Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

Факультет «Фундаментальные науки»
Кафедра «Математическое моделирование»

А.Н. Канатников, А.П. Крищенко

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Электронное учебное издание

Учебное пособие по дисциплине
«Линейная алгебра и функции нескольких переменных»
для студентов всех специальностей

Москва

Лекция 2

ЛИНЕЙНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА. ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА

Подпространства линейного пространства. Ранг системы векторов, связь с рангом матрицы. Линейная оболочка. Примеры. Евклидово пространство, аксиомы и примеры. Норма вектора. Неравенство Коши — Буняковского и неравенство треугольника. Ортогональность векторов. Линейная независимость ортогональной системы ненулевых векторов. Ортонормированный базис евклидова пространства Выражение координат вектора в ортонормированном базисе. Вычисление скалярного произведения и нормы вектора в ортонормированном базисе.

2.1. Определение и примеры

В любом *линейном пространстве* $\mathcal{L}$ можно выделить такое подмножество *векторов*, которое относительно операций из $\mathcal{L}$ само является линейным пространством. Это можно делать различными способами, и структура таких подмножеств несет важную информацию о самом линейном пространстве $\mathcal{L}$.

Определение 2.1. Подмножество $\mathcal{H}$ линейного пространства $\mathcal{L}$ называют ***линейным подпространством***, если выполнены следующие два условия:

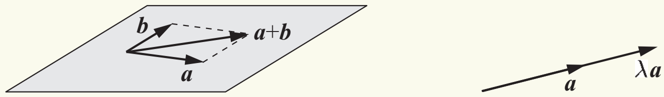
1) *сумма* любых двух *векторов* из $\mathcal{H}$ принадлежит $\mathcal{H}$: $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{H} \implies \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in \mathcal{H}$;

2) *произведение* любого *вектора* из $\mathcal{H}$ *на* любое действительное *число* снова принадлежит $\mathcal{H}$: $\boldsymbol{x} \in \mathcal{H},\ \lambda \in \mathbb{R} \implies \lambda\boldsymbol{x} \in \mathcal{H}$.

Определение 2.1 фактически говорит о том, что линейное подпространство — это любое *подмножество* данного линейного пространства, *замкнутое относительно линейных операций*, т.е. применение линейных операций к векторам, принадлежащим этому подмножеству, не выводит результат за пределы подмножества. Покажем, что линейное подпространство $\mathcal{H}$ как самостоятельный объект является линейным пространством относительно операций, заданных в объемлющем линейном пространстве $\mathcal{L}$. В самом деле, эти операции определены для любых элементов множества $\mathcal{L}$, а значит, и для элементов подмножества $\mathcal{H}$. Определение 2.1 фактически требует, чтобы для элементов из $\mathcal{H}$ результат выполнения операций также принадлежал $\mathcal{H}$. Поэтому операции, заданные в $\mathcal{L}$, можно рассматривать как операции и на более узком множестве $\mathcal{H}$. Для этих операций на множестве $\mathcal{H}$ аксиомы линейного пространства а)–б) и д)–з) выполнены в силу того, что они справедливы в $\mathcal{L}$. Кроме того, выполнены и две оставшиеся аксиомы, поскольку, согласно определению 2.1, если $\boldsymbol{x} \in \mathcal{H}$, то: 1) $0 \cdot \boldsymbol{x} = \mathbf{0} \in \mathcal{H}$ и $\mathbf{0}$ — *нулевой вектор* в $\mathcal{H}$; 2) $(-1)\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x} \in \mathcal{H}$.

В любом линейном пространстве $\mathcal{L}$ всегда имеются два линейных подпространства: само линейное пространство $\mathcal{L}$ и ***нулевое подпространство*** $\{\mathbf{0}\}$, состоящее из единственного элемента $\mathbf{0}$. Эти линейные подпространства называют ***несобственными***, в то время как все остальные линейные подпространства называют ***собственными***. Приведем примеры собственных линейных подпространств.

Пример 2.1. В линейном пространстве V_3 свободных векторов трехмерного пространства линейное подпространство образуют: а) все векторы, параллельные данной плоскости; б) все векторы, параллельные данной прямой. Это вытекает из следующих соображений. Из определения суммы свободных векторов следует, что два вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и их сумма $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ компланарны (рис. 2.1, *а*). Поэтому, если $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ параллельны данной плоскости, то этой же плоскости будет параллельна и их сумма. Тем самым установлено, что для случая а) выполнено условие 1) определения 2.1. Если вектор умножить на число, получится вектор, коллинеарный исходному (рис. 2.1, *б*). Это доказывает выполнение условия 2) определения 2.1. Случай б) обосновывается аналогично.



а *б*

Рис. 2.1

Линейное пространство V_3 дает наглядное представление о том, что такое линейное подпространство. Действительно, фиксируем некоторую точку в пространстве. Тогда различным плоскостям и различным прямым, проходящим через эту точку, будут соответствовать различные линейные подпространства из V_3 (рис. 2.2).

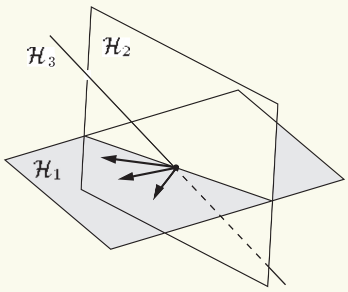


Рис. 2.2

Не столь очевидно, что в V_3 нет других собственных подпространств. Если в линейном подпространстве $\mathcal{H}$ в V_3 нет ненулевых векторов, то $\mathcal{H}$ — нулевое линейное подпространство, являющееся несобственным. Если в $\mathcal{H}$ есть ненулевой вектор, а любые два вектора из $\mathcal{H}$ коллинеарны, то все векторы этого линейного подпространства параллельны некоторой прямой, проходящей через фиксированную точку. Ясно, что $\mathcal{H}$ совпадает с одним из линейных подпространств, описанных в случае б). Если в $\mathcal{H}$ есть два неколлинеарных вектора, а любые три вектора компланарны, то все векторы такого линейного подпространства параллельны некоторой плоскости, проходящей через фиксированную точку. Это случай а). Пусть в линейном подпространстве $\mathcal{H}$ существуют три некомпланарных вектора. Тогда они образуют *базис* в V_3. Любой свободный вектор можно представить в виде *линейной комбинации* этих векторов. Значит, все свободные векторы попадают в линейное подпространство $\mathcal{H}$, и поэтому оно совпадает с V_3. В этом случае мы получаем несобственное линейное подпространство.

Итак, в V_3 все собственные подпространства можно представить в виде плоскостей или прямых, проходящих через фиксированную точку.

Пример 2.2. Любое решение однородной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) от n переменных можно рассматривать как вектор в *линейном арифметическом пространстве* $\mathbb{R}^n$. Множество всех таких векторов является линейным подпространством в $\mathbb{R}^n$. В самом деле, решения однородной СЛАУ можно покомпонентно складывать и умножать на действительные числа, т.е. по правилам сложения векторов из $\mathbb{R}^n$. Результат операции снова будет решением однородной СЛАУ. Значит, оба условия определения линейного подпространства выполнены.

Уравнение $x + y - 5z = 0$ имеет множество решений, которое является линейным подпространством в $\mathbb{R}^3$. Но это же уравнение можно рассматривать как уравнение плоскости в некоторой прямоугольной системе координат $Oxyz$. Плоскость проходит через начало координат, а радиус-векторы всех точек плоскости образуют двумерное подпространство в линейном пространстве V_3.

Множество решений однородной СЛАУ

$$\begin{cases} x + y - 5z = 0, \\ -x + y \phantom{{}-5z} = 0 \end{cases}$$

также образует линейное подпространство в $\mathbb{R}^3$. В то же время эту систему можно рассматривать как *общие уравнения прямой* в пространстве, заданные в некоторой прямоугольной системе координат $Oxyz$. Эта прямая проходит через начало координат, а множество радиус-векторов всех ее точек образует одномерное подпространство в V_3.

Пример 2.3. В линейном пространстве $M_n(\mathbb{R})$ квадратных матриц порядка n линейное подпространство образуют: а) все симметрические матрицы; б) все кососимметрические матрицы; в) все верхние (нижние) треугольные матрицы. При сложении таких матриц или умножении на число мы получаем матрицу того же вида. Напротив, подмножество вырожденных матриц не является линейным подпространством, так как сумма двух вырожденных матриц может быть невырожденной матрицей:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 2.4. В линейном пространстве $C[0,\,1]$ функций, непрерывных на отрезке $[0,\,1]$, можно выделить следующие линейные подпространства: а) множество функций, непрерывных на отрезке $[0,\,1]$ и непрерывно дифференцируемых в интервале $(0,\,1)$ (в основе этого утверждения лежат свойства дифференцируемых функций: сумма дифференцируемых функций есть дифференцируемая функция, произведение дифференцируемой функции на число есть дифференцируемая функция); б) множество всех многочленов; в) множество $K_n[x]$ всех многочленов степени не выше n. Напротив, множество всех монотонных функций, непрерывных на отрезке $[0,\,1]$, очевидно, является подмножеством $C[0,\,1]$, но не является линейным подпространством, так как сумма двух монотонных функций может и не быть монотонной функцией. #

Пусть в линейном пространстве $\mathcal{L}$ задана *система векторов* $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, ..., $\boldsymbol{e}_k$. Рассмотрим множество $\mathcal{H}$ всех векторов в $\mathcal{L}$, которые могут быть представлены линейной комбинацией этих векторов. Это множество является линейным подпространством в $\mathcal{L}$. Действительно, пусть

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + x_k\boldsymbol{e}_k, \qquad \boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + y_k\boldsymbol{e}_k.$$

Тогда

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1)\boldsymbol{e}_1 + \ldots + (x_k + y_k)\boldsymbol{e}_k \in \mathcal{H},$$
$$\lambda\boldsymbol{x} = (\lambda x_1)\boldsymbol{e}_1 + \ldots + (\lambda x_k)\boldsymbol{e}_k \in \mathcal{H},$$

где $\lambda \in \mathbb{R}$. Описанное линейное подпространство называют ***линейной оболочкой*** системы векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, ..., $\boldsymbol{e}_k$ и обозначают $\operatorname{span}\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_k\}$.

Примечательно то, что любое собственное линейное подпространство можно представить как линейную оболочку некоторой системы его векторов (это будет ясно из дальнейшего изложения). В этом состоит универсальный способ описания линейных подпространств. Отметим, что само линейное пространство является линейной оболочкой любого из своих базисов.

Пример 2.5. Рассмотрим плоскость π, проходящую через три произвольные точки O, A, B, не лежащие на одной прямой. Тогда линейное подпространство векторов, компланарных плоскости π, представляет собой линейную оболочку двух свободных векторов, соответствующих геометрическим векторам $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ (рис. 2.3). Действительно, любой вектор, компланарный векторам $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, представляется в виде их линейной комбинации.

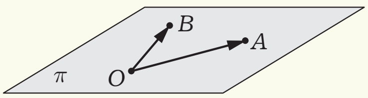


Рис. 2.3

2.2. Ранг системы векторов

Определение 2.2. ***Рангом системы векторов*** в *линейном пространстве* называют *размерность линейной оболочки* этой *системы векторов*.

Теорема 2.1. Ранг системы векторов $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a}_1,\, \boldsymbol{a}_2,\, \ldots,\, \boldsymbol{a}_k)$ линейного пространства $\mathcal{L}$ равен:

а) максимальному количеству *линейно независимых векторов* в системе $\boldsymbol{a}$;

б) рангу матрицы, составленной по столбцам из *координат векторов* $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ в каком-либо *базисе линейного пространства* $\mathcal{L}$.

◀ Пусть $\boldsymbol{g}$ — некоторый базис в $\mathcal{L}$. Составим по столбцам матрицу A из координат в базисе $\boldsymbol{g}$ векторов $\boldsymbol{a}_i$, $i = \overline{1, k}$. *Линейные операции* над векторами $\boldsymbol{a}_i$ соответствуют таким же линейным операциям над столбцами их координат. Поэтому, согласно следствию 1.1, векторы линейно независимы тогда и только тогда, когда столбцы их координат линейно независимы. По теореме о базисном миноре ранг матрицы A равен максимальному количеству ее линейно независимых столбцов. Это совпадает с максимальным количеством линейно независимых векторов в системе $\boldsymbol{a}$. Следовательно, утверждения а) и б) теоремы эквивалентны.

Выберем в матрице A какой-либо базисный минор и зафиксируем столбцы этого минора (базисные столбцы). Соответствующие им векторы будем называть базисными. По теореме о базисном миноре, во-первых, базисные столбцы линейно независимы и поэтому базисные векторы образуют линейно независимую систему, а во-вторых, все остальные столбцы матрицы являются линейными комбинациями базисных и поэтому небазисные векторы системы выражаются через базисные. Следовательно, любая линейная комбинация векторов системы $\boldsymbol{a}$ сводится к линейной комбинации системы базисных векторов, т.е. любой вектор линейной оболочки системы векторов $\boldsymbol{a}$ выражается через базисные векторы. Значит, базисные векторы образуют базис линейной оболочки. Количество базисных векторов, с одной стороны, равно количеству базисных столбцов, т.е. рангу матрицы A, а с другой — совпадает с размерностью линейной оболочки, т.е. с рангом системы векторов $\boldsymbol{a}$. ▶

Замечание 2.1. Как следует из приведенного доказательства, столбцы любого базисного минора матрицы A отвечают набору векторов системы $\boldsymbol{a}$, являющемуся базисом в $\operatorname{span}\{\boldsymbol{a}\}$ — линейном подпространстве, порожденном этой системой векторов.

Пример 2.6. Пусть даны векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_4$ в четырехмерном линейном пространстве $\mathcal{L}$, имеющие в некотором базисе столбцы координат $a_1 = (1\ \ 2\ \ 0\ \ 6)^{\mathrm{T}}$, $a_2 = (2\ \ 0\ \ 3\ \ 1)^{\mathrm{T}}$, $a_3 = (3\ \ 2\ \ 3\ \ 7)^{\mathrm{T}}$, $a_4 = (7\ \ 2\ \ 9\ \ 9)^{\mathrm{T}}$. Соответствующая матрица A имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 9 \\ 6 & 1 & 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

Вычислив ранг матрицы, убеждаемся, что он равен 2. Таким образом, ранг системы векторов равен 2. Легко проверить, что любой минор второго порядка является базисным. Поэтому базисом линейной оболочки этой системы векторов будут любые два вектора системы. Например, базисом является пара векторов $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$. По этому базису можно разложить, например, остальные векторы системы. Чтобы найти *разложение вектора* $\boldsymbol{a}_3$ *по базису*, достаточно решить систему линейных алгебраических уравнений

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{a}_3,$$

которая в координатной форме имеет вид

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3, \\ 2x_1 \phantom{{}+2x_2} = 2, \\ \phantom{2x_1 + {}} 3x_2 = 3, \\ 6x_1 + x_2 = 7. \end{cases}$$

Из четырех уравнений можно оставить любые два. Используя второе и третье уравнения, находим $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ и, следовательно, $\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$. Аналогично находим и разложение вектора $\boldsymbol{a}_4$: $\boldsymbol{a}_4 = \boldsymbol{a}_1 + 3\boldsymbol{a}_2$.

2.3. Линейные оболочки и системы уравнений

Пусть $\mathcal{L}$ — *n-мерное линейное пространство*, в котором фиксирован некоторый *базис* $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{e}_n)$ и выбраны *векторы* $\boldsymbol{a}_1,\ \ldots,\ \boldsymbol{a}_k,\ \boldsymbol{b}$. Запишем *разложение* выбранных *векторов по базису* $\boldsymbol{e}$:

$$\boldsymbol{a}_j = \boldsymbol{e}a_j, \quad j = \overline{1,\,k}, \qquad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{e}b,$$

где $a_j = (a_{1j}\ \ \ldots\ \ a_{nj})^{\mathrm{T}}$, $j = \overline{1,\,k}$, $b = (b_1\ \ \ldots\ \ b_n)^{\mathrm{T}}$ — столбцы *координат* соответствующих *векторов*. Пусть A — матрица типа $n{\times}k$, составленная из координатных столбцов векторов $\boldsymbol{a}_1,\ \ldots,\ \boldsymbol{a}_k$, а $(A\,|\,b)$ — матрица, полученная из матрицы A добавлением справа еще одного столбца b.

Для вектора $\boldsymbol{b}$ возможны два случая:

1) вектор $\boldsymbol{b}$ принадлежит *линейной оболочке* $\operatorname{span}\{\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_k\}$;

2) вектор $\boldsymbol{b}$ не принадлежит $\operatorname{span}\{\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_k\}$.

В первом случае добавление к *системе векторов* $\boldsymbol{a}_1,\ \ldots,\ \boldsymbol{a}_k$ вектора $\boldsymbol{b}$ не приводит к расширению линейной оболочки системы и, следовательно,

$$\dim\operatorname{span}\{\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_k\} = \dim\operatorname{span}\{\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_k,\boldsymbol{b}\}\,.$$

По теореме 2.1 заключаем, что $\operatorname{Rg}A = \operatorname{Rg}(A\,|\,b)$.

Во втором случае, наоборот, добавление вектора $\boldsymbol{b}$ к системе векторов $\boldsymbol{a}_1,\ \ldots,\ \boldsymbol{a}_k$ приводит к расширению линейной оболочки, причем

$$\dim\operatorname{span}\{\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_k,\boldsymbol{b}\} = \dim\operatorname{span}\{\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_k\} + 1,$$

поскольку базис подпространства $\operatorname{span}\{\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_k,\boldsymbol{b}\}$ можно получить, добавив вектор $\boldsymbol{b}$ к произвольному базису подпространства $\operatorname{span}\{\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_k\}$. Следовательно, $\operatorname{Rg}(A\,|\,b) = \operatorname{Rg}A + 1$.

Выясним теперь, что означают эти два случая «на координатном уровне». В первом случае условие $\boldsymbol{b}\in\operatorname{span}\{\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_k\}$ означает существование разложения

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + \ldots + x_k\boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{b} \tag{2.1}$$

с некоторыми действительными коэффициентами $x_1,\ \ldots,\ x_k$. Записывая это векторное равенство в координатной форме, получаем систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k = b_1,\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2k}x_k = b_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nk}x_k = b_n \end{cases} \tag{2.2}$$

относительно переменных $x = (x_1\ \ \ldots\ \ x_k)^{\mathrm{T}}$, которая в матричной форме имеет вид $Ax = b$. Существование разложения (2.1) означает, что полученная система имеет решение. Во втором случае представление (2.1) невозможно, т.е. система (2.2) не имеет решений.

Итак, следующие четыре утверждения эквивалентны между собой:

– $\boldsymbol{b}\in\operatorname{span}\{\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_k\}$;

– $\dim\operatorname{span}\{\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_k,\boldsymbol{b}\} = \dim\operatorname{span}\{\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_k\}$;

– $\operatorname{Rg}(A\,|\,b) = \operatorname{Rg}A$;

– система $Ax = b$ из n линейных алгебраических уравнений относительно k неизвестных совместна.

Эквивалентность последних двух утверждений составляет содержание теоремы Кронекера — Капелли, которая верна для произвольных СЛАУ. Отметим, что любая система из n линейных алгебраических уравнений относительно k неизвестных может быть получена как результат проведенных рассуждений. Для этого достаточно в качестве векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ рассмотреть столбцы коэффициентов при неизвестных, а в качестве вектора $\boldsymbol{b}$ — столбец свободных членов. Все эти столбцы могут рассматриваться как n-мерные векторы в *линейном арифметическом пространстве* $\mathbb{R}^n$.

Таким образом, теорему Кронекера — Капелли можно переформулировать следующим образом: для того чтобы линейная оболочка системы векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ совпадала с линейной оболочкой расширенной системы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{b}$, необходимо и достаточно, чтобы были равны размерности этих линейных оболочек.

Предположим, что квадратная СЛАУ $Ax = b$ имеет решение при любом столбце b правых частей. Рассматривая столбцы матрицы A и столбец b как элементы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{b}$ n-мерного линейного арифметического пространства и записывая СЛАУ в векторной форме

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{b},$$

заключаем, что линейная оболочка системы векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ совпадает со всем линейным пространством $\mathbb{R}^n$. Из этого следует, что ранг этой системы векторов равен размерности линейного пространства n, а так как в системе ровно n векторов, то она, согласно теореме 2.1, линейно независима. Другими словами, столбцы матрицы A линейно независимы, а матрица A является невырожденной (теорема о базисном миноре).

Таким образом, если квадратная СЛАУ $Ax = b$ имеет решение при любой правой части, то матрица A системы невырождена, а решение системы при любой правой части единственно.

2.4. Определение евклидова пространства

В *линейном пространстве свободных векторов* V_3 кроме *линейных операций* рассматривались и другие. Были введены две операции умножения векторов (скалярное и векторное), для вектора использовалась такая естественная характеристика, как длина (модуль). Взаимное расположение векторов можно было оценивать с помощью угла между ними.

Понятие скалярного произведения вводилось исходя из геометрических свойств свободных векторов (длины и угла между векторами). В произвольном линейном пространстве этих свойств пока нет, и поэтому мы не можем ввести скалярное произведение аналогичным способом. Однако такое произведение можно определить исходя из алгебраических свойств, которые были установлены для пространства V_3.

Определение 2.3. Линейное пространство $\mathcal{E}$ называют ***евклидовым пространством***, если в этом пространстве задано ***скалярное умножение***, т.е. закон или правило, согласно которому каждой паре *векторов* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{E}$ поставлено в соответствие действительное число $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, называемое ***скалярным произведением***. При этом выполняются следующие ***аксиомы скалярного умножения***:

а) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$;
б) $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$;
в) $(\lambda\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \lambda\,(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, $\lambda \in \mathbb{R}$;
г) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geqslant 0$, причем $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$ лишь в случае, когда $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

Скалярное произведение часто обозначают так же, как и произведение чисел, т.е. вместо $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ пишут $\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}$. Скалярное произведение вектора на себя называют ***скалярным квадратом*** (по аналогии с квадратом числа).

Пример 2.7. В линейном пространстве V_3 было введено скалярное умножение согласно правилу

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{x}| \cdot |\boldsymbol{y}| \cos(\widehat{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}}),$$

где $\widehat{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}}$ — угол между векторами $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, а $|\boldsymbol{x}|$, $|\boldsymbol{y}|$ — их длины. Это умножение удовлетворяет приведенным аксиомам скалярного умножения и, следовательно, полностью согласуется с определением 2.3. Таким образом, линейное пространство V_3 относительно указанной операции является евклидовым пространством.

Пример 2.8. В *линейном арифметическом пространстве* $\mathbb{R}^n$ формула

$$(\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{y}) = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$$

вводит скалярное умножение, поскольку выполняются аксиомы скалярного умножения. Указанное скалярное умножение векторов из $\mathbb{R}^n$ иногда называют ***стандартным***, а само $\mathbb{R}^n$ — ***евклидовым арифметическим пространством***.

Пример 2.9. В произвольном *n-мерном линейном пространстве* $\mathcal{L}$ всегда можно ввести скалярное произведение, причем различными способами. Выберем в этом пространстве некоторый *базис* $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$. Для произвольных векторов $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n$ и $\boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + y_n\boldsymbol{e}_n$ положим

$$(\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{y}) = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n.$$

Нетрудно убедиться, что аксиомы скалярного умножения выполняются, т.е. n-мерное линейное пространство становится евклидовым. Отметим, что разным базисам будут соответствовать, вообще говоря, разные операции скалярного умножения.

Задание скалярного произведения через *координаты векторов* в некотором базисе можно рассматривать как обобщение стандартного скалярного произведения в $\mathbb{R}^n$: компоненты $x_1, x_2, \ldots, x_n$ вектора $(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n) \in \mathbb{R}^n$ являются координатами этого вектора относительно *стандартного базиса* в линейном арифметическом пространстве.

Пример 2.10. Линейное пространство $C[0,\,1]$ всех функций, непрерывных на отрезке $[0,\,1]$, тоже становится евклидовым, если в нем ввести скалярное умножение

$$(f,\, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx.$$

Убедимся, используя свойства определенного интеграла, что эта операция — действительно скалярное умножение.

Аксиома а):

$$(f,\, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx = \int\limits_0^1 g(x)f(x)\,dx = (g,\, f)\,.$$

Аксиома б):

$$(f_1 + f_2,\, g) = \int\limits_0^1 \bigl(f_1(x) + f_2(x)\bigr)g(x)\,dx = \int\limits_0^1 f_1(x)g(x)\,dx + \int\limits_0^1 f_2(x)g(x)\,dx = (f_1,\, g) + (f_2,\, g)\,.$$

Аксиома в):

$$(\lambda f,\, g) = \int\limits_0^1 \bigl(\lambda f(x)\bigr)g(x)\,dx = \lambda\int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx = \lambda\,(f,\, g)\,.$$

Аксиома г):

$$(f,\, f) = \int\limits_0^1 f(x)f(x)\,dx = \int\limits_0^1 f^2(x)\,dx \geqslant 0.$$

Из свойств непрерывных функций следует, что последнее неравенство превращается в равенство только в случае, когда $f(x) \equiv 0$. #

Непосредственно из аксиом скалярного умножения следует ряд его простейших свойств. Далее $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ — произвольные векторы евклидова пространства, а λ — действительное число.

Свойство 2.1. $(\boldsymbol{x},\, \lambda\boldsymbol{y}) = \lambda\,(\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{y})$.

◀ Это свойство аналогично аксиоме в) скалярного умножения и вытекает из равенств

$$(\boldsymbol{x},\, \lambda\boldsymbol{y}) = (\lambda\boldsymbol{y},\, \boldsymbol{x}) = \lambda\,(\boldsymbol{y},\, \boldsymbol{x}) = \lambda\,(\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{y})\,,$$

которые выполнены в силу этой аксиомы и коммутативности скалярного умножения (аксиома а)). ▶

Свойство 2.2. $(\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{z})$.

◀ Это свойство аналогично аксиоме б) и следует из равенств

$$(\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z},\, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{y},\, \boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{z},\, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{z})\,,$$

которые выполнены в силу этой аксиомы и коммутативности скалярного умножения. ▶

Свойство 2.3. $(\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{0}) = 0$.

◀ Утверждение следует из свойства 2.1:

$$(\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{0}) = (\boldsymbol{x},\, 0\cdot\boldsymbol{0}) = 0\,(\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{0}) = 0. \qquad ▶$$

Свойство 2.4. $\Bigl(\sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k \boldsymbol{x}_k,\, \boldsymbol{y}\Bigr) = \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k\,(\boldsymbol{x}_k,\, \boldsymbol{y})$, где $\alpha_k \in \mathbb{R}$, $k = \overline{1,\, m}$.

◀ Утверждение является обобщением аксиом б) и в) и выражает собой многократное применение этих аксиом. Доказательство базируется на *методе математической индукции*, который проводится по количеству m слагаемых в формуле. При $m = 1$ формула совпадает с аксиомой в) скалярного умножения. Пусть формула верна для некоторого значения m. Тогда

$$\begin{aligned}
&\Bigl(\sum_{k=1}^{m+1} \alpha_k \boldsymbol{x}_k,\, y\Bigr) = \Bigl(\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \boldsymbol{x}_k + \alpha_{m+1}\boldsymbol{x}_{m+1},\, y\Bigr) = \boxed{\text{аксиома б)}} = \\
&\quad = \Bigl(\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \boldsymbol{x}_k,\, y\Bigr) + (\alpha_{m+1}\boldsymbol{x}_{m+1},\, y) = \boxed{\begin{array}{l}\text{предположение}\\ \text{математической}\\ \text{индукции}\end{array}} = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k\,(\boldsymbol{x}_k,\, y) + (\alpha_{m+1}\boldsymbol{x}_{m+1},\, y) = \\
&\qquad = \boxed{\text{аксиома в)}} = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k\,(\boldsymbol{x}_k,\, y) + \alpha_{m+1}\,(\boldsymbol{x}_{m+1},\, y) = \sum_{k=1}^{m+1} \alpha_k\,(\boldsymbol{x}_k,\, y)\,. \qquad ▶
\end{aligned}$$

Свойство 2.5. Если векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ евклидова пространства $\mathcal{E}$ таковы, что для любого $\boldsymbol{z} \in \mathcal{E}$ выполнено равенство $(\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{y},\, \boldsymbol{z})$, то эти векторы совпадают: $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$.

◀ Это свойство не является достаточно очевидным и интуитивно понятным, но играет важную роль в некоторых доказательствах. Чтобы доказать это свойство, преобразуем равенство $(\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{y},\, \boldsymbol{z})$ в форму $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},\, \boldsymbol{z}) = 0$, воспользовавшись аксиомой б). Полученное равенство верно для любого вектора $\boldsymbol{z}$, в частности, оно верно для вектора $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$: $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},\, \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) = 0$. Последнее же равенство, согласно аксиоме г), может выполняться только в случае, когда $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$. ▶

2.5. Неравенство Коши — Буняковского

Теорема 2.2. Для любых *векторов* $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ *евклидова пространства* $\mathcal{E}$ справедливо ***неравенство Коши — Буняковского***

$$(\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{y})^2 \leqslant (\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{x})\,(\boldsymbol{y},\,\boldsymbol{y})\,. \tag{2.3}$$

◀ При $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ обе части неравенства (2.3) равны нулю согласно свойству 2.3, значит, неравенство выполняется. Отбрасывая этот очевидный случай, будем считать, что $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$. Для любого действительного числа λ, в силу аксиомы г), выполняется неравенство

$$(\lambda\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y},\,\lambda\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \geqslant 0. \tag{2.4}$$

Преобразуем левую часть неравенства, используя *аксиомы* и свойства *скалярного умножения*:

$$(\lambda\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y},\,\lambda\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = \lambda\,(\boldsymbol{x},\,\lambda\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) - (\boldsymbol{y},\,\lambda\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = \lambda^2\,(\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{x}) - 2\lambda\,(\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y},\,\boldsymbol{y})\,.$$

Мы получили квадратный трехчлен относительно параметра λ (коэффициент $(\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{x})$ при λ^2 согласно аксиоме г) ненулевой, так как $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$), неотрицательный при всех действительных значениях параметра. Следовательно, его дискриминант равен нулю или отрицательный, т.е.

$$(\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{y})^2 - (\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{x})\,(\boldsymbol{y},\,\boldsymbol{y}) \leqslant 0. \qquad \blacktriangleright$$

Пример 2.11. Доказательство неравенства Коши — Буняковского выглядит достаточно просто. Тем не менее это неравенство очень полезное. Применяя его в конкретных евклидовых пространствах, мы получаем некоторые хорошо известные в анализе и алгебре неравенства.

В случае *линейного арифметического пространства* $\mathbb{R}^n$ неравенство Коши — Буняковского трансформируется в ***неравенство Коши***:

$$(a_1b_1 + \ldots + a_nb_n)^2 \leqslant (a_1^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + \ldots + b_n^2).$$

В евклидовом пространстве $C[0,\,1]$, скалярное произведение в котором выражается определенным интегралом (см. пример 2.10), неравенство Коши — Буняковского превращается в ***неравенство Буняковского*** (называемое также ***неравенством Шварца***):

$$\left(\int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx\right)^2 \leqslant \int\limits_0^1 f^2(x)\,dx \int\limits_0^1 g^2(x)\,dx.$$

Неравенство Коши — Буняковского позволяет ввести понятие угла между векторами в евклидовом пространстве, обобщающее понятие угла между *свободными векторами* в пространствах V_2 и V_3. Отметим, что если в пространствах свободных векторов определение *скалярного произведения* базируется на понятии угла между векторами, то в произвольном евклидовом пространстве наоборот, аксиоматически заданное скалярное произведение позволяет определить угол.

Определение 2.4. ***Углом*** φ ***между*** *ненулевыми* ***векторами*** $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ в евклидовом пространстве $\mathcal{E}$ называют значение φ на отрезке от 0 до π, определяемое равенством

$$\cos\varphi = \frac{(\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{y})}{\sqrt{(\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{x})}\sqrt{(\boldsymbol{y},\,\boldsymbol{y})}} = \frac{(\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\|}, \tag{2.5}$$

где $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{(\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{x})}$ и $\|\boldsymbol{y}\| = \sqrt{(\boldsymbol{y},\,\boldsymbol{y})}$.

Согласно *неравенству Коши — Буняковского* (2.3) правая часть в (2.5) по модулю не превышает 1 и потому является косинусом некоторого действительного числа. Следовательно, угол φ определен корректно для любой пары ненулевых векторов.

Равенство (2.5) не имеет смысла, если один из векторов нулевой. В этом случае угол между векторами не определен, и мы будем приписывать ему то значение, которое наиболее удобно в конкретной ситуации (то же соглашение действует и в пространствах свободных векторов).

Пример 2.12. В $\mathbb{R}^4$ со *стандартным скалярным умножением* угол φ между векторами $x = (1,\ 0,\ 1,\ 0)$ и $y = (1,\ 1,\ 0,\ 0)$ равен $\pi/3$, поскольку в соответствии с (2.5)

$$\cos\varphi = \frac{1\cdot 1 + 0\cdot 1 + 1\cdot 0 + 0\cdot 0}{\sqrt{1^2+0^2+1^2+0^2}\sqrt{1^2+1^2+0^2+0^2}} = \frac{1}{2}.$$

Аналогично в евклидовом пространстве $C[0,\ 1]$ (см. пример 2.10) угол φ между функциями $f(x) \equiv 2$ и $g(x) = 2x - 1$ равен $\pi/2$, так как

$$(f,\ g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx = \int\limits_0^1 2(2x-1)\,dx = 2(x^2 - x)\Big|_0^1 = 0$$

и в соответствии с (2.5) $\cos\varphi = 0$.

2.6. Норма вектора

В *линейном пространстве* обобщением понятия длины *свободного вектора* является норма. Длину вектора в линейном пространстве V_3 или V_2 можно рассматривать как функцию, определенную на множестве V_3 (соответственно V_2), которая каждому вектору ставит в соответствие число — его длину. Эта функция обладает некоторыми характерными свойствами, которые и служат основой для определения нормы в линейном пространстве. Норму вектора в линейном пространстве иногда называют длиной, имея в виду связь с аналогичным термином векторной алгебры.

Определение 2.5. Функцию, заданную на линейном пространстве $\mathcal{L}$, которая каждому вектору $\boldsymbol{x} \in \mathcal{L}$ ставит в соответствие действительное число $\|\boldsymbol{x}\|$, называют ***нормой***, если она удовлетворяет следующим ***аксиомам нормы***:

а) $\|\boldsymbol{x}\| \geqslant 0$, причем равенство $\|\boldsymbol{x}\| = 0$ возможно только при $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$;
б) $\|\lambda\boldsymbol{x}\| = |\lambda|\,\|\boldsymbol{x}\|$, $\lambda \in \mathbb{R}$;
в) $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \leqslant \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$ (***неравенство треугольника***).

Как утверждает следующая теорема, исходя из скалярного умножения в евклидовом пространстве можно задать норму.

Теорема 2.3. Всякое скалярное умножение в евклидовом пространстве определяет норму согласно формуле

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})}. \tag{2.6}$$

◄ Отметим, что, согласно аксиоме г) скалярного умножения, $(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}) \geqslant 0$ и, следовательно, функция, заданная соотношением (2.6), определена для всех векторов $\boldsymbol{x}$ евклидова пространства. Проверим выполнение аксиом нормы. Аксиома 1) нормы немедленно следует из аксиомы г) скалярного умножения (определение 2.3). Аксиома 2) нормы вытекает из аксиомы в) скалярного умножения и свойства 2.1:

$$\|\lambda\boldsymbol{x}\| = \sqrt{(\lambda\boldsymbol{x},\ \lambda\boldsymbol{x})} = \sqrt{\lambda^2\,(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})} = \sqrt{\lambda^2}\sqrt{(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})} = |\lambda|\,\|\boldsymbol{x}\|\,.$$

Остается проверить аксиому 3) нормы, для чего мы воспользуемся *неравенством Коши — Буняковского* (2.3), которое можно записать в виде

$$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) \leqslant \sqrt{(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})}\sqrt{(\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{y})}$$

или, с учетом (2.6),

$$(\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{y}) \leqslant \|\boldsymbol{x}\|\, \|\boldsymbol{y}\|\,.$$

Используя это неравенство, получаем

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 = (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{x}) + 2\,(\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y},\, \boldsymbol{y}) \leqslant$$
$$\leqslant (\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{x}) + 2\,\|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\| + (\boldsymbol{y},\, \boldsymbol{y}) = (\|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|)^2\,. \qquad ►$$

2.7. Ортогональные системы векторов

Определение 2.6. Два вектора в *евклидовом пространстве* называют ***ортогональными***, если их *скалярное произведение* равно нулю.

Ортогональность векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ будем обозначать так: $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$. Отметим, что, согласно свойству 2.3 скалярного умножения, *нулевой вектор* ортогонален любому другому.

Евклидово пространство — это, согласно определению 2.3, частный случай *линейного пространства*, и поэтому можно говорить о его *линейных подпространствах* в смысле определения 2.1. Каждое из таких линейных подпространств является евклидовым пространством относительно скалярного умножения, заданного в объемлющем евклидовом пространстве.

Говорят, что вектор $\boldsymbol{x}$ в евклидовом пространстве $\mathcal{E}$ ***ортогонален подпространству*** $\mathcal{H}$, и обозначают $\boldsymbol{x} \perp \mathcal{H}$, если он ортогонален каждому вектору этого подпространства.

Если $\mathcal{H} = \operatorname{span}\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k\}$, то условие $\boldsymbol{x} \perp \mathcal{H}$ равносильно тому, что вектор $\boldsymbol{x}$ ортогонален каждому вектору $\boldsymbol{a}_1$, ..., $\boldsymbol{a}_k$. Действительно, если $\boldsymbol{x}$ ортогонален $\mathcal{H}$, то, согласно определению, он ортогонален и каждому вектору $\boldsymbol{a}_1$, ..., $\boldsymbol{a}_k$. Докажем противоположное утверждение. Пусть $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{a}_i$, $i = \overline{1,\, k}$, и $\boldsymbol{y} \in \mathcal{H}$. Тогда вектор $\boldsymbol{y}$ является *линейной комбинацией* векторов $\boldsymbol{a}_i$:

$$\boldsymbol{y} = \alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \ldots + \alpha_k \boldsymbol{a}_k,$$

и поэтому, согласно свойству 2.4,

$$(\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{y}) = \alpha_1\,(\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{a}_1) + \ldots + \alpha_k\,(\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{a}_k) = 0.$$

В частности, если векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{a}$ ортогональны, то для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ векторы $\boldsymbol{x}$ и $\lambda\boldsymbol{a}$ тоже ортогональны:

$$(\boldsymbol{x},\, \lambda\boldsymbol{a}) = \lambda\,(\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{a}) = 0.$$

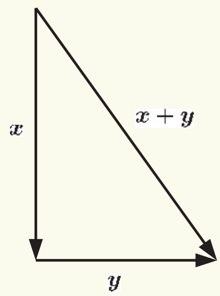


Рис. 2.4

В пространстве V_3 *ненулевым* ортогональным *векторам* $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ можно сопоставить катеты прямоугольного треугольника, причем так, что их сумме, построенной по правилу треугольника, будет соответствовать гипотенуза этого прямоугольного треугольника (рис. 2.4). По аналогии с V_3 мы назовем в евклидовом пространстве сумму $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ ортогональных векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ гипотенузой треугольника, построенного на $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$. Тогда на произвольное евклидово пространство распространяется известная ***теорема Пифагора***.

Теорема 2.4. Если векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ из евклидова пространства ортогональны, то

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2\,.$$

◄ Здесь под *нормой* мы, как обычно, понимаем *евклидову норму*. Выразим левую часть этого равенства через скалярное произведение и воспользуемся условием ортогональности $(\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{y}) = 0$:

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 = (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{x}) + 2\,(\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y},\, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2\,. \qquad ►$$

Определение 2.7. *Систему векторов* евклидова пространства называют ***ортогональной***, если любые два вектора из этой системы ортогональны.

Следующее свойство ортогональной системы является самым важным.

Теорема 2.5. Любая ортогональная *система* ненулевых *векторов линейно независима.*

◄ Рассмотрим произвольную ортогональную систему ненулевых векторов $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m$. Предположим, что для некоторых действительных коэффициентов $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ выполняется равенство

$$\alpha_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + \alpha_m\boldsymbol{e}_m = \mathbf{0}. \tag{2.7}$$

Умножим это равенство скалярно на какой-либо вектор $\boldsymbol{e}_i$:

$$(\alpha_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + \alpha_i\boldsymbol{e}_i + \ldots + \alpha_m\boldsymbol{e}_m,\, \boldsymbol{e}_i) = (\mathbf{0},\, \boldsymbol{e}_i)\,.$$

В силу свойства 2.3 скалярного произведения правая часть полученного равенства равна нулю, и мы, преобразуя левую часть в соответствии со свойством 2.4, получаем

$$\alpha_1\,(\boldsymbol{e}_1,\, \boldsymbol{e}_i) + \ldots + \alpha_i\,(\boldsymbol{e}_i,\, \boldsymbol{e}_i) + \ldots + \alpha_m\,(\boldsymbol{e}_1,\, \boldsymbol{e}_i) = 0.$$

Так как система векторов ортогональна, то все слагаемые слева, кроме одного, равны нулю, т.е.

$$\alpha_i\,(\boldsymbol{e}_i,\, \boldsymbol{e}_i) = 0. \tag{2.8}$$

Так как вектор $\boldsymbol{e}_i$ ненулевой, то $(\boldsymbol{e}_i,\, \boldsymbol{e}_i) \neq 0$ (*аксиома* 4 *скалярного умножения*). Поэтому из (2.8) следует, что $\alpha_i = 0$. Индекс i можно было выбирать произвольно, так что на самом деле все коэффициенты α_i являются нулевыми. Мы доказали, что равенство (2.7) возможно лишь при нулевых коэффициентах, а это, согласно определению 1.2, означает, что система векторов $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m$ линейно независима. ►

Пример 2.13. В евклидовом пространстве $C[0,\, \pi]$ система функций $\cos kx$, $k = \overline{1,\, n}$, является ортогональной, поскольку

$$(\cos kx,\, \cos lx) = \int\limits_0^{\pi} \cos kx \cos lx\, dx = 0$$

при $k, l = \overline{1,\, n}$, $k \neq l$.

Евклидово пространство является *линейным пространством.* Поэтому правомерно говорить о его *размерности* и его *базисах.* Как и произвольные линейные пространства, евклидовы пространства можно разделить на *бесконечномерные* и *конечномерные.*

Если базис евклидова пространства представляет собой *ортогональную систему векторов*, то этот базис называют ***ортогональным***. В силу теоремы 2.5 любая ортогональная *система* ненулевых *векторов линейно независима*, и если она в n-мерном евклидовом пространстве состоит из n векторов, то является базисом.

В линейном пространстве все базисы равноправны. В евклидовом же пространстве наличие *скалярного умножения* позволяет выделить среди всех базисов ортогональные и ортонормированные, которые более удобны и играют в линейной алгебре роль, аналогичную роли *прямоугольной системы координат* в аналитической геометрии.

Определение 2.8. Ортогональный базис называют ***ортонормированным***, если каждый вектор этого базиса имеет *норму* (*длину*), равную единице.

Дополнительное требование к нормам векторов в ортонормированном базисе в принципе не является существенным, так как любой ортогональный базис легко преобразовать в ортонормированный, умножая векторы на соответствующие нормирующие коэффициенты (разделив каждый вектор базиса на его длину). Однако дополнительная нормировка векторов упрощает изложение теории.

Пример 2.14. Система из трех векторов $\boldsymbol{a} = (1,\ 0,\ -1)$, $\boldsymbol{b} = (1,\ 0,\ 1)$, $\boldsymbol{c} = (0,\ 1,\ 0)$ в *евклидовом арифметическом пространстве* $\mathbb{R}^3$ образует ортогональный базис, потому что $(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}) = 0$. Этот базис не является ортонормированным, так как, например, $\|a\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \neq 1$. Чтобы этот базис сделать ортонормированным, нужно векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ разделить на их нормы, т.е. на число $\sqrt{2}$.

Пример 2.15. Векторы $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ образуют ортонормированный базис в пространстве V_2 свободных векторов на плоскости. Точно так же векторы $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ образуют ортонормированный базис в пространстве V_3.

Использование *ортонормированных базисов* облегчает вычисление *скалярного произведения* по *координатам векторов*. Пусть в *евклидовом пространстве* $\mathcal{E}$ задан некоторый базис $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{e}_n)$. Рассмотрим два произвольных вектора $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ в этом пространстве. Эти векторы представляются в базисе $\boldsymbol{e}$ своими координатами:

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n, \qquad \boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + y_n\boldsymbol{e}_n.$$

Запишем эти *разложения векторов по базису* в матричной форме:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}x, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}y, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Скалярное произведение векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ может быть выражено через скалярные произведения векторов базиса:

$$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = \Bigl(\sum_{i=1}^{n} x_i\boldsymbol{e}_i,\ \sum_{j=1}^{n} y_j\boldsymbol{e}_j\Bigr) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_iy_j\,(\boldsymbol{e}_i,\ \boldsymbol{e}_j)\,.$$

Составив из скалярных произведений базисных векторов квадратную матрицу $\Gamma = \bigl((\boldsymbol{e}_i,\ \boldsymbol{e}_j)\bigr)$ порядка n, мы можем записать скалярное произведение заданных векторов в матричной форме:

$$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = x^{\mathrm{T}}\Gamma y.$$

Матрица Γ является симметрической в силу коммутативности операции скалярного умножения. Ее называют ***матрицей Грама*** системы векторов $\boldsymbol{e}_1,\ \ldots,\ \boldsymbol{e}_n$.

Пусть базис $\boldsymbol{e}$ является ортонормированным. Тогда скалярное произведение $(\boldsymbol{e}_i,\ \boldsymbol{e}_j)$ при несовпадающих i и j равно нулю, а скалярные квадраты базисных векторов равны $\boldsymbol{e}_i^2 = \|\boldsymbol{e}_i\|^2 = 1$. Это значит, что для ортонормированного базиса матрица Γ является единичной. Поэтому

$$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = x^{\mathrm{T}}Ey = x^{\mathrm{T}}y = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n.$$

В частности, в ортонормированном базисе *норма* вектора $\boldsymbol{x}$, которая выражается через скалярный квадрат этого вектора, может быть вычислена по формуле

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})} = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} = \sqrt{x^{\mathrm{T}}x}, \tag{2.9}$$

а для косинуса *угла* φ *между* ненулевыми *векторами* $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ получаем выражение

$$\cos\varphi = \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n}{\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}\sqrt{y_1^2 + \ldots + y_n^2}}. \tag{2.10}$$

В ортонормированном базисе $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ также упрощается вычисление координат вектора: они выражаются через скалярные произведения. Если $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n$, то, умножив равенство скалярно на вектор $\boldsymbol{e}_i$, находим, что

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_i) = x_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Пример 2.16. В евклидовом арифметическом пространстве $\mathbb{R}^4$ найдем угол между векторами $\boldsymbol{a} = (-1,\ 1,\ 0,\ 2)$ и $\boldsymbol{b} = (2,\ -1,\ 1,\ 0)$. Согласно формуле (2.10),

$$\cos\varphi = \frac{(-1)\cdot 2 + 1\cdot(-1) + 0\cdot 1 + 2\cdot 0}{\sqrt{(-1)^2+1^2+0^2+2^2}\,\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2+0^2}} = \frac{-3}{\sqrt{6}\,\sqrt{6}} = -\frac{1}{2}.$$

ОГЛАВЛЕНИЕ