§ 2. Построение графика функции, заданной параметрически.

Теорема 2.1 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in \langle\alpha;\,\beta\rangle$ - *функция, заданная параметрически. Пусть* $x(t)$ *и* $y(t)$ *непрерывны на промежутке* $\langle\alpha;\,\beta\rangle$, $x\left(\langle\alpha;\,\beta\rangle\right) = \langle a;\,b\rangle$ *и дифференцируемы на интервале* $(\alpha;\,\beta)$. *Пусть* $x'(t) > 0$ $(x'(t) < 0)$ *для всякого* t *из* $(\alpha;\,\beta)$. *Тогда существует единственная функция* $f(x)$, *непрерывная на промежутке* $\langle a;\,b\rangle$ *и дифференцируемая на интервале* $(a;\,b)$ *такая, что* $f(x(t)) = y(t)$, *для всякого* t *из* $\langle\alpha;\,\beta\rangle$. *При этом*

$$f'_x(x(t)) = \frac{y'_t(t)}{x'_t(t)}$$

Если дополнительно предположить, что $x(t)$ *и* $y(t)$ *дважды дифференцируемы на* $(\alpha;\,\beta)$, *то на интервале* $(a;\,b)$ *существует вторая производная* $f(x)$, *и имеет место следующее равенство*

$$f''_{xx}(x(t)) = \frac{y''_{tt}(t)\,x'_t(t) - y'_t(t)\,x''_{tt}(t)}{\left(x'_t(t)\right)^3}$$

Эта теорема даёт способ построения графика функции, заданной параметрически. Надо разбить множество значений параметра t на промежутки, во внутренних точках которых производная $x(t)$ имеет постоянный знак. По теореме будут существовать функции $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $\ldots y = f_n(x)$ (n - число промежутков), объединение графиков которых является графиком функции, заданной параметрически. Сами функции $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $\ldots y = f_n(x)$ исследуются методами § 1.

Замечание. Если $y = f(x)$, то формулы теоремы часто записывают

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

$$y''_{xx} = \frac{y''_{tt}\,x'_t - y'_t\,x''_{tt}}{\left(x'_t\right)^3}$$

Замечание. Вторую производную удобнее вычислять по формуле

$$y''_{xx} = \frac{\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t}{x'_t} \quad \text{или} \quad y''_{xx} = \frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t}$$

Асимптоты.

$x = a$ - вертикальная асимптота($a \in \mathbb{R}$), если $\exists t_0 : \lim\limits_{t\to t_0\pm} y(t) = \infty$, а $\lim\limits_{t\to t_0\pm} x(t) = a$. Точка t_0 - одна из точек разрыва функции $y(t)$ или $\pm\infty$.

$y = k\,x + l$ - наклонная асимптота, если $\exists t_0 : \lim\limits_{t\to t_0\pm} x(t) = \infty$, и существуют конечные пределы

$$k = \lim_{t\to t_0\pm} \frac{y(t)}{x(t)}, \quad l = \lim_{t\to t_0\pm} \left(y(t) - k\,x(t)\right)$$

Приведенные выше пределы служат для вычисления k и l, а точка t_0 - одна из точек разрыва функции $x(t)$ или $\pm\infty$.

1. $\begin{cases} x = \frac{3t}{1+t^3} \\ y = \frac{3t^2}{1+t^3} \end{cases}$

1) Построение графиков $x(t)$ и $y(t)$(без исследования выпуклости).

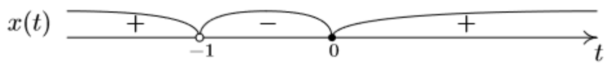
a) Промежутки знакопостоянства

$x(t) = \frac{3t}{1+t^3}$

$x\,(t) > 0 \Leftrightarrow t \in (-\infty; -1) \cup (0; \infty)$

$x\,(t) < 0 \Leftrightarrow t \in (-1; 0)$

$x(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$



$y(t) = \frac{3t^2}{1+t^3}$

$y\,(t) > 0 \Leftrightarrow t \in (-1; 0) \cup (0; \infty)$

$y\,(t) < 0 \Leftrightarrow t \in (-\infty; -1)$

$y(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$

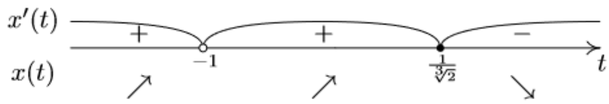
b) Монотонность и локальный экстремум функций $x(t)$ и $y(t)$.

$x'(t) = \frac{3\left(1-2t^3\right)}{(1+t^3)^2}$

$x\,(t)$ убывает на интервале $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}; \infty\right)$

возрастает на интервалах $(-\infty; -1)$, $\left(-1; \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$

$t = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ - строгий локальный максимум, $x(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}) = \sqrt[3]{4}$



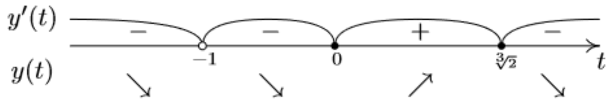
$y'(t) = \frac{3t\left(2-t^3\right)}{(1+t^3)^2}$

$y\,(t)$ убывает на интервалах $(-\infty; -1)$, $(-1; 0)$, $\left(\sqrt[3]{2}; \infty\right)$

$y\,(t)$ возрастает на интервале $\left(0; \sqrt[3]{2}\right)$

$t = \sqrt[3]{2}$ - строгий локальный максимум, $y(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{4}$

$t = 0$ - строгий локальный минимум, $y(0) = 0$



c) Асимптоты функций $x(t)$ и $y(t)$.

$x(t) = \frac{3t}{1+t^3}$

$\lim\limits_{t\to -1\pm} x(t) = \infty \Rightarrow t = -1$ - вертикальная асимптота

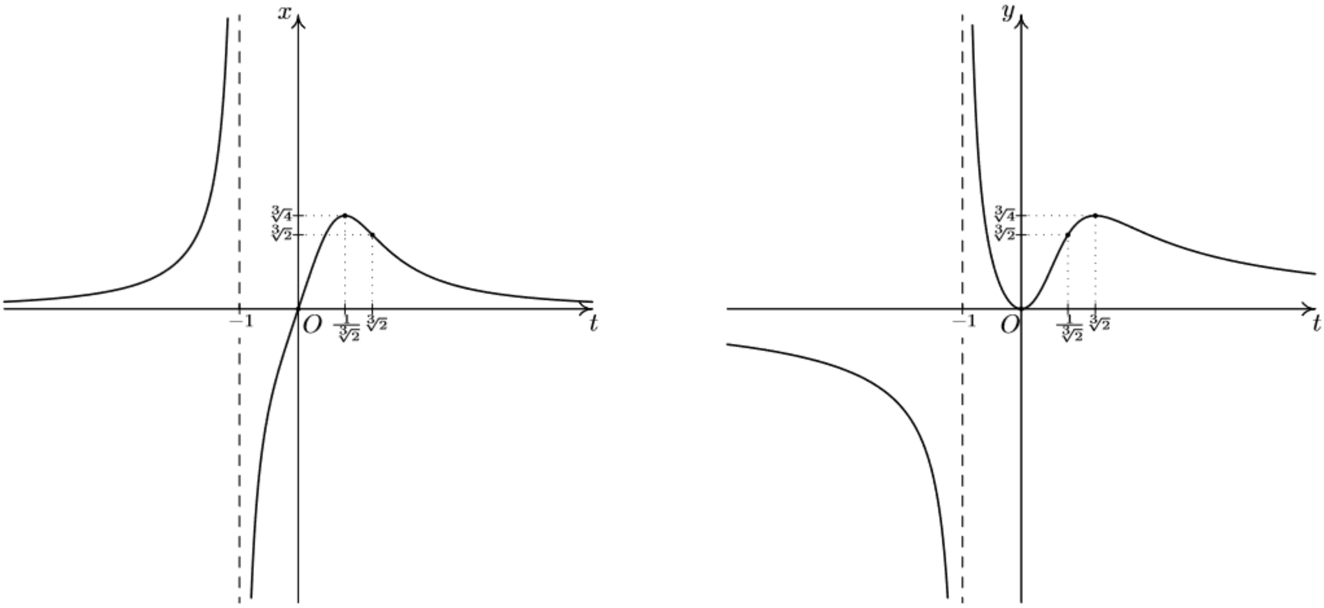
$k = \lim\limits_{t\to\pm\infty} \frac{x(t)}{t} = 0$, $l = \lim\limits_{t\to\pm\infty} (x(t) - k\,t) = 0 \Rightarrow x = 0$ - горизонтальная асимптота.

$y(t) = \frac{3t^2}{1+t^3}$

$\lim\limits_{t\to -1\pm} y(t) = \infty \Rightarrow t = -1$ - вертикальная асимптота

$k = \lim\limits_{t\to\pm\infty} \frac{y(t)}{t} = 0$, $l = \lim\limits_{t\to\pm\infty} (y(t) - k\,t) = 0 \Rightarrow y = 0$ - горизонтальная асимптота.

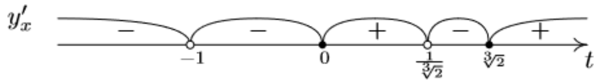
Исходя из исследования, строим графики координатных функций $x(t)$ и $y(t)$.



Замечание. Необходимость построения некоторых дополнительных точек будет ясна из дальнейшего рассмотрения первой и второй производной функции, заданной параметрически.

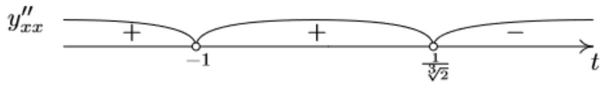
2) Определяем знаки первой производной функции, заданной параметрически.

$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{t\left(2-t^3\right)}{1-2t^3}$



3) Определяем знаки второй производной функции, заданной параметрически.

$y''_{xx} = \frac{\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t}{x'_t} = \frac{2}{3}\,\frac{\left(1+t^3\right)^4}{\left(1-2t^3\right)^3}$



4) Находим асимптоты функции, заданной параметрически.

Ищем значения t_0 при стремлении к которым хотя бы одна из координатных функций $x(t)$ или $y(t)$ стремится к бесконечности. В данном случае это только $t_0 = -1$. Так как $\lim\limits_{t\to-1\pm} x(t) = \infty$ и $\lim\limits_{t\to-1\pm} y(t) = \infty$, то асимптота может быть только наклонной (если существует).

$$k = \lim_{t\to-1\pm} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to-1\pm} \frac{1}{t} = -1$$

$$l = \lim_{t\to-1\pm} \left(y(t) - k\,x(t)\right) = \lim_{t\to-1\pm} \left(\frac{3t^2}{1+t^3} - (-1)\,\frac{3t}{1+t^3}\right) = \lim_{t\to-1\pm} 3\frac{t}{t^2-t+1} = -1$$

Так как k и l существуют и конечны, то $y = -x-1$ – наклонная асимптота. Можно также проанализировать взаимное положение графика функции и графика асимптоты. Так как $y(t) - k\,x(t) - l = 3\frac{t}{t^2-t+1} + 1 = \frac{(t+1)^2}{t^2-t+1} > 0$ в проколотой окрестности $t_0 = -1$ (независимо справа или слева от t_0), то значит, что график функции, заданной параметрически лежит выше, чем асимптота (при t достаточно близких к $t_0 = -1$).

5) Определяем функции от переменной x, объединение графиков которых, даёт график функции, заданной параметрически.

По теореме 2.1 функцию, заданную параметрически, можно представить в виде однозначной функции на интервалах, на которых производная имеет постоянный знак. В данном случае, таких интервалов три: $(-\infty;-1)$, $\left(-1;\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$ и $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}};\infty\right)$.

Для каждого случая построим график:

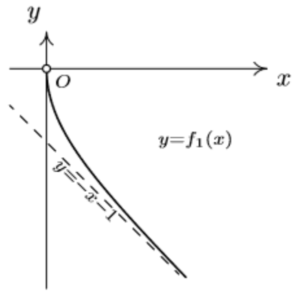
а) $t \in (-\infty;-1)$

Обозначим за $y = f_1(x)$ функцию из теоремы 2.1, соответствующую интервалу $(-\infty;-1)$.
Используя графики функций $x = x(t)$ и $y = y(t)$ (пункт 1), получаем, что $x \in (0;+\infty)$, $y \in (-\infty;0)$. Если $x \to +\infty$, то $t \to -1-$, и по пункту 4, прямая $y = -x-1$ будет асимптотой $y = f_1(x)$. Если $x \to 0+$, то $t \to -\infty$, а значит, $y \to 0$. Таким образом, $\lim\limits_{x\to0+} f_1(x) = 0$.

По пункту 2 первая производная $y'_x < 0$ при $t \in (-\infty; -1)$, а по пункту 3 вторая производная $y''_{xx} > 0$. Следовательно, функция $y = f_1(x)$ убывает и выпукла вниз на интервале $x \in (0; +\infty)$.

Заметим также, что $\lim\limits_{x \to 0+} f'_1(x) = \lim\limits_{t \to -\infty} y'_x(x(t)) = \lim\limits_{t \to -\infty} \frac{y'_t(t)}{x'_t(t)} = \lim\limits_{t \to -\infty} \frac{t\left(2-t^3\right)}{1-2t^3} = -\infty$, то есть, касательная к графику функции в точке $O(0;0)$ совпадает с осью Oy.

Итак $y = f_1(x)$
– убывает и выпукла вниз на интервале $x \in (0; +\infty)$
– при $x \to +\infty$ имеет асимптоту $y = -x - 1$
– предел при $x \to 0+$ равен 0
– касательная к графику в точке $O(0;0)$ совпадает с осью Oy



б) $t \in \left(-1; \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$

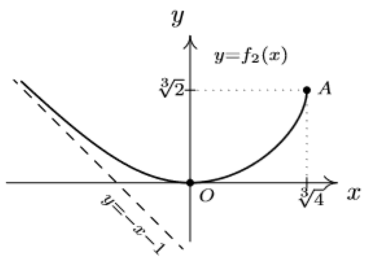
Обозначим за $y = f_2(x)$ функцию из теоремы 2.1, соответствующую интервалу $\left(-1; \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$. Используя графики функций $x = x(t)$ и $y = y(t)$, получаем, что $x \in \left(-\infty; \sqrt[3]{4}\right)$, $y \in [0; +\infty)$. Если $x \to -\infty$, то $t \to -1+$, и по пункту 4, прямая $y = -x - 1$ будет асимптотой $y = f_2(x)$. Если $x \to \sqrt[3]{4}-$, то $t \to \frac{1}{\sqrt[3]{2}}-$, а тогда $y \to \sqrt[3]{2}$. Таким образом, $\lim\limits_{x \to \sqrt[3]{4}-} f_2(x) = \sqrt[3]{2}$.

Из пункта 2 следует, что производная $y'_x < 0$ при $t \in (-1; 0)$. Тогда (см. графики пункта 1) $x \in (-\infty; 0)$, и значит, $f_2(x)$ убывает на интервале $(-\infty; 0)$. Аналогично, производная $y'_x > 0$ при $t \in \left(0; \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$. Тогда $x \in \left(0; \sqrt[3]{4}\right)$, и значит, $f_2(x)$ возрастает на интервале $\left(0; \sqrt[3]{4}\right)$. При $t = 0$ получаем, что $x = 0$, $y = 0$, то есть график проходит через $O(0;0)$.

По пункту 3 вторая производная $y''_{xx} > 0$. Следовательно, функция $y = f_2(x)$ выпукла вниз на интервале $x \in \left(-\infty; \sqrt[3]{4}\right)$.

Заметим также, что $\lim\limits_{x \to \sqrt[3]{4}-} f'_2(x) = \lim\limits_{t \to \frac{1}{\sqrt[3]{2}}-} y'_x(x(t)) = \lim\limits_{t \to \frac{1}{\sqrt[3]{2}}-} \frac{y'_t(t)}{x'_t(t)} = \lim\limits_{t \to \frac{1}{\sqrt[3]{2}}-} \frac{t\left(2-t^3\right)}{1-2t^3} = +\infty$, то есть касательная к графику функции в точке $A\left(\sqrt[3]{4}; \sqrt[3]{2}\right)$ параллельна оси Oy. Кроме того, $y'_x = 0$ при $t = 0$. Но при t равном нулю, $x = 0$ и $y = 0$, а значит, касательная в точке $O(0;0)$ совпадает с осью Ox.

Итак $y = f_2(x)$
– убывает и выпукла вниз на интервале $x \in (-\infty; 0)$
– возрастает и выпукла вниз на интервале $x \in \left(0; \sqrt[3]{4}\right)$
– при $x \to -\infty$ имеет асимптоту $y = -x - 1$
– предел при $x \to \sqrt[3]{4}-$ равен $\sqrt[3]{2}$
– касательная к графику в точке $A\left(\sqrt[3]{4}; \sqrt[3]{2}\right)$ параллельна оси Oy
касательная к графику в точке $O(0;0)$ параллельна оси Ox



в) $t \in \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}; \infty\right)$

Обозначим за $y = f_3(x)$ функцию из теоремы 2.1, соответствующую интервалу $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}; \infty\right)$. Тогда $x \in \left(0; \sqrt[3]{4}\right)$, $y \in \left(0; \sqrt[3]{4}\right]$. Если $x \to \sqrt[3]{4}-$, то $t \to \frac{1}{\sqrt[3]{2}}+$, а $y \to \sqrt[3]{2}$. Таким образом, $\lim\limits_{x \to \sqrt[3]{4}+} f_3(x) = \sqrt[3]{2}$. Если $x \to 0+$, то $t \to +\infty$, а тогда $y \to 0$ и $\lim\limits_{x \to 0+} f_3(x) = 0$.

Производная $y'_x > 0$ при $t \in \left(\sqrt[3]{2}; +\infty\right)$. Тогда $x \in \left(0; \sqrt[3]{2}\right)$, и значит, $f_3(x)$ возрастает на интервале $\left(0; \sqrt[3]{2}\right)$. Аналогично, производная $y'_x < 0$ при $t \in \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}; \sqrt[3]{2}\right)$. Тогда $x \in \left(\sqrt[3]{2}; \sqrt[3]{4}\right)$, и значит, $f_3(x)$ убывает на интервале $\left(\sqrt[3]{2}; \sqrt[3]{4}\right)$. При $t = \sqrt[3]{2}$ получаем, что $x = \sqrt[3]{2}$, $y = \sqrt[3]{4}$, то есть график проходит через $B\left(\sqrt[3]{2}; \sqrt[3]{4}\right)$.

Вторая производная $y''_{xx} < 0$. Следовательно, функция $y = f_3(x)$ выпукла вверх на интервале $x \in \left(0; \sqrt[3]{4}\right)$.

Заметим также, что $\lim\limits_{x \to \sqrt[3]{4}-} f'_2(x) = \lim\limits_{t \to \frac{1}{\sqrt[3]{2}}+} y'_x(x(t)) = \lim\limits_{t \to \frac{1}{\sqrt[3]{2}}+} \frac{y'_t(t)}{x'_t(t)} = \lim\limits_{t \to \frac{1}{\sqrt[3]{2}}+} \frac{t\left(2-t^3\right)}{1-2t^3} = -\infty$, то есть касательная к графику функции в точке $A\left(\sqrt[3]{4}; \sqrt[3]{2}\right)$ параллельна оси Oy. $\lim\limits_{x \to 0+} f'_3(x) = \lim\limits_{t \to +\infty} y'_x(x(t)) = \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{y'_t(t)}{x'_t(t)} = \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{t\left(2-t^3\right)}{1-2t^3} =$
$= +\infty$, то есть, касательная к графику функции в точке $O(0;0)$ совпадает с осью Oy.

Итак $y = f_3(x)$

– возрастает и выпукла вверх на интервале $x \in \left(\sqrt[3]{2}; +\infty\right)$

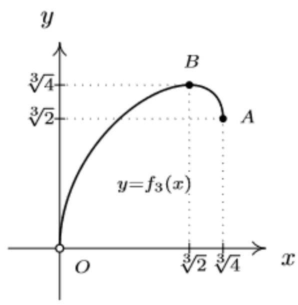
– убывает и выпукла вверх на интервале $x \in \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}; \sqrt[3]{2}\right)$

– предел при $x \to \sqrt[3]{4}-$ равен $\sqrt[3]{2}$

– предел при $x \to 0+$ равен 0

– касательная к графику в точке $A\left(\sqrt[3]{4}; \sqrt[3]{2}\right)$ параллельна оси Oy

касательная к графику функции в точке $O(0;0)$ совпадает с осью Oy



Объединяя графики функций $f_1(x)$, $f_2(x)$ и $f_3(x)$, получаем график исходной функции, заданной параметрически: