Семинар 5
ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Если ФКП непрерывна на L, то интегрирование сводится к вычислению криволинейного интеграла:

$$\int_L f(z)dz = \int_L (u+iv)(dx+idy) = \int_L udx - vdy + i\int_L vdx + udy\ .$$

Если кривую L можно задать параметрически, тогда: $\int_L f(z)dz = \int_{t_1}^{t_2} f\big(z(t)\big)z'(t)dt$

Свойства, формулы, методы и правила вычисления интегралов от ФКП в области их аналитичности аналогичны правилам интегрирования в действительном анализе.

Любая аналитическая в односвязной области функция имеет **первообразную** и имеет место формула, аналогичная формуле Ньютона-Лейбница:

$$\boxed{\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1)}$$

Интегральная формула Коши.

Пусть функция $f(z)$ аналитична в открытой области D и непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$.
Тогда для любой внутренней точки z_0 функции $f(z)$ имеют место равенства:

$$\boxed{f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)dz}{z-z_0}} \qquad \boxed{f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}}$$

---

1. Вычислить интеграл $\int_L \bar{z}\,dz$ по замкнутому контуру L: $|z| = 1$.
   Решение: $|z| = 1 -$ окружность радиуса 1, введем параметризацию: $z = \cos t + i\sin t$ или $z = e^{it}$, где $0 \le t \le 2\pi$ тогда $\bar{z} = \cos t - i\sin t = e^{-it}$ найдем $dz = (e^{it})'dt = i\,e^{it}dt$ и составим интеграл
   $\int_L \bar{z}\,dz = \int_0^{2\pi} e^{-it}\, i\, e^{it}dt = i\int_0^{2\pi} dt$. Находим первообразную: $(it)\big|_0^{2\pi} = i(2\pi - 0) = 2\pi i.$

---

2. Вычислить интеграл $\int_L \bar{z}\,dz$ по кривой L: $z = t - i\cdot t^2$, $0 \le t \le 2$
   Решение: $z = t - i\cdot t^2 \;\Rightarrow\; \bar{z} = t + i\cdot t^2$; найдем $dz = (t - i\cdot t^2)'dt = (1 - i\cdot 2t)dt$ и составим интеграл: $\int_L \bar{z}\,dz = \int_0^2 (t + i\cdot t^2)\,(1 - i\cdot 2t)dt = \int_0^2 (t + 2\cdot t^3 - i\cdot t^2)\,dt$.
   Находим первообразную: $\left(\frac{t^2}{2} + 2\frac{t^4}{4} - i\frac{t^3}{3}\right)\Big|_0^2 = 10 - \frac{8}{3}i$

---

3. Вычислить интеграл $\int_L \frac{1}{z-(1+i)}\,dz$, где $L -$ окружность $|z - (1+i)| = 1$.
   Решение: $L -$ окружность с центром в точке $1+i$; $\Rightarrow$ ее параметризация: $z = 1 + i + e^{it}$, где $0 \le t \le 2\pi$; найдем $dz = (1 + i + e^{it})'dt = i\,e^{it}dt$; заметим, что $z-(1+i) = e^{it}$ и составим интеграл:
   $$\int_L \frac{1}{z-(1+i)}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}}\, i\,e^{it}dt = i\int_0^{2\pi} dt = i(t)|_0^{2\pi} = i(2\pi - 0) = 2\pi i$$

---

4. Вычислить интеграл $\int_L \bar{z}\,dz$ по четверти окружности L: $|z-2| = 4$, лежащей в первом квадранте в направлении против часовой стрелки.
   Решение: $L -$ окружность радиуса 4 с центром в точке 2; $\Rightarrow$ ее параметризация: $z = 2 + 4\,e^{it}$, т.к. рассматривается четверть окружности в направлении против часовой стрелки, то $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$;
   найдем $dz = (2 + 4\,e^{it})'dt = i\,4\,e^{it}dt$; заметим, что $\bar{z} = 2 + 4e^{-it}$ и составим интеграл:
   $$\int_L \bar{z}\,dz = \int_0^{\pi/2} (2 + 4e^{-it})\, i\, 4e^{it}dt = i\int_0^{\pi/2} (8e^{it} + 16)\, dt = i\left(\frac{8e^{it}}{i} + 16\,t\right)\Bigg|_0^{\pi/2} =$$
   $$= 8\left(e^{i\frac{\pi}{2}} - 1\right) + 16\,i\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} - 1\right) + 8\pi\, i = 8(i - 1) + 8\pi i = -8 + 8\,i\,(1+\pi)$$

---

5. Вычислить $\int_L \operatorname{Im} z\, dz$, где $L -$ дуга параболы $z = t + i\,2t^2$ от точки $A = 0$ до точки $B = 1 + 2i$
   Решение: Точкам A и B соответствуют значения параметра $t = 0$ и $t = 1$, т.е. $0 \le t \le 1$;
   найдем $dz = (t + i\,2t^2)'dt = (1 + i\,4t)dt$; $f(z) = \operatorname{Im} z = \operatorname{Im}\,(t + i\,2t^2) = 2t^2$.
   Тогда

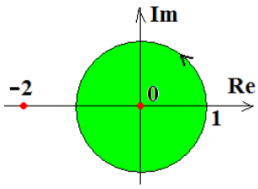
$$\int_L \operatorname{Im} z\, dz = \int_0^2 2t^2\,(1+i\,4t)dt = \int_0^2 (2t^2 + i\,8\,t^3)\,dt = \left(2\frac{t^3}{3} + i\,8\frac{t^4}{4}\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{3} + 2i$$

Второй способ: L: $y = 2x^2$, $dy = 4xdx$; $x_{нач} = 0$, $x_{кон} = 1$; вычисляем интеграл:

$$\int_L f(z)dz = \int_L ydx + i\int_L ydy = \int_0^1 2x^2 dx + i\int_0^1 2x^2 \cdot 4xdx = 2\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + i2x^4\Big|_0^1 = \frac{2}{3} + 2i$$

6. Вычислить интеграл $\oint_L \frac{e^z}{z^2+2z}\,dz$ по замкнутому контуру L: $|z| = 1$.

Решение. Изобразим контур $|z| = 1$ и отметим точки, в которых знаменатель дроби обращается в нуль. Заметим, что только $z = 0$ лежит внутри контура, поэтому подинтегральную функцию представляем в виде



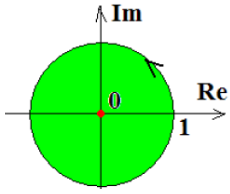
$$\oint_L \frac{e^z}{z(z+2)}dz = \oint_L \left(\frac{e^z}{z+2}\right)/z\,dz = \oint_L \frac{f(z)}{z}dz$$

Осталось применить **интегральную формулу Коши** где $f(z) = \frac{e^z}{z+2}$, $z_0 = 0$.

$$\oint_L \frac{f(z)}{z-0}\,dz = 2\pi i\, f(0) = 2\pi i\, \frac{e^z}{z+2}\Big|_{z=0} = 2\pi i \frac{e^0}{0+2} = \pi i$$

7. Вычислить интеграл $\oint_L \frac{\cos z}{z}\,dz$, где $L -$ окружность $|z| = 1$.

Решение. Применим **интегральную формулу Коши** где $f(z) = \cos z$, $z_0 = 0$.



$$\oint_L \frac{\cos z}{z-0}\,dz = 2\pi i\, f(0) = 2\pi i\, \cos 0 = 2\pi i$$

8. Вычислить интеграл $\oint_L \frac{1}{z^2+1}\,dz$ где $L -$ окружность: $|z - i| = 1$.

Решение: Чтобы воспользоваться **формулой Коши** преобразуем подынтегральную функцию следующим образом: $\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{1/(z+i)}{z-i} = \frac{f(z)}{z-i}$, где $f(z) = \frac{1}{z+i}$, $z_0 = i$

$$\oint_L \frac{1}{z^2+1}\,dz = \oint_L \frac{f(z)}{z-i}\,dz = 2\pi i\, f(i) = 2\pi i\, \frac{1}{z+i}\Big|_{z=i} = 2\pi i \frac{1}{2i} = \pi$$

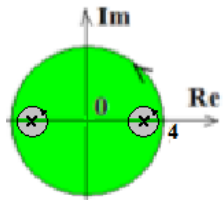
9. Вычислить интеграл $\oint_L \frac{\sin z}{z^2}\,dz$ по замкнутому контуру L: $|z + i| = 2$.

Решение. Точка $z = 0$ принадлежит области, ограниченной контуром L, тогда по **формуле Коши** для функции $f(z) = \sin z$, $z_0 = 0, n = 1$, получим:

$$\oint_L \frac{\sin z}{z^2}\,dz = 2\pi i\,(\sin z)'\,|_{z=0} = 2\pi i \cos(0) = 2\pi i$$

10. Вычислить интеграл $\oint_L \frac{\cos z}{z^2-\pi^2}\,dz$, где $L -$ окружность $|z| = 4$.

Решение: Обе точки $z = \pi$ и $z = -\pi$ принадлежат области, ограниченной контуром L, поэтому вначале применим **теорему Коши** для многосвязной области



$$\oint_L \frac{\cos z}{z^2-\pi^2}\,dz = \oint_{\gamma_1} \frac{\cos z}{z^2-\pi^2}\,dz + \oint_{\gamma_2} \frac{\cos z}{z^2-\pi^2}\,dz$$

где контур γ_1 окружает точку $z = -\pi$, а контур $\gamma_2 -$ точку $z = \pi$. Чтобы воспользоваться **формулой Коши** преобразуем подынтегральную функцию следующим образом:

$\frac{\cos z}{z^2-\pi^2} = \frac{\cos z}{(z-\pi)(z+\pi)} = \frac{\cos z/(z-\pi)}{z+\pi}$ для контура γ_1

$\frac{\cos z}{z^2-\pi^2} = \frac{\cos z}{(z-\pi)(z+\pi)} = \frac{\cos z/(z+\pi)}{z-\pi}$ для контура γ_2. Тогда

$$\oint_{\gamma_1} \frac{\cos z}{z^2-\pi^2}\,dz + \oint_{\gamma_2} \frac{\cos z}{z^2-\pi^2}\,dz = \oint_{\gamma_1} \frac{\left(\frac{\cos z}{z-\pi}\right)}{z+\pi}\,dz + \oint_{\gamma_2} \frac{\left(\frac{\cos z}{z+\pi}\right)}{z-\pi}\,dz =$$

$$= 2\pi i\left(\frac{\cos z}{z-\pi}\right)\Big|_{z=-\pi} + 2\pi i\left(\frac{\cos z}{z+\pi}\right)\Big|_{z=\pi} = 2\pi i\,\frac{\cos(-\pi)}{-2\pi} + 2\pi i\,\frac{\cos(\pi)}{2\pi} = \frac{i}{2} + \frac{-i}{2} = 0$$