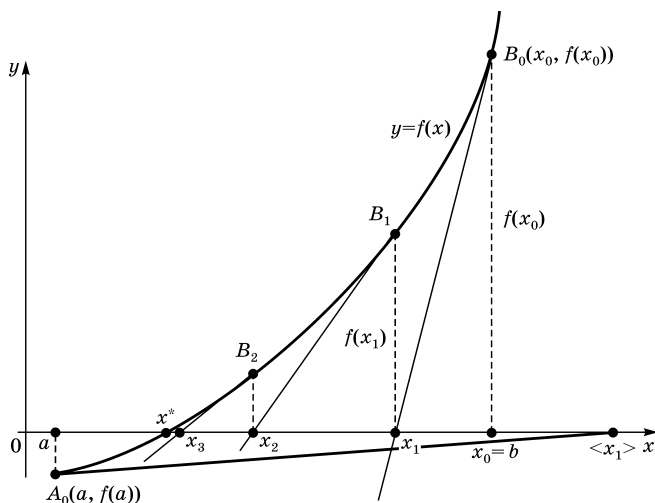


Рис. 3.7

Геометрическая интерпретация метода Ньютона

падает со знаком ее второй производной, т. е. выполняется условие

$$f(x_0)f''(x_0) > 0. \quad (3.22)$$

Это условие сходимости метода Ньютона.

Основываясь на свойствах данной функции $f(x)$ (см. рис. 3.4), делаем вывод о том, что условие сходимости выполняется для правой границы заданного интервала — точки b , поэтому принимаем $x_0 = b$.

2. Вычисляем значение функции $f(x_0)$.

Проводим касательную к кривой $f(x)$ в точке $B_0(x_0, f(x_0))$. Абсцисса точки пересечения касательной с осью Ox принимается за новое (первое) приближение корня x_1 .

Известно, что уравнение касательной, проведенной в точке B_0 с координатами $(x_0, f(x_0))$ к кривой функции $f(x)$, имеет вид

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0), \quad (3.23)$$

где x, y — текущие координаты точки, лежащей на касательной.

Сделаем подстановку в уравнение касательной (3.23) координат точки x_1 :

$$x = x_1; \quad y = 0. \quad (3.24)$$

Получаем

$$-f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0). \quad (3.25)$$

Обе части уравнения (3.25) разделим на $f'(x_0)$ и выразим x_1 :

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}. \quad (3.26)$$

Получаем первое приближение x_1 искомого корня.

3. Вычисляем значение функции $f(x)$ в точке x_1 .

Проводим касательную к кривой $f(x)$ в точке $B_1(x_1, f(x_1))$. Абсцисса точки пересечения касательной с осью Ox представляет собой второе приближение корня x_2 :

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}. \quad (3.27)$$

4. Продолжаем последовательно проводить касательные и определять точки их пересечения с осью Ox .

Тогда для текущего k -го приближения корня итерационный процесс реализуется рекуррентной формулой

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}. \quad (3.28)$$

Процесс уточнения корня прекращается, когда выполнится условие близости двух последовательных приближений:

$$|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon. \quad (3.29)$$

Алгоритм, реализующий метод Ньютона, представлен на рисунке 3.8. Блок 5 реализует проверку условия сходимости метода Ньютона (3.22) и выбор значения начального приближения корня x_0 (блоки 6, 7); блок 11 реализует подсчет количества итераций n ; блок 12 — вычисление текущего приближения корня x через предыдущее приближение согласно рекуррентной формуле (3.28).

Метод Ньютона обладает высокой скоростью сходимости, которая тем выше, чем больше крутизна графика функции $f(x)$ в пределах рассматриваемого отрезка.

Если численное значение производной $|f'(x)|$ мало вблизи корня, то процесс уточнения корня может оказаться очень долгим.

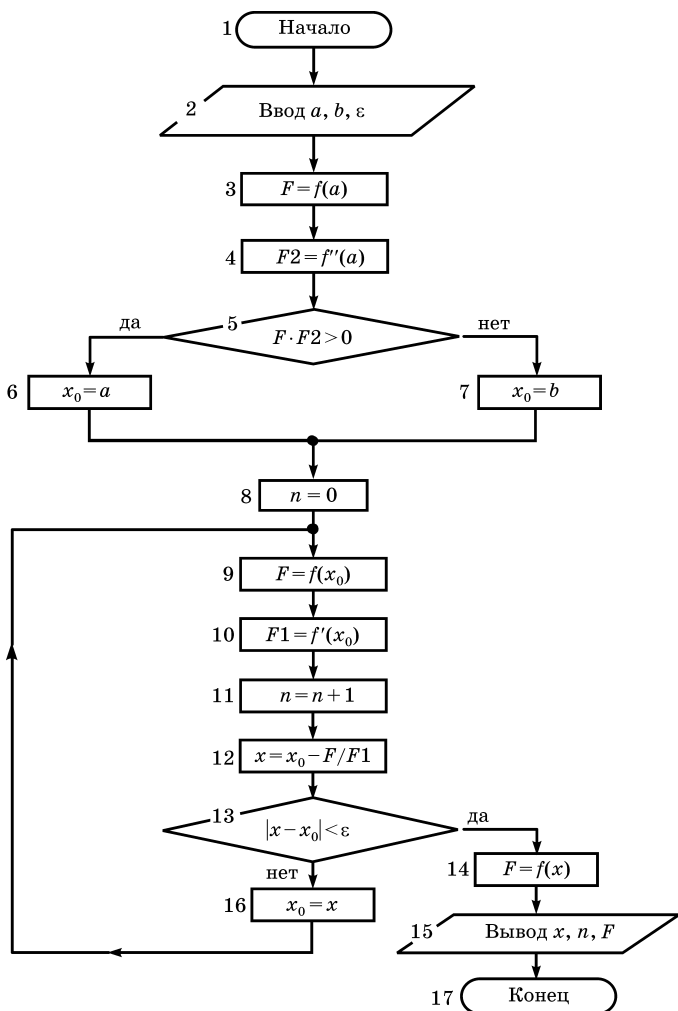


Рис. 3.8
Алгоритм метода Ньютона

Неудачно выбранное начальное приближение корня может привести к *расходимости* метода Ньютона (см. рис. 3.7): представим, что за начальное приближение корня x_0 принят левый конец отрезка $[a, b]$ — точка a . Касательная, проведенная в точке A_0 , пересекает ось Ox

за пределами заданного отрезка $[a, b]$. Таким образом, получили первое приближение корня $\langle x_1 \rangle$, еще дальше отстоящее от искомого значения корня x^* , чем нулевое приближение x_0 .

3.3.1.3.3. МЕТОД ИТЕРАЦИИ (МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ)

Пусть требуется решить нелинейное уравнение $f(x) = 0$.

Преобразуем исходное уравнение одним из известных способов к следующему виду:

$$x = \varphi(x), \quad (3.30)$$

где $\varphi(x)$ — эквивалентная функция.

На заданном отрезке $[a, b]$ выбираем начальное (нулевое) приближение корня x_0 и подставляем его в правую часть уравнения (3.30). Получаем значение первого приближения корня x_1 :

$$x_1 = \varphi(x_0). \quad (3.31)$$

Аналогичным образом определим второе приближение корня x_2 :

$$x_2 = \varphi(x_1). \quad (3.32)$$

Продолжая этот процесс далее, получаем последовательность приближений корня $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, определяемых соотношением

$$x_n = \varphi(x_{n-1}). \quad (3.33)$$

Итерационные вычисления по формуле (3.33) продолжают до тех пор, пока для двух последовательных приближений корня x_{n-1} и x_n не выполнится условие

$$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon. \quad (3.34)$$

Достаточным условием сходимости метода итерации, гарантирующим, что последовательно определяемые значения $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ будут приближаться к искомому корню x^* уравнения $f(x) = 0$, является условие

$$|\varphi'(x)| \leq q < 1 \text{ для } x \in [a, b], \quad (3.35)$$

причем скорость сходимости данного метода будет тем больше, чем меньше значение q .

Рассмотрим *геометрическую интерпретацию метода итерации*.

Исходное уравнение $f(x) = 0$ приводим к виду

$$x = \varphi(x). \quad (3.36)$$

Строим графики функций $y = x$ и $y = \varphi(x)$. Абсцисса точки пересечения этих графиков и будет являться корнем x^* уравнения $f(x) = 0$.

Рассмотрим несколько возможных вариантов итерационного процесса уточнения корня.

Вариант 1. $\varphi'(x) > 0$; $|\varphi'(x)| < 1$ (рис. 3.9).

Задаем начальное приближение корня $x_0 \in [a, b]$. Определяем значение функции $\varphi(x_0)$.

Через точку A_0 с координатами $x_0, \varphi(x_0)$ проводим горизонтальную линию до пересечения с прямой $y = x$ в точке B_1 . Через точку B_1 проводим вертикальную линию, пересекающую кривую $y = \varphi(x)$ и ось Ox . Точка пересечения этой линии с осью Ox даст первое приближение корня x_1 , а точка пересечения ее с кривой $y = \varphi(x)$ — точку A_1 с координатами $x_1, \varphi(x_1)$.

Через точку A_1 проводим горизонтальную линию до пересечения с прямой $y = x$ (точка B_2). Вертикальная линия, проведенная через точку B_2 , пересекая ось Ox , даст второе приближение корня x_2 , а также определит на кривой $y = \varphi(x)$ точку A_2 с координатами $x_2, \varphi(x_2)$.

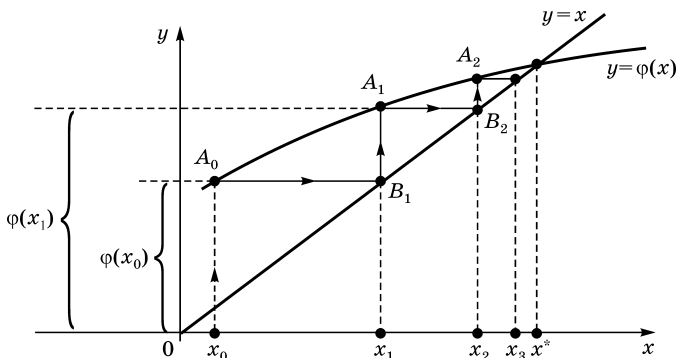


Рис. 3.9

Монотонная (односторонняя) сходимость

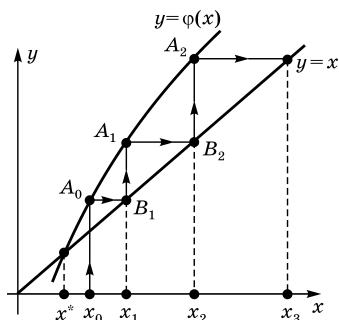


Рис. 3.10
Итерационный процесс расходится

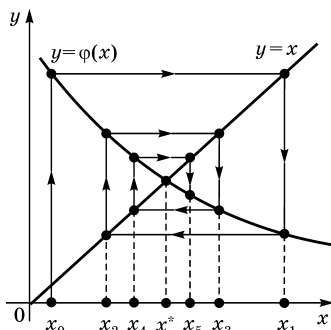


Рис. 3.11
Двусторонняя сходимость

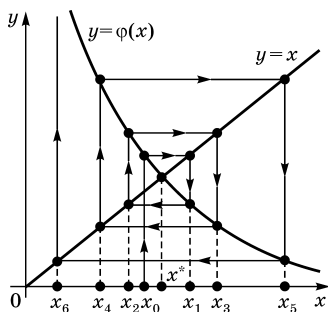


Рис. 3.12
Итерационный процесс расходится

Продолжая действия по такой же схеме, получаем на оси Ox последовательность значений $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, приближающихся (сходящихся) к истинному значению корня x^* .

В данном случае все последовательные приближения $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ находятся с одной стороны от корня x^* (см. рис. 3.9). Такая сходимость называется *монотонной* или *односторонней*.

Вариант 2. $\varphi'(x) > 0; |\varphi'(x)| > 1$ (рис. 3.10). Итерационный процесс расходится.

Вариант 3. $\varphi'(x) < 0; |\varphi'(x)| < 1$ (рис. 3.11). Итерационный процесс сходится. Процесс сходимости носит колебательный характер (*двусторонняя сходимость*). Последовательные приближения корня $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ расположены по разные стороны от x^* .

Вариант 4. $\varphi'(x) < 0; |\varphi'(x)| > 1$ (рис. 3.12). Итерационный процесс расходится.

Рекомендации по преобразованию исходного уравнения. Преобразование исходного уравнения $f(x) = 0$ к эквивалентному уравнению $x = \varphi(x)$ может быть осуществлено различными способами. Выбор конкретного способа определяется целью получить такую функцию $\varphi(x)$, для которой выполняется условие сходимости

$$|\varphi'(x)| \leq q < 1. \quad (3.37)$$

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 22. Пусть требуется определить корень нелинейного уравнения

$$4x^3 - 15x + 7 = 0 \quad (3.38)$$

на отрезке $[0, 1]$.

Способ 1. Прибавляем к обеим частям исходного уравнения неизвестное x :

$$(4x^3 - 15x + 7) + x = x, \quad (3.39)$$

получаем

$$4x^3 - 14x + 7 = x. \quad (3.40)$$

Следовательно,

$$\varphi(x) = 4x^3 - 14x + 7. \quad (3.41)$$

Проверяем, выполняется ли условие сходимости (3.35) метода итерации на отрезке $[0, 1]$ для полученной эквивалентной функции:

$$\varphi'(x) = 12x^2 - 14; \quad (3.42)$$

$$|\varphi'(0)| = |-14| > 1; \quad (3.43)$$

$$|\varphi'(1)| = |12 - 14| > 1. \quad (3.44)$$

Условие сходимости не выполняется, следовательно, функция $\varphi(x)$ в таком виде непригодна.

Способ 2. Выражаем неизвестное x из уравнения (3.38):

$$-15x = -7 - 4x^3, \quad (3.45)$$

получаем

$$x = \frac{7}{15} + \frac{4}{15}x^3. \quad (3.46)$$

Следовательно,

$$\varphi(x) = \frac{7}{15} + \frac{4}{15}x^3. \quad (3.47)$$

Проверяем, выполняется ли условие сходимости метода итерации на отрезке $[0, 1]$:

$$|\varphi'(0)| = |0| < 1; \quad (3.48)$$

$$|\varphi'(1)| = \left| \frac{4}{5} \right| < 1. \quad (3.49)$$

Условие сходимости выполняется на заданном отрезке, следовательно, можно воспользоваться функцией $\varphi(x) = \frac{7}{15} + \frac{4}{15}x^3$ для реализации метода итерации.

Пример 23. Пусть требуется уточнить корень уравнения

$$e^x - e^{-x} - 1 = 0 \quad (3.50)$$

на отрезке $[0, 1]$.

Способ 3. Представляем исходное уравнение в виде

$$e^x = e^{-x} + 1 \quad (3.51)$$

и логарифмируем обе части этого уравнения:

$$\ln(e^x) = \ln(e^{-x} + 1), \quad (3.52)$$

получаем

$$x = \ln(e^{-x} + 1). \quad (3.53)$$

Следовательно,

$$\varphi(x) = \ln(e^{-x} + 1); \quad (3.54)$$

$$|\varphi'(1)| = \frac{-e^{-x}}{e^{-x} + 1}. \quad (3.55)$$

Проверяем, выполняется ли условие сходимости метода итерации на отрезке $[0, 1]$:

$$|\varphi'(0)| = |-0,5| < 1; \quad (3.56)$$

$$|\varphi'(1)| = |-0,269| < 1. \quad (3.57)$$

Условие сходимости выполняется.

Способ 4. Для некоторых уравнений рассмотренные выше способы преобразования не дают желаемых результатов. В таких случаях рекомендуется применить следующий прием, гарантирующий выполнение условия сходимости метода итерации.

Левую и правую части исходного уравнения $f(x) = 0$ умножаем на произвольную константу λ и прибавляем к обеим частям неизвестное x :

$$x = x + \lambda f(x), \quad (3.58)$$

тогда

$$\varphi(x) = x + \lambda f(x). \quad (3.59)$$

Коэффициент λ задается следующим образом:

$$\lambda = -\frac{1}{M}, \tag{3.60}$$

где M — наибольшее значение производной $f'(x)$ на отрезке $[a, b]$,

$$M = \max_{[a, b]} f'(x). \tag{3.61}$$

Пример 24. Пусть требуется определить корень уравнения

$$x^3 + 3x^2 - 3 = 0 \tag{3.62}$$

на отрезке $[0,5; 1,5]$.

Представляем исходное уравнение в виде

$$x = x + \lambda(x^3 + 3x^2 - 3), \tag{3.63}$$

таким образом,

$$\varphi(x) = x + \lambda(x^3 + 3x^2 - 3). \tag{3.64}$$

Определяем значение λ :

$$\lambda = -\frac{1}{M}, \tag{3.65}$$

где

$$M = \max_{[0,5; 1,5]} f'(x) = \max_{[0,5; 1,5]} [3x^2 + 6x] = 15,75, \tag{3.66}$$

следовательно, $\lambda = -\frac{1}{15,75} = -0,063$.

Таким образом,

$$\varphi(x) = x - 0,063(x^3 + 3x^2 - 3), \tag{3.67}$$

$$\varphi'(x) = 1 - 0,19x^2 - 0,38x. \tag{3.68}$$

Проверяем условие сходимости:

$$|\varphi'(0,5)| = 0,76 < 1; \tag{3.69}$$

$$|\varphi'(1,5)| = 0,0025 < 1. \tag{3.70}$$

Условие сходимости выполняется.

Алгоритм, реализующий метод итерации, представлен на рисунке 3.13.

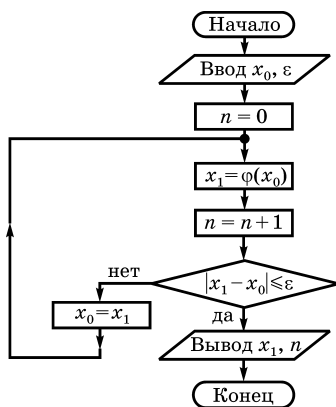


Рис. 3.13

Алгоритм метода итерации

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ФОРМЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

4.1. ОБЛАСТИ ПРИМЕНЕНИЯ

Математический аппарат обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) является одним из основных инструментов моделирования и исследования явлений природы, технических систем и технологических процессов. К решению ОДУ сводятся многие задачи физики, механики, электротехники, теории электрических цепей, электроэнергетики, теории автоматического управления, химической кинетики, гидродинамики, баллистики, теории пластичности и т. д.

Обыкновенными дифференциальными уравнениями описываются многие электрические и магнитные явления, движение заряженных частиц в электрических и магнитных полях, переходные процессы в электрических цепях, в системах электроснабжения, движение летательных аппаратов и планет Солнечной системы, процессы нефте- и газодобычи, геологии, процессы радиоактивного распада веществ и др.

Посредством решения ОДУ производится анализ устойчивости и оценивание состояния динамических систем, расчет режимов работы электротехнических, радиотехнических, электронных устройств, исследование механических и электрических колебаний, определение прогиба балок, расчет траекторий движения тел и др.

Ф. Энгельс в своем труде «Диалектика природы» подчеркивал огромную роль этого математического аппарата: «Лишь дифференциальное исчисление дает естествознанию возможность изображать математически не только состояния, но и процессы: движение».

Теория дифференциальных уравнений (как в обычных, так и в частных производных) является важнейшим инструментом исследования скорости изменения различных величин [7]. Поэтому данный математический аппарат служит основой для моделирования и исследования *динамических непрерывных систем*.

4.2. БАЗОВЫЕ ПОНЯТИЯ

Динамической называется модель, в математическое описание которой в качестве независимой переменной входит время.

В динамической модели учитываются инерционные свойства моделируемого объекта, наличие у него «памяти», т. е. отображается тот факт, что значение выходного процесса $y(t)$ объекта зависит не только от значения входного воздействия $x(t)$ в данный момент времени, но и от его прошлых значений (его предыстории) [8].

Для *динамического объекта* вводится понятие *состояния*, определяемого однозначно значениями совокупности параметров в данный момент времени, и задается закон, описывающий изменение (эволюцию) начального состояния объекта с течением времени.

Динамические технические объекты способны воспринимать внешние возмущающие воздействия и откликаться (реагировать) на них изменением выходных величин, характеризующих состояние и поведение объекта.

Динамические объекты описывают динамическими (эволюционными) моделями (линейными и нелинейными).

Динамические системы могут быть *консервативными* и *диссипативными*.

Консервативные системы (в механике — гамильтоновы) характеризуются неизменным во времени запасом энергии (потери (рассеяние) энергии полагаются равными нулю) [22]. Примерами являются механические колебательные системы при отсутствии трения. Представление моделируемой динамической системы как консервативной является идеализацией реальной системы.

Диссипативными называют динамические системы, в которых запас энергии со временем уменьшается за счет

трения или рассеяния. Например, свободные электромагнитные колебания (колебания тока, напряжения) в электрической цепи являются затухающими вследствие потерь энергии на омическом сопротивлении R (часть энергии переходит в джоулево тепло).

Динамическая система называется *автономной*, если она не подвержена внешним воздействиям (независима от внешних факторов).

Обыкновенным дифференциальным уравнением n -го порядка называют соотношение вида

$$F(t, y(t), y'(t), y''(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0, \quad (4.1)$$

связывающее независимую переменную t , искомую функцию $y(t)$ и производные искомой функции.

Для динамических моделей в качестве независимой переменной t рассматривается время.

Порядок дифференциального уравнения определяется наивысшим порядком n производной, входящей в него.

Процессы в *линейных физических системах* описываются *линейными моделями*.

В *линейной модели* взаимосвязь между входными и выходными сигналами (параметрами) объекта отображается посредством линейных соотношений.

Линейная система вида, представленного на рисунке 4.1, называемая односвязной, может быть описана *линейным дифференциальным уравнением*

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + a_{n-2} \frac{d^{n-2} y(t)}{dt^{n-2}} + \dots + a_0 y(t) = \\ = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + b_{m-2} \frac{d^{m-2} x(t)}{dt^{m-2}} + \dots + b_0 x(t), \end{aligned} \quad (4.2)$$

где $y(t)$ — искомая функция — выходной процесс; $x(t)$ — заданная функция — входной процесс (характеризует внешнее воздействие на физическую систему); t — независимая переменная.

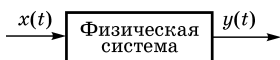


Рис. 4.1
Линейная система
с одним входом и одним выходом

Если коэффициенты $a_0, a_1, a_2, \dots, b_0, b_1, b_2, \dots$ дифференциального уравнения (4.2) не зависят от времени t , т. е. $a_0, a_1, a_2, \dots, b_0, b_1, b_2, \dots$ — const, то уравнение (4.2) называется *линейным с постоянными коэффициентами*.

Если внешнее воздействие на исследуемую физическую систему отсутствует, т. е. $x(t) = 0$, то модель строят на основе *однородного* дифференциального уравнения

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + a_{n-2} \frac{d^{n-2} y(t)}{dt^{n-2}} + \dots + a_0 y(t) = 0. \quad (4.3)$$

Линейным называется дифференциальное уравнение, коэффициенты которого не зависят от искомой функции y и в которое функция y и ее производные входят линейно (в первой степени).

Основным свойством линейных систем является применимость *принципа суперпозиции (наложения)*, суть которого: сумме воздействий на систему соответствует сумма ее реакций на эти воздействия.

В качестве примера линейной системы можно привести электрическую цепь с несколькими источниками. Токи от каждого источника независимы, поэтому проводится расчет токов отдельно для каждого источника. Результирующие токи получаются суммированием частных токов.

В электростатике принцип суперпозиции выражается в том, что напряженность E электрического поля нескольких неподвижных точечных зарядов q_1, q_2, q_3, \dots равна векторной сумме напряженностей полей, которые бы создавал каждый из этих зарядов в отсутствие остальных.

Принцип суперпозиции существенно облегчает исследование линейных объектов, так как позволяет ограничиться исследованием объекта только по одному входу. Он дает возможность представить реакцию (отклик) $y(t)$ исследуемой технической системы на сложный сигнал $x(t)$ как сумму ее реакций на элементарные сигналы (воздействия), на которые может быть разложен сигнал $x(t)$.

Стационарным называется объект, параметры которого не изменяются во времени.

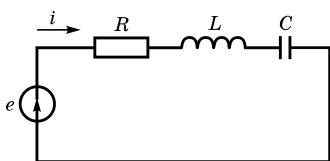
Стационарность модели означает независимость ее коэффициентов от времени.

Линейная стационарная модель формируется на основе обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами ($a_0, a_1, a_2, \dots, b_0, b_1, b_2, \dots$ — const). Такая модель описывает линейную систему, параметры которой не зависят от времени.

4.3. ПРИМЕРЫ ФОРМИРОВАНИЯ МОДЕЛЕЙ

Пример 25. Моделируемый объект (оригинал) — электрическая цепь (рис. 4.2): R, L, C — const.

Согласно второму закону Кирхгофа,



$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = e. \quad (4.4)$$

Выразим ток через напряжение на емкости:

$$i = C \frac{du_C}{dt} \quad (4.5)$$

Рис. 4.2

Объект моделирования — электрическая цепь

и сделаем его подстановку в уравнение (4.4):

$$\underbrace{LC}_{\text{const}} \frac{d^2 u_C}{dt^2} + \underbrace{RC}_{\text{const}} \frac{du_C}{dt} + u_C = e \quad (4.6)$$

— это *линейная стационарная модель* — обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка относительно напряжения $u_C (y \rightarrow u_C; x \rightarrow e)$.

Для электрической цепи (рис. 4.2) можно составить еще одну математическую модель.

Продифференцируем уравнение (4.4):

$$R \frac{di}{dt} + L \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{C} i = \frac{de}{dt} \quad (4.7)$$

и умножим обе части уравнения (4.7) на C :

$$\underbrace{LC}_{\text{const}} \frac{d^2 i}{dt^2} + \underbrace{RC}_{\text{const}} \frac{di}{dt} + i = \underbrace{C}_{\text{const}} \frac{de}{dt} \quad (4.8)$$

— это *линейная стационарная модель* (дифференциальное уравнение 2-го порядка) относительно тока $i (y \rightarrow i; x \rightarrow e)$.

Пример 26. Линейной стационарной моделью в классе дифференциальных уравнений может быть описан электрический генератор постоянного тока (рис. 4.3):

$$T_{\Gamma} \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k_{\Gamma} x(t), \quad (4.9)$$

где $x(t)$ — входная переменная u_B — напряжение возбуждения; $y(t)$ — выходная переменная e_{Γ} — ЭДС, наводимая в обмотке якоря генератора; T_{Γ} — постоянная времени генератора; k_{Γ} — передаточный коэффициент генератора; n — частота вращения якоря генератора.

Линейная нестационарная модель описывает линейную систему, параметры которой (или хотя бы один параметр) являются функцией времени. Такая модель может быть представлена *линейным дифференциальным уравнением* с коэффициентами, зависящими от времени.

Пример 27. Моделируемый объект (оригинал) — электрическая цепь (рис. 4.4).

Индуктивность обеспечивается катушкой с ферромагнитным сердечником. Сердечник периодически перемещается вдоль оси катушки каким-либо устройством (рис. 4.5). Перемещение сердечника относительно катушки вызывает изменение магнитной проводимости путей замыкания магнитного потока катушки. В результате изменяется потокосцепление Ψ , т. е. $\Psi = \Psi(t)$.

Индуктивность принято рассматривать как коэффициент пропорциональности между потокосцеплением Ψ и током i :

$$\Psi = Li. \quad (4.10)$$

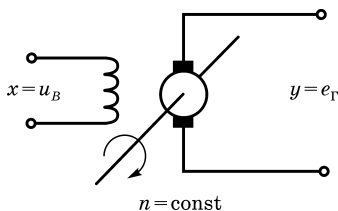


Рис. 4.3
Электрический генератор
постоянного тока

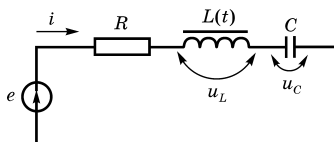


Рис. 4.4
Объект моделирования —
электрическая цепь

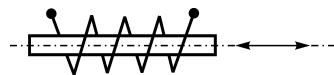


Рис. 4.5
Катушка с сердечником
(магнитная проницаемость
 $\mu = \text{const}$)

Выразим индуктивность из соотношения (4.10):

$$L = \frac{\Psi}{i}. \quad (4.11)$$

Следовательно,

$$L = L(t). \quad (4.12)$$

Согласно второму закону Кирхгофа,

$$Ri + u_L + u_C = e, \quad (4.13)$$

где

$$u_L = \frac{d\Psi}{dt} = \frac{d[L(t)i]}{dt} = i \frac{dL(t)}{dt} + L(t) \frac{di}{dt}. \quad (4.14)$$

Сделаем подстановку соотношения (4.14) в уравнение (4.13):

$$Ri + i \frac{dL(t)}{dt} + L(t) \frac{di}{dt} + u_C = e. \quad (4.15)$$

Выразим ток i через напряжение u_C :

$$i = C \frac{du_C}{dt}. \quad (4.16)$$

Сделаем подстановку выражения (4.16) в уравнение (4.15):

$$RC \frac{du_C}{dt} + C \frac{du_C}{dt} \frac{dL(t)}{dt} + L(t)C \frac{d^2u_C}{dt^2} + u_C = e. \quad (4.17)$$

Приведем подобные члены и запишем их в порядке старшинства производных. Получим

$$\underbrace{L(t)C \frac{d^2u_C}{dt^2}}_{A = A(t)} + \underbrace{\left(RC + C \frac{dL(t)}{dt} \right) \frac{du_C}{dt} + u_C}_{B = B(t)} = e. \quad (4.18)$$

Дифференциальное уравнение (4.18) 2-го порядка относительно напряжения u_C представляет собой (при определенных допущениях) *нестационарную линейную модель* электрической цепи (см. рис. 4.4) ($y \rightarrow u_C$; $x \rightarrow e$).

Нелинейные математические модели могут формироваться на основе дифференциальных уравнений, коэффициенты которых (или хотя бы один коэффициент) зависят от искомой переменной y либо искомой перемен-

ная u входит в дифференциальное уравнение в n -й степени ($n \neq 1$).

Нелинейные физические системы описываются нелинейными моделями.

Нелинейной считается система, которая содержит хотя бы один нелинейный элемент.

Нелинейным считается элемент, параметры которого зависят от входных и выходных сигналов.

Нелинейным элементом электрической цепи считается такой элемент, на выводах которого ток и напряжение связаны нелинейной зависимостью.

Параметр нелинейного элемента является функцией тока, проходящего по нему, или приложенного напряжения.

Нелинейными характеристиками обладают диоды, транзисторы, катушки с ферромагнитными сердечниками, трансформаторы, магнитные усилители, преобразователи, электрические машины и т. д.

Если для линейного элемента вольт-амперная характеристика (ВАХ) представляет собой прямую, проходящую через начало координат (рис. 4.6), то для нелинейного элемента

$$R \neq \text{const}; \quad R = R(i), \quad (4.19)$$

т. е. ВАХ имеют нелинейный характер.

Примеры ВАХ нелинейных элементов приведены на рисунке 4.7.

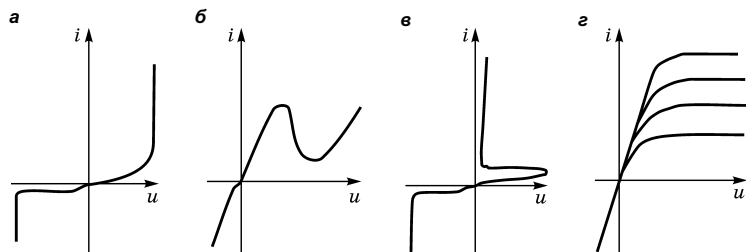


Рис. 4.7

Примеры ВАХ нелинейных элементов:

a — стабилитрон; $б$ — туннельный диод; $в$ — тиристор; $г$ — транзистор.

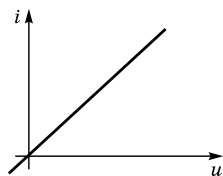


Рис. 4.6
Пример ВАХ
линейного элемен-
та ($R = \text{const}$)

Нелинейные модели могут быть сформированы на основе нелинейных дифференциальных уравнений, коэффициенты которых (или хотя бы один коэффициент) зависят от искомой функции y либо искомая функция y или ее производные входят в дифференциальное уравнение в степени n ($n \neq 1$).

Пример 28. Моделируемый объект — нелинейная электрическая цепь (рис. 4.8): $R(i)$ — нелинейный элемент.

Аппроксимируем ВАХ нелинейного резистора нелинейной функцией вида:

$$i = au^2. \quad (4.20)$$

Согласно второму закону Кирхгофа,

$$u(i) + L \frac{di}{dt} = e. \quad (4.21)$$

Сделаем подстановку выражения (4.20) в уравнение (4.21):

$$u(i) + L \frac{d(au^2)}{dt} = e. \quad (4.22)$$

В итоге получаем

$$\underbrace{2auL}_{A=f(u)} \frac{du}{dt} + u = e \quad (4.23)$$

— это математическая модель в форме ОДУ 1-го порядка относительно напряжения u *нелинейная*, так как один из ее коэффициентов зависит от искомой функции u , *стационарная*.

При других видах аппроксимирующего выражения (4.20) получаются другие математические модели.

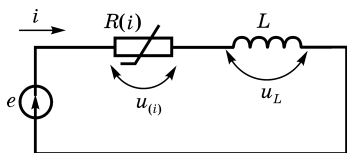


Рис. 4.8
Моделируемый объект — нелинейная электрическая цепь

Решение некоторых научных и инженерных задач приводит к математическим моделям в форме *систем ОДУ*, содержащим несколько неизвестных функций, зависящих от одного и того же аргумента, а также производные этих функций.

4.4. РЕШЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ В КЛАССЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим ОДУ 1-го порядка:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad (4.24)$$

или

$$y' = f(t, y). \quad (4.25)$$

Решением дифференциального уравнения (4.25) является всякая дифференцируемая функция y , которая при подстановке в него обращает его в тождество.

Найти общее решение дифференциального уравнения (4.25) — значит найти совокупность всех решений или семейство решений, удовлетворяющих данному уравнению:

$$y = \varphi(t, C), \quad (4.26)$$

где C — произвольная постоянная.

Геометрически общее решение дифференциального уравнения (4.25) представляет собой *семейство интегральных кривых* этого уравнения.

Частное решение дифференциального уравнения (4.25) (т. е. единственное из семейства решений) может быть получено из общего решения (4.26) при конкретном числовом значении произвольной постоянной C .

Для того чтобы определить значение C , требуется задать *дополнительные условия*, которым должно удовлетворять искомое решение ОДУ (4.25).

В зависимости от способа задания дополнительных условий рассматривают два типа задач:

- *задача Коши* (дополнительные условия задаются в одной начальной точке и называются *начальными условиями*);
- *краевая задача* (дополнительные условия задаются в двух и более точках и называются *граничными, или краевыми условиями*).

Количество дополнительных условий должно быть равно порядку n дифференциального уравнения.

Примером краевой задачи является решение ОДУ, описывающего деформацию горизонтальной балки, размещенной на двух опорах.

Задача Коши. Среди всех решений (4.26) дифференциального уравнения (4.25) найти такое решение

$$y = y(t), \quad (4.27)$$

которое удовлетворяет *начальным условиям*: $y = y_0$ при $t = t_0$ или $y(t_0) = y_0$.

Произвольная постоянная C определяется в результате подстановки начальных условий t_0, y_0 в формулу общего решения (4.26).

Геометрический смысл задачи Коши: начальные условия позволяют выбрать из семейства интегральных кривых ту кривую, которая проходит через точку с координатами t_0, y_0 .

Пример 29. Решить ОДУ:

$$y' = y \quad \left(\frac{dy}{dt} = y \right). \quad (4.28)$$

Общее решение дифференциального уравнения (4.28) имеет вид

$$y = Ce^t, \quad (4.29)$$

где C — произвольная постоянная.

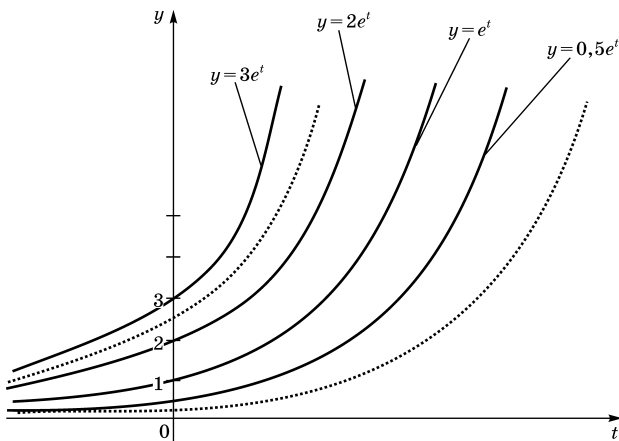


Рис. 4.9
Семейство интегральных кривых

Полученное общее решение (4.29) определяет следующее семейство интегральных кривых (решений) (рис. 4.9).

Для нахождения частного решения дифференциального уравнения (4.28) зададим начальные условия:

$$y_0 = 1 \text{ при } t_0 = 0 \text{ или } y(0) = y_0 = 1. \quad (4.30)$$

В результате подстановки начальных условий в формулу общего решения (4.29) получаем

$$C = 1. \quad (4.31)$$

Следовательно, частное решение ОДУ (4.28):

$$y = e^t. \quad (4.32)$$

Дифференциальное уравнение n -го порядка

$$F(t, y(t), y'(t), y''(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0, \quad (4.33)$$

разрешенное относительно старшей производной, может быть представлено в следующей форме:

$$y^{(n)} = f(t, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}). \quad (4.34)$$

Общее решение ОДУ n -го порядка (4.33) имеет вид

$$y = \varphi(t, C_1, C_2, C_3, \dots, C_n). \quad (4.35)$$

Для определения частного (единственного) решения, согласно задаче Коши, должны быть заданы начальные условия:

$$\text{в точке } t = t_0 : \begin{cases} y(t_0) = y_0; \\ y'(t_0) = y_{10}; \\ y''(t_0) = y_{20}; \\ \dots \\ y^{(n-1)} = y_{n-1, 0}. \end{cases} \quad (4.36)$$

4.5. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ В КЛАССЕ ОДУ

Методы решения ОДУ можно условно разделить на следующие группы (см. рис. 4.10).

Задачу нахождения решений дифференциального уравнения называют *задачей интегрирования дифференциального уравнения*.



Рис. 4.10
Методы решения ОДУ

Получить *точное решение* (решение в *явном* виде) означает выразить решение через элементарные или специальные функции или через интегралы от элементарных функций. Однако применить методы точного (явного) решения удастся только для очень ограниченного круга типов уравнений.

Приближенно-аналитическими называются методы, позволяющие получить приближенное решение дифференциального уравнения в виде аналитического выражения.

Среди методов этого класса следует выделить *асимптотические методы*, базирующиеся на разложении искомого решения в формальный ряд по степеням некоторого малого параметра, последующем усечении ряда и использовании его частичных сумм в качестве приближенных решений (метод малого параметра, возмущений, осреднения, пограничного слоя, методы Ляпунова, Пуанкаре, Ван-дер-Поля, методы, разработанные В. С. Пугачевым, Н. М. Крыловым, Н. Н. Боголюбовым, А. Н. Тихоновым, Ю. А. Митропольским, И. З. Штокало, Ю. Л. Далецким и др.). Целью асимптотических методов является получение приближенной аналитической формулы, позволяющей качественно оценить поведение решения дифференциального уравнения на некотором конечном интервале изменения независимой переменной.

Эти методы имеют особое значение для исследования электромагнитных колебаний в электротехнике, радиотехнике, оптике, акустике, автоколебаний в автоматических системах, оценивания виброустойчивости технических систем, при решении задач квантовой механики, строительной механики, газодинамики, астрофизики и др.

К классу приближенно-аналитических относятся также метод последовательных приближений (Пикара), метод разложения в ряд Тейлора по независимой переменной, методы Чаплыгина, Ньютона — Канторовича и др.

Решение краевых задач для ОДУ может осуществляться приближенно-аналитическими методами коллокаций, наименьших квадратов, методами Галеркина, Рунге, в основе которых лежит аппроксимация решения дифференциального уравнения линейной комбинацией каких-либо базисных функций (тригонометрических, полиномов, сплайн-функций и др.).

Численные методы предполагают получение приближенного решения дифференциального уравнения в виде таблицы приближенных значений искомой функции $y(t)$ для ряда значений независимой переменной t из интервала $[t_0; T]$.

Для *численного решения* краевых задач применяются конечно-разностные методы, проекционные методы Рунге и Галеркина, метод конечных элементов и др.

4.5.1. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

Численные методы позволяют получить искомое решение $y(t)$ дифференциального уравнения (4.25) в форме таблицы его приближенных значений $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ для заданной последовательности значений аргумента $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$.

Непрерывный отрезок $[t_0, T]$, на котором требуется получить решение дифференциального уравнения (4.25), заменяют конечной последовательностью дискретных точек $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$, называемых *узлами* (узлами сетки). Величина $h = t_i - t_{i-1}$ — расстояние между соседними узлами — называется *шагом интегрирования* (шагом сетки).

Функция дискретного аргумента $y[t_i]$, определенная только в узлах сетки, называется *сеточной функцией*.

Численные приближенные методы делятся на два класса: *одношаговые* и *многошаговые*.

Одношаговые методы действуют по принципу

$$y_{i+1} = F(y_i), \quad (4.37)$$

т. е. для расчета следующего значения решения y_{i+1} в точке $i + 1$ достаточно знать только одно текущее значение y_i в точке i (методы Эйлера, Рунге — Кутты, Кутта — Мерсона, Фельберга и др.).

Многошаговые методы реализуют схему

$$y_{i+1} = F(y_{i-k}, y_{i-k+1}, \dots, y_{i-1}, y_i), \quad (4.38)$$

т. е. для расчета следующего значения решения y_{i+1} используется $k + 1$ значений решения y_i , вычисленных на предыдущих шагах. К многошаговым относятся методы Адамса — Мултона, Адамса — Башфорта, Милна, Гира, прогноза-коррекции и т. д.

В основе *одношаговых методов* лежит следующая идея: искомое решение y_i дифференциального уравнения в окрестности текущей точки $t = t_i$ можно представить в виде *ряда Тейлора*.

Учитывая, что $y(t_i) = y_i$, получим

$$y_{i+1} = y_i + y_i' h + \frac{y_i''}{2!} h^2 + \frac{y_i'''}{3!} h^3 + \frac{y_i^{(IV)}}{4!} h^4 + \dots \quad (4.39)$$

Производится усечение ряда Тейлора. Количество оставшихся членов ряда определяет *порядок численного метода* и, соответственно, его *точность*.

При этом операция вычисления производных $y', y'', y''', \dots, y^{(k)}$ заменяется последовательностью простейших алгебраических операций над значениями функции $f(t, y)$ в нескольких точках интервала $[t_i, t_i + h]$.

Таким образом, исходная дифференциальная задача заменяется конечно-разностной.

Численный метод задает порядок действий (вычислительную схему) для перехода от уже найденного значения решения y_i (или начального) к следующему y_{i+1} . Разностная вычислительная схема строится на основе рекуррентных соотношений.

Численные методы позволяют найти частное решение дифференциального уравнения.

4.5.2. МЕТОД РУНГЕ — КУТТА

Пусть на отрезке $[a, b]$ требуется найти приближенное численное решение дифференциального уравнения

$$y' = f(t, y) \quad (4.40)$$

при начальных условиях $y(t_0) = y_0$.

Разбиваем отрезок $[a, b]$ на n равных частей точками

$$t_i = t_0 + ih, \quad (4.41)$$

где $i = 0, 1, 2, 3, \dots, n$; $h = \frac{b-a}{n}$ — шаг интегрирования.

На каждом шаге интегрирования заданного ОДУ (4.40) искомая функция $y(t)$ аппроксимируется рядом Тейлора (4.39), усеченным до члена ряда, содержащего h^4 .

Каждое последующее приближенное значение y_{i+1} искомого решения y определяется через текущее значение y_i с помощью рекуррентных формул по вычислительной схеме

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i, \quad (4.42)$$

где

$$\Delta y_i = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4); \quad (4.43)$$

$$k_1 = hf(t_i, y_i); \quad (4.44)$$

$$k_2 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right); \quad (4.45)$$

$$k_3 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right); \quad (4.46)$$

$$k_4 = hf\left(t_i + h, y_i + k_3\right). \quad (4.47)$$

Это метод Рунге — Кутта 4-го порядка, одношаговый, обладает достаточной точностью, его суммарная погрешность $R \sim h^4$ (метод четвертого порядка точности). Локальная погрешность на одном шаге (шаговая погрешность) имеет порядок h^5 .

Метод Рунге — Кутта применяется также для решения систем дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_n); \\ \frac{dy_2}{dt} = f_2(t, y_1, y_2, \dots, y_n); \\ \dots \\ \frac{dy_n}{dt} = f_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n), \end{cases} \quad (4.48)$$

где y_1, y_2, \dots, y_n — искомые функции; $y_1(t_0) = y_{10}$; $y_2(t_0) = y_{20}$; \dots ; $y_n(t_0) = y_{n0}$ — начальные условия.

Система ОДУ 1-го порядка (4.48) представлена в нормальной форме (в форме Коши).

В этом случае от *скалярной формы* записи выражений переходят к *векторной*:

$$y \rightarrow Y, \quad f(t, y) \rightarrow F(t, Y), \quad (4.49)$$

и задача Коши принимает вид

$$Y' = F(t, Y), \quad Y(t_0) = Y_0. \quad (4.50)$$

Вычислительная схема метода Рунге — Кутта для систем ОДУ 1-го порядка представляется соотношениями, аналогичными (4.43)–(4.47).

Чтобы применить метод Рунге — Кутта к дифференциальному уравнению n -го порядка

$$y^{(n)} = f(t, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}), \quad (4.51)$$

следует свести его к системе n дифференциальных уравнений 1-го порядка в нормальной форме (в форме Коши).

Для этого вводятся следующие обозначения для производных:

$$\begin{aligned} y' &= y_1; & y'' &= y_2; & y''' &= y_3; & \dots; \\ y^{(n-1)} &= y_{n-1}; & y^{(n)} &= y_n. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Тогда результирующая система дифференциальных уравнений в нормальной форме будет иметь вид

$$\begin{cases} y' = y_1; \\ y'_1 = y_2; \\ y'_2 = y_3; \\ \dots \\ y'_{n-1} = f(t, y, y_1, y_2, y_3, \dots, y_{n-1}). \end{cases} \quad (4.53)$$

Пример 30. Преобразуем ОДУ 3-го порядка

$$y''' = -y + 5ty'' + t^3 \quad (4.54)$$

к системе дифференциальных уравнений 1-го порядка в нормальной форме (в форме Коши).

Введем обозначения: $y' = y_1$; $y'' = y_2$, тогда система ОДУ в нормальной форме будет иметь вид

$$\begin{cases} y' = y_1; \\ y_1' = y_2; \\ y_2' = -y + 5ty_2 + t^3. \end{cases} \quad (4.55)$$

Существуют различные модификации метода Рунге — Кутты, в том числе реализующие адаптивный (автоматический) выбор шага интегрирования в зависимости от характера (скорости) изменения решения дифференциального уравнения.

Сложности в получении численного решения ОДУ (особенно нелинейных) возникают в случае, если решение является неустойчивым. Это означает, что очень малые изменения начальных условий приводят к очень большим изменениям решения при $t \rightarrow \infty$. Речь идет о плохо обусловленных задачах.

В качестве примера рассмотрим дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$y''(t) - 7y'(t) - 8y(t) = 0 \quad (4.56)$$

при начальных условиях

$$y(0) = 1; \quad y'(0) = -1. \quad (4.57)$$

Решение $y(t)$ ОДУ (4.56) при начальных условиях (4.57) показано на рисунке 4.11 непрерывной линией. Придадим очень малое приращение первому начальному условию $y(0) = 1 + \Delta = 1 + 0,00000001$. Влияние этого приращения Δ окажется так велико, что решение уравнения $y\Delta(t)$ (на рисунке 4.11 — штриховая линия) устремится

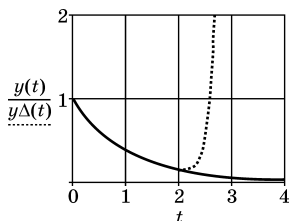


Рис. 4.11
Неустойчивое решение ОДУ

в бесконечность. Такой же эффект при реализации численных методов может наблюдаться и за счет влияния ошибок округления и усечения.

Проблема выбора подходящего численного метода появляется в случае так называемой *жесткой* задачи, когда решение дифференциального уравнения содержит как быстро убывающую составляющую (с малой постоянной времени), так и медленно убывающую составляющую (с большой постоянной времени). При этом меньшая постоянная времени достаточно мала по сравнению с интервалом времени, на котором определяется решение.

4.6. КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ФАЗОВОЙ ПЛОСКОСТИ

Метод фазовой плоскости позволяет провести качественное исследование и анализ динамических систем, моделируемых дифференциальными уравнениями. Под качественным исследованием понимают выявление общих свойств изучаемого объекта без интегрирования его дифференциального уравнения (модели), что особенно важно при рассмотрении нелинейных технических систем.

Фазовой плоскостью называют плоскость, в которой по оси абсцисс откладывается искомая (исследуемая) функция y — решение дифференциального уравнения, а по оси ординат — скорость изменения функции y , т. е. ее производная по времени $y'(t) = \frac{dy(t)}{dt}$.

Состояние моделируемой физической системы в каждый момент времени характеризуется *изображающей точкой* на фазовой плоскости. С течением времени изображающая точка перемещается на фазовой плоскости, описывая при этом *фазовую траекторию*. Таким образом, каждой точке фазовой траектории соответствует конкретное значение времени t .

Семейство фазовых траекторий, соответствующих различным начальным условиям, представляет собой *фазовый портрет* исследуемой динамической системы.

Если динамическая система описывается дифференциальным уравнением 3-го порядка, то ее состояние будет определяться изображающей точкой в трехмерном *фазовом пространстве* с координатами $y(t)$, $y'(t)$, $y''(t)$.

Фазовый портрет позволяет судить о динамических свойствах изучаемой физической системы, таких как устойчивость, тип и качество переходного процесса, количество состояний равновесия, возможность возникновения автоколебаний и др.

Приведем примеры различных типов процессов $y(t)$, получаемых в результате решения ОДУ и соответствующих им фазовых траекторий.

Решение ОДУ и построение фазовых траекторий проводились в системе MathCad с помощью вычислительного блока *Given/Odesolve*.

Встроенная функция *Odesolve* (t, tk, n) реализует решение дифференциального уравнения численным методом Рунге — Кутта относительно переменной t (tk — конец интервала интегрирования, n — число шагов интегрирования).

На рисунке 4.12 приведен фрагмент документа MathCad, демонстрирующий решение нелинейного ОДУ 2-го порядка

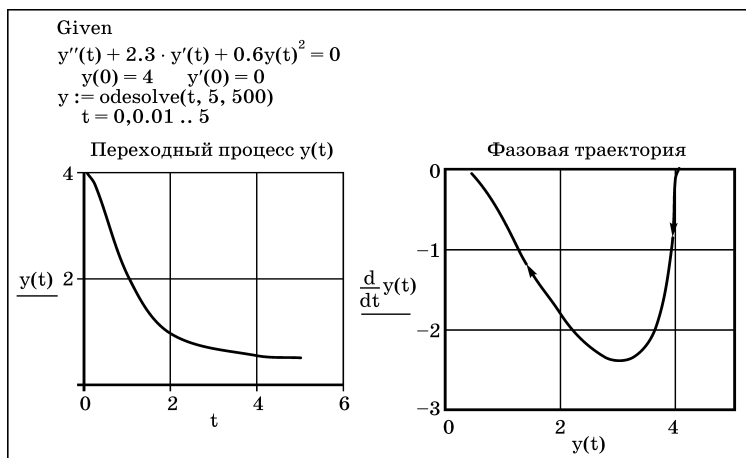


Рис. 4.12
Решение ОДУ 2-го порядка.
Апериодический затухающий переходный процесс

при заданных начальных условиях (задача Коши). Переходный процесс $y(t)$ в моделируемой системе имеет апериодический затухающий характер. Стрелками на фазовой траектории показано направление движения изображающей точки с течением времени t . Так как фазовая траектория стремится к началу координат, то данную динамическую систему можно считать устойчивой.

Решение $y(t)$ нелинейного ОДУ 2-го порядка

$$y''(t) - 1,45 \frac{y'(t)}{y(t)} - 0,11y(t) = 0 \quad (4.58)$$

при начальных условиях $y(0) = 6$; $y'(0) = 0$ представляет собой монотонно расходящийся процесс (рис. 4.13а).

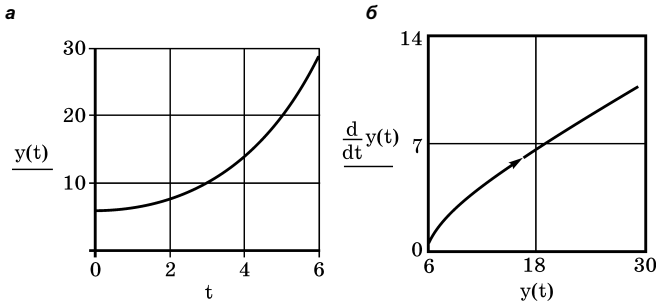


Рис. 4.13
Решение ОДУ:

а — монотонно расходящийся процесс $y(t)$; б — фазовая траектория.

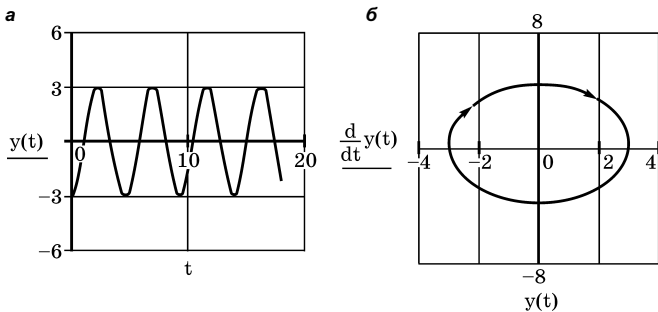


Рис. 4.14
Решение ОДУ:

а — периодический колебательный процесс $y(t)$; б — фазовая траектория.

На рисунке 4.13б приведена соответствующая ему фазовая траектория. Тот факт, что фазовая траектория удаляется от начала координат, свидетельствует о неустойчивости процесса в исследуемой динамической системе.

Периодический процесс (незатухающие колебания) $y(t)$ (рис. 4.14а), полученный в результате решения нелинейного ОДУ

$$14,2y''(t) + y(t)y'(t) + 26,05y(t) = 0 \quad (4.59)$$

при начальных условиях $y(0) = -3$; $y'(0) = 0$ отображается на фазовой плоскости в виде замкнутой кривой (рис. 4.14б). Одному периоду колебаний функции $y(t)$ соответствует перемещение изображающей точки по замкнутому контуру.

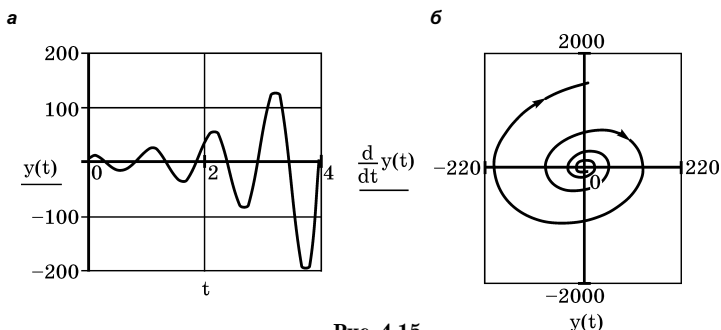


Рис. 4.15
Решение ОДУ:

а — расходящийся колебательный процесс $y(t)$; б — фазовая траектория.

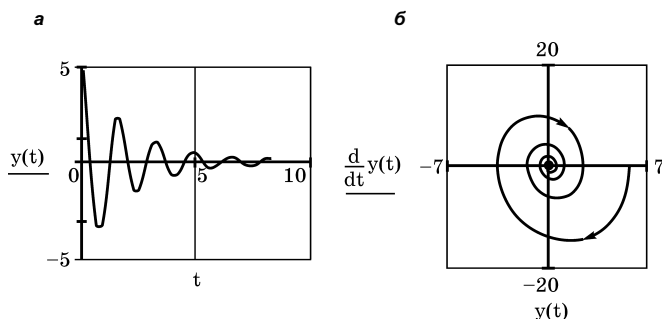


Рис. 4.16
Решение ОДУ:

а — затухающий колебательный процесс $y(t)$; б — фазовая траектория.

На рисунке 4.15а показан расходящийся колебательный процесс $y(t)$ — результат решения дифференциального уравнения

$$y''(t) - 1,38y'(t) + 29y(t) = 0 \quad (4.60)$$

при начальных условиях $y(0) = 10; y'(0) = 0$.

Фазовая траектория (рис. 4.15б) имеет вид раскручивающейся спирали, что свидетельствует о возрастании амплитуды колебаний $y(t)$.

Затухающий колебательный процесс $y(t)$, полученный в результате решения ОДУ

$$y''(t) + 0,97y'(t) + 15,5y(t) = 0 \quad (4.61)$$

при начальных условиях $y(0) = 5; y'(0) = 0$, приведен на рисунке 4.16а. Фазовая траектория в этом случае представляет собой свертывающуюся спираль (рис. 4.16б). Амплитуда колебаний процесса $y(t)$ с течением времени стремится к нулю.

Метод фазовой плоскости применяется и для качественного исследования систем ОДУ.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДЛЯ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

5.1. ОБЛАСТИ ПРИМЕНЕНИЯ

В системах с распределенными параметрами физические процессы являются не только функциями времени, но и функциями пространственных координат.

Математические модели для систем с распределенными параметрами формируются на основе *дифференциальных уравнений с частными производными* (ДУЧП). ДУЧП связывают неизвестную функцию нескольких независимых переменных и ее частные производные.

К математическому описанию в форме ДУЧП приводят многие задачи *математической физики*. Предметом математической физики является математический аппарат моделирования и исследования основных закономерностей различных классов физических явлений и процессов. В основу уравнений математической физики положены фундаментальные законы природы — законы сохранения массы, энергии, заряда, импульса и др.

К важнейшим уравнениям математической физики относятся ДУЧП, описывающие механические, электрические, электромагнитные, акустические колебания, распространение волн в жидкостях, процессы распространения тепла в среде и диффузии частиц, явления переноса нейтронов в атомных реакторах и т. д.

Модели такого класса являются основой для решения задач механики сплошных сред (анализ напряженно-деформированного состояния несущих элементов технических объектов), для моделирования процессов теплопередачи

в элементах конструкций и технологического оборудования, для исследования течений сплошных потоков жидкостей и газов в трубопроводах, для количественного анализа процесса индукционного нагрева металлических деталей (за счет вихревых токов) и т. д.

К системам с распределенными параметрами относятся линии передач электроэнергии, телефонные и телеграфные воздушные и кабельные линии, линии телеуправления и телеизмерения, антенны, резонаторы, обмотки электрических машин и т. д.

Электрическую цепь рассматривают как систему с распределенными параметрами в том случае, если длина цепи соизмерима или превышает длину волны распространяющихся в ней электромагнитных колебаний.

Математический аппарат ДУЧП применяют для моделирования контактной сети при исследовании влияния электропоездов на систему тягового электроснабжения, для описания рельсовой линии в задачах анализа процессов распространения сигнала по рельсовым цепям.

5.2. ПРИМЕРЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Пример 31. Моделируемый объект (оригинал) — двухпроводная однородная линия.

Однородной называют длинную линию, параметры которой (сопротивление, индуктивность, проводимость изоляции и емкость) распределены вдоль провода равномерно (неизменны по всей длине линии).

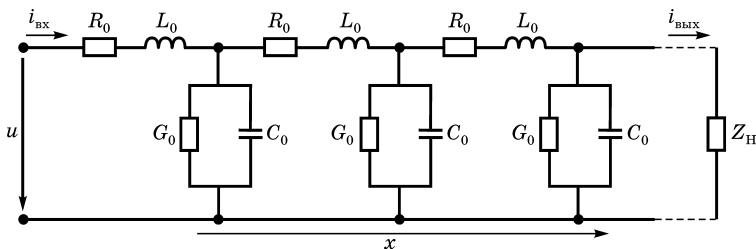


Рис. 5.1

Схема замещения линии с потерями

Схема замещения линии с потерями представлена на рисунке 5.1, где x — пространственная координата; $i_{\text{вых}} \neq i_{\text{вх}}$ из-за утечки тока через изоляцию между проводами.

Линия характеризуется параметрами, задаваемыми на единицу длины:

- R_0, L_0 — *продольные активное сопротивление и индуктивность*;
- G_0, C_0 — *поперечные проводимость и емкость* — параметры изоляции между проводами. Проводимость G_0 обусловлена несовершенством изоляции.

Математическая модель в общем случае имеет вид

$$\begin{cases} -\frac{\partial u}{\partial x} = R_0 i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t}; \\ -\frac{\partial i}{\partial x} = G_0 u + C_0 \frac{\partial u}{\partial t}. \end{cases} \quad (5.1)$$

Это система двух дифференциальных уравнений 1-го порядка в частных производных, называемая системой телеграфных уравнений, где $u = u(t, x)$ и $i = i(t, x)$.

В результате решения модели (5.1) определяются процессы $u = u(t, x)$ и $i = i(t, x)$, т. е. напряжение между проводами и ток как функции времени t и пространственной координаты x .

Пример 32. Уравнение теплопроводности — математическая модель, описывающая процесс распространения тепла. Относится к уравнениям *параболического* типа.

Рассмотрим простейший вариант (линейная задача).

Тонкий однородный стержень (рис. 5.2) длиной l , изолированный в тепловом отношении от окружающей среды (т. е. через боковую поверхность не происходит теплообмена с окружающей средой). Стержень достаточно тонкий, поэтому температуру T во всех точках поперечного сечения x можно считать одинаковой в любой момент времени t . На концах стержня поддержи-

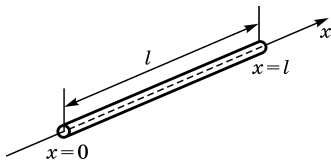


Рис. 5.2

Тонкий однородный стержень

вается некоторая температура — постоянная или меняющаяся во времени по какому-либо заданному закону. Тепло может распространяться только вдоль оси x .

Требуется определить закон распределения температуры T в любой точке стержня x в любой момент времени t .

Применим математическую модель вида

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (5.2)$$

где a — коэффициент температуропроводности, определяемый как

$$a = \sqrt{\frac{\lambda}{c\rho}}, \quad (5.3)$$

где λ — коэффициент теплопроводности; c — удельная теплоемкость; ρ — плотность материала стержня.

Для получения единственного частного решения уравнения (5.2) в частных производных необходимо задать начальные и граничные (краевые) условия, соответствующие физическим условиям данной задачи.

Начальные условия:

$$T(x, 0) = T|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad (5.4)$$

где $\varphi_0(x)$ — распределение температуры в стержне в начальный момент времени $t = 0$.

Граничные условия должны выполняться на торцевых сечениях стержня:

$$T(0, t) = T|_{x=0} = \alpha(t) \quad (5.5)$$

и

$$T(l, t) = T|_{x=l} = \beta(t), \quad (5.6)$$

где $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ — законы изменения температуры соответственно в левом и правом концах стержня.

Тогда решение $T(x, t)$ уравнения (5.2) будет функцией двух переменных — пространственной координаты x и времени t .

Если внутри стержня имеются источники или поглотители тепла, то математическая модель усложняется:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{Q_v}{c\rho}, \quad (5.7)$$

где Q_v — объемная плотность теплового источника.

Математическая модель, описывающая процесс передачи тепла в *однородной среде* (в трехмерном пространстве), представляет собой *трехмерное уравнение теплопроводности*

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{Q_v}{c\rho}. \quad (5.8)$$

Решением уравнения (5.8) будет функция $T(x, y, z, t)$, позволяющая определить температуру T в любой точке среды с координатами (x, y, z) в любой момент времени t .

Уравнение (5.8) иногда записывают в краткой форме

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \Delta T + \frac{Q_v}{c\rho}, \quad (5.9)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа.

Эта модель позволяет найти закон распределения тепла внутри заданного твердого тела, ограниченного поверхностью S .

Начальные условия:

$$T(x, y, z, 0) = T|_{t=0} = \varphi(x, y, z), \quad (5.10)$$

где $\varphi_0(x, y, z)$ — начальное распределение температуры во всех точках тела при $t = 0$.

Граничные условия:

$$T(x, y, z, t)|_{\text{на } S} = f(x, y, z, t), \quad (5.11)$$

где $f(x, y, z, t)$ — функция, определяющая закон распределения температуры во всех точках на поверхности S , ограничивающей тело, в любой момент времени t .

Модель (5.8) описывает и ряд других процессов различной физической природы: диффузию одного вещества в другое, фильтрацию жидкости и газа в пористой среде, проникновение магнитного поля в плазму, поведение нейтронов в ядерном реакторе и т. д.

Математическое моделирование процесса движения сжимаемого газа, распространения возмущений электромагнитных полей, исследование колебаний приводит к так называемому *волновому уравнению* (уравнению гиперболического типа):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (5.12)$$

где a — скорость распространения возмущений.

Таким образом, волновое уравнение (5.12) описывает процесс распространения возмущений в некоторой среде. Оно является базовой математической моделью в акустике.

Явное (точное аналитическое) решение ДУЧП возможно найти только для очень ограниченного круга одномерных задач. К точным методам решения линейных ДУЧП относятся метод разделения переменных, методы интегральных преобразований (Лапласа, Фурье и др.), метод функций Грина, метод характеристик. Для точного решения нелинейных ДУЧП применяют методы поиска симметрии, прямой метод Кларксона — Крускала, метод дифференциальных связей и т. д.

Среди методов приближенного решения выделяют приближенные аналитические (однопараметрические интегральные методы, метод равнодоступной поверхности, методы линеаризации и др.), асимптотические (методы возмущений) и численные.

Особую значимость для решения прикладных задач имеют численные методы (различные схемы методов конечных разностей, конечных элементов и др.).

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ И СТОХАСТИЧЕСКИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

6.1. БАЗОВЫЕ ПОНЯТИЯ. ДВА ПОДХОДА К МОДЕЛИРОВАНИЮ ФИЗИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Все рассмотренные выше математические модели относятся к классу *детерминированных* и описывают процессы в детерминированных системах.

Детерминированные системы характеризуются однозначным соответствием (соотношением) между входными и выходными сигналами (процессами).

Поведение детерминированной системы можно однозначно предсказать (с вероятностью, равной единице).

Если задан входной сигнал $x(t)$ такой системы, известны функциональный оператор, связывающий вход и выход системы $y = F(x)$, а также ее состояние x_0, y_0 в начальный момент времени t_0 , то значение сигнала на ее выходе в любой момент времени определяется однозначно (рис. 6.1).

Существует два подхода к исследованию систем: *детерминированный* и *стохастический*.

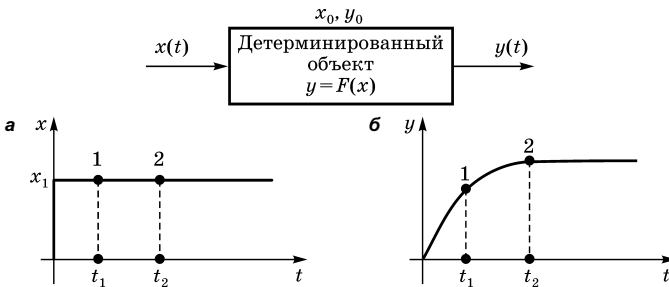


Рис. 6.1

Пример детерминированной системы:

а — входной сигнал (процесс) системы; б — выходной сигнал (процесс) системы.

Детерминированный подход основан на применении детерминированной математической модели физической системы.

Стохастический подход подразумевает описание исследуемого объекта стохастической математической моделью.

Стохастическая математическая модель наиболее адекватно (достоверно) отображает физические процессы в реальной системе, функционирующей в условиях влияния внешних и внутренних *случайных факторов (шумов)*.

Стохастическая модель устанавливает *вероятностные соотношения* между входом и выходом исследуемого объекта.

Перечислим внутренние и внешние случайные факторы.

Внутренние факторы:

- температурная и временная нестабильность электронных компонентов;
- нестабильность питающего напряжения;
- шум квантования в цифровых системах;
- шумы в полупроводниковых приборах в результате неравномерности процессов генерации и рекомбинации основных носителей заряда;
- тепловой шум в проводниках за счет теплового хаотического движения носителей заряда;
- искрение в контактах и коллекторах электрических машин, используемых в качестве источников питания;
- дробовой шум в полупроводниках, обусловленный случайным характером процесса преодоления носителями потенциального барьера;
- фликкер-шум, обусловленный медленными случайными флуктуациями физико-химического состояния отдельных областей материалов электронных устройств и т. д.

Внешние факторы:

- внешние электрические и магнитные поля, источниками которых являются высоковольтные линии электропередачи и контактной сети железных дорог, высоковольтные установки для научных или производственных целей, мощные радиопередающие устройства и т. д.;
- электромагнитные бури;
- электромагнитные помехи от грозových разрядов;

- помехи, связанные с работой промышленности и транспорта;
- вибрации;
- влияние космических излучений, тепловое излучение окружающих объектов;
- колебания температуры, давления, влажности воздуха;
- запыленность воздуха и т. д.

Влияние (наличие) случайных факторов приводит к одной из ситуаций, схематично обозначенных на рисунке 6.2.

Следовательно, предположение о детерминированном характере реальной физической системы (пренебрежение наличием случайных влияющих факторов) и описание ее детерминированной математической моделью являются *идеализацией реальной системы*. Фактически мы имеем ситуацию, изображенную на рисунке 6.3.

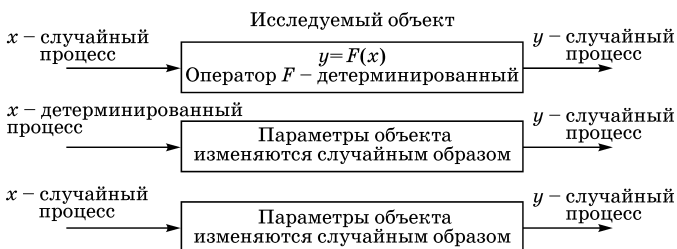


Рис. 6.2

Возможные ситуации, к которым приводит влияние на физическую систему внешних и (или) внутренних случайных факторов

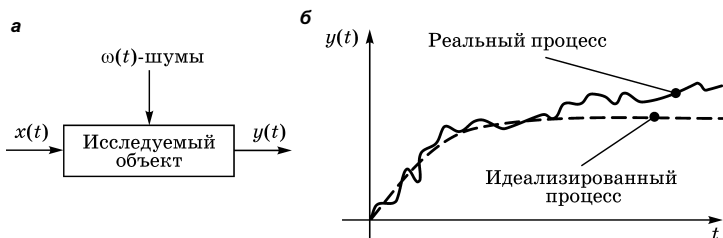


Рис. 6.3

Пример недопустимой идеализации исследуемого объекта:

a — реальный объект; b — результат моделирования (идеализированный процесс).

Детерминированная модель допустима в следующих случаях:

- влияние случайных факторов на исследуемый объект столь незначительно, что пренебрежение ими не приведет к ощутимому искажению результатов моделирования;
- детерминированная математическая модель отображает реальные физические процессы в усредненном смысле.

В тех задачах, где не предъявляется серьезных требований к точности результатов моделирования, предпочтение отдается детерминированной модели. Это объясняется тем, что реализация, анализ и исследование детерминированной модели много проще, чем стохастической.

Детерминированная модель недопустима для описания таких технических систем, в которых случайные процессы $\omega(t)$ соизмеримы с детерминированными $x(t)$. Результаты, полученные на основе применения детерминированной математической модели, будут неадекватными реальным процессам. Это относится к системам радиолокации, к системам наведения и управления летательными аппаратами, к системам связи, телевидению, к системам навигации, к любым системам, работающим со слабыми сигналами, в электронных устройствах контроля, в прецизионных измерительных устройствах и т. д.

6.2. ОСНОВНЫЕ ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

В математическом моделировании *случайный процесс* часто рассматривают как случайную функцию времени, мгновенные значения которой являются случайными величинами.

Случайный процесс $y(t)$ можно рассматривать как совокупность (ансамбль) его реализаций $y_1(t), y_2(t), y_3(t), \dots, y_i(t)$, наблюдаемых в отдельных опытах над исследуемой технической системой, проводимых в одинаковых условиях (рис. 6.4).

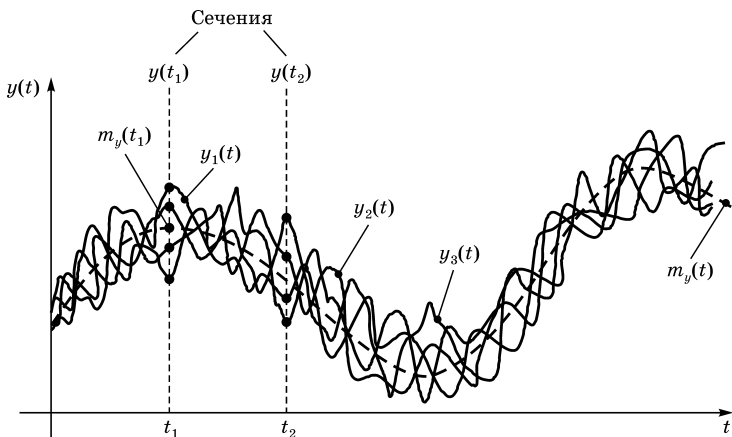


Рис. 6.4
Реализации $y_i(t)$ случайного процесса $y(t)$

Стохастическая модель позволяет сделать статистические выводы о некоторых числовых *вероятностных характеристиках* исследуемого процесса $y(t)$.

Рассмотрим ряд важных числовых вероятностных характеристик случайных процессов.

Математическое ожидание случайного процесса $y(t)$ представляет собой неслучайную функцию $m_y(t)$, которая при каждом фиксированном значении аргумента $t = t_i$ равна математическому ожиданию $m_y(t_i)$, случайной величины $y(t_i)$ в сечении t_i ансамбля ее реализаций (рис. 6.4).

Математическое ожидание случайного процесса $y(t)$ может быть выражено через его одномерную плотность вероятности:

$$m_y(t) = M\{y(t)\} = \overline{y(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} yf(y, t)dy. \quad (6.1)$$

Геометрически математическое ожидание $m_y(t)$, выделенное на рисунке 6.4 пунктирной линией, представляет собой «среднюю» кривую, около которой располагаются возможные реализации случайного процесса $y(t)$.

Дисперсия характеризует меру рассеивания значений случайного процесса $y(t)$ относительно его среднего значения. Дисперсия случайного процесса $y(t)$ представляет собой

функцию, которая при каждом фиксированном значении аргумента $t = t_i$ равна дисперсии случайной величины $y(t_i)$ в сечении t_i ансамбля ее реализаций.

Дисперсия может быть выражена через одномерную плотность вероятности случайного процесса:

$$D_y(t) = M\{[y(t) - m_y(t)]^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} [y(t) - m_y(t)]^2 f(y, t) dy. \quad (6.2)$$

Среднее квадратичное отклонение случайного процесса $y(t)$

$$\sigma_y(t) = \sqrt{D_y(t)} \quad (6.3)$$

имеет ту же размерность, что и сам процесс $y(t)$.

Физический смысл среднего квадратичного отклонения с точки зрения электротехники: $\sigma(t)$ рассматривается как действующее значение напряжения или тока централизованного случайного процесса.

Корреляционная функция (характеризует степень связи (корреляции) между значениями случайного процесса $y(t)$, отстоящими друг от друга на время τ):

$$\begin{aligned} R_y(\tau) &= M\{[y(t) - m_y(t)] \cdot [y(t + \tau) - m_y(t + \tau)]\} = \\ &= M[\overset{\circ}{y}(t) \cdot \overset{\circ}{y}(t + \tau)], \end{aligned} \quad (6.4)$$

где

$$\overset{\circ}{y}(t) = y(t) - m_y(t) \quad (6.5)$$

— отклонение случайного процесса от его математического ожидания, называемое *центрированным случайным процессом*.

Спектральная плотность (спектр мощности, или энергетический спектр) случайного процесса $y(t)$ характеризует распределение его мощности по отдельным спектральным составляющим, т. е. описывает частотные свойства случайного процесса. Спектральная плотность связана с корреляционной функцией через прямое преобразование Фурье:

$$S_y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_y(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (6.6)$$

Случайный процесс $y(t)$ называют *стационарным в широком смысле*, если его математическое ожидание m_y и дисперсия D_y не зависят от времени, а корреляционная функция R_y зависит только от интервала времени $\tau = t_2 - t_1$.

Случайный процесс $y(t)$ называют *стационарным в узком смысле*, если его n -мерная плотность распределения $f_n(y)$ не меняется при сдвиге значений всех его аргументов t_1, t_2, \dots, t_n на одинаковую величину τ вдоль оси времени, т. е. для любых n и τ справедливо

$$\begin{aligned} f_n(t_1, t_2, \dots, t_n; y_1, y_2, \dots, y_n) = \\ = f_n(t_1 + \tau, t_2 + \tau, \dots, t_n + \tau; y_1, y_2, \dots, y_n). \end{aligned} \quad (6.7)$$

Стационарный случайный процесс $y(t)$ называют *эргодическим*, если его математическое ожидание, полученное усреднением по множеству всех реализаций, совпадает с соответствующей вероятностной характеристикой, полученной усреднением по времени одной произвольно взятой реализации.

Если известны математическое ожидание и корреляционная функция входного воздействия любой стационарной или нестационарной линейной системы, то можно достаточно точно определить математическое ожидание и корреляционную функцию ее выходного сигнала.

Стохастическая математическая модель формируется на основе *стохастического дифференциального* либо *стохастического разностного уравнения*.

Различают *три типа* стохастических дифференциальных уравнений: со случайными параметрами, со случайными начальными условиями, со случайным входным процессом (случайной правой частью). Приведем пример стохастического дифференциального уравнения 3-го типа:

$$a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = x(t) + \omega(t), \quad (6.8)$$

где $\omega(t)$ — *аддитивный случайный процесс* — входной шум.

В нелинейных системах присутствуют *мультипликативные шумы* $\mu(t)$. Их воздействие на входной полезный

сигнал $x(t)$ выражается в математической модели наличием члена $[x(t) \mu(t)]$.

Анализ стохастических моделей требует использования довольно сложного математического аппарата, особенно для нелинейных систем.

6.3. ОСОБЕННОСТИ МОДЕЛИРОВАНИЯ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА $\omega(t)$

При разработке стохастической модели первостепенной задачей является определение характера случайного процесса $\omega(t)$.

Случайный процесс может быть описан набором (последовательностью) функций распределения — одномерной, двумерной, ..., n -мерной или соответствующими плотностями распределения вероятности. Но чаще всего на практике ограничиваются определением одномерного и двумерного законов распределения.

В некоторых задачах характер распределения случайного процесса $\omega(t)$ априорно известен.

Во многих прикладных задачах случайный процесс $\omega(t)$ представляет собой результат воздействия на исследуемый технический объект совокупности значительного числа независимых случайных факторов. В этом случае полагают, что случайный процесс $\omega(t)$ обладает свойствами *нормального (гауссовского) закона распределения*. На этом основании при формировании стохастической модели случайный процесс $\omega(t)$ заменяют его *типовой моделью* — гауссовским случайным процессом.

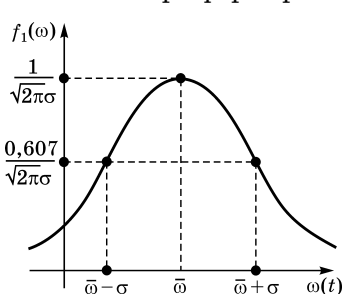
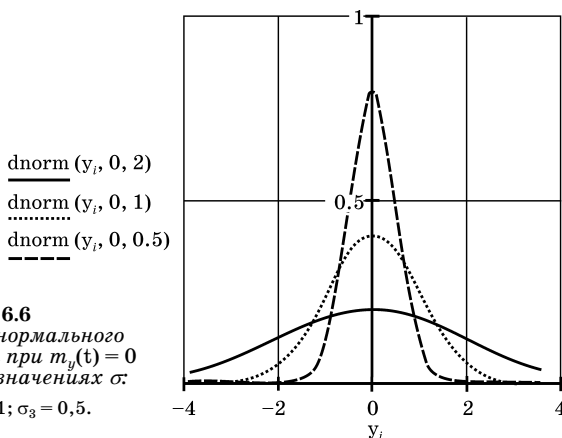


Рис. 6.5
График одномерной плотности распределения вероятности нормального (гауссовского) случайного процесса

Одномерная плотность распределения вероятности нормального (гауссовского) случайного процесса (рис. 6.5) определяется выражением

Одномерная плотность распределения вероятности нормального (гауссовского) случайного процесса (рис. 6.5) определяется выражением

$$f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left[-\frac{(\omega - m_\omega)^2}{2\sigma^2}\right]. \quad (6.9)$$



Нормальное (гауссовское) распределение случайного процесса обладает следующими свойствами.

1. Значительное количество случайных процессов в природе подчиняется нормальному (гауссовскому) закону распределения.

2. Возможность достаточно строго определить (доказать) нормальный характер случайного процесса.

3. При воздействии на физическую систему совокупности независимых случайных факторов с различными законами распределения их суммарный эффект подчиняется нормальному закону распределения (*центральная предельная теорема Ляпунова*).

4. При прохождении через линейную систему нормальный (гауссовский) случайный процесс сохраняет свои свойства в отличие от других случайных процессов.

5. Гауссовский случайный процесс может быть полностью описан с помощью двух характеристик — математического ожидания и дисперсии (или среднего квадратичного отклонения).

На рисунке 6.6 показано, как изменяется форма графика плотности распределения вероятности нормального случайного процесса в зависимости от значения среднего квадратичного отклонения σ .

Для построения графика применена встроенная функция MathCad $\text{dnorm}(y_k, m_y, \sigma_y)$, которая определяет плот-

ность вероятностей нормального распределения с математическим ожиданием m_y и средним квадратичным отклонением σ_y .

При формировании непрерывных стохастических моделей используется понятие «случайный процесс». *Разностные стохастические модели* базируются на понятии «случайная последовательность».

Особую роль в теории стохастического моделирования играют *марковские случайные последовательности*. Для них справедливо следующее соотношение для условной плотности вероятности:

$$f[x(t_m)|x(t_{m-1}), x(t_{m-2}), \dots, x(t_1)] = f[x(t_m)|x(t_{m-1})]. \quad (6.10)$$

Из него следует, что вероятностный закон, описывающий поведение процесса в момент времени t_m , зависит только от предыдущего состояния процесса в момент времени t_{m-1} и абсолютно не зависит от его поведения в прошлом (т. е. в моменты времени $t_{m-2}, t_{m-3}, \dots, t_1$).

Свойство взаимной независимости случайных событий, определяемых значениями случайного процесса $x(t_{m-1})$, и событий, определяемых значениями случайного процесса $x(t_m)$, называется *свойством отсутствия последствий*.

Математический аппарат марковских процессов применяется для моделирования вычислительных систем, следящих систем автоматического управления с конечной зоной устойчивой работы, при создании оптимальных систем в области радиотехники и автоматики, для определения статистических характеристик выходных процессов динамических систем. Марковские процессы являются одним из основных инструментов исследования для специалистов в области теории систем, теории надежности и систем массового обслуживания.

Перечисленные выше внутренние и внешние случайные факторы (шумы) представляют собой случайные процессы различных классов. Другими примерами случайных процессов являются турбулентные течения жидкостей и газов, распространение радиоволн при наличии случайных замираний радиосигналов, изменение координат частицы в броуновском движении, процессы отказов аппаратуры,

поступления заявок на обслуживание, распределение числа частиц в малом объеме коллоидного раствора, задающее воздействие в радиолокационных следящих системах, процесс термоэлектронной эмиссии с поверхности металла и т. д.

Состояние энергосистемы, питающей большое количество потребителей, определяется совокупностью случайных факторов. Случайный характер носит изменение нагрузки в сети, что обусловлено случайностью моментов включения и отключения потребителей, степенью потребления мощности каждым из включенных потребителей в конкретный момент времени и т. д. Случайными событиями являются аварийные повреждения элементов энергосистемы: обрыв линий электропередачи, отказ выключателей и разъединителей, замыкания в силовых трансформаторах и др.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ФОРМЕ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ

Математические модели в форме *передаточных функций* получили наибольшее применение для описания физических процессов в линейных стационарных динамических системах. Передаточные функции относятся к классу *динамических моделей*.

7.1. БАЗОВЫЕ ПОНЯТИЯ

Операционное исчисление — математический аппарат, применяемый для описания и анализа динамических объектов и систем. Операционное исчисление (*операционный метод*) позволяет существенно упростить решение широкого круга сложных прикладных задач, в которых исследуемые процессы или объекты моделируются линейными дифференциальными уравнениями, интегральными, интегро-дифференциальными, дифференциально-разностными уравнениями. Особое значение операционное исчисление имеет в электротехнике, автоматике, телемеханике, радиотехнике, теории регулирования, механике, теплотехнике, гидродинамике и др. Операционный метод является одним из базовых для решения таких задач, как анализ и синтез систем автоматического управления, электрических цепей, обработка сигналов, моделирование и изучение процессов математической физики и многих других.

Базовым понятием *операционного исчисления* является *преобразование Лапласа*:

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt, \quad (7.1)$$

которое устанавливает соответствие между функцией $x(t)$ — вещественной переменной t и функцией $X(s)$ — комплексной переменной s :

$$s = \sigma + j\omega, \quad (7.2)$$

где $x(t)$ — оригинал; $X(s)$ — изображение (изображение функции $x(t)$ по Лапласу).

Это соответствие обозначается так:

$$x(t) \doteq X(s) \text{ или } X(s) = L\{x(t)\}, \quad (7.3)$$

где L — оператор Лапласа.

Соотношение (7.1) определяет прямое интегральное преобразование Лапласа.

Интеграл (7.1) сходится, если функция $x(t)$:

- непрерывна вместе со своими производными достаточно высокого порядка на всей оси t , кроме отдельных точек, в которых функция или ее производные могут иметь разрыв первого рода, причем на каждом конечном интервале изменения t число таких точек конечно;
- удовлетворяет условию

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ x(t), & t > 0; \end{cases} \quad (7.4)$$

- является функцией ограниченного роста:

$$x(t) \leq Me^{C_0 t}, \quad (7.5)$$

где M и C_0 — постоянные, принимающие любое конечное значение.

Основные свойства преобразования Лапласа:

1) линейность:

$$L\{\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)\} = \alpha L\{x_1(t)\} + \beta L\{x_2(t)\}; \quad (7.6)$$

2) дифференцирование:

а) при нулевых начальных условиях

$$x(0) = x'(0) = x''(0) = \dots = x^{(n-1)}(0) = 0 \quad (7.7)$$

справедливо:

$$\begin{cases} L\{x'(t)\} = sX(s); \\ L\{x''(t)\} = s^2X(s); \\ \dots \\ L\{x^{(n)}(t)\} = s^n X(s); \end{cases} \quad (7.8)$$

б) при ненулевых начальных условиях

$$\begin{aligned} L\{x^{(n)}(t)\} = & s^n X(s) - s^{n-1}x(0) - s^{n-2}x'(0) - \dots \\ & \dots - sx^{(n-2)}(0) - x^{(n-1)}(0), \end{aligned} \quad (7.9)$$

где начальное значение функции $x(0)$ рассматривается в смысле $x(0+)$, т. е. как предел

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} x(0 + \Delta t) = x(0+); \quad (7.10)$$

3) интегрирование:

$$L\left\{\int_0^t x(t)dt\right\} = \frac{X(s)}{s}; \quad (7.11)$$

4) теорема запаздывания:

$$L\{x(t - \tau)\} = e^{-s\tau}X(s); \quad (7.12)$$

5) теорема о свертке:

$$L\left\{\int_0^t x_1(\tau)x_2(t - \tau)d\tau\right\} = L\left\{\int_0^t x_2(\tau)x_1(t - \tau)d\tau\right\} = X_1(s)X_2(s), \quad (7.13)$$

где

$$\int_0^t x_1(\tau)x_2(t - \tau)d\tau, \quad \int_0^t x_2(\tau)x_1(t - \tau)d\tau \quad (7.14)$$

— свертка функций $x_1(t)$ и $x_2(t)$ (интеграл свертывания);

6) теорема подобия (изменение масштаба времени):

$$L\left\{x\left(\frac{t}{a}\right)\right\} = aX(as), \quad (7.15)$$

где a — вещественное положительное число;

7) теорема смещения:

для любого постоянного комплексного s_0

$$L\{e^{s_0 t} x(t)\} = X(s - s_0), \quad (7.16)$$

т. е. «смещение» изображения на s_0 равносильно умножению оригинала на величину $e^{s_0 t}$.

При решении технических задач иногда применяется другое интегральное преобразование — преобразование Карсона (Карсона — Хевисайда):

$$X(s) = s \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt, \quad (7.17)$$

где s — комплексная переменная.

Изображение по Хевисайду отличается от изображения по Лапласу наличием множителя s .

Преобразование Лапласа лежит в основе операторного метода решения моделей класса обыкновенных дифференциальных уравнений.

Примеры реализации данного метода применительно к линейным ОДУ с постоянными коэффициентами приведены в Приложении 1.

Преобразование Лапласа имеет прямую связь с преобразованием Фурье, на основе которого строится частотный (спектральный) анализ электрических цепей и систем.

7.2. ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ В ФОРМЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ ЛАПЛАСА

Пусть исследуемая система (рис. 4.1) описывается стационарной моделью в форме линейного дифференциального уравнения

$$a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_1 x'(t) + b_0 x(t) \quad (7.18)$$

при нулевых начальных условиях:

$$t_0 = 0; \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Применим преобразование Лапласа:

$$L\{a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y\} = L\{b_1 x' + b_0 x\}. \quad (7.19)$$

Используя свойства линейности и дифференцирования оригинала, получим

$$a_2 s^2 Y(s) + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) = b_1 s X(s) + b_0 X(s) \quad (7.20)$$

или

$$(a_2 s^2 + a_1 s + a_0) Y(s) = (b_1 s + b_0) X(s). \quad (7.21)$$

Соотношение (7.21) представляет собой алгебраическое уравнение относительно изображений.

Преобразование исходного дифференциального уравнения (7.18) в алгебраическое (7.20) называют *алгебраизацией дифференциального уравнения*.

Следовательно, преобразования Лапласа позволяют свести задачу решения дифференциального уравнения к решению алгебраических уравнений в изображениях.

Из уравнения (7.21) выразим отношение изображения выходной функции (сигнала) $Y(s)$ исследуемой системы к изображению входной функции (сигнала) $X(s)$:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_1 s + b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = W(s), \quad (7.22)$$

где $W(s)$ — *передаточная функция* исследуемой системы в форме *изображений Лапласа*.

Тогда уравнение (7.21) в изображениях Лапласа можно представить в следующем виде:

$$Y(s) = W(s)X(s). \quad (7.23)$$

Из соотношения (7.23) следует, что если известна передаточная функция $W(s)$ исследуемого линейного объекта, то можно определить реакцию (выходную функцию) $y(t)$ объекта на любое входное воздействие (входную функцию) $x(t)$. Для этого надо найти изображение $X(s)$ входного воздействия, умножить его на передаточную функцию $W(s)$ согласно формуле (7.23), определив таким образом изображение выходного сигнала $Y(s)$, после чего осуществить переход от изображения $Y(s)$ к оригиналу $y(t)$.

Для нахождения оригинала функции $y(t)$ по ее известному изображению $Y(s)$ применяют обратное преобразование Лапласа:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} Y(s)e^{st} ds. \quad (7.24)$$

Соотношение (7.24) называют формулой Римана — Меллина.

При решении прикладных задач часто удается избежать непосредственного вычисления интегралов (7.24) и

(7.1), так как имеются специальные таблицы соответствия функций-оригиналов $y(t)$ и их изображений $Y(s)$, наиболее часто встречающихся в приложениях. Примеры соответствий «оригинал — изображение» приведены в таблице 7.1.

В тех случаях, когда изображение $Y(s)$ представляет собой дробно-рациональную функцию, предварительно осуществляют разложение изображения на простые (элементарные) дроби.

Если отыскание оригинала по формуле (7.24) или по таблице соответствия (табл. 7.1) затруднительно, то применяют приближенные методы, в основе которых лежит разложение изображения в ряд по степеням s (*теоремы разложения, теоремы о вычетах*).

Таблица 7.1

Таблица оригиналов и их изображений

Оригинал $y(t)$	Изображение $Y(s)$
$1(t)$ — единичный скачок	$\frac{1}{s}$
δ — дельта-функция	1
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{s + \alpha}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$t \cos \omega t$	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$
$e^{-\alpha t} \cos \omega t$	$\frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$
$e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \alpha)$	$\frac{(p + \lambda) \cos \alpha - \omega \sin \alpha}{(p + \lambda)^2 + \omega^2}$
$\frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{\beta - \alpha}$	$\frac{1}{(s + \alpha)(s + \beta)}$
$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{s^{n+1}}$
$\frac{1}{\sqrt{\pi \alpha}} \sin 2\sqrt{\alpha t}$	$\frac{1}{p\sqrt{p}} e^{-\frac{\alpha}{p}}$



Рис. 7.1
Динамическая система
с двумя входами

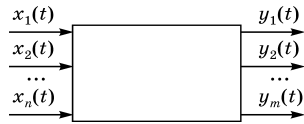


Рис. 7.2
Линейная система
с n -входами и m -выходами

Средства для реализации прямого и обратного преобразований Лапласа в системе MathCad представлены в Приложении 2.

Рассмотрим динамическую систему с двумя входами (рис. 7.1).

Если исследуемая физическая система имеет несколько входов, то она может быть описана несколькими передаточными функциями по каждому входу.

При определении передаточной функции относительно одного из входных сигналов остальные входные сигналы полагаются равными нулю.

Пусть физическая система описывается линейным стационарным дифференциальным уравнением

$$a_3 y'''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_2 x''(t) + b_0 x(t) + c_0 f(t) \quad (7.25)$$

при нулевых начальных условиях.

Перейдем к изображениям Лапласа:

$$(a_3 s^3 + a_1 s + a_0)Y(s) = (b_2 s^2 + b_0)X(s) + c_0 F(s). \quad (7.26)$$

Положим $F(s) = 0$, тогда передаточная функция относительно входа $x(t)$ определится как

$$W_1(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_2 s^2 + b_0}{a_3 s^3 + a_1 s + a_0}. \quad (7.27)$$

Положим $X(s) = 0$, тогда передаточная функция относительно входа $f(t)$ определится как

$$W_2(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{c_0}{a_3 s^3 + a_1 s + a_0}. \quad (7.28)$$

Для линейной динамической системы с несколькими входами $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ и выходами $y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)$ (рис. 7.2) передаточная функция превращается в *матричную передаточную функцию*

$$W(s) = \begin{pmatrix} W_{11}(s) & W_{12}(s) & \dots & W_{1m}(s) \\ W_{21}(s) & W_{22}(s) & \dots & W_{2m}(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_{n1}(s) & W_{n2}(s) & \dots & W_{nm}(s) \end{pmatrix}, \quad (7.29)$$

где

$$W_{ij}(s) = \frac{Y_j(s)}{X_i(s)} \quad (7.30)$$

— передаточная функция между i -м входом и j -м выходом.

7.3. ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ В ОПЕРАТОРНОЙ ФОРМЕ

Передаточная функция в операторной форме получается формальным путем из дифференциального уравнения исследуемой динамической системы.

Пусть физическая система описывается моделью в форме линейного стационарного ОДУ:

$$a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_1 x'(t) + b_0 x(t) \quad (7.31)$$

при нулевых начальных условиях:

$$t_0 = 0; \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Введем *оператор* $p = \frac{d}{dt}$, обозначающий операцию дифференцирования. Сделаем подстановку оператора p в исходное дифференциальное уравнение (7.31):

$$a_2 p^2 y(t) + a_1 p y(t) + a_0 y(t) = b_1 p x(t) + b_0 x(t) \quad (7.32)$$

или

$$(a_2 p^2 + a_1 p + a_0) y(t) = (b_1 p + b_0) x(t). \quad (7.33)$$

Введем понятие *операторов*:

$$A(p) = a_2 p^2 + a_1 p + a_0, \quad (7.34)$$

$$B(p) = b_1 p + b_0. \quad (7.35)$$

Сделаем подстановку выражений (7.34) и (7.35) в уравнение (7.33):

$$A(p)y(t) = B(p)x(t). \quad (7.36)$$

Соотношение (7.36) представляет собой запись дифференциального уравнения (7.31) в *операторной форме*.

Передаточная функция в *операторной форме* может быть получена как отношение двух полиномов:

$$W(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{b_1 p + b_0}{a_2 p^2 + a_1 p + a_0}. \quad (7.37)$$

Тогда дифференциальное уравнение (7.31) в *операторной форме* можно записать следующим образом:

$$y(t) = W(p)x(t). \quad (7.38)$$

Передаточные функции $W(s)$ и $W(p)$ могут служить достоверным математическим описанием физической системы *только при нулевых начальных условиях*. При этом полагается, что входной сигнал $x(t)$ начинает воздействовать на исследуемую систему в момент времени $t_0 = 0$.

Для *стационарных систем* передаточные функции в форме изображения Лапласа $W(s)$ и в операторной форме $W(p)$ совпадают. На этом основании при рассмотрении линейных стационарных систем будем оперировать обобщенным термином «передаточная функция $W(p)$ », полагая, что p — комплексная переменная.

Передаточная функция $W(p)$ является дробно-рациональной функцией оператора p .

Значение переменной p , при котором функция $W(p)$ обращается в нуль, называется *нулем передаточной функции*.

Значение p , при котором функция $W(p)$ обращается в бесконечность, называется *полюсом передаточной функции*.

Если приравнять к нулю полином числителя передаточной функции $W(p)$ (7.37):

$$B(p) = 0, \quad (7.39)$$

то корни уравнения (7.39) будут являться *нулями* передаточной функции $W(p)$.

Если приравнять к нулю полином знаменателя передаточной функции системы $W(p)$:

$$A(p) = 0, \quad (7.40)$$

то корни уравнения (7.40) будут являться *полюсами* $W(p)$.

Полином $A(p)$ называют *характеристическим полиномом* или *характеристическим уравнением* дифференциального уравнения (7.31).

Нахождение нулей и полюсов передаточной функции имеет особое значение для решения задач синтеза и анализа динамических объектов.

По расположению нулей и полюсов на комплексной плоскости делают вывод о свойствах исследуемой системы, в частности об ее устойчивости и о качестве переходного процесса.

Передаточная функция является самой компактной математической моделью, описывающей динамические свойства системы, и дает исчерпывающую характеристику *взаимосвязи «вход — выход»*.

Основным преимуществом применения математического аппарата передаточных функций на практике является возможность удобного и точного их определения экспериментальным путем даже для очень сложных физических систем.

Динамическая модель в форме передаточной функции с помощью известных приемов может быть преобразована:

- в дифференциальное уравнение n -го порядка;
- в модель в пространстве состояний;
- в модель в частотной области — амплитудно-частотную и фазочастотную характеристики;
- в весовую функцию;
- в переходную характеристику.

Использование аппарата передаточных функций дает возможность представить сложную динамическую систему в виде совокупности взаимосвязанных элементарных типовых звеньев, что значительно облегчает проектирование и исследование таких систем.

Передаточные функции используются в качестве базовых моделей в таких системах компьютерного моделирования, как подсистема Simulink пакета Matlab фирмы MathWorks для блочного имитационного и ситуационного визуально-ориентированного моделирования, программная среда VisSim фирмы Visual Solutions для моделирования функционирования технических систем, программно-инструментальная оболочка OUR CAD НПО «АМТ» (Санкт-Петербург) для имитационного моделирования интегрированной системы управления динамическим позиционированием судна и др.

7.4. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ТИПОВЫЕ ЗВЕНЬЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Исследуемая динамическая система может быть представлена в виде совокупности *элементарных типовых звеньев*. Этот прием лежит в основе разработки и анализа автоматических систем, в том числе применяемых в системах электроснабжения железных дорог.

Элементарные типовые звенья могут рассматриваться в качестве моделей реальных функциональных элементов различной физической природы, разных принципов действия и конструктивного выполнения, но имеющих сходное математическое описание взаимосвязи «вход — выход».

При данном способе моделирования полагается, что типовые звенья обладают направленным действием. Это означает, что можно исключить обратное воздействие последующего звена на предыдущее.

Рассмотрим некоторые элементарные типовые звенья, применяемые при моделировании динамических систем.

Пропорциональное (усилительное, безынерционное) звено. Передаточная функция $W(p) = k$.

Мгновенные значения входной и выходной величин связаны алгебраическим уравнением

$$y(t) = kx(t), \quad (7.41)$$

т. е. в любой момент времени t выходная величина $y(t)$ пропорциональна входной $x(t)$. Уравнение (7.41) — статическая модель.

Реакция пропорционального звена $y(t)$ на единичное ступенчатое воздействие $x(t)$ показана на рисунке 7.3.

Примеры функциональных элементов, моделируемых пропорциональным (усилительным, безынерционным) звеном: делитель напряжения (рис. 7.4); редуктор (рис. 7.5);

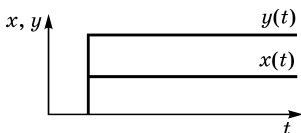


Рис. 7.3

Реакция пропорционального звена на единичное входное воздействие

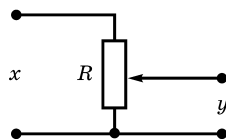


Рис. 7.4

Делитель напряжения

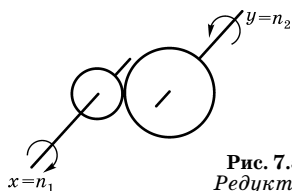


Рис. 7.5
Редуктор

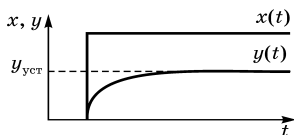


Рис. 7.7
Реакция инерционного звена на единичное ступенчатое воздействие

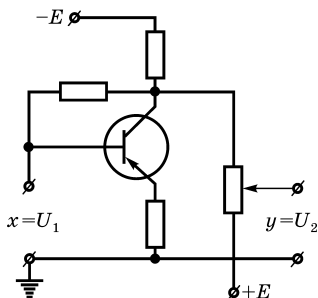


Рис. 7.6
Усилитель постоянного тока

усилитель постоянного тока, работающий на линейном участке характеристики (рис. 7.6); рычажные механизмы и т. д.

Инерционное (апериодическое) звено.

Передаточная функция

$$W(p) = \frac{k}{Tp + 1}, \quad (7.42)$$

где k — передаточный коэффициент, характеризующий свойства звена в статическом режиме; T — постоянная времени, характеризующая инерционные свойства звена.

Реакция инерционного звена на единичное ступенчатое воздействие показана на рисунке 7.7.

Инерционным (апериодическим) звеном моделируется такой конструктивный элемент физической системы, который объединяет компонент, накапливающий энергию, и компонент, рассеивающий эту энергию.

Примеры функциональных элементов, моделируемых инерционным (апериодическим) звеном: электрический пассивный четырехполюсник (см. рис. 7.8); электрический генератор постоянного тока (см. рис. 7.9), за входную переменную которого принимается напряжение возбуждения u_B , за выходную — ЭДС, наводимая в обмотке якоря генератора — e_r .

Идеальное дифференцирующее звено. Передаточная функция $W(p) = kp$.

Выходная величина идеального дифференцирующего звена y пропорциональна производной по времени от

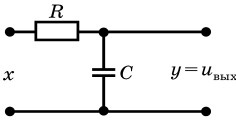


Рис. 7.8

Пассивный четырехполюсник

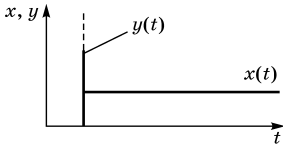


Рис. 7.10

Реакция идеального дифференцирующего звена на единичное ступенчатое воздействие

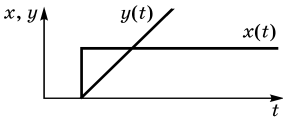


Рис. 7.12

Реакция идеального интегрирующего звена на единичное ступенчатое воздействие

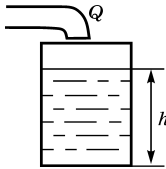


Рис. 7.14

Резервуар с жидкостью:

Q — подача жидкости, $\text{м}^3/\text{с}$; h — уровень жидкости; $x = Q$; $y = h$.

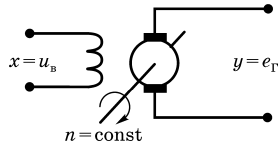


Рис. 7.9

Электрический генератор постоянного тока:

$u_в$ — напряжение возбуждения; $e_Г$ — ЭДС, наводимая в обмотке якоря генератора.

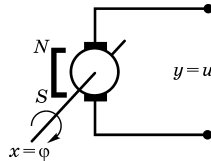


Рис. 7.11

Электрический тахогенератор

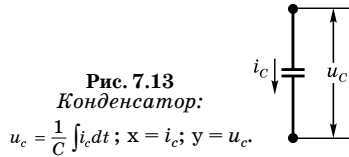


Рис. 7.13

Конденсатор:

$$u_c = \frac{1}{C} \int i_c dt; \quad x = i_c; \quad y = u_c.$$

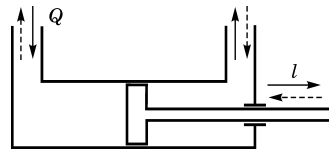


Рис. 7.15

Гидравлический механизм:

Q — подача жидкости; l — перемещение; $x = Q$; $y = l$.

входной величины x , т. е. пропорциональна скорости изменения входной величины.

Рисунок 7.10 демонстрирует реакцию звена на единичное ступенчатое воздействие.

Пример функционального элемента, моделируемого идеальным дифференцирующим звеном, — электрический тахогенератор, у которого в качестве входной переменной $x(t)$ принимается угол поворота ϕ его вала (рис. 7.11).

Идеальное интегрирующее звено. Передаточная функция $W(p) = \frac{k}{p}$.

Выходная величина идеального интегрирующего звена пропорциональна интегралу по времени от входной величины.

Рисунок 7.12 демонстрирует реакцию звена на единичное ступенчатое воздействие.

Интегрирующие свойства присущи таким объектам, в которых происходит накопление вещества или энергии без ее одновременной отдачи в окружающую среду.

Примеры функциональных элементов, моделируемых интегрирующим звеном: конденсатор (рис. 7.13); резервуар с жидкостью (рис. 7.14); гидравлический механизм (рис. 7.15).

Апериодическое звено 2-го порядка (инерционное). Передаточная функция

$$W(p) = \frac{k}{T_2^2 p^2 + T_1 p + 1}. \quad (7.43)$$

Рисунок 7.16 демонстрирует реакцию аperiодического (инерционного) звена 2-го порядка на единичное ступенчатое воздействие.

Характер переходного процесса определяется видом корней характеристического уравнения звена

$$T_2^2 p^2 + T_1 p + 1 = 0. \quad (7.44)$$

При $T_1 \geq 2T_2$ оба корня действительные. Переходный процесс имеет монотонный, аperiодический характер (рис. 7.16a).

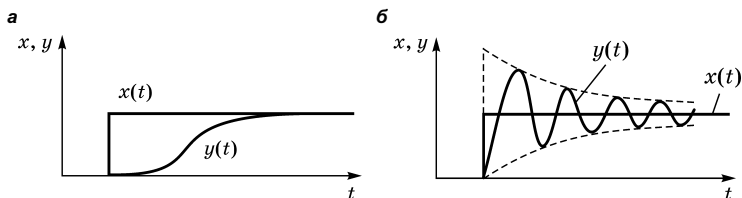


Рис. 7.16

Реакция аperiодического звена 2-го порядка на единичное ступенчатое воздействие:

a — при $T_1 \geq 2T_2$; б — при $T_1 < 2T_2$.

При $T_1 < 2T_2$ корни характеристического уравнения комплексные:

$$\lambda_1 = -\alpha + j\beta; \quad \lambda_2 = -\alpha - j\beta, \quad (7.45)$$

где α — коэффициент затухания, определяющий быстроту затухания колебаний в звене; β — угловая частота колебаний.

В этом случае аperiodическое звено превращается в колебательное (см. рис. 7.16б).

Колебательное звено предполагает наличие в моделируемом объекте по крайней мере двух разнородных накопителей энергии, которые способны запастись энергией и взаимно обмениваться ею.

Примерами функциональных элементов устройств, моделируемых аperiodическим (инерционным) звеном 2-го порядка, являются: колебательный контур (рис. 7.17); электрический двигатель постоянного тока с независимым возбуждением (рис. 7.18); механическая система (рис. 7.19).

Динамическая система, которая может быть представлена как совокупность элементарных типовых звеньев, графически изображается в виде структурной схемы.

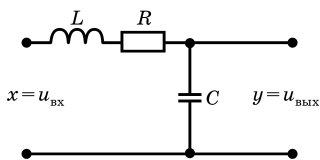


Рис. 7.17
Колебательный контур

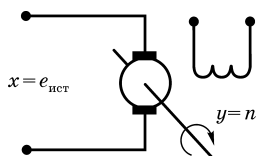


Рис. 7.18
Электрический двигатель постоянного тока с независимым возбуждением:
 $e_{ист}$ — ЭДС, подводимая от источника регулируемого напряжения; n — частота вращения вала; $u_B = \text{const}$.

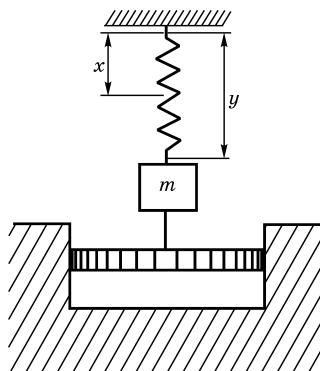


Рис. 7.19
Механическая система:
 x — исходное растяжение пружины (без груза); y — растяжение пружины при подвешенном грузе.

Структурная схема отображает в наглядной форме состав исследуемой системы и связи между ее элементами.

Для того чтобы определить передаточную функцию исследуемой динамической системы, следует преобразовать ее структурную схему по специальным правилам и законам.

Пример 33. При исследовании тепловых режимов проектируемых технических устройств: электрических машин, полупроводниковых элементов, устройств силовой электроники, радиоэлектроники, систем электроснабжения железных дорог и др. — используется динамическая *тепловая модель*. Пример такой модели представлен на рисунке 7.20.

Пример 34. Система автоматического регулирования частоты вращения вала двигателя постоянного тока может быть представлена структурной схемой (рис. 7.21).

Усилитель (передаточная функция $W_y(p)$) моделируется пропорциональным (безынерционным) типовым звеном, генератор постоянного тока (передаточная функция $W_\Gamma(p)$) рассматривается как инерционное (апериодическое) звено, двигатель постоянного тока (передаточная функция $W_D(p)$) представлен апериодическим (инерционным) звеном 2-го порядка.

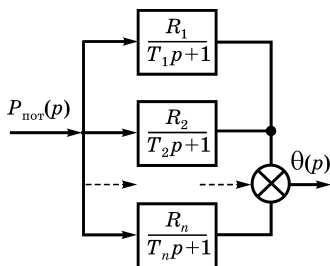


Рис. 7.20
Тепловая модель:

θ_i — температура i -го элемента конструкции; R_i — тепловое сопротивление; C_i — теплоемкость; $P_{\text{пот}}(p)$ — мощность потерь; $\theta(p) = \sum \theta_i(p)$; $T = f(R_i, C_i)$.

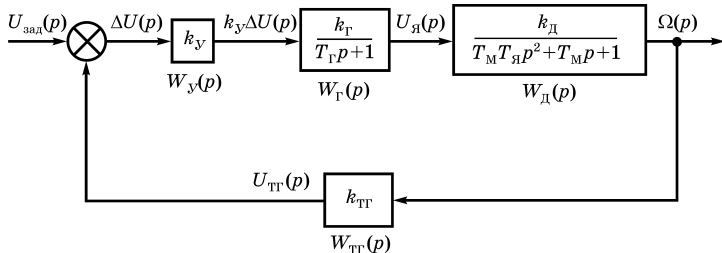


Рис. 7.21

Структурная схема системы автоматического регулирования частоты вращения вала двигателя постоянного тока

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ

8.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Динамическая система — это физическая система, состояние которой изменяется во времени под действием входных сигналов и (или) возмущений.

Состояние динамической системы полностью и однозначно определяется совокупностью *переменных состояний* $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$.

Динамическую систему, рассматриваемую с точки зрения пространства состояний, можно представить обобщенной схемой (рис. 8.1).

Для математического описания динамической системы в пространстве состояний целесообразнее ее представить другой схемой (рис. 8.2). В данном случае отображена многомерная динамическая система, для которой $U(t)$ — вектор входных (управляющих) сигналов, $\omega(t)$ — вектор возмущений, $X(t)$ — вектор состояния. Двойные стрелки отображают векторный характер сигналов.

Рассмотрим частный случай — динамическую систему с одним входом и отсутствием возмущений $\omega(t)$ (рис. 8.3).

Вектор состояния формируется из совокупности переменных состояния:

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \|x_1(t) \quad x_2(t) \quad \dots \quad x_n(t)\|^T \quad (8.1)$$

— n -мерный вектор.



Рис. 8.1
Обобщенная схема
динамической системы:

u_1, u_2, \dots, u_k — входные (управляющие) сигналы; $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_j$ — возмущающие воздействия; y_1, y_2, \dots, y_m — выходные сигналы (отклики); x_1, x_2, \dots, x_n — переменные состояния.

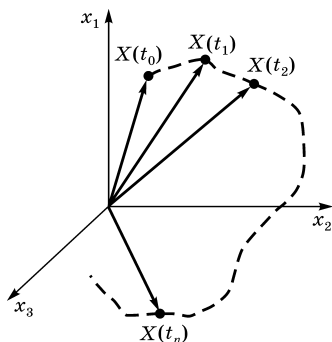


Рис. 8.4
Фазовая траектория в трехмерном
пространстве состояний

Начальное состояние динамической системы характеризуется начальным вектором состояния:

$$X(t_0) = X_0 = \|x_1(t_0) \quad x_2(t_0) \quad \dots \quad x_n(t_0)\|^T. \quad (8.2)$$

Трехмерное пространство состояний.

Вектор состояния:

$$X(t) = \|x_1(t) \quad x_2(t) \quad x_3(t)\|^T. \quad (8.3)$$

Положение точки в трехмерном пространстве определяется тремя координатами — тремя переменными состояниями x_1, x_2, x_3 . Начальный вектор состояния $X(t)$ имеет вид

$$X(t) = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T. \quad (8.4)$$

Конец вектора состояния $X(t)$ с течением времени t описывает в пространстве состояний кривую, которая называется *фазовой траекторией* (рис. 8.4).

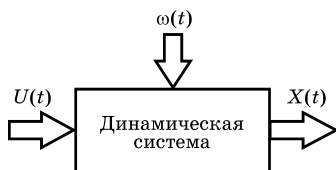


Рис. 8.2
Схема многомерной динамической системы для моделирования в пространстве состояний

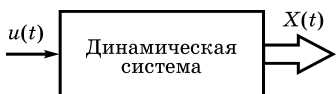


Рис. 8.3
Частный случай динамической системы — с одним входом и отсутствием возмущений

Таким образом, фазовая траектория отображает процесс изменения состояния динамической системы во времени.

Вектор состояния $X(t)$ будет полностью и однозначно определять состояние динамической системы только в том случае, если его размерность будет равна размерности системы.

Выбор переменных состояния для моделируемой системы неоднозначен, т. е. для описания состояния динамической системы возможны различные комбинации переменных состояния.

Уравнение состояния системы — динамическая модель (модель динамики системы) — описывает поведение динамической системы во времени. Оно представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка в нормальной форме или в форме Коши.

Уравнение состояния в векторно-матричной форме имеет вид

$$\dot{X} = f(X, u, t), \quad (8.5)$$

где X — n -мерный вектор состояния; t — независимая переменная; u — вектор входных воздействий (в общем случае),

$$u = \|u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_m\|. \quad (8.6)$$

Уравнение (8.5) описывает динамическую систему. Решение уравнения (8.5) представляет собой математическую модель процесса $X(t)$, имеющего место в данной системе при заданных начальных условиях $X(t_0) = X_0$ и входном воздействии $u(t)$. Таким образом, в системе может рассматриваться множество процессов, соответствующих заданному множеству начальных условий и множеству входных воздействий.

Достоинства математического описания физических систем в пространстве состояний:

- возможность с единых позиций рассматривать стационарные и нестационарные, линейные и нелинейные системы;
- возможность учитывать ненулевые начальные условия;
- наличие достаточного количества численных методов решения таких математических моделей;
- возможность более разностороннего и глубокого изучения динамической системы путем формирования нескольких моделей в разных пространствах состояний.

8.2. ЛИНЕЙНЫЕ НЕПРЕРЫВНЫЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Уравнение состояния (динамическая модель) линейной непрерывной детерминированной системы при начальных условиях $X(t_0) = X_0$ имеет вид

$$\dot{X}(t) = F(t)X(t) + G(t)u(t), \quad (8.7)$$

где $X(t)$ — n -мерный вектор состояния; $F(t)$ — матрица коэффициентов размерности $n \times n$; $G(t)$ — вектор коэффициентов (n -мерный); $u(t)$ — входное воздействие.

Динамическая модель (8.7) может быть отображена с помощью структурной схемы (рис. 8.5).

Вектор состояния $X(t)$ определяется путем решения уравнения состояния динамической системы (8.7):

$$X(t) = \Phi(t, t_0)X(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)G(\tau)u(\tau)d\tau, \quad (8.8)$$

где $\Phi(t, t_0)$ — *переходная матрица состояний (фундаментальная матрица системы)* размерности $n \times n$.

Переходная матрица состояний определяется путем решения дифференциального уравнения

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = F(t)\Phi(t, t_0), \quad (8.9)$$

при начальных условиях

$$\Phi(t_0, t_0) = I, \quad (8.10)$$

где I — единичная матрица, и при замене t_0 на τ .

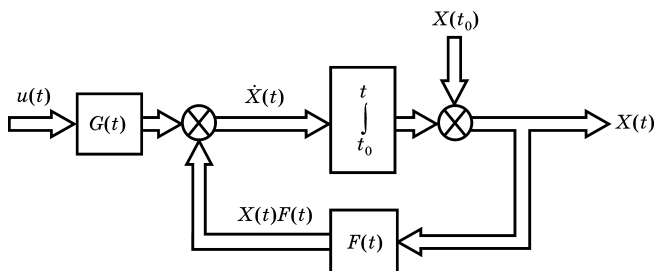


Рис. 8.5
Структурная схема динамической модели

Стационарная динамическая система. Уравнение состояния стационарной системы имеет вид

$$\dot{X}(t) = FX(t) + Gu(t), \quad (8.11)$$

где F и G не зависят от времени.

Решение уравнения (8.11) значительно упрощается.

Переходная матрица состояний определяется так:

$$\Phi(t) = \underline{e^{Ft}}, \quad (8.12)$$

матричная экспонента

где

$$e^{Ft} = I + Ft + \frac{1}{2!} F^2 t^2 + \frac{1}{3!} F^3 t^3 + \dots + \frac{1}{n!} F^n t^n \quad (8.13)$$

— экспоненциальный ряд.

Тогда

$$\Phi(t, t_0) = e^{F(t-t_0)} = \Phi(t - t_0); \quad (8.14)$$

$$\Phi(t, \tau) = e^{F(t-\tau)} = \Phi(t - \tau). \quad (8.15)$$

Решение динамической модели (8.11) запишется в виде

$$X(t) = e^{F(t-t_0)} X(t_0) + \int_{t_0}^t e^{F(t-\tau)} Gu(\tau) d\tau. \quad (8.16)$$

При определении матричной экспоненты можно ограничиться первыми четырьмя членами ряда (8.13), что обеспечит достаточную точность результата при малых значениях $(t - t_0)$.

Есть и другие способы определения матричной экспоненты: путем представления ее в виде матричного многочлена (теорема Сильвестра), с помощью последовательности от 1 до $n - 1$ степеней матрицы F (способ Кэли — Гамильтона) и др.

8.3. ФОРМИРОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ N -ГО ПОРЯДКА

Вариант 1. Пусть динамическая система описывается дифференциальным уравнением

$$a_3 \ddot{y}(t) + a_2 \dot{y}(t) + a_1 y(t) + a_0 y(t) = b_2 \ddot{u}(t) + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t). \quad (8.17)$$

Введем оператор $p = \frac{d}{dt}$.

Вынесем функции $y(t)$ и $u(t)$ за скобки. Тогда уравнение (8.17) примет вид

$$(a_3p^3 + a_2p^2 + a_1p + a_0)y = (b_2p^2 + b_1p + b_0)u. \quad (8.18)$$

Введем обозначения:

$$(a_3p^3 + a_2p^2 + a_1p + a_0) = A(p); \quad (8.19)$$

$$(b_2p^2 + b_1p + b_0) = B(p). \quad (8.20)$$

Получим

$$A(p)y = B(p)u. \quad (8.21)$$

Умножим обе части уравнения (8.21) на $\frac{1}{A(p)B(p)}$, после чего введем обозначение x_1 :

$$\frac{y}{B(p)} = \frac{u}{A(p)} = x_1. \quad (8.22)$$

Тогда

$$u = A(p)x_1 = (a_3p^3 + a_2p^2 + a_1p + a_0)x_1. \quad (8.23)$$

Введем еще обозначения:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = x_3. \end{cases} \quad (8.24)$$

Сделаем подстановку обозначений (8.24) в выражение (8.23):

$$u = a_3\dot{x}_3 + a_2\dot{x}_2 + \dots + a_1\dot{x}_1 + a_0x_1 \quad (8.25)$$

или

$$u = a_3\dot{x}_3 + a_2x_3 + a_1x_2 + a_0x_1, \quad (8.26)$$

откуда выразим \dot{x}_3 :

$$\dot{x}_3 = -\frac{1}{a_3}(a_2x_3 + a_1x_2 + a_0x_1) + \frac{1}{a_3}u. \quad (8.27)$$

Объединив уравнения (8.27) и (8.24), получим систему уравнений в нормальной форме или в форме Коши, т. е. уравнения состояния:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = x_3; \\ \dot{x}_3 = -\frac{1}{a_3}(a_2x_3 + a_1x_2 + a_0x_1) + \frac{1}{a_3}u \end{cases} \quad (8.28)$$

или уравнение состояния в векторно-матричной форме при начальных условиях $X(t_0) = X_0$:

$$\dot{X}(t) = FX(t) + Gu(t), \quad (8.29)$$

где

$$X(t) = \|x_1(t) \quad x_2(t) \quad x_3(t)\|^T;$$

$$F = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_3} & -\frac{a_1}{a_3} & -\frac{a_2}{a_3} \end{vmatrix}; \quad G = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ a_3 \end{vmatrix}.$$

Вариант 2. Пусть динамическая система описывается дифференциальным уравнением

$$\ddot{y}(t) + a_2\dot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0y(t) = b_0u(t). \quad (8.30)$$

Введем обозначение:

$$y(t) = x_1(t) = x_1, \quad (8.31)$$

сделаем подстановку обозначения (8.31) в уравнение (8.30):

$$\ddot{x}_1 + a_2\dot{x}_1 + a_1\dot{x}_1 + a_0x_1 = b_0u. \quad (8.32)$$

Члены уравнения (8.32), не содержащие производных, сгруппируем в правой части уравнения:

$$\ddot{x}_1 + a_2\dot{x}_1 + a_1\dot{x}_1 = -a_0x_1 + b_0u. \quad (8.33)$$

Введем обозначение:

$$\dot{x}_3 = -a_0x_1 + b_0u, \quad (8.34)$$

сделаем подстановку обозначения (8.34) в уравнение (8.33) и проинтегрируем полученное выражение:

$$\dot{x}_1 + a_2\dot{x}_1 + a_1x_1 = x_3. \quad (8.35)$$

Сгруппируем в правой части уравнения (8.35) члены, не содержащие производных:

$$\dot{x}_1 + a_2\dot{x}_1 = -a_1x_1 + x_3. \quad (8.36)$$

Введем обозначение:

$$\dot{x}_2 = -a_1x_1 + x_3. \quad (8.37)$$

Сделаем подстановку обозначения (8.37) в уравнение (8.36) и проинтегрируем полученное выражение:

$$\dot{x}_1 + a_2 x_1 = x_2. \quad (8.38)$$

Из уравнения (8.38) выразим \dot{x}_1 :

$$\dot{x}_1 = -a_2 x_1 + x_2. \quad (8.39)$$

Объединив уравнения (8.34), (8.37) и (8.39), получим систему уравнений состояния в форме Коши:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -a_2 x_1 + x_2; \\ \dot{x}_2 = -a_1 x_1 + x_3; \\ \dot{x}_3 = -a_0 x_1 + b_0 u \end{cases} \quad (8.40)$$

или в векторно-матричной форме при $X(t_0) = X_0$:

$$\dot{X}(t) = FX(t) + Gu(t), \quad (8.41)$$

где

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}; \quad F = \begin{bmatrix} -a_2 & 1 & 0 \\ -a_1 & 0 & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix}.$$

8.4. ФОРМИРОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ ПО ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ СИСТЕМЫ

В подразделе 8.3 были представлены способы формирования двух вариантов математической модели динамической системы в пространстве состояний.

Рассмотрим прием формирования третьего варианта модели в пространстве состояний по известной передаточной функции исследуемой динамической системы.

Пусть для линейной непрерывной стационарной системы известна (определена) передаточная функция

$$W(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{b_2 p^2 + b_1 p + b_0}{a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}. \quad (8.42)$$

Определим полюсы $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ передаточной функции $W(p)$, которые являются корнями характеристического полинома $A(p)$:

$$a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0. \quad (8.43)$$

Степень характеристического полинома $A(p)$ определяет порядок формируемой модели в пространстве состояний и, следовательно, количество переменных состояния x_i .

Тогда уравнения состояния данной динамической системы можно представить в следующем виде:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 + u; \\ \dot{x}_2 = \lambda_2 x_2 + u; \\ \dot{x}_3 = \lambda_3 x_3 + u \end{cases} \quad (8.44)$$

или в векторно-матричной форме:

$$\dot{X}(t) = FX(t) + Gu(t), \quad (8.45)$$

где

$$X(t) = \|x_1(t) \quad x_2(t) \quad x_3(t)\|^T;$$

$$F = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix}; \quad G = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

при начальных условиях $X(t_0) = X_0$.

8.5. ПРИМЕРЫ ФОРМИРОВАНИЯ МОДЕЛИ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ

В электрических цепях в качестве переменных состояния принято рассматривать мгновенные значения напряжений на емкостях и токов через индуктивности. Это обусловлено тем, что мгновенные значения напряжений на емкостях и токов через индуктивности удовлетворяют следующим требованиям:

- полностью определяют состояние цепи в любой момент времени;
- являются линейно-независимыми;
- однозначно определяют запас энергии в цепи;
- по ним могут быть определены любые другие токи и напряжения в данной цепи.

Правило 1. Количество переменных состояния электрической цепи должно быть равно количеству реактивных элементов в ней.

Правило 2. Токи тех ветвей цепи, которые не содержат реактивных элементов, не должны входить в систему уравнений состояния. Их следует исключать.

Пример 35. Рассмотрим электрическую цепь 3-го порядка (оригинал) (рис. 8.6).

Требуется сформировать математическую модель данной цепи в пространстве состояний.

В качестве переменных состояния примем:

$$\begin{cases} x_1(t) \rightarrow i_1(t); \\ x_2(t) \rightarrow u_{C_2}(t); \\ x_3(t) \rightarrow i_3(t). \end{cases} \quad (8.46)$$

Следовательно, вектор состояния данной электрической цепи:

$$X(t) = \begin{pmatrix} i_1(t) \\ u_{C_2}(t) \\ i_3(t) \end{pmatrix}. \quad (8.47)$$

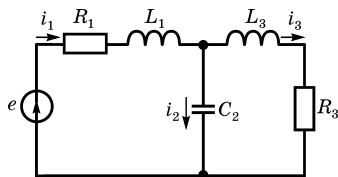


Рис. 8.6
Объект моделирования — электрическая цепь

Согласно законам Кирхгофа,

$$\begin{cases} i_1 R_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + u_{C_2} = e; \\ L_3 \frac{di_3}{dt} + i_3 R_3 = u_{C_2}; \\ i_1 = i_2 + i_3. \end{cases} \quad (8.48)$$

Исключим все неизвестные, не являющиеся переменными состояниями. Для этого ток i_2 выразим через напряжение u_{C_2} :

$$i_2 = C_2 \frac{du_{C_2}}{dt} \quad (8.49)$$

и сделаем подстановку выражения (8.49) в систему (8.48):

$$\begin{cases} L_1 \frac{di_1}{dt} = e - i_1 R_1 - u_{C_2}; \\ L_3 \frac{di_3}{dt} = u_{C_2} - i_3 R_3; \\ C_2 \frac{du_{C_2}}{dt} = i_1 - i_3. \end{cases} \quad (8.50)$$

Приведем систему уравнений (8.50) к форме Коши (к нормальной форме). Затем уравнения запишем в порядке, соответствующем индексу переменных состояния и их расположению в векторе состояния:

$$\begin{cases} \frac{di_1}{dt} = \frac{1}{L_1} e - \frac{R_1}{L_1} i_1 - \frac{1}{L_1} u_{C_2}; \\ \frac{du_{C_2}}{dt} = \frac{1}{C_2} i_1 - \frac{1}{C_2} i_3; \\ \frac{di_3}{dt} = \frac{1}{L_3} u_{C_2} - \frac{R_3}{L_3} i_3 \end{cases} \quad (8.51)$$

или в векторно-матричной форме при заданных начальных условиях $i_1(0)$; $u_{C_2}(0)$; $i_3(0)$:

$$\dot{X}(t) = FX(t) + Gu(t), \quad (8.52)$$

где $u(t) = e$;

$$\dot{X}(t) = \begin{pmatrix} \frac{di_1}{dt} \\ \frac{du_{C_2}}{dt} \\ \frac{di_3}{dt} \end{pmatrix}; \quad G(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{L_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad F = \begin{pmatrix} -\frac{R_1}{L_1} & -\frac{1}{L_1} & 0 \\ \frac{1}{C_2} & 0 & -\frac{1}{C_2} \\ 0 & \frac{1}{L_3} & -\frac{R_3}{L_3} \end{pmatrix}.$$

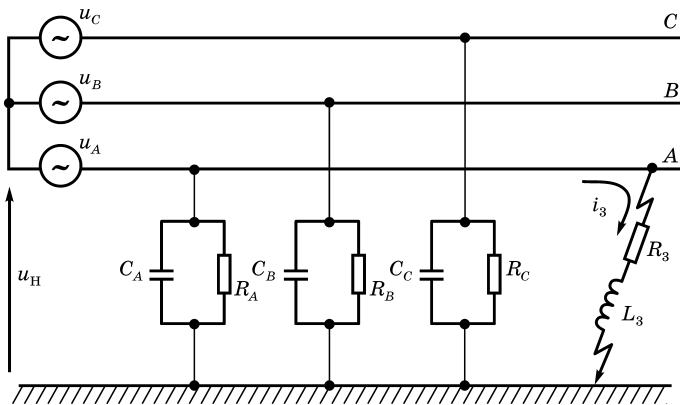


Рис. 8.7

Схема замещения трехфазной сети с изолированной нейтралью при однофазном замыкании на землю

Уравнение (8.52) решается любым численным методом. В результате решения определяются токи $i_1(t)$; $i_3(t)$ и напряжение на емкости $u_{C_2}(t)$.

Пример 36. Объект моделирования — трехфазная электрическая сеть с изолированной нейтралью при однофазном замыкании на землю. Схема замещения сети с замыканием в фазе A приведена на рисунке 8.7.

Цепь тока замыкания на землю включает активное (переходное) сопротивление R_3 и индуктивность L_3 . Наличие индуктивности L_3 может быть обусловлено повреждением обмоток двигателей, трансформаторов и т. д.

Учитывая, что емкостные сопротивления элементов электрической сети значительно превышают их индуктивные и активные сопротивления, ими можно пренебречь. В этом случае ток замыкания i_3 определяется емкостной проводимостью неповрежденных фаз относительно земли.

Заменяя в схеме 8.7 три источника напряжения одним эквивалентным источником u , приходим к эквивалентной схеме замещения (рис. 8.8), в которой R — общее активное сопротивление сети, C — суммарная емкость сети относительно земли.

Сформируем математическую модель данной электрической сети в пространстве состояний.

В качестве переменных состояния сети примем

$$\begin{cases} x_1(t) \rightarrow i_3(t); \\ x_2(t) \rightarrow u_C(t). \end{cases} \quad (8.53)$$

Следовательно, вектор состояния:

$$X(t) = \begin{pmatrix} i_3(t) \\ u_C(t) \end{pmatrix}. \quad (8.54)$$

На основе законов Кирхгофа

$$\begin{cases} R_3 i_3 + L_3 \frac{di_3}{dt} + u_C = u; \\ i_3 = i_C + i_R. \end{cases} \quad (8.55)$$

Из уравнений системы (8.55) исключим все неизвестные, не являющиеся переменными

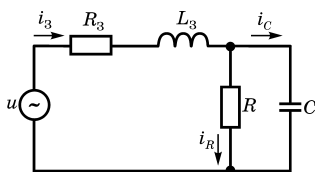


Рис. 8.8
Эквивалентная схема замещения трехфазной сети с изолированной нейтралью при однофазном замыкании на землю

состояния. Для этого ток i_C выразим через напряжение на емкости u_C :

$$i_C = C \frac{du_C}{dt}, \quad (8.56)$$

ток i_R выразим также через напряжение u_C :

$$i_R = \frac{u_C}{R}. \quad (8.57)$$

Сделаем подстановку выражений (8.56) и (8.57) в систему (8.55):

$$\begin{cases} R_3 i_3 + L_3 \frac{di_3}{dt} + u_C = u; \\ i_3 = C \frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{R}. \end{cases} \quad (8.58)$$

Приведем систему уравнений (8.58) к форме Коши (к нормальной форме). Уравнения запишем в порядке, соответствующем индексу переменных состояния.

Тогда модель электрической сети (рис. 8.8) в пространстве состояний будет иметь вид

$$\begin{cases} \frac{di_3}{dt} = -\frac{R_3}{L_3} i_3 - \frac{1}{L_3} u_C + \frac{1}{L_3} u; \\ \frac{du_C}{dt} = \frac{1}{C} i_3 - \frac{1}{RC} u_C. \end{cases} \quad (8.59)$$

Модель (8.59) в векторно-матричной форме при заданных начальных условиях $i_3(0)$; $u_C(0)$:

$$\dot{X}(t) = FX(t) + Gu(t), \quad (8.60)$$

где $u(t) = u$;

$$\dot{X}(t) = \begin{Bmatrix} \frac{di_3}{dt} \\ \frac{du_C}{dt} \end{Bmatrix}; \quad G(t) = \begin{Bmatrix} 1 \\ L_3 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad F = \begin{Bmatrix} -\frac{R_3}{L_3} & -\frac{1}{L_3} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{Bmatrix}. \quad (8.61)$$

В большинстве задач невозможно получить сразу готовую систему уравнений состояния, так как в каждом уравнении присутствуют производные нескольких переменных состояния и обычным путем они не разделяются. В таких задачах предлагается поступить следующим образом. Про-

изводные переменных состояния принимают за искомые величины $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$. Остальные члены уравнений принимают за свободные члены. В результате исходная система решается как обычная система линейных алгебраических уравнений соответствующим методом решения СЛАУ.

8.6. ЛИНЕЙНЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ

Уравнение состояния, или *дискретная динамическая модель*, имеет вид

$$X(t_{k+1}) = \Phi(t_{k+1}, t_k)X(t_k) + \Gamma(t_{k+1}, t_k)u(t_k), \quad (8.62)$$

где X — вектор состояния, определенный только в дискретные моменты времени t_k при $k = 0, 1, 2, \dots$; $\Phi(t_{k+1}, t_k)$ — переходная матрица состояния дискретной динамической системы размерности $n \times n$; $\Gamma(t_{k+1}, t_k)$ — переходная матрица входного воздействия дискретной системы размерности $n \times 1$; $u(t_k)$ — входная последовательность дискретной системы при начальных условиях $X(t_0) = X_0$.

Модель (8.62) можно записать в сокращенном виде:

$$X(k+1) = \Phi(k+1, k)X(k) + \Gamma(k+1, k)u(k). \quad (8.63)$$

Вектор состояния $X(k)$ определяется путем решения уравнения состояния (8.63):

$$X(k) = \Phi(k, 0)X(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \Phi(k, i)\Gamma(k, i)u(i), \quad (8.64)$$

где $X(0) = X(t_0)$.

В некоторых задачах при исследовании непрерывных физических систем предпочитают перейти от непрерывной динамической модели к дискретной. Непрерывные функции заменяют решетчатыми функциями, дифференциальные уравнения — разностными. В основе процедуры дискретизации непрерывной модели лежит тесная взаимосвязь дифференциальных и разностных уравнений.

ДРУГИЕ ВИДЫ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ФИЗИЧЕСКИХ СИСТЕМ ВО ВРЕМЕННОЙ ОБЛАСТИ

9.1. ПЕРЕХОДНАЯ ФУНКЦИЯ

Переходная функция (характеристика) относится к классу динамических моделей, так как она характеризует динамические свойства технического объекта.

Переходная функция $h(t)$ представляет собой реакцию динамической системы на *единичное ступенчатое воздействие* $1(t)$ (возмущающую функцию Хевисайда) (рис. 9.1):

$$x(t) = 1(t), \quad (9.1)$$

где

$$1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ 1 & \text{при } t \geq 0 \end{cases} \quad (9.2)$$

при нулевых начальных условиях.

Математическое (аналитическое) выражение для $h(t)$ определяется путем решения дифференциального уравнения, описывающего данную физическую систему при нулевых начальных условиях

$$y(-0) = y'(-0) = y''(-0) = \dots = y^{(n)}(-0) = 0. \quad (9.3)$$

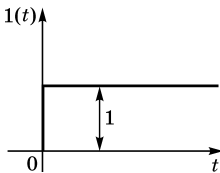


Рис. 9.1
Единичное ступенчатое воздействие

Название «переходная функция» объясняется тем, что функция $h(t)$ характеризует поведение исследуемого объекта при его переходе от одного установившегося режима (от момента приложения входного воздействия) к другому установившемуся режиму (по окончании переходного процесса, обусловленного входным воздействием).

График переходной функции $h(t)$ называют *переходной* или *разгонной характеристикой*.

Переходные характеристики элементарных типовых звеньев динамических систем продемонстрированы в подразделе 7.4 на рисунках 7.3, 7.7, 7.10, 7.12, 7.16 (с учетом, что $y(t) = h(t)$).

По графику переходной функции оценивают качество переходного процесса в исследуемой динамической системе.

Зная переходную функцию динамической системы, можно определить ее реакцию на произвольное входное воздействие $x(t)$ на основе интеграла Дюамеля — Карсона:

$$y(t) = x(0)h(t) + \int_0^t x'(\tau)h(t - \tau)d\tau. \quad (9.4)$$

9.2. ИМПУЛЬСНАЯ ПЕРЕХОДНАЯ ФУНКЦИЯ

Импульсная переходная функция $\omega(t)$, или *весовая функция*, характеризует динамические свойства системы и представляет собой реакцию системы на входное воздействие вида

$$x(t) = \delta(t), \quad (9.5)$$

где $\delta(t)$ — *дельта-функция* Дирака:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \neq 0; \\ \infty & \text{при } t = 0, \end{cases} \quad (9.6)$$

$$\begin{cases} \delta(t) = \frac{d1(t)}{dt}; \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1. \end{cases} \quad (9.7)$$

Таким образом, дельта-функцию можно рассматривать как импульс, имеющий бесконечно большую высоту, бесконечно малую длительность и единичную площадь (рис. 9.2).

Переходная функция $h(t)$ и импульсная переходная функция $\omega(t)$ связаны между собой соотношениями

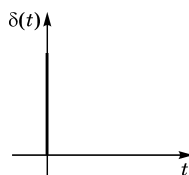


Рис. 9.2
Дельта-функция

$$\begin{cases} h(t) = \int_0^t \omega(\tau) d\tau; \\ \omega(t) = \frac{dh(t)}{dt}. \end{cases} \quad (9.8)$$

График импульсной переходной функции называют *импульсной переходной характеристикой*.

Зная импульсную переходную функцию (весовую функцию) динамической системы, можно определить ее реакцию на любое произвольное входное воздействие $x(t)$. Для этого используется *интеграл свертки*:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^{\infty} x(\tau) \omega(t - \tau) d\tau = \\ &= \int_0^{\infty} x(t - \tau) \omega(\tau) d\tau = \int_0^t x(t - \tau) \omega(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (9.9)$$

Из интеграла (9.9) следует, что импульсную переходную функцию $\omega(t)$ называют *весовой*, потому что она определяет веса, с которыми входят в выходной сигнал (отклик) объекта соответствующие мгновенные значения входного сигнала $x(t)$.

Соотношение (9.9) справедливо только при нулевых начальных условиях.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТИ

В частотной области для исследования динамических (передаточных) свойств физических систем используют математические модели в форме *частотных характеристик*.

Частотные характеристики позволяют оценить реакцию динамической системы на входной гармонический сигнал любой частоты, а также на сумму гармонических сигналов различной частоты в установившемся режиме.

Для стационарной линейной системы (рис. 4.1) математическая модель, связывающая выходной и входной сигналы в частотной области, может быть представлена в виде *частотной передаточной функции* (комплексной частотной функции):

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}, \quad (10.1)$$

где $A(\omega)$ — модуль частотной передаточной функции — представляет собой *амплитудную частотную функцию*; $\varphi(\omega)$ — аргумент частотной передаточной функции — представляет собой *фазовую частотную функцию*.

Амплитудная частотная функция $A(\omega)$ характеризует зависимость отношения амплитуд установившегося выходного и входного сигналов системы от частоты ω .

Фазовая частотная функция $\varphi(\omega)$ отражает зависимость фазового сдвига между выходным и входным сигналами системы от частоты ω .

Частотную передаточную функцию $W(j\omega)$ можно представить в виде

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega), \quad (10.2)$$

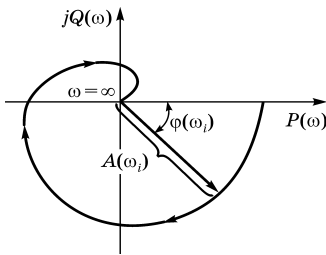


Рис. 10.1
Отображение АФЧХ на
комплексной плоскости

где $P(\omega)$ и $Q(\omega)$ — действительная и мнимая частотные функции системы соответственно.

На комплексной плоскости (рис. 10.1) каждому фиксированному значению частоты ω_i соответствует вектор частотной передаточной функции $W(j\omega_i)$, длина которого равна $A(\omega_i)$, а угол поворота его относительно действительной положительной

полуоси равен $\varphi(\omega_i)$. При изменении частоты от 0 до ∞ конец вектора $W(j\omega)$ описывает кривую, называемую *годографом* этого вектора или *амплитудно-фазовой частотной характеристикой* (АФЧХ).

Частотные характеристики $A(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ во многих практических задачах определяются экспериментальным путем.

Рассмотренные частотные характеристики используют, например, для исследования устойчивости технических систем, для оценивания качества переходных процессов в них.

При проектировании преобразователей и стабилизаторов силовой электроники по АФЧХ определяют способность устройства подавлять входные шумы и пульсации.

По частотным характеристикам динамического объекта может быть определена его передаточная функция.

На рисунке 10.2 схематично отображены перечисленные выше приемы исследования динамических (передаточных) свойств линейных динамических непрерывных систем во временной и частотной областях.

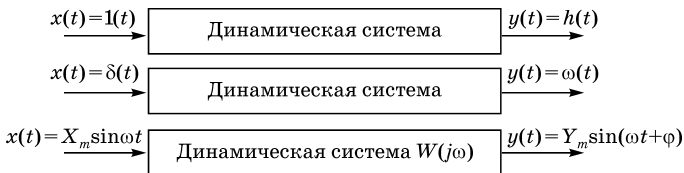


Рис. 10.2
К исследованию динамических (передаточных)
свойств систем во временной и частотной областях

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ФОРМЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Физические явления, в основе которых лежат законы сохранения массы, импульса, энергии, математически описываются с помощью интегральных уравнений.

Исследование физических систем, процессы в которых подчиняются законам газовой динамики, гидродинамики, электродинамики, квантовой механики и ряду других, приводит к математическим моделям в форме интегральных уравнений. Математический аппарат интегральных уравнений используется в теории оптимальной фильтрации, в теории управления, в статистической динамике, в спектроскопии, акустике, гравиметрии и др.

Необходимость в решении интегральных уравнений появляется на одном из этапов решения краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными.

Общий вид интегрального уравнения:

$$\int_a^b K(x, s, y(s)) ds = f(x, y(x)), \quad a \leq x \leq b, \quad (11.1)$$

где $K(x, s, y(s))$ — ядро интегрального уравнения; x — независимая переменная; $y(x)$ — искомая функция; s — переменная интегрирования; $f(x, y(x))$ — заданная функция.

Неизвестная искомая функция $y(x)$ находится под знаком определенного интеграла.

Интегральные уравнения в отличие от дифференциальных не содержат производных искомой функции и, следовательно, не накладывают жестких ограничений на гладкость решения.

Приведем несколько примеров математических моделей в форме интегральных уравнений.

Пример 37. При проектировании деталей и устройств для железнодорожного транспорта, машиностроения, радиоэлектронной аппаратуры проводится исследование напряженно-деформированных состояний создаваемых конструкций. Это необходимо для оценки прочности, долговечности, виброустойчивости изделий.

Анализ напряжений и упругих деформаций в исследуемой физической системе может быть осуществлен на основе следующей математической модели:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} + \frac{1}{E} \int_0^t K(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau, \quad (11.2)$$

где E — модуль упругости; $K(t-\tau)$ — функция влияния напряжения $\sigma(t)$ в момент τ на деформацию $\varepsilon(t)$ в момент t .

Пример 38. Решение ряда научных и инженерно-технических задач (теплотехника, ракетная техника, метеорология, гелиотехника и т. д.) связано с изучением процесса лучистого теплообмена в исследуемой системе твердых тел.

Для замкнутой системы, состоящей из серых диффузно отражающих тел, разделенных прозрачной средой, используется математическая модель в форме интегрального уравнения Фредгольма второго рода:

$$\begin{aligned} E_{\text{пад}}(M) - \int_F R(N)E_{\text{пад}}(N)d\varphi_{dF_M, dF_N} = \\ = \int_F A(N)E_0(N)d\varphi_{dF_M, dF_N}, \end{aligned} \quad (11.3)$$

где $E_{\text{пад}}(M)$ — падающее излучение в точке M ; $R(N)$ — коэффициент отражения; $d\varphi_{dF_M, dF_N}$ — элементарный угловой коэффициент; $A(N)$ — коэффициент поглощения; $E_0(N)$ — интегральная плотность полусферического излучения абсолютно черного тела.

Решение модели (11.3) позволяет получить распределение потоков падающего излучения по поверхности системы при заданных на ней оптических константах и поля температур.

Пример 39. В радиотехнике математическая модель, связывающая принятый радиосигнал $f(t)$ с переданным сигналом $u(t)$, представляет собой интеграл свертки:

$$\int_0^t K(t - \tau)u(\tau)d\tau = f(t), \quad (11.4)$$

где ядро $K(t - \tau)$ определяется свойствами приемной аппаратуры и среды, через которую проходит сигнал.

Решение *в явном виде* можно получить только для очень узкого круга интегральных уравнений, в частности для вырожденных уравнений.

К *приближенно-аналитическим методам* можно отнести группу проекционных методов, основанных на аппроксимации, а именно на разложении решения по системе линейно независимых координатных функций, метод вырожденных ядер, итерационные методы и др.

Численные методы решения интегральных уравнений предполагают замену интеграла конечной суммой на основе какой-либо квадратурной формулы численного интегрирования (см. гл. 14).

ПОСТРОЕНИЕ ЭМПИРИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ НА ОСНОВЕ АППРОКСИМАЦИИ ДАННЫХ

12.1. БАЗОВЫЕ ПОНЯТИЯ

Эмпирическими называют модели, получаемые по результатам экспериментальных исследований опытным путем (на основании данных наблюдений).

Эмпирические, или формальные, модели применяют в тех ситуациях, когда нет возможности создать *теоретическую модель* исследуемого технического объекта из-за отсутствия информации о его физических свойствах и закономерностях протекающих в нем процессов либо когда объект настолько сложен, что математически адекватно описать сущность его внутренних процессов и свойств не представляется возможным.

Моделируемый объект представляется в виде абстрактного кибернетического *черного ящика*. Для измерения доступны только его входные сигналы (управляющие воздействия) и выходные сигналы (отклики или реакции). На основе обработки результатов измерений входных и выходных сигналов объекта необходимо выявить эмпирические (опытные) закономерности (соотношения) в полученных данных и математически описать их формальной приближенной аналитической моделью.

В научных исследованиях и в инженерной практике часто приходится решать следующую задачу.

В результате серии измерений величин x и y получены n пар значений $x_i; y_i$ ($i = 1, 2, 3, \dots, m$), которые представлены в табличной форме. Полагают, что x — независимая переменная (входное воздействие, фактор), а y — отклик, реакция системы. Требуется установить (найти в явном

виде) функциональную зависимость между x и y , т. е. определить такую приближенную аналитическую *формальную модель*, которая бы наиболее соответствовала данному набору экспериментальных данных $x_i; y_i$ ($i = 1, 2, 3, \dots, m$).

Задача аналитического приближения таблично заданных функций представляет одну из категорий задач *аппроксимации*. Аппроксимация является одним из важнейших разделов *теории приближения функций*.

Под *аппроксимацией* понимают приближение (приближенную замену) исходной функции другой функцией, более простой и легко вычисляемой.

Решение многих задач электроники, электротехники, физики, радиотехники, теории автоматического управления предполагает аппроксимацию вольт-амперных характеристик нелинейных элементов, переходных, амплитудно-частотных, фазочастотных характеристик фильтров, усилителей, регуляторов, компенсирующих устройств и т. д.

Аппроксимация используется не только для представления (описания) физических закономерностей на основе полученных экспериментально (эмпирических) данных. В некоторых задачах, связанных со сложными многомерными моделями, приходится иметь дело с функциями, заданными громоздкими аналитическими выражениями. Анализ таких функций затруднен, вычислительные операции над ними трудоемки. Проблема решается с помощью аппроксимации данной функции другой хорошо изученной функцией с такими свойствами, которые существенно упрощают работу исследователя.

Решение задачи аналитического приближения таблично заданной функции предполагает реализацию следующих этапов.

Этап 1. Выбор класса аппроксимирующей функции $f(x)$ — эмпирической модели, наилучшим образом отражающей связь (зависимость) между экспериментальными (опытными) данными x и y . Для этого совокупность данных $x_i; y_i$ ($i = 1, 2, 3, \dots, m$) отображается графически.

По характеру расположения точек с координатами $x_i; y_i$ на плоскости определяют класс приближающей (аппроксимирующей) функции.

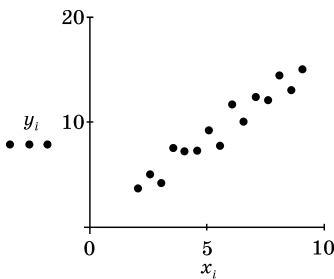


Рис. 12.1

Результаты эксперимента

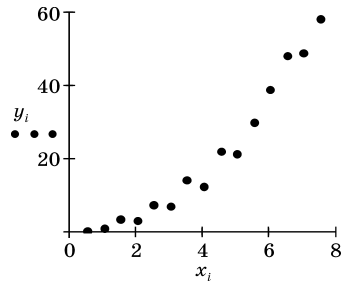


Рис. 12.2

Результаты эксперимента

Например, совокупность точек $x_i; y_i$, представленную на рисунке 12.1, целесообразно аппроксимировать линейной функцией $y = kx + b$.

Для аппроксимации данных, приведенных на рисунке 12.2, наиболее подходящей является функция $y = ax^2$.

В некоторых задачах удается установить тип взаимосвязи $y = f(x)$ исходя из физических соображений на основе предварительного теоретического анализа моделируемого объекта.

В тех случаях, когда по расположению совокупности экспериментальных точек $x_i; y_i$ невозможно выявить характер зависимости, выбор класса приближающей функции может быть произвольным. При этом определяющим фактором является простота аппроксимирующей функции и обеспечение ею достаточной точности приближения.

Этап 2. Определение параметров аппроксимирующей функции $f(x)$.

Пусть выбранная приближающая функция $f(x)$ имеет вид

$$y = f(x, a_0, a_1, a_2, \dots, a_n), \quad (12.1)$$

где $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ — неизвестные постоянные параметры ($n < m$).

Приближенную функциональную зависимость (12.1) называют *эмпирической формулой* (моделью) или *уравнением регрессии*.

Определение аналитического выражения для описания связи зависимой величины y с независимыми величинами

(факторами) x_1, x_2, \dots, x_m называют *задачей регрессионного анализа*.

Необходимо найти такие значения параметров $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$, при которых достигается наилучшее соответствие (согласие) между экспериментальными данными $x_i; y_i$ и аппроксимирующей функцией (эмпирической моделью) (12.1).

Значения параметров $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ эмпирической формулы нельзя определить точно по результатам измерений y_1, y_2, \dots, y_m , поскольку экспериментальные данные y_1, y_2, \dots, y_m , как правило, содержат случайные ошибки, обусловленные неидеальностью измерительной техники (погрешности измерений) и влиянием неконтролируемых случайных факторов (внешних и внутренних).

Поэтому ставится задача найти *оценки параметров* $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$, *наилучшие (оптимальные) с точки зрения заданного критерия*.

Рассмотрим рисунок 12.3, на котором приведены точки, соответствующие результатам измерений $x_i; y_i$, и аппроксимирующая их линия (линия регрессии). Отклонения значений приближающей функции (значений, предсказанных моделью) $y = f(x_i)$ от результатов эксперимента y_i обозначены как d_i , где $i = 1, 2, 3, \dots, m$.

На основе совокупности значений отклонений d_i устанавливается критерий для поиска оценок параметров $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ регрессионной модели (12.1).

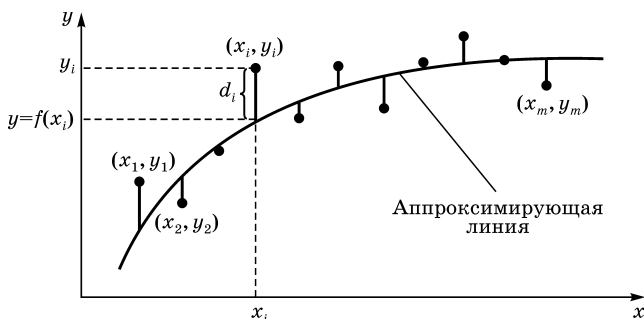


Рис. 12.3

Отклонения d_i значений аппроксимирующей функции $y = f(x_i)$ от результатов эксперимента y_i

12.2. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Метод наименьших квадратов — это способ определения параметров регрессионной модели на основе результатов опытов.

Метод наименьших квадратов обеспечивает получение аппроксимирующей функции (эмпирической модели) $y = f(x, a_0, a_1, a_2, \dots, a_n)$ на основе критерия минимума суммы квадратов отклонений d_i ($i = 1, 2, 3, \dots, m$).

Это значит, что наилучшее согласование линии регрессии с результатами измерений x_i ; y_i достигается при выполнении условия

$$\sum_{i=1}^m d_i^2 = \min. \quad (12.2)$$

Таким образом, согласно методу наименьших квадратов, наиболее вероятными значениями параметров $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ регрессионной модели считаются те, для которых

$$\sum_{i=1}^m [y_i - f(x_i, a_0, a_1, a_2, \dots, a_n)]^2 = S = \min. \quad (12.3)$$

При этом предполагается, что отклонения d_i подчиняются нормальному закону распределения.

Необходимым условием минимума функции многих переменных $S = S(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n)$ является равенство нулю ее частных производных по всем переменным. Поэтому задача сводится к решению следующей системы уравнений:

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial a_1} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial a_2} = 0; \quad \dots; \quad \frac{\partial S}{\partial a_n} = 0. \quad (12.4)$$

Если аппроксимирующая функция $f(x, a_0, a_1, a_2, \dots, a_n)$ — линейная относительно своих параметров, то и система уравнений (12.4) тоже будет линейной. В этом случае решение задачи существенно упрощается.

В результате решения системы уравнений (12.4) находят искомые параметры $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$.

Рассмотрим самый простой вариант — решение задачи *линейной регрессии*.

В этом случае аппроксимирующая функция, или уравнение регрессии, имеет вид

$$y = ax + b. \quad (12.5)$$

Определим значения (оценки) параметров a и b , которые должны удовлетворять условию

$$\sum_{i=1}^m d_i^2 = \sum_{i=1}^m [y_i - (ax_i + b)]^2 = S = \min. \quad (12.6)$$

Чтобы минимизировать функцию S , найдем ее частные производные по переменным a и b и приравняем их к нулю:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 0. \quad (12.7)$$

В итоге получим так называемую *нормальную систему уравнений*:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m y_i = am + b \sum_{i=1}^m x_i; \\ \sum_{i=1}^m x_i y_i = a \sum_{i=1}^m x_i^2 + b \sum_{i=1}^m x_i^2, \end{cases} \quad (12.8)$$

решая которую, найдем искомые значения параметров a и b регрессионной модели (12.5):

$$a = \frac{m \sum_{i=1}^m x_i y_i - \sum_{i=1}^m x_i \sum_{i=1}^m y_i}{m \sum_{i=1}^m x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^m x_i \right)^2}; \quad b = \frac{\sum_{i=1}^m y_i \sum_{i=1}^m x_i^2 - \sum_{i=1}^m x_i \sum_{i=1}^m x_i y_i}{m \sum_{i=1}^m x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^m x_i \right)^2}. \quad (12.9)$$

Оценить степень отклонения связи между x_i и y_i от линейной (или тесноту линейной связи) можно с помощью *коэффициента парной корреляции (коэффициента корреляции Пирсона)*:

$$R = \frac{\sum_{i=1}^m x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^m x_i \sum_{i=1}^m y_i \right) / m}{\sqrt{\sum_{i=1}^m x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^m x_i \right)^2}{m}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^m y_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^m y_i \right)^2}{m}}}. \quad (12.10)$$

Чем ближе значение коэффициента R по абсолютной величине к единице, тем сильнее проявляется линейная зависимость между x_i и y_i , и, следовательно, тем лучше экспериментальные точки согласуются с линейной моделью. Считается, что при $0,9 < R < 0,99$ — очень сильная теснота линейной связи; при $0,7 < R < 0,9$ — сильная; при $0,5 < R < 0,7$ — заметная; при $0,3 < R < 0,5$ — слабая теснота линейной связи.

При решении прикладных задач нелинейную аппроксимирующую функцию по возможности стремятся привести к линейному виду, что позволяет использовать формулы (12.9).

12.3. ПРИМЕРЫ ФОРМИРОВАНИЯ ЭМПИРИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Пример 40. В устройствах управления электродвигателями используются микроконтроллеры соответствующих типов. Для микроконтроллера необходимо наряду с другими характеристиками энергопотребления определять зависимость активного потребляемого тока I_a от тактовой частоты f . В результате серии измерений были получены следующие данные (табл. 12.1).

Требуется найти аналитическую функцию (эмпирическую модель), которая бы наилучшим образом описывала экспериментальные данные с точки зрения критерия минимума суммы квадратов отклонений этих данных от значений, предсказанных моделью.

Отображаем полученные результаты измерений $f_i; I_{a_i}$ ($i = 1, 2, 3, \dots, m$) графически (рис. 12.4).

По характеру расположения точек $f_i; I_{a_i}$ на плоскости можно предположить, что тактовая частота f и активный потребляемый ток I_a связаны линейной зависимостью.

Таблица 12.1

Результаты измерений

№ опыта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Тактовая частота f_i , МГц	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Активный потр. ток I_{a_i} , мА	4,5	5,5	13	11	18	19	26	31,5	28	35,5

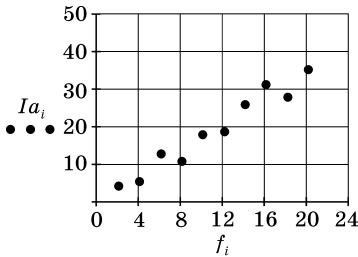


Рис. 12.4
Результаты эксперимента

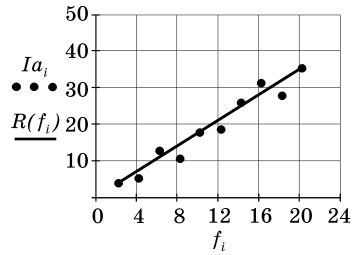


Рис. 12.5
Аппроксимация результатов эксперимента

Поэтому в качестве аппроксимирующей функции принимаем

$$Ia = af + b. \quad (12.11)$$

Значения (оценки) параметров a и b , согласно методу наименьших квадратов, определяем из условия

$$\sum_{i=1}^m [Ia_i - (af_i + b)]^2 = S = \min. \quad (12.12)$$

Минимизируем функцию S , для чего формируем систему уравнений (12.7), которую затем преобразуем к виду (12.8).

Решая нормальную систему (12.8), находим искомые значения параметров:

$$a = 1,742; \quad b = 0,033.$$

Следовательно, уравнение линейной регрессии (эмпирическая модель) имеет вид

$$Ia = 1,742f + 0,033. \quad (12.13)$$

На практике, при решении подобной задачи в системе MathCad, достаточно воспользоваться двумя встроенными функциями $intercept()$ для вычисления параметра b и $slope()$ — для вычисления параметра a .

На рисунке 12.5 построена линия регрессии $R(f_i)$, соответствующая найденной эмпирической модели (12.13).

С помощью встроенной функции MathCad $corr()$ определен коэффициент парной корреляции (коэффициент корреляции Пирсона): $R = 0,976$.

Таблица 12.2

Результаты эксперимента

№ опыта	1	2	3	4	5	6	7	8
Время t_j , мс	0,005	0,01	0,015	0,02	0,025	0,03	0,035	0,04
Ток i_j , А	102	2505	3940	3391	3612	2907	3111	2614
№ опыта	9	10	11	12	13	14	15	
Время t_j , мс	0,045	0,05	0,055	0,06	0,065	0,07	0,075	
Ток i_j , А	2000	1910	1252	1441	995	910	300	

Пример 41. Для защиты изоляции электрооборудования от грозовых и коммутационных перенапряжений используется нелинейный ограничитель перенапряжения (ОПН). Фактором, значительно сокращающим срок эксплуатации ОПН, являются импульсные перенапряжения, сопровождающиеся импульсными токами. Степень отрицательного воздействия импульсного тока на ОПН определяется выделяемой при этом энергией, которая зависит от амплитуды и длительности импульса.

Экспериментальным путем были получены значения импульсного тока i_j в последовательные дискретные моменты времени t_j ($j = 1, 2, 3, \dots, m$) (табл. 12.2).

Требуется построить эмпирическую (приближенную) модель, наилучшим образом с точки зрения метода наименьших квадратов описывающую процесс изменения тока i во времени при импульсном перенапряжении, т. е. зависимость $i(t)$.

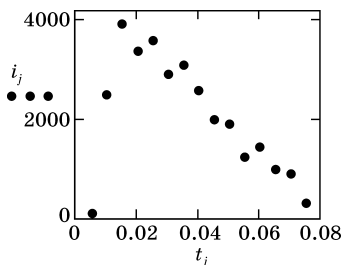


Рис. 12.6

Результаты эксперимента

Отображаем полученные результаты эксперимента $t_j; i_j$ ($j = 1, 2, 3, \dots, m$) графически (рис. 12.6).

В качестве аппроксимирующей функции выбираем полином (многочлен).

Достоинство полиномов в том, что они являются линейными функциями относительно своих коэффициентов. Это

существенно упрощает вычислительные процедуры при решении задач приближения эмпирических данных.

Принимаем в качестве эмпирической регрессионной модели полином 2-й степени

$$i = a_0 + a_1 t + a_2 t^2. \quad (12.14)$$

Значения коэффициентов a_0, a_1, a_2 , согласно методу наименьших квадратов, определяем из условия

$$\sum_{j=1}^m [i_j - (a_0 + a_1 t_j + a_2 t_j^2)]^2 = S = \min. \quad (12.15)$$

Минимизируем функцию S , приравнявая к нулю ее частные производные по каждому из коэффициентов:

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial a_1} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial a_2} = 0. \quad (12.16)$$

В итоге приходим к нормальной системе уравнений:

$$\begin{cases} a_2 \sum_{j=1}^m x_j^4 + a_1 \sum_{j=1}^m x_j^3 + a_0 \sum_{j=1}^m x_j^2 = \sum_{j=1}^m x_j^2 y_j; \\ a_2 \sum_{j=1}^m x_j^3 + a_1 \sum_{j=1}^m x_j^2 + a_0 \sum_{j=1}^m x_j = \sum_{j=1}^m x_j y_j; \\ a_2 \sum_{j=1}^m x_j^2 + a_1 \sum_{j=1}^m x_j + a_0 m = \sum_{j=1}^m y_j. \end{cases} \quad (12.17)$$

Решая систему (12.17), находим искомые коэффициенты a_0, a_1, a_2 аппроксимирующей функции (12.14).

Для решения данной задачи в системе MathCad применяют встроенные функции:

1) *regress()* — для вычисления коэффициентов полинома наилучшим образом, с точки зрения метода наименьших квадратов, приближающего экспериментальные данные;

2) *interp()* — для вычисления значения полинома при конкретном значении аргумента.

На рисунке 12.7 представлены линия регрессии $R2(tt)$ (линия 1), полученная на основе аппроксимации эмпирических данных полиномом 2-й степени (12.14), и линия

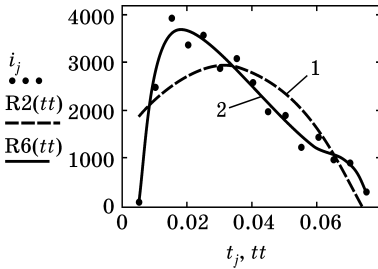


Рис. 12.7
*Аппроксимация
 эмпирических данных:*

линия 1 — $R2(tt)$ — на основе полинома 2-й степени; линия 2 — $R6(tt)$ — на основе полинома 6-й степени.

регрессии $R6(tt)$ (линия 2) — результат аппроксимации эмпирических данных полиномом 6-й степени.

Глубоко осмысленное, удачное представление эмпирических данных, в значительной степени определяемое опытом и интуицией исследователя, является ключом к правильному пониманию изучаемых процессов, объектов и явлений.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ПРИ ПОСТРОЕНИИ ЭМПИРИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

13.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим еще один аспект приближения эмпирических данных.

Часто в научной и инженерной практике приходится решать следующую задачу. В математическую модель исследуемого объекта входит функция y , заданная таблично, т. е. имеется ограниченный набор ее значений y_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$), определенных для некоторых дискретных значений аргумента $x_i \in [a; b]$. Требуется определить (восстановить) значения данной функции при любых произвольных значениях аргумента $x \neq x_i$, принадлежащих интервалу $[a; b]$. Это классическая постановка *задачи интерполяции*.

Интерполяция, или *интерполирование*, означает построение алгоритма вычисления значений таблично заданной функции для значений аргумента x , отсутствующих в исходной таблице, посредством интерполяционной функции.

Следует отметить, что интерполяция может потребоваться и в тех ситуациях, когда исходная функция задана слишком сложным громоздким аналитическим выражением. Интегрирование такой функции и ее анализ могут создать существенные проблемы исследователю. Поэтому ставится задача приближенной замены (приближения) исходной функции другой функцией, более простой и легко вычисляемой, т. е. задача аппроксимации.

Существует две основных категории задач аппроксимации.

Одна категория задач рассматривалась в разделе 12. В этих задачах функция, аппроксимирующая эмпирические данные, определяется на основе критерия минимума суммы квадратов отклонений ее значений от результатов эксперимента y_i :

$$\sum_{i=1}^m [y_i - f(x_i, a_0, a_1, a_2, \dots, a_n)]^2 = S = \min. \quad (13.1)$$

При этом не требуется, чтобы аппроксимирующая линия проходила через все эмпирические точки.

В другой категории задач аппроксимации в качестве *критерия близости* принимают условие совпадения аппроксимирующей и аппроксимируемой функций в заданном ряде дискретных точек (в узлах) (*задачи интерполяции*).

Таким образом, в зависимости от постановки задачи выбирают соответствующий *критерий близости* (*критерий согласия*) аппроксимирующей и аппроксимируемой функций.

Если эмпирические данные не являются достаточно точными, то интерполяция их не имеет смысла. В этом случае целесообразно приближать (аппроксимировать) результаты эксперимента какой-либо простой функцией, используя метод наименьших квадратов. При этом проявляется эффект сглаживания ошибок обрабатываемых данных.

Задача экстраполяции заключается в определении значения функции в точке, находящейся за пределами заданного интервала аппроксимации, посредством интерполяционного многочлена, построенного по значениям функции в точках $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$.

Конкретизируем задачу интерполяции.

Пусть функция $y = f(x)$ задана таблицей значений, определенных в точках $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ (узлах):

$$\begin{aligned} y_0 &= f(x_0); & y_1 &= f(x_1); \\ y_2 &= f(x_2); & \dots; & y_n &= f(x_n). \end{aligned} \quad (13.2)$$

Требуется построить интерполирующую (аппроксимирующую) функцию $F(x)$, принадлежащую известному классу и принимающую в узлах интерполяции $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$

те же значения, что и заданная функция $f(x)$, т. е. такую, что

$$\begin{aligned} F(x_0) &= y_0; & F(x_1) &= y_1; \\ F(x_2) &= y_2; & \dots; & F(x_n) = y_n. \end{aligned} \quad (13.3)$$

Геометрически это означает, что надо построить кривую $y = F(x)$ определенного типа, проходящую через точки с координатами $(x_0; y_0)$, $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, ..., $(x_n; y_n)$ (рис. 13.1).

В такой постановке задача интерполяции имеет бесчисленное множество решений, поскольку через данные точки можно провести бесчисленное множество различных кривых.

Однозначное решение задачи можно получить, если в качестве аппроксимирующей функции $F(x)$ выбрать полином (многочлен) $P_n(x)$ степени не выше n , удовлетворяющий условиям:

$$\begin{aligned} P_n(x_0) &= y_0; & P_n(x_1) &= y_1; \\ P_n(x_2) &= y_2; & \dots; & P_n(x_n) = y_n. \end{aligned} \quad (13.4)$$

Полиномы имеют очевидные преимущества перед другими классами интерполирующих функций:

- они являются линейными функциями своих коэффициентов;
- их можно легко вычислять, складывать, умножать, интегрировать и дифференцировать.

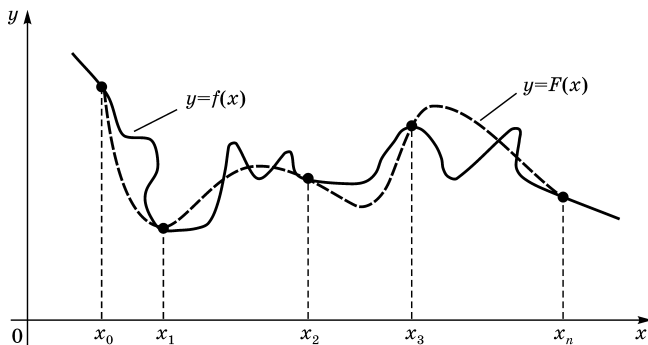


Рис. 13.1

Геометрическая интерпретация задачи интерполяции

В зависимости от решаемой задачи используют различные формы (формулы) представления интерполяционного полинома (в каноническом виде, формулы Лагранжа, Ньютона, Гаусса, Стирлинга, Эрмита, Бесселя, на основе интерполяционных узлов Чебышева, схема Эйткина, на основе кубических сплайн-функций и т. д.).

13.2. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ПОЛИНОМОМ В КАНОНИЧЕСКОМ ВИДЕ

Пусть для функции $y = f(x)$, заданной таблично, требуется найти полином (многочлен) $P_n(x)$, для которого будут выполняться условия интерполяции (13.4).

В качестве интерполирующей функции выберем полином $P_n(x)$ степени n в каноническом виде:

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n. \quad (13.5)$$

Определим коэффициенты $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ интерполяционного полинома (13.5). Для этого исходя из условия совпадения аппроксимирующей и аппроксимируемой функций в $n + 1$ узлах (13.4) составим систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n = y_0; \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n = y_1; \\ \dots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_nx_n^n = y_n, \end{cases} \quad (13.6)$$

которая в векторно-матричной форме имеет вид

$$MX \cdot A = Y, \quad (13.7)$$

где $Y = [y_0 \ y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n]^T$ — вектор свободных членов; $A = [a_0 \ a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]^T$ — вектор неизвестных коэффициентов полинома $P_n(x)$ (13.5); MX — матрица вида

$$MX = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix}. \quad (13.8)$$

Так как среди узлов интерполирования x_i нет совпадающих ($x_i \neq x_j$), определитель системы (13.6) отличен от

нуля, то данная система, а следовательно, и поставленная задача имеют единственное решение (единственный набор коэффициентов $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n)$).

Решаем систему (13.6) матричным методом:

$$A = MX^{-1} \cdot Y, \quad (13.9)$$

находим искомые коэффициенты $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ интерполяционного полинома $P_n(x)$.

Итак, интерполирующий полином $P_n(x)$ найден. Теперь с его помощью можно определить приближенное значение заданной функции $y = f(x)$ в любой произвольной точке xx интервала интерполяции $[x_0; x_n]$:

$$\begin{aligned} y_{xx} = f(xx) &\approx P_n(xx) = \\ &= a_0 + a_1xx + a_2xx^2 + a_3xx^3 + \dots + a_nxx^n = \sum_{i=0}^n a_i xx^i. \end{aligned} \quad (13.10)$$

Необходимо подчеркнуть, что в данном случае речь идет о *глобальной интерполяции*, так как интерполирующая функция строится сразу по всем узлам x_i заданного интервала $[a; b]$.

Интерполяцию, осуществляемую по нескольким узлам исходной таблицы, называют *локальной*.

13.3. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ПОЛИНОМОМ ЛАГРАНЖА

Лагранж предложил строить интерполяционный полином $P_n(x)$ (далее полином Лагранжа обозначаем $L(x)$), проходящий через $n + 1$ точку $(x_0; y_0), (x_1; y_1), (x_2; y_2), \dots, (x_n; y_n)$, в виде линейной комбинации полиномов $p_i(x)$ n -й степени:

$$\begin{aligned} L(x) &= \sum_{i=0}^n y_i p_i(x) = \\ &= y_0 p_0(x) + y_1 p_1(x) + y_2 p_2(x) + \dots + y_n p_n(x). \end{aligned} \quad (13.11)$$

При этом требовалось, чтобы все полиномы $p_i(x)$ удовлетворяли следующему условию:

$$p_i(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{при } j \neq i; \\ 1 & \text{при } j = i, \end{cases} \quad (i, j = 0, 1, 2, 3, \dots, n). \quad (13.12)$$

Условие (13.12) означает, что каждый полином $p_i(x)$ должен обращаться в нуль во всех узлах интерполяции, кроме i -го, в котором он должен равняться единице.

Таким образом, полином Лагранжа $L(x)$ в каждом узле x_j ($j = 0, 1, 2, \dots, n$) равен соответствующему значению функции y_j :

$$L(x_j) = y_0 p_0(x_j) + y_1 p_1(x_j) + \dots + y_j p_j(x_j) + \dots + y_n p_n(x_j) = 0 + 0 + \dots + y_j + \dots + 0 = y_j, \quad (13.13)$$

т. е. выполняются условия интерполяции (13.4).

Полиномы $p_i(x)$ называют коэффициентами полинома Лагранжа $L(x)$.

Легко доказать, что условию (13.12) удовлетворяет полином вида

$$p_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}. \quad (13.14)$$

Проверим это для $i = 0$. Полином

$$p_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_n)} \quad (13.15)$$

в узле x_0 ($j = 0 = i$) обращается в единицу, в узлах x_1, x_2, \dots, x_n числитель выражения (13.15) обращается в нуль.

Для $i = 1$ полином

$$p_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_n)} \quad (13.16)$$

в узле x_1 ($j = 1 = i$) обращается в единицу, в узлах $x_0, x_2, x_3, \dots, x_n$ числитель выражения (13.16) обращается в нуль.

Следовательно, *интерполяционный полином Лагранжа* имеет вид

$$L(x) = \sum_{i=0}^n y_i \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)} = \sum_{i=0}^n y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}. \quad (13.17)$$

Для определения приближенного значения функции $y = f(x)$ в произвольной точке x интервала интерполя-

ции $[x_0; x_n]$ применяется интерполяционная формула Лагранжа:

$$y_{xx} = f(xx) \approx L(xx) = \sum_{i=0}^n y_i \frac{(xx - x_0)(xx - x_1) \dots (xx - x_{i-1})(xx - x_{i+1}) \dots (xx - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}. \quad (13.18)$$

Алгоритм вычисления приближенного значения функции по интерполяционной формуле Лагранжа (13.18) приведен на рисунке 13.2.

В рассмотренных выше методах глобальной интерполяции строился один интерполирующий полином на основе всех $n + 1$ точек $(x_0; y_0)$, $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, ..., $(x_n; y_n)$. Однако такой подход не всегда обеспечивает достаточное качество приближения экспериментальных (таблично представленных) данных. Одна из проблем заключается в том, что с повышением степени n интерполяционного полинома усиливается проявление осциллирующего (колебательного) характера интерполирующей кривой.

На рисунке 13.3 приведен пример интерполяции таблично заданной функции полиномом 15-й степени, свидетельствующий о том, что полученная интерполирующая кривая $(L(X, Y, xx))$ вблизи границ рассматриваемого интервала интерполяции не

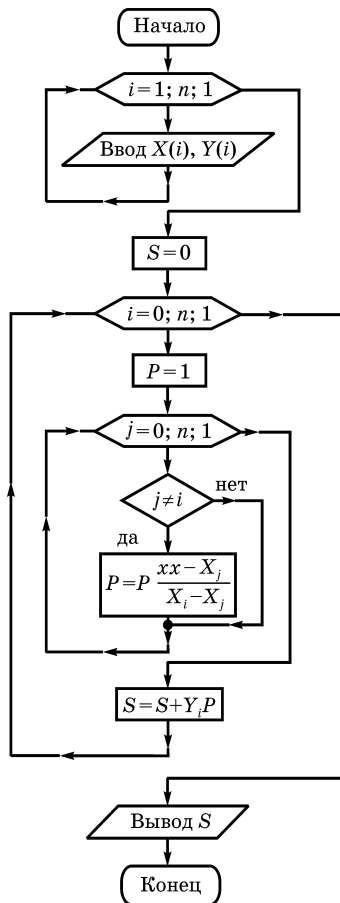


Рис. 13.2
Реализация интерполяционной формулы Лагранжа

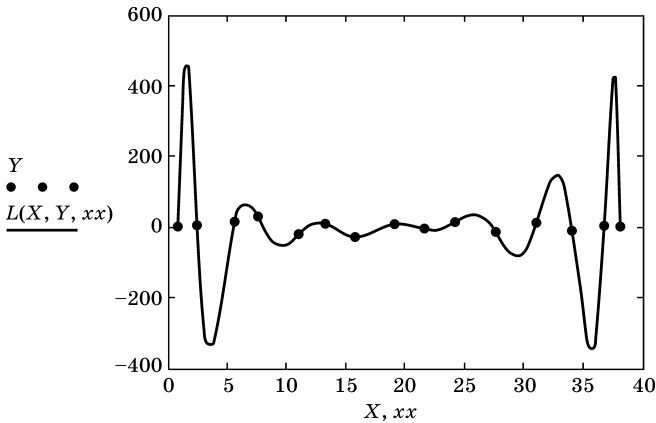


Рис. 13.3

Проявление колебательного характера полиномиальной кривой

может являться адекватным приближением эмпирических данных.

Интерполяционные полиномы в канонической форме, полиномы Лагранжа, Ньютона и другие, построенные на основе большого количества узлов на всем заданном интервале $[x_0; x_n]$, очень чувствительны к погрешностям при оценивании их коэффициентов (следовательно, они чувствительны к ошибкам в исходных эмпирических данных).

13.4. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ СПЛАЙНАМИ

Сплайн — это функция, образуемая из последовательности сопряженных (состыкованных в узлах) полиномов.

На каждом i -м интервале $[x_{i-1}, x_i]$ сплайн-функция представляется i -м полиномом, определенным для данного конкретного интервала. Полиномы соседних интервалов стыкуются так, чтобы функция и соответствующие ее производные были непрерывны. Наиболее популярна интерполяция сплайнами 3-й степени — кубическими сплайнами.

Кубический сплайн — это кусочнополиномиальная функция, которая образуется путем стыковки (сшивания) в узлах полиномов 3-й степени. При этом на каждом ча-

стичном i -м интервале $[x_{i-1}, x_i]$ функция $y = f(x)$ интерполируется кубическим полиномом:

$$S_i(x) = a_{0i} + a_{1i}(x - x_i) + a_{2i}(x - x_i)^2 + a_{3i}(x - x_i)^3. \quad (13.19)$$

Для всего интервала интерполяции $[x_0; x_n]$ необходимо определить n кубических полиномов, отличающихся коэффициентами $a_{0i}, a_{1i}, a_{2i}, a_{3i}$.

Коэффициенты полиномов (13.19) сплайна определяются из следующих условий:

- каждый i -й полином проходит через два соседних узла x_{i-1} и x_i , т. е. значения сплайна равны значениям заданной аппроксимируемой функции $y = f(x)$ в узлах интерполяции (условие интерполирования);
- сплайн-функция $S(x)$ и ее первая производная непрерывны в узлах интерполяции x_i (условие гладкости функции);
- вторая производная сплайн-функции $S(x)$ непрерывна в узлах интерполяции x_i (условие гладкости первой производной функции);
- граничные условия, задающие поведение сплайн-функции $S(x)$ в граничных точках интервала интерполяции x_0 и x_n (определяются постановкой задачи).

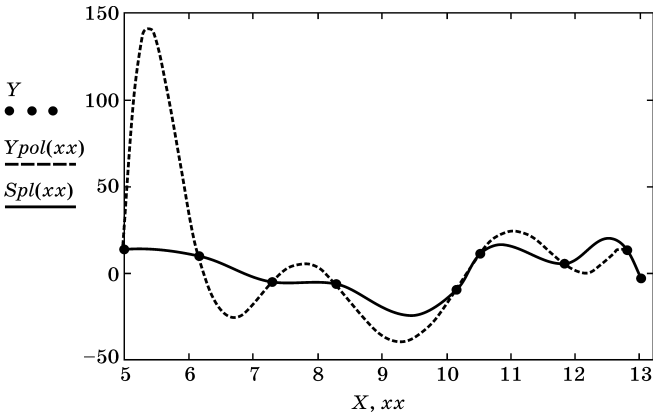


Рис. 13.4
Интерполяционные кривые:

$Y_{pol}(xx)$ — на основе полинома в канонической форме; $Spl(xx)$ — на основе кубических сплайнов.

На основе перечисленных условий составляется система линейных уравнений, решая которую находят искомые коэффициенты a_{0i} , a_{1i} , a_{2i} , a_{3i} кубического полинома.

Достоинством интерполирования кубическими сплайнами является его сходимость. При неограниченном возрастании числа узлов последовательность получаемых сплайн-функций сходится к заданной интерполируемой функции $y = f(x)$.

Использование сплайнов обеспечивает получение наиболее гладкой интерполяционной функции. Это демонстрирует рисунок 13.4, где приведены для сравнения две интерполяционные кривые: $Ypol(xx)$, полученная на основе полинома в канонической форме, и $Spl(xx)$ — на основе кубических сплайнов.

В системе MathCad для реализации кубической сплайн-интерполяции предназначены следующие встроенные функции:

1) $cspline()$ вычисляет вектор вторых производных заданной функции $y = f(x)$, используя приближение сплайн-функции в узлах кубическим полиномом;

2) $lspline()$ и $pspline()$ определяют вектор вторых производных, используя соответственно линейное и квадратичное (параболическое) приближения сплайн-функции в узлах;

3) $interp()$ вычисляет значение функции $y = f(x)$ в произвольной точке xx с помощью интерполяции сплайн-функцией.

Интерполяция применяется для решения таких задач, как численное интегрирование и дифференцирование, приближенное решение уравнений, поиск экстремумов функций и др.

ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

14.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Решение многих научных и инженерных задач на разных этапах приводит к необходимости вычисления значения *определенного интеграла*. К интегрированию функций сводятся задачи вычисления площадей и объемов, пути, пройденного точкой при неравномерном движении, определения центров тяжести и моментов инерции тел, работы, произведенной некоторыми силами, оценивания расхода электроэнергии и потребляемой мощности по графикам электропотребления (рис. 14.1) и др. Математический аппарат численного интегрирования используется в методах

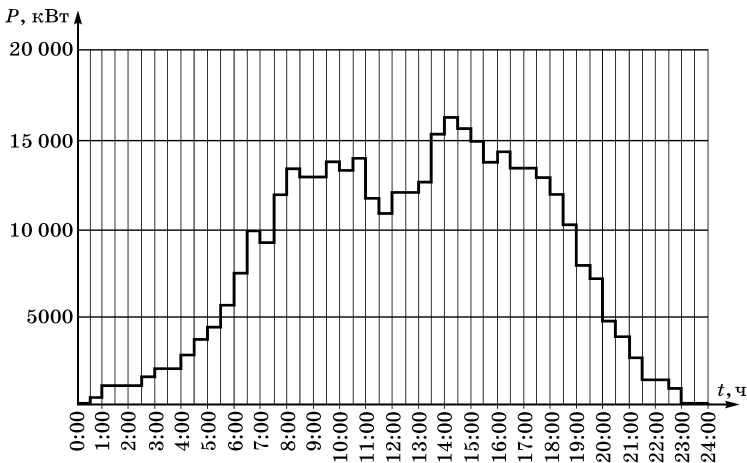


Рис. 14.1
Суточный график активной мощности нагрузки

приближенного решения дифференциальных и интегральных уравнений.

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и известна ее первообразная $F(x)$, то определенный интеграл от этой функции в пределах от a до b может быть вычислен по формуле Ньютона — Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \quad (14.1)$$

где $F'(x) = f(x)$.

Формула (14.1) реализует *точный метод* вычисления определенного интеграла.

Однако на практике только для ограниченного числа подынтегральных функций $f(x)$ удается воспользоваться формулой (14.1) и найти *аналитическое решение*, т. е. выразить первообразную $F(x)$ в виде комбинации алгебраических и трансцендентных функций.

В большинстве задач первообразную $F(x)$ не удается выразить через элементарные функции или она получается чрезмерно сложной и громоздкой. Кроме того, подынтегральная функция $f(x)$ часто задается в виде таблицы ее значений на фиксированном конечном множестве точек x_i , и, следовательно, теряет смысл само понятие первообразной.

При анализе работы систем электроснабжения для определения электроэнергии W , потребляемой нагрузкой за сутки,

$$W = \int_0^T P(t)dt \quad (14.2)$$

используются суточные графики нагрузки (активной мощности нагрузки $P(t)$). Площадь, ограниченная кривой графика нагрузки $P(t)$ и осями координат, определяет количество электроэнергии, потребленной нагрузкой. В этом случае подынтегральная функция $P(t)$ формируется на основе последовательно фиксируемых показаний счетчиков электроэнергии через равные интервалы времени $\Delta t = 30$ мин. Поэтому графически она представляет собой ступенчатую кривую (рис. 14.1). Следовательно, понятие первообразной при вычислении интеграла (14.2) теряет смысл.

Во всех перечисленных случаях применяются *приближенные методы интегрирования*.

Приближенные методы интегрирования делятся на два класса: *приближенные аналитические* и *численные*.

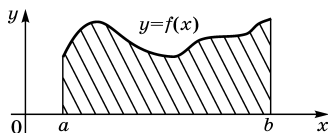


Рис. 14.2
Геометрический смысл
определенного интеграла

Приближенные аналитические методы строятся по следующему принципу. Подынтегральная функция $f(x)$ аппроксимируется более простой аналитической функцией, полученной, например, на основе ее разложения в ряд Тейлора (Маклорена). Каждый член ряда легко интегрируется с помощью формулы (14.1). Применение приближенных аналитических методов ограничивается теми задачами, в которых подынтегральная функция $f(x)$ дифференцируема до порядка n последнего члена ряда Тейлора, оставляемого после его усечения.

В основу классических методов *численного интегрирования* положено геометрическое толкование определенного интеграла как площади криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью абсцисс и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 14.2).

Задача численного интегрирования состоит в нахождении приближенного значения определенного интеграла с помощью некоторой приближенной формулы через известные значения подынтегральной функции $f(x)$ (иногда и через значения ее производных) в заданных точках. Такие формулы называются *квадратурными* (термин «квадратура» происходит от латинского слова quadratura — вычисление площади или квадрирование).

Квадратурная формула позволяет искомым интеграл заменить определенной линейной комбинацией (линейной функцией) значений подынтегральной функции $f(x_k)$ в $n + 1$ точках интервала $[a; b]$:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k) + R(f), \quad (14.3)$$

где A_k — коэффициенты, называемые *весами*; $x_0, x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$ — узлы квадратурной формулы; $R(f)$ — методи-

ческая погрешность квадратурной формулы или ее *остаточный член*.

Принцип построения классических квадратурных формул: заданная подынтегральная функция $f(x)$ на интервале $[a; b]$ заменяется интерполирующей функцией $\varphi(x)$ простого вида (например, интерполяционным многочленом), от которой легко находится интеграл.

Для повышения точности вычисления интеграла исходный интервал $[a; b]$ разделяют на n частей с шагом

$$h = \frac{b - a}{n}. \quad (14.4)$$

На каждом из n полученных элементарных интервалов $[x_k; x_{k+1}]$ строится свой интерполяционный многочлен, и искомый интеграл $\int_a^b f(x) dx$ вычисляется как сумма n частичных интегралов с помощью простейших квадратурных формул следующего вида:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx. \quad (14.5)$$

Выбор квадратурной формулы определяется классом функции $f(x)$, формой ее задания, набором узловых значений $\{x_k\}$ и классом интерполирующей функции $\varphi(x)$.

Элементарные квадратурные формулы проще всего выводятся исходя из геометрической трактовки интеграла. Рассмотрим некоторые из них.

14.2. ОБЗОР КЛАССИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Метод прямоугольников. Интервал интегрирования $[a; b]$ разбивают на n равных частей (подынтервалов) точками x_k ($k = 0, 1, 2, \dots, n$); при этом $x_0 = a$; $x_n = b$.

Длина h каждого из отрезков $[x_k; x_{k+1}]$ равна $\frac{b - a}{n}$.

Значения подынтегральной функции $f(x)$ в узлах x_k обозначают следующим образом:

$$\begin{aligned} y_0 &= f(x_0); & y_1 &= f(x_1); \\ y_2 &= f(x_2); & \dots; & y_n &= f(x_n). \end{aligned} \quad (14.6)$$

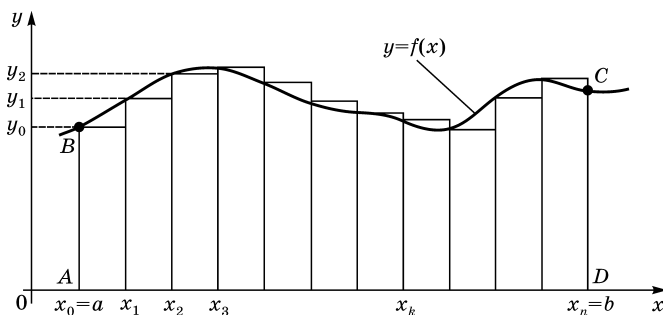


Рис. 14.3

Геометрическая интерпретация формулы левых прямоугольников

Функцию $f(x)$ заменяют ступенчатой функцией, которая в пределах каждого элементарного отрезка $[x_k; x_{k+1}]$ принимает постоянное значение, равное, например, значению подынтегральной функции $f(x)$ на левом конце отрезка, т. е. $f(x) = f(x_k)$. Таким образом, производится кусочно-постоянная интерполяция функции $f(x)$.

Геометрически это означает, что на интервале $[x_k; x_{k+1}]$ частичный интеграл (14.5) приближенно определяется как площадь элементарного прямоугольника (рис. 14.3):

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \approx f(x_k)h \approx y_k h. \quad (14.7)$$

Тогда площадь криволинейной трапеции $ABCD$, определяющая значение искомого интеграла $\int_a^b f(x) dx$, приближенно заменяется суммой площадей n прямоугольников с высотами y_k и основаниями h , что выражается формулой

$$\int_a^b f(x) dx \approx y_0 h + y_1 h + y_2 h + \dots + y_{n-1} h = h \sum_{k=0}^{n-1} y_k, \quad (14.8)$$

которая называется *квadrатурной формулой левых прямоугольников*.

Метод левых прямоугольников дает грубую оценку искомого интеграла. Методическая погрешность данного метода (остаточный член квадратурной формулы 14.8) определяется соотношением

$$R(f) \leq \frac{b-a}{2} h \max_{[a; b]} |f'(x)|, \quad (14.9)$$

т. е. для непрерывно дифференцируемых функций она убывает по линейному закону с уменьшением величины шага h . Остаточный член квадратурной формулы $R(f)$ пропорционален шагу h численного интегрирования в 1-й степени. Следовательно, метод левых прямоугольников имеет *первый порядок точности*.

Более точный результат вычисления определенного интеграла можно получить, если площадь криволинейной трапеции $ABCD$ заменить суммой площадей n прямоугольников с высотами, равными значениям подынтегральной функции $f(x)$ в средних точках элементарных интервалов $[x_k; x_{k+1}]$ (рис. 14.4).

Обозначаем середину отрезка $[x_k; x_{k+1}]$ как $x_k + \frac{h}{2}$, а значение функции $f(x)$ в этой точке как

$$f(x) = f\left(x_k + \frac{h}{2}\right) = y_{k+\frac{1}{2}}. \quad (14.10)$$

Получаем квадратурную *формулу средних прямоугольников*:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx y_{0+\frac{1}{2}} h + y_{1+\frac{1}{2}} h + y_{2+\frac{1}{2}} h + \dots + y_{n-1+\frac{1}{2}} h = \\ &= h \sum_{k=0}^{n-1} y_{k+\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (14.11)$$

Методическая погрешность метода средних прямоугольников для тех случаев, когда подынтегральная функция $f(x)$ имеет непрерывную вторую производную, определяется соотношением

$$R(f) \leq \frac{b-a}{24} h^2 \max_{[a; b]} |f''(x)|. \quad (14.12)$$

Таким образом, погрешность убывает прямо пропорционально величине h^2 , следовательно, метод средних прямоугольников имеет *второй порядок точности*.

Метод трапеций. Подынтегральную функцию $f(x)$ заменяют кусочно-линейной функцией. Геометрически это

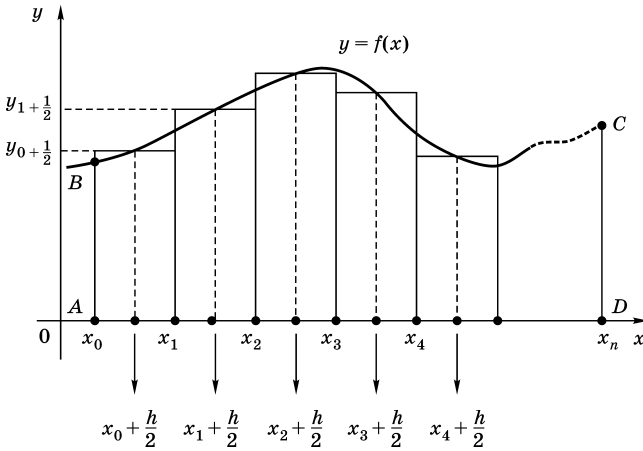


Рис. 14.4

Геометрическая интерпретация формулы средних прямоугольников

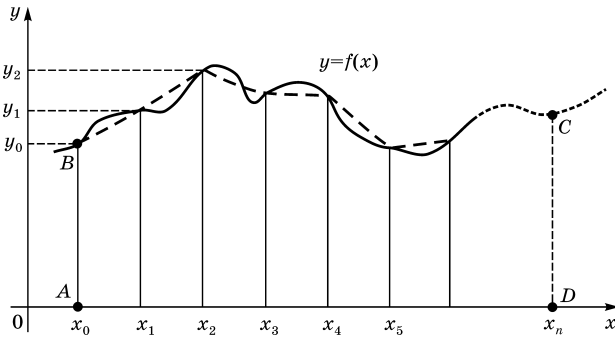


Рис. 14.5

Геометрическая интерпретация формулы трапеций

означает, что в пределах каждого элементарного отрезка $[x_k; x_{k+1}]$ функция $f(x)$ аппроксимируется прямой линией, проходящей через две соседние точки с координатами $[x_k; f(x_k)]$ и $[x_{k+1}; f(x_{k+1})]$ (рис. 14.5).

Это дает возможность приближенно заменить площадь криволинейной трапеции $ABCD$, определяющую значение

искомого интеграла $\int_a^b f(x)dx$, суммой площадей n элементарных трапеций.

Учитывая, что площадь такой трапеции определяется как произведение полусуммы оснований на высоту:

$$S = \frac{y_k + y_{k+1}}{2} h, \quad (14.13)$$

получаем *квадратурную формулу трапеций*:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx h \left[\frac{y_0 + y_1}{2} + \frac{y_1 + y_2}{2} + \dots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} \right] \approx \\ &\approx \frac{h}{2} (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + y_n). \end{aligned} \quad (14.14)$$

Квадратурная формула (14.14) может быть выведена и другим способом — с применением математического аппарата интерполирования. В этом случае в формуле (14.5) подынтегральная функция $f(x)$ на частичном отрезке $[x_k; x_{k+1}]$ заменяется интерполяционным многочленом Лагранжа 1-й степени, построенным на двух узлах x_k и x_{k+1} :

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} L_1(x) dx + R(f); \quad (14.15)$$

$$L_1(x) = \frac{1}{h} [f(x_{k+1})(x - x_k) - f(x_k)(x - x_{k+1})]. \quad (14.16)$$

Методическую погрешность метода трапеций можно оценить с помощью соотношения

$$R(f) \leq \frac{b-a}{12} h^2 \max_{[a; b]} |f''(x)|. \quad (14.17)$$

Метод трапеций имеет *второй порядок точности*, так как его погрешность убывает прямо пропорционально величине h^2 .

Метод Симпсона. Интервал интегрирования $[a; b]$ разбивают на четное количество равных отрезков. На каждом двух смежных элементарных отрезках $[x_k; x_k + 2h = x_{k+2}]$ подынтегральную функцию $f(x)$ заменяют интерполяционным полиномом 2-й степени $a_i x^2 + b_i x + c_i$ либо интерполяционным многочленом Лагранжа 2-й степени, постро-

енным на узлах x_k, x_{k+1}, x_{k+2} . Речь идет о кусочно-квадратичной интерполяции подынтегральной функции.

Геометрически это означает, что в пределах частично-двоенного интервала $[x_k; x_k + 2h = x_{k+2}]$ подынтегральная функция $f(x)$ заменяется параболой, проходящей через три соседние точки с координатами $[x_k; f(x_k)]$, $[x_{k+1}; f(x_{k+1})]$ и $[x_{k+2}; f(x_{k+2})]$ (рис. 14.6).

Таким образом, площадь исходной криволинейной трапеции приближенно заменяется суммой n площадей элементарных криволинейных трапеций.

Квадратурная формула Симпсона имеет вид

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n). \quad (14.18)$$

Методическая погрешность метода Симпсона для тех случаев, когда подынтегральная функция $f(x)$ имеет непрерывную четвертую производную, определяется соотношением

$$R(f) \leq \frac{b-a}{180} h^4 \max_{[a; b]} |f^{(4)}(x)|. \quad (14.19)$$

Метод Симпсона имеет *четвертый порядок точности*, так как остаточный член квадратурной формулы $R(f)$ пропорционален шагу h интегрирования в квадрате.

Следует подчеркнуть, что сложно дать однозначную оценку рассмотренным методам с точки зрения их точности. Точность численного интегрирования в каждой конкретной задаче зависит от характера изменения (свойств) подынтегральной функции $f(x)$ и поведения ее производных на интервале интегрирования $[a; b]$. Так, например, метод Симпсона обеспечит значительное преимущество над другими методами по точности результата только при условии, что четвертая производная

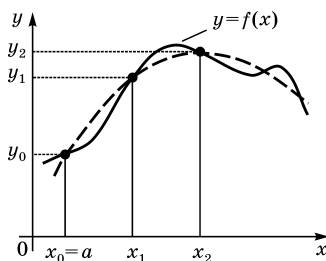


Рис. 14.6
Геометрическая интерпретация формулы Симпсона

подынтегральной функции $f(x)$ не будет слишком велика. В противном случае методы трапеций и средних прямоугольников дадут существенно более точный результат.

Квадратурные формулы прямоугольников (14.8), (14.11), трапеций (14.14) и Симпсона (14.17) являются частными случаями *формул Ньютона — Котеса*, в основе которых лежит замена подынтегральной функции интерполяционным многочленом Лагранжа. В квадратурных формулах Лагерра и Эрмита, сформированных на основе одноименных ортогональных многочленов, в качестве узлов принимают корни соответствующих многочленов. *Методы Гаусса — Кристоффеля* предполагают применение полиномов Лежандра и неравноотстоящих узлов, выбираемых из расчета минимума погрешности интегрирования. Различные подходы к формированию квадратурных формул реализованы в *методах Чебышева, Маркова, Ромберга* и др.

14.3. МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО (МЕТОД СТАТИСТИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЙ)

Методы численного интегрирования, рассмотренные в предыдущем разделе, относятся к категории детерминированных.

Суть *метода Монте-Карло (метода статистических испытаний)* заключается в следующем. Для решения вычислительной задачи подбирается соответствующая *вероятностная модель*, в которую входит искомая неизвестная величина. Проводятся статистические испытания данной вероятностной модели с последующей

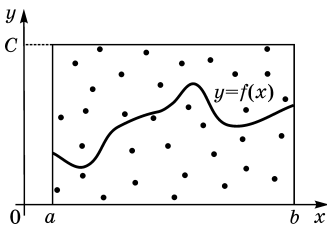


Рис. 14.7
Метод Монте-Карло

статистической обработкой результатов ее многократных «наблюдений». В итоге получают оценку искомой величины. Иными словами, моделируются входные случайные последовательности с заданными законами распределения. Каждый элемент входной последовательности преобразуется

по алгоритму, соответствующему поставленной задаче. Полученная в итоге преобразований выходная случайная последовательность подвергается статистической обработке для определения той вероятностной характеристики, которая принимается за оценку искомой величины.

Чаще всего такой вероятностной характеристикой является математическое ожидание.

Пусть требуется вычислить определенный интеграл

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Если известно, что заданная подынтегральная функция $f(x)$ на интервале интегрирования $[a; b]$ не превышает некоторого значения C , то кривая $y = f(x)$ располагается внутри прямоугольника с основанием $(b - a)$ и высотой C (рис. 14.7).

Моделируют процесс случайного попадания точек в обозначенный прямоугольник. Для этого генерируют N пар случайных чисел x_i и y_i , равномерно распределенных на интервалах $[a; b]$ и $[0; C]$ соответственно. Каждая пара x_i, y_i представляет собой координаты текущей точки. Таким образом, получают N точек, равномерно рассеянных внутри прямоугольника.

Тогда приближенное значение интеграла (оценка интеграла) может быть вычислено по формуле

$$\int_a^b f(x) dx \approx S_{\text{пп}} \frac{n_f}{N}, \quad (14.20)$$

где n_f — количество точек, попавших под кривую $y = f(x)$; N — общее количество точек (число испытаний, объем выборки); $S_{\text{пп}}$ — площадь прямоугольника.

Выражение $S_{\text{пп}} \frac{n_f}{N}$ тем точнее определяет значение интеграла $\int_a^b f(x) dx$, чем больше объем выборки N (общее количество точек), т. е.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_{\text{пп}} \frac{n_f}{N} = \int_a^b f(x) dx. \quad (14.21)$$

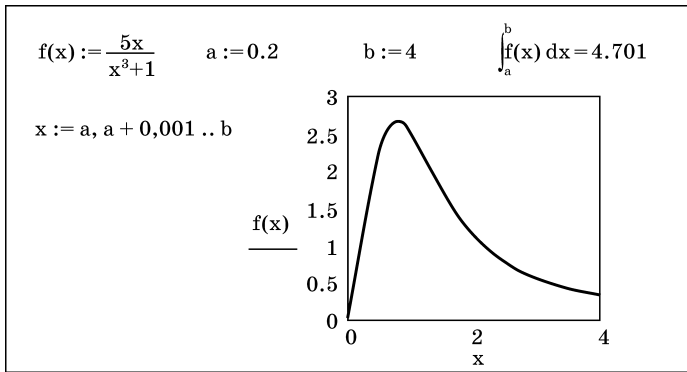


Рис. 14.8
Пример 42: шаг 1

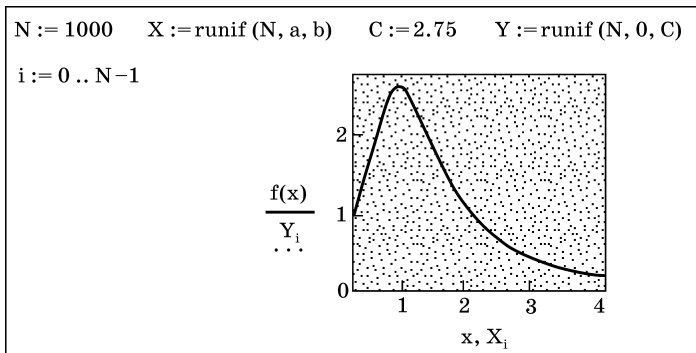


Рис. 14.9
Пример 42: шаг 2

```

nf := | nf ← 0
      | for i ∈ 0 .. N - 1
      |   nf ← nf + 1 if Y_i ≤ f(X_i)
      |   nf
nf = 467

```

Рис. 14.10
Пример 42: шаг 3

```

S := (b - a) · (C - 0)    S = 10.45
I := S · nf / N    I = 4.88

```

Рис. 14.11
Пример 42: шаг 4

Пример 42. Вычислить определенный интеграл

$$\int_{0,2}^4 \frac{5x}{x^3 + 1} dx \quad (14.22)$$

методом Монте-Карло.

Решим поставленную задачу в системе MathCad.

1. Задаем исходные данные и строим график подынтегральной функции $f(x)$ на заданном интервале интегрирования (рис. 14.8).

2. С помощью встроенной функции MathCad $runif(N, m1, m2)$, генерирующей последовательность из N независимых случайных чисел, имеющих равномерное распределение на интервале $[m1; m2]$, сформируем векторы X и Y . Элементами векторов X и Y являются соответственно координаты X_i и Y_i точек, попадающих внутрь прямоугольника с основанием $(b - a)$ и высотой C .

Таким образом, генерируемые значения координат X_i и Y_i должны удовлетворять условиям $(a \leq X_i \leq b)$ и $(0 \leq Y_i \leq C)$.

Зададим количество независимых случайных чисел $N = 1000$.

Значение C определим по графику подынтегральной функции $f(x)$ (рис. 14.8): $C = 2,75$.

Введем счетчик генерируемых случайных чисел i . Отобразим полученные (смоделированные) точки со случайными координатами на декартовом графике (рис. 14.9).

3. Вычислим количество точек nf , попавших под кривую $y = f(x)$ (рис. 14.10).

4. Найдем площадь прямоугольника с основанием $(b - a)$ и высотой C . Вычислим значение I заданного определенного интеграла (14.22) (рис. 14.11).

Наиболее эффективен метод Монте-Карло при оценивании многомерных (кратных) интегралов. В отличие от других методов численного интегрирования, трудоемкость метода Монте-Карло (объем вычислений) незначительно зависит от размерности решаемой задачи.

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

РЕШЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ КЛАССА ЛИНЕЙНЫХ ОДУ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ С ПОМОЩЬЮ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА (ОПЕРАТОРНЫМ МЕТОДОМ)

Применение математического аппарата преобразования Лапласа позволяет отказаться от непосредственного решения дифференциальных уравнений относительно оригиналов и свести задачу к решению эквивалентных алгебраических уравнений относительно изображений.

Пример А. Найти решение ОДУ

$$y''(t) + 9y(t) = \sin t \quad (\text{П.1.1})$$

при начальных условиях:

$$t_0 = 0; \quad y(0) = 0; \quad y'(0) = 0.$$

Применим к заданному уравнению (П.1.1) преобразование Лапласа:

$$L\{y''(t) + 9y(t)\} = L\{\sin t\}. \quad (\text{П.1.2})$$

Используя свойства линейности и дифференцирования оригинала, учитывая, что согласно таблице 7.1

$$L\{\sin t\} = \frac{1}{s^2 + 1}, \quad (\text{П.1.3})$$

получим

$$s^2 Y(s) + 9Y(s) = \frac{1}{s^2 + 1}. \quad (\text{П.1.4})$$

После приведения подобных членов приходим к алгебраическому операторному уравнению относительно изображения $Y(s)$:

$$Y(s)(s^2 + 9) = \frac{1}{s^2 + 1}. \quad (\text{П.1.5})$$

Выражаем из уравнения (П.1.5) изображение $Y(s)$ искомого решения:

$$Y(s) = \frac{1}{(s^2 + 1)(s^2 + 9)}. \quad (\text{П.1.6})$$

Полученное выражение для $Y(s)$ разложим на простые дроби. Для этого в среде MathCad можно воспользоваться командой *Variable* → *Convert to Partial Fraction* в меню *Symbolics*:

$$Y(s) = \frac{1}{8(s^2 + 1)} - \frac{1}{8(s^2 + 9)}. \quad (\text{П.1.7})$$

Искомое решение — оригинал от функции $Y(s)$ найдем, используя таблицу соответствия 7.1:

$$y(t) = \frac{1}{8} \sin t - \frac{1}{8} \left(\frac{1}{3} \sin 3t \right) = \frac{1}{8} \sin t - \frac{1}{24} \sin 3t. \quad (\text{П.1.8})$$

Пример Б. Найти решение ОДУ

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 5 \quad (\text{П.1.9})$$

при начальных условиях:

$$t_0 = 0; \quad y(0) = 0; \quad y'(0) = 2.$$

Применим к заданному уравнению (П.1.9) преобразование Лапласа:

$$L\{y''(t) - 3y'(t) + 2y(t)\} = L\{5\}. \quad (\text{П.1.10})$$

Используя свойства линейности и дифференцирования оригинала, а также формулы для изображений производных от оригинала при *ненулевых начальных условиях*:

$$\begin{aligned} L\{y'(t)\} &= sY(s) - y(0); \\ L\{y''(t)\} &= s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) \end{aligned} \quad (\text{П.1.11})$$

и учитывая, что $L\{1(t)\} = \frac{1}{s}$ (табл. 7.1), получим

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 3[sY(s) - y(0)] + 2Y(s) = \frac{5}{s} \quad (\text{П.1.12})$$

или

$$s^2Y(s) - 2 - 3sY(s) + 2Y(s) = \frac{5}{s}. \quad (\text{П.1.13})$$

После приведения подобных членов приходим к алгебраическому операторному уравнению относительно изображения $Y(s)$:

$$(s^2 - 3s + 2)Y(s) = \frac{5}{s} + 2. \quad (\text{П.1.14})$$

Выражаем из уравнения (П.1.14) изображение $Y(s)$ искомого решения:

$$Y(s) = \frac{2 + \frac{5}{s}}{s^2 - 3s + 2} = \frac{2s + 5}{s(s^2 - 3s + 2)}. \quad (\text{П.1.15})$$

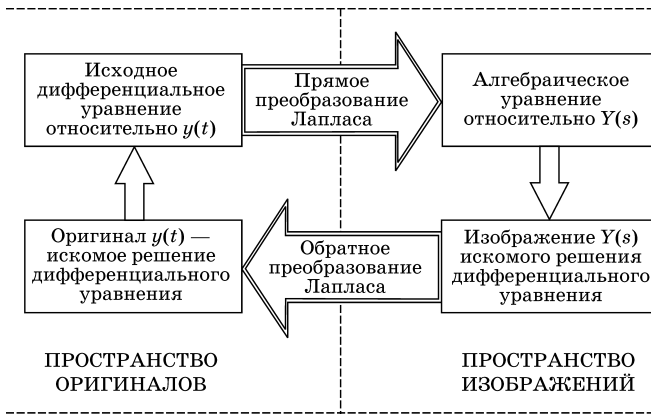


Рис. П.1.1

Обобщенная схема решения дифференциального уравнения с помощью математического аппарата преобразования Лапласа

Полученное выражение для $Y(s)$ разложим на простые дроби:

$$Y(s) = \frac{2s + 5}{s(s^2 - 3s + 2)} = \frac{5}{2s} - \frac{7}{s-1} + \frac{9}{2(s-2)}. \quad (\text{П.1.16})$$

Искомое решение — оригинал от функции $Y(s)$ — найдем, используя таблицу соответствия 7.1:

$$y(t) = \frac{5}{2} - 7e^t + \frac{9}{2}e^{2t}. \quad (\text{П.1.17})$$

На рисунке П.1.1 представлена обобщенная схема решения дифференциального уравнения с помощью математического аппарата преобразования Лапласа.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

РЕАЛИЗАЦИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА В СИСТЕМЕ MATHCAD

В системе MathCad для реализации прямого преобразования Лапласа (7.1) можно использовать палитру *Symbolic* математической панели → команду *laplace*. В качестве примера найдем изображение для функции (П.1.8) из приложения 1.

$$\left(\frac{1}{8} \cdot \sin(t) - \frac{1}{24} \cdot \sin(3 \cdot t) \right) \text{laplace, } t \rightarrow \frac{1}{8 \cdot (s^2 + 1)} - \frac{1}{8 \cdot (s^2 + 9)}$$

Другой вариант выполнения прямого преобразования Лапласа. Пометить курсором переменную t , по которой выполняется интегрирование (преобразование). Затем в меню *Symbolics* → категория *Transform* → команда *Laplace*.

$$\frac{1}{8} \cdot \sin(t) - \frac{1}{24} \cdot \sin(3 \cdot t)$$

$$\frac{1}{8 \cdot (s^2 + 1)} - \frac{1}{8 \cdot (s^2 + 9)}$$

Обратное преобразование Лапласа можно реализовать с помощью палитры *Symbolic* математической панели → команды *invlaplace*. В качестве примера найдем оригинал для функции (П.1.15) из приложения 1.

$$\frac{2 \cdot s + 5}{s \cdot (s^2 - 3 \cdot s + 2)} \text{ invlaplace, } s \rightarrow \frac{5}{2} - 7 \cdot \exp(t) + \frac{9}{2} \cdot \exp(2 \cdot t)$$

Другой вариант выполнения обратного преобразования Лапласа. Пометить курсором переменную s , по которой выполняется преобразование. Затем в меню *Symbolics* → категория *Transform* → команда *Inverse Laplace*.

$$\frac{2 \cdot s + 5}{s \cdot (s^2 - 3 \cdot s + 2)}$$

$$\frac{5}{2} - 7 \cdot \exp(t) + \frac{9}{2} \cdot \exp(2 \cdot t)$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Самарский, А. А.* Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры / А. А. Самарский, А. П. Михайлов. — М. : Физматлит, 2002. — 320 с.
2. *Тарасик, В. П.* Математическое моделирование технических систем : учебник для вузов. — Минск : ДизайнПРО, 2004. — 640 с.
3. *Моисеев, Н. Н.* Математика ставит эксперимент. — М. : Наука, 1979. — 225 с.
4. *Зарубин, В. С.* Математическое моделирование в технике : учебник для вузов. — М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2003. — 496 с.
5. *Тихонов, А. Н.* Рассказы о прикладной математике / А. Н. Тихонов, Д. П. Костомаров. — М. : Наука, 1979. — 205 с.
6. *Алексеев, А. А.* Идентификация и диагностика систем / А. А. Алексеев, Ю. А. Кораблев, М. Ю. Шестопапов. — М. : Академия, 2009. — 352 с.
7. *Курант, Р.* Математика в современной жизни // Успехи физических наук. — 1965. — Т. 85. — Вып. 2. — С. 335–349.
8. *Герасименко, А. А.* Передача и распределение электрической энергии : учеб. пособие / А. А. Герасименко, В. Т. Федин. — Ростов-на-Дону : Феникс; Красноярск : Издательские проекты, 2006. — 720 с.
9. *Идельчик, В. И.* Электрические системы и сети : учебник для вузов. — М. : ИД «Альянс», 2009. — 592 с.
10. *Азаров, В. С.* Передача и распределение электроэнергии в примерах и решениях : учеб. пособие. — М. : Изд-во МГОУ, 2005. — 215 с.
11. *Аюев, Б. И.* Вычислительные модели потокораспределения в электрических системах : монография / Б. И. Аюев, В. В. Давыдов, П. М. Ерохин [и др.] ; под ред. П. И. Бартоломея. — М. : Флинта : Наука, 2008. — 256 с.
12. *Васюра, Ю. Ф.* Математические методы расчета установившихся режимов работы электроэнергетических систем с примерами и иллюстрациями : учеб. пособие / Ю. Ф. Васюра,

- А. В. Вильнер. — Киров: Изд-во «Кировский облкомстат», 2009. — 146 с.
13. *Астахов, Ю. Н.* Электроэнергетические системы в примерах и иллюстрациях : учеб. пособие / Ю. Н. Астахов, В. А. Веников, В. В. Ежков [и др.] ; под ред. В. А. Веникова. — М. : Энергоатомиздат, 1983. — 504 с.
 14. *Егоренков, Д. Л.* Основы математического моделирования. Построение и анализ моделей с примерами на языке MATLAB / Д. Л. Егоренков, А. Л. Фрадков, В. Ю. Харламов. — СПб. : Изд-во Балт. гос. техн. ун-та, 1994. — 191 с.
 15. *Турчак, Л. И.* Основы численных методов / Л. И. Турчак, П. В. Плотников. — М. : Физматлит, 2005. — 304 с.
 16. *Шуп, Т.* Решение инженерных задач на ЭВМ : практическое руководство / пер. с англ. — М. : Мир, 1982. — 238 с.
 17. *Вержбицкий, В. М.* Численные методы (математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения). — М. : Высш. шк., 2001. — 382 с.
 18. Компьютеры, модели, вычислительный эксперимент. Введение в информатику с позиций математического моделирования / под ред. А. А. Самарского. — М. : Наука, 1988. — 176 с.
 19. *Власова, Е. А.* Приближенные методы математической физики : учебник для вузов / Е. А. Власова, В. С. Зарубин, Г. Н. Кувыркин. — М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2001. — 700 с.
 20. *Демирчан, К. С.* Теоретические основы электротехники : учебник для вузов / К. С. Демирчан, Л. Р. Нейман, Н. В. Коровкин. — СПб. : Питер, 2009. — Т. 2. — 432 с.
 21. *Бенькович, Е. С.* Практическое моделирование динамических систем / Е. С. Бенькович, Ю. Б. Колесов, Ю. Б. Сениченко. — СПб. : БХВ-Петербург, 2002. — 464 с.
 22. *Вержбицкий, В. М.* Основы численных методов : учебник для вузов. — М. : Высш. шк., 2002. — 840 с.
 23. *Анищенко, В. С.* Динамические системы // Соросовский образовательный журнал. — 1997. — № 11. — С. 77–84.
 24. *Веников, В. А.* Электрические системы. Математические задачи электроэнергетики : учебник для вузов / В. А. Веников, Э. Н. Зуев, И. В. Литкенс [и др.] ; под ред. В. А. Веникова. — М. : Высш. шк., 1981. — 288 с.
 25. *Крючков, И. П.* Переходные процессы в электроэнергетических системах : учебник для вузов / И. П. Крючков, В. А. Старшинов, Ю. П. Гусев [и др.] ; под ред. И. П. Крючкова. — М. : ИД МЭИ, 2008. — 416 с.
 26. *Пивняк, Г. Г.* Переходные процессы в системах электроснабжения : учебник для вузов / Г. Г. Пивняк, В. Н. Винославский, А. Я. Рыбалко [и др.] ; под ред. Г. Г. Пивняка. — М. : Энергоатомиздат, 2003. — 548 с.
 27. *Васильков, Ю. В.* Компьютерные технологии вычислений в математическом моделировании / Ю. В. Васильков, Н. Н. Василькова. — М. : Финансы и статистика, 2002. — 255 с.

28. *Иванов, В. А.* Математические основы теории автоматического регулирования / В. А. Иванов, В. С. Медведев [и др.]; под ред. Б. К. Чемоданова. — М. : Высш. шк., 1977. — Т. 1. — 366 с.
29. Техническая кибернетика. Теория автоматического регулирования / под ред. В. В. Солодовникова. — М. : Машиностроение, 1967. — Кн. 1. — 770 с.
30. *Каханер, Д.* Численные методы и программное обеспечение / Д. Каханер, К. Моулера, С. Нэш; пер. с англ. // — М. : Мир, 2001. — 575 с.
31. *Березин, И. С.* Методы вычислений / И. С. Березин, Н. П. Жидков. — М. : Физматгиз, 1962. — Т. 2. — 639 с.
32. *Пантелеев, А. В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения в примерах и задачах : учеб. пособие / А. В. Пантелеев, А. С. Якимова, А. В. Босов. — М. : Изд-во МАИ, 2000. — 380 с.
33. *Поль, Р. В.* Механика, акустика и учение о теплоте / пер. с нем. — М. : Физматгиз, 1957. — 484 с.
34. *Корячко, В. П.* Теоретические основы САПР : учебник для вузов / В. П. Корячко, В. М. Курейчик, И. П. Норенков. — М. : Энергоатомиздат, 1987. — 400 с.
35. *Заде, Л.* Теория линейных систем. Метод пространства состояний / Л. Заде, Ч. Дезоер; пер. с англ. // — М. : Наука, 1970. — 704 с.
36. *Киреев, В. И.* Численные методы в примерах и задачах : учеб. пособие / В. И. Киреев, А. В. Пантелеев. — М. : Высш. шк., 2008. — 480 с.
37. *Влах, И.* Машинные методы анализа и проектирования электронных схем / И. Влах, К. Синггал; пер. с англ. // — М. : Радио и связь, 1988. — 560 с.
38. *Демидович, Б. П.* Основы вычислительной математики / Б. П. Демидович, И. А. Марон. — М. : Наука, 1966. — 664 с.
39. Справочник по теории автоматического управления / под ред. А. А. Красовского. — М. : Наука, 1987. — 712 с.
40. *Бахвалов, Н. С.* Численные методы : учеб. пособие / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. — 937 с.
41. *Плис, А. И.* Mathcad. Математический практикум для инженеров и экономистов : учеб. пособие / А. И. Плис, Н. А. Сливина. — М. : Финансы и статистика, 2003. — 656 с.
42. *Ракитин, В. И.* Практическое руководство по методам вычислений с приложением программ для персональных компьютеров : учеб. пособие / В. И. Ракитин, В. Е. Первушин. — М. : Высш. шк., 1998. — 383 с.
43. *Гмурман, В. Е.* Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие / В. Е. Гмурман. — М. : Высшее образование, 2006. — 479 с.
44. *Мирошник, И. В.* Теория автоматического управления. Линейные системы. — СПб. : Питер, 2005. — 336 с.
45. *Мирошник, И. В.* Теория автоматического управления. Нелинейные и оптимальные системы. — СПб. : Питер, 2005. — 339 с.

46. *Новгородцев, А. Б.* Теоретические основы электротехники. 30 лекций по теории электрических цепей : учеб. пособие. — СПб. : Питер, 2006. — 576 с.
47. *Тихонов, А. В.* Дифференциальные уравнения : учебник для вузов / А. В. Тихонов, А. Б. Васильева, А. Г. Свешников. — М. : Физматлит, 2005. — 256 с.
48. *Левин, Б. Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. — М. : Радио и связь, 1989. — 656 с.
49. *Волков, И. К.* Случайные процессы : учебник для вузов / И. К. Волков, С. М. Зуев, Г. М. Цветкова. — М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2003. — 448 с.
50. *Мэтьюз, Д.* Численные методы. Использование MATLAB / Д. Мэтьюз, К. Финк; пер. с англ. // — М. : ИД «Вильямс», 2001. — 720 с.
51. *Зализняк, В. Е.* Основы научных вычислений. Введение в численные методы для физиков : учеб. пособие. — М. : Едиториал УРСС, 2002. — 296 с.
52. *Купер, Дж.* Вероятностные методы анализа сигналов и систем / Дж. Купер, К. Макгиллем; пер. с англ. // — М. : Мир, 1989. — 376 с.
53. *Асанов, А. З.* Математические модели динамических систем : учеб. пособие. — Казань : Изд-во Казан. гос. ун-та, 2007. — 205 с.
54. *Анцыферов, С. С.* Общая теория измерений : учеб. пособие / С. С. Анцыферов, Б. И. Голубь. — М. : Горячая линия-Телеком, 2007. — 176 с.
55. *Козлов, В. Н.* Управление энергетическими системами. Теория автоматического управления / В. Н. Козлов, В. Е. Куприянов, В. Н. Шашихин. — СПб. : Изд-во Политехн. ун-та, 2008. — 255 с.
56. *Пирумов, У. Г.* Численные методы : учеб. пособие для вузов. — М. : Дрофа, 2004. — 224 с.
57. *Егоров, А. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями. — М. : Физматлит, 2005. — 384 с.
58. *Половко, А. М.* Интерполяция. Методы и компьютерные технологии их реализации / А. М. Половко, П. Н. Бутусов. — СПб. : БХВ-Петербург, 2004. — 320 с.
59. Введение в математическое моделирование : учеб. пособие / под ред. П. В. Трусова. — М. : Логос, 2005. — 440 с.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Аварийный режим *15*
Автономная динамическая система *62*
Адамса — Башфорта метод *74*
Адамса — Мултона метод *74*
Аддитивный шум *95*
Адекватность *17, 21*
Алгоритм
— метода половинного деления (дихотомии, бисекции) *47*
— метода Ньютона *50*
— метода итерации *54*
— интерполяции Лагранжа *153*
Амплитуда колебаний *82*
Амплитудно-фазовая частотная характеристика *134*
Амплитудно-частотная функция *109*
Амплитудно-частотная характеристика *109*
Аналитическая модель *138*
Аналитическая форма *21, 43*
Аналитическая функция *41, 144, 161*
Аналитический метод *21, 45, 88, 161*
Аналитическое решение *43, 88, 160*
Апериодический *80, 111, 113*
Апериодическое звено *111, 113*
Аппроксимация *26, 41, 73, 139, 145, 149*
ВАХ *41*
Аэродинамические испытания *4*
Базисная функция *73*
Базисный узел *31*
Баланс токов *31*
Балансирующий по току узел *31*
Безынерционное звено *110, 115*
Броуновское движение *98*
Вектор
— возмущений *116*
— состояния *116, 125, 129*
Векторно-матричная форма записи *26, 37, 118, 123, 152*
Вероятностная модель *168*
Вероятностные
— соотношения *90*
— характеристики *92, 169*
Взаимная комплексная проводимость *32*
Внешние
— воздействия *61*
— факторы *90*
Внутренние факторы *90*
Вольт-амперная характеристика *41, 67, 139*
Газовой динамики законы *135*
Газокинетические процессы *7*
Гармонические колебания *9*
Гармонический сигнал *133*
Гаусса — Кристоффеля метод *167*
Гаусса
— метод *34*
— формула *33*
Гауссовский случайный процесс *96, 97*
Генератор постоянного тока *65, 112, 115*
Геометрическая модель *8*
Гира метод *74*
Годограф *134*
Границы применимости модели *19, 20*
Граничные условия *69, 86, 87, 157*

- График нагрузки (активной мощности) 160
Гука закон 23
Двигатель постоянного тока 114, 115
Двухпроводная линия 84
Диссипативная динамическая система 61
Дельта-функция Дирака 131
Детерминированная
— модель 89, 92, 168
— система 89, 129
Детерминированный подход 89
Диагональные миноры 36
Динамическая
— модель 61, 100, 109, 115, 118, 129–131
— система 60, 78–81, 106, 110, 116–124, 130
Динамический объект 61, 109
Динамическое звено 110
Дискретные
— модели 129
— системы 129
Дисперсия 93
Дифференцирующее звено 112
Длина волны 84
Дробовой шум 90
Единичное ступенчатое воздействие 111–113, 130
Задача Коши 69–71, 73, 76
Закон
— Всемирного тяготения 19
— Гука 23
— Ома 23, 32
— распределения 85, 87, 96, 168
— теплопроводности Фурье 23
Законы
— газовой динамики 135
— гидродинамики 135
— Кирхгофа 29, 31, 41, 64, 66, 68, 125, 127
— Ньютона 12, 19, 23
— сохранения 23, 83, 135
— теории подобия 8
— фундаментальные 23, 83
— феноменологические 23
— электродинамики 23, 135
Замыкание однофазное на землю 127
Зейделя метод 33, 40
Идеализация объекта 61, 91
Идентификация 24
Изображающая точка 78–81
Изображение функции 101, 104–106, 175
Импульсная переходная функция 131, 132
Инерционные свойства 10, 61, 111
Интеграл
— свертки 102, 132, 137
— Дюамеля — Карсона 131
Интегральные кривые 69–71
Интегрирование численное 137, 158–162, 164, 167, 168, 171
Интерполяционная функция 149, 158
Интерполяционный полином 152, 153, 155, 156, 166
Интерполяция 149–158, 163
Итерации метод 33, 54, 55, 57–59
Итерационный метод 33, 38, 44, 47, 137
Итерационный процесс 39, 40, 47, 50, 52, 55, 56
Канонический вид полинома 152, 156, 158
Карсона — Хевисайда преобразование 103
Качественное исследование систем 78, 82
Квадратурная формула 137, 161–165, 167
Колесательный процесс 80–82
Конечных
— разностей метод 88
— элементов метод 73, 88
Контактная сеть 15, 84, 90
Контактное моделирование 4, 15
Концептуальная модель 18
Коммутационное перенапряжение 146
Комплексная плоскость 109, 134
Компьютерное моделирование 12, 109
Консервативная система 61
Корень уравнения 43–45, 47, 50, 54–59, 108, 109, 113, 114
Короткое замыкание 32
Корреляционная функция 94, 95
Кoeffициент
— затухания 114
— парной корреляции 143, 145
— температуропроводности 86
— теплопроводности 86
Критерий
— близости 150
— минимума суммы квадратов отклонений 142, 144, 150

Лагранжа

- полином *153, 154, 156*
- формула *152, 155*
- Лапласа преобразование *88, 100–103, 172–175*

Лежандра полиномы *167***Линейная регрессия** *142, 145***Линеаризации методы** *25, 88***Линии электропередачи** *90, 99***Линия**

- регрессии *141, 142, 145, 147, 148*
- рельсовая *84*

Локализация корня *44, 45***Математическое ожидание случайного процесса** *93–95***Матрица невырожденная** *27, 38***Матрица особенная** *27***Матричная экспонента** *120***Метод**

- аналитический отделения корней *45, 46*
- бисекции *47, 50*
- Гаусса *33, 34, 37*
- дихотомии *47, 50*
- Зейделя *33, 40*
- итерации *38, 40, 54, 55, 57–59*
- Кларксона — Крускала *88*
- контурных токов *28*
- левых прямоугольников *163, 164*
- LU -разложения *33, 36, 37*
- малого параметра *72*
- матричный *33, 38*
- Монте-Карло (статистических испытаний) *168, 169, 171*
- наименьших квадратов *142*
- Ньютона *50–52, 73*
- операторный *103, 172*
- определителей *33*
- половинного деления *47, 50*
- последовательных приближений *38, 54, 73*
- простой итерации *33*
- разделения переменных *88*
- разложения в ряд Тейлора *73*
- Рунге — Кутта *74–77, 79*
- Симпсона *166, 167*
- средних прямоугольников *164, 167*
- точный *88, 160*
- трапеций *164, 166, 167*
- узловых потенциалов *31*
- фазовой плоскости *78, 82*
- функций Грина *88*
- характеристик *88*

Методы

- Адамса *74*
 - аналитические *21*
 - асимптотические *72, 88*
 - возмущений *72, 88*
 - Гаусса — Кристофеля *167*
 - интегральных преобразований *88*
 - интегрирования *161*
 - итерационные *33, 38, 47, 137*
 - линеаризации *88*
 - конечных разностей *88*
 - конечных элементов *73, 88*
 - приближенные *33, 73, 106, 161*
 - поиска симметрии *88*
 - прямые *33*
 - прогноза-коррекции *74*
 - решения СЛАУ *129*
 - точные *88, 160*
 - численного интегрирования *161, 162, 168, 171*
 - численные *21, 43, 44, 73, 78, 88, 127, 137*
 - — многошаговые *74*
 - — одношаговые *74*
- Миноры** *36*
- Моделирование** *6, 13, 16, 18, 21, 84*
- Модель** *7*
- аналитическая *138*
 - аналоговая *8, 10*
 - вероятностная *168*
 - вычислительная *12*
 - геометрическая *8*
 - детерминированная *89, 92*
 - динамическая *61, 62, 100, 109, 118, 119, 129, 130*
 - дискретная *129*
 - для систем с распределенными параметрами *83*
 - имитационная *12*
 - компьютерная *12*
 - концептуальная *18*
 - линейная *61, 62, 64, 65, 144*
 - математическая *11, 16, 18, 21, 25, 41, 64, 83, 89, 90, 95, 100, 118, 120, 123, 133, 172*
 - mnemonicическая *11*
 - нелинейная *61, 66, 68*
 - непрерывная *98, 129*
 - нестационарная *65, 66*
 - регрессионная *141, 142*
 - статическая *25, 42, 110*
 - стационарная *64, 68, 103*
 - стохастическая *90, 92, 93, 95, 96*
 - теоретическая *23, 138*

- тепловая 115
- типовая 21, 96
- физическая 8
- формальная 23, 138, 139
- эмпирическая 23, 138, 139, 144
- Монте-Карло метод 168, 171
- Мощность
 - реактивная 15
 - активная 160
- Мультипликативные шумы 95
- Нагрузочные токи 31
- Начальное (нулевое) приближение 38, 50, 54
- Начальные условия 69, 76, 78, 86, 101, 108, 118, 122, 124, 172, 173
- Невырожденная матрица 27, 38
- Норма матрицы 39
- Нормальная форма записи ОДУ 77
- Нормальный (гауссовский) закон распределения 96, 97, 142
- Нуль передаточной функции 108
- Область адекватности 17, 19
- Обратное преобразование Лапласа 104, 106, 175
- Обратный ход 34, 36
- Объект
 - динамический 61, 100, 109, 134
 - линейный 63, 104
 - стационарный 63
- Объем выборки 169
- Объемная плотность теплового источника 86
- Ограничитель перенапряжения 146
- Обыкновенное дифференциальное уравнение 26, 60, 62, 64, 103, 118
- Общее решение 69, 71
- Однородное дифференциальное уравнение 63
- Ома закон 23, 32
- Оператор 89, 107, 120
 - Лапласа 87, 101
- Операторная форма передаточной функции 107, 108
- Операторное уравнение 172, 173
- Операторный метод 103, 172
- Операционное исчисление 100
- Определенный интеграл 135, 159, 161, 164, 168
- Определитель 27, 37, 152
- Оптимизация 3, 15, 16
- Оригинал 6, 7, 9, 16, 64, 84, 101, 125, 172
 - функции 104, 173, 174
- Остаточный член 162, 167
- Отделение корней 44
- Отказ аппаратуры 98
- Отклик 24, 63, 132, 138
- Отражения коэффициент 136
- Оценки параметров 141, 143
- Ошибки 28, 141, 156
 - округления 50, 78
- Параболического типа уравнение 85
- Параметры
 - аппроксимирующей функции 140
 - входных и выходных сигналов 21
 - модели 17, 23
 - объекта 18, 26, 30, 62
 - регрессионной модели 141–143
 - системы 16, 64, 84
 - уравнения 43
 - участка электроснабжения 30
 - цепи 34
- Пассивный
 - четырехполюсник 112
 - эксперимент 24
- Пассивные элементы 30
- Первообразная 160
- Передаточная функция 100, 107, 108, 123
 - в форме изображений Лапласа 104, 108
 - в операторной форме 107, 108
 - частотная 133, 134
- Передаточный коэффициент 65, 111
- Период колебаний 81
- Переменные состояния 116, 117, 124, 125
- Перенапряжения
 - грозовые 146
 - импульсные 146
 - коммутационные 146
- Перенос нейтронов 83
- Переходная
 - матрица состояний 119
 - функция 130, 131
 - — импульсная 131
 - характеристика 109, 130–132
- Переходный процесс 60, 79, 109, 113, 130
- Пикара метод 73
- Пирсона коэффициент корреляции 143, 145
- Плазма 4, 87
- Плоскость
 - комплексная 109, 134
 - фазовая 78, 81

- Плотность
 — вероятности 93
 — полусферического излучения
 — интегральная 136
 — материала 86
 — объемная теплового источника 86
 — спектральная 94
 Площадь криволинейной трапеции 161, 164, 166
 Погрешность 17, 141, 156, 164
 — методическая 163, 164
 — квадратурной формулы 162
 — метода левых прямоугольников 163
 — метода средних прямоугольников 164
 — метода трапеций 166
 — метода Симпсона 167
 — локальная метода Рунге — Кутта 75
 — суммарная метода Рунге — Кутта 75
 Подобия
 — теорема 102
 — теория 8
 Подход
 — детерминированный 5, 90
 — стохастический 5, 90
 Полезный сигнал 96
 Полином 73, 108, 146, 151, 154, 156
 — характеристический 109, 123
 — интерполяционный 50, 152, 153, 155, 156, 166
 — — в канонической форме 156
 — — Лагранжа 153, 154
 — — Ньютона 156
 — — Лежандра 167
 Полюс передаточной функции 108, 109
 Помехи 90
 Поперечные параметры 85
 Портрет фазовый 78, 79
 Порядок точности численного метода 164
 Последовательность марковская 98
 Последовательных приближений метод 38, 73
 Постоянная времени 65, 78
 Потенциальная энергия 9
 Потенциальность 17
 Потери 61, 84
 Поток
 — жидкости (газа) 8, 84
 — магнитный 65
 — падающего излучения 136
 Потокосцепление 65
 Потребление мощности 99
 Преобразование
 — Лапласа 88, 100, 101, 103, 172, 174, 175
 — Карсона (Карсона — Хевисайда) 103
 — Фурье 88, 94, 103
 Приближающая функция 139, 140
 Приближение функции 139
 — теория 139
 Приближенно-аналитические методы 72, 137
 Приближенное значение корня 43, 44
 Приближенные методы интегрирования 161
 Принцип суперпозиции (наложения) 63
 Проводимость
 — взаимная комплексная 32
 — собственная 32
 — магнитная 65
 Прогноза-коррекции методы 74
 Продольные параметры 85
 Пространственная координата 83, 84
 Пространство состояний 109, 116, 117, 120, 123, 125, 129
 Простых итераций метод 39, 40
 Прямые (точные) методы 33
 Разделения переменных метод 88
 Разложение
 — в ряд Тейлора 73, 161
 — на простые дроби 173, 174
 Размерность
 — модели 21
 — СЛАУ 33, 118
 — вектора состояния 118, 119
 Разностное уравнение 95, 100, 129
 Разностные стохастические модели 98
 Распределение
 — температуры 85–87
 — мощности случайного процесса 94
 — потоков падающего излучения 136
 Распространение
 — возмущений электромагнитных полей 87
 — волн в жидкостях 83
 — сигнала по рельсовым цепям 84
 — тепла в среде 83, 85

- Расход электроэнергии 159
 Расходимость
 — метода Ньютона 53
 — итерационного процесса 56
 Режим
 — аварийный 15
 — критический 13
 — нагружения конструкций 14
 — нормальной эксплуатации 24
 — рабочий 8, 14, 17, 30, 60
 — малых сигналов 17
 — больших сигналов 17
 — статический 17, 25, 111
 — стационарный 26
 — тепловой 115
 — установившийся 9, 25, 26, 30, 32, 42, 130
 — экстремальный 16
 Рекуррентная формула 52, 75
 Рельсовая
 — линия 84
 — цепь 84
 Робастность модели 17
 Ромберга метод 167
 Рунге — Кутта метод 74–76
 Ряд
 — степенной 43
 — Тейлора 73–75, 161
 — экспоненциальный 120
 Свертка 102
 — теорема 102
 — интеграл 102, 132, 137
 Свойство отсутствия
 последствия 98
 Сглаживание 150
 Сеть
 — контактная 15, 84, 90
 — электрическая 30, 32, 127, 128
 Семейство интегральных кривых 69–71
 Сердечник ферромагнитный 65
 Сеточная функция 73
 Сила
 — аэродинамическая 8
 — сопротивления воздуха 20
 — трения 11
 — упругости 23
 — электродвижущая 10
 Сильвестра теорема 120
 Симпсона
 — квадратурная формула 166
 — метод 166, 167
 Синтез термоядерный 8
 Система
 — автоматического управления 15, 98, 100
 — автономная 62
 — вычислительная 14, 98
 — детерминированная 89, 119
 — динамическая 60, 61, 78, 98, 106, 110, 114, 116, 119, 120, 129, 132
 — дискретная 129
 — диссипативная 61
 — дифференциальных уравнений в частных производных 85
 — компьютерного моделирования 109
 — консервативная 61
 — линейная 36, 62, 95, 97, 118, 123, 133
 — линейных алгебраических уравнений 25, 32, 129, 152
 — — неопределенная 28
 — — плохо обусловленная 28
 — массового обслуживания 98
 — механическая 9, 10, 114
 — навигации 14, 92
 — нелинейная 25, 67, 95, 118
 — непрерывная 61, 119, 123, 129
 — нормальная 143, 145
 — обыкновенных дифференциальных уравнений 118
 — радиолокации 92
 с распределенными параметрами 83, 84
 связи 92
 — следящая 98, 99
 — стационарная 95, 100, 108, 118, 120, 123, 133
 — уравнений состояния 123, 125, 128
 — электрическая 9, 10, 103
 — электроснабжения 3, 15, 60, 110, 115, 160
 — — тягового 15, 84
 Случайная
 — величина 92
 — марковская последовательность 98
 — функция 92
 Случайные
 — начальные условия 95
 — ошибки 141
 — параметры 95
 — последовательности 98, 168
 — процессы 21, 92, 93, 95, 96, 97
 — — аддитивные 95
 — — мультипликативные 95
 — — стационарные 95
 — — — в узком смысле 95
 — — — в широком смысле 95

- — центрированные 94
- — эргодические 95
- события 98, 99
- факторы 12, 90, 96, 98, 141
- — внешние 90, 98, 141
- — внутренние 90, 98, 141
- Спектр энергетический случайного процесса 94
- Спектральная плотность 94
- Сплайн 156, 158
 - функция 73, 152, 156
- Среднее
 - значение 93
 - квадратичное отклонение 94, 97
- Статистическая обработка 168
- Статистические характеристики 98
- Статистических испытаний метод 168, 169
- Стохастическая модель 90, 93, 95, 96
- Стохастический подход 5, 90
- Стохастическое дифференциальное уравнение 95
 - разностное 95
- Структурная схема 110
- Суперпозиции принцип 63
- Суточные графики нагрузки 160
- Тахогенератор 112
- Тактовая частота 144
- Телеграфные уравнения 85
- Температуропроводности коэффициент 86
- Теорема
 - запаздывания 102
 - Ляпунова 97
 - о вычетах 106
 - о свертке 102
 - подобия 102
 - смещения 103
- Теоремы
 - разложения 106
 - о вычетах 106
- Теория
 - автоматического управления 60, 139
 - надежности 98
 - оптимальной фильтрации 135
 - подобия 8
 - пластичности 60
 - приближения функций 139
 - сильного и слабого взаимодействия элементарных
 - — частиц 23
 - — систем 98
 - флаттера 13
- Теснота линейной связи 143, 144
- Типовая модель 21, 96
- Типовые звенья 109, 110, 114, 131
 - аperiодические 111
 - — второго порядка 113–115
 - безынерционные 110, 115
 - идеальные дифференцирующие 112
 - идеальные интегрирующие 112
 - инерционные 111, 115
 - колебательные 114
 - пропорциональные 110, 115
 - усилительные 110
- Токамак 8
- Токоприемник 4, 15
- Точное решение
 - ОДУ 72
 - ДУЧП 88
- Точность
 - численного интегрирования 167
 - заданная 40, 43, 50
 - приближения 140
 - численного метода 74, 164
- Трансцендентная функция 42, 160
- Трансцендентное уравнение 42, 47
- Турбулентные течения 98
- Удельная теплоемкость 86
- Узловых потенциалов метод 31
- Управляющие воздействия 24, 138
- Упругие деформации 8, 23, 136
- Уравнение
 - алгебраическое 42, 43, 47, 104, 110, 172
 - — линейное 25, 26, 32, 129, 152
 - — нелинейное 42
 - баланса токов 31
 - волновое 12, 87
 - гиперболического типа 87
 - дифференциальное в частных производных 26
 - интегральное 26, 100, 135, 160
 - касательной 51
 - обыкновенное дифференциальное 26, 60, 62, 64, 103, 118
 - — в операторной форме 108
 - — линейное 62, 63, 65, 100, 103
 - — — стационарное 106
 - — нелинейное 68, 77, 79
 - — однородное 63
 - операторное 172, 173
 - разностное 95, 129
 - регрессии 140, 143

- состояния *118, 120, 121, 123, 125, 128, 129*
- стохастическое дифференциальное *95*
- — разностное *95*
- теплопроводности *85, 87*
- трансцендентное *42, 43, 47*
- Фредгольма *136*
- характеристическое *109, 113, 114*
- Уравнения
 - Максвелла *12*
 - математической физики *83*
 - параболического типа *85*
 - телеграфные *85*
- Уровень детализации объекта *21*
- Усилитель постоянного тока *111*
- Условие
 - близости последовательных приближений *52*
 - завершения итерационного процесса в методе половинного деления *47*
 - минимума функции многих переменных *142*
 - монотонности функции *46*
 - наилучшего согласования линии регрессии с опытными данными *142*
 - невырожденности матрицы *38*
 - совпадения аппроксимирующей и аппроксимируемой функций в узлах *150*
- Условия
 - граничные *69, 86, 87, 157*
 - дополнительные *69*
 - интерполяции *152, 154*
 - испытания объекта *16*
 - краевые *69, 86*
 - начальные *69, 70, 76, 78, 86, 101, 106, 108, 118, 122, 126, 130, 172, 173*
 - равновесия *26*
 - сходимости *1, 52, 54, 57, 58*
 - функционирования объекта (системы) *18*
- Условная плотность вероятности *98*
- Условные контурные токи *28*
- Установившийся режим *9, 25, 26, 30, 42, 130*
- Устойчивость
 - динамических систем *60*
 - конструкций *26*
 - к погрешностям *17*
- Уточнение корней *44, 47, 50*
- Участок электроснабжения *30*
- Фазовая
 - плоскость *78, 81, 82*
 - траектория *78, 79, 82, 117*
 - частотная функция *133*
- Фазовое пространство *79*
- Фазовые переходы *7*
- Фазовый
 - портрет *78, 79*
 - сдвиг *133*
- Фазочастотная характеристика *109, 139*
- Флаттер *13*
- Фликкер-шум *90*
- Формальные модели *23, 138, 139*
- Формула
 - Бесселя *152*
 - Гаусса *152*
 - Лагерра *167*
 - Лагранжа *152, 155*
 - Ньютона *152*
 - Ньютона — Котеса *167*
 - Ньютона — Лейбница *160*
 - рекуррентная *52, 75*
 - Римана — Меллина *105*
 - Стирлинга *152*
 - эмпирическая *140*
 - Эрмита *152, 167*
- Формулы квадратурные *137, 161, 162, 165, 167*
- Фурье
 - закон теплопроводности *23*
 - интегральное преобразование *88*
- Функции
 - алгебраические *42, 160*
 - аналитические *41, 144, 161*
 - Грина *88*
 - распределения *96*
 - трансцендентные *42, 160*
- Функция
 - амплитудная частотная *133*
 - аппроксимирующая *139, 140, 142, 146, 150*
 - весовая *109, 131, 132*
 - дробно-рациональная *106, 108*
 - импульсная переходная *131, 132*
 - комплексная частотная *133*
 - интерполирующая *150, 151, 162*
 - корреляционная *94, 95*
 - передаточная *100, 104, 106, 108–110, 113, 115, 123, 133*
 - — в форме изображений

- Лапласа *104, 108*
— — в операторной форме *107, 108*
— — матричная *107*
— переходная *130, 131*
— подынтегральная *160, 161, 163, 164, 168*
— решетчатая *129*
— сеточная *73*
— фазовая частотная *133*
— Хевисайда *130*
— частотная передаточная *133, 134*
— эквивалентная *54, 57*
- Характеристика**
— амплитудно-фазовая
— частотная *134*
— амплитудно-частотная *109, 139*
— вольт-амперная *41, 67, 139*
— переходная *109, 130–132, 139*
— разгонная *131*
— фазочастотная *109, 139*
- Характеристики**
— вероятностные *93, 95, 168*
— частотные *133, 134*
- Характеристический полином**
109, 123
- Характеристическое уравнение**
109, 113
- Хевисайда функция** *130*
- Центральная предельная теорема**
Ляпунова *97*
- Центрированный случайный процесс** *94*
- Частные производные** *26, 61, 83, 135, 142*
- Частное решение ОДУ** *69, 71*
- Частота**
— вращения *65, 115*
— колебаний *9, 114*
— тактовая *144*
- Частотная область** *109, 133, 134*
- Частотная передаточная функция** *133*
- Частотные свойства** *94*
- Частотные характеристики** *133, 134*
- Частотный анализ** *103*
- Четырехполюсник** *112*
- Чебышева метод** *167*
- Черный ящик** *24, 138*
- Численное интегрирование** *137, 158–164, 167, 168, 171*
- Численное решение** *44, 73, 77*
- Численные методы** *21, 43, 73, 78, 88, 118, 127, 137, 161*
- Чувствительность к ошибкам** *28*
- Шаг интегрирования** *73, 75, 77, 167*
- Шум**
— аддитивный *95*
— входной *95, 134*
— дробовой *90*
— квантования *90*
— мультипликативный *95*
— тепловой *90*
- Эквивалентная схема** *26, 33, 127*
- Эквивалентный источник** *127*
- Экстраполяция** *150*
- Электрическая**
— дуга *7*
— сеть *30, 32, 127, 128*
— цепь *29, 42, 60, 64, 66, 84, 100, 124*
- Электрические машины** *67, 84, 90, 115*
- Электрический заряд** *23*
- Электродвижущие силы** *10*
- Электромагнитное поле** *14, 87*
- Электромагнитные колебания** *62, 72, 83*
- Электропотребление** *159*
- Электроснабжение**
— железных дорог *3, 110, 115*
— тяговое *15, 84*
- Электроэнергия** *15, 84, 159, 160*
- Элементарные**
— частицы *23*
— типовые звенья *109, 110, 114, 131*
- Эмпирические модели** *23, 138, 139, 144*
- Энергия**
— кинетическая *9*
— потенциальная *9*
- Энергетический спектр** *94*
- Энергосистема** *99*
- Эргодический случайный процесс** *95*
- Эрмита**
— формула *152, 167*
— интерполяционный многочлен *152, 167*
- Явное решение** *43, 72, 88, 137*
- Ядро интегрального уравнения** *135*

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	2
Глава 1. Моделирование как научный прием	6
1.1. Основные понятия	6
1.2. Классификация моделей	7
1.3. Математическое моделирование	12
1.3.1. Цели математического моделирования	15
1.3.2. Требования к математической модели	16
1.3.3. Этапы математического моделирования	17
1.3.4. Классификация математических моделей	21
Глава 2. Математические модели в форме систем линейных алгебраических уравнений	25
2.1. Области применения	25
2.2. Базовые понятия	26
2.3. Примеры формирования моделей	28
2.4. Методы решения	33
2.4.1. Прямые методы	33
2.4.1.1. Метод Гаусса	33
2.4.1.2. Метод LU-разложения	36
2.4.1.3. Матричный метод	38
2.4.2. Итерационные методы	38
2.4.2.1. Метод простых итераций (метод последовательных приближений)	38
2.4.2.2. Метод Зейделя	40
Глава 3. Математические модели в форме нелинейных алгебраических и трансцендентных уравнений	41
3.1. Пример формирования модели	41
3.2. Базовые понятия	42
3.3. Методы решения	43
3.3.1. Особенности численных методов решения	44
3.3.1.1. Этапы численного решения нелинейного уравнения	44
3.3.1.2. Отделение корней	44
3.3.1.3. Уточнение корней	47

Глава 4. Математические модели в форме обыкновенных дифференциальных уравнений	60
4.1. Области применения	60
4.2. Базовые понятия	61
4.3. Примеры формирования моделей	64
4.4. Решение математических моделей в классе обыкновенных дифференциальных уравнений	69
4.5. Методы решения математических моделей в классе ОДУ	71
4.5.1. Численные методы решения задачи Коши	73
4.5.2. Метод Рунге — Кутты	75
4.6. Качественное исследование динамических систем методом фазовой плоскости	78
Глава 5. Математические модели для систем с распределенными параметрами	83
5.1. Области применения	83
5.2. Примеры моделирования	84
Глава 6. Детерминированные и стохастические математические модели	89
6.1. Базовые понятия. Два подхода к моделированию физических систем	89
6.2. Основные вероятностные характеристики случайного процесса	92
6.3. Особенности моделирования случайного процесса $\omega(t)$	96
Глава 7. Математические модели в форме передаточных функций	100
7.1. Базовые понятия	100
7.2. Передаточная функция в форме изображений Лапласа	103
7.3. Передаточная функция в операторной форме	107
7.4. Элементарные типовые звенья динамических систем	110
Глава 8. Математические модели в пространстве состояний	116
8.1. Основные понятия	116
8.2. Линейные непрерывные детерминированные динамические системы	119
8.3. Формирование математической модели в пространстве состояний по дифференциальному уравнению n -го порядка	120
8.4. Формирование математической модели в пространстве состояний по передаточной функции системы	123

8.5. Примеры формирования модели в пространстве состояний для исследования процессов в электрической цепи	124
8.6. Линейные дискретные детерминированные системы в пространстве состояний	129
Глава 9. Другие виды математических моделей физических систем во временной области	130
9.1. Переходная функция	130
9.2. Импульсная переходная функция	131
Глава 10. Математические модели в частотной области	133
Глава 11. Математические модели в форме интегральных уравнений	135
Глава 12. Построение эмпирических моделей на основе аппроксимации данных	138
12.1. Базовые понятия	138
12.2. Метод наименьших квадратов	142
12.3. Примеры формирования эмпирических моделей	144
Глава 13. Решение задачи интерполяции при построении эмпирических моделей	149
13.1. Постановка задачи	149
13.2. Интерполяция полиномом в каноническом виде	152
13.3. Интерполяция полиномом Лагранжа	153
13.4. Интерполяция сплайнами	156
Глава 14. Численное интегрирование	159
14.1. Постановка задачи	159
14.2. Обзор классических методов численного интегрирования	162
14.3. Метод Монте-Карло (метод статистических испытаний)	168
Приложения	172
Библиографический список	176
Предметный указатель	180

Нина Викторовна ГОЛУБЕВА

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ И ПРОЦЕССОВ

Учебное пособие

Издание второе, стереотипное

ЛР № 065466 от 21.10.97
Гигиенический сертификат 78.01.10.953.П.1028
от 14.04.2016 г., выдан ЦГСЭН в СПб

Издательство «ЛАНЬ»
lan@lanbook.ru; www.lanbook.com
196105, Санкт-Петербург, пр. Ю. Гагарина, д. 1, лит. А.
Тел./факс: (812) 336-25-09, 412-92-72.
Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

ГДЕ КУПИТЬ

ДЛЯ ОРГАНИЗАЦИЙ:

*Для того, чтобы заказать необходимые Вам книги,
достаточно обратиться в любую из торговых компаний
Издательского Дома «ЛАНЬ»:*

по России и зарубежью
«ЛАНЬ-ТРЕЙД». 192029, Санкт-Петербург, ул. Крупской, 13
тел.: (812) 412-85-78, 412-14-45, 412-85-82; тел./факс: (812) 412-54-93
e-mail: trade@lanbook.ru; ICQ: 446-869-967
www.lanpbl.spb.ru/price.htm

в Москве и в Московской области
«ЛАНЬ-ПРЕСС». 109263, Москва, 7-я ул. Текстильщиков, д. 6/19
тел.: (499) 178-65-85; e-mail: lanpress@lanbook.ru

в Краснодаре и в Краснодарском крае
«ЛАНЬ-ЮГ». 350901, Краснодар, ул. Жлобы, д. 1/1
тел.: (861) 274-10-35; e-mail: lankrd98@mail.ru

ДЛЯ РОЗНИЧНЫХ ПОКУПАТЕЛЕЙ:

интернет-магазин
Издательство «Лань»: <http://www.lanbook.com>
магазин электронных книг
Global F5: <http://globalf5.com/>

Подписано в печать 07.06.16.
Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Формат 84×108^{1/32}.
Печать офсетная. Усл. п. л. 10,08. Тираж 100 экз.

Заказ № 140-16.

Отпечатано в полном соответствии
с качеством предоставленного оригинал-макета
в ПАО «Т8 Издательские Технологии».
109316, г. Москва, Волгоградский пр., д. 42, к. 5.