Лекция 3.

§5. Векторное произведение двух векторов, его свойства и вычисление.

Определение. Два ненулевых вектора называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Нулевой вектор коллинеарен любому вектору. Векторы,не являющиеся коллинеарными, называются неколлинеарными.

Определение. Три ненулевых вектора называются компланарными, если они лежат в одной плоскости или параллельны какой-то одной плоскости. Если хоть один из трёх векторов -нулевой, то эти три вектора-компланарны. Три вектора, не являющиеся компланарными, называются некомпланарными.

Определение. Пусть $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ -три некомпланарных вектора, образующие упорядоченную тройку. Говорят, что векторы $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ образуют правую тройку векторов, если из конца третьего вектора $\boldsymbol{c}$ кратчайший поворот от первого вектора $\boldsymbol{a}$ ко второму вектору $\boldsymbol{b}$ виден совершающимся против часовой стрелки.

В противном случае говорят, что векторы $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ образуют левую тройку (рис.1).

Определение. Векторным произведением векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется третий вектор $\boldsymbol{c}$ со следующими свойствами:

1. Если $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ или $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ или $\boldsymbol{a}$ коллинеарен $\boldsymbol{b}$, то $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$.
2. В других случаях $|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| sin(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}})$, вектор $\boldsymbol{c}$ перпендикулярен плоскости векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$, причём векторы $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ образуют правую тройку.
   Вектор $\boldsymbol{c}$ обозначается $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$.

Пример.
$$\begin{array}{lll} \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{0} & \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} & \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{k} = -\boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{i} = -\boldsymbol{k} & \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{0} & \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{j} = -\boldsymbol{i} & \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{0} \end{array}$$

Свойства векторного произведения.

1) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$_коллинеарны $\Leftrightarrow \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ -см. определение.
2) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$ (проверьте самостоятельно)
3) $(\lambda \boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$ (проверьте самостоятельно)
4) $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$

Доказательство. Пусть $|\boldsymbol{c}| = 1$ (если $\boldsymbol{c} = \mathbf{0}$, то равенство очевидно). Рассмотрим плоскость P , перпендикулярную $\boldsymbol{c}$; через "$\boldsymbol{a}'$" обозначим вектор, полученный из "$\boldsymbol{a}$" проектированием на P (см. рис.2)

Тогда имеют место равенства:

$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})' = \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{b}'; \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}' \times \boldsymbol{c};\ (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})' \times \boldsymbol{c}$

(проверьте самостоятельно, исходя из рис.1 и определения).

Векторы $\boldsymbol{a}' \times \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}' \times \boldsymbol{c}, (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})' \times \boldsymbol{c}$ получаются из $\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}', (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})'$ поворотом на 90° по определению векторного произведения.

Следовательно, весь треугольник поворачивается на 90° и в результате

$$\begin{matrix} (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})' \times \boldsymbol{c} = & \boldsymbol{a}' \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b}' \times \boldsymbol{c} \\ \| & \| \\ (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} & \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} \end{matrix}$$

. Общий случай получается с помощью свойства 3).

Вычисление. Пусть $\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}$. Тогда

$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = a_x b_y \boldsymbol{k} - a_x b_z \boldsymbol{j} - a_y b_x \boldsymbol{k} + a_y b_z \boldsymbol{i} + a_z b_x \boldsymbol{j} - a_z b_y \boldsymbol{i} =$

$(a_y b_z - a_z b_y)\boldsymbol{i} - (a_x b_z - a_z b_x)\boldsymbol{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\boldsymbol{k} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \boldsymbol{i} -$

$\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \boldsymbol{k}$. Допуская векторы в качестве элементов определителя, получаем

$$a \times b = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Определение. Пусть $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ -упорядоченная тройка векторов. Двойным векторным произведением трёх векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ называется выражение $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$

Свойства двойного векторного произведения

1. $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$

«БАЦ-ЦАБ»

Доказательство.

Рассмотрим два случая.

Во-первых, пусть $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ коллинеарны, то есть $\boldsymbol{b} = \lambda \boldsymbol{c}$.Тогда $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} = \mathbf{0}$ и вектор в левой части равенства-нулевой. Убедимся, что справа-тоже нулевой вектор. Действительно,

$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) = \lambda \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \lambda \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) = \mathbf{0}$

Во-вторых, пусть $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ не коллинеарны. Тогда существует единственная плоскость (π) , в которой лежат оба этих вектора. Введём в пространстве прямоугольную систему координат. Ось Ox пустим по по вектору $\boldsymbol{b}$, ось Oy возьмём в плоскости (π) , перпендикулярно Ox .

Ось Oz возьмём в пространстве так, чтобы три вектора $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ образовывали правую тройку. Тогда $\boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i}$; $\boldsymbol{c} = c_x\boldsymbol{i} + c_y\boldsymbol{j}$; $\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$. Теперь вычисляем левую часть по формулам для векторного произведения

$$\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ b_x & 0 & 0 \\ c_x & c_y & 0 \end{vmatrix} = b_x c_y \boldsymbol{k};\ \ \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ 0 & 0 & b_x c_y \end{vmatrix} =$$
$$a_y b_x c_y \boldsymbol{i} - a_x b_x c_y \boldsymbol{j}\ .$$

Вычисляем правую часть. По формуле для скалярного произведения $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} = a_x c_x + a_y c_y$. Формула «БАЦ-ЦАБ» доказана.

2. Имеет место равенство
   $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{c} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$ (тождество Якоби) для всех $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$.

Доказательство. Применим формулу «БАЦ-ЦАБ» к каждому слагаемому в левой части.

$$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) - \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{0}$$

§6. Смешанное произведение трёх векторов.

Определение. Смешанным произведением трёх векторов называется число $\boldsymbol{abc} = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$

Свойства смешанного произведения.

1) $\boldsymbol{abc} = 0 \Leftrightarrow$ три вектора $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ -компланарны.
2) Смешанное произведение трёх некомпланарных векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ равно по абсолютной величине объёму параллелепипеда, построенного на этих векторах. Действительно, $\boldsymbol{abc} = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| \cdot \boldsymbol{c} \cdot cos\gamma = |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| \cdot \text{пр}_{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}\boldsymbol{c} = S_{\text{основания}} \cdot \text{пр}_{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}\boldsymbol{c} = \pm S_{\text{основания}} \cdot H = \pm V$, поскольку $\text{пр}_{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}\boldsymbol{c} = \pm H$, где - высота параллелепипеда (см. рис.3). При этом $\boldsymbol{abc} = V$, если тройка $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ -правая и $\boldsymbol{abc} = -V$, если тройка векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ -левая.
3) $\boldsymbol{abc} = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$

Вычисление смешанного произведения векторов.

Пусть $\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}, \boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}, \boldsymbol{c} = c_x\boldsymbol{i} + c_y\boldsymbol{j} + c_z\boldsymbol{k}$. Тогда по формуле вычисления векторного произведения векторов

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \boldsymbol{k} \Rightarrow$$

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} c_x-\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} c_y+\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} c_z=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Итак , $$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Замечание. Объединяя свойство 2) и выведенную формулу для смешанного произведения, мы видим, что определитель 3-го порядка п абсолютной величине равен объёму параллелепипеда, построенного на векторах, проекции которых стоят в строчках (или в столбцах) этого определителя.

Сформулируем важные для дальнейшего выводы.

1) Два вектора $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда один из них получается из другого умножением на какое-то число λ , например $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$, тогда $\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{c_x}{c_y}=\lambda$
2) Коллинеарность двух векторов можно охарактеризовать по-другому. А именно, $\boldsymbol{a}$ коллинеарно $\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$
3) Два вектора ортогогональны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю.
$$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$$
4) Три вектора $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю.
$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ компланарны $\Leftrightarrow\boldsymbol{abc}=0$, или в другой записи
$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=0$$
5) Три вектора $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ образуют правую тройку векторов тогда и только тогда, когда их смешанное произведение -это положительное число, то есть $\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}>0.$

Глава 2. Прямая на плоскости. Плоскость и прямая в пространстве.

§1. Различные системы координат на плоскости.

Для описания положения точки на плоскости используют различные системы координат. Наиболее употребительными из них являются

1) Прямоугольные декартовы координаты
2) Косоугольные декартовы координаты
3) Полярные координаты

1) Задать прямоугольную декартову систему координат на плоскости- это значит задать две взаимно перпендикулярные числовые оси с одинаковым масштабом и с общим началом координат. При этом одна из осей считается первой, называется осью абсцисс и обозначается Ox . другая ось считается второй, называется осью ординат и обозначается Oy. Орт первой оси обозначается $\boldsymbol{i}$, орт второй оси обозначается $\boldsymbol{j}$. Обычно оси Ox, Oy выбирают так, чтобы кратчайший поворот от $\boldsymbol{i}$ к $\boldsymbol{j}$ был виден совершающимся против часовой стрелки.

Каждая точка M на плоскости получает две координаты: абсциссу x_M и ординату y_M , пишут $M(x_M, y_M)$. Здесь x_M -координата на оси Ox основания перпендикуляра, опущенного из точки M на Ox , y_M - координата на оси Oy основания перпендикуляра, опущенного из

точки M на ось Oy. Заметим, что точка M имеет координаты (x_M, y_M) тогда и только тогда, когда радиус-вектор $\boldsymbol{OM}$ этой точки имеет проекции $\{x_M, y_M\}$.

(1) $M(x_M, y_M) \Leftrightarrow \boldsymbol{OM} = \{x_M, y_M\} = x_M\boldsymbol{i} + y_M\boldsymbol{j}$

Выясним, как меняются координаты точки при параллельном переносе системы координат в новое начало $O'(a, b)$. Пусть координаты точки M в системе координатOxy будут x, y . Это значит, что $\boldsymbol{OM} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$. Пусть координаты той же точки M в системе координат $O'x'y'$ будут x', y' . Это значит, что $\boldsymbol{O'M} = x'\boldsymbol{i} + y'\boldsymbol{j}$. Из рис. 4 видно, что $\boldsymbol{OM} = \boldsymbol{OO'} + \boldsymbol{O'M}$, $x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + x'\boldsymbol{i} + y'\boldsymbol{j} = (a + x')\boldsymbol{i} + (b + y')\boldsymbol{j}$.В силу единственности разложения вектора $\boldsymbol{OM}$ по векторам $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ получаем формулы

$\begin{cases} x = a + x' \\ y = b + y' \end{cases}$, связывающие старые координаты точки с её новыми координатами.

Выясним, ка меняются координаты точки при повороте системы координат на угол α вокруг начала отсчёта O .Пусть $\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}'$ -орты осей

Ox' и Oy' . Тогда $\begin{matrix} \boldsymbol{i}' = \boldsymbol{i}cos\alpha + \boldsymbol{j}sin\alpha \\ \boldsymbol{j}' = -\boldsymbol{i}sin\alpha + \boldsymbol{j}cos\alpha \end{matrix}$(см.рис.5) Пусть в системе координатOxy у точки M координаты (x, y) , а в системе координат $Ox'y'$

у той же точки координаты $M(x', y')$. Тогда $\boldsymbol{OM} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} = x'\boldsymbol{i}' + y'\boldsymbol{j}'$; $\boldsymbol{OM} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} = x'(\boldsymbol{i}cosa + \boldsymbol{j}sin\alpha) + y'(-\boldsymbol{i}sin\alpha + \boldsymbol{j}cosa)$;

$\boldsymbol{OM} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} = (x'cosa - y'sin\alpha)\boldsymbol{i} + (x'sin\alpha + y'cosa)\boldsymbol{j}$. В силу единственности разложения вектора $\boldsymbol{OM}$ получим равенства

$$\begin{cases} x = x'cosa - y'sin\alpha \\ y = x'sin\alpha + y'cosa \end{cases}$$

2) Косоугольная декартова система координат на плоскости.

Введём на плоскости декартову косоугольную систему координат. Для этого зададим две пересекающиеся числовые оси, начало отсчёта каждой из которых совпадает с точкой O их пересечения. Одну из них назовём первой, обозначим Ox и пусть OA_1 - отрезок масштаба на ней. Другая ось будет считаться второй, обозначим её Oy и пусть OA_2 -отрезок масштаба на ней. Отрезки OA_1 и OA_2 могут быть разной длины. Обозначим

$\boldsymbol{e_1} = \boldsymbol{OA_1}, \boldsymbol{e_2} = \boldsymbol{OA_2}$ - орты осей Ox иOy соответственно (см. рис.6).

Пусть M - произвольная точка на плоскости. Проведём через неё две прямые, параллельные осям. Координаты x_M и y_M точек пересечения этих прямых с осями Ox и Oy называются координатами точки M в косоугольной системе координат $Oxy, M(x_M, y_M)$. Ясно, что тогда радиус-вектор $\boldsymbol{OM}$ точки M можно записать в виде $\boldsymbol{OM} = x_M\boldsymbol{e}_1 + y_M\boldsymbol{e_2}$.

3) Полярная система координат на плоскости.

Полярная система координат на плоскости определяется заданием некоторой точки O , называемой полюсом, луча OL , исходящего из этой точки, называемого полярной осью и масштаба для измерения длины.

Тогда любая точка плоскости, отличная от полюса O , однозначно определяется заданием двух чисел ρ и φ, где $\rho = |OM|$ -длина

отрезка OM, φ -число, определяющее угол между полярной осью и радиус-вектором $\boldsymbol{OM}$ (см. рис.7).

Угол измеряется так, как это принято в тригонометрии. Запись $M(\rho, \varphi)$ означает, что точка M имеет полярные координаты ρ и φ . Для полюса O не определён угол φ , однако положение полюса O вполне задано значением $\rho = 0$.

Предположим, что на плоскости одновременно заданы прямоугольная декартова система координат и полярная система координат, причём полюс совпадает с началом декартовой системы координат, полярная ось совпадает с положительной полуосью оси абсцисс и масштабы декартовой и полярной систем координат совпадают (см. рис.8). Тогда переход от полярных координат точки к декартовым координатам той же точки осуществляется по формулам

$$\begin{cases} x_M = \rho cos\varphi \\ y_M = \rho sin\varphi \end{cases}.$$

В этом же случае формулы

$\begin{cases} \rho = \sqrt{x_M^2 + y_M^2} \\ tg\varphi = \frac{y}{x} \end{cases}$ являются формулами перехода от декартовых координат к полярным.

4) Понятие уравнения кривой на плоскости.

Определение. Пусть на плоскости задана декартова система координат Oxy (прямоугольная или косоугольная) .Пусть (Γ) -некоторая кривая на плоскости. Выражение

$$F(x, y) = 0$$

называется уравнением кривой(Γ) в неявной форме, если координаты любой точки, лежащей на (Γ) , удовлетворяют этому уравнению, а любая пара чисел (x_0, y_0) , удовлетворяющая этому уравнению, представляет собой координаты точки, лежащей на (Γ) .

$$M(x_0, y_0) \in (\Gamma) \Leftrightarrow F(x_0, y_0) = 0$$

- верное числовое равенство.

Определение. Пусть на плоскости задана полярная система координат и кривая (Γ) . Выражение $F(\varphi, \rho) = 0$ называется уравнением кривой (Γ) , если координаты любой точки $M(\varphi, \rho)$, лежащей на (Γ) , удовлетворяют этому уравнению, а любая пара чисел (φ_0, ρ_0) , удовлетворяющая этому уравнению, является координатами точки, лежащей на (Γ) .

$$M(\varphi_0, \rho_0) \in (\Gamma) \Leftrightarrow F(\varphi_0, \rho_0) = 0$$

-верное числовое равенство.