Глава 8. Элементы линейного программирования

8.1. Построение математических моделей

Методы линейного программирования используются для анализа некоторых экономических проблем. Чтобы использовать эти методы, нужно прежде всего построить математическую модель экономического явления. Процесс построения математической модели называют *формализацией задачи*. Для построения модели надо:

1) Идентифицировать независимые переменные и параметры задачи. Заметим, что по смыслу задачи переменные могут принимать как произвольные вещественные значения, так и целые значения (последнее является дополнительным ограничением).

2) Построить целевую функцию задачи, т. е. функцию независимых переменных, для которой в ходе решения будет отыскиваться максимальное или минимальное значение.

3) Установить ограничения (равенства или неравенства), которым удовлетворяют независимые переменные задачи.

В данном разделе будем изучать только линейные модели, в которых целевая функция линейна относительно независимых переменных, а ограничения – линейные уравнения и неравенства.

Пример (задача об оптимальном плане). Фабрика выпускает краски двух видов: I и II. Продукция обоих видов поступает в оптовую продажу. Для производства красок используют два исходных продукта A и B, максимально возможные суточные запасы которых составляют 6 и 8 т соответственно. Расходы продуктов A и B на производство одной тонны каждого вида краски приведены ниже в таблице:

Исходный продукт	Расход исходных продуктов (в тоннах) на тонну краски		Максимально возможный запас, т
	Краска I	Краска II	
A	1	2	6
B	2	1	8

Изучение рынка сбыта показало, что суточный спрос на краску II никогда не превышает суточного спроса на краску I более, чем на 1 тонну. Кроме того, установлено, что спрос на краску II никогда не превышает 2 тонн в сутки. Оптовые цены одной тонны краски I – 3 тыс. ден. ед., краски II - 2 тыс. ден. ед. Какое количество краски каждого вида должна производить фабрика, чтобы доход от реализации продукции был максимальным?

Решение. Переменными в задаче являются x_1 - суточный объем производства краски I, x_2 - суточный объем производства краски II (в тоннах). Целевая функция задачи отражает доход от продажи краски двух видов:

$$z = 3x_1 + 2x_2.$$

Построим ограничения задачи. Расход исходного продукта *A* на производство одной тонны каждого вида краски в сутки не должен превышать 6 т. Нормы расхода приведены в таблице. Получаем ограничение:

$$x_1 + 2x_2 \le 6.$$

Расход исходного продукта *B* на производство одной тонны каждого вида краски в сутки не должен превышать 8 т. С учетом норм расхода получим ограничение

$$2x_1 + x_2 \le 8.$$

Условие, что превышение спроса на краску II над спросом на краску I составляет не более одной тонны в сутки, дает ограничение

$$x_2 - x_1 \le 1,$$

а условие, что спрос на краску II не превышает 2 тонн в сутки, имеет вид

$$x_2 \le 2.$$

Очевидно, что объемы производства красок неотрицательны, поэтому добавляем ограничения

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Итак, математическая модель имеет вид

$$z = 3x_1 + 2x_2 \to \max,$$
$$x_1 + 2x_2 \le 6,$$
$$2x_1 + x_2 \le 8,$$
$$-x_1 + x_2 \le 1,$$
$$x_1 \ge 0,\ 0 \le x_2 \le 2.$$

В задаче нужно найти значения переменных x_1, x_2, удовлетворяющие построенным ограничениям, при которых целевая функция достигает своего максимального значения (доход фабрики максимален).

Пример (задача о диете). Студентка выбирает молочную диету из трех продуктов: молока, сметаны и простокваши. В таблице ниже приведено содержание белков, жиров и углеводов в порции из 100 г каждого из продуктов. Цены стограммовых порций составляют: молоко - 15 коп., сметана - 40 коп., простокваша - 20 коп. Составить рацион так, чтобы ежедневные затраты на продукты были минимальны, но была обеспечена суточная потребность студентки в питательных веществах (белки – 96 г/с, жиры – 90 г, углеводы – 383 г).

Продукты	Белки, г/100 г	Жиры, г/100 г	Углеводы, г/100 г
Молоко	3,0	2,5	4,7
Сметана	2,4	9,0	2,9
Простокваша	3,1	4,0	4,0

Решение. Пусть x_1, x_2, x_3 - количества ежедневных стограммовых порций молока, сметаны и простокваши соответственно.

Целевая функция задачи выражает общие затраты на покупку упомянутых выше продуктов:

$$z = 15x_1 + 40x_2 + 20x_3 \to \min.$$

Построим ограничения задачи. Количество белка, содержащееся в трех продуктах должно быть не меньше суточной потребности в белках, т.е. 96 г. Получим неравенство

$$3x_1 + 2{,}4x_2 + 3{,}1x_3 \geq 96.$$

Аналогично составляем ограничения, связанные с потреблением жиров и углеводов:

$$2{,}5x_1 + 9x_2 + 4x_3 \geq 90,$$

$$4{,}7x_1 + 2{,}9x_2 + 4x_3 \geq 383.$$

Очевидно, что объемы потребляемых продуктов неотрицательны, поэтому добавляем естественные ограничения

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0.$$

Таким образом, математическая модель имеет вид

$$z = 15x_1 + 40x_2 + 20x_3 \to \min,$$

$$3x_1 + 2{,}4x_2 + 3{,}1x_3 \geq 96,$$

$$2{,}5x_1 + 9x_2 + 4x_3 \geq 90,$$

$$4{,}7x_1 + 2{,}9x_2 + 4x_3 \geq 383,$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0.$$

Общая задача линейного программирования имеет вид

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max\ (\min),$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i,\ i=\overline{1,s},$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ i=\overline{s+1,m},$$

$$x_j \ge 0,\ j=\overline{1,t},$$

$$x_j \text{ - произвольные, } j=\overline{t+1,n}.$$

Канонической формой записи задачи линейного программирования называют следующую форму:

$$z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ i=\overline{1,m},$$

$$x_j \ge 0,\ j=\overline{1,n},\ b_i \ge 0,\ i=\overline{1,m}$$

т. е. это задача линейного программирования, в которой целевую функцию надо максимизировать, все ограничения задачи – равенства, правые части которых неотрицательны, все переменные задачи неотрицательны.

Переход к канонической форме: 1) от задачи минимизации переходят к задаче максимизации: вместо целевой функции z рассматривают функцию $\tilde{z}=-z$; 2) чтобы перейти от неравенств к равенствам в ограничениях задачи, нужно ввести в левые части неравенств вспомогательные неотрицательные переменные (взятые со знаком «+» или «–» в зависимости от типа неравенства); 3) переменные, на которые не наложено условие неотрицательности, представляют в виде разности двух новых неотрицательных переменных; 4) добиться того, чтобы правые части стали неотрицательными, можно умножением на (–1) обеих частей неравенств в исходной задаче или уравнений в преобразованной задаче.

Пример. Записать задачу линейного программирования в канонической форме.

$$z=2x_1+3x_2-x_3 \to \min,$$

$$x_1+2x_2-4x_3 \ge 1,$$

$$2x_1-x_2+x_3 \le 3,$$

$$-3x_1+x_2+3x_3=-1,$$

$$x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0.$$

Решение. Заменим z на $-z$ и обозначим $\tilde{z}=-z$, получим:

$$\tilde{z} = -2x_1 - 3x_2 + x_3 \to \max .$$

Из левой части первого неравенства вычтем новую неотрицательную переменную x_4, к левой части второго неравенства прибавим новую неотрицательную переменную x_5, последнее равенство умножим на (-1):

$$x_1 + 2x_2 - 4x_3 - x_4 = 1,$$
$$2x_1 - x_2 + x_3 + x_5 = 3,$$
$$3x_1 - x_2 - 3x_3 = 1.$$

Поскольку по условию x_1 является переменной произвольного знака, заменим ее разностью двух новых неотрицательных переменных x_1' и x_1'':

$$x_1 = x_1' - x_1''$$

и придем к задаче в канонической форме:

$$\tilde{z} = -2x_1 - 3x_2 + x_3 \to \max,$$
$$x_1' - x'' + 2x_2 - 4x_3 - x_4 = 1,$$
$$2x_1' - 2x'' - x_2 + x_3 + x_5 = 3,$$
$$3x_1' - 3x'' - x_2 - 3x_3 = 1,$$
$$x_1', x_1'', x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0.$$

Предлагаемый ниже (в п. 8.4) симплекс-метод решения задач линейного программирования применим только к задачам в канонической форме.

8.2. О решении задач линейного программирования

Определение. Набор чисел $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, удовлетворяющий ограничениям задачи линейного программирования, называется *планом задачи линейного программирования*.

Определение. План $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ задачи линейного программирования называется *оптимальным*, если $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = z_{\max}$, т.е. целевая функция принимает на этом плане свое максимальное значение.

Замечание. Для задачи линейного программирования возможны следующие ситуации:

1. Нет ни одного плана, а, следовательно, и оптимального.
2. Существуют планы задачи, однако целевая функция на множестве планов не ограничена.
3. Существуют планы задачи, и целевая функция достигает на множестве планов своего максимального (минимального) значения. В по-

следнем случае может оказаться, что оптимальный план является неединственным.

8.3. Геометрическая интерпретация задач линейного программирования. Графический метод решения

Описанные выше варианты разрешимости задачи линейного программирования действительно имеют место. Рассмотрим частный случай задачи, когда число переменных равно двум, обе переменные неотрицательны, все ограничения имеют вид неравенств. Для определенности будем считать, что требуется искать максимальное значение целевой функции, т.е. рассматривается задача:

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 \to \max,$$

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 \le b_i, \; i = \overline{1,\ldots,m},$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Первый шаг графического метода решения задач линейного программирования – построение множества планов задачи, т.е. пересечения полуплоскостей, точки которых удовлетворяют неравенствам-ограничениям.

Возможны три варианта:

1. В пересечении получится плоская фигура, лежащая в первом квадранте координатной плоскости (см. рис.8.1a)).
2. Множество планов – неограниченное множество точек 1 квадранта (см. рис. 8.1 b)).
3. Пересечение пусто (см. рис. 8.1 c)).

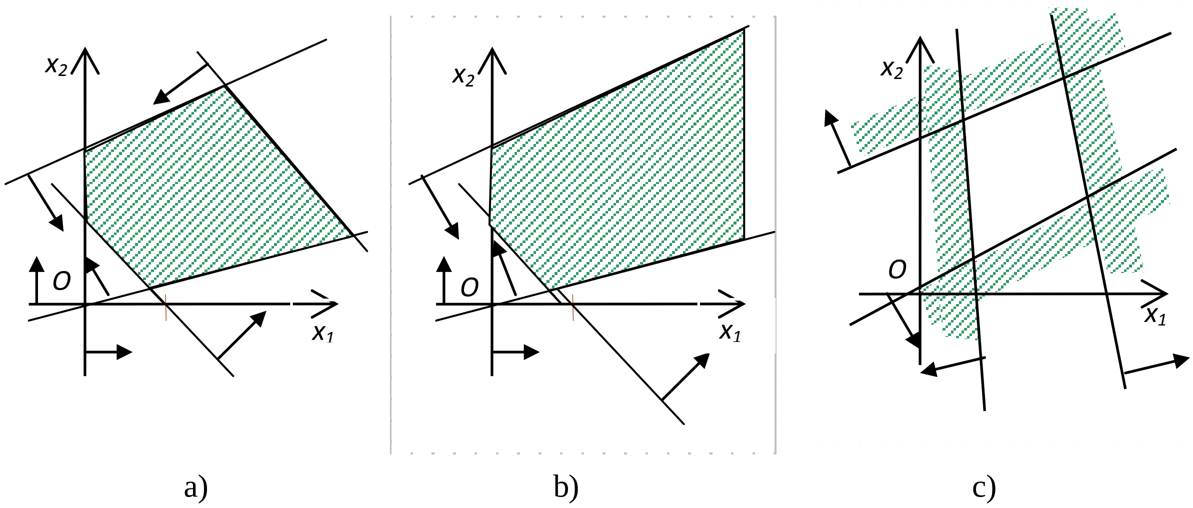


Рис.8.1. Построение множества планов в задаче линейного программирования

Для отыскания максимального значения целевой функции достаточно рассматривать ее значения только в вершинах фигуры *D*.

Замечание. Планы, соответствующие вершинам фигуры *D*, будем называть *опорными планами* задачи линейного программирования.

Второй шаг графического метода состоит в отыскании оптимального плана. Множество точек плоскости Ox_1x_2, для которых значение целевой функции равно некоторому числу C, определяется уравнением $C = c_1x_1 + c_2x_2$. Различным значениям C соответствуют прямые на плоскости Ox_1x_2, параллельные между собой. Максимальное значение функции z будет достигаться в точке пересечения с множеством планов той прямой, для которой значение постоянной C максимально (см. рис. 8.3).

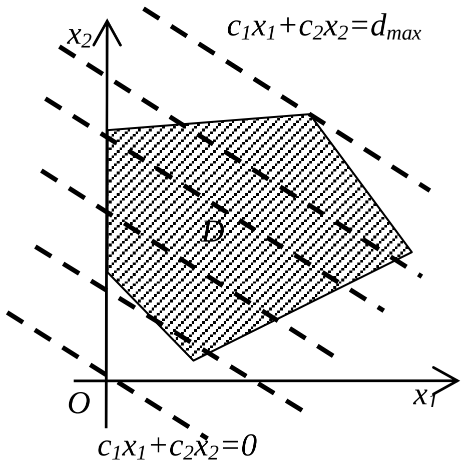


Рис. 8.2. Возрастание целевой функции

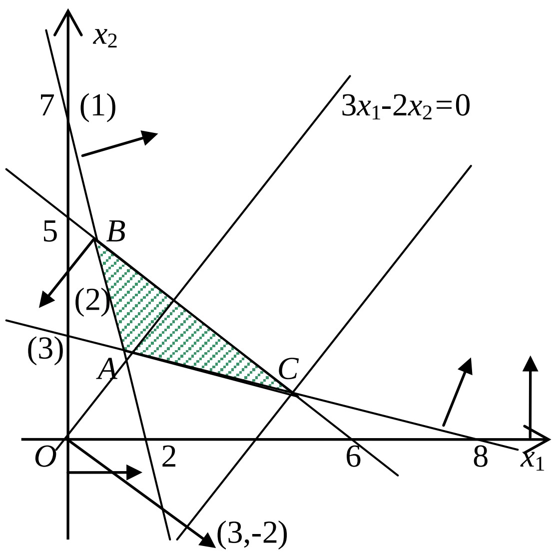


Рис. 8.3. Решение примера 8.1.

На практике обычно используют следующий метод. Строится только одна прямая, например, при $C = 0$. Нахождение оптимального плана состоит в параллельном переносе прямой $c_1x_1 + c_2x_2 = 0$ в направлении возрастания функции z, задаваемом вектором $\vec{n} = (c_1; c_2) = grad\, z$. Направление возрастания можно найти, например, вычислив значение целевой функции в некоторой точке, не лежащей на прямой $c_1x_1 + c_2x_2 = 0$.

Пример 8.1. $z = 3x_1 - 2x_2 \to \max$,

$$7x_1 + 2x_2 \ge 14, \ (1)$$
$$5x_1 + 6x_2 \le 30, \ (2)$$
$$3x_1 + 8x_2 \ge 24, \ (3)$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \ (4),(5)$$

Находим множество планов задачи – это фигура *ABC*. Строим прямую $3x_1 - 2x_2 = 0$. Возьмем любую точку, не лежащую на данной прямой, например, точку (3,0), подставим в целевую функцию $3\cdot 3 - 2\cdot 0 = 9 > 0$. Максимальное значение целевой функции z находится при смещении прямой в направлении вектора (3,-2), указанном на рис. 8.3 стрелкой, до тех пор, пока у нее остаются общие точки с множеством планов, т.е. в точке C – пересечении прямых $3x_1 + 8x_2 = 24$ и $5x_1 + 6x_2 = 30$:

$$\begin{cases} 3x_1 + 8x_2 = 24, \\ 5x_1 + 6x_2 = 30. \end{cases}$$

Решаем систему, например, методом Крамера:

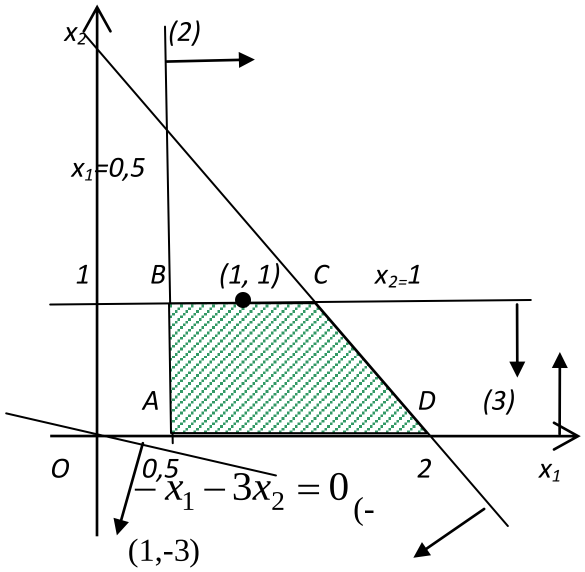
$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 3\cdot 6 - 5\cdot 8 = -22,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 24 & 8 \\ 30 & 6 \end{vmatrix} = 6\cdot 2 \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 12(4\cdot 3 - 5\cdot 4) = -96, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 24 \\ 5 & 30 \end{vmatrix} = 90 - 120 = -30.$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-96}{-22} = \frac{48}{11}, \ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-30}{-22} = \frac{15}{11}.$$

Подставим эти значения в целевую функцию, получим $z_{\max} = 141/11$.

Ответ: $X_{\text{opt}} = (48/11, 15/11), z_{\max} = 141/11$.



Пример 8.2.

$z = -x_1 - 3x_2 \to \max$,

$$3x_1 + 2x_2 \le 6, \quad (1)$$
$$x_1 \ge 0{,}5, \quad (2)$$
$$0 \le x_2 \le 1. \quad (3)$$

Рис.8.4. Решение примера 8.2

Построим множество планов. Это фигура *ABCD* (см. рис. 8.4). Построим прямую $-x_1 - 3x_2 = 0$. Определим в какую сторону нужно ее смещать, чтобы найти максимальное значение $z_{\max}$. Возьмем любую точку, не лежащую на данной прямой, например, точку (1, 1):

$$-1\cdot 1-3\cdot 1=-4<0.$$

При смещении прямой в направлении (-1,-3), указанном на рис. 8.4 стрелкой, функция z возрастает, а в противоположном – убывает. Наибольшее значение целевой функции z достигается в точке $A(1/2,0)$.

Ответ: $z_{\max} = z\left(\frac{1}{2},\quad 0\right) = -\frac{1}{2}$.

Пример 8.3.

$z = 6x_1 + 4x_2 \to \max$,

$3x_1 + 6x_2 \le 6$, (1)

$2x_1 \ge 1$, (2)

$0 \le x_2 \le 1$. (3)

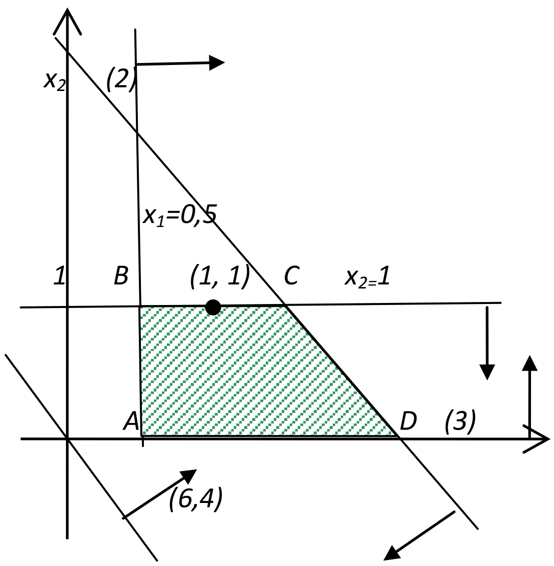
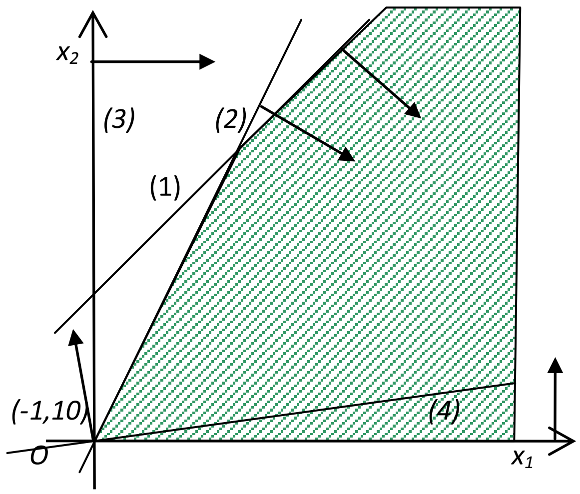


Рис. 8.5. Решение примера 8.3

В данной задаче множество планов – четырёхугольник *ABCD*. Построим прямую $6x_1 + 4x_2 = 0$. Возьмем некоторую точку плоскости, не лежащую на данной прямой, например, точку (1,1): $6\cdot 1+4\cdot 1=10>0$. Для отыскания максимального значения целевой функции, прямую нужно перемещать в направлении (6,4), указанном стрелкой на рис.8.5.

Очевидно, что прямая $6x_1 + 4x_2 = 0$ параллельна одной из сторон трапеции *ABCD*, поэтому в «крайнем» своем положении эта прямая содержит отрезок *CD*. Т.о., максимальное значение целевой функции достигается на множестве точек отрезка *CD*, в частности в точке *D*=(2,0). Получаем $z_{\max} = 6\cdot 2 + 4\cdot 0 = 12$.



Пример 8.4.

$$z = -x_1 + 10x_2 \to \max,$$

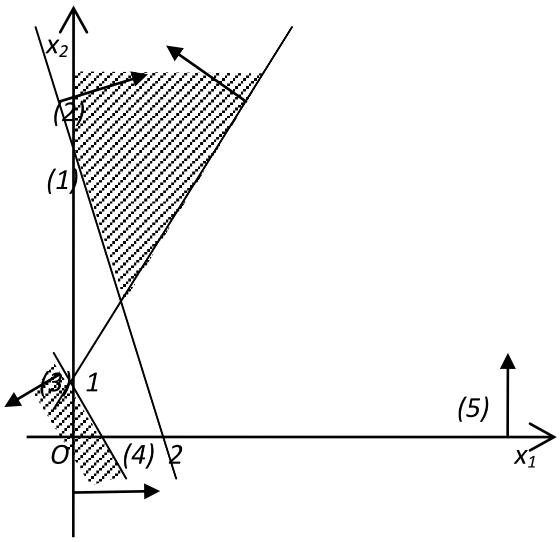
$$x_1 - \tfrac{1}{2}x_2 \ge 0, (1)$$

$$x_1 - x_2 \ge -1, (2)$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. (3), (4)$$

Рис. 8.6. Решение примера 8.4

Множество планов задачи – бесконечная область. Построим прямую $-x_1 + 10x_2 = 0$. Подставим в целевую функцию координаты точки, например, (1,1), не лежащей на прямой $-x_1 + 10x_2 = 0 : -1 + 10 \cdot 1 = 9 > 0$. Значит, для отыскания максимального значения целевой функции, прямую $-x_1 + 10x_2 = 0$ нужно смещать в направлении вектора (-1,10) (см. рис. 8.6). Заметим, что угол наклона прямой $-x_1 + 10x_2 = 0$ меньше угла .наклона прямой $x_1 - x_2 = -1$. Поэтому прямая $-x_1 + 10x_2 = C$ имеет с множеством планов общие точки при любом $C > 0$. Таким образом, функция не ограничена на множестве планов.



Пример 8.5.

$$z = -2x_1 + 5x_2 \to \max,$$

$$7x_1 + 2x_2 \ge 14, (1)$$

$$-x_1 + 2x_2 \ge 2, (2)$$

$$3x_1 + 2x_2 \le 2, (3)$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. (4), (5)$$

Рис. 8.7. Решение примера 8.5

Решаем графически систему ограничений. В данном случае множество планов задачи пусто (см. рис 8.7).

8.4. Симплекс-метод решения задач линейного программирования

Симплекс-метод разработан американским математиком Дж.Данцигом в 1947 году.

Метод применяется к задачам, записанным в канонической форме:

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \tag{8.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = \overline{1,m}, \tag{8.2}$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,n},\ b_i \geq 0,\ i = \overline{1,m} \tag{8.3}$$

Рассмотрим систему уравнений (8.2). Будем предполагать, что она совместна и ранг матрицы системы равен r. Пусть он меньше числа переменных n и равен числу уравнений системы m ($r = m$). Равенство $r = m$ означает, что никакими элементарными преобразованиями строк нельзя получить в матрице нулевые строки, т. е. система (8.2) не содержит «лишних» ограничений. В матрице системы найдется минор порядка m, отличный от нуля m переменных, соответствующих базисному минору, назовем базисным, а остальные $n - m$ переменных – свободными.

Свободным переменным придадим нулевые значения, а значения базисных переменных единственным образом определяются из системы (8.2). Если окажется, что значения базисных переменных неотрицательны, как того требуют условия (8.3) задачи, то тем самым построен начальный план задачи (8.1) - (8.3). План, в котором $n - m$ свободных переменных имеют нулевые значения, называется *опорным*.

Симплекс-метод – это метод целенаправленного перебора опорных планов задачи, при котором на каждом следующем шаге значение целевой функции не меньше, чем на предыдущем.

Рассмотрим частный случай задачи (8.1) – (8.3), в котором легко построить начальный опорный план – задачу в разрешенной форме:

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \tag{8.4}$$

$$\begin{cases} x_1 + \ldots + a_{1,m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \quad x_2 + \ldots + a_{2,m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{8.5}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}. \tag{8.6}$$

В системе (8.5) базисными переменными являются $x_1, x_2, ..., x_m$, а переменные $x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n$ - свободными. Начальный опорный план задачи имеет вид $X_0 = (b_1, b_2, ..., b_m, 0, ..., 0)$.

Выразим базисные переменные через свободные и подставим в целевую функцию (8.4). Перенесем слагаемые, содержащие свободные переменные, в левую часть преобразованного равенства (8.4), получим:

$$z + d_{m+1}x_{m+1} + \ldots + d_n x_n = b_0 \tag{8.4'}$$

Коэффициенты $d_{m+1}, d_{m+2}, ..., d_n$ называются *относительными оценками* плана X_0.

Замечание. Приведение уравнения (8.4) к виду (8.4') может быть осуществлено в таблице (см. табл.1). Нужно произвести элементарные преобразования строк таблицы с тем, чтобы в нижней строке получить нули на местах относительных оценок, соответствующих базисным переменным.

Таблица 1.

Базисные переменные (БП)	Базисные значения (БЗ)	x_1	x_2	…	x_m	x_{m+1}	…	x_n
x_1	b_1	1	0	…	0	$a_{1,m+1}$	…	a_{1n}
x_2	b_2	0	1	…	0	$a_{2,m+1}$	…	a_{2n}
…	…	…	…	…	…	…	…	…
x_m	b_m	0	0	…	1	$a_{m,m+1}$	…	a_{mn}
z	b_0	0	0	…	0	d_{m+1}	…	d_n

Если в последней строке все относительные оценки неотрицательны, то план X_0 является оптимальным планом задачи. Если хотя бы одна из относительных оценок отрицательна, переходят к новому опорному плану.

Симплекс-метод устроен так, что на каждом шаге только одна переменная выводится из числа базисных и вместо нее базисной становится одна из свободных переменных. Выбор этих переменных производится таким образом, чтобы обеспечить рост целевой функции на наибольшую величину. В новый план будет включена в качестве базисной та из свободных переменных, которой соответствует наибольшая по модулю отрицательная относительная оценка. Пусть, например, это x_s.

Рассмотрим столбец переменной x_s. Если все элементы этого столбца неположительны, то целевая функция не ограничена на множестве планов. В противном случае в столбце переменной x_s выбираем положительные значения и для них строим так называемые симплексные отношения $\frac{b_i}{a_{is}}, a_{is} > 0$. Находим

$$\min_{a_{is}>0}\left\{\frac{b_i}{a_{is}}\right\} = \frac{b_k}{a_{ks}}.$$

Соответствующая переменная x_k становится свободной и принимает значение 0. Теперь система ограничений будет разрешена относительно новых базисных переменных (включая x_s и исключая x_k), а переменная x_s должна быть исключена из целевой функции.

Эти преобразования производятся в таблице. С помощью элементарных преобразований строк преобразуем столбец, соответствующий переменной x_s, в столбец единичной матрицы (единица стоит в k-той строке), а относительную оценку d_s - в нуль. При этом во втором столбце таблицы будут стоять значения новых базисных переменных, которые являются неотрицательными в силу выбора x_s.

Пример. Решить задачу линейного программирования симплекс-методом

$$z = 3x_1 + x_2 \to \max,$$
$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 2,$$
$$2x_1 + x_2 + x_4 = 2,$$
$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4}.$$

Решение. Задача разрешена относительно переменных x_3, x_4. Таким образом, x_3, x_4 - базисные, а x_1, x_2 - свободные переменные. Полагаем свободные переменные $x_1 = 0, x_2 = 0$, из системы находим значения базисных переменных $x_3 = 2, x_4 = 2$. Получим начальный опорный план задачи $X_0 = (0, 0, 2, 2)$. Запишем данные в таблицу

БП	БЗ	x_1	x_2	x_3	x_4
x_3	2	1	-1	1	0
x_4	2	$\boxed{2}$	1	0	1
z	0	-3	-1	0	0

В z-строке есть отрицательные относительные оценки, следовательно, план X_0 неоптимален. Выбираем наибольшую по модулю отрицательную относительную оценку $d_1 = -3$. Это означает, что на следующем шаге алгоритма переменная x_1 станет базисной. Просматриваем соответствующий ей столбец. В столбце есть положительные элементы. Для них строим симплексные отношения и выбираем наименьшее из них:

$$\min\left\{\frac{2}{1}, \frac{2}{2}\right\} = \frac{2}{2}.$$

Минимум достигается для элементов строки x_4. Это означает, что переменная x_4 станет свободной, а переменная x_1 станет базисной вместо нее. Строка x_4 называется *разрешающей строкой*, столбец x_1 - *разрешающим столбцом*, элемент, стоящий на их пересечении, называют *разрешающим элементом*.

Чтобы перейти к новой таблице, нужно с помощью разрешающей строки преобразовать строки первой таблицы так, чтобы новой базисной переменной x_1 соответствовал столбец $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Сначала разделим элементы разрешающей строки на разрешающий элемент 2.

БП	БЗ	x_1	x_2	x_3	x_4
x_3	1	0	-3/2	1	-1/2
x_1	1	1	1/2	0	1/2
z	3	0	1/2	0	3/2

Все относительные оценки в новой таблице неотрицательны. Полученный план $X_0 = (1, 0, 1, 0)$ является оптимальным, $z_{\max} = 3$.

Пример. Решить задачу линейного программирования симплекс-методом

$$z = -x_3 + x_4 + x_5 \to \max\ ,$$

$$x_1 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 1,$$
$$x_2 - 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 1,$$
$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5}.$$

Решение. Очевидно в задаче x_1, x_2 - базисные, а x_3, x_4, x_5 - свободные переменные. Полагаем свободные переменные $x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0$, из системы находим значения базисных переменных $x_1 = 1, x_2 = 1$. Получим начальный опорный план задачи $X_0 = (1, 1, 0, 0, 0)$. Запишем данные в таблицу

БП	БЗ	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	1	1	0	1	2	-1
x_2	1	0	1	-4	1	2
z	0	0	0	1	-1	-1

Относительные оценки $d_4 = d_5 = -1$. Можно выбрать любую из них, например, $d_5 = -1$. В соответствующем столбце только один положительный элемент в строке x_2. Это означает, что переменная x_5 станет базисной вместо переменной x_2. Переходим к новой таблице. Поделим разрешающую строку x_2 на 2.

БП	БЗ	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	5/2	1	0	-1	5/2	0
x_2	1/2	0	1/2	-2	1/2	1
z	1/2	0	1/2	-1	-1/2	0

В разрешающей строке есть отрицательные элементы, следовательно, полученный опорный план неоптимален. Выбираем наибольшую по модулю отрицательную оценку $d_3 = -1$. В соответствующем столбце все элементы неположительны. Это означает, что целевая функция не ограничена на множестве планов.

8.5. Метод искусственного базиса

В общем случае бывает трудно построить начальный опорный план или установить, что он не существует (т.е. система ограничений неразрешима). *Метод искусственного базиса* заключается в добавлении новых неотрицательных переменных в левые части ограничений. В оптимальном решении они должны стать равными нулю, поскольку эти переменные не имеют отношения к содержанию исходной задачи. Рассматривается вспомогательная w-задача, в которой целевая функция w есть сумма новых переменных, взятая со знаком минус:

$$w = -(x_{n+1} + ... + x_{n+1}) \to \max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + ... + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1, n+m}.$$

У этой задачи есть очевидный начальный опорный план $\tilde{X}_0 = (0, ..., 0, b_1, b_2, ..., b_m)$.

В w-задаче возможны два варианта ответа:

1) Все искусственные переменные ушли из числа базисных и $w = 0$. Таким образом, построен начальный план исходной z-задачи. Далее ее решают симплекс-методом.

2) В оптимальном плане w-задачи остались искусственные переменные, значения которых отличны от нуля, т.е. оптимальное значение w меньше нуля. Это означает, что исходная z-задача не имеет планов вообще.

Пример. Решить задачу линейного программирования методом искусственного базиса

$$z = -4x_1 - x_2 \to \max,$$

$$3x_1 + x_2 = 3,$$

$$4x_1 + 3x_2 - x_3 = 6,$$

$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 4,$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$$

Решение. Рассмотрим w-задачу. Введем в первое и второе уравнения неотрицательные искусственные переменные x_5, x_6 (в третьем уравнении есть переменная, которую можно принять за базисную – x_4).

$$w = -x_5 - x_6 \to \max$$

$$3x_1 + x_2 + x_5 = 3,$$

$$4x_1 + 3x_2 - x_3 + x_6 = 6,$$

$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 4,$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,6}.$$

Решаем полученную задачу симплекс-методом. В таблице предусмотрены две строки для функции w, поскольку целевая функция заведомо содержит базисные переменные, которые на первом шаге должны быть исключены. Чтобы выразить функцию w только через свободные переменные, вычтем из первой w-строки сумму строк x_5, x_6. Результат запишем во вторую w-строку, с помощью которой решаем задачу далее.

БП	БЗ	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_5	3	3	1	0	0	1	0
x_6	6	4	3	-1	0	0	1
x_4	4	1	2	0	1	0	0
w	0	0	0	0	0	1	1
w	-9	-7	-4	1	0	0	0
z	0	4	1	0	0	-	-

Во второй w-строке есть отрицательные относительные оценки, выбираем наибольшую по модулю $d_1 = -7$. Для элементов соответствующего столбца строим симплексные отношения и выбираем наименьшее из них:

$$\min\left\{\frac{3}{3}, \frac{6}{4}, \frac{4}{1}\right\} = \frac{3}{3}.$$

Это означает, что переменная x_1 станет базисной вместо переменной x_5. Выполняем симплексные преобразования и переходим к новой таблице:

БП	БЗ	x_1	x_2	x_3	x_4	x_6
x_1	1	1	1/3	0	0	0
x_6	2	0	5/3	-1	0	1
x_4	3	0	5/3	0	1	0
w	-2	0	-5/3	1	0	0
z	-4	0	-1/3	0	0	-

В w-строке есть отрицательная относительная оценка $d_2 = -5/3$. Выполняем соответствующий шаг симплекс-метода и получаем:

БП	БЗ	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	3/5	1	0	1/5	0
x_2	6/5	0	1	-3/5	0
x_4	1	0	0	1	1
w	0	0	0	0	0
z	-18/5	0	0	-1/5	0

Все относительные оценки в w-строке неотрицательны и искусственные переменные ушли из числа базисных. На этом шаге построен исходный опорный план z-задачи. Анализируем теперь относительные оценки в z-строке. Среди них есть отрицательная в столбце x_3. Это означает, что исходный опорный план неоптимален. Посредством симплексных преобразований переходим к новому опорному плану

БП	БЗ	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	2/5	1	0	0	-1/5
x_2	9/5	0	1	0	3/5
x_3	1	0	0	1	1
z	-17/5	0	0	0	1/5

Все относительные оценки в z-строке неотрицательны, следовательно, построен оптимальный план исходной задачи.

Ответ: $X_{\text{опт}} = \left(\frac{2}{5}, \frac{9}{5}, 1, 0\right)$, $z_{\max} = -\frac{17}{5}$.

8.6. Элементы теории двойственности

Рассмотрим задачу о производственном плане. Пусть предприятие располагает некоторыми ресурсами в объемах $b_1, b_2, ..., b_m$ единиц, которые используются для производства n видов продукции.

Известна стоимость единицы j-го вида продукции c_j, ($j = \overline{1,n}$) и нормы расхода i-го ресурса на производство единицы продукции j-го вида a_{ij} ($i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$). Требуется определить объем производства продукции каждого вида x_j, ($j = \overline{1,n}$), максимизирующий суммарную стоимость произведенной продукции:

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}.$$

Сформулируем экономическую задачу, двойственную к данной. Предположим, что некоторая фирма хочет закупать ресурсы, которыми располагает предприятие. Требуется определить оптимальные цены на ресурсы y_i^*, ($j=\overline{1,n}$), исходя из естественного условия, что фирма стремится минимизировать свои расходы на приобретение ресурсов, а предприятие стремится получить сумму, не меньшую, чем при организации собственного производства. Функция g выражает общую оценку ресурсов. Математическая модель задачи имеет вид:

$$g = b_1x_1 + b_2x_2 + ... + b_mx_m \to \min$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + ... + a_{m1}y_m \ge c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{m2}y_m \ge c_2, \\ .... \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + ... + a_{mn}y_m \ge c_n, \end{cases}$$

$$y_i \ge 0,\ j = \overline{1,m}.$$

Эти задачи образуют симметричную пару *взаимно двойственных задач*.

Правила построения двойственной задачи

Пусть дана задача линейного программирования

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i,\ i = \overline{1,m_1},\ m_1 < m,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ i = \overline{m_1+1,m},$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n_1},\ n_1 < n,$$

x_j - произвольного знака, $j = \overline{n_1+1,n}$.

1) Запись исходной задачи должна быть упорядочена. Если ищут максимум целевой функции, то в ограничениях типа неравенств должен быть знак «≤», если ищут минимум - знак «≥». Обеспечить выполнение этих условий можно умножением обеих частей неравенств на (-1).

2) Если в одной из пары взаимно двойственных задач нужно искать максимальное значение целевой функции, то в другой – минимальное.

Вектор коэффициентов при неизвестных в целевой функции исходной задачи совпадает с вектором правых частей системы ограничений двойственной задачи.

Вектор правых частей системы ограничений исходной задачи совпадает с вектором коэффициентов при неизвестных в целевой функции двойственной задачи.

3) Каждой переменной исходной задачи соответствует ограничение двойственной задачи и каждому ограничению исходной задачи соответствует переменная двойственной задачи.

4) Матрица коэффициентов ограничений транспонируется.

5) Тем переменным исходной задачи, на которые наложено условие неотрицательности, в двойственной задаче соответствуют ограничения-неравенства «правильного» знака (знак «≤» в задаче на максимум и знак «≥» в задаче минимум). Переменным произвольного знака исходной задачи соответствуют ограничения-равенства в двойственной задаче.

Пример. Построить задачу, двойственную данной задаче линейного программирования:

$$f = 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 \to \min,$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 \le 8, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 6, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \le 5, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_4 + 3x_5 \ge 7, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_4 \ge 0.$$

Решение. Упорядочим систему ограничений. В задаче на минимум должны быть ограничения со знаком «≥». Первое и третье неравенства умножим на (–1).

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 + x_5 \ge -8, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 6, \\ -x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \ge -5, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_4 + 3x_5 \ge 7. \end{cases}$$

Запишем коэффициенты и правые части ограничений исходной задачи в виде матрицы:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -3 & 2 & -1 & -1 & 1 & -8 \\ 1 & 3 & 1 & 3 & -2 & 6 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & -5 \\ 2 & -5 & 0 & 1 & 3 & 7 \\ \hline 2 & -1 & 1 & 1 & -2 & f(\min) \end{array}\right).$$

Транспонируем матрицу и получим матрицу коэффициентов двойственной задачи

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -3 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -5 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 3 & -2 \\ \hline -8 & 6 & -5 & 7 & g(\max) \end{array}\right).$$

В исходной задаче пять переменных x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 и четыре ограничения. В двойственной задаче будет соответственно пять ограничений и четыре переменных y_1, y_2, y_3, y_4. Переменные $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_4 \geq 0$. Это означает, что первое, второе и четвертое ограничения в двойственной задаче будут неравенствами со знаком «$\leq$», поскольку двойственная задача – задача на максимум. На переменные x_3, x_5 в условии не наложены ограничения, значит, они могут иметь любой знак и им соответствуют ограничения-равенства в двойственной задаче.

Запишем теперь двойственную задачу:

$$g = -8y_1 + 6y_2 - 5y_3 + 7y_4 \to \min,$$

$$\begin{cases} -3y_1 + y_2 - y_3 + 2y_4 \leq 2, \\ 2y_1 + 3y_2 - y_3 - 5y_4 \leq -1, \\ -y_1 + y_2 - y_3 = 1, \\ -y_1 + 3y_2 + y_3 + y_4 \leq 1, \\ y_1 - 2y_2 + 3y_4 = -2, \end{cases}$$

$$y_1 \geq 0,\ y_3 \geq 0,\ y_4 \geq 0.$$

8.7 Задачи

Построить математическую модель.

8.1. Для производства трех видов изделий *A*, *B* и *C* используется три различных вида сырья. Каждый из видов сырья может быть использован в количестве, соответственно не большем 180, 210 и 244 кг. Нормы затрат каждого из видов сырья на единицу продукции данного вида и цена единицы продукции приведена в таблице ниже. Определить план выпуска продукции, при котором обеспечивается максимальная ее стоимость.

Вид сырья	Нормы затрат сырья (кг) на единицу продукции		
	A	*B*	*C*
I	4	2	1
II	3	1	3
III	1	2	5
Цена единицы продукции (ден. ед.)	10	14	12

8.2. Трикотажная фабрика использует для производства свитеров и кофточек чистую шерсть, силон и нитрон, запасы которых составляют соответственно 900, 400 и 300 кг. Количество пряжи каждого вида (в кг), необходимой для изготовления 10 изделий, а также прибыль, получаемая от реализации, приведены в таблице. Установить план выпуска, максимизирующий прибыль.

Вид сырья	Затраты пряжи на 10 шт. изделий	
	Свитера	Кофточки
Шерсть	4	2
Силон	2	1
Нитрон	1	1
Прибыль	6	5

8.3. Требуется составить смесь, содержащую три химических вещества *A*, *B* и *C*. Известно, что смесь должна содержать вещества *A* не более 6 единиц, вещества *B* не менее 8 единиц, вещества *C* – не менее 12 единиц. Вещества *A*, *B* и *C* содержатся в трех видах продуктов – I, II, III. Количество единиц каждого вещества в единице каждого продукта указано в таблице. Стоимость единицы продукта I – 2 ден. ед., продукта II – 3 ден. ед., продукта III - 2,5 ден. ед. Смесь надо составить так, чтобы стоимость используемых продуктов была наименьшей.

Продукты	Химические вещества		
	A	*B*	*C*
I	2	1	3
II	1	2	4
III	3	1,5	2

8.4. Фирма по пошиву одежды выпускает женские костюмы и платья из тканей двух видов. На платье расходуется ткани одного вида 2,0 м^2 и второго – 0,8 м^2., а на костюм соответственно 2,2 м^2 и 1,0 м^2. Доход фирмы от реализации одного платья составляет 6 ден.ед., одного костюма – 10 ден. ед. Определить сколько платьев и сколько костюмов надо сшить, чтобы получить максимальную прибыль, если ткани первого вида имеется в наличии 200 м^2, а второго – 70 м^2.

8.5. Завод выпускает изделия трех моделей (I, II, III). Для их изготовления используется два вида ресурсов (*A* и *B*), запасы которых составляют 4000 и 6000 штук. Нормы расходов ресурсов на производство одного изделия каждого вида приведены в таблице ниже

Изделия	Ресурсы	
	A	*B*
I	2	4
II	3	2
III	5	7

Трудоемкость изготовления изделия I вдвое больше, чем изделия II, и втрое больше, чем изделия III. Минимальный спрос на продукцию равен 200, 200 и 150 соответственно. Прибыли от реализации одного изделия каждого вида – 30, 20 и 50 ден. ед. соответственно. Сформулируйте задачу максимизации прибыли.

8.6. Для сохранения здоровья и работоспособности человеку требуется в сутки определенное количество питательных веществ: белков, жиров, углеводов, воды и витаминов. Запасы этих веществ в продуктах $П_1$, $П_2$, $П_3$ неодинаковы (см. таблицу ниже). Цена продукта $П_1$ равна 20 ден. ед., $П_2$- 40 ден. ед., $П_3$- 60 ден. ед. Требуется составить рацион из этих продуктов, чтобы организм получил нужное количество питательных веществ и чтобы стоимость потребляемых за день продуктов была бы минимальной.

Питательные вещества	Минимальная норма	Продукты		
		$П_1$	$П_2$	$П_3$
Жиры	10	1	5	1
Белки	12	3	1	1
Углеводы	16	2	4	8
Вода	10	2	3	2
Витамины	5	1	0	6

Решить графически

8.7. $z = 4x_1 + 4x_2 \to \max,$
$$2x_1 + 7x_2 \le 21,$$
$$7x_1 + 2x_2 \le 49,$$
$$x_1 \ge 0,$$
$$x_2 \ge 0.$$

8.8. $z = 2x_1 + x_2 \to \max,$
$$x_1 - 2x_2 \le 4,$$
$$x_1 - x_2 \le 6,$$
$$-x_1 - x_2 \ge -3,$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

8.9. $z = 2x_1 + x_2 \to \max,$
$$x_1 - 2x_2 \le 4,$$
$$x_1 - x_2 \le 0,$$
$$-x_1 - x_2 \ge -3,$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

8.10 $z = x_1 + 3x_2 \to \max,$
$x_1 - x_2 \le 1,$
$2x_1 + x_2 \le 2,$
$x_1 - x_2 \ge 0,$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

8.11 $z = x_1 + 2x_2 + 4 \to \max,$
$2x_1 + 4x_2 \le 8,$
$3x_1 \le 6,$
$-5x_2 \ge -5,$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

8.12 $z = x_1 - 2x_2 \to \min,$
$x_1 - x_2 \le 1,$
$x_1 + x_2 \ge 2,$
$x_1 - 2x_2 \ge 0,$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

8.13 $z = x_1 \to \max,$
$x_1 - 2x_2 \le 0,$
$x_1 - x_2 \ge -1,$
$x_1 + x_2 \ge 1,$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

8.14 $z = x_1 - x_2 \to \max,$
$x_1 + x_2 \le 2,$
$2x_1 - 2x_2 \le 3,$
$12x_1 - x_2 \le 2,$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

8.15 $z = 2x_1 + x_2 \to \max,$
$-x_1 + x_2 \le 1,$
$x_1 - 3x_2 \le 1,$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

Решить симплекс-методом задачу линейного программирования

8.16 $z = x_1 + x_2 \to \max,$
$3x_1 + 2x_2 \le 6,$
$x_1 + 4x_2 \le 4,$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

8.17. $z = x_3 - x_4 - x_5 \to \min,$
$x_1 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 1,$
$x_2 - 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 1,$
$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$

8.18. $z = x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 \to \min,$
$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4,$
$-2x_2 + 4x_3 + x_4 = 2,$
$2x_2 + x_3 + x_5 = 1,$
$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$

8.19. $z = x_1 + 3x_2 \to \max,$
$x_1 - x_2 \le 1,$
$2x_1 + x_2 \le 2,$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

8.20. $z = 2x_1 + x_2 \to \max,$
$-x_1 + x_2 \le 1,$
$x_1 - 3x_2 \le 0,$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

8.21. $z = -2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 \to \min,$
$x_1 - 2x_2 + x_4 = 3,$
$x_2 + x_3 - 2x_4 = 5,$
$2x_2 + x_4 + x_5 = 4,$
$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$

8.22. $z = 8x_1 + 6x_2 \to \max,$
$5x_1 + 2x_2 + x_3 = 20,$
$6x_1 + 12x_2 + x_4 = 72,$
$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}$

8.23. $z = 5x_1 + 3x_2 \to \max,$
$x_1 + x_2 \le 4,$
$5x_1 + 2x_2 \le 10,$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

С помощью метода искусственного базиса решить задачу линейного программирования

8.24. $z = 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 \to \min$,

$$x_1 + x_2 - x_4 = 3,$$
$$x_2 + x_3 - x_4 = 1,$$
$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 1,$$
$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$$

8.25. $z = -4x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \to \max$,

$$2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 1,$$
$$2x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 = 0,$$
$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$$

8.26. $z = x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 \to \max$,

$$x_1 + x_2 - x_4 = 3,$$
$$x_1 - x_2 + 3x_4 = -1,$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 5,$$
$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$$

8.27. $z = x_1 + x_2 + x_3 \to \max$,

$$-2x_1 + x_2 + x_3 = 4,$$
$$-x_1 + 2x_2 - x_3 = -1,$$
$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}.$$

8.28. $z = 8x_1 + 2x_2 - 3x_3 \to \min$,

$$x_1 + x_2 + x_3 \le 5,$$
$$3x_1 + x_2 - x_3 = -3,$$
$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}.$$

8.29. $z = 3x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 \to \max$,

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0,$$
$$2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 9,$$
$$x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 6,$$
$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$$

8.30. $z = x_1 - 2x_2 + 4x_3 \to \min$,

$$2x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 2,$$
$$x_3 - x_4 = 1,$$
$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}$$

8.31. $z = x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 - x_6 \to \max$,

$$x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 + 4x_5 + x_6 = 6,$$
$$x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_6 = 2,$$
$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,6}$$

Записать задачу линейного программирования в канонической форме и построить двойственную задачу данной.

8.32.

$$z = 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 \to \max,$$
$$x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 5,$$
$$2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 \le 8,$$
$$x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 \le 9,$$
$$-x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 - x_5 \ge 4,$$
$$x_1 \ge 0,\ x_3 \ge 0.$$

8.33.

$$z = x_1 + 5x_2 + 2x_3 \to \min,$$

$$
\begin{aligned}
&2x_1 - 3x_2 + x_3 \le 2,\\
&-x_1 + 3x_2 \le 5,\\
&3x_1 - 2x_2 + 4x_3 \ge 3,\\
&x_1 + x_2 + 3x_3 \ge 4,\\
&x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}.
\end{aligned}
$$

8.34.

$$z = 5x_1 + 6x_2 + 13x_3 \to \min,$$

$$
\begin{aligned}
&5x_1 + 4x_2 + 11x_3 \ge 2,\\
&-x_1 + x_2 \le 2,\\
&x_2 + x_3 \ge 3,\\
&2x_1 + 3x_2 + 6x_3 \ge 1,\\
&5x_1 - 6x_2 - x_3 \le -15,\\
&x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}.
\end{aligned}
$$

8.35.

$$z = 4x_1 + 6x_2 \to \max,$$

$$
\begin{aligned}
&2x_1 + 5x_2 \le 1,\\
&3x_1 - x_2 \ge 2,\\
&-x_1 + x_3 \le 3,\\
&x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.
\end{aligned}
$$