

ЛЕКЦИИ
по дисциплине «Алгебра и геометрия. Часть I»

Для бакалавров и специалистов всех направлений

Доцент кафедры «Высшая математика»
Российского Технологического Университета
МИРЭА

Солопов
Валерий Михайлович

Список рекомендуемой литературы

1. Бугров Я.С, Никольский С.М. Высшая математика, Т.1, Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. М., Дрофа, 2004 – 288с.
2. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. М.: Физматлит, 2005. 240с.
3. И.П. Натансон. Краткий курс высшей математики., М., Лань. 1999.-736с.
4. Письменный, Д.Т. Высшая математика. Конспект лекций. Полный курс / Д.Т Письменный. Изд. 14-е.–М.: АЙРИС-пресс, 2017. – 608 с.

Лекции составлены на основании материала, предоставленного профессором д.т.н. В.А.Головешкиным.

Лекция 1. Матрицы

1. Определение матрицы, равенство матриц.
2. Сложение матриц.
3. Умножение матрицы на действительное число.
4. Произведение матриц.
5. Единичная матрица.
6. Транспонирование матрицы.
7. Определители 2-3 порядков.

Литература:

- 1) Бугров Я.С, Никольский С.М. Высшая математика, Т.1, Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. М., Дрофа, 2004. && 1- 4. Л-3, гл.21.
- 2) Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. М.Физматлит, 2005.
- 3) И.П. Натансон. Краткий курс высшей математики., М., Лань, 1999, гл.7.

1. Определение матрицы, равенство матриц

Определение 1. Матрицей A называется прямоугольная таблица чисел, которую будем представлять в виде.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \text{ Элементы, стоящие на одной горизонтали будем}$$

называть строками, на одной вертикали столбцами. Если матрица содержит n строк и m столбцов, то будем говорить, что матрица имеет размерность $(m \times n)$. Символом a_{ij} обозначается элемент, стоящий на пересечении строки с номером i и столбца с номером j . В случае, когда число строк равно числу столбцов ($m = n$), матрица называется квадратной.

Например, пусть имеется матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 5 & 0 & 9 \\ 2 & 1 & 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}. \text{ Определим размерность данной матрицы. Данная матрица}$$

имеет 4 строки и 5 столбцов. Тогда ее размерность соответственно равна (4×5) . Зададимся вопросом – чему равен, например a_{23} . Нетрудно видеть, что на пересечении второй строки и третьего столбца стоит число 4. Значит, $a_{23}=4$.

Иногда мы будем использовать краткую запись $A(a_{ij})$, которая подразумевает, что имеется матрица, с элементами a_{ij} , размерность которой нам известна.

Введение в математике некоторых объектов, как правило, влечет за собой введение некоторых математических операций над ними. Но любые математические операции подразумевают, в итоге, знак равенства. Поэтому прежде нужно договориться о том, какие матрицы мы считаем равными.

Определение 2. Матрица $A(a_{ij})$ равна матрице $B(b_{ij})$ ($A=B$) тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую размерность и на одинаковых местах у них стоят равные элементы, то есть $a_{ij} = b_{ij}$.

Пример 1. Какие пары матриц можно считать равными?

Решение.

$$1. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Матрицы не равны - имеют разную размерность.}$$

$$2. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}. \quad \text{Матрицы не равны - } a_{12} = 2, \quad b_{12} = 0.$$

$$3. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}. \quad \text{Матрицы равны.}$$

Теперь перейдем к математическим операциям.

2. Сложение матриц

Операция сложения определена только для матриц одинаковой размерности.

Определение 3. Пусть даны матрицы $A(a_{ij})$ и $B(b_{ij})$ размерности $(m \times n)$. Их сумма $A+B=C$, где матрица $C(c_{ij})$ имеет размерность также $(m \times n)$, а элементы ее c_{ij} соответственно равны $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

(То есть, элементы, стоящие на одинаковых местах просто складываются.)

Нетрудно видеть, что операция сложения матриц обладает свойствами:

коммутативности $A+B=B+A$;

ассоциативности $A+(B+C)=(A+B)+C$.

$$\text{Пример 2. Найти } A+B, \text{ если } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Решение. Имеем } A+B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 2+(-3) \\ 3+5 & 1+2 \\ 2+(-4) & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 8 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Умножение матрицы на действительное число

Определение 4. Пусть даны матрица $A(a_{ij})$ размерности $(m \times n)$. Произведением матрицы A на число k (kA) называется матрица $C=kA$, где матрица $C(c_{ij})$ имеет размерность также $(m \times n)$, а элементы ее c_{ij} соответственно равны $c_{ij} = ka_{ij}$.

(То есть, все элементы матрицы A умножаются на число k).

Пример 3. Найти $5A$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение. Имеем $5A = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 1 & 5 \cdot 2 \\ 5 \cdot 3 & 5 \cdot 1 \\ 5 \cdot 2 & 5 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 5 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}$.

Не трудно проверить следующие свойства операции умножения на число:

1. $(k + p)A = kA + pA$;
2. $k(A + B) = kA + kB$.

4. Произведение матриц

Определение 5. Произведением матриц $A(a_{ij})$ размерности $(m \times k)$, и $B(b_{ij})$ - размерности $(k \times n)$ называется матрица C размерности $(m \times n)$, элементы c_{ij}

которой вычисляются по формуле $c_{ij} = \sum_{l=1}^{l=k} a_{il}b_{lj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ik}b_{kj}$.

Замечания. 1) Обозначение: $C = AB$.

2) Произведение матриц определено только тогда, когда число столбцов в первом множителе (матрица A) равно числу столбцов во втором множителе (матрица B). Результат произведения (матрица C) имеет столько строк, сколько у первого множителя (матрицы A), число столбцов матрицы C равно числу столбцов у второго множителя (матрицы B). Ниже будет указан способ вычисления элементов матрицы C .

3) Элементы строки с номером i в первой матрицы умножаются на соответствующие элементы столбца с номером j во второй матрице и полученные произведения складываются.

Свойства операции произведения матриц:

1. $(AB)C = A(BC)$.
2. $(A + B)C = AC + BC$, $A(B + C) = AB + AC$

Отметим, что в общем случае $AB \neq BA$.

Пример 4. Найти матрицу $C=AB$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. Поскольку первый множитель имеет две строки, а второй два столбца, то матрица C имеет размерность (2×2) . $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$. Определим элементы матрицы C . При вычислении c_{11} берем первую строку матрицы A - $(2 \ 0 \ 1)$ и первый столбец

матрицы $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, почленно перемножаем и складываем $c_{11} = 2 \times 3 + 0 \times 1 + 1 \times 5 = 11$.

Аналогично находим :

c_{12} . 1я строка $A = (2 \ 0 \ 1)$, 2й столбец $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, тогда $c_{12} = 2 \times 4 + 0 \times 0 + 1 \times 2 = 10$;

c_{21} . 2я строка $A = (3 \ 2 \ 4)$, 1й столбец $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, тогда $c_{21} = 3 \times 3 + 2 \times 1 + 4 \times 5 = 31$;

c_{22} . 2я строка $A = (3 \ 2 \ 4)$, 2й столбец $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, тогда $c_{22} = 3 \times 4 + 2 \times 0 + 4 \times 2 = 20$.

Ответ: $C = \begin{pmatrix} 11 & 10 \\ 31 & 20 \end{pmatrix}$.

Пример 5. Вычислите AB и BA , если $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Единичная матрица

Определение 5. Единичной матрицей называется квадратная матрица E размерности $(n \times n)$, у которой все элементы на главной диагонали равны 1, а остальные 0.

Например, единичная матрица размерности (3×3) имеет вид $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Элементы единичной матрицы часто обозначают символом δ_{ij} , где δ_{ij} - символ

Кroneкера $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$.

Отметим, что для любой матрицы A той же размерности имеет место равенство $AE = EA = A$.

6. Транспонирование матрицы

Определение 6. Пусть дана матрица $A(a_{ij})$ размерности $(m \times n)$.

Матрицу $B(b_{ij})$ называют транспонированной к матрице $A(a_{ij})$, если она имеет размерность $(n \times m)$, и при этом $b_{ij} = a_{ji}$. То есть, матрица B получается из матрицы

A следующим образом – столбцы матрицы A становятся строками матрицы B , причем номер соответствующего столбца матрицы A совпадает с номером соответствующей строки матрицы B . Транспонированную к матрице A матрицу будем обозначать символом A' или A^T .

Тогда, если $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, то $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{i1} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{i2} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1j} & a_{2j} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{mj} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{im} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

Пример 6. Найти A^T , если $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. **Решение.** Получаем $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Найти A^T , если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$. Получаем $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$.

7. Определители 2-го и 3-го порядков

Определитель - это некоторое число, которое ставится в соответствие квадратной матрице A . Оно обозначается символом Δ или $|A|$. Иногда вместо слова определитель употребляется термин детерминант, и определитель матрицы A обозначается $\det(A)$. Ниже будет изложено правило его вычисления. Мы используем рекурсивный способ задания метода вычисления определителя. Суть его в следующем. Сначала мы укажем способ вычисления определителя матрицы размерности (1×1) , а далее будет указан метод, который позволяет вычислять определитель матрицы размерности $((n+1) \times (n+1))$, если мы умеем вычислять определитель матрицы размерности $(n \times n)$.

Понятие определителя имеет смысл только для квадратной матрицы.

Для матрицы A размерности 1×1 $A = (a_{11})$ по определению $|A| = a_{11}$.

Определение 7. Минором M_{ij} матрицы A называется определитель матрицы, получаемой из матрицы A путем удаления строки с номером i и столбца с номером j .

Например, для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ имеем $M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$.

Определение 8. Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} называется число, равное значению минора M_{ij} , если $i+j$ четное, и равное значению минора с противоположным знаком $(-M_{ij})$ в противном случае. Алгебраическое дополнение будем обозначать символом A_{ij} . Таким образом $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Например, для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ имеем $A_{21} = - \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$.

Определение 9. Определитель равен сумме произведений элементов первой строки на их алгебраические дополнения.

Тогда, для матрицы второго порядка имеем $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad + b(-c) = ad - bc$. С ее

помощью вычислим определитель

Запомним полученную формулу вычисления определителя матрицы второго порядка. С ее помощью вычислим определитель $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot (-2) = 10$.

Для матрицы третьего порядка

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_1(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} =$$

$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} =$$

$$= a_1(b_2c_3 - c_2b_3) - b_1(a_2c_3 - c_2a_3) + c_1(a_2b_3 - b_2a_3) =$$

$$= a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_1c_2b_3 - b_1a_2c_3 - c_1b_2a_3.$$

Запоминать полученное соотношение не рекомендуется. Лучше запомнить сам прием и его суть. Вычисление определителя третьего порядка свелось к вычислению трех определителей второго порядка. Точно по такой же схеме вычисление определителя матрицы порядка $n+1$ сводится к вычислению $n+1$ определителя матриц порядка n .

Пример 7. Вычислить определитель третьего порядка $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1(4-9) - 2(16-6) + 5(12-2) = 25$.

Аналогично, для матрицы четвертого порядка имеем

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 4 & 6 \\ 3 & 8 & 5 & 4 \\ 1 & 5 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 6 & 4 & 6 \\ 8 & 5 & 4 \\ 5 & 6 & 3 \end{vmatrix} + 2(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 8 & 5 & 4 \\ 5 & 6 & 3 \end{vmatrix} +$$

$$+ 3(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 6 & 4 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{vmatrix} + 1(-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 6 & 4 & 6 \\ 8 & 5 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= \left[6(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} + 8(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} + 5(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} \right] -$$

$$- 2 \left[2(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} + 8(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} + 5(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} \right] +$$

$$\begin{aligned}
& + 3 \left[2(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} + 6(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} + 5(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} \right] - \\
& - \left[2(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} + 6(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} + 8(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} \right] = \\
& = [6(15 - 24) - 8(12 - 36) + 5(16 - 30)] - 2[2(15 - 24) - 8(9 - 6) + 5(12 - 5)] + \\
& + 3[2(12 - 36) - 6(9 - 6) + 5(18 - 4)] - [2(16 - 30) - 6(12 - 5) + 8(18 - 4)] = \\
& = [-54 + 192 - 70] - 2[-18 - 24 + 35] + 3[-48 - 18 + 70] - [-28 - 42 + 112] = \\
& = 68 + 14 + 12 - 42 = 52.
\end{aligned}$$

Конец лекции.

Лекция 2. Свойства определителей

1. Свойства определителей 2-го и 3-го порядков.
2. Определители n-ого порядка. Разложение определителей по элементам строк и столбцов.

Литература:

- 1) Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика, Т.1, Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. М., Дрофа, 2004. §§ 1- 4. Л-3, гл.21.
- 2) Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. М.Физматлит, 2005.
- 3) И.П. Натансон. Краткий курс высшей математики., М., Лань. 1999, гл.7.

1. Свойства определителей 2-го и 3-го порядков.

Мы будем их изучать на примере определителей третьего порядка, однако они имеют место для определителей любого порядка.

Свойство 1. $|A| = |A^T|$.

$$\begin{aligned} \text{Пусть } A &= \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}, \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \\ &= a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - a_1 c_2 b_3 - b_1 a_2 c_3 - c_1 b_2 a_3. \text{ Тогда} \\ |A^T| &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = \\ &= a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) - a_2 (b_1 c_3 - b_3 c_1) + a_3 (b_1 c_2 - b_2 c_1) = \\ &= a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - a_1 c_2 b_3 - b_1 a_2 c_3 - c_1 b_2 a_3, \Rightarrow |A| = |A^T|. \end{aligned}$$

Принципиальный вывод, который следует из данного свойства, состоит в том, что строки и столбцы в определителе равноправны. Операция транспонирования превращает любой столбец в строку и наоборот. Поэтому последующие свойства мы будем формулировать сразу и для строк и для столбцов.

Свойство 2. При перестановке двух строк (или столбцов) местами знак определителя меняется на противоположный (самостоятельно).

$$\text{Например } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Свойство 3. Если матрица A имеет две равные строки (или два равных столбца), то ее определитель равен нулю.

Доказательство. Пусть матрица A имеет две равные строки и ее определитель равен $|A| = \Delta$. Матрицу, полученную из матрицы A перестановкой этих самых двух равных строк, обозначим B .

Поскольку строки переставлены, то, в силу свойства 2, для определителя матрицы B имеем $|B| = -\Delta$. Но поскольку переставлялись **равные строки**, то $A = B$. Значит, $|B| = |A| = \Delta$. Получаем $\Delta = -\Delta$, и, следовательно $\Delta = 0$.

Свойство 4. Если все элементы некоторой строки (столбца) умножить на множитель k , то определитель умножается на этот же множитель k .

$$\begin{vmatrix} a_1 & kb_1 & c_1 \\ a_2 & kb_2 & c_2 \\ a_3 & kb_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 kb_2 c_3 + kb_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 kb_3 - a_1 c_2 kb_3 - kb_1 a_2 c_3 - c_1 kb_2 a_3 =$$

$$= k(a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - a_1 c_2 b_3 - b_1 a_2 c_3 - c_1 b_2 a_3) = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Свойство 5. Если все элементы некоторой строки (или столбца) матрицы равны нулю, то ее определитель равен нулю.

Доказательство следует из свойства 4, полагая $k = 0$.

Свойство 6. Если две строки (или два столбца) матрицы пропорциональны, то ее определитель равен нулю.

Доказательство. Пусть пропорциональны первый и второй столбцы. Имеем

$$\begin{vmatrix} a_1 & ka_1 & c_1 \\ a_2 & ka_2 & c_2 \\ a_3 & ka_3 & c_3 \end{vmatrix} = (\text{в силу свойства 4}) = k \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & c_1 \\ a_2 & a_2 & c_2 \\ a_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0, \text{ поскольку в матрице имеются}$$

два равных столбца.

Свойство 7. Если некоторая строка представлена в виде суммы каких-то двух строк, то определитель такой матрицы можно представить в виде суммы определителей матриц определенного вида.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b'_1 + b''_1 & c_1 \\ a_2 & b'_2 + b''_2 & c_2 \\ a_3 & b'_3 + b''_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b'_1 & c_1 \\ a_2 & b'_2 & c_2 \\ a_3 & b'_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b''_1 & c_1 \\ a_2 & b''_2 & c_2 \\ a_3 & b''_3 & c_3 \end{vmatrix}. \text{ Доказать самостоятельно.}$$

Свойство 8. Определитель матрицы не изменится, если к элементам одной строки (или столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (или столбца) умноженные на постоянный множитель.

Доказательство. В силу свойства 7

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 + ka_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 + ka_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 + ka_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & ka_1 & c_1 \\ a_2 & ka_2 & c_2 \\ a_3 & ka_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Но поскольку во втором определителе $\begin{vmatrix} a_1 & ka_1 & c_1 \\ a_2 & ka_2 & c_2 \\ a_3 & ka_3 & c_3 \end{vmatrix}$ первый и второй столбцы пропорциональны, то в силу свойства 6 он равен нулю. Следовательно,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 + ka_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 + ka_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 + ka_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Свойство 9. Определитель равен сумме произведений элементов любой строки (или столбца) на их алгебраические дополнения.

Как показано ранее

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - a_1 c_2 b_3 - b_1 a_2 c_3 - c_1 b_2 a_3.$$

Рассмотрим для примера сумму произведений элементов третьего столбца на их алгебраические дополнения. Получаем

$$\begin{aligned} c_1(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + c_2(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + c_3(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \\ c_1(a_2 b_3 - b_2 a_3) - c_2(a_1 b_3 - b_1 a_3) + c_3(a_1 b_2 - b_1 a_2) = \\ = a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - a_1 c_2 b_3 - b_1 a_2 c_3 - c_1 b_2 a_3 = |A|. \end{aligned}$$

Представление определителя в виде суммы произведений элементов некоторой строки или столбца на их алгебраические дополнения называется разложением по элементам этой строки или столбца.

Рассмотрим матрицу $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$. Алгебраические дополнения

соответствующих элементов будем обозначать теми же символами, только большими $A_1, A_2, \dots, C_3$.

В силу свойства 9 имеем $|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3$ (сумма произведений

элементов первого столбца на их алгебраические дополнения).

Рассмотрим сумму вида $xA_1 + yA_2 + zA_3$. Нетрудно видеть, что эта сумма является

определителем следующей матрицы $xA_1 + yA_2 + zA_3 = \begin{vmatrix} x & b_1 & c_1 \\ y & b_2 & c_2 \\ z & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$. Пусть

$$x = b_1, y = b_2, z = b_3. \text{ Тогда } b_1A_1 + b_2A_2 + b_3A_3 = \begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Свойство 10. Сумма произведений элементов некоторой строки (или столбца) на алгебраические дополнения к соответствующим элементам другой строки (или другого столбца) равна нулю.

В заключение отметим без доказательства тот факт, что определитель произведения матриц равен произведению их определителей, то есть

$$|AB| = |A||B|.$$

2. Определители n-го порядка

В ранее рассмотренном примере вычисления определителя четвертого порядка были специально подробно проведены все промежуточные выкладки, чтобы отметить один из существенных недостатков предложенного алгоритма. Оценим необходимое количество операций для его выполнения. Определитель матрицы порядка n сводится к вычислению n определителей матриц порядка $n - 1$. Каждый из определителей матриц порядка $n - 1$ сводится к вычислению $n - 1$ определителя матриц порядка $n - 2$. Таким образом вычисление определителя по подобной схеме требует количества операций порядка $n(n - 1)(n - 2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$. При $n = 10$ имеем $n! = 3628800$. То есть с ростом размерности матрицы количество операций очень быстро возрастает. Отметим также, что предложенный алгоритм обладает и другими недостатками, связанными с ограниченностью разрядной сетки представления чисел, что может привести к значительной потере точности вычисления определителя для матриц большой размерности при вычислении на ЭВМ.

Можно привести другой метод вычисления определителя, основанный на той же схеме, но который свободен от некоторых указанных недостатков.

Для этого напомним еще два свойства определителя.

Свойство 11. При перестановке двух строк (или столбцов) определитель меняет знак на противоположный.

Свойство 12. Определитель не изменится, если к элементам одной строки или столбца прибавить соответствующие элементы другой строки или столбца, умноженные на некоторый множитель.

Отметим, что если все элементы некоторого (например первого) столбца кроме одного (например **самого первого**) равны нулю, то вычисление определителя матрицы порядка n сводится к вычислению **одного определителя матрицы порядка $n - 1$** . Первое свойство позволяет на начальном этапе изменить матрицу так, что первый элемент первого столбца будет не равным нулю.

Пример. Найти определитель из 1-й лекции используя эти свойства.

Решение. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 4 & 6 \\ 3 & 8 & 5 & 4 \\ 1 & 5 & 6 & 3 \end{vmatrix}$. Из второй строки вычтем первую, умноженную на 2; из

третьей вычтем первую, умноженную на 3; из четвертой вычтем первую.

$$\text{Тогда } \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2-2 \cdot 1 & 6-2 \cdot 2 & 4-2 \cdot 3 & 6-2 \cdot 1 \\ 3-3 \cdot 1 & 8-3 \cdot 2 & 5-3 \cdot 3 & 4-3 \cdot 1 \\ 1-1 & 5-2 & 6-3 & 3-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$\text{Разложив определитель по первому столбцу, получаем } \Delta = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Проведем аналогичные действия с полученным определителем. Из 2й строки вычтем 1ю; из 3й строки вычтем 1ю, умноженную на множитель $\frac{3}{2}$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 2-2 & -4-(-2) & 1-4 \\ 3-\frac{3}{2} \cdot 2 & 3-\frac{3}{2} \cdot (-2) & 2-\frac{3}{2} \cdot 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 6 & -4 \end{vmatrix}.$$

$$\text{Разложим по первому столбцу } \Delta = 2 \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} = 52.$$

Оценим количество операций, которое требует данный метод.

Для того, чтобы обнулить первый элемент в некоторой строке путем прибавления первой строки, умноженной на соответствующий множитель для матрицы порядка n требуется n операций. Всего имеется n строк. Следовательно, для того, чтобы свести вычисление определителя матрицы порядка n к вычислению **одного** определителя матрицы порядка $n-1$ число требуемых операций имеет порядок n^2 . Следовательно, число операций, которое требуется для вычисления определителя, имеет порядок n^3 . Для больших значений n величина n^3 существенно меньше $n!$.

Закачивая изучение определителей, рассмотрим пример.

Пример 7. Решить уравнение $\begin{vmatrix} 1 & 2 & x & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0$.

Решение. Раскладывая по третьему столбцу, получаем

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & x & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Вычислим каждый из определителей, входящих в это уравнение. (Вычисление последнего не требуется.)

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 3(5 - 8) - (10 - 12) + 5(4 - 3) = -2;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (5 - 8) - 2(10 - 12) + 3(4 - 3) = 4;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (5 - 10) - 2(15 - 15) + 3(6 - 3) = 4.$$

Подставляя в уравнение, получаем

$$x(-2) - 1(4) + 1(4) = 0; \quad 2x = 0; \quad x = 0.$$

Конец лекции.

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Алгебраические дополнения соответствующих элементов будем обозначать теми же символами, только большими $A_1, A_2, \dots, C_3$.

Столбцом свободных $\vec{h}$ называется столбец вида: $\vec{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$.

2. Правило Крамера

Предположим, что система имеет решение. Тогда первое уравнение системы умножим на A_1 , второе на A_2 , третье на A_3 , и сложим.

Получаем

$$A_1(a_1x + b_1y + c_1z) + A_2(a_2x + b_2y + c_2z) + A_3(a_3x + b_3y + c_3z) = h_1A_1 + h_2A_2 + h_3A_3$$

Преобразуем полученное уравнение к виду

$$x(a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3) + y(b_1A_1 + b_2A_2 + b_3A_3) + z(c_1A_1 + c_2A_2 + c_3A_3) = h_1A_1 + h_2A_2 + h_3A_3.$$

Заметим, что выражение $(a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3)$ представляет собой сумму произведений элементов первого столбца матрицы A на их алгебраические дополнения. Согласно свойству 9 определителей, она равна определителю матрицы A , то есть определителю системы $-(a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3) = \Delta$.

Суммы вида $(b_1A_1 + b_2A_2 + b_3A_3)$; $(c_1A_1 + c_2A_2 + c_3A_3)$ представляют собой сумму произведений элементов второго и третьего столбцов матрицы A на алгебраические дополнения к соответствующим элементам первого столбца.

Согласно свойству 10 определителей, они равны нулю

$$(b_1A_1 + b_2A_2 + b_3A_3) = 0; \quad (c_1A_1 + c_2A_2 + c_3A_3) = 0.$$

Последняя сумма $h_1A_1 + h_2A_2 + h_3A_3$ представляет собой определитель вида

$$h_1A_1 + h_2A_2 + h_3A_3 = \begin{vmatrix} h_1 & b_1 & c_1 \\ h_2 & b_2 & c_2 \\ h_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \text{ то есть определитель матрицы, получаемой из}$$

матрицы системы путем замены столбца коэффициентов при неизвестном x столбцом свободных членов. Обозначим

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} h_1 & b_1 & c_1 \\ h_2 & b_2 & c_2 \\ h_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \text{ Таким образом, получаем } \Delta \cdot x = \Delta_x.$$

Аналогично, умножая первое уравнение системы на B_1 , второе на B_2 , третье на B_3 , и складывая, получаем $\Delta \cdot y = \Delta_y$, где Δ_y - определитель матрицы, получаемой из матрицы системы путем замены столбца коэффициентов при неизвестном y столбцом свободных членов

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & h_1 & c_1 \\ a_2 & h_2 & c_2 \\ a_3 & h_3 & c_3 \end{vmatrix}. \text{ Умножая первое уравнение системы на } C_1, \text{ второе на } C_2,$$

третье на C_3 , и складывая, получаем $\Delta \cdot z = \Delta_z$, где Δ_z - определитель матрицы,

получаемой из матрицы системы путем замены столбца коэффициентов при неизвестном z столбцом свободных членов

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & h_1 \\ a_2 & b_2 & h_2 \\ a_3 & b_3 & h_3 \end{vmatrix}.$$

Таким образом, мы получили систему уравнений вида
$$\begin{cases} \Delta \cdot x = \Delta_x; \\ \Delta \cdot y = \Delta_y; \\ \Delta \cdot z = \Delta_z; \end{cases}$$

Полученная система позволяет сделать важные выводы.

Вывод первый. Если определитель системы равен нулю $\Delta = 0$, а хотя бы один из определителей Δ_x , Δ_y , Δ_z не равен нулю, то система не имеет решения.

Вывод второй. Если определитель системы не равен нулю $\Delta \neq 0$ и система имеет решение, то решение имеет вид $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$, $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$, $z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$.

Покажем, что в случае, когда определитель системы не равен нулю $\Delta \neq 0$,

соотношения $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$, $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$, $z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$ действительно определяют решение

системы. Для этого подставим полученные значения неизвестных в уравнения системы, например в первое

Получаем $a_1 \frac{\Delta_x}{\Delta} + b_1 \frac{\Delta_y}{\Delta} + c_1 \frac{\Delta_z}{\Delta}$. Заметим, что

$$\Delta_x = h_1 A_1 + h_2 A_2 + h_3 A_3; \Delta_y = h_1 B_1 + h_2 B_2 + h_3 B_3; \Delta_z = h_1 C_1 + h_2 C_2 + h_3 C_3.$$

Тогда получаем $a_1 \frac{\Delta_x}{\Delta} + b_1 \frac{\Delta_y}{\Delta} + c_1 \frac{\Delta_z}{\Delta} =$

$$= \frac{1}{\Delta} [a_1 (h_1 A_1 + h_2 A_2 + h_3 A_3) + b_1 (h_1 B_1 + h_2 B_2 + h_3 B_3) + c_1 (h_1 C_1 + h_2 C_2 + h_3 C_3)].$$

Успех проводимых математических преобразований во многом определяется формой записи выражений. Перепишем полученное соотношение в несколько иной форме, перегруппировав слагаемые

$$a_1 \frac{\Delta_x}{\Delta} + b_1 \frac{\Delta_y}{\Delta} + c_1 \frac{\Delta_z}{\Delta} =$$

$$= \frac{1}{\Delta} [h_1 (a_1 A_1 + b_1 B_1 + c_1 C_1) + h_2 (a_1 A_2 + b_1 B_2 + c_1 C_2) + h_3 (a_1 A_3 + b_1 B_3 + c_1 C_3)].$$

Заметим, что сумма вида $(a_1 A_1 + b_1 B_1 + c_1 C_1)$ представляет собой сумму произведений элементов первой строки матрицы системы на их алгебраические дополнения, и, следовательно, равна определителю системы

$$(a_1 A_1 + b_1 B_1 + c_1 C_1) = \Delta.$$

Суммы вида $(a_1 A_2 + b_1 B_2 + c_1 C_2)$, $(a_1 A_3 + b_1 B_3 + c_1 C_3)$ представляет собой сумму произведений элементов первой строки матрицы системы на

алгебраические дополнения к элементам второй и третьей строки, и, следовательно, равны нулю $(a_1A_2 + b_1B_2 + c_1C_2)=0$, $(a_1A_3 + b_1B_3 + c_1C_3)=0$.

Тогда получаем

$$a_1 \frac{\Delta_x}{\Delta} + b_1 \frac{\Delta_y}{\Delta} + c_1 \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{1}{\Delta} [h_1\Delta + h_2 0 + h_3 0] = h_1.$$

Вывод 3. Если определитель системы не равен нулю $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение при этом неизвестные (x,y,z) определяются формулами,

$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$, $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$, $z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$, которые называются формулами Крамера.

Пример 1. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x + 5y = 18; \\ 3x - 8y = -4; \end{cases}$

Решение. Имеем $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -8 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-8) - 5 \cdot 3 = -31;$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 18 & 5 \\ -4 & -8 \end{vmatrix} = 18 \cdot (-8) - 5 \cdot (-4) = -124;$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 18 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-4) - 18 \cdot 3 = -62.$$

$$\text{Тогда } x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-124}{-31} = 4, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-62}{-31} = 2.$$

Пример 2. Решить систему $\begin{cases} x + y - z = -5, \\ 3x - 2y + 4z = 42, \\ 5x - 2y - 3z = 8. \end{cases}$

Решение. Определитель системы равен $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix} =$

$$= 1 \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = (6 + 8) - (-9 - 20) - (-6 + 10) = 39.$$

Определители Δ_x , Δ_y , Δ_z соответственно равны:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -5 & 1 & -1 \\ 42 & -2 & 4 \\ 8 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -5 \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 42 & 4 \\ 8 & -3 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 42 & -2 \\ 8 & -2 \end{vmatrix} = 156,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & -5 & -1 \\ 3 & 42 & 4 \\ 5 & 8 & -3 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 42 & 4 \\ 8 & -3 \end{vmatrix} - (-5) \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 3 & 42 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = -117,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 3 & -2 & 42 \\ 5 & -2 & 8 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -2 & 42 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 3 & 42 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 234.$$

Получаем: $x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{156}{39} = 4$, $y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = -\frac{117}{39} = -3$, $z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{234}{39} = 6$.

3. Линейные однородные системы и их нетривиальные решения

Определение 1. Система линейных уравнений называется однородной, если столбец свободных членов равен нулю. То есть однородная система в случае трех

уравнений с тремя неизвестными имеет вид
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0, \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0. \end{cases}$$

Однородная система линейных уравнений всегда имеет нулевое решение $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$,

Если определитель системы не равен нулю, то это решение является единственным. Следовательно, однородная система линейных уравнений всегда имеет ненулевое решение только в том случае, когда ее определитель равен нулю. Этот факт довольно часто встречается на практике. Простейший пример. Если вы возьмете линейку, поставите ее вертикально, и надавите сверху рукой, то в какой-то момент она начнет выпучиваться. Тот факт, что при некотором усилии у линейки, помимо сжатого, появляется и изогнутое состояние равновесия, связан с тем, что некоторая однородная система линейных уравнений имеет ненулевое решение. То есть определитель соответствующей матрицы обращается в ноль. Это условие и позволяет определить соответствующую критическую нагрузку.

Пример 3. Доказать, что если система уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0; \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0; \\ A_4x + B_4y + C_4z + D_4 = 0 \end{cases} \text{ имеет нетривиальное решение, то}$$

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Доказательство. Пусть система имеет решение $x = a$, $y = b$, $z = c$. Рассмотрим однородную систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1u = 0; \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2u = 0; \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3u = 0; \\ A_4x + B_4y + C_4z + D_4u = 0 \end{cases}$$

Эта система тогда имеет решение $x = a, y = b, z = c, u = 1$, то есть ненулевое. А это означает, что ее определитель равен нулю. Следовательно,

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Конец лекции.

Лекция 4. Системы линейных алгебраических уравнений (продолжение)

1. Ранг матрицы. Элементарные преобразования.
2. Матричная запись системы линейных уравнений.
3. Метод Жордана-Гаусса.
4. Примеры.

Литература

Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика, Т.1, Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. М., Дрофа, 2004., §§ 1-4.

1. Ранг матрицы. Элементарные преобразования

Прежде чем перейти к дальнейшему изучению систем линейных уравнений, мы вернемся к матрицам, так как нам понадобятся некоторые дополнительные сведения об этих математических объектах.

Рассмотрим матрицу $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ размерности $(m \times n)$.

Минором порядка k называется определитель матрицы, образованной пересечением любых k строк и k столбцов матрицы A .

Определение 1. Рангом матрицы A называется максимальный порядок минора матрицы A , не равного нулю. Очевидно, что ранг матрицы размерности $(m \times n)$ не может превышать наименьшее из чисел m и n .

Определение 2. Следующие преобразования строк (столбцов) матрицы назовем элементарными.

1. Перестановка двух строк (столбцов) местами.
2. Умножение строки (столбца) на ненулевой множитель.
3. Прибавление к элементам одной строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца) умноженных на постоянный множитель.
4. Удаление из матрицы нулевой строки (столбца).

Элементарные преобразования строк и столбцов не меняют ранг матрицы (без доказательства).

Теперь перейдем к построению алгоритма определения ранга матрицы.

Рассмотрим матрицу $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$. Пусть $a_{11} \neq 0$.

Если все элементы матрицы равны нулю, то ее ранг равен нулю, а если имеются ненулевые элементы, то соответствующей перестановкой строк и столбцов можно добиться того, что $a_{11} \neq 0$. Далее из второй строки вычтем первую,

умноженную на множитель λ , где $\lambda = \frac{a_{21}}{a_{11}}$. Заметим, что после такого

преобразования первый элемент второй строки станет равным нулю.

Аналогично поступим с остальными строками. Из строки с номером i вычтем

первую, умноженную на множитель λ , где $\lambda = \frac{a_{i1}}{a_{11}}$. После всех таких

преобразований все элементы 1го столбца, кроме первого будут равны нулю.

В итоге матрица примет вид

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b_{i2} & \dots & b_{ij} & \dots & b_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b_{m2} & \dots & b_{mj} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Теперь сделаем следующее преобразование со столбцами. Из второго столбца

вычтем первый, умноженный на множитель λ , где $\lambda = \frac{a_{12}}{a_{11}}$. Заметим, что после

такого преобразования первый элемент второго столбца станет равным нулю.

Аналогично поступим с остальными столбцами. Из столбца с номером j вычтем

первый, умноженный на множитель λ , где $\lambda = \frac{a_{1j}}{a_{11}}$. Прделав эту серию

преобразований, мы обнаружим, что и в первой строке все элементы, кроме первого равны нулю. То есть матрица примет вид

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b_{i2} & \dots & b_{ij} & \dots & b_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b_{m2} & \dots & b_{mj} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Если в ходе преобразований у нас где-то

образовались нулевая строка или столбец, то мы их просто удалим.

Далее мы забываем про первую строку и первый столбец и проделываем ту же серию преобразований с оставшейся часть матрицы. И так далее.

В итоге у нас получится квадратная матрица размерности $(r \times r)$, у которой все элементы, кроме главной диагонали равны нулю, а элементы, стоящие на главной диагонали, не равны нулю. Это число r и будет рангом матрицы.

Пример 1. Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 9 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 6 & 5 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Решение. Специально не будем замечать некоторых моментов, характерных для данной конкретной матрицы. Итак – угловой элемент ненулевой, значит перестановка строк и столбцов не требуется.

Из второй строки вычтем первую, умноженную на множитель $\lambda = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Из третьей строки вычтем первую, умноженную на множитель $\lambda = \frac{1}{4}$.

Из четвертой строки вычтем первую, умноженную на множитель $\lambda = \frac{3}{4}$.

Получим $\begin{pmatrix} 4 & 7 & 9 & 7 & 8 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{-7}{2} & \frac{-5}{2} & -2 \\ 0 & \frac{-3}{4} & \frac{7}{4} & \frac{5}{4} & 1 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{-7}{4} & \frac{-5}{4} & -1 \end{pmatrix}$.

Из 2го столбца вычтем 1й, умноженный на множитель $\lambda = \frac{7}{4}$.

Из 3го столбца вычтем 1й, умноженный на множитель $\lambda = \frac{9}{4}$.

Из 4го столбца вычтем 1й, умноженный на множитель $\lambda = \frac{7}{4}$.

Из 5го столбца вычтем 1й, умноженный на множитель $\lambda = \frac{8}{4} = 2$.

Получим $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{-7}{2} & \frac{-5}{2} & -2 \\ 0 & \frac{-3}{4} & \frac{7}{4} & \frac{5}{4} & 1 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{-7}{4} & \frac{-5}{4} & -1 \end{pmatrix}$. Теперь поступим аналогичным образом с

оставшейся частью матрицы. Элемент $a_{22} = \frac{3}{2} \neq 0$, значит перестановок не

требуется. Из 3й строки вычтем вторую, умноженную на $\lambda = \frac{(-\frac{3}{4})}{(\frac{3}{2})} = \frac{-1}{2}$.

нулевые строки, получим

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{-7}{2} & \frac{-5}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{-7}{2} & \frac{-5}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из 4го столбца вычтем второй, умноженный на множитель $\lambda = \frac{-5/2}{3/2} = \frac{-5}{3}$.

Получим $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Удалим нулевые столбцы. Имеем $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

2. Матричная запись системы линейных уравнений.

Рассмотрим систему m линейных уравнений с n неизвестными:

[illegible]

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & a_{mn} \end{pmatrix}.$$
$$\vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Определение 5. Вектор-столбцом свободных членов $\vec{b}$ называется матрица размерности $(m \times 1)$ вида

$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$. По правилу умножения матриц система может быть записана в виде

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad \text{или кратко} \quad A\vec{X} = \vec{b}.$$

Такой способ записи называется векторно-матричным способом записи системы уравнений.

Определение 6. Расширенной матрицей системы В называется матрица размерности $(m \times (n+1))$, получаемая присоединением к матрице системы столбца

свободных членов $B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{2n} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$

Определение 7. Системы уравнений называются эквивалентными, если множество их решений совпадает.

Определение 8. Элементарными преобразованиями системы линейных уравнений назовем следующие действия:

- а) перестановка местами двух уравнений системы;
- б) умножение любого уравнения системы на любое число, не равное нулю;
- в) прибавление к одному уравнению системы другого уравнения, умноженного на некоторое число;
- г) вычеркивание уравнения, в котором все коэффициенты и свободный член равны нулю.

Элементарные преобразования переводят данную систему линейных уравнений в эквивалентную систему. Элементарным преобразованиям системы соответствуют аналогичные элементарные преобразования строк ее расширенной матрицы.

3. Метод Жордана-Гаусса.

Суть метода Жордана-Гаусса решения системы линейных уравнений состоит в последовательном исключении неизвестных из уравнений системы. На первом этапе исключается неизвестное x_1 из всех уравнений системы, кроме первого. Применительно к расширенной матрице это означает, что с помощью элементарных преобразований строк получаем матрицу, в которой все элементы первого столбца, кроме a_{11} равны нулю. Этого можно добиться следующим образом:

- переставляем строки расширенной матрицы так, чтобы элемент a_{11} не был равен нулю (при решении систем с большим числом неизвестных предпочтительна такая перестановка строк, при которой элемент a_{11} оказывается наибольшим по абсолютной величине);

- из второй строки вычитаем первую, умноженную на $\frac{a_{21}}{a_{11}}$;

- из третьей строки вычитаем первую, умноженную на $\frac{a_{31}}{a_{11}}$;

- аналогично поступаем с остальными строками.

В итоге расширенная матрица примет вид:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & a'_{m2} & \dots & a'_{mn} & b'_m \end{array} \right)$$

Если среди элементов второго столбца $a'_{22}, a'_{32}, \dots, a'_{m2}$ найдется хотя бы один не равный нулю, то аналогичными элементарными преобразованиями строк, начиная со второй (первая строка не используется) добиваемся того, чтобы все элементы второго столбца, стоящие ниже второго элемента, были равны нулю. Если же $a'_{22} = a'_{32} = \dots = a'_{m2} = 0$, то перенумеруем неизвестные так, чтобы среди названных элементов нашелся ненулевой. (Перенумерации неизвестных соответствует перестановка столбцов расширенной матрицы).

Аналогичным образом добиваемся того, чтобы в третьем столбце все элементы, стоящие ниже третьего, были равны нулю и так далее.

Если в процессе элементарных преобразований получается строка вида $(0 \dots 0 \mid d_i)$, где $d_i \neq 0$, то это соответствует уравнению $0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = d_i$, которое не имеет решений и, следовательно, система является несовместной.

Если в процессе элементарных преобразований получается строка вида $(0 \dots 0 \mid 0)$, то ее вычеркиваем.

В общем случае в результате описанных элементарных преобразований получим расширенную матрицу вида:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{2n} & d_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & c_{kn} & d_k \end{array} \right), \text{ где } c_{11} \neq 0, c_{22} \neq 0, \dots, c_{kk} \neq 0.$$

Заметим, что k не обязательно равно m , поскольку некоторые строки в процессе элементарных преобразований могли стать нулевыми и были вычеркнуты.

Рассмотрим два возможных исхода.

1. $k=n$.

В этом случае последней строке расширенной матрицы соответствует уравнение:

$c_{nn}x_n = d_n$, откуда $x_n = \frac{d_n}{c_{nn}}$. Строке с номером $(n-1)$ соответствует уравнение:

$c_{n-1,n-1}x_{n-1} + c_{n-1,n}x_n = d_{n-1}$, из которого при уже известном x_n определяется x_{n-1} .

Аналогично определяются остальные неизвестные, в этом случае ($k=n$) система линейных уравнений имеет единственное решение.

2. $k < n$.

В этом случае полагаем неизвестные $x_{k+1}, \dots, x_n$ свободными, то есть, полагаем, что они могут принимать любые значения, а остальные выражаем через них.

Из последней строки расширенной матрицы имеем:

$$c_{kk}x_k + c_{k,k+1}x_{k+1} + \dots + c_{kn}x_n = d_k,$$

откуда находим:

$$x_k = \frac{d_k}{c_{kk}} - \frac{c_{k,k+1}}{c_{kk}}x_{k+1} - \dots - \frac{c_{kn}}{c_{kk}}x_n.$$

Аналогично с помощью $(k-1)$ строки выражаем неизвестное x_{k-1} и так далее.

4. Примеры

Пример 2. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} x + y - z = -5, \\ 3x - 2y + 4z = 42, \\ 5x - 2y - 3z = 8. \end{cases}$$

Решение. Расширенная матрица имеет вид:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -5 \\ 3 & -2 & 4 & 42 \\ 5 & -2 & -3 & 8 \end{array} \right).$$
 Умножим первую строку на 3 и вычтем из второй, умножим

первую строку на 5 и вычтем из третьей, далее умножаем вторую строку на $\frac{7}{5}$ и вычитаем из третьей, получаем

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & -5 & 7 & 57 \\ 0 & -7 & 2 & 33 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & -5 & 7 & 57 \\ 0 & 0 & -\frac{39}{5} & -\frac{234}{5} \end{array} \right).$$
 Последняя строка расширенной матрицы

соответствует уравнению $-\frac{39}{5}z = -\frac{234}{5}$. Решая его, получаем $z=6$.

2я строка расширенной матрицы соответствует уравнению $-5y+7z=57$. Подставляя $z=6$, получаем $-5y+42=57$. Тогда $y=-3$. Из первого уравнения, подставляя $z=6$, $y=-3$, получаем $x=4$.

Пример 3. Решить систему уравнений.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_4 = 1, \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 5. \end{cases}.$$

Решение. Расширенная матрица имеет вид: $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 3 & 1 \\ 5 & 5 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right)$. Умножим первую

строку на $\frac{1}{2}$ и вычтем из второй, умножим первую строку на $\frac{5}{2}$ и вычтем из третьей, затем вторую строку вычитаем из третьей, получаем.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} & -\frac{5}{2} \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

Последняя строка расширенной матрицы соответствует уравнению $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = -2$, которое не имеет решений, значит, система несовместна.

Пример 4. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 7, \\ x_1 + 3x_3 - x_4 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 4, \\ 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 + x_4 = 14. \end{cases}$$

Решение. Расширенная матрица системы имеет вид:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 6 & 1 & 14 \end{array}\right). \text{ Умножим первую строку на } \frac{1}{2} \text{ и вычтем из второй,}$$

умножим первую строку на $\frac{1}{2}$ и вычтем из третьей, умножим первую строку на 2 и вычтем из четвертой, получаем:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right). \text{ Умножим вторую строку на } (-3) \text{ и вычтем из третьей,}$$

умножим вторую строку на (-2) и вычтем из четвертой, получаем:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & -1 \end{array}\right). \text{ Третью строку вычитаем из четвертой.}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \text{ Четвертая строка нулевая, поэтому ее вычеркиваем.}$$

Получаем:
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 3 & -4 & -1 \end{array} \right).$$
 Последняя строка расширенной матрицы

соответствует уравнению $3x_3 - 4x_4 = -1$. Полагая x_4 свободной неизвестной,

находим x_3 . $x_3 = -\frac{1}{3} + \frac{4}{3}x_4$. 2-я строка расширенной матрицы соответствует

уравнению $-\frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 - \frac{3}{2}x_4 = -\frac{1}{2}$. Определяем $x_2 = 1 + 3x_3 - 3x_4$. Подставляем x_3 .

$x_2 = 1 + 3\left(-\frac{1}{3} + \frac{4}{3}x_4\right) - 3x_4 = x_4$. Из 1-го уравнения системы $2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 7$

получаем $2x_1 = 7 - x_2 - 3x_3 - x_4$; $2x_1 = 7 - x_4 - 3\left(-\frac{1}{3} + \frac{4}{3}x_4\right) - x_4 = 8 - 6x_4$; $x_1 = 4 - 3x_4$.

Ответ: $x_1 = 4 - 3x_4$; $x_2 = x_4$; $x_3 = -\frac{1}{3} + \frac{4}{3}x_4$; x_4 - свободная неизвестная.

Пример 5. . Решить систему уравнений:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 10, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 14. \end{cases}$$

Решение. Расширенная матрица системы имеет вид

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 10 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 14 \end{array} \right). \text{ Умножим первую строку на 2 и вычтем из второй,}$$

первую строку вычтем из третьей, умножим первую строку на 3 и вычтем из четвертой, далее вычитаем вторую строку из третьей и четвертой и удаляем две последние строки.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \end{array} \right).$$

Последняя строка соответствует уравнению $x_2 + 2x_3 - x_4 = 2$. Неизвестные x_3 , x_4 полагаем свободными. Тогда $x_2 = 2 - 2x_3 + x_4$. Из первого уравнения системы следует $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4$; $x_1 = 4 - x_2 - x_3 - x_4 = 4 - (2 - 2x_3 + x_4) - x_3 - x_4$; $x_1 = 2 + x_3 - 2x_4$.

Ответ: $x_1 = 2 + x_3 - 2x_4$; $x_2 = 2 - 2x_3 + x_4$; x_3 , x_4 - свободные неизвестные.

Конец лекции.

Лекции 5. Метод обратной матрицы

1. Система n линейных уравнений с m неизвестными. Теорема Кронекера – Капелли.
2. Единичная и обратная матрицы.
3. Нахождение обратной матрицы методом алгебраических дополнений.
4. Нахождение обратной матрицы методом Гаусса.
5. Решение систем n линейных уравнений с n неизвестными с помощью обратной матрицы.
6. Решение матричных уравнений.

Литература

Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика, Т.1., Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. М., Дрофа, 2004, §§ 1-4.

1. Система n линейных уравнений с m неизвестными

Теорема Кронекера-Капелли (без доказательства). Система линейных уравнений имеет решение тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу ее расширенной матрицы.

Данная теорема позволяет решить вопрос о существовании решения системы линейных уравнений.

Далее будем использовать векторно-матричную запись системы линейных уравнений. Пусть имеется система линейных уравнений вида $A\vec{X} = \vec{b}$.

Определение 1. Однородной назовем систему $A\vec{X} = \vec{0}$, где $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Теорема. Общее решение неоднородной системы линейных уравнений может быть представлено как сумма любого частного решения неоднородной системы и общего решения соответствующей однородной системы.

Доказательство. Пусть $\vec{X}_1, \vec{X}_2$ два произвольных частных решения неоднородной системы, то есть $A\vec{X}_1 = \vec{b}, A\vec{X}_2 = \vec{b}$. Обозначим $\vec{Z} = \vec{X}_1 - \vec{X}_2$

Получаем $A\vec{X}_1 - A\vec{X}_2 = \vec{b} - \vec{b}, A(\vec{X}_1 - \vec{X}_2) = \vec{0}, A\vec{Z} = \vec{0}$. То есть разность любых двух частных решений неоднородной системы является решением соответствующей однородной системы.

Пусть $\vec{X}_1$ два произвольное частное решение неоднородной системы, то есть $A\vec{X}_1 = \vec{b}$, а $\vec{Z}$ произвольное решение соответствующей однородной, то есть $A\vec{Z} = \vec{0}$. Обозначим $\vec{X}_2 = \vec{X}_1 + \vec{Z}$. Тогда $A\vec{X}_1 + A\vec{Z} = \vec{b} + \vec{0}, A(\vec{X}_1 + \vec{Z}) = \vec{b}, A\vec{X}_2 = \vec{b}$. То есть сумма любого частного решения неоднородной системы и любого решения соответствующей однородной является решением неоднородной системы линейных уравнений.

2. Единичная и обратная матрицы

Определение 2. Введем понятие **единичной** матрицы. Единичной матрицей называется квадратная матрица E размерности $(n \times n)$, у которой все элементы на главной диагонали равны 1, а остальные нулю. Например, единичная матрица

размерности (3×3) имеет вид $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Элементы единичной матрицы часто

обозначают символом δ_{ij} , где $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$.

Отметим, что для любой матрицы A той же размерности имеет место равенство $AE = EA = A$.

Для квадратной матрицы определено понятие обратной матрицы.

Определение 8. Матрица A^{-1} называется *обратной* к матрице A если выполнено $A^{-1}A = A A^{-1} = E$.

Если определитель матрицы A не равен нулю, то матрица A имеет обратную.

Далее мы изложим два способа вычисления обратной матрицы.

3. Нахождение обратной матрицы методом алгебраических дополнений

Он позволяет вычислять элементы обратной матрицы по готовой формуле. Пусть a_{ij} - элементы матрицы $A (a_{ij})$, размерности $(n \times n)$. Рассмотрим матрицу $C(c_{ij})$, где c_{ij} - элементы матрицы C , которые вычисляются по следующему правилу.

Обозначим Δ - определитель матрицы A . Тогда $c_{ij} = \frac{A_{ji}}{\Delta}$, где A_{ji} обозначено алгебраическое дополнение к элементу a_{ji} в матрице A .

Вычислим произведение матриц A и C .

Пусть $AC = D$, где D матрица размерности $(n \times n)$ с элементами $D(d_{ij})$.

Из определения произведения матриц имеем

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} c_{kj} = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk}.$$

Сумма вида $\sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk}$ является суммой произведений элементов строки матрицы

A с номером i на алгебраические дополнения к соответствующим элементам строки с номером j . Из свойств определителя мы уже знаем, что такая сумма равна определителю матрицы A , когда $i = j$, и равна нулю, при $i \neq j$, то есть имеем:

$$\text{при } i = j \quad d_{ii} = \sum_{k=1}^n a_{ik} c_{ki} = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{ik} = \frac{1}{\Delta} \Delta = 1.$$

$$\text{при } i \neq j \quad d_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} c_{kj} = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk} = \frac{1}{\Delta} 0 = 0. \text{ Таким образом } d_{ij} = \delta_{ij},$$

где $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$, и матрица D является единичной матрицей $D=E$.

Следовательно, матрица C является обратной. (Проверка того факта, что $CA=E$ проводится аналогично.) То есть $D=A^{-1}$.

Пример 1. Найти матрицу обратную A , если $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

Решение. Вычисление обратной матрицы удобно проводить по схеме.

1. Вычисляем определитель матрицы A разложением по первой строке.

$$\Delta = 2 \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 2 \times (-7) - 1 \times 1 + 1 \times (2) = -13.$$

2. По заданной матрице находим транспонированную матрицу A^T (транспонированная матрица получается из матрицы A путем замены ее строк столбцами, причем каждая строка заменяется столбцом с тем же номером.)

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & -4 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}. \text{ В транспонированной матрице } A^T \text{ каждый элемент заменяем на}$$

его алгебраическое дополнение и полученную матрицу делим на определитель

$$\begin{pmatrix} -7 & -9 & 5 \\ -1 & 8 & -3 \\ 2 & 10 & -7 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{(-13)} \begin{pmatrix} -7 & -9 & 5 \\ -1 & 8 & -3 \\ 2 & 10 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{13} & \frac{9}{13} & \frac{-5}{13} \\ \frac{1}{13} & \frac{-8}{13} & \frac{3}{13} \\ \frac{-2}{13} & \frac{-10}{13} & \frac{7}{13} \end{pmatrix}.$$

Рекомендуем самостоятельно умножить A на A^{-1} и убедиться, что найденная матрица является обратной. Недостатком этого способа является тот факт, что для матриц большой размерности требуется большое число операций.

4. Нахождение обратной матрицы методом Гаусса

Второй способ нахождения обратной матрицы называется также методом присоединенной матрицы. Суть метода состоит в следующем. Если некоторой последовательностью элементарных преобразований строк матрица A приведена к единичной, то та же последовательность элементарных преобразований приводит единичную матрицу к обратной. Последовательность действий при этом методе напоминает метод Жордана-Гаусса. (Отметим, что это утверждение верно и для последовательности элементарных преобразований столбцов, но нельзя при определении обратной матрицы чередовать преобразования строк и столбцов - либо только строки, либо только столбцы). Решим этим методом предыдущий пример.

Пример 2. Найти обратную матрицу из примера 5 методом Гаусса.

Решение. Сформируем матрицу размерности (3×6) , где первые три столбца эта матрица A , а следующие три - единичная матрица E . Что бы получить в верхнем левом углу единицу, разделим первую строку на 2.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Добьемся того, чтобы все элементы первого столбца, кроме первого стали нулевыми. Для этого из второй строки вычтем первую, из третьей строки вычтем первую умноженную на 2. Добьемся того, чтобы элемент, стоящий на пересечении второй строки и второго столбца, был равен 1. Для этого разделим вторую строку на $\left(\frac{-7}{2}\right)$. Получаем

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-7}{2} & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-3}{7} & \frac{1}{7} & \frac{-2}{7} & 0 \\ 0 & -5 & 4 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Добьемся того, чтобы все элементы второго столбца, стоящие ниже второго были равны нулю. Для этого к 3й строке прибавим вторую, умноженную на 5. Чтобы элемент на пересечении третьей строки и третьего столбца был равен 1, разделим третью строку на $\frac{13}{7}$. Получаем

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-3}{7} & \frac{1}{7} & \frac{-2}{7} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{13}{7} & \frac{-2}{7} & \frac{-10}{7} & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-3}{7} & \frac{1}{7} & \frac{-2}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-2}{13} & \frac{-10}{13} & \frac{7}{13} \end{array} \right).$$

Для того чтобы все элементы третьего столбца, лежащие выше третьего стали нулевыми, ко второй строке прибавим третью, умноженную на $\frac{3}{7}$, и из первой вычтем третью, умноженную на $\frac{1}{2}$. Чтобы все элементы второго столбца, стоящие выше второго были равны 0, вычтем из первой строки вторую, умноженную на $\frac{1}{2}$. Таким образом, слева от вертикальной черты мы получили единичную матрицу, тогда справа от вертикальной черты мы имеем обратную

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{15}{26} & \frac{10}{26} & \frac{-7}{26} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{13} & \frac{-8}{13} & \frac{3}{13} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-2}{13} & \frac{-10}{13} & \frac{7}{13} \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{7}{13} & \frac{9}{13} & \frac{-5}{13} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{13} & \frac{-8}{13} & \frac{3}{13} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-2}{13} & \frac{-10}{13} & \frac{7}{13} \end{array} \right) \Rightarrow A^{-1} = \left(\begin{array}{ccc} \frac{7}{13} & \frac{9}{13} & \frac{-5}{13} \\ \frac{1}{13} & \frac{-8}{13} & \frac{3}{13} \\ \frac{-2}{13} & \frac{-10}{13} & \frac{7}{13} \end{array} \right).$$

Отметим, что для матрицы большой размерности второй метод существенно более удобен, нежели первый. Мы не будем доказывать строго, что данный метод действительно приводит к обратной матрице. Поясним это «на пальцах».

Пусть имеется матрица A размерности $(n \times n)$.

В данном методе используются следующие элементарные преобразования

1. Перемена двух строк местами.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & \dots & a_{ji} & \dots & a_{jj} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \text{ Но для того, чтобы в матрице } A \text{ поменять}$$

местами строки с номерами i и j ее достаточно умножить слева на матрицу B вида

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \text{ Матрица } BA \text{ получается переменой строк } i \text{ и}$$

j местами в матрице A .

2. Умножение некоторой строки на ненулевой множитель λ .

Но для того, чтобы в матрице A умножить строку с номером i на множитель λ ее достаточно умножить слева на матрицу B вида

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \lambda & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \text{ Матрица } BA \text{ получается из матрицы } A$$

умножением строки с номером i на множитель λ в матрице A .

3. Прибавление к одной строке другой строки умноженной на множитель λ .

Но для того, чтобы в матрице A прибавить к строке с номером i строку с номером j умноженную на множитель λ ее достаточно умножить слева на матрицу B вида

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad \text{Таким образом цепочка элементарных}$$

преобразований строк, приводящих матрицу A к единичной, соответствует последовательности умножений слева на некоторые матрицы. То есть имеем $B_k \cdot \dots \cdot B_2 \cdot B_1 \cdot A = E$. Обозначим $(B_k \cdot \dots \cdot B_2 \cdot B_1) = B$. Тогда $BA = E$, значит $B = A^{-1}$. Поскольку та же последовательность элементарных преобразований проделана с единичной матрицей, то $BE = B = A^{-1}$.

5. Решение линейных систем $n \times m$ с помощью обратной матрицы.

Изложим суть метода применения обратной матрицы к решению системы n линейных уравнений с n неизвестными. В векторно-матричной форме система уравнений имеет вид $A\vec{X} = \vec{h}$, где A - матрица системы, $\vec{X}$ - вектор-столбец неизвестных, $\vec{h}$ - вектор-столбец свободных членов. Если A^{-1} - обратная матрица, то имеем $A^{-1}A\vec{X} = A^{-1}\vec{h}$; $E\vec{X} = A^{-1}\vec{h}$; $\vec{X} = A^{-1}\vec{h}$.

Пример 3. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} x + y - z = -5, \\ 3x - 2y + 4z = 42, \\ 5x - 2y - 3z = 8. \end{cases}$$

Решение. Матрица системы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$. Вектор столбец неизвестных $\vec{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

. Вектор столбец свободных членов $\vec{h} = \begin{pmatrix} -5 \\ 42 \\ 8 \end{pmatrix}$. Найдем обратную матрицу первым

способом. Определитель данной матрицы вычислен ранее и равен $\Delta=39$.

Транспонированная матрица равна $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & -2 \\ -1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$. После замены

каждого элемента на алгебраические дополнения получаем матрицу

$$\begin{pmatrix} 14 & 5 & 2 \\ 29 & 2 & -7 \\ 4 & 7 & -5 \end{pmatrix}. \quad \text{Тогда обратная матрица равна } A^{-1} = \frac{1}{39} \begin{pmatrix} 14 & 5 & 2 \\ 29 & 2 & -7 \\ 4 & 7 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{14}{39} & \frac{5}{39} & \frac{2}{39} \\ \frac{29}{39} & \frac{2}{39} & \frac{-7}{39} \\ \frac{4}{39} & \frac{7}{39} & \frac{-5}{39} \end{pmatrix}. \text{ Решение имеет вид } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{14}{39} & \frac{5}{39} & \frac{2}{39} \\ \frac{29}{39} & \frac{2}{39} & \frac{-7}{39} \\ \frac{4}{39} & \frac{7}{39} & \frac{-5}{39} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 42 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Вычисляя произведение, получаем } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{14}{39}(-5) + \frac{5}{39}42 + \frac{2}{39}8 \\ \frac{29}{39}(-5) + \frac{2}{39}42 + \frac{(-7)}{39}8 \\ \frac{4}{39}(-5) + \frac{7}{39}42 + \frac{(-5)}{39}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{156}{39} \\ -\frac{117}{39} \\ \frac{234}{39} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что для решения конкретной системы уравнений применять метод обратной матрицы вряд ли целесообразно, поскольку само нахождение обратной матрицы требует большого числа арифметических операций.

Строить обратную матрицу имеет смысл, когда мы решаем много систем вида $A\vec{X} = \vec{h}$ с одинаковой левой частью, но разными правыми частями. Тогда имеет смысл при решении первой системы построить обратную матрицу, а дальше ее просто использовать.

6. Решение матричных уравнений

В заключение остановимся на решении матричных уравнений вида.

$AX = B$, $XA = B$, где A – известная квадратная матрица, X – неизвестная матрица, B – известная матрица. Имеем:

$$AX = B, \quad A^{-1}AX = A^{-1}B, \quad EX = A^{-1}B, \quad X = A^{-1}B;$$

$$XA = B, \quad XAA^{-1} = BA^{-1}, \quad XE = BA^{-1}, \quad X = BA^{-1}.$$

Пример 4.

Решить матричное уравнение $AX=B$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$.

Решение. Нетрудно показать (проделайте самостоятельно), что $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\text{Тогда } X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -18 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$$

Теперь решим уравнение, $XA=B$ для тех же матриц.

$$\text{Получаем } X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Как мы видим, результат получился разный. Причиной этого является тот факт, что операция умножения матриц не является коммутативной – порядок множителей в произведении играет существенную роль.

Конец лекции.

Лекция 6. Аналитическая геометрия

1. Понятие вектора, равные, нулевой и единичный векторы.
2. Операция сложения векторов и её свойства.
3. Операция умножение вектора на действительное число и её свойства.
4. Линейное пространство.
5. Проекция вектора на ось. Свойства проекций.

Литература

- 1) Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. М.Физматлит, 2004, гл.1,2,7,8. Л-2 && -5, 6,7, 14.
- 2) И.П. Натансон. Краткий курс высшей математики.,М.,Лань, 1999 , гл.1&1, 7, 9., гл 8 &1,2,3, гл.9 &4.

1. Понятие вектора, нулевой вектор и единичный векторы

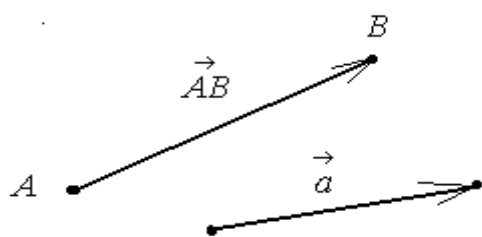
Смысл аналитической геометрии состоит в том, чтобы свести наши прежние геометрические операции к операциям над числами. То есть наши прежние понятия точка, прямая...будут представлены в виде некоторых количественных соотношений.

Начнем с понятия вектора. Для характеристики некоторых величин достаточно одного числа. Например температура, плотность.. Такие величины называются скалярными. Но, например, для пассажира самолета фраза – самолет летит со скоростью 1000км/час не дает полную информацию. Для него важно еще куда летит этот самолет. То есть имеются величины, для которых важны не только их абсолютное значение, но и направление в пространстве. Такие величины называют векторными. В качестве исходного, для интуитивного понимания примем определение векторной величины, как величины характеризуемой некоторой размерностью и направленностью в пространстве. Отметим, что скалярными и векторными величинами природа не исчерпывается. Существуют еще, например, тензорные величины.

Для абстрактного изучения свойств векторных величин мы выберем с вами геометрические векторы.

Определение 1. Геометрическим вектором мы будем называть направленный отрезок $\vec{AB}$. А – начало, В – конец. Иногда мы будем обозначать вектор просто одной буквой $\vec{a}$.

Длина вектора называется его модулем и обозначается $|\vec{AB}|$ или $|\vec{a}|$. Если начало и конец вектора совпадают, то такой вектор называется нулевым. Длина нулевого вектора равна нулю. Направление нулевого вектора неопределенно. Если модуль вектора равен единице, то такой вектор называют единичным.



Векторы, лежащие на одной или параллельных прямых, будем называть коллинеарными.

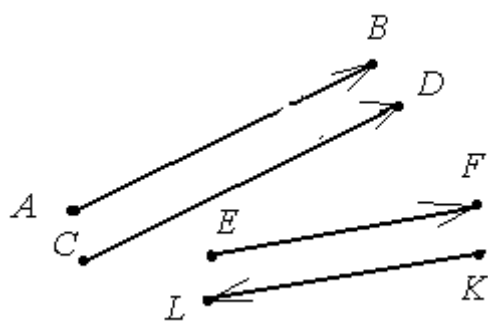
Поскольку понятно, что мы вводим некоторые математические объекты, то в дальнейшем предполагается появление некоторых математических операций над ними. А такие операции предполагают знак равенства. Сейчас договоримся, какие векторы мы будем считать

равными.

Определение 2. Векторы называются **равными**, если они имеют одинаковые длины и одинаковые направления.

Строго говоря в этом определении уже содержится некоторый интуитивный момент. Что такое коллинеарны – понятно, что такое равные длины – понятно, а вот что такое одинаковые направления – будем считать понятно интуитивно, как и то, что значит векторы имеют противоположное направление.

Так векторы $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$ имеют одинаковые направления, а векторы $\vec{EF}$ и $\vec{KL}$ – противоположное.



Если дан вектор $\vec{AB}$, то противоположным вектором $\left(-\vec{AB}\right)$ будем называть вектор $\vec{BA}$.

Пока $\left(-\vec{AB}\right)$ следует рассматривать как просто единый символ, обозначающий противоположный вектор.

Это определение равенства геометрических векторов удовлетворяет трем основным

свойствам равенства – отношениям эквивалентности, которые мы примем без доказательств,

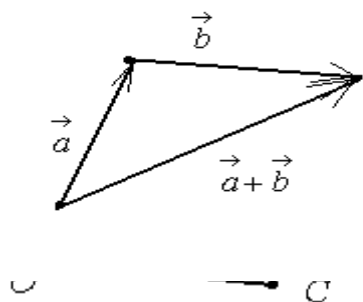
1. Рефлексивность. $a = a$.
2. Симметричность. Если $a = b$, то $b = a$.
3. Транзитивность. Если $a = b$ и $b = c$, то $a = c$.

2. Операция сложения векторов и её свойства.

Определение 3. Пусть даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ их суммой $\vec{a} + \vec{b}$ называется вектор, идущий из начала вектора $\vec{a}$ в конец вектора $\vec{b}$, при условии, что начало вектора $\vec{b}$ совпадает с концом вектора $\vec{a}$.

Свойство 1. Коммутативность. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

Доказательство. Пусть $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{AB} = \vec{b}$, тогда $\vec{a} + \vec{b} = \vec{OB}$.



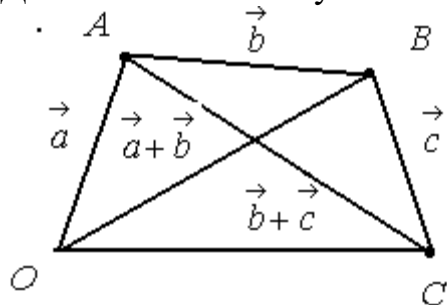
Через точку В проведем прямую, параллельную прямой ОА. Через точку О проведем прямую параллельную прямой АВ. Пересечение этих прямых – точка С. Фигура ОАВС является параллелограммом. Тогда вектор $\vec{OC} = \vec{AB} = \vec{b}$, вектор $\vec{CB} = \vec{OA} = \vec{a}$.
 $\vec{b} + \vec{a} = \vec{OC} + \vec{CB} = \vec{OB} = \vec{a} + \vec{b}$.

В качестве бесплатного приложения мы получили правило сложения векторов – известное как правило параллелограмма.

Если векторы приложены к общему началу, то их суммой является диагональ параллелограмма, построенного на этих векторах, направленная из точки приложения векторов в противоположную вершину.

Свойство 2. Ассоциативность $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$.

Доказательство. Пусть $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{AB} = \vec{b}$, $\vec{BC} = \vec{c}$, тогда $\vec{a} + \vec{b} = \vec{OB}$,



$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{OB} + \vec{BC} = \vec{OC}.$$

$$\vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{OA} + \left(\vec{AB} + \vec{BC}\right) = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{OC}.$$

Свойство 3. Пусть $\vec{0}$ - нулевой вектор. Тогда для любого вектора $\vec{a}$ имеем $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$. То есть существует вектор, который мы назвали нулевым, обладающий тем свойством, что если его прибавить к любому вектору, то мы получим в результате этот же вектор.

Очевидно, поскольку начало и конец нулевого вектора совпадают.

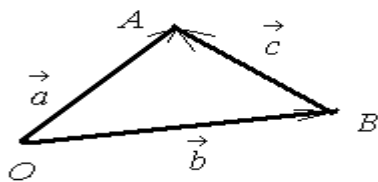
Свойство 4. Пусть имеется вектор $\vec{AB}$. Противоположным вектором мы назвали вектор $\left(-\vec{AB}\right) = \vec{BA}$. Имеем $\vec{AB} + \left(-\vec{AB}\right) = \vec{AB} + \vec{BA} = \vec{AA} = \vec{0}$.

То есть у каждого вектора имеется противоположный, такой что в сумме с этим вектором дает нулевой вектор.

Если имеется множество объектов, на которых определена операция сложения, которая удовлетворяет 4-м свойствам: 1) коммутативности; 2) ассоциативности; 3) существование объекта, называемого нулем, сумма с которым любого элемента дает этот элемент; 4) существование у любого элемента противоположного, сумма с которым равна нулю, то про такое множество говорят, что оно образует коммутативную группу по отношению к операции сложения.

Теперь введем понятие разности векторов. Напомним, что разностью двух чисел $a - b$, называется число c , такое что $b + c = a$.

Определение 4. Разностью двух векторов $\vec{a} - \vec{b}$ назовем вектор $\vec{c}$, такой что $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$.



Из приведенного рисунка видим, что

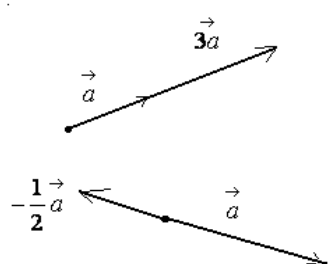
$\vec{OB} + \vec{BA} = \vec{OA}$. То есть, если векторы приложены к общему началу, то их разность равна вектору направленному из конца вычитаемого в конец уменьшаемого.

3. Операция умножение вектора на действительное число и её свойства

Определение 5. Пусть имеется вектор $\vec{a}$ и действительное число α .

Произведением $\alpha \vec{a}$ числа α на вектор $\vec{a}$ называется вектор $\vec{c}$ ($\alpha \vec{a} = \vec{c}$).

Этот вектор обладает следующими свойствами:



1. $\vec{c}$ - коллинеарен вектору $\vec{a}$;

$$2. |\vec{c}| = |\alpha| |\vec{a}|$$

3. Направление вектора $\vec{c}$ совпадает с направлением вектора $\vec{a}$ при $\alpha > 0$, и противоположно направлению вектора $\vec{a}$ при $\alpha < 0$.

Свойства операции умножения на число

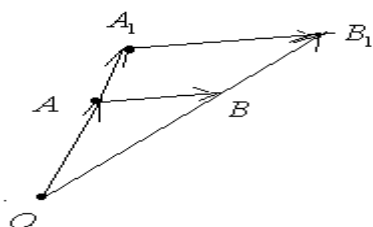
$$1. 1\vec{a} = \vec{a}.$$

$$2. \alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}.$$

$$3. (\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}.$$

$$4. \alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}.$$

Доказательство первых трех свойств достаточно легко следует из введенного нами определения операции умножения вектора на число.



Четвертое свойство докажем. Для определенности, будем считать, что $\alpha > 0$.

Пусть $\vec{a} = \vec{OA}$, $\vec{b} = \vec{AB}$, $\alpha\vec{a} = \vec{OA_1}$.

Тогда $\vec{a} + \vec{b} = \vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}$. Пусть прямая A_1B_1 параллельна прямой AB . Точка B_1 является пересечением этой прямой с

прямой OB . Из подобия треугольников OAB и OA_1B_1 следует что

геометрическое равенство $\frac{OA_1}{OA} = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{OB_1}{OB} = \alpha$. Из этого равенства следуют векторные равенства $\vec{OA_1} = \alpha \vec{OA}$, $\vec{OB_1} = \alpha \vec{OB}$, $\vec{A_1B_1} = \alpha \vec{AB}$. Поскольку $\vec{OB_1} = \vec{OA_1} + \vec{A_1B_1} = \alpha \vec{OA} + \alpha \vec{AB} = \alpha \vec{a} + \alpha \vec{b}$, а $\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB} = \vec{a} + \vec{b}$, и $\vec{OB_1} = \alpha \vec{OB}$, то имеем $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \vec{a} + \alpha \vec{b}$. Свойство доказано.

4. Линейное пространство

Сделаем некоторое обобщение.

Определение 6. Множество R элементов $x, y, z, \dots$ называется линейным пространством, если на нем определены две операции:

1) для каждой пары элементов определена операция сложения $x + y$, при этом сумма так же является элементом множества R , удовлетворяющая аксиомам

1. коммутативность $x + y = y + x$;
2. ассоциативность $(x + y) + z = x + (y + z)$;
3. существование нулевого элемента - $\exists$ (существует) элемент 0 (ноль), такой что $\forall$ (для любого) $x \in R$ выполнено $x + 0 = x$;
4. существование обратного $\forall x \in R \exists$ элемент $(-x)$, такой что $x + (-x) = 0$;

2) для каждого элемента x определена операция αx - умножения элемента x на действительное число α , при этом αx является элементом множества R , удовлетворяющая аксиомам:

1. $1x = x$;
2. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$;
3. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;
4. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

Мы показали, что геометрические векторы с введенными нами операциями образуют линейное пространство.

Элементы линейного пространства будем называть векторами, а линейное пространство линейным векторным пространством.

Введем некоторые понятия.

Определение 7. Пусть $\vec{a}_1; \vec{a}_2; \dots; \vec{a}_n$ элементы линейного пространства, а $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ - некоторый набор действительных чисел. Сумма вида $\vec{a}_1 \alpha_1 + \vec{a}_2 \alpha_2 + \dots + \vec{a}_n \alpha_n$ называется линейной комбинацией векторов.

Определение 8. Совокупность элементов $\vec{a}_1; \vec{a}_2; \dots; \vec{a}_n$ линейного пространства называется линейно независимой если их линейная комбинация равна нулю $\vec{a}_1 \alpha_1 + \vec{a}_2 \alpha_2 + \dots + \vec{a}_n \alpha_n = 0$, тогда и только тогда, когда все действительные множители равны нулю $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. В противном случае совокупность векторов называется линейно зависимой.

Определение 9. Размерностью линейного пространства называется максимальное число линейно независимых векторов.

Определение 10. Базисом линейного пространства называется такая совокупность линейно независимых векторов, через которую все остальные векторы пространства могут быть выражены в виде линейной комбинации.

Утверждение (без доказательства). Количество векторов базиса равно размерности векторного пространства.

Определение 11. Пусть векторы $\vec{a}_1; \vec{a}_2; \dots; \vec{a}_n$ образуют базис линейного пространства. Значит любой вектор $\vec{c}$ данного пространства может быть представлен в виде суммы этих векторов. То есть найдется набор значений $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, такой, что $\vec{c} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n$. Числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ называются координатами вектора $\vec{c}$ в данном базисе. Векторы $\alpha_1 \vec{a}_1; \alpha_2 \vec{a}_2; \dots; \alpha_n \vec{a}_n$ называются составляющими вектора $\vec{c}$ в данном базисе.

Теорема 1. Координаты вектора в базисе определены однозначно.

Доказательство. Предположим, что имеются два представления вектора $\vec{c}$:

$$\begin{aligned}\vec{c} &= \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n \\ \vec{c} &= \beta_1 \vec{a}_1 + \beta_2 \vec{a}_2 + \dots + \beta_n \vec{a}_n,\end{aligned}$$

Вычитая эти равенства друг из друга, получаем

$$(\alpha_1 - \beta_1) \vec{a}_1 + (\alpha_2 - \beta_2) \vec{a}_2 + \dots + (\alpha_n - \beta_n) \vec{a}_n = 0.$$

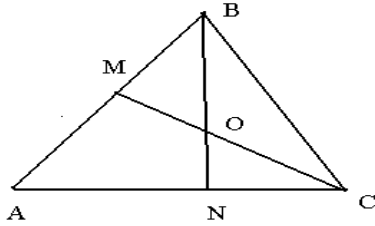
Но линейная комбинация линейно независимых векторов базиса $\vec{a}_1; \vec{a}_2; \dots; \vec{a}_n$ может быть равна нулю только в том случае, если $(\alpha_1 - \beta_1) = (\alpha_2 - \beta_2) = \dots = (\alpha_n - \beta_n) = 0$, и теорема доказана.

Заметим, что введенное нами ранее определение коллинеарности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ фактически означает, что один вектор может быть получен из другого путем умножения последнего на некоторое число λ . То есть это означает, что существует число λ , такое что $\vec{a} = \lambda \vec{b}$. Или $\vec{a} - \lambda \vec{b} = 0$. А это означает, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линейно зависимы.

Следствие. Два вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда они линейно зависимы.

Покажем, как методами векторной алгебры может быть решена одна геометрическая задача.

Пример. Дан треугольник ABC. На стороне AB взята точка M, такая что $AM : MB = m : n$. На стороне AC взята точка N, такая что $AN : NC = p : q$. Точка O является точкой пересечения прямых BN и CM. В каком отношении точка O делит отрезок BN ?



Решение. Рассмотрим сторону AC как вектор $\vec{AC} = \vec{a}$, сторону AB как вектор $\vec{AB} = \vec{b}$. Тогда вектор $\vec{AN} = \frac{p}{p+q} \vec{a}$, вектор $\vec{AM} = \frac{m}{m+n} \vec{b}$.

Вектор $\vec{BO}$ параллелен вектору $\vec{BN}$ и, следовательно

$$\vec{BO} = \alpha \vec{BN} = \alpha (\vec{AN} - \vec{b}) = \alpha \left(\frac{p}{p+q} \vec{a} - \vec{b} \right). \text{ Тогда}$$

$$\vec{AO} = \vec{b} + \alpha \vec{BN} = \vec{b} + \alpha \left(\frac{p}{p+q} \vec{a} - \vec{b} \right), \text{ аналогично}$$

$$\vec{AO} = \vec{a} + \beta \vec{CM} = \vec{a} + \beta \left(\frac{m}{m+n} \vec{b} - \vec{a} \right)$$

$$\text{Приравнявая вектора, получаем } \vec{b} + \alpha \left(\frac{p}{p+q} \vec{a} - \vec{b} \right) = \vec{a} + \beta \left(\frac{m}{m+n} \vec{b} - \vec{a} \right).$$

Преобразуя данное соотношение, имеем

$$\vec{a} \left(\alpha \frac{p}{p+q} + \beta - 1 \right) + \vec{b} \left(-\alpha - \beta \frac{m}{m+n} + 1 \right) = 0$$

Из условия линейной независимости векторов получаем систему уравнений

$$\alpha \frac{p}{p+q} + \beta = 1, \quad \alpha + \beta \frac{m}{m+n} = 1.$$

$$\text{Решая систему, получаем } \alpha = \frac{n(p+q)}{mq + n(p+q)}, \quad \beta = \frac{q(m+n)}{pn + q(m+n)}.$$

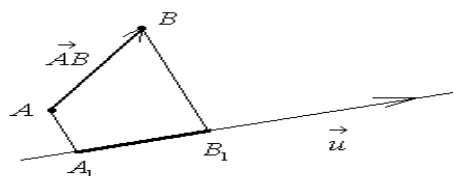
$$\frac{BO}{ON} = \frac{\alpha}{1-\alpha} = \frac{n(p+q)}{mq}$$

5. Проекция вектора на ось. Свойства проекций

Определение 12. Осью $\vec{u}$ называется прямая с заданным направлением.

Пусть дана произвольная ось $\vec{u}$ и некоторый вектор $\vec{AB}$. Пусть точка A_1 - проекция точки A на ось $\vec{u}$, точка B_1 - проекция точки B на эту ось.

Определение 13. Проекцией вектора $\vec{AB}$ на ось $\vec{u}$ называется длина отрезка A_1B_1 , если направление от A_1 к B_1 совпадает с направлением оси $\vec{u}$. В случае если направление от A_1 к B_1 противоположно направлению оси, то проекцией называется длина отрезка A_1B_1 взятая со знаком минус.



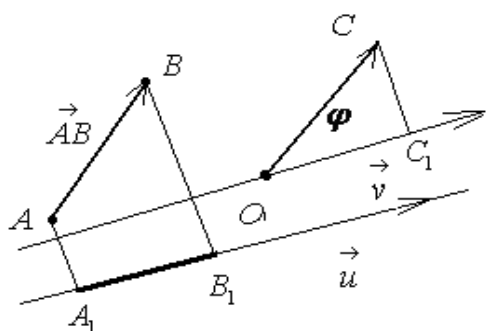
Проекцию будем обозначать символом $np_u \vec{AB}$.

Пусть имеется ось $\vec{u}$ и вектор $\vec{AB}$. Рассмотрим произвольную точку пространства O . Через эту точку проведем ось $\vec{v}$, параллельную оси $\vec{u}$, и имеющую тоже направление. От точки O

отложим вектор $\vec{OC}$ равный вектору $\vec{AB}$. Угол φ между осью $\vec{v}$ и вектором $\vec{OC}$ будем называть углом наклона вектора $\vec{AB}$ к оси $\vec{u}$. Заметим, что в силу свойств углов со взаимно параллельными сторонами значение угла φ не зависит от

выбора точки O , поэтому

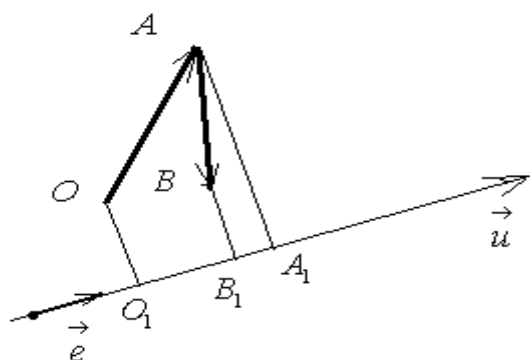
$$np_u \vec{AB} = np_v \vec{OC} = |\vec{OC}| \cos \varphi = |\vec{AB}| \cos \varphi.$$



Следовательно, проекция вектора на ось равна модулю этого вектора, умноженному на косинус угла наклона данного вектора к этой оси. Заметим, что равные векторы имеют, равные проекции на одну и ту же ось.

Основные теоремы о проекциях.

Теорема 2. Проекция суммы векторов равна сумме их проекций.



Доказательство. Пусть точки O_1, A_1, B_1 - проекции точек O, A, B на ось $\vec{u}$. Пусть вектор $\vec{e}$ - единичный вектор, направление которого совпадает с направлением оси $\vec{u}$. Тогда векторы $\vec{e}$ и $\vec{O_1A_1}$ коллинеарны, и, следовательно, $\vec{O_1A_1} = \alpha \vec{e}$. Поскольку $\vec{e}$ - единичный вектор, направление которого

совпадает с направлением оси $\vec{u}$, то значение α равно проекции вектора $\vec{OA}$ на ось $\vec{u}$. То есть $\alpha = np_u \vec{OA}$. Точно также $\vec{A_1B_1} = \beta \vec{e}$, $\beta = np_u \vec{AB}$; $\vec{O_1B_1} = \gamma \vec{e}$, $\gamma = np_u \vec{OB}$. Заметим, что $\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}$.

Поскольку $\vec{O_1A_1} + \vec{A_1B_1} = \vec{O_1B_1}$, то $\alpha \vec{e} + \beta \vec{e} = \gamma \vec{e}$, то $\alpha + \beta = \gamma$.

Следовательно $np_u \vec{OA} + np_u \vec{AB} = np_u \vec{OB} = np_u (\vec{OA} + \vec{AB})$.

Теорема 3. При умножении вектора на число его проекция умножается на это же число $pr_u \vec{\alpha a} = \alpha pr_u \vec{a}$

Доказательство. Для определенности положим $\alpha > 0$.

Пусть $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OA_1} = \alpha \vec{a}$. Точки B, B_1 -

проекции точек A, A_1 на ось.

Из подобия треугольников OAB и OA_1B_1 следует

геометрическое равенство $\frac{OA_1}{OA} = \frac{OB_1}{OB} = \alpha$. В

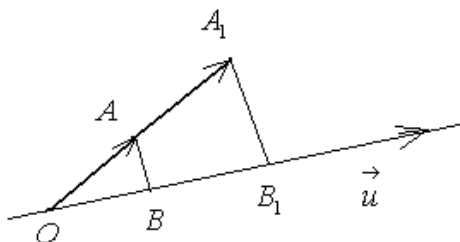
терминах введенных нами определений $OB_1 =$

$$pr_u \vec{OA_1} = pr_u (\alpha \vec{OA}),$$

$$OB = pr_u \vec{OA}.$$

Таким образом, получаем $OB_1 = \alpha OB$, $pr_u (\alpha \vec{OA}) = \alpha pr_u \vec{OA}$.

Конец лекции.



Лекция 7. Аналитическая геометрия (продолжение)

1. Декартова система координат
2. Разложение вектора по осям координат, координаты и составляющие вектора.
3. Действия над векторами.
4. Условия коллинеарности двух векторов.
5. Деление отрезка в данном отношении.
6. Полярная, цилиндрическая и сферическая системы координат.
7. Параллельный перенос и поворот осей координат.

Литература

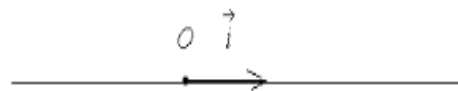
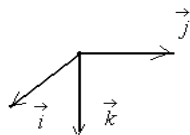
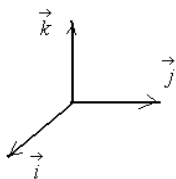
- 1) Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. М.Физматлит, 2004, гл.1,2,7,8. Л-2 && -5, 6,7, 14.
- 2) И.П. Натансон. Краткий курс высшей математики.,М.,Лань, 1999, гл.1&1, 7, 9., гл 8 &1,2,3, гл.9 &4.

1. Декартова система координат

Определение 1. Базис называется ортонормированным, если все вектора базиса имеют единичную длину и перпендикулярны друг другу.

В линейной алгебре вместо слова перпендикулярны употребляется слово ортогональны. Это дало повод называть базис словом ортонормированный. (Нормированный – относится к тому, что вектора имеют единичную длину.)

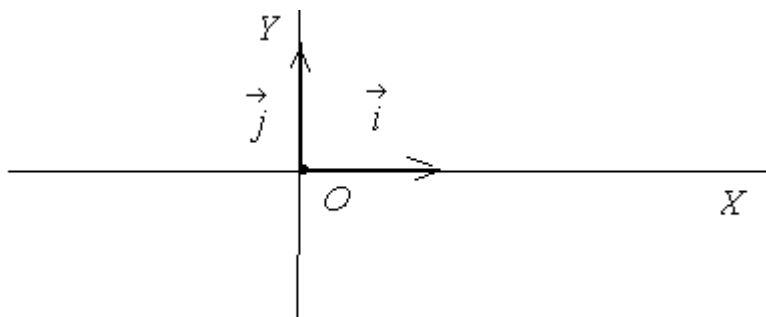
Традиционно в нашем трехмерном пространстве единичные векторы ортонормированного базиса принято обозначать $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Их ориентация представлена на рисунке. Такая тройка векторов называется правой. Иногда приходится иметь дело с левой тройкой. Но если нет специальных оговорок мы будем считать, что речь идет о правой тройке векторов.



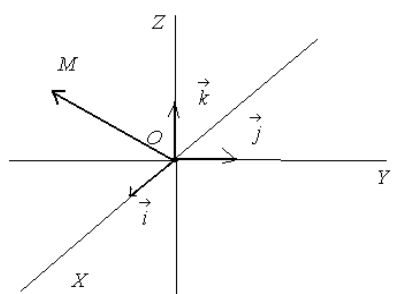
Сама идея системы координат вызвана необходимостью задания положения объекта с помощью некоторого набора чисел.

Определение 2. Система координат на прямой задается началом координат (точка O) и единичным вектором $\vec{i}$

Определение 3. Прямоугольная декартова система координат на плоскости задается началом координат, точкой O , и ортонормированным базисом $\vec{i}$, $\vec{j}$. Ось, соответствующую вектору $\vec{i}$ будем обозначать OX , вектору $\vec{j}$ - OY .



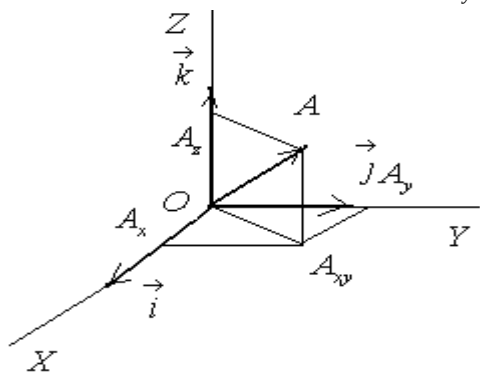
Определение 4. Прямоугольная декартова система координат в пространстве задается началом координат (точка O) и ортонормированным базисом $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Ось, соответствующую вектору $\vec{i}$ будем обозначать OX , вектору $\vec{j}$ - OY , вектору $\vec{k}$ - OZ .



В дальнейшем мы будем говорить о пространственном случае, поскольку случай плоскости и прямой рассматриваются аналогично. Координатами точки M в пространстве мы будем называть координаты вектора $\vec{OM}$, соединяющего начало координат и точку M . Координаты точки, в отличие от координат вектора мы будем обозначать в круглых скобках. Значит тот факт, что точка M имеет координаты $M(x; y; z)$ означает, что вектор $\vec{OM}$ имеет координаты $\vec{OM} = \{x; y; z\}$ или, что то же самое $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

2. Разложение вектора по осям координат

Пусть $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - ортонормированный базис и $\vec{a} = \vec{OA}$ - произвольный вектор. Ось, образованную вектором $\vec{i}$, обозначим OX , вектором $\vec{j}$ - OY , вектором $\vec{k}$ - OZ . Проекцию точки A на плоскость OXY обозначим A_{xy} . Проекцию на ось OX обозначим A_x , на ось OY - A_y , на ось OZ - A_z . Заметим, что вектор



$\vec{OA}_x$ коллинеарен вектору $\vec{i}$, и, значит, его можно представить в виде $\vec{OA}_x = x\vec{i}$. Поскольку вектор $\vec{i}$ имеет единичную длину, то x является проекцией вектора $\vec{OA}$ на ось OX . Точно так же $\vec{OA}_y = y\vec{j}$, где y является проекцией вектора $\vec{OA}$ на ось OY , $\vec{OA}_z = z\vec{k}$, где z - проекцией вектора

$\vec{OA}$ на ось OZ . Заметим, что $\vec{OA} = \vec{OA}_{xy} + \vec{OA}_z$, $\vec{OA}_{xy} = \vec{OA}_x + \vec{OA}_y$. Следовательно, $\vec{OA} = \vec{OA}_x + \vec{OA}_y + \vec{OA}_z$, или, окончательно

получаем $\vec{OA} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$, где $x; y; z$ координаты вектора $\vec{OA}$, а $x \vec{i}; y \vec{j}; z \vec{k}$ - составляющие этого вектора в базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. С другой стороны, если имеются три произвольных числа $x; y; z$, то мы можем построить вектор $\vec{OA} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$. Построенный вектор будет иметь координаты $x; y; z$ в базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Таким образом, любому вектору в ортонормированном базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ однозначно соответствуют три координаты в базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, а с другой стороны любому набору трех чисел $x; y; z$ однозначно соответствует вектор $\vec{OA} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$, который имеет такие координаты. Мы совершили принципиальный шаг. С этого момента мы уже можем вектор не изображать в виде стрелки и забыть про рисунки. С этого момента вектор мы можем представлять в виде трех чисел $x; y; z$. Записывать мы будем так $\vec{a} = \{x; y; z\}$. Это означает, что имеется некоторый базис $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, и что именно в этом базисе, наш вектор $\vec{a}$ равен $\vec{a} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$.

3. Действия над векторами

Координаты вектора в ортонормированном базисе, это его проекции на оси. Тогда операции с векторами в координатной форме выглядят очень просто.

1) Сумма векторов. Пусть $\vec{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\}$, $\vec{b} = \{X_2, Y_2, Z_2\}$. Поскольку $\vec{i} \partial_u (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{i} \partial_u \vec{a} + \vec{i} \partial_u \vec{b}$, то $\vec{a} + \vec{b} = \{X_1 + X_2, Y_1 + Y_2, Z_1 + Z_2\}$.

2) Произведение вектора на число. Пусть $\vec{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\}$. Поскольку $\vec{i} \partial_u (\alpha \vec{a}) = \alpha \vec{i} \partial_u \vec{a}$, то $\alpha \vec{a} = \{\alpha X_1, \alpha Y_1, \alpha Z_1\}$.

Пусть $\vec{a} = \{X, Y, Z\}$. По теореме Пифагора $|\vec{a}| = \sqrt{OA_{xy}^2 + OA_z^2}$. В свою очередь

$OA_{xy}^2 = OA_x^2 + OA_y^2$. Следовательно $|\vec{a}| = \sqrt{OA_x^2 + OA_y^2 + OA_z^2}$, но поскольку

$$OA_x^2 = X^2, OA_y^2 = Y^2, OA_z^2 = Z^2, \text{ то}$$

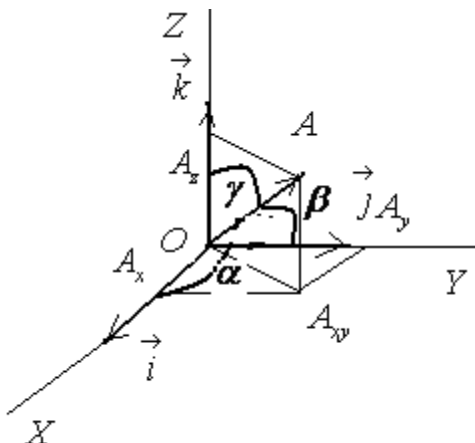
$$|\vec{a}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}. \text{ Такая простая формула}$$

имеет место лишь в ортонормированном базисе.

Углы наклона вектора $\vec{a} = \{X, Y, Z\}$ к осям обозначим α, β, γ соответственно. Тогда

$$X = |\vec{a}| \cos \alpha, Y = |\vec{a}| \cos \beta, Z = |\vec{a}| \cos \gamma.$$

Соответственно



$$\cos \alpha = \frac{X}{|\vec{a}|}, \quad \cos \beta = \frac{Y}{|\vec{a}|}, \quad \cos \gamma = \frac{Z}{|\vec{a}|}.$$

Заметим, что $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$. Вектор $\vec{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \{\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma\}$ имеет единичную длину и то же самое направление, что и вектор $\vec{a} = \{X, Y, Z\}$. $\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma$ - называются **направляющими косинусами** вектора $\vec{a}$.

Пример 1. В ортонормированном базисе вектор составляет с осями углы $\alpha = 60^\circ, \beta = 45^\circ$, а с третьей – тупой угол γ . Найти этот угол.

Решение. $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1, \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \cos^2 \gamma = 1, \cos^2 \gamma = \frac{1}{4}, \cos \gamma = \pm \frac{1}{2}$. Так как угол тупой, то $\cos \gamma = -\frac{1}{2}, \gamma = 120^\circ$.

Пример 2. В ортонормированном базисе вектор составляет с осями углы $\alpha = 30^\circ, \beta = 45^\circ$, а с третьей – острый угол γ . Найти этот угол.

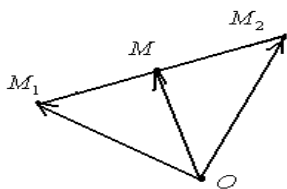
Решение. $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1, \frac{3}{4} + \frac{1}{2} + \cos^2 \gamma = 1, \cos^2 \gamma = -\frac{1}{4}$. Значит, такого вектора не существует.

4. Условие коллинеарности векторов

Пусть даны два вектора $\vec{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\}, \vec{b} = \{X_2, Y_2, Z_2\}$. Если векторы коллинеарны, то существует число λ , такое что $\vec{a} = \lambda \vec{b}$.

Следовательно $X_1 = \lambda X_2, Y_1 = \lambda Y_2, Z_1 = \lambda Z_2$. Тогда условие коллинеарности может быть записано в виде $\frac{X_1}{X_2} = \frac{Y_1}{Y_2} = \frac{Z_1}{Z_2}$.

Получим некоторые следствия из введенного определения. Пусть даны две точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$



Тогда вектор, соединяющий эти две точки может быть найден следующим образом

$$\begin{aligned} \vec{M_1M_2} &= \vec{OM_2} - \vec{OM_1} = \\ &= \{x_2; y_2; z_2\} - \{x_1; y_1; z_1\} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\} \end{aligned}$$

Т.е. чтобы найти координаты вектора, соединяющего две точки, нужно из координат конца, вычесть координаты начала.

Расстоянием между точками $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$ мы назовем длину вектора, их соединяющего $|\vec{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

5. Деление отрезка в данном отношении

Определение 5. Точка $M(x; y; z)$ делит отрезок соединяющий точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$ в отношении λ , если $\frac{M_1M}{MM_2} = \lambda$.

Задача состоит в том, чтобы по известным координатам концов и λ найти координаты точки M . Координаты т.М совпадают с координатами вектора $\vec{OM}$.

Имеем $\vec{OM} = \vec{OM_1} + \vec{M_1M}$. С другой стороны $\vec{M_1M} + \vec{MM_2} = \vec{M_1M_2}$. Поскольку $\frac{M_1M}{MM_2} = \lambda$, то $\vec{M_1M} = \lambda \vec{MM_2}$, $\vec{MM_2} = \frac{1}{\lambda} \vec{M_1M}$. Тогда получаем

$$\vec{M_1M} + \frac{1}{\lambda} \vec{M_1M} = \vec{M_1M_2}, \quad \vec{M_1M} = \frac{\lambda}{1+\lambda} \vec{M_1M_2}. \quad \text{Значит} \quad \vec{OM} = \vec{OM_1} + \frac{\lambda}{1+\lambda} \vec{M_1M_2}.$$

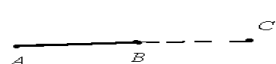
$$\{x; y; z\} = \{x_1; y_1; z_1\} + \frac{\lambda}{1+\lambda} \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\} = \left\{ \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}; \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}; \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda} \right\}$$

Значит, точка M имеет координаты $M\left(\frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}; \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}; \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}\right)$

В частном случае координаты середины отрезка $\lambda = 1$ вычисляются по формуле $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}; \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$.

Пример 3. Найти координаты точки C , симметричной точке $A(2;3;9)$ относительно точки $B(5;1;3)$.

Решение. Точка B делит отрезок AC на две равные части, то есть $\lambda = 1$



Рассмотрим общий случай. Пусть $A(x_A, y_A, z_A)$,

$B(x_B, y_B, z_B)$, $C(x_C, y_C, z_C)$. Имеем $x_B = \frac{x_A + x_C}{2}$, значит

$$x_C = 2x_B - x_A = 2 \cdot 5 - 2 = 8.$$

$$\text{Аналогично } y_C = 2y_B - y_A = 2 \cdot 1 - 3 = -1, \quad z_C = 2z_B - z_A = 2 \cdot 3 - 9 = -3.$$

Следовательно $C(8; -1; -3)$.

Пример 4. Найти точку пересечения медиан в треугольнике ABC : $A(0;12;24)$, $B(36;6;6)$, $C(18;48;36)$.

Решение. Точка $D(x_D, y_D, z_D)$ делит отрезок BC пополам (в отношении $\lambda = 1$).

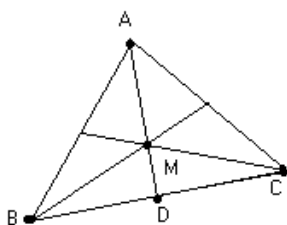
$$\text{Тогда } x_D = \frac{x_B + x_C}{2} = 27, \quad y_D = \frac{y_B + y_C}{2} = 27, \quad z_D = \frac{z_B + z_C}{2} = 21.$$

Известно, что точка пересечения медиан M делит отрезок AD в отношении

$$\frac{AM}{MD} = 2. \quad \text{Следовательно} \quad x_M = \frac{x_A + 2x_D}{3} = 18,$$

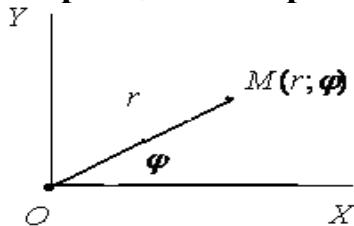
$$y_M = \frac{y_A + 2y_D}{3} = 22, \quad z_M = \frac{z_A + 2z_D}{3} = 22.$$

Ответ: $M(18; 22; 22)$.



При решении какой задачи результат не должен зависеть выбора системы координат. Но сложность решения многих задач существенно зависит от этого выбора. Система координат – это некоторый набор чисел, который позволяет определять положение объекта. Как правило, для многих задач, существует некоторая, присущая только этой задаче система координат. Если мы ее правильно определим, то многие математические проблемы становятся проще. Сейчас мы рассмотрим примеры некоторых известных систем координат, отличных от прямоугольной декартовой.

6. Полярная, цилиндрическая и сферическая системы координат

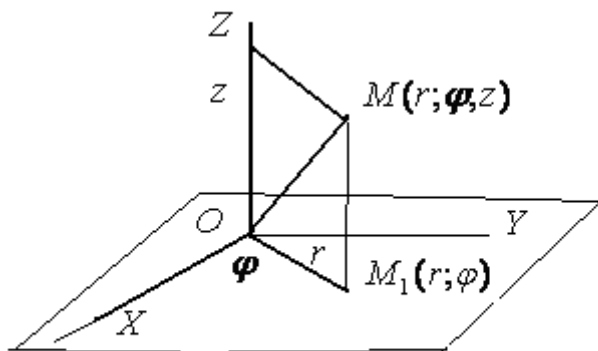


Полярная система координат на плоскости задается началом координат точкой O и полярной осью. Положение точки M на плоскости определяется парой чисел $M(r; \varphi)$, где r – расстояние от точки M до начала координат, φ – угол наклона вектора $\vec{OM}$ к полярной оси. Если нет специальных оговорок, то предполагается $0 \leq r < \infty$

$$0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Поскольку явлению безразлично, в какой системе координат мы его изучаем, то мы сами должны и уметь устанавливать связь различных системах координат. Так вот пусть имеются полярная система координат на плоскости и декартова. При этом начала координат совпадают, ось X направлена по полярной оси, а ось Y ей перпендикулярна. Пусть одна и та же точка имеет в полярной системе координаты $M(r; \varphi)$, а в декартовой $M(x; y)$. Тогда $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. То есть, зная полярные координаты, нетрудно вычислить декартовы. Теперь пойдем в обратную сторону. Имеем $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\cos \varphi = \frac{x}{r}$; $\sin \varphi = \frac{y}{r}$. То есть по известным декартовым полярные могут быть найдены.

Цилиндрическая система координат в пространстве задается плоскостью с заданной полярной системой координат и осью Z – перпендикулярной этой плоскости. Положение точки $M(r; \varphi; z)$ определяется тремя числами r, φ, z ,



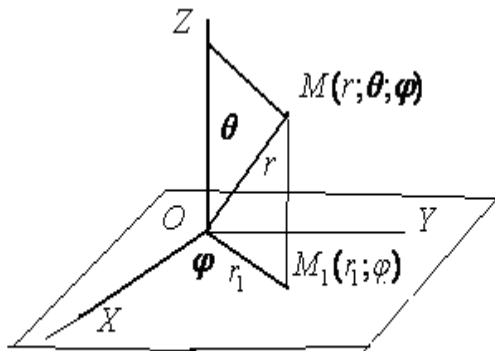
где r, φ – полярные координаты точки $M_1(r; \varphi)$, являющейся проекцией точки M на плоскость, а координата z равна проекции вектора $\vec{OM}$ на ось Z . Если ось X совпадает с полярной осью, ось Y лежит в указанной плоскости и перпендикулярна оси X и начала координат совпадают, то связь декартовых $M(x; y; z)$ и

цилиндрических $M(r; \varphi; z)$ координат определяется соотношениями

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos \varphi = \frac{x}{r}; \quad \sin \varphi = \frac{y}{r}, \quad z = z.$$

Сферическая система координат в пространстве задается плоскостью с заданной полярной системой координат и осью Z – перпендикулярной этой плоскости. Положение точки $M(r; \theta; \varphi)$ определяется тремя числами r, θ, φ , где:

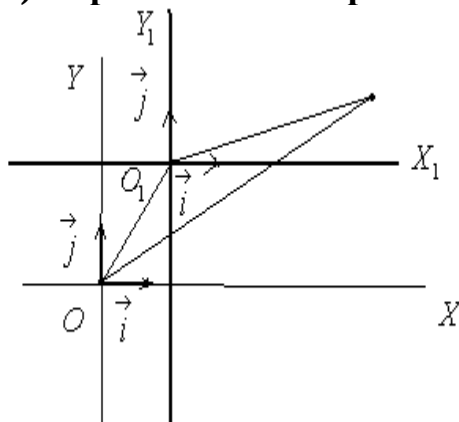


r – длина вектора $\vec{OM}$; θ – угол между вектором $\vec{OM}$ и осью Z ; φ – соответствующая полярная координаты точки $M_1(r_1; \varphi)$, являющейся проекцией точки M на плоскость. Если нет специальных оговорок, то обычно предполагается $0 \leq r < \infty$; $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Если ось X совпадает с полярной осью, ось Y лежит в указанной плоскости и перпендикулярна оси X и начала координат совпадают, то связь декартовых $M(x; y; z)$ и сферических $M(r; \theta; \varphi)$ координат определяется соотношениями $x = r \sin \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$, $z = r \cos \theta$.

7. Параллельный перенос и поворот осей координат

1) Параллельный перенос осей координат



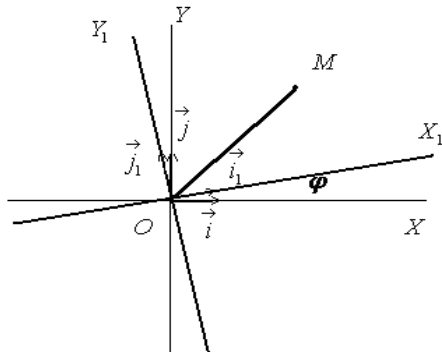
Рассмотрим случай переноса осей на плоскости. Пространственный случай рассматривается аналогично. Пусть имеются две декартовы системы координат $X Y$ – старая и $X_1 Y_1$ – новая, оси которых параллельны. Начало новой системы координат точка O_1 в старой системе имеет координаты $O_1(x_0; y_0)$. Точка M имеет в старой системе координат координаты $M(x; y)$, а в новой $M(x_1; y_1)$. Координаты точки M в

старой системе совпадают с координатами вектора $\vec{OM}$, а координаты точки M в новой совпадают с координатами вектора $\vec{O_1M}$. Имеем $\vec{OM} = \{x; y\}$, $\vec{O_1M} = \{x_1; y_1\}$, $\vec{OO_1} = \{x_0; y_0\}$. Поскольку $\vec{OM} = \vec{OO_1} + \vec{O_1M}$, то $\{x; y\} = \{x_0; y_0\} + \{x_1; y_1\}$. Следовательно, $x = x_1 + x_0$, $y = y_1 + y_0$ – выражение старых координат через новые. Или наоборот $x_1 = x - x_0$, $y_1 = y - y_0$

2) Поворот осей координат

Пусть имеются две декартовы системы координат $X Y$ – старая и $X_1 Y_1$ – новая. Оси новой системы повернуты на угол φ относительно старой. Ортонормированный

базис $\vec{i}, \vec{j}$ соответствует старой системе, $\vec{i}_1, \vec{j}_1$ - новой. Заметим, что векторы $\vec{i}_1, \vec{j}_1$ в старой системе могут быть представлены в виде



$$\vec{i}_1 = \cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j}, \quad \vec{j}_1 = -\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j}.$$

Точка М имеет в старой системе координаты $M(x; y)$, а в новой $M(x_1; y_1)$. Поскольку координаты точки М совпадают с координатами вектора $\vec{OM}$, то $\vec{OM} = x \vec{i} + y \vec{j}$. С другой стороны

$$\vec{OM} = x_1 \vec{i}_1 + y_1 \vec{j}_1.$$

Следовательно

$$\vec{OM} = x_1 \vec{i}_1 + y_1 \vec{j}_1 = x_1 (\cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j}) + y_1 (-\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j});$$

$$\vec{OM} = x_1 \vec{i}_1 + y_1 \vec{j}_1 = (x_1 \cos \varphi - y_1 \sin \varphi) \vec{i} + (x_1 \sin \varphi + y_1 \cos \varphi) \vec{j}.$$

Поскольку $\vec{OM} = x \vec{i} + y \vec{j}$, то в силу единственности координат имеем $x = x_1 \cos \varphi - y_1 \sin \varphi$, $y = x_1 \sin \varphi + y_1 \cos \varphi$. Легко проверить и обратное соотношение $x_1 = x \cos \varphi + y \sin \varphi$, $y_1 = -x \sin \varphi + y \cos \varphi$. Полученные соотношения определяют связь между координатами в различных системах.

Конец лекции.

Лекция 8. Скалярное произведение векторов

1. Определение скалярного произведения векторов.
2. Свойства скалярного произведения, модуль, угол, проекция.
3. Применение аналитической геометрии.
4. Скалярное произведение векторов в ортонормированном базисе, условие перпендикулярности векторов.

Литература

- 1) Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. М. Физматлит, 2004, гл.9, 10., Л-2. &&6,11,12,13.
- 2) И.П. Натансон. Краткий курс высшей математики. М., Лань, 1999, гл.8, &4-5.

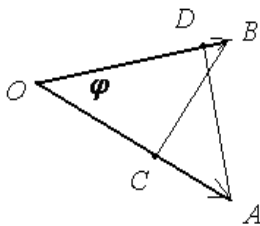
1. Скалярное произведение векторов и его свойства

Приступим к изучению некоторых нелинейных операций над векторами.

Определение 1. Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ будем обозначать символом $(\vec{a} \vec{b})$.

Если угол между векторами обозначим φ , то $(\vec{a} \vec{b}) = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi$. Давайте немного посмотрим на геометрический смысл этого определения.



Пусть $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$. Тогда

$$(\vec{a} \vec{b}) = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi. \text{ С другой стороны } |\vec{b}| \cos \varphi$$

равно проекции вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$, то есть

$$|\vec{b}| \cos \varphi = OC = \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b}. \text{ Следовательно, можно}$$

утверждать, что $(\vec{a} \vec{b}) = |\vec{a}| \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b}$. Аналогично

$$|\vec{a}| \cos \varphi = OD = \text{пр}_{\vec{b}} \vec{a}. \text{ И мы имеем } (\vec{a} \vec{b}) = |\vec{b}| \text{пр}_{\vec{b}} \vec{a}$$

2. Свойства скалярного произведения.

1. В силу определения $(\vec{a} \vec{a}) = |\vec{a}| |\vec{a}| \cos 0 = |\vec{a}|^2 \geq 0$. Отметим, что $(\vec{a} \vec{a}) = 0$, тогда и только тогда, когда вектор $\vec{a}$ равен нулевому вектору $\vec{a} = \vec{0}$.
2. Из определения следует, что $(\vec{a} \vec{b}) = (\vec{b} \vec{a})$.

$$3. \left(\left(\lambda \vec{a} \right) \vec{b} \right) = \left(\vec{a} \left(\lambda \vec{b} \right) \right) = \lambda \left(\vec{a} \vec{b} \right).$$

Доказательство. Имеем $\left(\left(\lambda \vec{a} \right) \vec{b} \right) = \left| \vec{b} \right| np_{\vec{b}} \lambda \vec{a}$. Используя свойство проекций

$$np_{\vec{b}} \lambda \vec{a} = \lambda np_{\vec{b}} \vec{a}, \text{ получаем } \left(\left(\lambda \vec{a} \right) \vec{b} \right) = \lambda \left| \vec{b} \right| np_{\vec{b}} \vec{a} = \lambda \left(\vec{a} \vec{b} \right).$$

$$\left(\vec{a} \left(\lambda \vec{b} \right) \right) = \left(\left(\lambda \vec{b} \right) \vec{a} \right) = \lambda \left(\vec{b} \vec{a} \right) = \lambda \left(\vec{a} \vec{b} \right).$$

$$4. \left(\vec{a} \left(\vec{b} + \vec{c} \right) \right) = \left(\vec{a} \vec{b} \right) + \left(\vec{a} \vec{c} \right).$$

$$\begin{aligned} \text{Доказательство. } \left(\vec{a} \left(\vec{b} + \vec{c} \right) \right) &= \left| \vec{a} \right| np_{\vec{a}} \left(\vec{b} + \vec{c} \right) = \left| \vec{a} \right| \left(np_{\vec{a}} \vec{b} + np_{\vec{a}} \vec{c} \right) = \\ &= \left| \vec{a} \right| np_{\vec{a}} \vec{b} + \left| \vec{a} \right| np_{\vec{a}} \vec{c} = \left(\vec{a} \vec{b} \right) + \left(\vec{a} \vec{c} \right). \end{aligned}$$

Заметим, что два вектора перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю.

Кроме того отметим, что скалярное произведение векторов не является вектором, а является просто числом.

Покажем несколько иной способ определения правила вычисления длин и углов в пространстве – или иначе говоря задания метрики в пространстве.

Предположим, что у нас задана функция, которая любой паре векторов в пространстве ставит в соответствие некоторое действительное число $g\left(\vec{a};\vec{b}\right)$ и

удовлетворяет следующим четырем условиям

$$1. g\left(\vec{a};\vec{a}\right) \geq 0 \text{ при этом } g\left(\vec{a};\vec{a}\right) = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}.$$

$$2. g\left(\vec{a};\vec{b}\right) = g\left(\vec{b};\vec{a}\right).$$

$$3. g\left(\left(\lambda \vec{a}\right);\vec{b}\right) = \lambda g\left(\vec{a};\vec{b}\right).$$

$$4. g\left(\vec{a};\left(\vec{b} + \vec{c}\right)\right) = g\left(\vec{a};\vec{b}\right) + g\left(\vec{a};\vec{c}\right).$$

Эту функцию мы будем называть **скалярным произведением**. Будем ее

обозначать в дальнейшем $g\left(\vec{a};\vec{b}\right) = \left(\vec{a} \vec{b} \right)$

1. Модулем вектора $\left| \vec{a} \right|$ мы будем тогда называть $\left| \vec{a} \right| = \sqrt{\left(\vec{a} \vec{a} \right)}.$

2. Угол между двумя векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ будем находить из соотношения

$$\cos \varphi = \frac{\left(\begin{smallmatrix} \vec{a} & \vec{b} \end{smallmatrix} \right)}{\sqrt{\left(\begin{smallmatrix} \vec{a} & \vec{a} \end{smallmatrix} \right)} \sqrt{\left(\begin{smallmatrix} \vec{b} & \vec{b} \end{smallmatrix} \right)}} = \frac{\left(\begin{smallmatrix} \vec{a} & \vec{b} \end{smallmatrix} \right)}{\left| \vec{a} \right| \left| \vec{b} \right|}.$$

3. Проекцией вектора $\vec{b}$ **на вектор** $\vec{a}$ мы назовем величину

$$\left(\begin{smallmatrix} \vec{a} & \vec{b} \end{smallmatrix} \right) = \left| \vec{a} \right| np_{\vec{a}} \vec{b}, \quad np_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{\left(\begin{smallmatrix} \vec{a} & \vec{b} \end{smallmatrix} \right)}{\sqrt{\left(\begin{smallmatrix} \vec{a} & \vec{a} \end{smallmatrix} \right)}} = \frac{\left(\begin{smallmatrix} \vec{a} & \vec{b} \end{smallmatrix} \right)}{\left| \vec{a} \right|}.$$

Покажем, что определенный таким образом косинус угла будет удовлетворять условию $|\cos \varphi| \leq 1$.

Пусть имеются векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Рассмотрим функцию $h(t) = \left(\begin{smallmatrix} \vec{a} + t\vec{b} & \vec{a} + t\vec{b} \end{smallmatrix} \right)$.

В силу свойств скалярного произведения $h(t) \geq 0$. С другой стороны эта функция является квадратной параболой

$$h(t) = \left(\begin{smallmatrix} \vec{a} + t\vec{b} & \vec{a} + t\vec{b} \end{smallmatrix} \right) = \left(\begin{smallmatrix} \vec{a} & \vec{a} \end{smallmatrix} \right) + 2t \left(\begin{smallmatrix} \vec{a} & \vec{b} \end{smallmatrix} \right) + t^2 \left(\begin{smallmatrix} \vec{b} & \vec{b} \end{smallmatrix} \right).$$

Поскольку при любых значениях t имеем $h(t) \geq 0$, то дискриминант не может быть больше нуля, то

$$\text{есть } 4 \left(\begin{smallmatrix} \vec{a} & \vec{b} \end{smallmatrix} \right)^2 - 4 \left(\begin{smallmatrix} \vec{b} & \vec{b} \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} \vec{a} & \vec{a} \end{smallmatrix} \right) \leq 0. \text{ Тогда } \frac{\left(\begin{smallmatrix} \vec{a} & \vec{b} \end{smallmatrix} \right)^2}{\left(\begin{smallmatrix} \vec{b} & \vec{b} \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} \vec{a} & \vec{a} \end{smallmatrix} \right)} \leq 1. \text{ Следовательно } \left| \frac{\left(\begin{smallmatrix} \vec{a} & \vec{b} \end{smallmatrix} \right)}{\left| \vec{b} \right| \left| \vec{a} \right|} \right| \leq 1,$$

$$|\cos \varphi| \leq 1.$$

Далее покажем, что $\left| \vec{a} + \vec{b} \right| \leq \left| \vec{a} \right| + \left| \vec{b} \right|$. Имеем

$$\left| \vec{a} + \vec{b} \right|^2 = \left(\begin{smallmatrix} \vec{a} + \vec{b} & \vec{a} + \vec{b} \end{smallmatrix} \right) = \left(\begin{smallmatrix} \vec{a} & \vec{a} \end{smallmatrix} \right) + 2 \left(\begin{smallmatrix} \vec{a} & \vec{b} \end{smallmatrix} \right) + \left(\begin{smallmatrix} \vec{b} & \vec{b} \end{smallmatrix} \right) \leq \left| \vec{a} \right|^2 + 2 \left| \vec{a} \right| \left| \vec{b} \right| + \left| \vec{b} \right|^2 = \left(\left| \vec{a} \right| + \left| \vec{b} \right| \right)^2$$

3. Применение аналитической геометрии

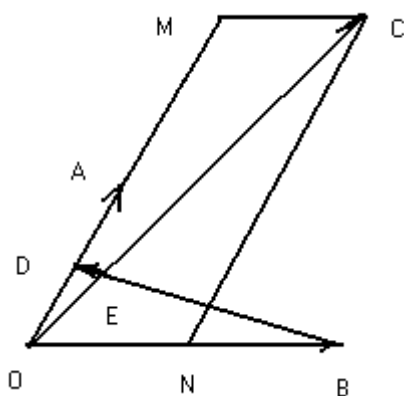
Рассмотрим один пример, который показывает некоторые преимущества аналитической геометрии по сравнению с обычной школьной геометрией.

Задача 1. Дано: $|\vec{a}| = 8$, $|\vec{b}| = 12$. Угол между векторами равен $\varphi = \pi/3$. Найти:

а) косинус угла между векторами $\vec{c} = 2\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ и $\vec{d} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$;

б) проекцию вектора $\vec{c}$ на вектор $\vec{d}$;

Решение. Пусть $O\vec{A} = \vec{a}$, $O\vec{B} = \vec{b}$. $O\vec{N} = \frac{1}{2}\vec{b}$,



$$\vec{OM} = 2\vec{a}, \quad \vec{OD} = \frac{1}{2}\vec{a}, \quad \vec{c} = 2\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} = \vec{OC},$$

$$\vec{d} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b} = \vec{BD}. \text{ Искомый угол } \psi - \text{ это } \angle DEC.$$

Согласно определению скалярного произведения, имеем

$$\cos \psi = \frac{(\vec{c}\vec{d})}{|\vec{c}||\vec{d}|}. \text{ Прежде чем перейти к вычислению}$$

$$\text{заметим, что: } (\vec{a}\vec{a}) = |\vec{a}|^2 = 64, \quad (\vec{b}\vec{b}) = |\vec{b}|^2 = 144,$$

$$(\vec{a}\vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{3} = 8 \cdot 12 \cdot \frac{1}{2} = 48.$$

Используя свойства скалярного произведения, получаем

$$(\vec{c}\vec{d}) = ((2\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b})(\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b})) = 2 \cdot \frac{1}{2}(\vec{a}\vec{a}) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(\vec{b}\vec{a}) - 2(\vec{a}\vec{b}) - \frac{1}{2}(\vec{b}\vec{b}) = (\vec{a}\vec{a}) - \frac{7}{4}(\vec{a}\vec{b}) - \frac{1}{2}(\vec{b}\vec{b}) = 64 - 84 - 72 = -92.$$

$$(\vec{c}\vec{c}) = ((2\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b})(2\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b})) = 2 \cdot 2(\vec{a}\vec{a}) + \frac{1}{2} \cdot 2(\vec{b}\vec{a}) + 2 \cdot \frac{1}{2}(\vec{a}\vec{b}) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(\vec{b}\vec{b}) = 4(\vec{a}\vec{a}) + 2(\vec{a}\vec{b}) + \frac{1}{4}(\vec{b}\vec{b}) = 256 + 96 + 36 = 388.$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{(\vec{c}\vec{c})} = \sqrt{388}.$$

$$(\vec{d}\vec{d}) = ((\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b})(\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b})) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(\vec{a}\vec{a}) - \frac{1}{2}(\vec{b}\vec{a}) - \frac{1}{2}(\vec{a}\vec{b}) + (\vec{b}\vec{b}) = \frac{1}{4}(\vec{a}\vec{a}) - (\vec{a}\vec{b}) + (\vec{b}\vec{b}) = 16 - 48 + 144 = 112.$$

$$|\vec{d}| = \sqrt{(\vec{d}\vec{d})} = \sqrt{112}.$$

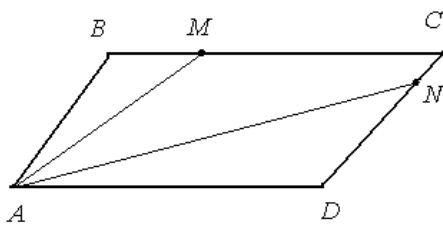
$$\text{Значит } \cos \psi = \frac{-92}{\sqrt{388}\sqrt{112}}.$$

(Для сравнения решите эту задачу методами обычной геометрии и оцените трудоемкость двух подходов.)

Отметим, что техническая трудоемкость задачи одинакова для любых значений $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, если $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ и $\vec{d} = \gamma\vec{a} + \delta\vec{b}$

$$\text{б) Проекция вектора } \vec{c} \text{ на вектор } \vec{d} \text{ пр}_{\vec{d}} \vec{c} = \frac{(\vec{c}\vec{d})}{|\vec{d}|} = -\frac{92}{\sqrt{112}}.$$

Задача 2. В параллелограмме ABCD: AB=12, AD=24, $\angle A = \frac{\pi}{3}$. Точка М, лежащая на стороне ВС, делит эту сторону в отношении BM:MC=1:3, точка N, лежащая на стороне CD, делит эту сторону в отношении CN:ND=1:5. Найти косинус угла $\angle MAN$.



Решение. Сформулируем условие этой задачи на языке аналитической геометрии. Искомый угол - это угол между векторами $\vec{AM}$ и $\vec{AN}$. Стороны параллелограмма AB и AD будем рассматривать как векторы $\vec{AB}$ и $\vec{AD}$. При этом $|\vec{AB}| = 12$, $|\vec{AD}| = 24$.

Угол между этими векторами равен $\frac{\pi}{3}$.

Из правила сложения векторов следует:

$$\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{BM}. \text{ Так как } \vec{BM} = \frac{1}{4} \vec{BC} = \frac{1}{4} \vec{AD}, \text{ то } \vec{AM} = \vec{AB} + \frac{1}{4} \vec{AD};$$

$$\vec{AN} = \vec{AD} + \vec{DN}. \text{ Так как } \vec{DN} = \frac{5}{6} \vec{DC} = \frac{5}{6} \vec{AB}, \text{ то } \vec{AN} = \vec{AD} + \frac{5}{6} \vec{AB}.$$

Далее мы фактически повторяем решение предыдущей задачи.

$$\text{Пусть } \angle MAN = \alpha. \text{ Тогда } \cos \alpha = \frac{(\vec{AM} \vec{AN})}{|\vec{AM}| |\vec{AN}|}.$$

$$\text{Предварительно вычислим: } (\vec{AB} \vec{AB}) = 144, (\vec{AD} \vec{AD}) = 576, (\vec{AB} \vec{AD}) = |\vec{AB}| |\vec{AD}| \cos \frac{\pi}{3} = 12 \cdot 24 \cdot \frac{1}{2} = 144.$$

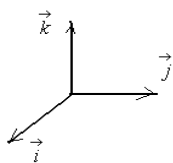
$$(\vec{AM} \vec{AN}) = (\vec{AB} + \frac{1}{4} \vec{AD})(\vec{AD} + \frac{5}{6} \vec{AB}) = (\vec{AB} \vec{AD}) + \frac{1}{4} (\vec{AD} \vec{AD}) + \frac{5}{6} (\vec{AB} \vec{AB}) + \frac{5}{24} (\vec{AD} \vec{AB}) = 144 + 144 + 120 + 30 = 438.$$

$$(\vec{AM} \vec{AM}) = (\vec{AB} + \frac{1}{4} \vec{AD})(\vec{AB} + \frac{1}{4} \vec{AD}) = (\vec{AB} \vec{AB}) + \frac{1}{2} (\vec{AB} \vec{AD}) + \frac{1}{16} (\vec{AD} \vec{AD}) = 144 + 72 + 36 = 252. \text{ Значит } |\vec{AM}| = \sqrt{252}.$$

$$(\vec{AN} \vec{AN}) = (\vec{AD} + \frac{5}{6} \vec{AB})(\vec{AD} + \frac{5}{6} \vec{AB}) = (\vec{AD} \vec{AD}) + \frac{5}{3} (\vec{AB} \vec{AD}) + \frac{25}{36} (\vec{AB} \vec{AB}) = 576 + 240 + 100 = 826. \text{ Значит } |\vec{AN}| = \sqrt{916}.$$

$$\text{Тогда } \cos \alpha = \frac{(\vec{AM} \vec{AN})}{|\vec{AM}| |\vec{AN}|} = \frac{438}{\sqrt{252} \sqrt{916}}. \text{ Ответ: } \cos \alpha = \frac{438}{\sqrt{252} \sqrt{916}}.$$

4. Скалярное произведение векторов в ортонормированном базисе



Рассмотрим ортонормированный базис $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

В дальнейшем нам понадобятся следующие соотношения. Так как базис ортонормированный, то векторы имеют единичную длину и перпендикулярны друг другу. Это позволяет записать во всех отношениях приятные

$$\text{соотношения: } \begin{pmatrix} \vec{i} \vec{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{j} \vec{j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{k} \vec{k} \end{pmatrix} = 1;$$

$$\begin{pmatrix} \vec{i} \vec{j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{i} \vec{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{j} \vec{k} \end{pmatrix} = 0.$$

Пусть имеются два векторы $\vec{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\}$, $\vec{b} = \{X_2, Y_2, Z_2\}$. Это означает, что они представимы в виде $\vec{a} = X_1 \vec{i} + Y_1 \vec{j} + Z_1 \vec{k}$, $\vec{b} = X_2 \vec{i} + Y_2 \vec{j} + Z_2 \vec{k}$.

$$\begin{aligned} \text{Тогда } \left(\vec{a} \vec{b} \right) &= \left(\left(X_1 \vec{i} + Y_1 \vec{j} + Z_1 \vec{k} \right) \left(X_2 \vec{i} + Y_2 \vec{j} + Z_2 \vec{k} \right) \right) = \\ &= X_1 X_2 \left(\vec{i} \vec{i} \right) + X_1 Y_2 \left(\vec{i} \vec{j} \right) + X_1 Z_2 \left(\vec{i} \vec{k} \right) + Y_1 X_2 \left(\vec{j} \vec{i} \right) + Y_1 Y_2 \left(\vec{j} \vec{j} \right) + Y_1 Z_2 \left(\vec{j} \vec{k} \right) + \\ &+ Z_1 X_2 \left(\vec{k} \vec{i} \right) + Z_1 Y_2 \left(\vec{k} \vec{j} \right) + Z_1 Z_2 \left(\vec{k} \vec{k} \right). \end{aligned}$$

Так как $\left(\vec{i} \vec{i} \right) = \left(\vec{j} \vec{j} \right) = \left(\vec{k} \vec{k} \right) = 1$, $\left(\vec{i} \vec{j} \right) = \left(\vec{i} \vec{k} \right) = \left(\vec{j} \vec{k} \right) = 0$, то

$$\left(\vec{a} \vec{b} \right) = X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2.$$

Отметим, что полученная формула верна только в ортонормированном базисе. Заметим:

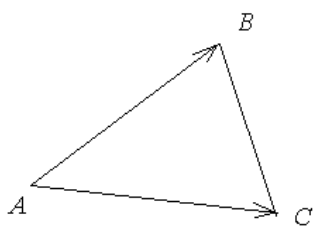
$$1. \left| \vec{a} \right| = \sqrt{\left(\vec{a} \vec{a} \right)} = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2};$$

2. **условие перпендикулярности векторов** может быть представлено в виде

$$\vec{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\} \perp \vec{b} = \{X_2, Y_2, Z_2\} \Leftrightarrow X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2 = 0$$

Задача 3. Даны координаты вершин треугольника: $A(10;6;6)$, $B(-2;8;2)$, $C(6;8;9)$

Требуется найти косинус угла между сторонами AB и AC;



На языке аналитической геометрии сформулированная задача означает – найти косинус угла между векторами $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$.

$$\text{Имеем } \cos \varphi = \frac{\left(\vec{AB} \vec{AC} \right)}{\left| \vec{AB} \right| \left| \vec{AC} \right|}. \quad \vec{AB} = \{-12; 2; -4\},$$

$$\vec{AC} = \{-4; 2; 3\}. \text{ Тогда}$$

$$\cos \varphi = \frac{(-12)(-4) + 2 \cdot 2 + (-4)3}{\sqrt{(-12)^2 + 2^2 + (-4)^2} \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + 3^2}} = \frac{40}{\sqrt{164} \sqrt{29}} = \frac{20}{\sqrt{41} \sqrt{29}}$$

Конец лекции.

Лекция 9. Векторное произведение

1. Определение векторного произведения и его геометрическое свойство.
2. Условие коллинеарности векторов.
3. Антикоммутативность.
4. Ассоциативность умножения на число.
5. Дистрибутивность по сложению.

Литература

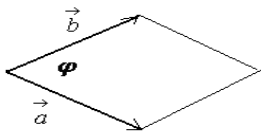
- 1) Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. М. Физматлит, 2004, гл.9, 10., Л-2. &6,11,12,13.
- 2) И.П. Натансон. Краткий курс высшей математики. М., Лань, 1999, гл.8, &4-5.

1. Определение векторного произведения и его геометрическое свойство

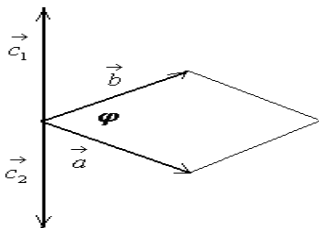
Определение 1. Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий трем условиям:

1. $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$, где φ - угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Следующие два условия определяют направление вектора $\vec{c}$;



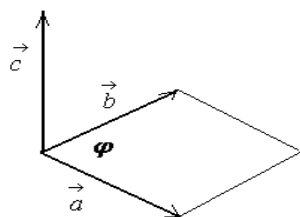
2. Вектор $\vec{c}$ перпендикулярен каждому из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ($\vec{c} \perp \vec{a}$; $\vec{c} \perp \vec{b}$), то есть вектор $\vec{c}$ перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.



Но таких вектора два - $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$.

3-е условие однозначно определяет вектор $\vec{c}$.

3. Если смотреть с конца вектора $\vec{c}$, то кратчайший поворот от первого вектора ($\vec{a}$) до второго ($\vec{b}$) будет виден против часовой стрелки. Соответственно имеем вектор $\vec{c}$.



Обозначение: $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$.

Геометрическое свойство векторного произведения

Модуль векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах

2. Условие коллинеарности векторов

Из определения векторного произведения следует один важный вывод, касающийся условия коллинеарности векторов.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их векторное произведение равно нулю, или кратко

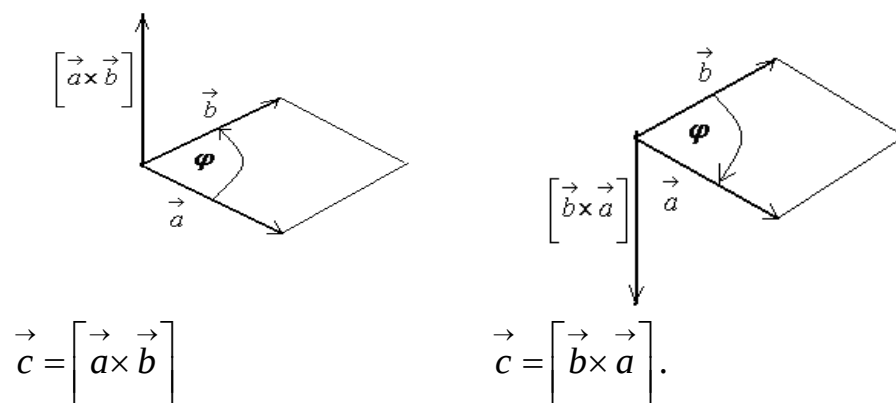
$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}.$$

3. Антикоммутативность

$$\left[\vec{a} \times \vec{b} \right] = - \left[\vec{b} \times \vec{a} \right].$$

Из первого и второго пунктов определения векторного произведения следует, что векторы $\left[\vec{a} \times \vec{b} \right]$ и $\left[\vec{b} \times \vec{a} \right]$ имеют одинаковые длины и перпендикулярны

плоскости, в которой лежат векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Противоположность их направлений следует из 3-го пункта определения



4. Ассоциативность умножения на число

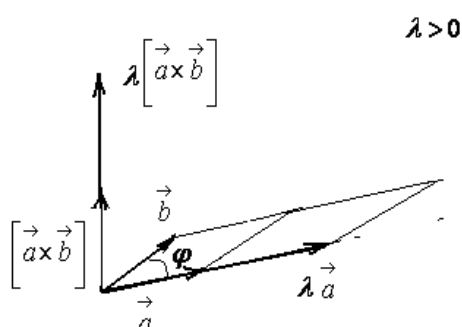
$$\left[\lambda \vec{a} \times \vec{b} \right] = \lambda \left[\vec{a} \times \vec{b} \right].$$

Случай 1. $\lambda > 0$.

В случае $\lambda > 0$ площадь параллелограмма, построенного на векторах $\lambda \vec{a}$ и $\vec{b}$ меняется в λ раз, по сравнению с площадью параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а

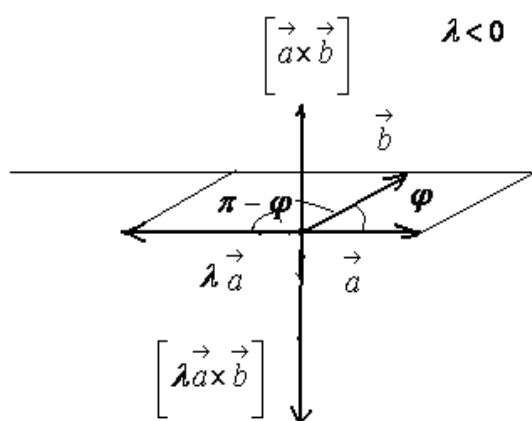
направление векторов $\left[\lambda \vec{a} \times \vec{b} \right]$ и $\left[\vec{a} \times \vec{b} \right]$ совпадает. Следовательно

$$\left[\lambda \vec{a} \times \vec{b} \right] = \lambda \left[\vec{a} \times \vec{b} \right].$$



Случай 2. $\lambda < 0$.

Если угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен φ , то при $\lambda < 0$ угол между векторами $\lambda \vec{a}$ и $\vec{b}$ равен $\pi - \varphi$. В этом случае площадь параллелограмма, построенного на векторах $\lambda \vec{a}$ и $\vec{b}$ меняется в $|\lambda|$ раз, по сравнению с площадью параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, поскольку $\sin \varphi = \sin(\pi - \varphi)$, а направление векторов $\left[\lambda \vec{a} \times \vec{b} \right]$ и $\left[\vec{a} \times \vec{b} \right]$ противоположно.



Следовательно $\left[\lambda \vec{a} \times \vec{b} \right] = \lambda \left[\vec{a} \times \vec{b} \right]$

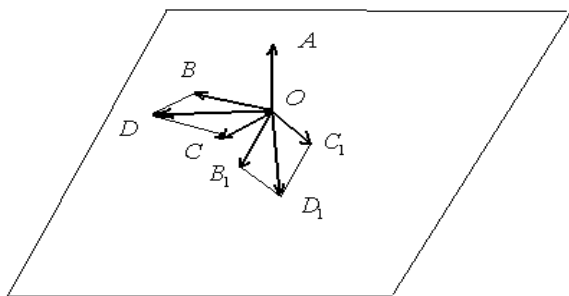
Из полученных результатов следует ассоциативность по второму аргументу

$$\left[\vec{a} \times \lambda \vec{b} \right] = - \left[\lambda \vec{b} \times \vec{a} \right] = -\lambda \left[\vec{b} \times \vec{a} \right] = \lambda \left[\vec{a} \times \vec{b} \right].$$

5. Дистрибутивность по сложению

$$\left[\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) \right] = \left[\vec{a} \times \vec{b} \right] + \left[\vec{a} \times \vec{c} \right]$$

Доказательство. 1) Рассмотрим случай, когда вектор $\vec{a}$ имеет единичную длину, а векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$ перпендикулярны вектору $\vec{a}$.



Пусть $\vec{a} = \vec{OA}$, $\vec{b} = \vec{OB}$, $\vec{c} = \vec{OC}$, $|\vec{a}| = 1$,

$$\vec{a} \perp \vec{b}, \vec{a} \perp \vec{c}, \vec{b} + \vec{c} = \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OD}.$$

Напомним, что сумма векторов $\vec{b} + \vec{c}$ будет являться диагональю $\vec{OD}$ параллелограмма $OBDC$, направленной из точки O в вершину D .

Пусть $\left[\vec{a} \times \vec{b} \right] = \left[\vec{OA} \times \vec{OB} \right] = \vec{OB}_1$. Поскольку из определения векторного

произведения следует, что $\vec{OB}_1 \perp \vec{OA}$, а по условию $\vec{OA} \perp \vec{OB}$, $\vec{OA} \perp \vec{OC}$, то вектор

$\vec{OB}_1$ лежит в той же плоскости, что и параллелограмм $OBDC$. Поскольку по определению векторного произведения $|\vec{OB}_1| = |\vec{OB}| |\vec{OA}| \sin \angle AOB$, а $|\vec{OA}| = 1, \sin \angle AOB = \sin(\pi/2) = 1$, то $|\vec{OB}_1| = |\vec{OB}|$.

И поскольку по определению векторного произведения $\vec{OB}_1 \perp \vec{OB}$, то можно утверждать, что вектор $\vec{OB}_1$ получен поворотом вектора $\vec{OB}$ относительно оси $\vec{OA}$ на угол $\pi/2$ против часовой стрелки.

Пусть $\left[\vec{a} \times \vec{c} \right] = \left[\vec{OA} \times \vec{OC} \right] = \vec{OC}_1$. Аналогично получаем, что вектор $\vec{OC}_1$

получен поворотом вектора $\vec{OC}$ относительно оси $\vec{OA}$ на угол $\pi/2$ против часовой стрелки.

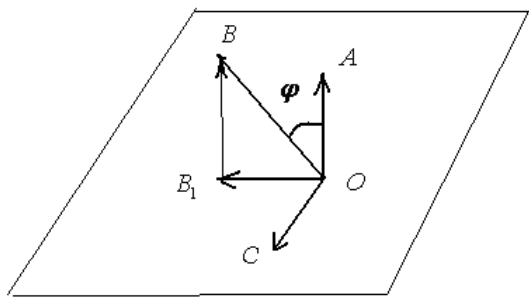
Пусть $\vec{OB}_1 + \vec{OC}_1 = \vec{OD}_1$. Тогда параллелограмм $O_1 B_1 D_1 C_1$ получен поворотом параллелограмма $OBDC$ относительно оси $\vec{OA}$ на угол $\pi/2$ против часовой стрелки. Значит $\vec{OD}_1 \perp \vec{OD}$, $\vec{OD}_1 \perp \vec{OA}$, $|\vec{OD}_1| = |\vec{OD}|$.

Следовательно $\vec{OD}_1 = \left[\vec{OA} \times \vec{OD} \right]$. В итоге получаем

$$\vec{OD}_1 = \left[\vec{OA} \times (\vec{OB} + \vec{OC}) \right] = \vec{OB}_1 + \vec{OC}_1 = \left[\vec{OA} \times \vec{OB} \right] + \left[\vec{OA} \times \vec{OC} \right].$$

2) Теперь откажемся от предположения, что векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$ перпендикулярны вектору $\vec{a}$.

Пусть $\vec{a} = \vec{OA}$, $\vec{b} = \vec{OB}$, $\left[\vec{a} \times \vec{b} \right] = \left[\vec{OA} \times \vec{OB} \right] = \vec{OC}$.



Пусть B_1 проекция точки B на плоскость перпендикулярную вектору $\vec{OA}$. Тогда вектор $\vec{B_1B}$ параллелен вектору $\vec{OA}$ и следовательно $\vec{B_1B} = m \vec{OA}$.

Тогда вектор $\vec{OB} = \vec{B_1B} + m \vec{OA}$.

Заметим, что

$$\left[\vec{a} \times \vec{b} \right] = \left[\vec{OA} \times \vec{OB} \right] = \vec{OC} = \left[\vec{OA} \times \vec{OB} \right] = |\vec{OA}| |\vec{OB}| \sin \varphi = |\vec{OA}| |\vec{OB}_1|.$$

Кроме того, $\vec{OC} \perp \vec{OA}$, $\vec{OC} \perp \vec{OB}$, $\vec{OC} \perp \vec{OB}_1$. Значит

$$\left[\vec{a} \times \vec{b} \right] = \left[\vec{OA} \times \vec{OB} \right] = \vec{OC} = \left[\vec{OA} \times \vec{OB}_1 \right]. \text{ Следовательно, если вектор } \vec{b}$$

представлен в виде $\vec{b} = \vec{b}_1 + m\vec{a}$, где $\vec{b}_1 \perp \vec{a}$, то $\left[\vec{a} \times \vec{b} \right] = \left[\vec{a} \times \vec{b}_1 \right]$.

Аналогично вектор $\vec{c}$ представим в виде $\vec{c} = \vec{c}_1 + n\vec{a}$, где $\vec{c}_1 \perp \vec{a}$. При этом

$$\left[\vec{a} \times \vec{c} \right] = \left[\vec{a} \times \vec{c}_1 \right]. \text{ Тогда}$$

$$\left[\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) \right] = \left[\vec{a} \times (\vec{b}_1 + m\vec{a} + \vec{c}_1 + n\vec{a}) \right] = \left[\vec{a} \times \left((\vec{b}_1 + \vec{c}_1) + (m+n)\vec{a} \right) \right] = \left[\vec{a} \times (\vec{b}_1 + \vec{c}_1) \right]$$

Но поскольку $\vec{b}_1 \perp \vec{a}$, $\vec{c}_1 \perp \vec{a}$, то

$$\left[\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) \right] = \left[\vec{a} \times (\vec{b}_1 + \vec{c}_1) \right] = \left[\vec{a} \times \vec{b}_1 \right] + \left[\vec{a} \times \vec{c}_1 \right]. \text{ Так как } \left[\vec{a} \times \vec{b}_1 \right] = \left[\vec{a} \times \vec{b} \right],$$

$$\left[\vec{a} \times \vec{c}_1 \right] = \left[\vec{a} \times \vec{c} \right], \text{ то } \left[\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) \right] = \left[\vec{a} \times \vec{b} \right] + \left[\vec{a} \times \vec{c} \right].$$

3) Пусть вектор $\vec{a}$ имеет произвольную длину. Рассмотрим единичный вектор

$\vec{a}_0$ равный $\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$. Тогда $\vec{a} = |\vec{a}| \vec{a}_0$. Имеем

$$\begin{aligned} \left[\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) \right] &= \left[|\vec{a}| \vec{a}_0 \times (\vec{b} + \vec{c}) \right] = |\vec{a}| \left[\vec{a}_0 \times (\vec{b} + \vec{c}) \right] = \\ &= |\vec{a}| \left[\vec{a}_0 \times \vec{b} \right] + |\vec{a}| \left[\vec{a}_0 \times \vec{c} \right] = \left[|\vec{a}| \vec{a}_0 \times \vec{b} \right] + \left[|\vec{a}| \vec{a}_0 \times \vec{c} \right] = \left[\vec{a} \times \vec{b} \right] + \left[\vec{a} \times \vec{c} \right], \text{ ч.т.д.} \end{aligned}$$

Конец лекции.

Лекция 10. Свойства векторного и смешанного произведений

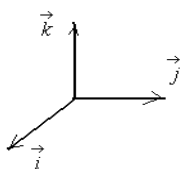
1. Координаты векторного произведения.
2. Вычисление площади параллелограмма и треугольника.
3. Смешанное произведение, компланарность векторов.
Объем параллелепипеда и тетраэдра.
4. Дополнительный материал

Литература

- 1) Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. М. Физматлит, 2004, гл.9, 10., Л-2. &6,11,12,13.
- 2) И.П. Натансон. Краткий курс высшей математики. М., Лань, 1999, гл.8, &4-5.

1. Координаты векторного произведения

Получим формулу для определения координат векторного произведения векторов, заданных своими координатами в ортонормированном базисе.



Рассмотрим ортонормированный базис $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

В дальнейшем нам понадобятся следующие соотношения. Так как базис ортонормированный, то векторы имеют единичную длину и перпендикулярны друг другу. Это позволяет записать полезные соотношения:

$$\begin{aligned} \left[\vec{i} \times \vec{i} \right] &= \left[\vec{j} \times \vec{j} \right] = \left[\vec{k} \times \vec{k} \right] = 0; & \left[\vec{i} \times \vec{j} \right] &= \vec{k}, \left[\vec{j} \times \vec{i} \right] = -\vec{k}; \\ \left[\vec{j} \times \vec{k} \right] &= \vec{i}, \left[\vec{k} \times \vec{j} \right] = -\vec{i}; & \left[\vec{k} \times \vec{i} \right] &= \vec{j}, \left[\vec{i} \times \vec{k} \right] = -\vec{j}. \end{aligned}$$

Пусть имеются два вектора $\vec{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\}$, $\vec{b} = \{X_2, Y_2, Z_2\}$. Это означает, что они представимы в виде $\vec{a} = X_1 \vec{i} + Y_1 \vec{j} + Z_1 \vec{k}$, $\vec{b} = X_2 \vec{i} + Y_2 \vec{j} + Z_2 \vec{k}$.

$$\begin{aligned} \text{Тогда } \left[\vec{a} \times \vec{b} \right] &= \left[\left(X_1 \vec{i} + Y_1 \vec{j} + Z_1 \vec{k} \right) \times \left(X_2 \vec{i} + Y_2 \vec{j} + Z_2 \vec{k} \right) \right] = \\ &= X_1 X_2 \left[\vec{i} \times \vec{i} \right] + X_1 Y_2 \left[\vec{i} \times \vec{j} \right] + X_1 Z_2 \left[\vec{i} \times \vec{k} \right] + \\ &+ Y_1 X_2 \left[\vec{j} \times \vec{i} \right] + Y_1 Y_2 \left[\vec{j} \times \vec{j} \right] + Y_1 Z_2 \left[\vec{j} \times \vec{k} \right] + \\ &+ Z_1 X_2 \left[\vec{k} \times \vec{i} \right] + Z_1 Y_2 \left[\vec{k} \times \vec{j} \right] + Z_1 Z_2 \left[\vec{k} \times \vec{k} \right] = \\ &= X_1 X_2 \vec{0} + X_1 Y_2 \vec{k} - X_1 Z_2 \vec{j} - \\ &- Y_1 X_2 \vec{k} + Y_1 Y_2 \vec{0} + Y_1 Z_2 \vec{i} + \\ &+ Z_1 X_2 \vec{j} - Z_1 Y_2 \vec{i} + Z_1 Z_2 \vec{0} = \\ &= (Y_1 Z_2 - Z_1 Y_2) \vec{i} - (X_1 Z_2 - Z_1 X_2) \vec{j} + (X_1 Y_2 - Y_1 X_2) \vec{k}. \end{aligned}$$

Отметим, что полученное выражение можно переписать в более удобном для запоминания виде

$$\left[\begin{matrix} \vec{a} \times \vec{b} \end{matrix} \right] = \vec{i} \begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}.$$

2. Вычисление площади параллелограмма и треугольника

Задача 1. Дано: $|\vec{a}| = 8$, $|\vec{b}| = 12$. Угол между векторами равен $\varphi = \pi/3$.

Найти площадь параллелограмма построенного на векторах $\vec{c}$ и $\vec{d}$, если $\vec{c} = 2\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$, $\vec{d} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$.

Решение Искомая площадь параллелограмма S равна

$$\begin{aligned} \left[\vec{c} \times \vec{d} \right] &= \left[\left(2\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \right) \times \left(\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b} \right) \right] = \left| 2 \cdot \frac{1}{2} [\vec{a} \times \vec{a}] + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} [\vec{b} \times \vec{a}] - 2 [\vec{a} \times \vec{b}] - \frac{1}{2} [\vec{b} \times \vec{b}] \right| = \\ &= \left| 0 - \frac{1}{4} [\vec{a} \times \vec{b}] - 2 [\vec{a} \times \vec{b}] - 0 \right| = \left| -\frac{9}{4} [\vec{a} \times \vec{b}] \right| = \frac{9}{4} \left[\vec{a} \times \vec{b} \right] = \frac{9}{4} |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi = \\ &\frac{9}{4} \cdot 8 \cdot 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 108\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Задача 2. Найти вектор $\vec{a}$, если $\vec{a} \perp \vec{b} = \{2; 1; -1\}$, $\vec{a} \perp \vec{c} = \{0; 3; -2\}$, $(\vec{a}\vec{d}) = 6$, $\vec{d} = \{1; 1; 1\}$.

Решение. Пусть $\vec{a} = \{x; y; z\}$, где x, y, z - неизвестные.

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow (\vec{a}\vec{b}) = 0 \Rightarrow 2x + y - z = 0. \quad \vec{a} \perp \vec{c} \Rightarrow (\vec{a}\vec{c}) = 0 \Rightarrow 3y - 2z = 0.$$

$$(\vec{a}\vec{d}) = 6 \Rightarrow x + y + z = 6.$$

Для нахождения x, y, z получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 6, \\ 3y - 2z = 0, \\ 2x + y - z = 0. \end{cases}$$

Решим её методом Крамера. Определитель системы вычислим разложением по первому столбцу

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = (-3 + 2) + 2(-2 - 3) = -11.$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 6(-3 + 2) = -6 - \text{разложение по первому столбцу.}$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -6 \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -6(0 - (-4)) = -24 - \text{разложение по второму столбцу.}$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 6(0 - 6) = -36 - \text{разложение по третьему столбцу.}$$

$$\text{Тогда } x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{6}{11}, y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{24}{11}, z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{36}{11}.$$

Приведем второй способ решения этой задачи, использующий некоторые свойства векторного произведения.

Напомним, что векторное произведение векторов $[\vec{a} \times \vec{b}]$, это вектор перпендикулярный каждому из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Поскольку неизвестный вектор $\vec{a}$ перпендикулярен векторам $\vec{b}$ и $\vec{c}$, то он параллелен их векторному произведению. Тогда $\vec{a} = \lambda[\vec{b} \times \vec{c}]$, где λ - неизвестное число.

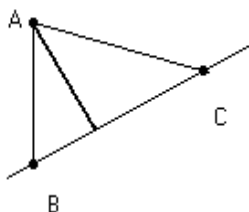
$$\text{Имеем } [\vec{b} \times \vec{c}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k} = \{1; 4; 6\}.$$

Тогда $\vec{a} = \lambda[\vec{b} \times \vec{c}] = \{\lambda; 4\lambda; 6\lambda\}$. Так как $(\vec{a} \vec{d}) = 6$, то $\lambda + 4\lambda + 6\lambda = 6$.

$$11\lambda = 6. \lambda = \frac{6}{11}. \text{ Значит, вектор } \vec{a} \text{ имеет координаты } \vec{a} = \left\{ \frac{6}{11}; \frac{24}{11}; \frac{36}{11} \right\}.$$

$$\text{Ответ: } \vec{a} = \left\{ \frac{6}{11}; \frac{24}{11}; \frac{36}{11} \right\}.$$

Задача 3. Найти расстояние от точки A(3;2;5) до прямой, проходящей через точки B(1;4;9) и C(3;7;1).



Расстояние от точки A до прямой BC равно высоте h треугольника ABC, проведенной из вершины A. Для площади треугольника известна формула $S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot h$.

Площадь треугольника равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{BA}$ и $\vec{BC}$.

Используя свойства векторного произведения, имеем

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \left| [\vec{BA} \times \vec{BC}] \right|. \text{ Поскольку длина стороны BC равна } |\vec{BC}|, \text{ получаем}$$

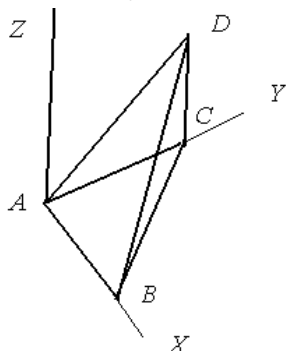
$$\text{следующую формулу для вычисления расстояния } h = \frac{2S_{ABC}}{BC} = \frac{[\vec{BA} \times \vec{BC}]}{|\vec{BC}|}.$$

$$\vec{BC} = \{2; 3; -8\}. |\vec{BC}| = \sqrt{4 + 9 + 64} = \sqrt{77}. \vec{BA} = \{2; -2; -4\}.$$

$$[\vec{BA} \times \vec{BC}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & -4 \\ 2 & 3 & -8 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 3 & -8 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 2 & -8 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -8 \end{vmatrix} = \{28; 8; 10\}.$$

$$[\vec{BA} \times \vec{BC}] = \sqrt{784 + 64 + 100} = \sqrt{948}; \quad h = \frac{\sqrt{948}}{\sqrt{77}}. \text{ Ответ: } h = \frac{\sqrt{948}}{\sqrt{77}}.$$

Задача 4. В основании пирамиды ABCD лежит прямоугольный треугольник ABC, в котором: $\angle A = 90^\circ$, $\angle C = 30^\circ$, $AB = 2$. Боковое ребро AD равно 5 и составляет со сторонами AB и AC углы 60° и 45° соответственно. Найти площадь грани DBC.



Введем прямоугольную систему координат ($X Y Z$) как показано на рисунке.

Точка B имеет координаты $B(2;0;0)$, Так

как $\frac{AB}{AC} = \operatorname{tg}(\pi/6)$, то $AC = 2\sqrt{3}$.

Следовательно точка C имеет координаты $C(0;2\sqrt{3};0)$. Координаты точки D

совпадают с координатами вектора $\vec{AD}$.

Обозначим его координаты $\vec{AD} = \{x; y; z\}$. Имеем

$x = |\vec{AD}| \cos(\pi/3) = \frac{5}{2}$, $y = |\vec{AD}| \cos(\pi/4) = \frac{5\sqrt{2}}{2}$. Так как $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, то

$\frac{25}{4} + \frac{25}{2} + z^2 = 25$, $z^2 = \frac{25}{4}$, $z = \pm \frac{5}{2}$. В силу выбора направления оси Z имеем

$z = \frac{5}{2}$. Следовательно точка D имеет координаты $D\left(\frac{5}{2}; \frac{5\sqrt{2}}{2}; \frac{5}{2}\right)$.

Площадь грани DBC равна площади треугольника DBC и равна

$$S_{DBC} = \frac{1}{2} \left\| \vec{BC} \times \vec{BD} \right\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 2\sqrt{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{5\sqrt{2}}{2} & \frac{5}{2} \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2} \left| 5\sqrt{3}\vec{i} + 5\vec{j} + (-5\sqrt{2} - \sqrt{3})\vec{k} \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{(5\sqrt{3})^2 + 5^2 + (-5\sqrt{2} - \sqrt{3})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{153 + 10\sqrt{6}}.$$

В заключение отметим, что векторное произведение не обладает свойством ассоциативности, то есть в общем случае

$$\left[\vec{a} \times \left[\vec{b} \times \vec{c} \right] \right] \neq \left[\left[\vec{a} \times \vec{b} \right] \times \vec{c} \right].$$

3. Смешанное произведение, компланарность векторов.

Объем параллелепипеда и тетраэдра.

Определение 1. Пусть имеются три вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Представим, что вектор $\vec{a}$ векторно умножается на вектор $\vec{b}$. Полученный вектор $\left[\vec{a} \times \vec{b} \right]$ затем скалярно

умножается на вектор $\vec{c}$. Полученное число $\left(\left[\vec{a} \times \vec{b}\right] \vec{c}\right)$ называется смешанным произведением векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Его будем обозначать $\left(\vec{a} \vec{b} \vec{c}\right)$.

Таким образом $\left(\vec{a} \vec{b} \vec{c}\right) = \left(\left[\vec{a} \times \vec{b}\right] \times \vec{c}\right)$.

Геометрический смысл смешанного произведения.

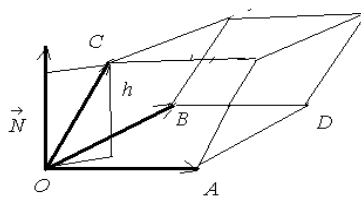
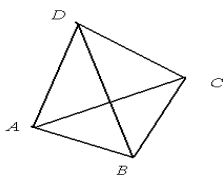
Покажем, что смешанное произведение векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, взятое по абсолютной величине, равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах.

Пусть $\vec{a} = \vec{OA}, \vec{b} = \vec{OB}, \vec{c} = \vec{OC}$. Объем параллелепипеда, построенного на этих векторах равен $V = S_{ABDC} h$, где S_{ABDC} площадь параллелограмма ABDC, или, иначе говоря, площадь параллелограмма, построенного на векторах

$\vec{a} = \vec{OA}, \vec{b} = \vec{OB}$. Согласно определению векторного произведения $S_{ABDC} = \left|\left[\vec{a} \times \vec{b}\right]\right|$

. Пусть вектор $\vec{N} = \left[\vec{a} \times \vec{b}\right]$. Тогда $S_{ABDC} = \left|\vec{N}\right|$, а $h = \left|np_{\vec{N}} \vec{OC}\right|$. $h = \frac{\left|\left(\vec{N} \vec{OC}\right)\right|}{\left|\vec{N}\right|} \Rightarrow$

$$V = S_{ABDC} h = \left|\vec{N}\right| \frac{\left|\left(\vec{N} \vec{OC}\right)\right|}{\left|\vec{N}\right|} = \left|\left(\vec{N} \vec{OC}\right)\right| = \left|\left(\left[\vec{OA} \times \vec{OB}\right] \vec{OC}\right)\right|, \text{ ч.т.д.}$$



Определение 2. Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называются компланарными, если они лежат в одной плоскости.

Из полученного соотношения следует, что три вектора компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю, то есть условие компланарности векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ имеет вид $\left(\vec{a} \vec{b} \vec{c}\right) = 0$.

Смешанное произведение в ортонормированном базисе

Пусть $\vec{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\}, \vec{b} = \{X_2, Y_2, Z_2\}, \vec{c} = \{X_3, Y_3, Z_3\}$. Тогда

$$\left[\vec{a} \times \vec{b} \right] = \vec{i} \begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}, \text{ или}$$

$$\left[\vec{a} \times \vec{b} \right] = \left\{ \begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} \right\}.$$

$$\text{Тогда } \left(\left[\vec{a} \times \vec{b} \right] \vec{c} \right) = \begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} X_3 - \begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix} Y_3 + \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} Z_3 = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}.$$

Вычисление объема пирамиды с вершинами А, В, С, D

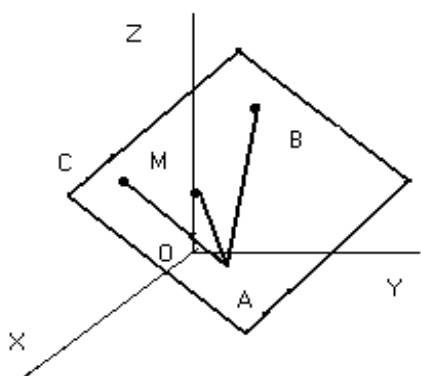
Объем пирамиды $V_{ABDC} = \frac{1}{3} S_{ABC} h$. Объем параллелепипеда, построенного на

векторах $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$ равен $2S_{ABC} h$. Следовательно объем пирамиды составляет

шестую часть объема параллелепипеда $V_{ABDC} = \frac{1}{6} \left| \begin{pmatrix} \vec{AB} & \vec{AC} & \vec{AD} \end{pmatrix} \right|$.

4. Дополнительный материал

Задача 5. Найти точку пересечения плоскости, проходящей через точки А(1;2;1), В(-3;-3;4), С(2;-1;3) с осью Z.



Решение Так как точка М лежит на оси Z, то она имеет координаты М(0;0;z),

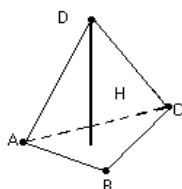
где z - неизвестное число. Так как точки А, В, С, М лежат в одной плоскости, то векторы $\vec{AM}, \vec{AC}$ и $\vec{AB}$ компланарны. Следовательно, их смешанное произведение равно нулю. Так как

$\vec{AM} = \{-1; -2; z-1\}$, $\vec{AB} = \{-4; 1; 3\}$, $\vec{AC} = \{1; -3; 2\}$, то из условия $(\vec{AM} \cdot \vec{AB} \cdot \vec{AC}) = 0$ получаем уравнение для определения z

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & z-1 \\ -4 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad (-1) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (z-1) \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$-11-22+11(z-1)=0, \quad 11z=44. \quad Z=4. \quad \text{Ответ: } M(0;0;4).$$

Задача 6. Найти расстояние от точки D(4;9;1) до плоскости, проходящей через точки А(4;0;0), В(1;1;2) и С(6;-4;2).



Решение. Расстояние от точки D до плоскости ABC равно длине высоты H в пирамиде ABCD, проведенной из вершины D.

Так как объем пирамиды $V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABC} H$, то $H = \frac{3V_{ABCD}}{S_{ABC}}$.

Объем пирамиды равен одной шестой объема параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$.

Согласно геометрическому смыслу смешанного произведения его модуль равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах.

$$\text{Тогда } V_{ABCD} = \frac{1}{6} \left| \left(\vec{AB} \cdot \vec{AC} \cdot \vec{AD} \right) \right| \cdot S_{ABC} = \frac{1}{2} \left| \left[\vec{AB} \times \vec{AC} \right] \right| \Rightarrow H = \frac{\left| \left(\vec{AB} \cdot \vec{AC} \cdot \vec{AD} \right) \right|}{\left| \left[\vec{AB} \times \vec{AC} \right] \right|}.$$

Имеем $\vec{AB} = \{-3; 1; 2\}$, $\vec{AC} = \{2; -4; 2\}$, $\vec{AD} = \{0; 9; 1\}$.

$$\left(\vec{AB} \cdot \vec{AC} \cdot \vec{AD} \right) = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 0 & 9 & 1 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} = -3(-4-18) - (2) + 2(18) = 100.$$

$$\left[\vec{AB} \times \vec{AC} \right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = \{10; 10; 10\}.$$

$$\left| \left[\vec{AB} \times \vec{AC} \right] \right| = \sqrt{100 + 100 + 100} = 10\sqrt{3}. \text{ Тогда } H = \frac{100}{10\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{3}.$$

Конец лекции.

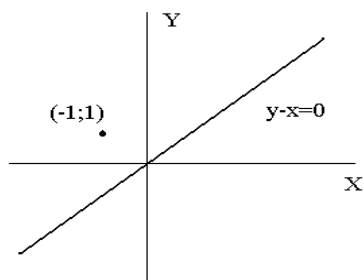
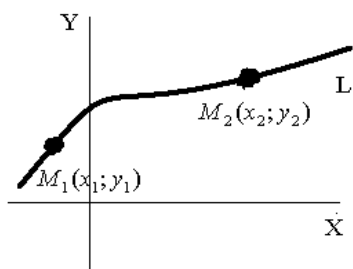
Лекция 11 Линия на плоскости

1. Уравнение линии на плоскости. Уравнение окружности.
2. Уравнение прямой, проходящей через данную точку, перпендикулярно данному вектору.
3. Уравнение прямой, проходящей через данную точку, параллельно данному вектору, параметрическое уравнение прямой.
4. Уравнения прямой, проходящей через две данные точки.
5. Общее уравнение прямой.
6. Расстояние от точки до прямой.
7. Угол между прямыми, условия их перпендикулярности и параллельности для общего уравнения прямой.
8. Исследование общего уравнения прямой, уравнение прямой в отрезках.
9. Уравнение прямой, проходящей через данную точку с данным угловым коэффициентом.
10. Угол между прямыми, условия их перпендикулярности и параллельности для уравнения прямой с угловым коэффициентом
11. Задачи

Литература

- 1) Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. М.Физматлит, 2004, гл.3,4. Л-2. &&7-8.
- 2) И.П. Натансон. Краткий курс высшей математики.,М,Лань, 1999, гл.1, &1-3.

1. Уравнение линии на плоскости. Уравнение окружности.



Пусть на плоскости (X,Y) задана некоторая линия L .

Уравнение $F(x;y)=0$ называется уравнением линии L , если выполнены два условия:

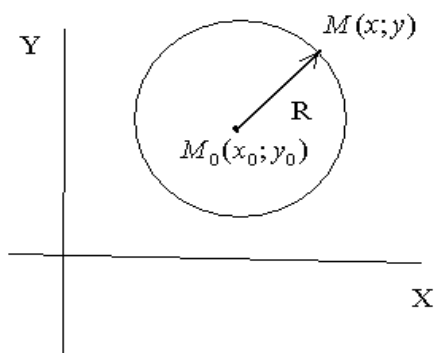
1. для любой точки M_1 с координатами $M_1(x_1;y_1)$, лежащей на линии L выполнено $F(x_1;y_1)=0$, то есть ее координаты удовлетворяют уравнению линии;
2. любая точка $M_2(x_2;y_2)$, координаты которой удовлетворяют уравнению $F(x_2;y_2)=0$, лежит на линии.

Пример 1. Уравнение биссектрисы первого и третьего координатного угла $y=x$, или $y-x=0$.

Будет ли уравнение $y^2-x^2=0$ уравнением данной прямой?

Решение. Очевидно, что любая точка прямой $y-x=0$ будет удовлетворять и уравнению $y^2-x^2=0$. С другой стороны, точка $M(-1;1)$ удовлетворяет уравнению $y^2-x^2=0$, но не лежит на прямой $y-x=0$. Следовательно, уравнение $y^2-x^2=0$ не будет уравнением исследуемой линии.

Уравнение окружности.



Пусть окружность имеет радиус R , а ее центр находится в точке $M_0(x_0; y_0)$.

Точка $M(x; y)$ лежит на окружности тогда и только тогда, когда модуль вектора $\vec{M_0M}$ равен

R , то есть $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R$. А последнее равенство выполнено тогда и только тогда, когда

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

(1)

Уравнение (1) и является искомым уравнением окружности.

2. Уравнение прямой, проходящей через данную точку, перпендикулярно данному вектору.

Пусть прямая проходит через т. $M_0(x_0; y_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{N} = \{A; B\}$.

Точка $M(x; y)$ лежит на прямой тогда и только

тогда, когда векторы $\vec{N} = \{A; B\}$ и

$\vec{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0\}$ перпендикулярны.

Векторы $\vec{N} = \{A; B\}$ и $\vec{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0\}$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю, то есть

$(\vec{N} \cdot \vec{M_0M}) = 0$. Я позволю себе роскошь

надеяться, что вы еще не успели забыть

формулу вычисления скалярного произведения, и тогда уравнение искомой прямой записываем в виде

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \quad (2)$$

Пример 2. Найти уравнение прямой, проходящей через середину отрезка АВ перпендикулярно этому отрезку если координаты точек соответственно равны $A(1;6)$, $B(5;4)$.

Решение. Чтобы найти уравнение прямой, надо знать точку, через которую эта прямая проходит, и вектор перпендикулярный этой прямой. Вектором,

перпендикулярным этой прямой, будет вектор $\vec{N} = \vec{AB} = \{5 - 1; 4 - 6\} = \{4; -2\}$,

поскольку, по условию задачи, прямая перпендикулярна отрезку АВ. Точку $M_0(x_0; y_0)$ определим из условия, что прямая проходит через середину АВ.

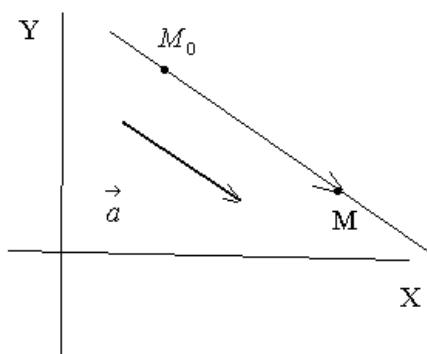
Имеем $x_0 = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1 + 5}{2} = 3$, $y_0 = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{6 + 4}{2} = 5$. Таким образом $M_0(3;5)$ и

уравнение примет вид $4(x - 3) + (-2)(y - 5) = 0$; $4x - 2y - 2 = 0$; $2x - y - 1 = 0$.

Проходит ли эта прямая через точку $M(7;3)$. Имеем $2 \cdot 7 - 3 - 1 = 10 \neq 0$, значит, эта прямая не проходит через указанную точку.

3. Уравнение прямой, проходящей через данную точку, параллельно данному вектору, параметрическое уравнение прямой

Пусть прямая проходит через точку $M_0(x_0; y_0)$ параллельно вектору $\vec{a} = \{l; m\}$.



Точка $M(x; y)$ лежит на прямой тогда и только

тогда, когда векторы $\vec{a} = \{l; m\}$ и

$\vec{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0\}$ коллинеарны. Векторы

$\vec{a} = \{l; m\}$ и $\vec{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0\}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны, то есть

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} \quad (3)$$

Это искомое уравнение прямой. Представим его в виде

$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = t$, где t принимает любые значения $-\infty < t < \infty$, или

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt \end{cases}, \text{ где } -\infty < t < \infty \quad (4)$$

Уравнение (4) называется **параметрическим уравнением прямой**.

4. Уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$.

Мы можем построить уравнение прямой, если знаем точку и параллельный или перпендикулярный ей вектор. Но если две точки лежат на прямой, то вектор, их соединяющий будет параллелен этой прямой. Поэтому воспользуемся

уравнением (3), взяв в качестве вектора $\vec{a} = \{l; m\}$ вектор $\vec{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$.

Получаем

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad (5)$$

5. Общее уравнение прямой

Определение 1. Общим уравнением линии первого порядка на плоскости называется уравнение вида $Ax + By + C = 0$, где $A^2 + B^2 \neq 0$.

Теорема. Всякая прямая на плоскости может быть задана в виде уравнения линии первого порядка, и всякое уравнение линии первого порядка является уравнением некоторой прямой на плоскости.

Доказательство. 1) На всякой прямой можно указать некоторую точку

$M_0(x_0; y_0)$ и перпендикулярный ей вектор $\vec{N} = \{A; B\}$. Согласно (2) уравнение

такой прямой имеет вид $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$. Обозначим $C = -Ax_0 - By_0$. Тогда уравнение примет искомый вид $Ax + By + C = 0$.

2) Пусть имеется уравнение $Ax + By + C = 0$, где $A^2 + B^2 \neq 0$ и $A \neq 0$.

Перепишем уравнение в виде $Ax + By + C = 0$; $A(x + C/A) + By = 0$;

$A[x - (-C/A)] + B(y - 0) = 0$. Рассмотрим на плоскости точку $M_0(x_0; y_0)$, где $x_0 = -C/A$, $y_0 = 0$. Тогда уравнение имеет вид $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ и является уравнением прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{N} = \{A; B\}$.

Следствие. Если имеется уравнение прямой вида $Ax + By + C = 0$, то вектор $\vec{N} = \{A; B\}$ перпендикулярен данной прямой.

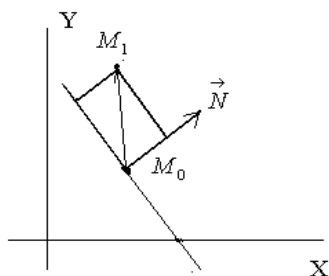
Уравнение вида $Ax + By + C = 0$ называется общим уравнением прямой на плоскости.

6. Расстояние от точки до прямой.

Пусть имеется прямая $Ax + By + C = 0$ и точка $M_1(x_1; y_1)$. Требуется определить расстояние от указанной точки до прямой.

Рассмотрим произвольную точку $M_0(x_0; y_0)$ на прямой. Имеем

$Ax_0 + By_0 + C = 0$. Расстояние d от точки M_1 до прямой равно модулю проекции



вектора $\vec{M_0M_1} = \{x_1 - x_0; y_1 - y_0\}$ на вектор $\vec{N} = \{A; B\}$, перпендикулярный данной прямой. Имеем

$$d = \left| \text{пр}_{\vec{N}} \vec{M_0M_1} \right| = \left| \frac{(\vec{N} \cdot \vec{M_0M_1})}{|\vec{N}|} \right| = \left| \frac{A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0)}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$$

преобразуя, получаем

$$d = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + (-Ax_0 - By_0)}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right| = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|.$$

7. Угол между прямыми, условия их перпендикулярности и параллельности для общего уравнения прямой

1) Пусть даны две прямые $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Тогда векторы

$\vec{N}_1 = \{A_1; B_1\}$, $\vec{N}_2 = \{A_2; B_2\}$ перпендикулярны первой и второй прямой

соответственно. Угол ψ между прямыми равен углу между векторами

$\vec{N}_1 = \{A_1; B_1\}$, $\vec{N}_2 = \{A_2; B_2\}$. Тогда формула для определения угла имеет вид

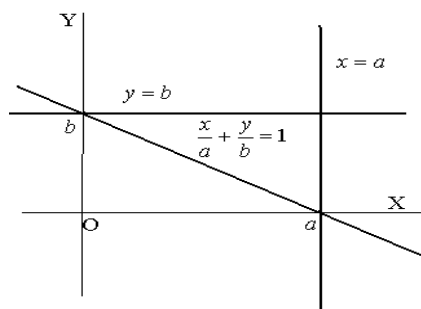
$$\cos \varphi = \frac{\left(\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 \right)}{\left| \vec{N}_1 \right| \cdot \left| \vec{N}_2 \right|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

2) $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$ -- условие перпендикулярности прямых.

3) Прямые параллельны или совпадают тогда и только тогда, когда векторы $\vec{N}_1 = \{A_1; B_1\}$ $\vec{N}_2 = \{A_2; B_2\}$ коллинеарны. При этом условие совпадения прямых имеет вид $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$, а условие отсутствия пересечения записывается в виде

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}.$$

Последние два условия докажите самостоятельно.



8. Исследование общего уравнения прямой $Ax + By + C = 0$

1) Если $C = 0$, то прямая проходит через начало координат.

2) Пусть ни один из коэффициентов не равен нулю:

$$ABC \neq 0. \text{ Уравнение перепишем в виде } Ax + By = -C, \quad \frac{x}{\left(\frac{-C}{A}\right)} + \frac{y}{\left(\frac{-C}{B}\right)} = 1,$$

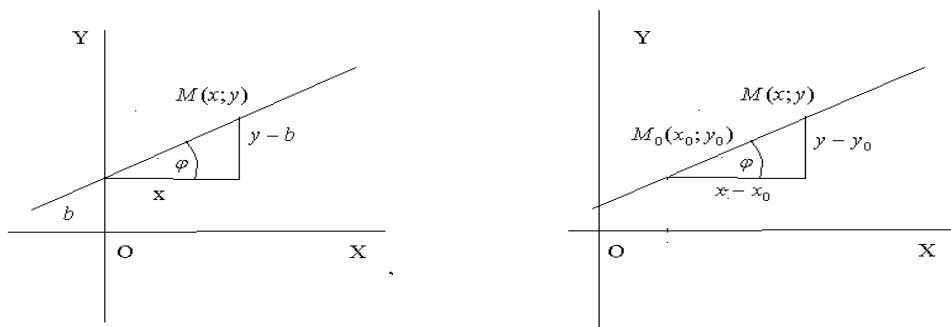
$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, где $a = \left(\frac{-C}{A}\right)$, $b = \left(\frac{-C}{B}\right)$. Выясним смысл параметров a, b . Найдем точки пересечения прямой с осями координат. При $x = 0$ имеем $y = b$, а при $y = 0$ имеем $x = a$. То есть a, b - это отрезки, которые отсекает прямая на координатных осях. Поэтому уравнение $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ называется **уравнением прямой в отрезках**.

3) Если $A = 0$, то $By = -C$, $y = \left(\frac{-C}{B}\right)$, $y = b$. То есть прямая параллельна оси X .

4) Если $B = 0$, то $Ax = -C$, $x = \left(\frac{-C}{A}\right)$, $x = a$. То есть прямая параллельна оси Y .

9. Уравнение прямой, проходящей через данную точку с данным угловым коэффициентом.

Угловым коэффициентом прямой k называется тангенс угла наклона этой прямой к оси X . Пусть прямая отсекает на оси Y отрезок b и имеет угловой коэффициент k . Пусть точка $M(x; y)$ лежит на данной прямой. Тогда $\operatorname{tg} \varphi = k = \frac{y - b}{x}$. И уравнение прямой запишется в виде $y = kx + b$.



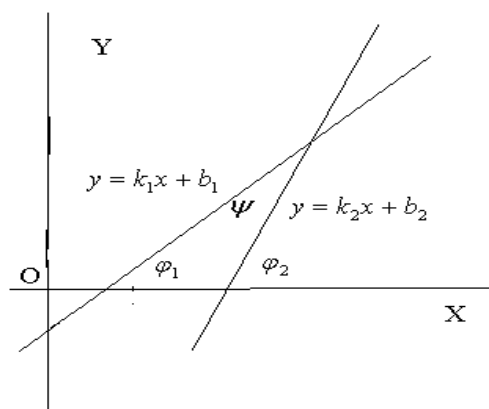
Пусть прямая проходит через точку $M_0(x_0; y_0)$ и имеет угловой коэффициент k . Пусть точка $M(x; y)$ лежит на этой прямой.

Тогда $k = \frac{y - y_0}{x - x_0}$, $y - y_0 = k(x - x_0)$.

Полученное уравнение называется **уравнением прямой, проходящей через данную точку с заданным угловым коэффициентом**.

10. Угол между прямыми, условия их перпендикулярности и параллельности для уравнения прямой с угловым коэффициентом

Пусть даны две прямые $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$. Обозначим ψ - угол между



ними. Пусть φ_1 , φ_2 углы наклона к оси X соответствующих прямых. Тогда

$$\psi = \varphi_2 - \varphi_1, \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{\operatorname{tg} \varphi_2 - \operatorname{tg} \varphi_1}{1 + \operatorname{tg} \varphi_2 \operatorname{tg} \varphi_1} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1}.$$

$k_2 = k_1$ - условие параллельности прямых;

$1 + k_2 k_1 = 0$, $k_2 k_1 = -1$, $k_2 = -\frac{1}{k_1}$ - условие их перпендикулярности.

11. Задачи

Задача 1. Вершины треугольника ABC имеют координаты: $A(4;2)$, $B(10;10)$, $C(20;14)$. Найти:

а) уравнение и длину медианы, проведенной из вершины A ;

б) уравнение и длину высоты, проведенной из вершины A ;

в) уравнение биссектрисы, проведенной из вершины A ;

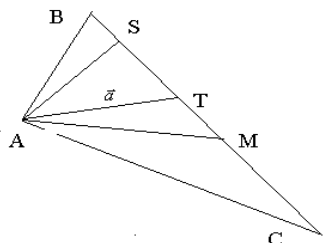
Решение. Определим уравнение медианы AM . Точка $M(x_M; y_M)$ середина отрезка

BC . Тогда $x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = 15$, $y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = 17$.

Следовательно, точка M имеет координаты $M(15;17)$.

Уравнение медианы на языке аналитической геометрии это уравнение прямой, проходящей через точку $A(4;2)$

параллельно вектору $\vec{AM} = \{11;15\}$. Тогда уравнение медианы имеет вид $\frac{x-4}{11} = \frac{y-2}{15}$.



Длина медианы $AM = \left| \vec{AM} \right| = \sqrt{121 + 225} = \sqrt{346}$.

Уравнение высоты AS - это уравнение прямой, проходящей через точку $A(4;2)$ перпендикулярно вектору $\vec{BC} = \{10;4\}$. Тогда уравнение высоты имеет вид $10(x-4) + 4(y-2) = 0$, $5x + 2y - 24 = 0$.

Длина высоты - это расстояние от точки $A(4;2)$ до прямой BC . Данная прямая проходит через точку $B(10;10)$ параллельно вектору $\vec{BC} = \{10;4\}$. Ее уравнение имеет вид $\frac{x-10}{10} = \frac{y-10}{4}$, $2x - 5y + 30 = 0$. Расстояние AS от точки $A(4;2)$ до прямой BC , следовательно, равно $AS = \frac{|2 \cdot 4 - 5 \cdot 2 + 30|}{\sqrt{2^2 + (-5)^2}} = \frac{28}{\sqrt{29}}$.

Для определения уравнения биссектрисы найдем вектор $\vec{a}$ параллельный этой прямой. Для этого воспользуемся свойством диагонали ромба. Если от точки A отложить единичные векторы одинаково направленные с векторами $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$, то вектор, равный их сумме, будет параллелен биссектрисе. Тогда имеем $\vec{a} = \frac{1}{\left| \vec{AB} \right|}$

$$\vec{AB} + \frac{1}{\left| \vec{AC} \right|} \vec{AC}. \quad \vec{AB} = \{6;8\}, \quad \left| \vec{AB} \right| = \sqrt{36 + 64} = 10, \quad \vec{AC} = \{16;12\}, \quad \left| \vec{AC} \right| = \sqrt{256 + 144} = 20.$$

Тогда $\vec{a} = \frac{1}{10} \{6;8\} + \frac{1}{20} \{16;12\} = \left\{ \frac{7}{5}; \frac{7}{5} \right\}$. В качестве направляющего вектора искомой прямой может служить вектор $\vec{a}_1 = \{1;1\}$, коллинеарный данному. Тогда уравнение искомой прямой имеет вид $\frac{x-4}{1} = \frac{y-2}{1}$ или $x - y - 2 = 0$.

Задача 2. Река протекает по прямой линии, проходящей через точки $A(4;3)$ и $B(20;11)$. В точке $C(4;8)$ живет Красная Шапочка, а в точке $D(13;20)$ ее бабушка. Каждое утро Красная Шапочка берет пустое ведро из дома, идет на реку, черпает воду и относит ее бабушке. Найти самую короткую дорогу для Красной Шапочки.
Решение. Найдем точку E , симметричную бабушке, относительно реки.

Для этого сначала найдем уравнение прямой, по которой течет река. Это уравнение можно рассматривать, как уравнение прямой, проходящей через точку $A(4;3)$ параллельно вектору $\vec{AB} = \{20 - 4; 11 - 3\} = \{16;8\}$. Тогда уравнение прямой AB имеет вид $\frac{x-4}{16} = \frac{y-3}{8}$; $8(x-4) = 16(y-3)$; $x - 2y + 2 = 0$.

Далее найдем уравнение прямой DE , проходящей через точку D перпендикулярно AB . Его можно рассматривать, как уравнение прямой, проходящей через точку D , перпендикулярно вектору $\vec{AB} = \{16;8\}$. Имеем $16(x-13) + 8(y-20) = 0$; $2x + y - 46 = 0$.

Теперь найдем точку S - проекцию точки D на прямую AB , как пересечение прямых AB и DE . Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = -2, \\ 2x + y = 46 \end{cases} \cdot \Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5, \Delta_x = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 46 & 1 \end{vmatrix} = 90, \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 46 \end{vmatrix} = 50, x = 18, y = 10$$

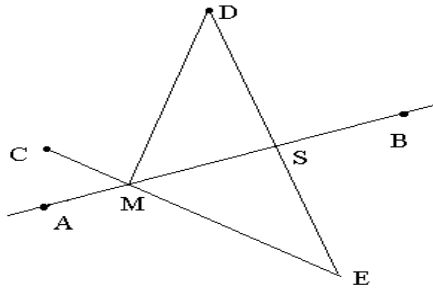
Следовательно, точка S имеет координаты S(18;10). Поскольку S середина отрезка DE, то $x_S = \frac{x_D + x_E}{2}$, $x_E = 2x_S - x_D = 2 \cdot 18 - 13 = 23$.

Аналогично $y_E = 2y_S - y_D = 2 \cdot 10 - 20 = 0$.

Следовательно, точка E имеет координаты E(23;0).

Найдем уравнение прямой CE, зная координаты двух точек этой прямой

$$\frac{x - x_C}{x_E - x_C} = \frac{y - y_C}{y_E - y_C}; \frac{x - 4}{23 - 4} = \frac{y - 8}{0 - 8}; 8x + 19y - 184 = 0.$$



Точку M найдем как пересечение прямых AB и CE.

Имеем систему уравнений
$$\begin{cases} x - 2y = -2, \\ 8x + 19y = 184 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 8 & 19 \end{vmatrix} = 35, \Delta_x = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 184 & 19 \end{vmatrix} = 330, \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 8 & 184 \end{vmatrix} = 200, x = \frac{66}{7}, y = \frac{40}{7}$$

Следовательно, точка M имеет координаты $M\left(\frac{66}{7}; \frac{40}{7}\right)$.

Конец лекции.

Лекция 12. Плоскости в пространстве

1. Уравнении поверхности в пространстве. Уравнение сферы.
2. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку, перпендикулярно данному вектору.
3. Уравнение плоскости, проходящей через три точки.
4. Общее уравнение плоскости.
5. Расстояния от точки до плоскости, заданной общим уравнением.
6. Угол между плоскостями, условие их перпендикулярности и параллельности.

Литература

- 1) Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. М.Физматлит, 2005., гл.11, 12. Л-2. &&9,10
- 2) И.П. Натансон. Краткий курс высшей математики.,М.,Лань, 1999, гл.. 9, &1-2.

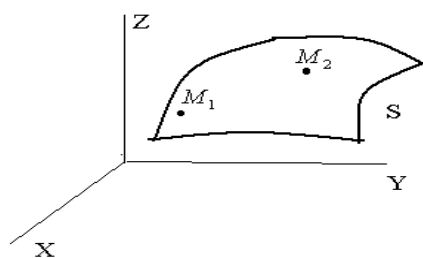
1. Уравнении поверхности в пространстве. Уравнение сферы.

Пусть в пространстве (X,Y,Z) задана некоторая поверхность S .

Определение 1. Уравнение $\Phi(x;y;z) = 0$ называется уравнением поверхности S , если выполнены два условия: 1) для любой точки M_1 с координатами $M_1(x_1;y_1;z_1)$, лежащей на поверхности, выполнено $\Phi(x_1;y_1;z_1) = 0$, то есть ее координаты удовлетворяют уравнению поверхности; 2) любая точка $M_2(x_2;y_2;z_2)$, координаты которой удовлетворяют уравнению $\Phi(x_2;y_2;z_2) = 0$, лежит на линии.

Уравнение сферы.

Пусть сфера имеет радиус R , а ее центр находится в точке $M_0(x_0;y_0;z_0)$. Точка



$M(x;y;z)$ лежит на сфере только тогда, когда

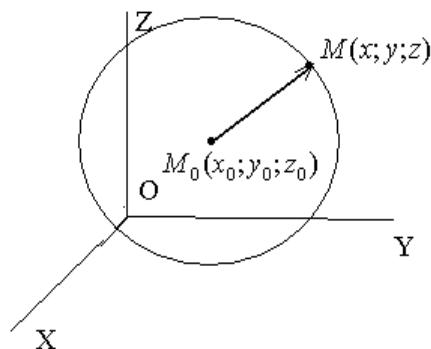
модуль вектора $\vec{M_0M}$ равен R , то есть

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} = R.$$

А последнее равенство выполнено только тогда, когда

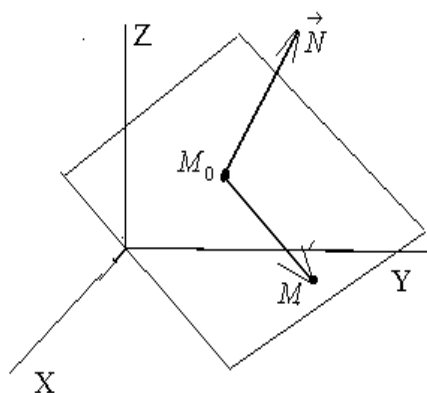
$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2 \quad (1)$$

Уравнение (1) и является искомым уравнением сферы.



2. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку, перпендикулярно данному вектору

Пусть плоскость проходит через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{N} = \{A; B; C\}$. Точка $M(x; y; z)$ лежит на плоскости тогда и только тогда, когда



векторы

$$\vec{N} = \{A; B; C\} \text{ и } \vec{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}$$

перпендикулярны. Векторы $\vec{N} = \{A; B; C\}$ и

$\vec{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}$ перпендикулярны только тогда, когда их скалярное произведение равно 0, то есть $\left(\vec{N} \cdot \vec{M_0M} \right) = 0$. Тогда уравнение

плоскости записываем в виде

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad (2)$$

Пример 1. Найти уравнение плоскости, проходящей через середину отрезка АВ перпендикулярно этому отрезку если координаты точек соответственно равны $A(1;6;9)$, $B(5;4;7)$.

Решение. Чтобы найти уравнение плоскости мы должны знать точку, через которую эта плоскость проходит, и вектор перпендикулярный этой плоскости.

Это будет вектор $\vec{N} = \vec{AB} = \{5 - 1; 4 - 6; 7 - 9\} = \{4; -2; -2\}$, поскольку, по условию задачи, плоскость перпендикулярна отрезку АВ. Точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ определим из условия, что плоскость проходит через середину АВ. Имеем

$x_0 = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1 + 5}{2} = 3, y_0 = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{6 + 4}{2} = 5, z_0 = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{9 + 7}{2} = 8$. Таким образом $M_0(3;5;8)$ и уравнение примет вид

$$4(x - 3) + (-2)(y - 5) + (-2)(z - 8) = 0; \quad 4x - 2y - 2z + 14 = 0; \quad 2x - y - z + 7 = 0$$

Проходит ли эта плоскость через точку $M(7;3;0)$? Имеем $2 \cdot 7 - 3 - 0 + 7 = 18 \neq 0$, значит, эта плоскость не проходит через указанную точку.

Пример 2. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(3;1;2)$,

параллельно векторам $\vec{a} = \{1; -2; 2\}$, $\vec{b} = \{1; 3; 1\}$.

Решение. Для этого мы должны знать точку и вектор, перпендикулярный этой плоскости. Точка у нас имеется, а вектора нет. Одно из свойств векторного произведения гласит, что векторное произведение двух векторов направлено перпендикулярно плоскости, в которой эти векторы расположены. Значит, в

качестве вектора $\vec{N}$ может быть взято векторное произведение векторов

$$\vec{a} = \{1; -2; 2\}, \quad \vec{b} = \{1; 3; 1\}.$$

$$\text{Имеем } \vec{N} = \left[\vec{a} \times \vec{b} \right] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}(-8) - \vec{j}(-1) + \vec{k}5 = \{-8; 1; 5\}.$$

Уравнение плоскости примет вид

$$-8(x-3) + 1(y-1) + 5(z-2) = 0; \quad -8x + y + 5z + 13 = 0$$

Пример 3. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки

$A(3;1;2), B(1;4;5), C(2;1;5)$.

Решение. Как видим в наличии целых три точки и ни одного вектора. Но если вспомнить, что вектор, соединяющий две точки параллелен плоскости, в которой эти точки лежат, то задача сводится к предыдущей. Следовательно плоскости

параллельны вектор $\vec{AB} = \{1-3; 4-1; 5-2\} = \{-2; 3; 3\}$ и вектор

$$\vec{AC} = \{2-3; 1-1; 5-2\} = \{-1; 0; 3\}.$$

$$\text{Тогда } \vec{N} = \left[\vec{AB} \times \vec{AC} \right] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i}(9) - \vec{j}(-3) + \vec{k}3 = \{9; 3; 3\}.$$

Уравнение примет вид $9(x-3) + 3(y-1) + 3(z-2) = 0; \quad 3x + y + z - 12 = 0.$

3. Уравнение плоскости, проходящей через три точки

Нетрудно получить общую формулу $M_1(x_1; y_1; z_1), M_2(x_2; y_2; z_2), M_3(x_3; y_3; z_3)$.

Точка $M(x; y; z)$ лежит в данной плоскости тогда и только тогда, когда векторы

$$\vec{M_1M} = \{x-x_1; y-y_1; z-z_1\}, \vec{M_1M_2} = \{x_2-x_1; y_2-y_1; z_2-z_1\},$$

$\vec{M_1M_3} = \{x_3-x_1; y_3-y_1; z_3-z_1\}$ являются компланарными, а значит, их смешанное произведение равно нулю. Тогда получаем

$$\left(\vec{M_1M} \cdot \vec{M_1M_2} \cdot \vec{M_1M_3} \right) = 0 \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (3)$$

4. Общее уравнение плоскости

Определение 1. Общим уравнением поверхности первого порядка на плоскости называется уравнение вида $Ax + By + Cz + D = 0$, где $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$,

Которое также называется общим уравнением плоскости.

Теорема. Всякая плоскость может быть задана в виде уравнения поверхности первого порядка, и всякое уравнение поверхности первого порядка является уравнением некоторой плоскости.

Доказательство. 1) На всякой плоскости можно указать некоторую точку

$M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярный ей вектор $\vec{N} = \{A; B; C\}$. Тогда, согласно (2), уравнение такой плоскости имеет вид $A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$.

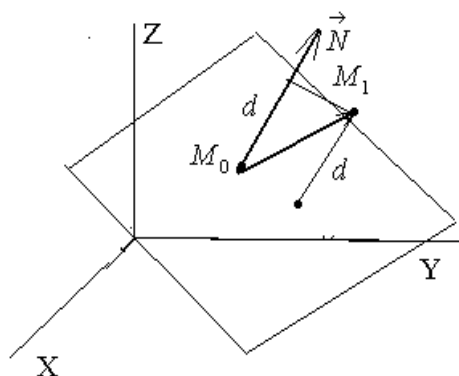
Обозначим $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$. Тогда уравнение примет вид $Ax + By + Cz + D = 0$.

2) Пусть имеется уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$, где $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$. Будем считать для определенности $A \neq 0$. Перепишем уравнение в виде $Ax + By + Cz + D = 0$; $A(x + D/A) + By + Cz = 0$; $A[x - (-D/A)] + B(y - 0) + C(z - 0) = 0$. Рассмотрим точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$, где $x_0 = -D/A$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$. Тогда полученное уравнение имеет вид $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$, и является уравнением плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{N} = \{A; B; C\}$.

Следствие. Если имеется уравнение плоскости вида $Ax + By + Cz + D = 0$, то вектор $\vec{N} = \{A; B; C\}$ перпендикулярен данной плоскости.

5. Расстояния от точки до плоскости, заданной общим уравнением

Пусть имеется плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$ и точка $M_1(x_1; y_1; z_1)$. Требуется определить расстояние от указанной точки до плоскости.



Рассмотрим произвольную точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ на плоскости. Имеем $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$. Расстояние d от точки M_1 до плоскости равно модулю проекции вектора $\vec{M_0M_1} = \{x_1 - x_0; y_1 - y_0; z_1 - z_0\}$ на вектор $\vec{N} = \{A; B; C\}$, перпендикулярный данной плоскости. Имеем

$$d = \left| np_{\vec{N}} \vec{M_0M_1} \right| = \left| \frac{(\vec{N} \cdot \vec{M_0M_1})}{|\vec{N}|} \right| = \left| \frac{A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|, \text{ или}$$

$$d = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + (-Ax_0 - By_0 - Cz_0)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right| = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|.$$

6. Угол между плоскостями, условие их перпендикулярности и параллельности.

1) Пусть даны две плоскости, заданные общими уравнениями

$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Тогда векторы $\vec{N}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}$ $\vec{N}_2 = \{A_2; B_2; C_2\}$ перпендикулярны первой и второй прямой соответственно.

Угол ψ между прямыми равен углу между векторами $\vec{N}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}$
 $\vec{N}_2 = \{A_2; B_2; C_2\}$. Тогда формула для определения угла имеет вид

$$\cos\psi = \frac{\left(\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 \right)}{\left| \vec{N}_1 \right| \cdot \left| \vec{N}_2 \right|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

2) Условие перпендикулярности плоскостей имеет вид

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0.$$

3) Плоскости параллельны или совпадают только тогда, когда векторы

$\vec{N}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}$ $\vec{N}_2 = \{A_2; B_2; C_2\}$ коллинеарны. При этом условие совпадения плоскостей имеет вид $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$, а условие отсутствия пересечения

записывается в виде $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$ (доказать самостоятельно).

Конец лекции.

Лекция 13. Линии и плоскости в пространстве

1. Исследование общего уравнения плоскости. Уравнение плоскости в отрезках.
2. Канонические и параметрические уравнения прямой в пространстве.
3. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости.
4. Примеры.

Литература

- 1) Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. М.Физматлит, 2005., гл.11, 12. Л-2. &&9,10
- 2) И.П. Натансон. Краткий курс высшей математики.,М.,Лань, 1999, гл.. 9, &1-2.

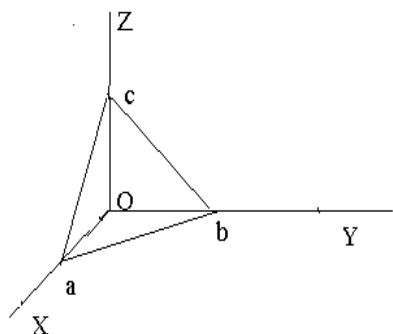
1. Исследование общего уравнения плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$

- 1) Если $C = 0$, то плоскость проходит через начало координат.
- 2) Пусть ни один из коэффициентов не равен нулю: $ABCD \neq 0$. Уравнение

перепишем в виде $Ax + By + Cz = -D$, $\frac{x}{\left(-\frac{D}{A}\right)} + \frac{y}{\left(-\frac{D}{B}\right)} + \frac{z}{\left(-\frac{D}{C}\right)} = 1$, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$,

где $a = \left(-\frac{D}{A}\right)$, $b = \left(-\frac{D}{B}\right)$, $c = \left(-\frac{D}{C}\right)$. Выясним смысл параметров a, b . Найдем

точки пересечения плоскости с осями координат. При $x = 0, y = 0$ имеем $z = c$, а при $y = 0, z = 0$ имеем $x = a$, при $x = 0, z = 0$ имеем $y = b$ То есть a, b, c - это отрезки, которые отсекает плоскость на



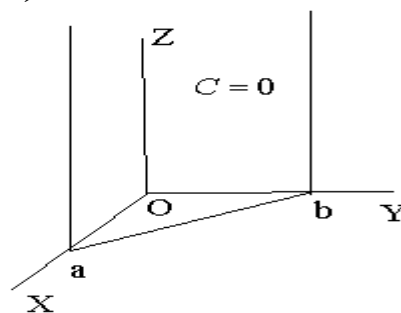
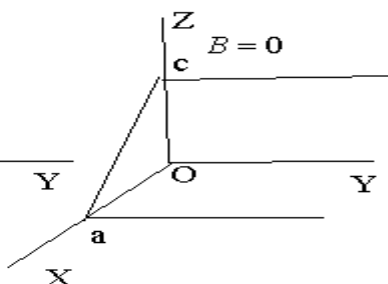
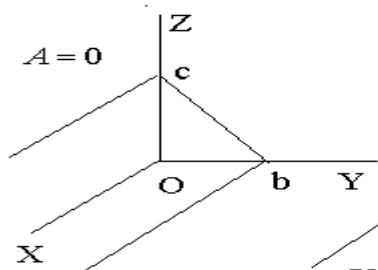
координатных осей. Поэтому уравнение $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

называется **уравнением плоскости в отрезках**.

- 3) Если $A = 0$ имеем $By + Cz = -D$,

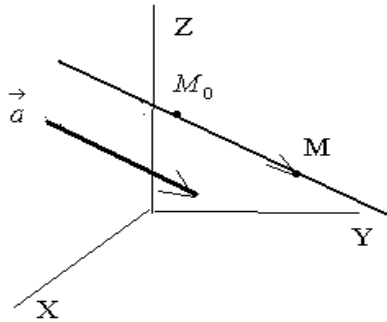
$$\frac{y}{\left(-\frac{D}{B}\right)} + \frac{z}{\left(-\frac{D}{C}\right)} = 1, \quad \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \quad \text{где}$$

$b = \left(-\frac{D}{B}\right)$, $c = \left(-\frac{D}{C}\right)$ - лоскость параллельна оси X .



4) Если $B=0$ имеем $Ax + Cz = -D$, $\frac{x}{\left(-\frac{D}{A}\right)} + \frac{z}{\left(-\frac{D}{C}\right)} = 1$, $\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 1$,

где $a = \left(-\frac{D}{A}\right)$, $c = \left(-\frac{D}{C}\right)$. То есть плоскость будет параллельна оси Y .



5) Если $C=0$ имеем $Ax + By = -D$,

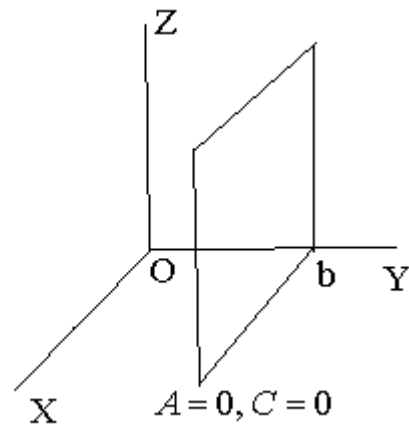
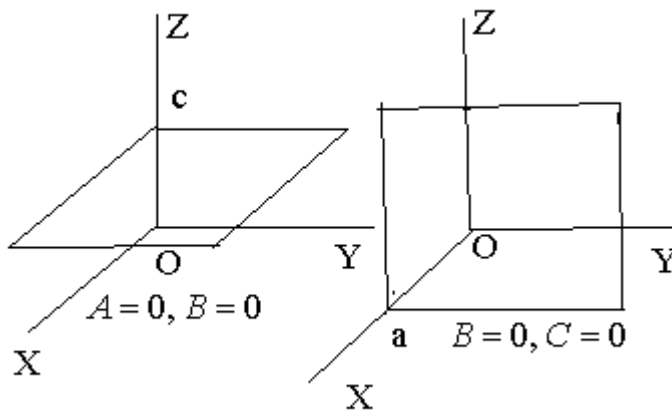
$$\frac{x}{\left(-\frac{D}{A}\right)} + \frac{y}{\left(-\frac{D}{B}\right)} = 1, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

где $a = \left(-\frac{D}{A}\right)$, $b = \left(-\frac{D}{B}\right)$. То есть плоскость будет параллельна оси Z .

6) Если $A=0, B=0$, то $Cz = -D$, $z = c$, где

$c = \left(-\frac{D}{C}\right)$ и плоскость будет перпендикулярна оси Z .

7) Если $B=0, C=0$, то $Ax = -D$, $x = a$, где $a = \left(-\frac{D}{A}\right)$ и плоскость будет перпендикулярна оси X .



8) Если $A=0, C=0$, то $By = -D$, $y = b$, где $b = \left(-\frac{D}{B}\right)$. То есть плоскость будет перпендикулярна оси Y .

2. Канонические и параметрические уравнения прямой в пространстве.

Пусть прямая проходит через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ параллельно вектору

$$\vec{a} = \{l; m; n\}.$$

Точка $M(x; y; z)$ лежит на прямой только тогда, когда векторы $\vec{a} = \{l; m; n\}$ и

$\vec{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}$ коллинеарны. Векторы $\vec{a} = \{l; m; n\}$ и

$\vec{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}$ коллинеарны только тогда, когда их координаты пропорциональны, то есть

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} \quad (4)$$

Полученное уравнение и является уравнением искомой прямой и называется **каноническим уравнением прямой в пространстве**.

Уравнение (4) представим в виде

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} = t, \text{ где } t \text{ принимает любые значения } -\infty < t < \infty.$$

Следовательно, можем записать

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt \end{cases}, \text{ где } -\infty < t < \infty \quad (5)$$

Уравнение (4) называется **параметрическим уравнением прямой**.

Уравнение прямой, проходящей через две данные точки

Даны точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$. Мы можем построить уравнение прямой, если знаем точку и параллельный ей вектор. Если две точки лежат на прямой, то вектор, их соединяющий будет параллелен этой прямой. Поэтому воспользуемся уравнением (4), взяв в качестве вектора $\vec{a} = \{l; m; n\}$ вектор

$\vec{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$. Получаем

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad (6)$$

Уравнение (6) называется **каноническим уравнением прямой, проходящей через две данные точки**.

3. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости.

Имеется уравнение плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ и уравнение прямой

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}. \text{ Вектор } \vec{N} = \{A; B; C\} \text{ перпендикулярен данной}$$

плоскости, а вектор $\vec{a} = \{l; m; n\}$ параллелен данной прямой.

Прямая перпендикулярна плоскости только тогда, когда векторы $\vec{a} = \{l; m; n\}$ и $\vec{N} = \{A; B; C\}$ коллинеарны. Следовательно, условие перпендикулярности прямой

и плоскости имеет вид $\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}$.

Прямая параллельна или лежит в плоскости тогда и только тогда, когда векторы $\vec{a} = \{l; m; n\}$ и $\vec{N} = \{A; B; C\}$ перпендикулярны. Соответствующее условие означает, что их скалярное произведение равно нулю. Имеем $(\vec{N} \vec{a}) = 0, Al + Bm + Cn = 0$.

4. Примеры

Пример 4. Найти точку В, симметричную точке А (3,5,9), относительно плоскости, проходящей через точки $M_1(2;2;2)$, $M_2(1;2;3)$, $M_3(6;0;0)$.

Решение. Найдем уравнение плоскости. Векторы

$\vec{M_1M_2} = \{1-2; 2-2; 3-2\} = \{-1; 0; 1\}$ и $\vec{M_1M_3} = \{6-2; 0-2; 0-2\} = \{4; -2; -2\}$ будут параллельны данной плоскости. Следовательно, в качестве вектора, перпендикулярного плоскости, можно взять вектор

$$\vec{N} = [\vec{M_1M_2} \times \vec{M_1M_3}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i}(2) - \vec{j}(-2) + \vec{k}(2) = \{2; 2; 2\}.$$

Уравнение примет вид $2(x-3) + 2(y-1) + 2(z-2) = 0; \quad x + y + z - 6 = 0$.

Теперь найдем уравнение прямой, проходящей через точку А, перпендикулярно плоскости. В качестве вектора $\vec{a} = \{l; m; n\}$, параллельного данной прямой, можно взять вектор $\vec{N} = \{2; 2; 2\}$. Тогда параметрическое уравнение прямой имеет вид

$$\begin{cases} x = 3 + 2t, \\ y = 5 + 2t, \\ z = 9 + 2t \end{cases} \quad \text{Далее найдем точку S - проекцию точки А на плоскость, как}$$

пересечение прямой $\begin{cases} x = 3 + 2t, \\ y = 5 + 2t, \\ z = 9 + 2t \end{cases}$ и плоскости $x + y + z - 6 = 0$. Фактически мы



имеем систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными.

Подставляя из первых трех уравнений в последнее, получаем

$$x + y + z - 6 = 0, (3 + 2t) + (5 + 2t) + (9 + 2t) - 6 = 0, 6t = -11, t = -11/6.$$

Тогда точка S имеет координаты $x_s = 3 + 2(-11/6) = -2/3$;

$$y_s = 5 + 2(-11/6) = 4/3; \quad z_s = 9 + 2(-11/6) = 16/3, \quad S(-2/3; 4/3; 16/3).$$

Точка S является серединой отрезка АВ. Значит

$$x_s = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad x_B = 2x_s - x_A = 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) - 3 = -\frac{13}{3}$$

$$y_S = \frac{y_A + y_B}{2}, y_B = 2y_S - y_A = 2 \cdot \left(\frac{4}{3}\right) - 5 = -\frac{7}{3}$$

$$z_S = \frac{z_A + z_B}{2}, z_B = 2z_S - z_A = 2 \cdot \left(\frac{16}{3}\right) - 9 = \frac{5}{3}. \text{ Следовательно } S(-13/3; -7/3; 5/3).$$

Пример 5. Вершины треугольника ABC имеют координаты A(1;2;3), B(3;4;2), C(3;6;7). Найти параметрические уравнения высоты, медианы и биссектрисы, проведенных из вершины A.

Решение . Определим уравнение медианы AM. Точка $M(x_M; y_M; z_M)$ середина отрезка BC. Тогда $x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = 3, y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = 5; z_M = \frac{z_B + z_C}{2} = \frac{9}{2}$. Следовательно, точка M имеет координаты $M(3; 5; 9/2)$. Уравнение медианы на языке аналитической геометрии это уравнение прямой, проходящей через точку A(1;2;3) параллельно вектору $\vec{AM} = \{2; 3; 3/2\}$. Тогда параметрическое уравнение медианы имеет вид

$$\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 2 + 3t, \\ z = 3 + 3/2t \end{cases} . \text{ Уравнение высоты AS - это уравнение прямой, проходящей через}$$

точку A(1;2;3) перпендикулярно вектору $\vec{BC} = \{0; 2; 5\}$, и лежащей в плоскости треугольника ABC. Поскольку прямая лежит в плоскости треугольника ABC, то ее направляющий вектор будет перпендикулярен к вектору

$\vec{N} = [\vec{AB} \times \vec{AC}]$, перпендикулярному плоскости треугольника.

$$\vec{N} = [\vec{AB} \times \vec{AC}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 4 \end{vmatrix} = \vec{i} 12 - \vec{j} 10 + \vec{k} 4 = \{12; -10; 4\}.$$

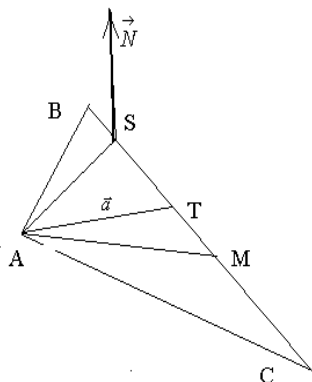
Поскольку вектор $\vec{b}$, направляющий вектор прямой BS перпендикулярен $\vec{BC} = \{0; 2; 5\}$ и $\vec{N} = \{12; -10; 4\}$, то в качестве вектора $\vec{b}$ может быть выбрано их векторное произведение

$$\vec{b} = [\vec{N} \times \vec{BC}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 12 & -10 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \vec{i} (-58) - \vec{j} 60 + \vec{k} 24 = \{-58; -60; 24\}$$

Тогда параметрическое уравнение высоты имеет вид
$$\begin{cases} x = 1 - 58t, \\ y = 2 - 60t, \\ z = 3 + 24t \end{cases}$$

Для определения уравнения биссектрисы найдем вектор $\vec{a}$, параллельный этой

прямой. Для этого воспользуемся свойством диагонали ромба. Если от точки А отложить единичные векторы одинаково направленные с векторами $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$, то вектор, равный их сумме, будет параллелен биссектрисе. Тогда имеем $\vec{a} = \frac{1}{|\vec{AB}|} \vec{AB}$



$$+ \frac{1}{|\vec{AC}|} \vec{AC}. \quad \vec{AB} = \{2; 2; -1\}, \quad |\vec{AB}| = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3, \quad \vec{AC}$$

$$= \{2; 4; 4\}, \quad |\vec{AC}| = \sqrt{4 + 16 + 16} = 6. \quad \text{Тогда} \quad \vec{a} =$$

$$\frac{1}{3} \{2; 2; -1\} + \frac{1}{6} \{2; 4; 4\} = \{1; 4/3; 1/3\}. \quad \text{и уравнение искомой}$$

$$\text{прямой имеет вид} \begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 2 + (4/3)t, \\ z = 3 + (1/3)t \end{cases}$$

Конец лекции.

Лекции 14. Элементарные кривые второго порядка на плоскости

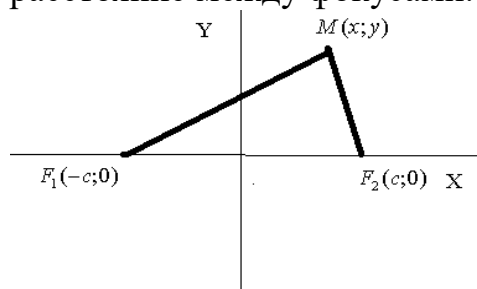
1. Эллипс.
2. Гипербола.
3. Парабола.

Литература

- 1) Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика, Т.1., Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. М., Дрофа, 2004. &24,25,26
- 2) Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. М.Физматлит, 2005. Гл.5-6, гл. 13.
- 3) И.П. Натансон. Краткий курс высшей математики., М., Лань, 1999 гл.. 1, &4-8. гл.9 & 3,4.

1. Эллипс

Определение 1. Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, для которых сумма расстояний до двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами эллипса равна постоянной величине, большей, чем расстояние между фокусами.



Нарисовать эллипс очень просто. Берем нерастяжимую нить, по длине равную сумме расстояний до фокусов. Концы нити закрепляем в фокусах. А далее ведем карандашом вдоль нити, оставляя ее все время натянутой.

Обозначим расстояние между фокусами $2c$.

Сумму расстояний до фокусов $2a$. Ось X направим через фокусы, а ось Y перпендикулярна оси X и делит расстояние между фокусами пополам. Тогда точки F_1 , F_2 - фокусы эллипса имеют координаты. $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$. Пусть

точка $M(x;y)$ - лежит на эллипсе. Тогда $|\vec{F_1M}| + |\vec{F_2M}| = 2a$. Имеем

$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$. Далее проведем цепочку преобразований.

$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ Возводим в квадрат

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$4cx = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$cx - a^2 = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$(cx - a^2)^2 = a^2(x-c)^2 + a^2y^2$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

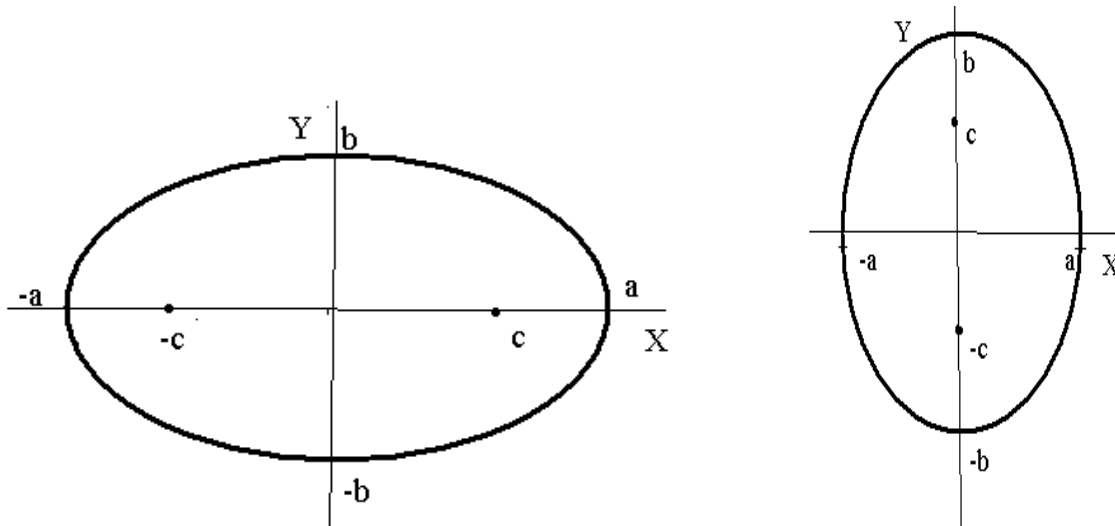
Поскольку по условию $(a^2 - c^2) > 0$, то обозначим $(a^2 - c^2) = b^2$.

Получаем $(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$, $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$;

Получаем каноническое уравнение эллипса. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $b < a$.

Поскольку при выведении уравнения мы пользовались неэквивалентными преобразованиями (возводили в квадрат), то мы могли приобрести лишние точки. Но можно показать, что все точки, удовлетворяющие полученному уравнению, лежат на эллипсе - для них сумма расстояний до фокусов равна $2a$.

Исследуем форму эллипса. Отметим, что эллипс – линия симметричная относительно всех координатных осей. Поэтому ее достаточно исследовать в первой четверти. В первой четверти имеем $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$. Значение x в первой четверти изменяется на отрезке $0 \leq x \leq a$. $y(x) = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ - убывающая функция, при этом $y(0) = b$, $y(a) = 0$. В точке $x = 0$ - касательная параллельна оси OX , в точке $x = a$ касательная параллельна оси OY . Величины a, b называются соответственно большая и малая полуоси эллипса. Фокусы эллипса соответственно имеют координаты $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$, где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$



Иногда приходится иметь дело с уравнением вида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, где $b > a$. Это уравнение так же является уравнением эллипса, но не является каноническим, поскольку фокусы лежат на оси OY . Такой эллипс называется **сопряженным**.

2. Гипербола.

Определение 2. Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, для которых разность расстояний до двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами эллипса равна по абсолютной величине постоянной, меньшей, чем расстояние между фокусами.

По таким траекториям движутся кометы, которые один раз залетают в солнечную систему.

Обозначим расстояние между фокусами $2c$. Разность расстояний до фокусов $2a$. Ось X направим через фокусы, а ось Y перпендикулярна оси X и делит расстояние между фокусами пополам. Тогда точки F_1 , F_2 - фокусы гиперболы

имеют координаты. $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$. Пусть точка $M(x;y)$ - лежит на

гиперболе. Тогда $\left| \vec{F_1M} \right| - \left| \vec{F_2M} \right| = \pm 2a$. Имеем

$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$. Далее проведем цепочку преобразований.

$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ Возводим в квадрат

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$4cx = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \quad cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$(cx - a^2)^2 = a^2(x-c)^2 + a^2y^2, \quad (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Поскольку по условию $(a^2 - c^2) < 0$, то обозначим $(a^2 - c^2) = -b^2$.

Получаем $(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$; $-b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2$;

Получаем **каноническое уравнение гиперболы**. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Здесь, как и для эллипса, можно показать, что все точки, удовлетворяющие полученному уравнению, лежат на гиперболе - для них разность расстояний до фокусов равна $\pm 2a$.

Исследуем форму гиперболы. Отметим, что гипербола - линия симметричная относительно всех координатных осей. Поэтому ее достаточно

исследовать в первой четверти. В первой четверти имеем $y = b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$. Значение

x в первой четверти изменяется на отрезке $a \leq x$. $y = b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$ - возрастающая

функция, при этом $y(a) = 0$. В точке $x = a$ касательная параллельна оси OY .

Фокусы гиперболы соответственно имеют координаты $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$, где

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

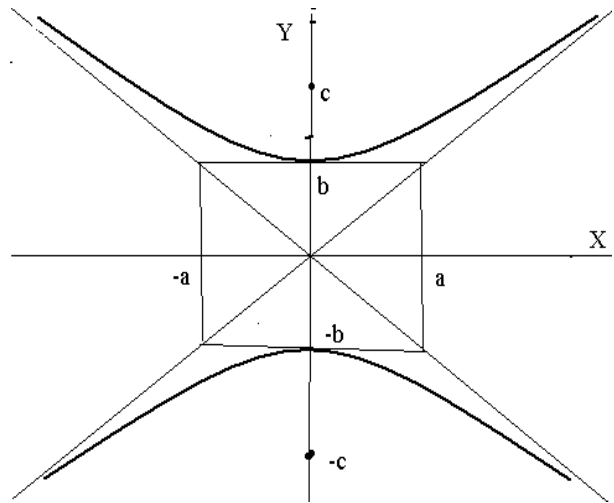
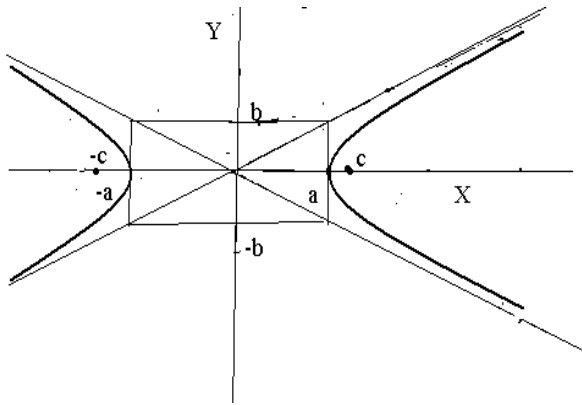
Исследуем характер поведения при $x \rightarrow +\infty$. Найдем уравнения асимптот

$$\text{Имеем } k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{bx}{a} \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}}{x} = \frac{b}{a}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (y - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} - \frac{b}{a}x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} - \frac{b}{a}x \right) \left(b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} + \frac{b}{a}x \right)}{\left(b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} + \frac{b}{a}x \right)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\left(b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} + \frac{b}{a}x \right)} = 0$$

Следовательно, с учетом симметрии относительно осей координат асимптотами являются прямые $y = \pm \frac{b}{a}x$. Эти прямые являются диагоналями прямоугольника, образованного прямыми $x = \pm a, y = \pm b$



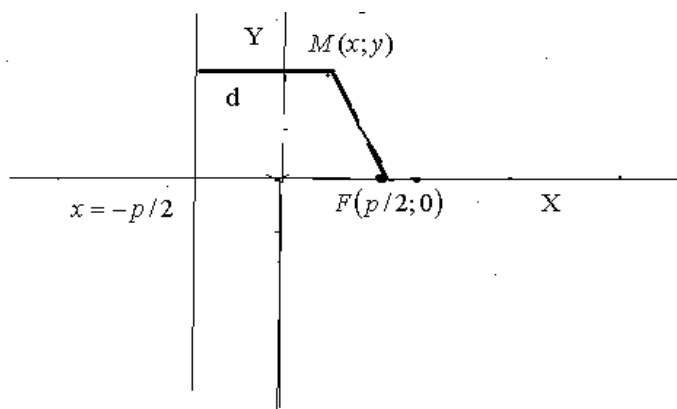
Иногда приходится иметь дело с уравнением вида $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$. Это уравнение так же является уравнением гиперболы, но не является каноническим. Фокусы данной гиперболы лежат на оси Y. Такая гипербола называется **сопряженной**.

3. Парабола

Определение 3. Параболой называется геометрическое место точек плоскости, для которых расстояние до фиксированной точки плоскости, называемой фокусом параболы, равно расстоянию до фиксированной прямой, называемой директрисой параболы.

Выберем следующую систему координат. Пусть ось OX проходит через фокус параболы перпендикулярно директрисе. Ось OY делит отрезок между фокусом и директрисой на две равные части. При этом директриса лежит слева от оси OY, фокус справа. Расстояние между фокусом и директрисой обозначим p . Тогда фокус F имеет координаты $F(p/2; 0)$. Уравнение директрисы имеет вид

$x = -p/2$. Пусть точка $M(x; y)$ лежит на параболе.



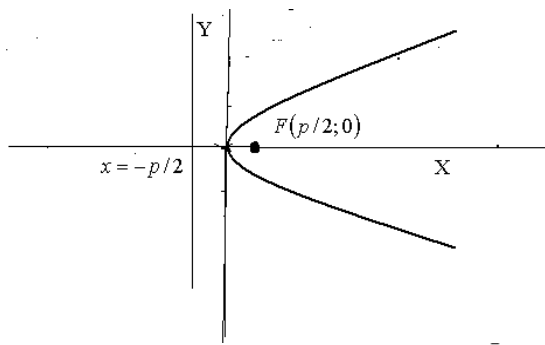
Расстояние d от этой точки до директрисы равно $d = \left| x + \frac{p}{2} \right|$,

Расстояние от точки $M(x; y)$ до фокуса $|\vec{FM}| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2} \right)^2 + y^2}$.

Получаем $\sqrt{\left(x - \frac{p}{2} \right)^2 + y^2} = \left| x + \frac{p}{2} \right|$; $\left(x - \frac{p}{2} \right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2} \right)^2$; $y^2 = 2px$

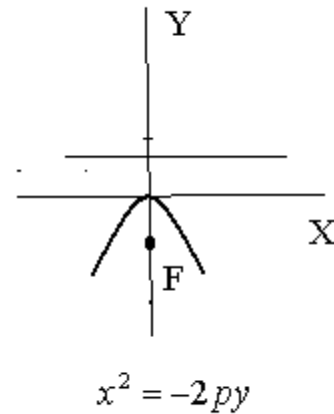
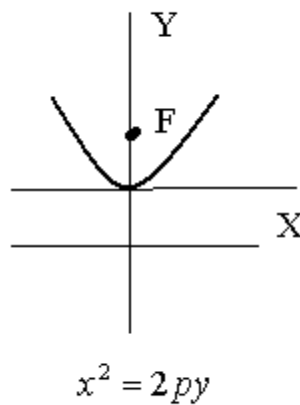
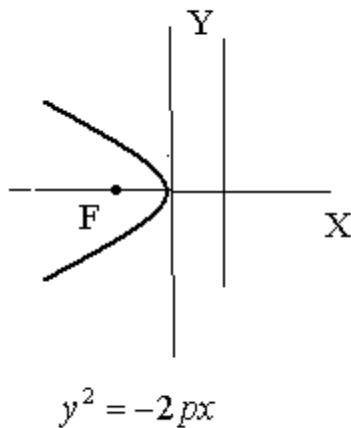
Уравнение $y^2 = 2px$ называется **каноническим уравнением параболы**.

Отметим, что парабола симметрична относительно оси ОУ. В первой



четверти имеем $y = \sqrt{2px}$ возрастающая функция. Точка О с координатами О(0;0) называется вершиной параболы.

Иногда приходится рассматривать уравнения вида $y^2 = -2px$; $x^2 = 2py$; $x^2 = -2py$. Эти уравнения являются уравнениями параболы, но не являются каноническими.



Геометрические свойства линий второго порядка

- 1) Представим себе эллиптическое зеркало. Если источник света находится в одном фокусе, то лучи, отразившись, пересекутся в другом, причём они придут туда за одно и то же время. Если в одном из фокусов устроен взрыв, то волна, отразившись, сфокусируется во втором фокусе. На основе этого свойства была попытка создать аппарат для разрушения камней в организме человека.
- 2) В случае гиперболического зеркала продолжение отраженных лучей, вышедших из одного фокуса, пересечется в другом.
- 3) Для параболического зеркала, лучи, вышедшие из одного фокуса, отразившись, дают параллельный пучок.

Конец лекции.

Лекция 15. Общее уравнение кривой второго порядка на плоскости

1. Поворот и параллельный перенос координатных осей.
2. Непараболический случай
3. Эллиптический случай.
4. Гиперболический случай.
5. Параболический случай.
6. Примеры

Литература

- 2) Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика, Т.1,. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. М., Дрофа, 2004. &24,25,26
1) Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. М.Физматлит, 2005. Гл.5-6, гл. 13.
3) И.П. Натансон. Краткий курс высшей математики.,М.,Лань, 1999 гл.. 1, &4-8. гл.9 & 3,4.

1. Поворот и параллельный перенос координатных осей

Определение 1. Общим уравнением линии второго порядка называется уравнение вида $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, где $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Будем искать такую систему координат, чтобы уравнение приняло наиболее простой вид. Попробуем повернуть систему координат на угол φ . Пусть точка M имеет координаты $M(x; y)$ в исходной и $M(x_1; y_1)$ в повернутой системе.

Тогда имеем $x = x_1 \cos \varphi - y_1 \sin \varphi$, $y = x_1 \sin \varphi + y_1 \cos \varphi$

Подставляя в уравнение линии, получаем

$$A(x_1 \cos \varphi - y_1 \sin \varphi)^2 + 2B(x_1 \cos \varphi - y_1 \sin \varphi)(x_1 \sin \varphi + y_1 \cos \varphi) + \\ + C(x_1 \sin \varphi + y_1 \cos \varphi)^2 + D(x_1 \cos \varphi - y_1 \sin \varphi) + E(x_1 \sin \varphi + y_1 \cos \varphi) + F = 0$$

Данное соотношение перепишем в виде

$$A_1 x_1^2 + 2B_1 x_1 y_1 + C_1 y_1^2 + D_1 x_1 + E_1 y_1 + F_1 = 0, \text{ где}$$

$$A_1 = A \cos^2 \varphi + 2B \cos \varphi \sin \varphi + C \sin^2 \varphi$$

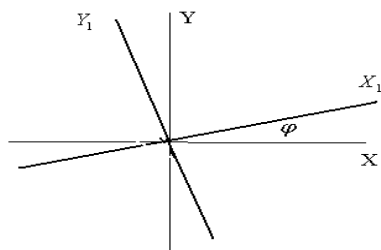
$$2B_1 = -2A \sin \varphi \cos \varphi + 2B \cos^2 \varphi - 2B \sin^2 \varphi + 2C \sin \varphi \cos \varphi$$

$$C_1 = A \sin^2 \varphi - 2B \cos \varphi \sin \varphi + C \cos^2 \varphi$$

$$D_1 = D \cos \varphi + E \sin \varphi$$

$$E_1 = -D \sin \varphi + E \cos \varphi$$

$$F_1 = F.$$



Отметим, что при повороте системы координат, коэффициенты $A - F$ меняются, однако некоторые их комбинации остаются неизменными.

Можно показать, что $A_1 + C_1 = A + C$,

$$A_1 C_1 - B_1^2 = AC - B^2.$$

Такие комбинации называются **инвариантами**.

От выбора системы координат зависит вид уравнений. Выберем угол поворота таким, чтобы коэффициент при произведении $x_1 y_1$ стал равен нулю. Имеем

$$2B_1 = -2A \sin \varphi \cos \varphi + 2B \cos^2 \varphi - 2B \sin^2 \varphi + 2C \sin \varphi \cos \varphi = 0$$

$$2B \cos 2\varphi = (A - C) \sin 2\varphi, \quad \operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2B}{A - C}, \quad \text{тогда } A_1 x_1^2 + C_1 y_1^2 + D_1 x_1 + E_1 y_1 + F_1 = 0$$

2. Непараболический случай

Из коэффициентов A_1, C_1 ни один не равен нулю. Тогда $A_1 C_1 \neq 0; AC - B^2 \neq 0$.

Как изменится уравнение линии при параллельном переносе начала системы координат?

Пусть начало системы координат теперь находится в точке O с координатами $O(x_0; y_0)$. Точка M в прежней системе координат имела координаты $M(x_1; y_1)$, в новой $M(x_2; y_2)$. При этом между координатами имеется следующая связь

$$x_1 = x_2 + x_0, \quad y_1 = y_2 + y_0.$$

Подставляя в уравнение линии, получаем

$$A_1(x_2 + x_0)^2 + C_1(y_2 + y_0)^2 + D_1(x_2 + x_0) + E_1(y_2 + y_0) + F_1 = 0$$

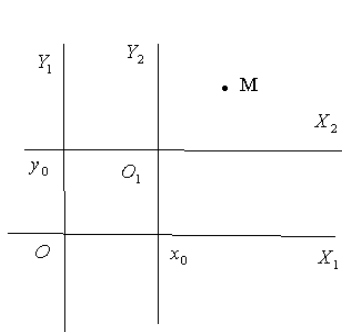
Данное соотношение перепишем в виде

$$A_2 x_2^2 + C_2 y_2^2 + D_2 x_2 + E_2 y_2 + F_2 = 0, \quad \text{где}$$

$$A_2 = A_1, \quad C_2 = C_1, \quad D_2 = D_1 + 2A_1 x_0$$

$$E_2 = E_1 + 2C_1 y_0, \quad F_2 = A_1 x_0^2 + C_1 y_0^2 + D_1 x_0 + E_1 y_0 + F_1.$$

Выберем значения $(x_0; y_0)$ из условия обращения в ноль коэффициентов $D_2; E_2$.



$$D_2 = D_1 + 2A_1 x_0 = 0; \quad x_0 = \frac{-D_1}{2A_1};$$

$$E_2 = E_1 + 2C_1 y_0 = 0; \quad y_0 = \frac{-E_1}{2C_1}$$

Тогда уравнение линии примет вид $A_2 x_2^2 + C_2 y_2^2 + F_2 = 0$.

3. Эллиптический случай.

Вариант 1. A_2, C_2 одного знака, $\Rightarrow A_2 C_2 = AC - B^2 > 0$.

Тогда не ограничивая общности можно положить $A_2 > 0, C_2 > 0$.

1а $A_2 > 0, C_2 > 0, F_2 < 0$. Преобразуем уравнение к виду

$$A_2 x_2^2 + C_2 y_2^2 + F_2 = 0; \quad A_2 x_2^2 + C_2 y_2^2 = -F_2; \quad \frac{x_2^2}{\left(\frac{-F_2}{A_2}\right)} + \frac{y_2^2}{\left(\frac{-F_2}{C_2}\right)} = 1.$$

Обозначим $\frac{-F_2}{A_2} = a^2; \quad \frac{-F_2}{C_2} = b^2$. Получим уравнение эллипса $\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1$.

1б. $A_2 > 0, C_2 > 0, F_2 = 0$. Преобразуем уравнение к виду

$A_2x_2^2 + C_2y_2^2 = 0$; Этому уравнению удовлетворяет только точка $x_2 = 0, y_2 = 0$.

Иногда ее называют **вырожденным эллипсом**.

1в. $A_2 > 0, C_2 > 0, F_2 > 0$. Тогда ни одна точка плоскости не удовлетворяет уравнению $A_2x_2^2 + C_2y_2^2 + F_2 = 0$, то есть, имеем пустое множество, которое иногда называется **мнимым эллипсом**.

Случай $AC - B^2 > 0$ будем называть **эллиптическим**. В этом случае множество точек, удовлетворяющих этому уравнению, является либо эллипсом, либо точкой, либо пустым множеством.

4. Гиперболический случай

Вариант 2. A_2, C_2 разных знаков, $\Rightarrow A_2C_2 = AC - B^2 < 0$. Тогда не ограничивая общности, можно положить $A_2 > 0, C_2 < 0$.

2а. $A_2 > 0, C_2 < 0, F_2 < 0$. Преобразуем уравнение к виду

$$A_2x_2^2 + C_2y_2^2 + F_2 = 0; A_2x_2^2 + C_2y_2^2 = -F_2; \frac{x_2^2}{\left(\frac{-F_2}{A_2}\right)} + \frac{y_2^2}{\left(\frac{-F_2}{C_2}\right)} = 1.$$

Обозначим $\frac{-F_2}{A_2} = a^2$; $\frac{-F_2}{C_2} = -b^2$. Получим уравнение гиперболы $\frac{x_2^2}{a^2} - \frac{y_2^2}{b^2} = 1$.

2б. $A_2 > 0, C_2 < 0, F_2 > 0$. Преобразуем уравнение к виду

$$A_2x_2^2 + C_2y_2^2 + F_2 = 0; A_2x_2^2 + C_2y_2^2 = -F_2; \frac{x_2^2}{\left(\frac{F_2}{A_2}\right)} + \frac{y_2^2}{\left(\frac{F_2}{C_2}\right)} = -1.$$

Обозначим $\frac{F_2}{A_2} = a^2$; $\frac{F_2}{C_2} = -b^2$. Получим уравнение гиперболы $\frac{x_2^2}{a^2} - \frac{y_2^2}{b^2} = -1$.

2в. $A_2 > 0, C_2 > 0, F_2 = 0$. Преобразуем уравнение к виду

$$A_2x_2^2 + C_2y_2^2 = 0; \frac{x_2^2}{\left(\frac{1}{A_2}\right)} + \frac{y_2^2}{\left(\frac{1}{C_2}\right)} = 0. \text{ Обозначим } \frac{1}{A_2} = a^2; \frac{1}{C_2} = -b^2. \text{ Получаем}$$

$$\frac{x_2^2}{a^2} - \frac{y_2^2}{b^2} = 0; y_2 = \pm \frac{b}{a}x_2$$

Этому уравнению удовлетворяет пара пересекающихся прямых. I(1в).

$$A_2 > 0, C_2 > 0, F_2 > 0.$$

Случай $AC - B^2 < 0$ будем называть **гиперболическим**. В этом случае множество точек, удовлетворяющих этому уравнению, является либо гиперболой, либо парой пересекающихся прямых.

5. Параболический случай

Вариант 3. Из коэффициентов A_1, C_1 один равен нулю. Это означает

$$A_1C_1 = 0; AC - B^2 = 0. \text{ Для определенности положим } A_1 \neq 0, C_1 = 0.$$

В случае переноса начала системы координат в другую точку $O_1(x_0; y_0)$, как уже мы показывали, уравнение преобразуется к виду

$$A_2 x_2^2 + C_2 y_2^2 + D_2 x_2 + E_2 y_2 + F_2 = 0, \text{ где}$$

$$A_2 = A_1, \quad C_2 = C_1, \quad D_2 = D_1 + 2A_1 x_0$$

$$E_2 = E_1 + 2C_1 y_0, \quad F_2 = A_1 x_0^2 + C_1 y_0^2 + D_1 x_0 + E_1 y_0 + F_1.$$

Поскольку $C_2 = C_1 = 0$, то имеем $A_2 x_2^2 + D_2 x_2 + E_2 y_2 + F_2 = 0$, где

$$A_2 = A_1, \quad D_2 = D_1 + 2A_1 x_0, \quad E_2 = E_1$$

$$F_2 = A_1 x_0^2 + D_1 x_0 + E_1 y_0 + F_1.$$

Вариант 3.1 $E_1 \neq 0$.

В этом случае выберем $O_1(x_0; y_0)$ из условия $D_2 = 0$; $F_2 = 0$.

$$\text{Имеем } D_2 = D_1 + 2A_1 x_0 = 0; \quad x_0 = -\frac{D_1}{2A_1};$$

$$F_2 = A_1 x_0^2 + D_1 x_0 + E_1 y_0 + F_1 = 0; \quad y_0 = -\frac{A_1 x_0^2 + D_1 x_0 + F_1}{E_1}$$

Тогда уравнение примет вид $A_2 x_2^2 + E_2 y_2 = 0$. Преобразуем его

$$x_2^2 + \frac{E_2}{A_2} y_2 = 0 \quad x_2^2 + 2h y_2 = 0, \text{ где } 2h = \frac{E_2}{A_2}. \text{ Это уравнение параболы.}$$

Вариант 3.2 $E_1 = 0$. В этом случае, полагаем $x_0 = -\frac{D_1}{2A_1}$, $y_0 = 0$. Тогда

уравнение примет вид $A_2 x_2^2 + F_2 = 0$, где $A_2 = A_1$, $F_2 = A_1 x_0^2 + D_1 x_0 + F_1$

Не ограничивая общности можно считать, что $A_2 > 0$.

3.2а $A_2 > 0$, $F_2 < 0$. Преобразуем уравнение $A_2 x_2^2 + F_2 = 0$; $A_2 x_2^2 = -F_2$;

$$x_2^2 = -\frac{F_2}{A_2}; \quad x_2^2 = a^2, \text{ где } a^2 = -\frac{F_2}{A_2}. \text{ Тогда этому уравнению удовлетворяют пара}$$

параллельных прямых $x_2 = \pm a$.

3.2б $A_2 > 0$, $F_2 = 0$. Имеем $A_2 x_2^2 = 0$; $x_2^2 = 0$. Уравнению удовлетворяет прямая $x_2 = 0$. Иногда ее называют **парой совпадающих прямых**.

3.2в $A_2 > 0$, $F_2 > 0$. Имеем $A_2 x_2^2 + F_2 = 0$ - на плоскости нет точек, удовлетворяющих данному уравнению. Имеем пустое множество. Иногда говорят, что уравнению удовлетворяют **пара мнимых прямых**.

Случай $AC - B^2 = 0$ будем называть **параболическим**. В этом случае множество точек, удовлетворяющих этому уравнению, является либо параболой, либо парой параллельных прямых, либо одной прямой, либо пустым множеством.

6. Примеры

Пример 1. Привести к простейшему виду уравнение линии второго порядка и сделать схематичный рисунок. $x^2 - 2xy + 4y^2 - 6x - 8y - 10 = 0$.

Решение. Имеем $A=1$, $B=-1$, $C=4$. $AC - B^2 = 3 > 0$. - линия эллиптического типа.

Определяем угол поворота $\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2B}{A-C} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$,

$$2\varphi = 33,69^\circ; \varphi = 16,845, \sin \varphi = 0,290, \cos \varphi = 0,957$$

$$A_1 = A \cos^2 \varphi + 2B \cos \varphi \sin \varphi + C \sin^2 \varphi = 1(0,957)^2 - 2(0,957)(0,29) + 4(0,29)^2 = 0,916 - 0,555 + 0,336 = 0,697$$

$$2B_1 = -2A \sin \varphi \cos \varphi + 2B \cos^2 \varphi - 2B \sin^2 \varphi + 2C \sin \varphi \cos \varphi = 0$$

$$C_1 = A \sin^2 \varphi - 2B \cos \varphi \sin \varphi + C \cos^2 \varphi = 1(0,29)^2 + 2(0,957)(0,29) + 4(0,957)^2 = 0,0841 + 0,555 + 3,663 = 4,302$$

$$\text{Заметим, что } A + C = 5; \quad A_1 + C_1 = 0,697 + 4,302 = 4,999$$

$$AC - B^2 = 3; \quad A_1 C_1 - B_1^2 = 0,697 \cdot 4,302 = 2,998$$

Погрешность порядка точности вычислений.

$$D_1 = D \cos \varphi + E \sin \varphi = -6(0,957) - 8(0,29) = -5,742 - 2,32 = -8,062$$

$$E_1 = -D \sin \varphi + E \cos \varphi = 6(0,29) - 8(0,957) = 1,74 - 7,656 = -5,916$$

$$F_1 = F = -10$$

Таким образом, уравнение линии в повернутой системе координат примет вид $0,697x_1^2 + 4,302y_1^2 - 8,062x_1 - 5,916y_1 - 10 = 0$.

Определяем координаты начала новой системы координат $(x_0; y_0)$, где

$$x_0 = \frac{-D_1}{2A_1} = \frac{8,062}{2 \cdot 0,697} = 5,783; \quad y_0 = \frac{-E_1}{2C_1} = \frac{5,916}{2 \cdot 4,302} = 0,688$$

$$\text{Тогда } A_2 = A_1 = 0,697, \quad C_2 = C_1 = 4,302,$$

$$D_2 = D_1 + 2A_1x_0 = 0, \quad E_2 = E_1 + 2C_1y_0 = 0$$

$$F_2 = A_1x_0^2 + C_1y_0^2 + D_1x_0 + E_1y_0 + F_1 = 0,697 \cdot 5,783^2 + 4,302 \cdot 0,688^2 - 8,062 \cdot 5,783 - 5,916 \cdot 0,688 - 10 = 23,31 + 2,036 - 46,623 - 4,07 - 10 = -35,347$$

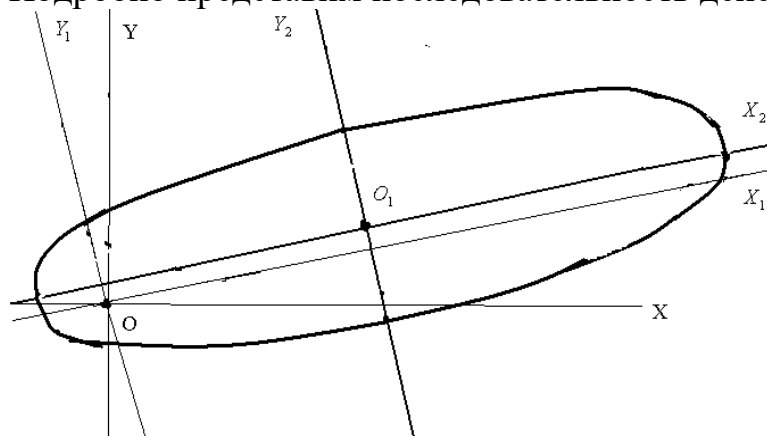
Тогда уравнение линии примет вид

$$0,697x_2^2 + 4,302y_2^2 - 35,347 = 0; \quad 0,697x_2^2 + 4,302y_2^2 = 35,347;$$

$$\frac{x_2^2}{\left(\frac{35,347}{0,697}\right)} + \frac{y_2^2}{\left(\frac{35,347}{4,302}\right)} = 1; \quad \frac{x_2^2}{50,713} + \frac{y_2^2}{8,216} = 1; \quad \frac{x_2^2}{7,12^2} + \frac{y_2^2}{2,87^2} = 1.$$

Получили уравнение эллипса, с полуосями $a = 7,12$, $b = 2,87$.

Подробно представим последовательность действий.



Пример 2. Привести к простейшему виду уравнение линии второго порядка и сделать схематичный рисунок. $x^2 + 4xy - y^2 - 10x + 8y - 10 = 0$.

Решение. Имеем $A=1$, $B=2$, $C=-1$, $AC - B^2 = -5 < 0$ - линия гиперболического

типа. Определяем угол поворота $tg 2\varphi = \frac{2B}{A-C} = \frac{4}{2} = 2$,

$$2\varphi = 63,435^\circ; \varphi = 31,717, \sin \varphi = 0,526, \cos \varphi = 0,851$$

$$A_1 = A \cos^2 \varphi + 2B \cos \varphi \sin \varphi + C \sin^2 \varphi = 1(0,851)^2 + 4(0,851)(0,526) - 1(0,526)^2 = \\ = 0,724 + 1,791 - 0,277 = 2,238$$

$$2B_1 = -2A \sin \varphi \cos \varphi + 2B \cos^2 \varphi - 2B \sin^2 \varphi + 2C \sin \varphi \cos \varphi = 0$$

$$C_1 = A \sin^2 \varphi - 2B \cos \varphi \sin \varphi + C \cos^2 \varphi = 1(0,526)^2 - 4(0,851)(0,526) - 1(0,851)^2 = \\ = 0,277 - 1,791 - 0,724 = -2,238$$

Заметим, что $A + C = 0$; $A_1 + C_1 = 2,238 - 2,238 = 0$

$$AC - B^2 = -5; \quad A_1 C_1 - B_1^2 = 2,238 \cdot (-2,238) = -5,009$$

Погрешность порядка точности вычислений.

$$D_1 = D \cos \varphi + E \sin \varphi = -10(0,851) + 8(0,526) = -8,51 + 4,208 = -4,302$$

$$E_1 = -D \sin \varphi + E \cos \varphi = 10(0,526) + 8(0,851) = 5,26 + 6,808 = 12,068$$

$$F_1 = F = -10$$

Таким образом, уравнение линии в повернутой системе координат примет вид $2,238x_1^2 - 2,238y_1^2 - 4,302x_1 + 12,068y_1 - 10 = 0$.

Определяем координаты начала новой системы координат $(x_0; y_0)$, где

$$x_0 = \frac{-D_1}{2A_1} = \frac{4,302}{2 \cdot 2,238} = 0,961; \quad y_0 = \frac{-E_1}{2C_1} = \frac{12,068}{2 \cdot -2,238} = -2,696$$

Тогда $A_2 = A_1 = 2,238$, $C_2 = C_1 = -2,238$, $D_2 = D_1 + 2A_1x_0 = 0$, $E_2 = E_1 + 2C_1y_0 = 0$

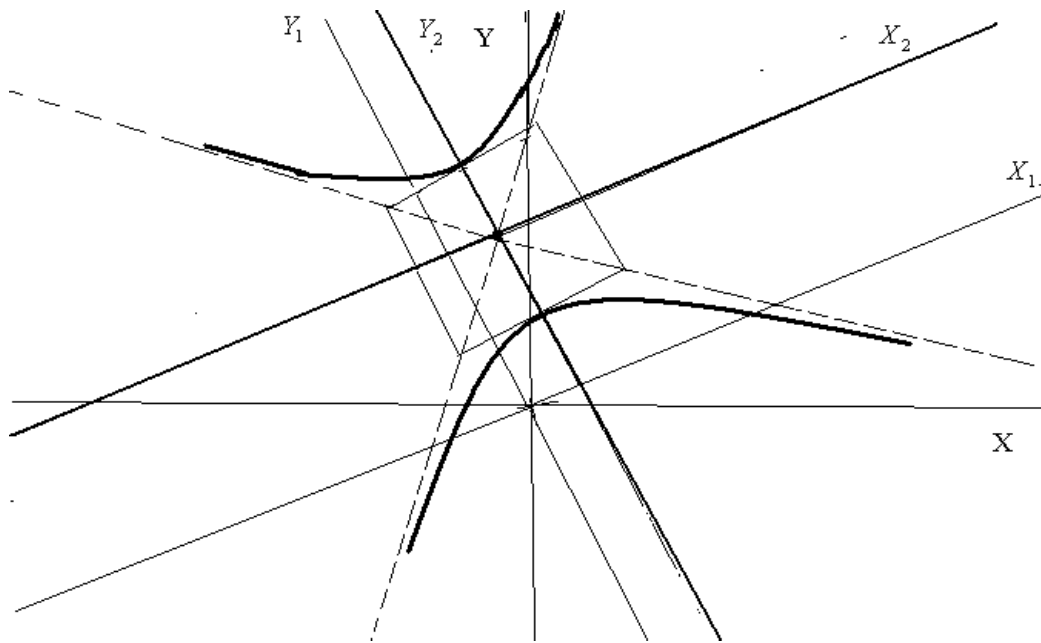
$$F_2 = A_1x_0^2 + C_1y_0^2 + D_1x_0 + E_1y_0 + F_1 = 2,238 \cdot 0,961^2 - 2,238 \cdot 2,696^2 - 4,302 \cdot 0,961 + \\ + 12,068 \cdot -2,696 - 10 = 2,067 - 16,267 - 4,134 + 32,535 - 10 = 4,201$$

Тогда уравнение линии примет вид

$$2,238x_2^2 - 2,238y_2^2 + 4,201 = 0; \quad 2,238x_2^2 - 2,238y_2^2 = -4,201;$$

$$\frac{x_2^2}{\left(\frac{4,201}{2,238}\right)} - \frac{y_2^2}{\left(\frac{4,201}{2,238}\right)} = -1; \quad \frac{x_2^2}{1,877} - \frac{y_2^2}{1,877} = -1; \quad \frac{x_2^2}{1,37^2} - \frac{y_2^2}{1,37^2} = -1.$$

Получили уравнение сопряженной гиперболы, с $a=1,37$, $b=1,37$.



Пример 3. Привести к простейшему виду уравнение линии второго порядка и сделать схематичный рисунок. $x^2 - 4xy + 4y^2 - 4x - 8y - 10 = 0$.

Решение. Имеем $A=1, B=-2, C=4$. $AC - B^2 = 0$. - линия параболического типа.

Определяем угол поворота $\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2B}{A-C} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$

$$2\varphi = 53,130^\circ; \varphi = 26,565, \sin \varphi = 0,447, \cos \varphi = 0,894$$

$$A_1 = A \cos^2 \varphi + 2B \cos \varphi \sin \varphi + C \sin^2 \varphi = 1(0,894)^2 - 4(0,894)(0,447) + 4(0,447)^2 = 0,799 - 1,598 + 0,798 = -0,001$$

$$2B_1 = -2A \sin \varphi \cos \varphi + 2B \cos^2 \varphi - 2B \sin^2 \varphi + 2C \sin \varphi \cos \varphi = 0$$

$$C_1 = A \sin^2 \varphi - 2B \cos \varphi \sin \varphi + C \cos^2 \varphi = 1(0,447)^2 + 4(0,894)(0,447) + 4(0,894)^2 = 0,200 + 1,598 + 3,197 = 4,995$$

Заметим, что $A + C = 5$; $A_1 + C_1 = -0,001 + 4,995 = 4,994$

$$AC - B^2 = 0; A_1 C_1 - B_1^2 = -0,001 \cdot (4,995) = -0,005$$

Погрешность порядка точности вычислений. Однако в параболическом случае мы знаем, что один из коэффициентов должен точно равняться нулю.

Поэтому полагаем $A_1 = 0$; $C_1 = 5$

$$D_1 = D \cos \varphi + E \sin \varphi = -4(0,894) - 8(0,447) = -3,576 - 3,575 = -7,152$$

$$E_1 = -D \sin \varphi + E \cos \varphi = 4(0,447) - 8(0,894) = 1,788 - 7,152 = -5,364, F_1 = F = -10$$

Таким образом, уравнение линии в повернутой системе координат примет вид $5y_1^2 - 7,152x_1 - 5,364y_1 = 0$.

Определяем координаты начала новой системы координат $(x_0; y_0)$, где

$$y_0 = \frac{-E_1}{2C_1} = \frac{5,364}{2 \cdot 5} = 0,536$$

В этом случае для определения x_0 имеем

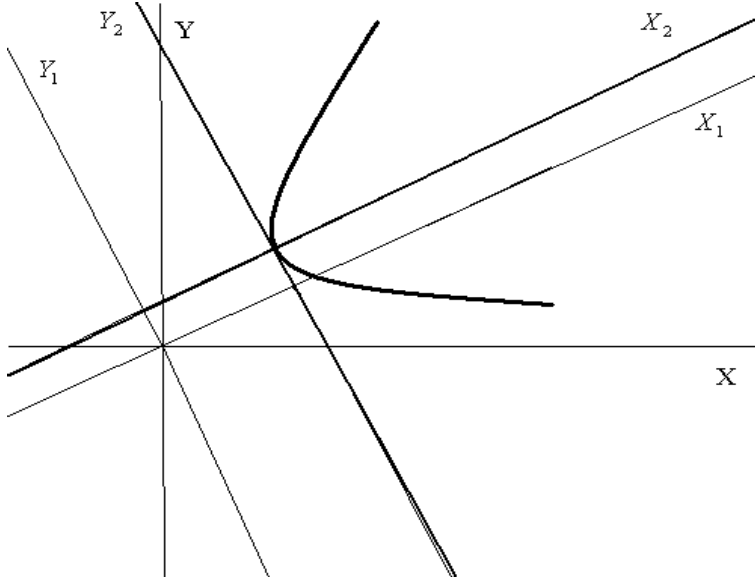
$$F_2 = A_1 x_0^2 + C_1 y_0^2 + D_1 x_0 + E_1 y_0 + F_1 = 0; x_0 = -\frac{A_1 x_0^2 + C_1 y_0^2 + E_1 y_0 + F_1}{D_1};$$

$$x_0 = -\frac{5(0,536)^2 - 5,364 \cdot 0,536 - 10}{-7,162} = \frac{1,436 - 2,875 - 10}{-7,162} = 1,597$$

$$F_2 = A_1 x_0^2 + D_1 x_0 + E_1 y_0 + F_1 = 0; y_0 = -\frac{A_1 x_0^2 + D_1 x_0 + F_1}{E_1}$$

$$\text{Тогда } A_2 = A_1 = 0, \quad C_2 = C_1 = 5, \quad D_2 = D_1 = -7,162, \quad E_2 = E_1 + 2C_1 y_0 = 0, \quad F_2 = 0$$

$$\text{Получим уравнение параболы } 5y_2^2 - 7,162x_2 = 0; \quad 5y_2^2 = 7,162x_2; \quad y_2^2 = 1,432x_2.$$



Конец лекции.

Лекция 16. Поверхности второго порядка.

1. Эллипсоид. Метод сечений.
2. Однополостный гиперболоид.
3. Двуполостный гиперболоид.
4. Эллиптический конус.
5. Эллиптический параболоид.
6. Гиперболический параболоид.
7. Цилиндры.
8. Поверхность вращения.

Литература

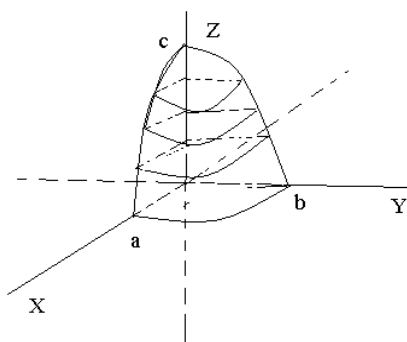
- 2) Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика, Т.1., Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. М., Дрофа, 2004. &24,25,26
1) Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. М.Физматлит, 2005. Гл.5-6, гл. 13.
3) И.П. Натансон. Краткий курс высшей математики.,М.,Лань, 1999 гл.. 1, &4-8. гл.9 & 3,4.

1. Эллипсоид. Метод сечений.

Определение 1. Эллипсоидом называется поверхность, которая в декартовой системе координат задается уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Форму этой поверхности исследуем **методом сечений** - определяются линии, образованные пересечением серии параллельных плоскостей с данной поверхностью. Такая серия линий позволяет наглядно представить форму поверхности. Эллипсоид - поверхность симметричная относительно всех координатных плоскостей. Поэтому достаточно построить его восьмую часть в области $X>0, Y>0, Z>0$. Рассмотрим сечение плоскостью $y = 0$. Получаем

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ - эллипс с полуосями } a, c. \text{ Аналогично сечение } x = 0 \text{ дает эллипс}$$
$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ с полуосями } b, c. \text{ Теперь рассмотрим сечение } z = \text{const} . \text{ Получаем}$$
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{z^2}{c^2}; \frac{x^2}{\left(a\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}\right)^2} = 1$$



Отметим, что $-c \leq z \leq c$, а в сечении - эллипс с полуосями $a\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}$, $b\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

2. Однополостный гиперболоид.

Определение 2. Однополостным гиперболоидом называется поверхность,

которая в декартовой системе координат задается уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

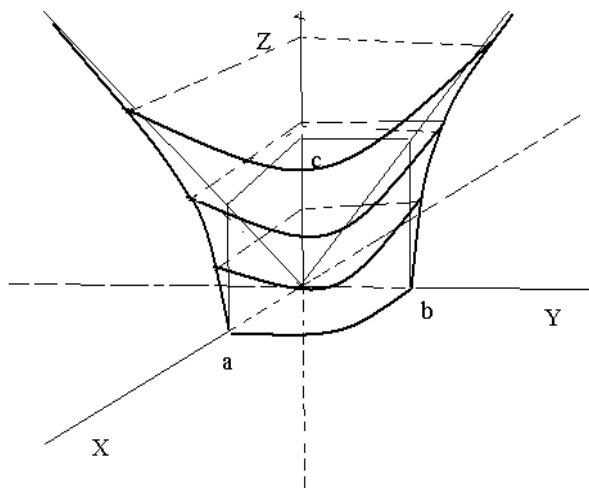
Используем метод сечений. Однополостный гиперболоид - поверхность симметричная относительно всех координатных плоскостей. Поэтому достаточно построить его восьмую часть в области $X > 0, Y > 0, Z > 0$.

Рассмотрим сечение плоскостью $y = 0$. Получаем $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ - гипербола с

полуосями a, c . Аналогично сечение $x = 0$ дает гиперболу $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ с

полуосями b, c . Теперь рассмотрим сечение $z = \text{const}$. Получаем

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1; \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{z^2}{c^2}; \quad \frac{x^2}{\left(a\sqrt{1 + \frac{z^2}{c^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{1 + \frac{z^2}{c^2}}\right)^2} = 1$$



Отметим, что $-\infty \leq z \leq \infty$, а в сечении -

эллипс с полуосями $a\sqrt{1 + \frac{z^2}{c^2}}$, $b\sqrt{1 + \frac{z^2}{c^2}}$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Отметим, что уравнения

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1; \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ так же}$$

являются уравнениями однополостного гиперболоида. Отметим, что

однополостный гиперболоид может быть собран из прямолинейных стержней,

расположенных соответствующим образом. Этот факт используется в строительстве.

3. Двуполостный гиперболоид.

Определение 3. Двуполостным гиперболоидом называется поверхность, которая

в декартовой системе координат задается уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$.

Используем метод сечений. Двуполостный гиперболоид - поверхность симметричная относительно всех координатных плоскостей. Поэтому достаточно построить его часть в области $X > 0, Y > 0, Z > 0$. Рассмотрим сечение

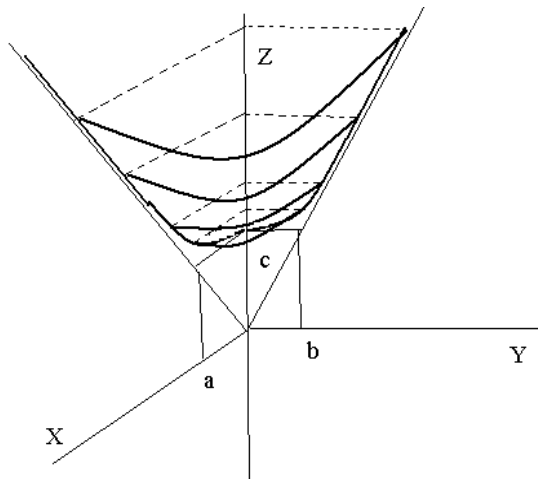
плоскостью $y = 0$. Получаем $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ - гипербола с

полуосями a, c . Аналогично сечение $x=0$ дает гиперболу $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ с

полуосями b, c . Теперь рассмотрим сечение $z = \text{const}$. Получаем

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1; \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} - 1; \quad \frac{x^2}{\left(a\sqrt{\frac{z^2}{c^2} - 1}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{\frac{z^2}{c^2} - 1}\right)^2} = 1$$

Отметим, что $-\infty < z \leq -c$; $c \leq z < \infty$, а в сечении - эллипс с полуосями



$$a\sqrt{\frac{z^2}{c^2} - 1}, \quad b\sqrt{\frac{z^2}{c^2} - 1},$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

Отметим, что уравнения

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1; \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1 \text{ так}$$

же являются уравнениями двуполостного гиперболоида.

4. Эллиптический конус

Определение 3. Эллиптическим конусом называется поверхность, которая в

декартовой системе координат задается уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$.

Используем метод сечений. Отметим, что эллиптический конус, поверхность симметричная относительно всех координатных плоскостей. Поэтому достаточно построить его восьмую часть в области $X>0, Y>0, Z>0$.

Рассмотрим сечение плоскостью $y=0$. Получаем $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ - пара

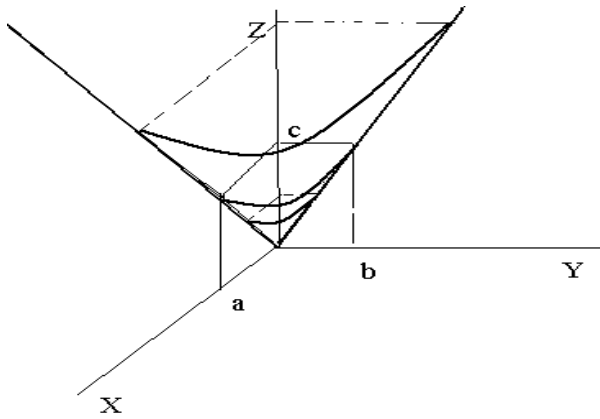
пересекающихся прямых. Аналогично сечение $x=0$ дает пару пересекающихся

прямых $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$. Теперь рассмотрим сечение $z = \text{const}$. Получаем

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0; \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}; \quad \frac{x^2}{\left(a\frac{z}{c}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\frac{z}{c}\right)^2} = 1$$

Отметим, что $-\infty < z < \infty$, а в сечении - эллипс с полуосями $a\left|\frac{z}{c}\right|, b\left|\frac{z}{c}\right|$,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$



Отметим, что уравнения

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$; $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$ так же являются уравнениями эллиптического конуса.

5. Эллиптический параболоид

Эллиптическим параболоидом называется поверхность, которая в декартовой системе координат задается уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$.

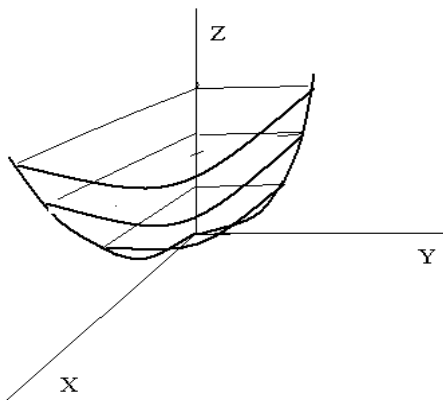
Используем метод сечений. Эллиптический параболоид – поверхность, симметричная относительно координатных плоскостей $X=0, Y=0$, при этом $Z \geq 0$. Поэтому достаточно построить его четвертую часть в области $X>0, Y>0, Z>0$.

Рассмотрим сечение плоскостью $y=0$. Получаем параболу $\frac{x^2}{a^2} = 2z$. Аналогично

сечение $x=0$ дает параболу $\frac{y^2}{b^2} = 2z$. Теперь рассмотрим сечение $z = \text{const}$.

Получаем $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$; $\frac{x^2}{(a\sqrt{2z})^2} + \frac{y^2}{(b\sqrt{2z})^2} = 1$

Отметим, что $0 \leq z < \infty$, а в сечении - эллипс с полуосями $a\sqrt{2z}$, $b\sqrt{2z}$



$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$. Отметим, что уравнения

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -2z$; $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 2x$; $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -2x$;

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 2y$; $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = -2y$ так же являются уравнениями эллиптического параболоида.

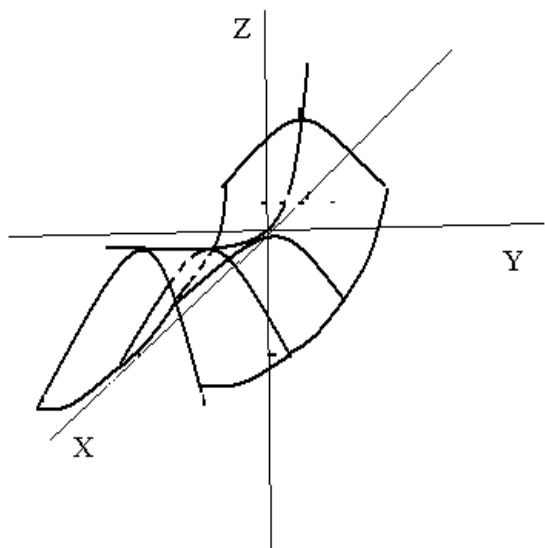
6. Гиперболический параболоид

Определение 6. Гиперболическим параболоидом называется поверхность,

которая в декартовой системе координат задается уравнением $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$.

Используем метод сечений. Эллиптический параболоид - поверхность симметричная относительно координатных плоскостей $X=0, Y=0$. Рассмотрим

сечение плоскостью $y=0$. Получаем $\frac{x^2}{a^2} = 2z$ - параболы. Сечение $x = \text{const}$ дает



параболу $-\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 2z$. Поверхность напоминает седло. Эта поверхность также может быть собрана из прямолинейных стержней.

Отметим, что уравнения

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -2z; \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 2x; \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -2x;$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 2y; \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -2y \text{ так же являются}$$

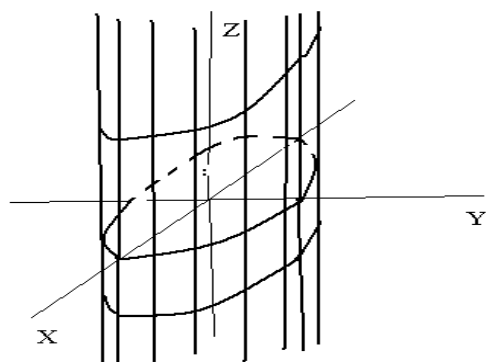
уравнениями гиперболического параболоида.

7. Цилиндры

Определение 7. Пусть на плоскости задано уравнение некоторой линии вида $F(x; y) = 0$. Будем рассматривать это уравнение в пространстве трех переменных x, y, z . Мы обнаружим, что если точка плоскости A с координатами $A(x_0; y_0)$ удовлетворяет данному уравнению, то при любых значениях z точка пространства M с координатами $M(x_0; y_0; z)$ будет удовлетворять этому уравнению. При любых z множество точек $M(x_0; y_0; z)$ образуют прямую, параллельную оси Z , пересекающую плоскость XY в точке $M_0(x_0; y_0; 0)$. Образованная поверхность называется цилиндрической (цилиндром) с образующей, параллельной оси Z . Линия $F(x; y) = 0$ называется направляющей.

Эллиптический цилиндр с образующей, параллельной оси Z

Уравнение имеет вид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. В плоскости XY направляющая является эллипсом. Сечения плоскостью $z = \text{const}$ так же являются точно такими же эллипсами.



Уравнения эллиптических цилиндров, с образующими параллельными осям OX и OY - записать самостоятельно.

Поскольку среди линий второго порядка, помимо эллипсов были еще гиперболы и параболы, то существуют **гиперболические и параболыцилиндры**. Их уравнения предлагается дома записать самостоятельно, а так же изобразить их схематично.

Пример 1. Привести уравнение поверхности второго порядка

$x^2 + 2y^2 + z^2 + 2x + 4y = 0$ к простейшему виду, определить тип и сделать схематический рисунок.

Решение. Рассмотрим, как изменится уравнение поверхности, если начало системы координат сместить в точку $O_1(x_0; y_0; z_0)$. Связь координат в различных системах определяется соотношением $x = x_1 + x_0, y = y_1 + y_0, z = z_1 + z_0$.

Тогда уравнение поверхности примет вид

$$(x_1 + x_0)^2 + 2(y_1 + y_0)^2 + (z_1 + z_0)^2 + 2(x_1 + x_0) + 4(y_1 + y_0) = 0$$

Перегруппируем слагаемые

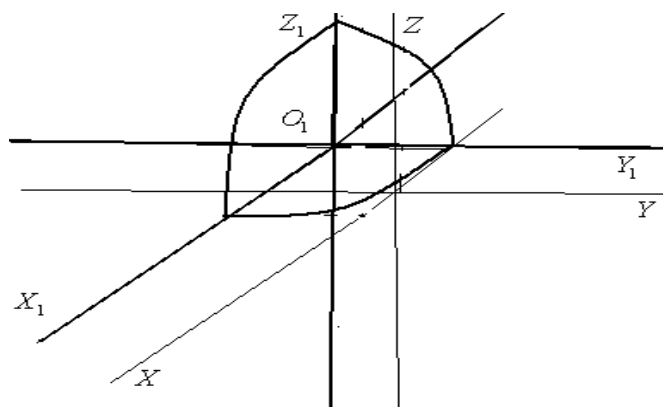
$$x_1^2 + 2y_1^2 + z_1^2 + x_1(2x_0 + 2) + y_1(4y_0 + 4) + z_1(2z_0) + (x_0^2 + 2y_0^2 + z_0^2 + x_0 + 4y_0) = 0$$

Выберем $O_1(x_0; y_0; z_0)$ так, чтобы коэффициенты при $x_1; y_1, z_1$ были равны 0.

Имеем: $2x_0 + 2 = 0, x_0 = -1; 4y_0 + 4 = 0, y_0 = -1; 2z_0 = 0, z_0 = 0$.

Тогда уравнение примет вид $x_1^2 + 2y_1^2 + z_1^2 - 2 = 0$. Преобразуем это выражение

$$x_1^2 + 2y_1^2 + z_1^2 = 2; \frac{x_1^2}{2} + \frac{y_1^2}{1} + \frac{z_1^2}{2} = 1; \frac{x_1^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{y_1^2}{1^2} + \frac{z_1^2}{(\sqrt{2})^2} = 1.$$



Получили эллипсоид с полуосями $\sqrt{2}; 1; \sqrt{2}$.

Пример 2. Привести уравнение поверхности второго порядка

$2x^2 + z^2 + 4x + y + 4z = 0$ к простейшему виду, определить тип и сделать схематический рисунок.

Решение. Рассмотрим, как изменится

уравнение поверхности, если начало системы координат сместить в точку

$O_1(x_0; y_0; z_0)$. Связь координат в различных системах определяется

соотношением $x = x_1 + x_0, y = y_1 + y_0, z = z_1 + z_0$.

Уравнение поверхности примет вид

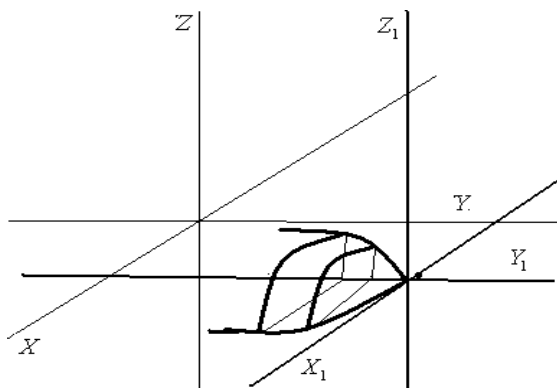
$$2(x_1 + x_0)^2 + (z_1 + z_0)^2 + 4(x_1 + x_0) + (y_1 + y_0) + 4(z_1 + z_0) = 0$$

Перегруппируем слагаемые

$$2x_1^2 + z_1^2 + x_1(4x_0 + 4) + y_1(1) + z_1(2z_0 + 4) + (2x_0^2 + z_0^2 + 4x_0 + y_0 + 4z_0) = 0.$$

Выберем $O_1(x_0; y_0; z_0)$ так, чтобы коэффициенты при $x_1; z_1$ были равны нулю, а так же, чтобы обратился в ноль свободный член $(2x_0^2 + z_0^2 + 4x_0 + y_0 + 4z_0)$.

Имеем: $4x_0 + 4 = 0, x_0 = -1; 2z_0 + 4 = 0, z_0 = -2; (2x_0^2 + z_0^2 + 4x_0 + y_0 + 4z_0) = 0$

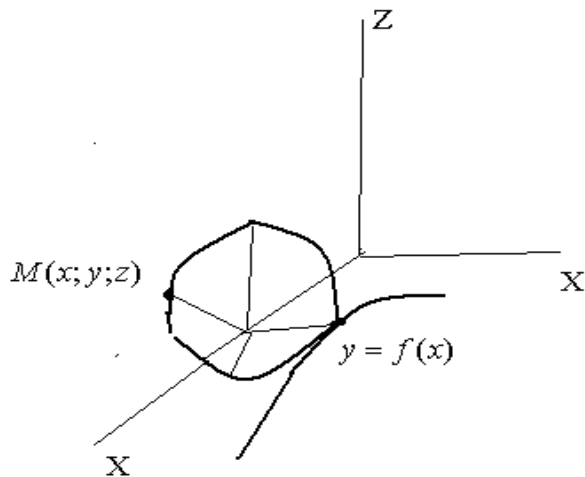


$y_0 = -2x_0^2 - z_0^2 - 4x_0 - 4z_0 = 6$. Получаем уравнение эллиптического параболоида

$$2x_1^2 + z_1^2 = -y_1, \quad \frac{x_1^2}{2^2} + \frac{z_1^2}{\sqrt{2}^2} = -2y_1.$$

8. Поверхность вращения

Определение 8. Пусть линия, заданная уравнением $y = f(x)$, вращается относительно оси X . При этом образуется некоторая поверхность, которая называется поверхностью вращения.



Если точка $M(x; y; z)$ лежит на поверхности, то ее расстояние до оси OX равно $\sqrt{y^2 + z^2}$. Но с другой стороны поверхность образована вращением линии $y = f(x)$ и, значит, это расстояние равно $|f(x)|$.

Следовательно, имеем $y^2 + z^2 = f^2(x)$. Полученное уравнение и является уравнением поверхности вращения.

Конец лекции.