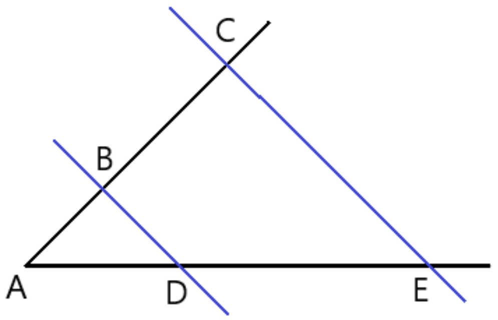
Место для уравнения.

Полезные математические теоремы:

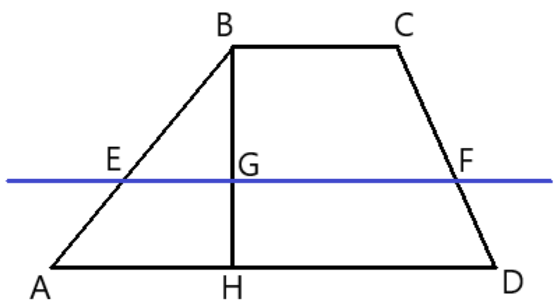
Теорема о пропорциональных отрезках

Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают от его сторон пропорциональные отрезки.

Если BD||CE, то AB:BC = AD:DE

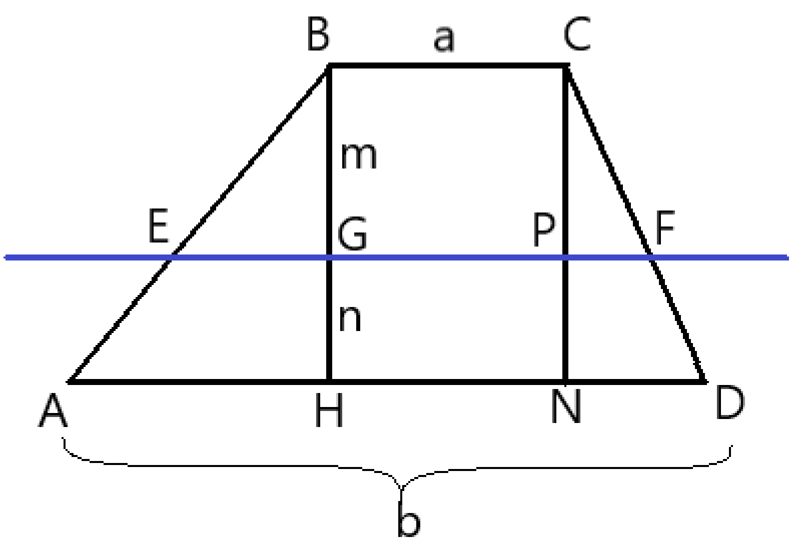


Если BC||EF||AD, то BE:AE = BG:HG = CF:FD



Отрезок, параллельный основаниям трапеции

В трапеции отрезок, параллельный основанию, можно выразить как $a + \frac{m}{m+n} * (b-a)$, где a, b m, n – отрезки, обозначенные на рисунке:



Дано:

Трапеция ABCD, BC||EF||AD, BC = a, AD = b, BG = m, HG = n, BH и CN – высоты

Доказать:

$EF = a + \frac{m}{m+n} * (b-a)$

Доказательство:

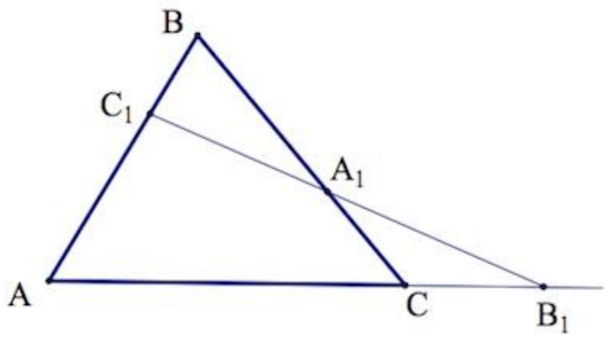
Место для уравнения.

Δ ABH ~ Δ EBH по двум углам (соответственные BEG и BAH, прямые BGE и BHA)[1], откуда $\frac{EG}{AH}$ = $\frac{m}{m+n}$, EG = AH*$\frac{m}{m+n}$, аналогично в треугольниках PFC и NDC, откуда PF = ND*$\frac{m}{m+n}$. GP = a. EF = GP + EG + PF = a + AH*$\frac{m}{m+n}$ + ND*$\frac{m}{m+n}$ = a + $\frac{m}{m+n}$*(AH+ND) = a + $\frac{m}{m+n}$*(b-a), ч. т. д.

____

[1]Также можно доказать подобие через теорему о пропорциональных отрезках ($\frac{BE}{AB}$ = $\frac{BG}{BH}$, то есть $\frac{BE}{AB}$ = $\frac{m}{m+n}$) и общий ∠ABH.

Теорема Менелая

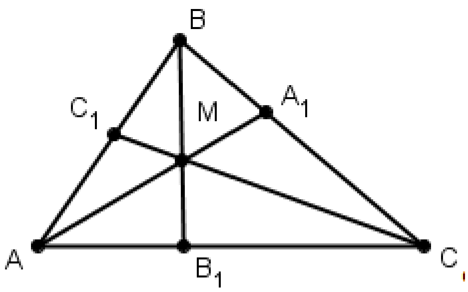


$$\frac{CA_1}{BA_1}*\frac{BC_1}{AC_1}*\frac{AB_1}{CB_1}=1$$

(Точку B_1 при составлении пропорции можно мысленно перенести на отрезок AC)

Чевиана – это отрезок в треугольнике, соединяющий вершину треугольника с точкой на противоположной стороне

Теорема Чевы

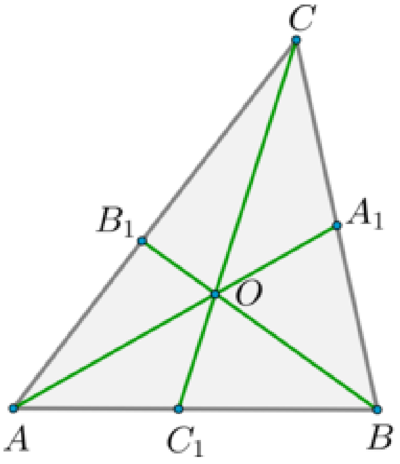


Если для данных чевиан верно равенство:

$\frac{AC_1}{BC_1}*\frac{BA_1}{CA_1}*\frac{CB_1}{AB_1}=1$, то они пересекаются в одной точке.

Место для уравнения.

Теорема Ван-Обеля

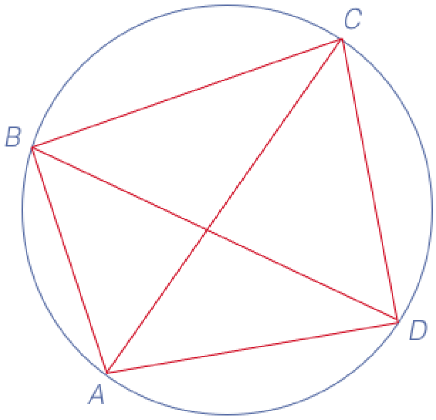


$$\frac{CO}{OC_1} = \frac{CA_1}{A_1B} + \frac{CB_1}{B_1A}$$

(AA_1, BB_1, CC_1 – чевианы, пересекающиеся в одной точке)

Теорема Птолемея

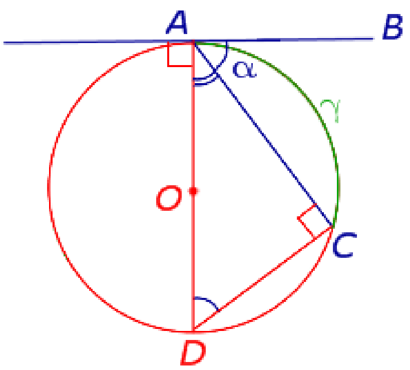
Во вписанном четырехугольнике произведение диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон:



AC*BD = (AB*CD) + (BC*AD)

Факты:

1. Угол между хордой и касательной к данной окружности равен половине дуги, заключенной в этой хорде:



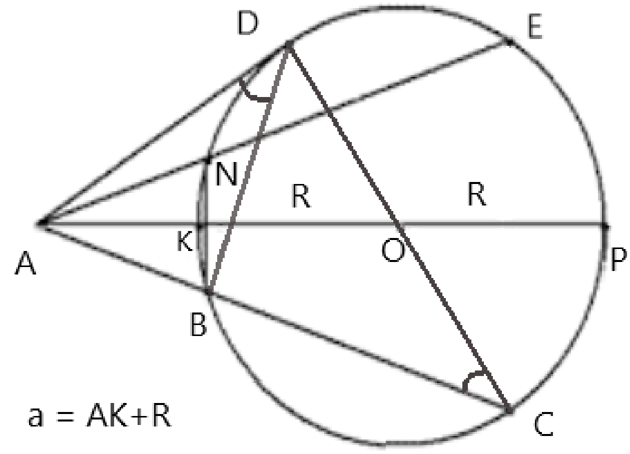
Угол $\alpha = \frac{1}{2}\ \overset{\frown}{AC} = \angle ADC$

Место для уравнения.

2. Площади треугольников, имеющих равный угол, относятся как произведения их сторон, замыкающих этот угол:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{a*b*sin\alpha}{c*d*sin\alpha} = \frac{a*b}{c*d}$$

3. Квадрат касательной равен произведению секущей на её внешнюю часть:

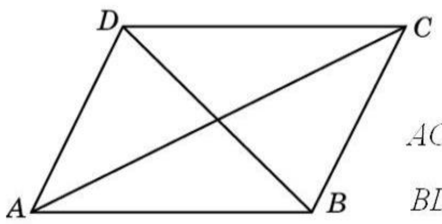


AD^2 = AE*AN = AC*AB = AP*AK = (R+a)*(R-a) = a^2 - R^2 (данная разность квадратов называется степенью точки A)

Доказательство:

Δ CDA подобен Δ DBA по двум углам, отсюда $\frac{DA}{CA} = \frac{AB}{DA}$, значит AD^2 = AC*AB

4. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон:



Доказательство. По теореме косинусов имеем

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot CD \cdot \cos\angle ADC,$$

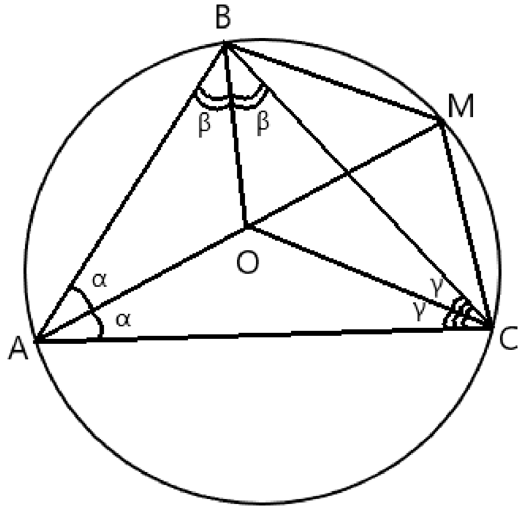
$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos\angle BAD.$$

Складывая эти равенства и учитывая, что косинус угла *ADC* равен минус косинус угла *BAD*, получим требуемое утверждение.

5. Лемма о трезубце, или теорема о трилистнике: Если в треугольнике ABC биссектриса угла A пересекает описанную вокруг этого треугольника окружность в точке M, то выполняется равенство:

BM = MC = MO, где O – центр описанной окружности.

Место для уравнения.



Доказательство:

Дуги BM=MC=2α, так как опираются на равные углы (AM - биссектриса) MAB и MAC, равные α. ∠MBC=∠MCB=$\frac{1}{2}\overset{\frown}{BM}$ = α. Из этого следует, что Δ BMC равнобедренный, а значит BM = MC. ∠BOM = α+β (внешний угол для Δ BOA, не смежный с углами α и β). ∠OBM = α+β, поэтому ∠OBM = ∠BOM. Тогда ΔBMO равнобедренный, BM = MO. А значит BM = MC = MO, ч. т. д.

6. Площадь треугольника[1]:

S = $\frac{1}{2}$ ah

S = $\frac{1}{2}$ab * sinα

S = pr

S = $\frac{abc}{4R}$

Формула Герона для площади произвольного треугольника:

S = $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Для прямоугольного треугольника:

S = $(p-a)(p-b)$

____

[1]Здесь приведены основные формулы для площади треугольника. Еще некоторые интересные варианты указаны в следующих подпунктах.

7. Площадь любого четырехугольника:

S = $\frac{1}{2}$ *d_1*d_2*sinα

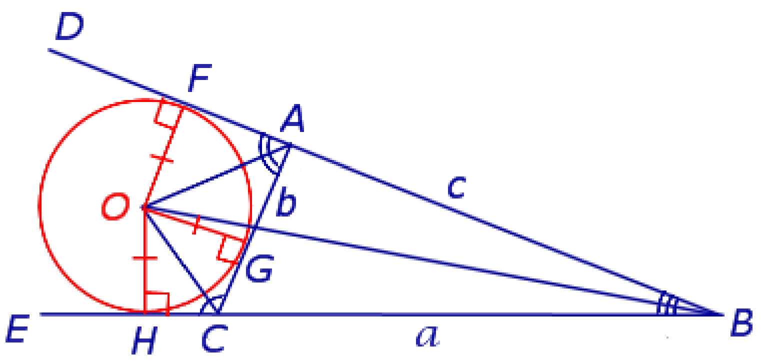
S = $\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$

8. Неравенство Бернулли: $(1 + a)^n \geq 1 + n*a$
9. Неравенство Коши, или неравенство о средних: $\sqrt{a*b} \leq \frac{a+b}{2}$

Место для уравнения.

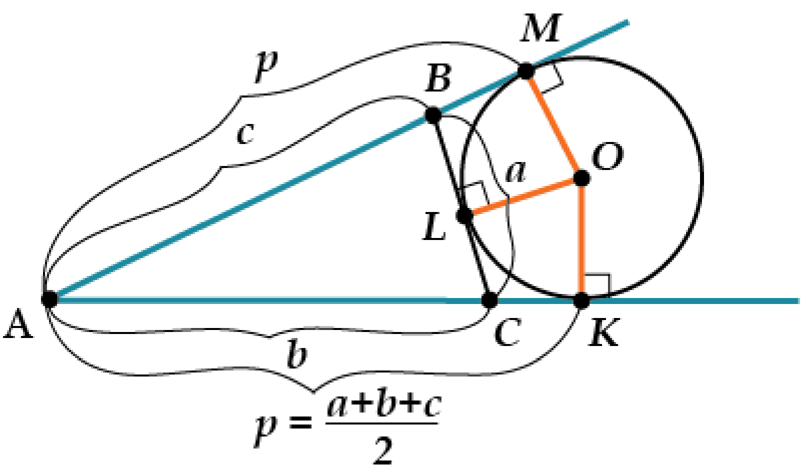
10. Вневписанная окружность:

Вневписанная окружность треугольника — окружность, касающаяся одной из сторон треугольника и продолжений двух других его сторон



Центр вневписанной окружности, как видно из рисунка, находится на пересечении биссектрисы внутреннего угла треугольника и биссектрис двух внешних углов, не смежных с первым.

Как нетрудно догадаться, для каждого треугольника существует три вневписанных окружности.



На данном рисунке BM = BL, CK = CL, AM = AK (свойство окружности: как вписанной, так и вневписанной). AM + AK = 2*AM = AB + BM + AC + CK = AB + BL + CL + AC = AB + BC + AC = P, тогда AM = AK = p.

1) $r_a = \frac{S}{p-a}$, $r_b = \frac{S}{p-b}$, $r_c = \frac{S}{p-c}$, где r_a, r_b, r_c – радиусы вневписанных окружностей, проведенные соответственно к сторонам a, b, c; p – полупериметр треугольника ABC. Доказательство:

$S_{ABC} = S_{ABO} + S_{ACO} - S_{BOC} = \frac{1}{2} c * OM + \frac{1}{2} b * OK - \frac{1}{2} a * OL = \frac{1}{2} c * r_a + \frac{1}{2} b * r_a - \frac{1}{2} a * r_a = \frac{1}{2} r_a * (b + c - a) =$

$= \frac{1}{2} r_a * (b + c + a - 2a) = r_a * (\frac{b + c + a}{2} - a) = r_a * (p - a)$, отсюда $r_a = \frac{S}{p-a}$

2) $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$, где r – радиус вписанной окружности:
$\frac{p-a}{S} + \frac{p-b}{S} + \frac{p-c}{S} = \frac{3p-2p}{S} = \frac{p}{S} = \frac{1}{r}$

3) $r_a + r_b + r_c = r + 4R$, где R – радиус описанной окружности:

$r_a + r_b + r_c - r = \frac{S}{p-a} + \frac{S}{p-b} + \frac{S}{p-c} - \frac{p}{S} = S * \frac{abc}{S^2} = \frac{abc}{S} = 4R$

4) $S_\Delta = r_a * (p - a) = r_b * (p - b) = r_c * (p - c)$

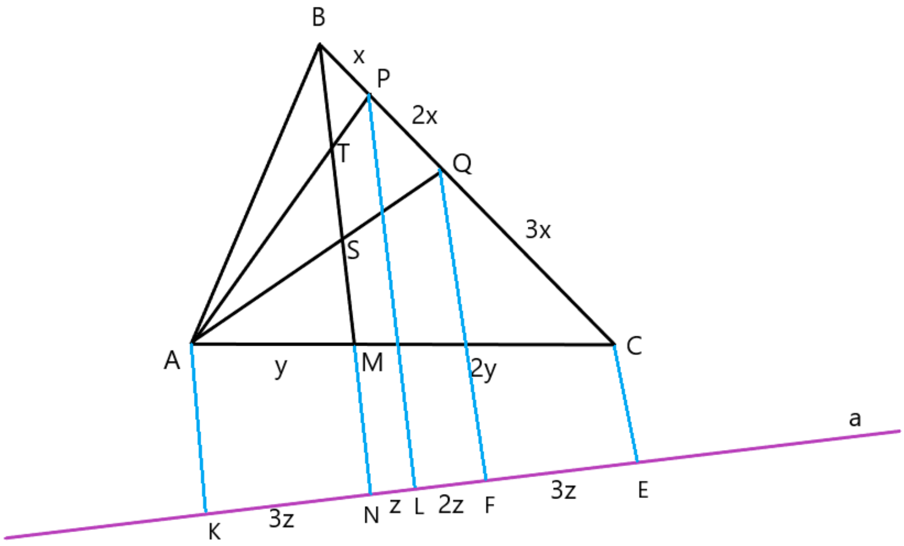
Место для уравнения.

$S_\Delta = \sqrt{r_a * r_b * r_c * \text{ r}}$

Методы решения задач:

1. Метод паспортной прямой

Разберу данный метод на примере решения одной задачи:



Дано: Δ ABC, AM:MC = 1:2, BP:PQ:QC = 1:2:3

Найти: S_{PTSQ}:S_{ABC}

Решение:

Для начала найдем, как соотносятся S_{APQ} и S_{ABC}. Обозначим AM за y, MC за 2y, BP за x, PQ за 2x, QC за 3x. Высота у ΔAPQ и у ΔABC общая, поэтому их отношение их площадей равно отношению их оснований. $S_{APQ}:S_{ABC} = \frac{2x}{6x} = \frac{1}{3}$. Теперь найдем отношенние S_{PTSQ} и S_{APQ}. Для этого найдем, как точка T делит AP и как S делит AQ. Проведем прямую a, отрезки к этой прямой, параллельные друг другу. Используя теорему о пропорциональных отрезках, увидим, что EF:FL:NL = QC:PQ:BP, тогда обозначим их за 3z, 2z, z соответственно. По этой же теореме MC:AM = NE:KN. Тогда KN = $\frac{1}{2}$NE = 3z. Опять-таки с помощью теоремы о пропорциональных отрезках заметим, что AT:TP = 3z:z = 3:1, AS:SQ = 3z:3z = 1:1. Обозначим AT за 3a, TP за a, AS и SQ за b. Тогда $S_{ATS}:S_{APQ} = \frac{3a*b}{4a*2b} = \frac{3}{8}$, значит $S_{PTSQ}:S_{APQ} = \frac{5}{8}$. Значит $S_{PTSQ}: S_{ABC} = \frac{5}{8} * \frac{1}{3} = \frac{5}{24}$

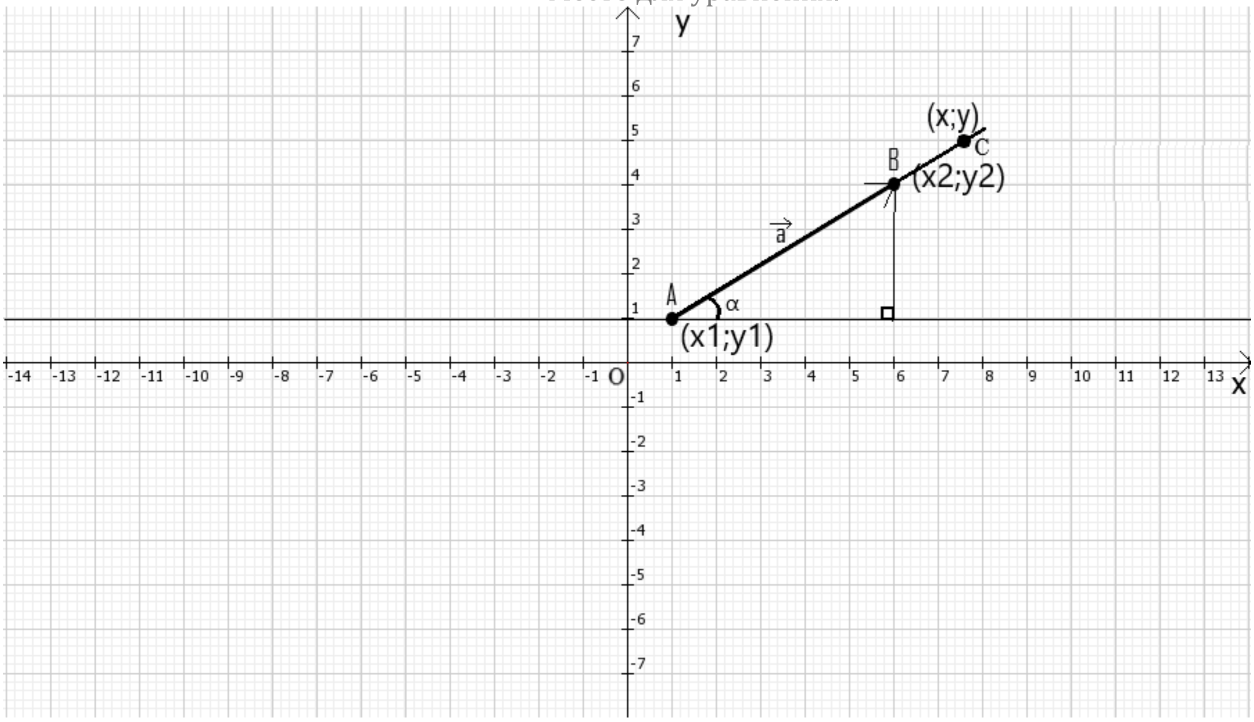
Ответ: $\frac{5}{24}$.

2. Метод координат

Составление уравнения прямой по координатам точек:

y = kx + b

Место для уравнения.



k = tg α = $\frac{y2-y1}{x2-x1}$

C – любая точка, принадлежащая данной прямой

$\vec{a}${x2-x1;y2-y1}

$\overrightarrow{AC}${x-x1;y-y1}

$\overrightarrow{AC} = n * \vec{a}$, так как они коллинеарны

В координатах:

x – x1 = n*(x2-x1) (1)

y – y1 = n*(y2-y1) (2)

Разделив первое на второе, получим:

$\frac{x-x1}{x2-x1}$ = $\frac{y-y1}{y2-y1}$, отсюда:

y = $\frac{y2-y1}{x2-x1}$ * (x-x1) + y1 = k*(x-x1) + y1, где (x1, y1) – координаты любой точки, принадлежащей данной прямой.

Таким образом можно построить уравнение прямой, зная координаты одной точки и коэффициент, либо просто координаты двух точек данной прямой.

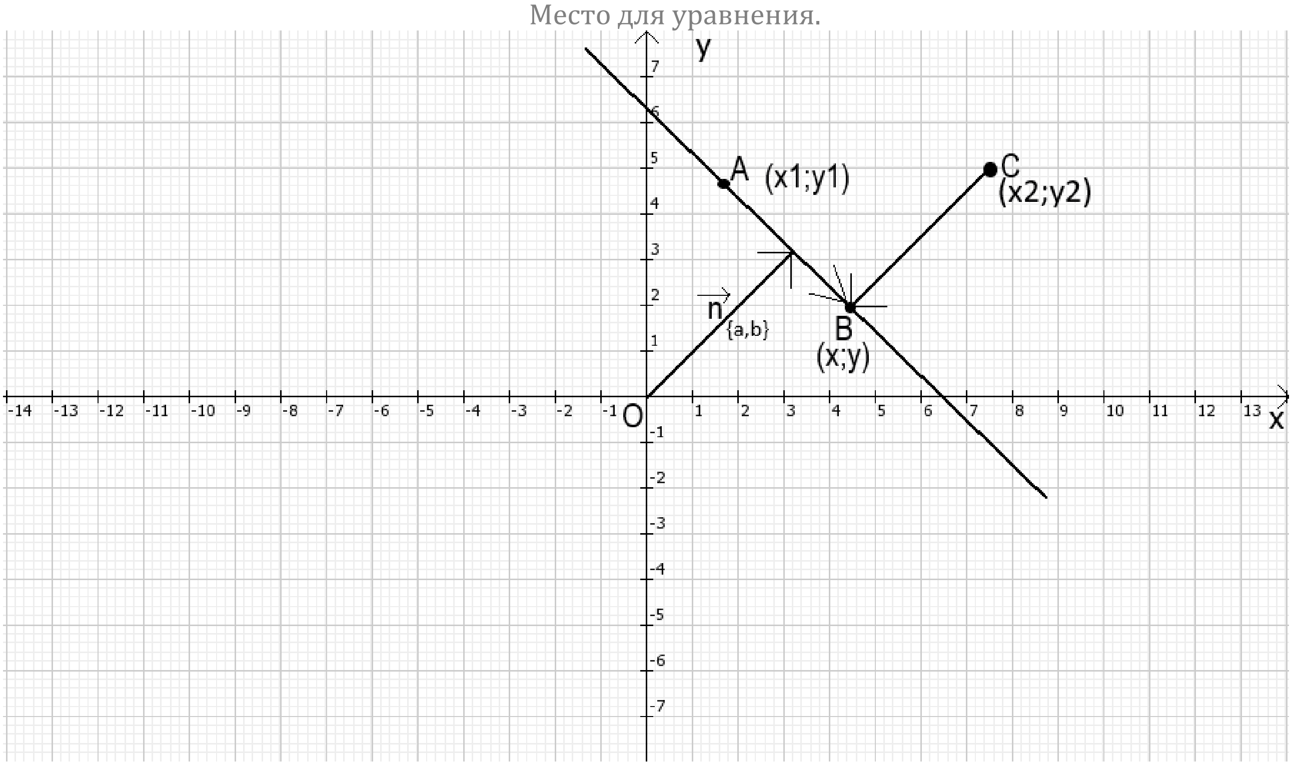
- Если прямые перпендикулярны, то: $k_1 * k_2 = -1$, где k_1 и k_2 - коэффициенты данных прямых.
- Если прямые параллельны, то их коэффициенты равны.

<u>Нахождение расстояния от точки до прямой</u>:

ax + by + c = 0

y = - $\frac{a}{b}$*x - $\frac{c}{b}$

Место для уравнения.



B - любая точка, принадлежащая данной прямой

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \perp \vec{n}$, тогда их скалярное произведение равно нулю.

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ {x-x1;y-y1}

Скалярное произведение в координатах[1]:

(x-x1)*a + (y-y1)*b = 0

ax + by = ax1 + by1

Пусть ax1 + by1 = - c (какое-то число), тогда ax + by + c = 0

$\overrightarrow{CB}$ {x2-x;y2-y} коллинеарен $\vec{n}$, значит косинус угла между ними равен 1

$\mathrm{C}\vec{\mathrm{B}} * \vec{n} = |\mathrm{C}\vec{\mathrm{B}}| * |\vec{n}| * 1 = |\mathrm{C}\vec{\mathrm{B}}| * \sqrt{a^2+b^2}$

В координатах:

(x2-x)*a + (y2-y)*b = ax2 – ax + by2 – by = ax2 + by2 – (ax + by) = ax2 + by2 + c

Приравняем выражения:

$|\mathrm{C}\vec{\mathrm{B}}| * \sqrt{a^2+b^2}$ = ax + by + c

$|\mathrm{C}\vec{\mathrm{B}}| = \dfrac{\mathrm{ax2 + by2 + c}}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Итак, в общем виде расстояние от точки X (x_0;y_0) до прямой ax + вy + c = 0, где a и b – координаты вектора, перпендикулярного данной прямой, равно:

$$\frac{|ax_0 + \mathrm{b}y_0 + \mathrm{c}|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

---

[1]Есть два варианта записи скалярного произведения векторов (просто напоминаю об этом, это есть более подробно в программе 9-ого класса):

1) Произведение их длин на косинус угла между ними:

Место для уравнения.

$\vec{a} * \vec{b} = |\vec{a}| * |\vec{b}| * \cos(a \wedge b)$

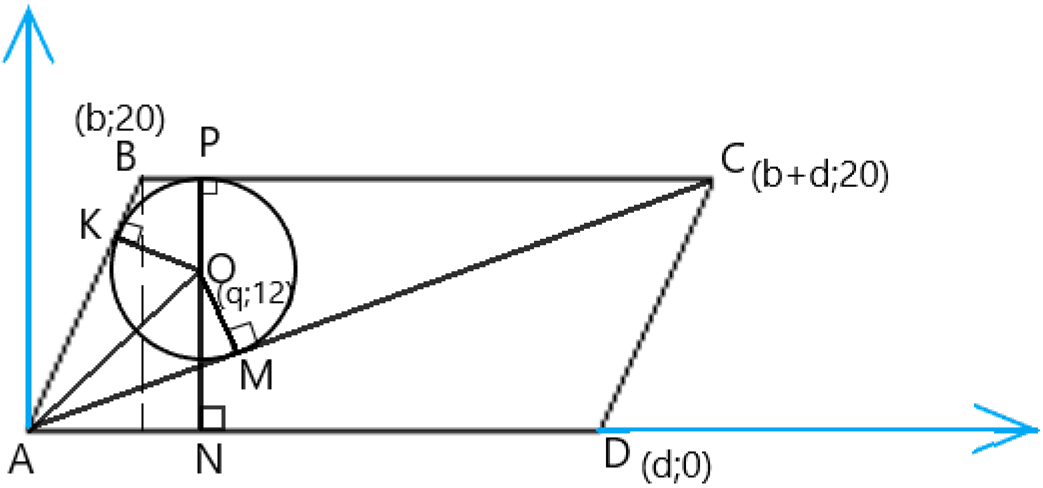
2) Сумма произведений соответствующих (одноименных) координат:

Если координаты $\vec{a} = \{x_1;y_1\}$ и координаты $\vec{b} = \{x_2;y_2\}$, то $\vec{a} * \vec{b} = x_1 * x_2 + y_1 * y_2$

На самом деле, метод координат - очень действенный метод, применимый почти в любой задаче, хотя поначалу может показаться слишком громоздким или непонятным. Но поскольку здесь используются, по факту, чистые вычисления, его очень удобно использовать там, где не особо получается найти какое-нибудь истинно геометрическое решение. Примеры задач помогут понять, как им пользоваться на практике.

Примеры задач на метод координат:

1.



Дано: AO = 17, OM = 8, ON = 12

Найти: S_{ABCD}

Решение:

S_{ABCD} = PN * BC, PN = ON + OP = PN + OM (радиусы), PN = 20. По теореме Пифагора q =$\sqrt{17^2 - 12^2}$ = $\sqrt{145}$. Обозначим BC за d, координаты точек, как показано на рисунке. Найдем d, для этого составим уравнения прямых AB и AC и выразим расстояние до них от точки O.

Прямая AC: коэффициент = tg(CAD) = $\frac{y2-y1}{x2-x1} = \frac{20-0}{(b+d)-0} = \frac{20}{b+d}$

y = $\frac{20}{b+d}$ * (x – x_0) + y_0 , где (x_0;y_0) – координаты точки A, x_0 = 0, y_0 = 0, тогда:

y = $\frac{20}{b+d}$ * x, значит 20*x – (b+d)*y = 0, где для уравнение общего вида $\mathrm{a}x_0 + \mathrm{b}y_0 + \mathrm{c} = 0$:

20 = коэффициент a, (b+d) = коэффициент b.

Тогда, подставив под x и y координаты точки O, расстояние от O до AC запишем следующим образом:

$$\rho(O,AC) = \frac{|20*q-(b+d)*12|}{\sqrt{20^2+(b+d)^2}}$$

Аналогичным образом распишем расстояние от O до AB:

Коэффициент = tg(BAD) = $\frac{y2-y1}{x2-x1} = \frac{20-0}{b-0} = \frac{20}{b}$

Место для уравнения.

Прямая AB : y = $\frac{20}{b}$ * x

20*x – b*y = 0, где 20 = коэффициент a, b = коэффициент b,

Подставляем (q;12), получаем:

ρ(O,AB) = $\frac{|20*q-b*12|}{\sqrt{20^2+b^2}}$

Так как по условию ρ(O,AC) = ρ(O,AB) = 8, получаем уравнения:

$\frac{|20*q-b*12|}{\sqrt{20^2+b^2}} = 8$ (1)

$\frac{|20*q-(b+d)*12|}{\sqrt{20^2+(b+d)^2}} = 8$ (2)

1) $64 * (400 + b^2) = 16\,(5q - 3b)^2$

2) $64 * (400 + (b+d)^2) = 16\,(5q - 3(b+d))^2$

1) $5b^2 - 30bq + 25q^2 - 1600 = 0$

2) $5b^2 - 30bq + 25q^2 - 1600 - 30qd + 10bd + 5d^2 = 0$

Вычитая из первого второе, получаем:

$30qd - 10bd - 5d^2 = 0$ (3)

1) $5b^2 - 30bq + 25q^2 - 1600 = 0$

$b^2 - 6bq + 5q^2 - 320 = 0$

D = 900

$b_{1/2} = 3q \pm 30$

Подставляем в (3):

1') b = 3q + 30

$-5d^2 - 30qd - 300 + 30qd = 0$

$d^2 + 60d = 0$

d = 0, d = -60 – оба варианта не соответствуют условию, так как d – положительное число.

2') b = 3q – 30

$-5d^2 - 30qd + 300 + 30qd = 0$

$d^2 - 60d = 0$

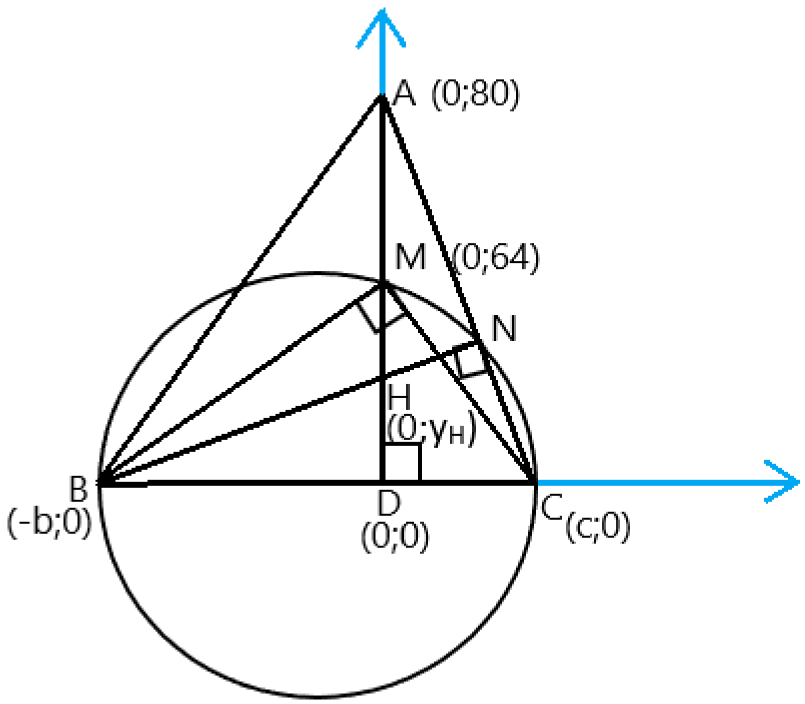
d = 0, d = 60 – 60 удовлетворяет условию, поэтому BC = 60.

Тогда S_{ABCD} = 60 * 20 = 1200.

Ответ: 1200.

2.

Место для уравнения.



Дано: BC – диаметр окружности, AD = 80, MD = 64, H – точка пересечения высот треугольника

Найти: AH

Решение:

Проведем отрезок BN, как показано на рисунке. Он будет являться высотой, так как угол BNC опирается на диаметр, как следствие равен 90°, (то же можно сказать и про угол BMC). Тогда H – точка пересечения BN и AD, то есть она принадлежит как BN, так и AD. Составим уравнения этих прямых:

Для AC: k_1 = tg(180-ACD) = -tg(ACD) = $-\frac{y2-y1}{x2-x1} = -\frac{80-0}{c-0} = -\frac{80}{c}$

y = $k_1(x – x_0) + y_0$, за $(x_0;y_0)$ возьмем точку A, тогда:

y = $-\frac{80}{c}$*x + 80

BN : k_2 = -1 * k_1 (прямые перпендикулярны), $k_2 = \frac{c}{80}$

За $(x_0;y_0)$ возьмем точку B, тогда:

y = $\frac{c}{80}$ * (x+b)

Записав иначе, получим:

y = $\frac{c}{80}$ * (x - 0) + $\frac{bc}{80}$

Исходя из вида y = $k(x – x_0) + y_0$, получим, что в данном уравнении прямой $y_0 = \frac{bc}{80} = y_H$

Теперь обратимся к треугольникам BMD и MDC[1]. Из теоремы Пифагора для них:

$64^2 + b^2 = BM^2$

$c^2 + 64^2 = CM^2$

$BM^2 + CM^2 = (b+c)^2 = 64^2 + b^2 + c^2 + 64^2$

$2*64^2 + b^2 + c^2 = b^2 + c^2 + 2*bc$

Место для уравнения.

$2*64^2 = 2*bc$

$bc = 64^2$

Тогда $y_H = \frac{64^2}{80} = 51{,}2 = HD$

$AH = AD – HD = 28{,}8$

____

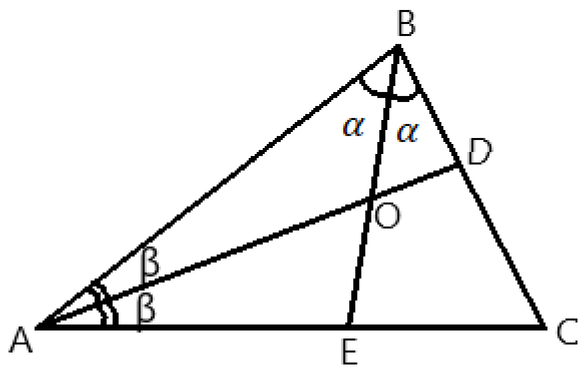
[1]Также для нахождения bc можно воспользоваться свойством высоты, выходящей из прямого угла: она равна среднему геометрическому отрезков, на которые делит гипотенузу.

Тогда $MD^2 = bc$, $bc = 64^2$

Ответ: 28,8.

Примеры решения задачи на отношение отрезков:

1.



Дано: Δ ABC, биссектрисы AD и BE, AC:AB:BC = 4:3:2

Найти: $S_{DOCE}:S_{ABC}$

Решение:

$$\frac{S_{ABE}}{S_{EBC}} = \frac{AB*BE*sin\alpha}{BC*BE*sin\alpha} = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{2}$$, отсюда $\frac{AE}{EC} = \frac{3}{2}$

$$\frac{S_{CAD}}{S_{DAB}} = \frac{AC*AD*sin\beta}{AB*AD*sin\beta} = \frac{AC}{AB} = \frac{4}{3}$$, отсюда $\frac{DC}{BD} = \frac{4}{3}$

По теореме Менелая:

$$\frac{EC}{AE} * \frac{AO}{OD} * \frac{BD}{BC} = 1,$$

откуда $\frac{AO}{OD} = \frac{7}{2}$

$$\frac{S_{EAO}}{S_{CAD}} = \frac{AO*AE*sin\beta}{AD*AC*sin\beta} = \frac{7x*3y}{9x*5y} = \frac{7}{15}$$

Место для уравнения.

$S_{DOCE} = \frac{8}{15} S_{CAD}$

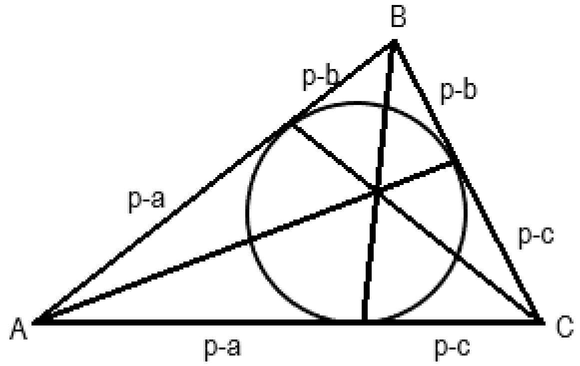
$\frac{S_{CAD}}{S_{ABC}} = \frac{DC}{BC} = \frac{4}{7}$

$S_{CAD} = \frac{4}{7} S_{ABC}$

$S_{DOCE} = \frac{8}{15} * \frac{4}{7} S_{ABC} = \frac{32}{105} S_{ABC}$

Ответ: $S_{DOCE} = \frac{32}{105} S_{ABC}$

2. Точка Жаргонна



Дано: Δ ABC, вписанная окружность, чевианы к точкам соприкосновения с окружностью

Доказать: данные чевианы пересекаются в одной точке

Доказательство:

Обозначим отрезки, на которые чевианы деля противоположные стороны как показано на рисунке (если требуется, докажите сами, почему можно сделать таким образом). Запишем условие теоремы Чевы для этих отрезков и проверим, будет ли оно равно единице.

$\frac{p-c}{p-a} * \frac{p-a}{p-b} * \frac{p-b}{p-c} = 1$

Так как это произведение действительно оказалось равно единице, чевианы пересекаются в одной точке, ч. т. д.

Тригонометрия

Сначала я укажу наглядное представление некоторых величин на тригонометрической окружности.

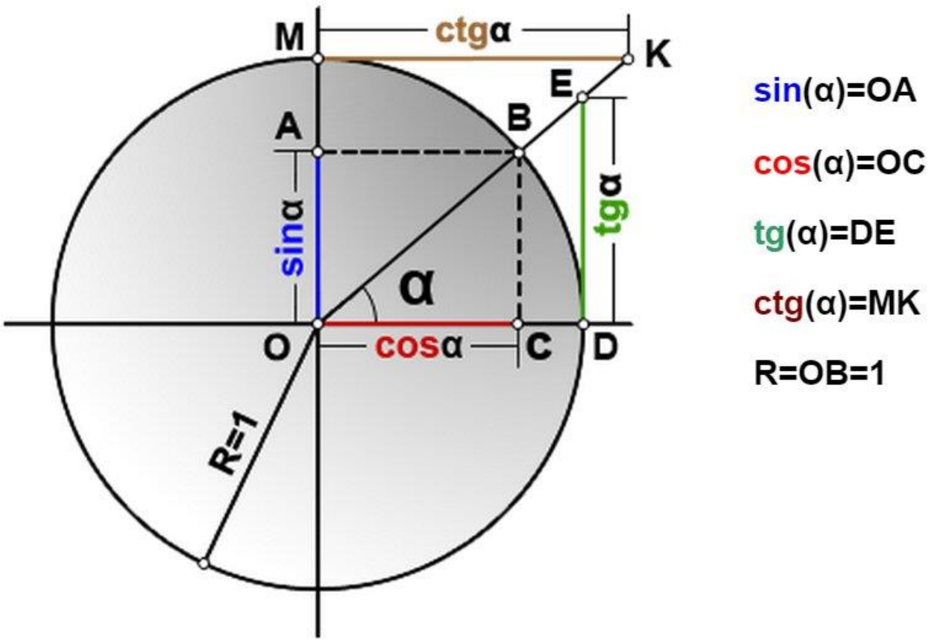
Тригонометрическая окружность – окружность с радиусом 1 и центром в начале координат.

На ней sinα – ордината точки, принадлежащей окружности (так как это по определению отношение противолежащего катета к гипотенузе, а гипотенуза в ΔOBC равна 1; BC = OA, то есть ордината),

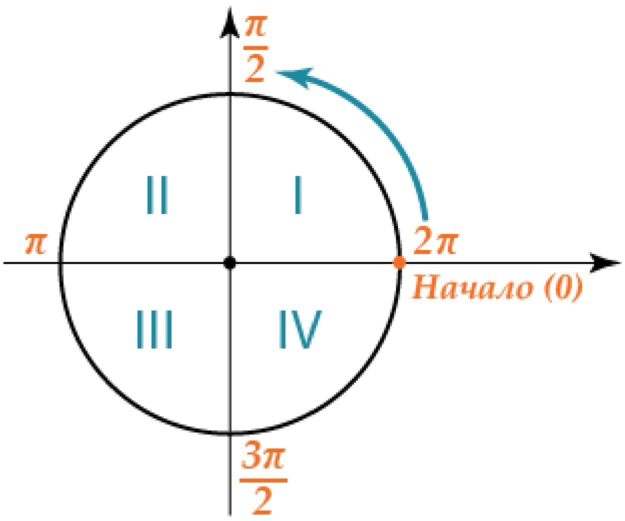
Место для уравнения.
cosα – абсцисса точки, принадлежащей окружности,

tgα = $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ – точка на пересечении прямой, параллельной оси OY и касающейся окружности в точке (1;0) (прямая тангенса) и продолжения OB (составляющей с осью OX угол α),

ctgα = $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ - точка на пересечении прямой, параллельной оси OX и касающейся окружности в точке (1;0) (прямая котангенса) и продолжения OB (составляющей с осью OX угол α).

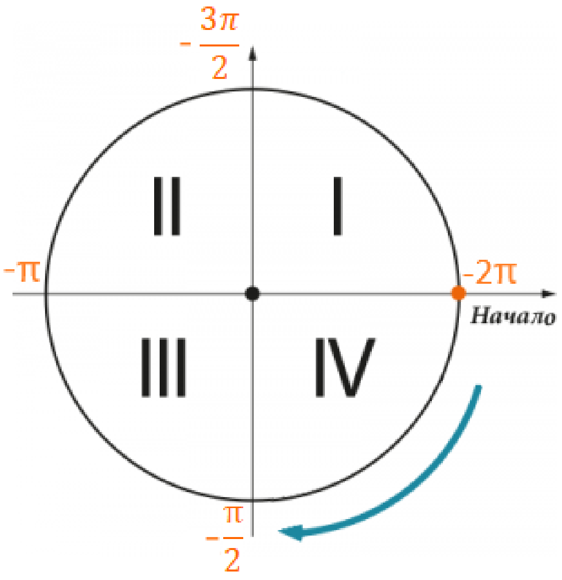


<u>Радианная мера угла</u>



Если идет отсчет в обратную сторону (по часовой стрелке), то знак отрицательный:

Место для уравнения.



Важно понимать, что точка на тригонометрической окружности получится та же самая, если мы прибавим к нем 2πn, где n – любое целое число (это то же самое, что и прокрутить круг на 360°, или любое число градусов, кратное 360). Этим объясняется периодичность тригонометрических функций, то есть то, что значения функции повторяются через определенные промежутки. И поэтому решения тригонометрических уравнений чаще всего записываются в виде, подобном x = k + 2πn, где k – корень уравнения.

<u>Основное тригонометрическое тождество</u>:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, следует оно из теоремы Пифагора для Δ OBC (BC = sinα, OC = cosα, OB=R=1), откуда:

$1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{sin^2\alpha}$

$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{cos^2\alpha}$

tgα*ctgα = 1

<u>Формулы приведения</u>:

sin(90° - α) = cosα

cos(90° - α) = sinα

sin(180° - α) = sinα

cos(180° - α) = - cosα

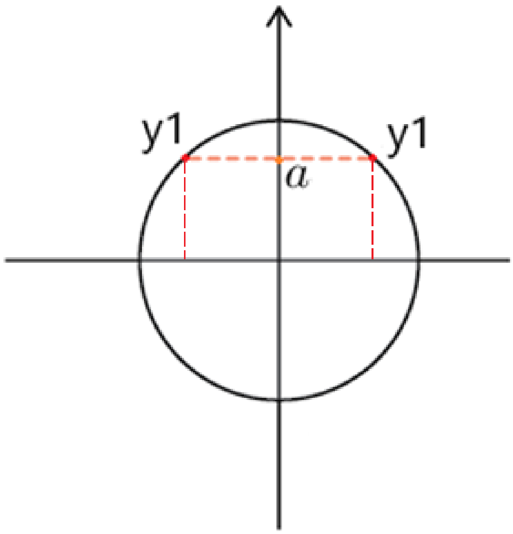
sin(360° - α) = - sinα

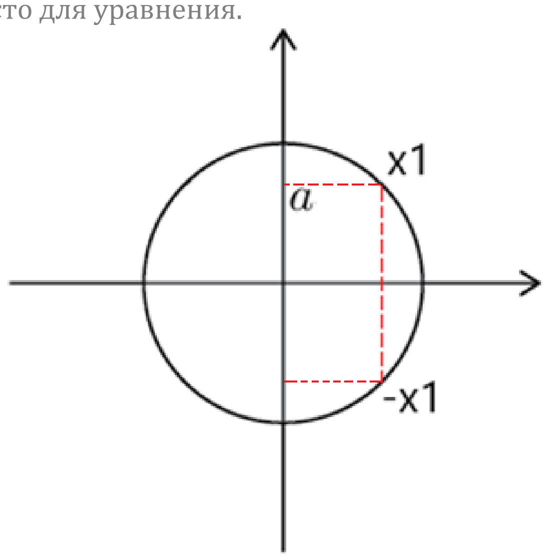
cos(360° - α) = cosα

Первые два равенства очевидны в прямоугольном треугольнике (из определений синуса и косинуса).

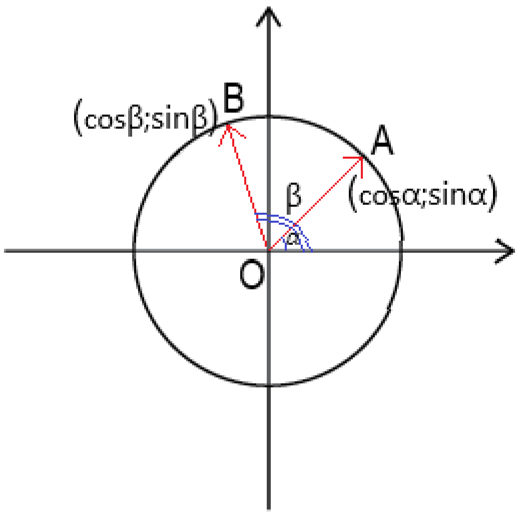
Последние четыре следуют из их определения по окружности:

Место для уравнения.





<u>Формулы двойных и тройных углов, разность и сумма двух углов</u>:



cos(β-α) = cosα*cosβ + sinα*sinβ, доказательство:

Рассмотрим скалярное произведение векторов $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OA}$:

$\overrightarrow{OB} * \overrightarrow{OA} = |\overrightarrow{OB}| * |\overrightarrow{OA}| * \cos(\angle BOA) = |\overrightarrow{OB}| * |\overrightarrow{OA}| * \cos(\beta-\alpha) = \cos(\beta-\alpha)$ – так как длины этих равны 1,

С другой стороны $\overrightarrow{OB} * \overrightarrow{OA}$ = cosα*cosβ + sinα*sinβ – в координатах, сумма произведений соответствующих координат, тогда получается, что cos(β-α) = cosα*cosβ + sinα*sinβ, ч. т. д.

cos(β+α) = cos(β-(-α)) = cosα*cosβ - sinα*sinβ

cos(2α) = cos(α+α) = $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha$, или по основному тригонометрическому тождеству $2\cos^2\alpha - 1$, или $1 - 2\sin^2\alpha$

sin(β-α) = cos(90°-(β-α)) = cos((90°-β)-(-α)) = cos(90°-β)* cosα - sin(90°-β)* sinα = sinβ*cosα – cosβ* sinα

sin(β+α) = cos(90°-(β+α)) = cos((90°-β)-α) = cos(90°-β)* cosα + sin(90°-β)* sinα = sinβ*cosα + cosβ* sinα

sin(2α) = 2sinα*cosα

tg(β+α) = $\frac{\sin(\beta+\alpha)}{\cos(\beta+\alpha)} = \frac{\sin\beta*\cos\alpha + \cos\beta*\sin\alpha}{\cos\alpha*\cos\beta - \sin\alpha*\sin\beta}$, разделим числитель и знаменатель на cosα*cosβ, учитывая что cosα≠0, cosβ≠0, получим:

Место для уравнения.

$\frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha * tg\beta}$

$tg(2\alpha) = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$

$tg(\beta-\alpha) = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\cos(\beta-\alpha)} = \frac{\sin\beta * \cos\alpha - \cos\beta * \sin\alpha}{\cos\alpha * \cos\beta + \sin\alpha * \sin\beta} = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha * tg\beta}$

$ctg(\beta+\alpha) = \frac{\cos(\beta+\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)} = \frac{\cos\alpha * \cos\beta - \sin\alpha * \sin\beta}{\sin\beta * \cos\alpha + \cos\beta * \sin\alpha}$, разделим числитель и знаменатель на sinα* sinβ, где sinα≠0, sinβ≠0, получим:

$\frac{-1+ctg\beta * ctga}{ctg\beta + ctga}$

$ctg(2\alpha) = \frac{-1+ctg^2\alpha}{2ctg\alpha}$

$ctg(\beta-\alpha) = \frac{\cos(\beta-\alpha)}{\sin(\beta-\alpha)} = \frac{\cos\alpha * \cos\beta + \sin\alpha * \sin\beta}{\sin\beta * \cos\alpha - \cos\beta * \sin\alpha} = \frac{-1-ctg\beta * ctga}{ctg\beta - ctga}$

$\cos(3\alpha) = \cos(\alpha + 2\alpha) = \cos\alpha * \cos(2\alpha) - \sin\alpha * \sin(2\alpha) = \cos\alpha * (2 * \cos^2\alpha - 1) - 2 * \sin^2\alpha * \cos\alpha = \cos\alpha * (2\cos^2\alpha - 1) - 2 * (1-\cos^2\alpha) * \cos\alpha = \cos\alpha(2 * \cos^2\alpha - 1 - 2 + 2 * \cos^2\alpha) = \cos\alpha(4 * \cos^2\alpha - 3) = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

Аналогично $\sin(3\alpha) = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

<u>Произведения</u>:

$\sin(\beta+\alpha) + \sin(\beta-\alpha) = \sin\beta * \cos\alpha + \cos\beta * \sin\alpha + \sin\beta * \cos\alpha - \cos\beta * \sin\alpha = 2 * \sin\beta * \cos\alpha$, отсюда

$\sin\beta * \cos\alpha = \frac{1}{2} \sin(\beta+\alpha) + \sin(\beta-\alpha)$

$\cos(\beta-\alpha) + \cos(\beta+\alpha) = \cos\alpha * \cos\beta + \sin\alpha * \sin\beta + \cos\alpha * \cos\beta - \sin\alpha * \sin\beta = 2 * \cos\alpha * \cos\beta$, отсюда

$\cos\alpha * \cos\beta = \frac{1}{2} \cos(\beta-\alpha) + \cos(\beta+\alpha)$

$\cos(\beta-\alpha) - \cos(\beta+\alpha) = \cos\alpha * \cos\beta + \sin\alpha * \sin\beta - \cos\alpha * \cos\beta + \sin\alpha * \sin\beta = 2 * \sin\alpha * \sin\beta$, отсюда

$\sin\alpha * \sin\beta = \frac{1}{2} \cos(\beta-\alpha) - \cos(\beta+\alpha)$

<u>Разность и сумма синусов и косинусов:</u>

Представим углы α и β в виде:

$\alpha = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}$, $\beta = \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}$

Теперь запишем сумму синусов:

$\sin\alpha + \sin\beta = \sin(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}) + \sin(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2})$

И раскроем, используя формулу синуса суммы:

$\sin(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}) + \sin(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}) = \sin(\frac{\alpha+\beta}{2}) * \cos(\frac{\alpha-\beta}{2}) + \sin(\frac{\alpha-\beta}{2}) * \cos(\frac{\alpha+\beta}{2}) + \sin(\frac{\alpha+\beta}{2}) * \cos(\frac{\alpha-\beta}{2}) - \sin(\frac{\alpha-\beta}{2}) * \cos(\frac{\alpha+\beta}{2}) = 2 * \sin(\frac{\alpha+\beta}{2}) * \cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$

Аналогичным образом получим:

$\sin\alpha - \sin\beta = 2 * \sin(\frac{\alpha-\beta}{2}) * \cos(\frac{\alpha+\beta}{2})$

Место для уравнения.

cosα + cosβ = 2* cos($\frac{\alpha+\beta}{2}$)* cos($\frac{\alpha-\beta}{2}$)

cosα – cosβ = 2* sin($\frac{\alpha+\beta}{2}$)* sin($\frac{\alpha-\beta}{2}$)

Обратные функции:

arcsin(x) = t, где sin(t) = x

arccos(x) = t, где cos(t) = x

arctg(x) = t, где tg(t) = x

arcctg(x) = t, где ctg(t) = x

Другие тригонометрические функции:

Секанс - sec(α) = 1/cos(α)

Косеканс - cosec(α) = 1/sin(α)

Версинус, или синус-верзус - versin(α) = 1 - cos(α) = 2*sin^2($\frac{\alpha}{2}$) (Представляет собой расстояние от центральной точки дуги, измеряемой удвоенным данным углом α, до центральной точки хорды, стягивающей эту дугу)

Коверсинус, или косинус-верзус - vercos(α) = versin(90° - α) = 1 – sin(α)

Гаверсинус – haversin(α) = $\frac{\mathrm{versin}(\alpha)}{2}$ = sin^2($\frac{\alpha}{2}$)

Гаверкосинус - havercos(α) = $\frac{\mathrm{vercos}(\alpha)}{2}$ = cos^2($\frac{\alpha}{2}$)

Экссеканс – exsec(α) = sec(α) – 1

Экскосинус – excsc(α) = exsec(90° - α) = cosec(α) - 1

Основные формулы:

Подведем итог тригонометрии, так сказать:

tgα = $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

ctgα = $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

sin^{2}α + cos^{2}α = 1

1 + ctg^{2}α = $\frac{1}{\sin^2\alpha}$

1 + tg^{2}α = $\frac{1}{\cos^2\alpha}$

tgα*ctgα = 1

cos(β+α) = cosα*cosβ - sinα*sinβ

cos(β-α) = cosα*cosβ + sinα*sinβ

Место для уравнения.

$\sin(\beta+\alpha) = \sin\beta*\cos\alpha + \cos\beta*\sin\alpha$

$\sin(\beta-\alpha) = \sin\beta*\cos\alpha - \cos\beta*\sin\alpha$

$tg(\beta+\alpha) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha * tg\beta}$

$tg(\beta-\alpha) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha * tg\beta}$

$ctg(\beta+\alpha) = \frac{-1+ctg\beta*ctga}{ctg\beta+ctga}$

$ctg(\beta-\alpha) = \frac{-1-ctg\beta*ctga}{ctg\beta-ctga}$

$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$

$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha*\cos\alpha$

$tg(2\alpha) = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$

$ctg(2\alpha) = \frac{-1+ctg^2\alpha}{2ctg\alpha}$

$\cos(3\alpha) = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

$\sin(3\alpha) = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

$\sin\beta*\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin(\beta+\alpha) + \sin(\beta-\alpha)$

$\cos\alpha*\cos\beta = \frac{1}{2}\cos(\beta-\alpha) + \cos(\beta+\alpha)$

$\sin\alpha*\sin\beta = \frac{1}{2}\cos(\beta-\alpha) - \cos(\beta+\alpha)$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2*\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})*\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$

$\sin\alpha - \sin\beta = 2*\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})*\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2*\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})*\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$

$\cos\alpha - \cos\beta = 2*\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})*\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$

Для треугольника, то есть $\alpha + \beta + \gamma = 180°$; p – полупериметр, r – радиус вписанной окружности, R - радиус описанной окружности

$$p = r \cdot ctg\frac{\alpha}{2} \cdot ctg\frac{\beta}{2} \cdot ctg\frac{\gamma}{2}, \qquad p = 4 \cdot R \cdot \mathbf{cos}\frac{\alpha}{2} \cdot \mathbf{cos}\frac{\beta}{2} \cdot \mathbf{cos}\frac{\gamma}{2},$$

$$S = r^2 \cdot ctg\frac{\alpha}{2} \cdot ctg\frac{\beta}{2} \cdot ctg\frac{\gamma}{2}, \qquad r = 4 \cdot R \cdot \mathbf{sin}\frac{\alpha}{2} \cdot \mathbf{sin}\frac{\beta}{2} \cdot \mathbf{sin}\frac{\gamma}{2},$$

$$S = p^2 \cdot tg\frac{\alpha}{2} \cdot tg\frac{\beta}{2} \cdot tg\frac{\gamma}{2}, \qquad S = 4 \cdot R \cdot r \cdot \mathbf{cos}\frac{\alpha}{2} \cdot \mathbf{cos}\frac{\beta}{2} \cdot \mathbf{cos}\frac{\gamma}{2},$$

$$S = 2 \cdot R^2 \cdot \mathbf{sin}\,\alpha \cdot \mathbf{sin}\,\beta \cdot \mathbf{sin}(\alpha + \beta)$$

Место для уравнения.