Министерство образования и науки Российской Федерации
Южно-Российский государственный политехнический университет
(НПИ) имени М.И. Платова

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Учебно-методическое пособие для практических занятий

**Новочеркасск
ЮРГПУ(НПИ)
2017**

УДК 519.85(076.5)

Рецензент – канд. физ.-мат. наук, доц. кафедры «Информационные и измерительные системы и технологии» **О. И. Лозин**

Долгополов Н.В.
Методы оптимизации: учебно-методическое пособие для практических занятий / Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ) имени М.И. Платова. – Новочеркасск: ЮРГПУ (НПИ), 2017. – 61 с.

Приведены краткая теория и примеры решения задачи линейного программирования, целочисленного линейного программирования и нелинейного программирования.

Пособие предназначено для студентов вузов, обучающихся по направлениям подготовки «Прикладная информатика» (бакалавриат), «Информационные системы и технологии» (бакалавриат) и «Приборостроение» (бакалавриат).

УДК 519.85(076.5)

Содержание

Тема 1. **ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛЕЙ ПРОСТЕЙШИХ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ**

Математическая модель задачи оптимизации включает целевую функцию $f(x_1, x_2,...,x_n) \to \min(\max)$
и ограничения $g_i(x_1, x_2,...,x_n) \le b_i \ (i = 1,2,...,m)$.

Рассмотрим построение моделей для конкретных задач оптимизации.

Пример 1. Пусть цех имеет: 300 кг металла, 100 м^2 стекла, 160 чел. - час. рабочего времени. Надо изготовить изделия *A* и *B*. Прибыль от реализации изделий: *A* — 10 у.е., В — 12 у.е. Для изготовления изделия *A* расходуется: 4 кг металла, 2 м^2 стекла и 2 чел.-час. рабочего времени. Для изготовления изделия В расходуется: 5 кг металла, 1 м^2 стекла и 3 чел.- час. рабочего времени. Требуется спланировать выпуск продукции так, чтобы прибыль была максимальной.

Математическая модель задачи.

Пусть x_1 и x_2 — количество изделий соответственно *A* и *B*.

Прибыль от реализации всей продукции составит

$$f(x_1, x_2) = 10x_1 + 12x_2.$$

Ресурсы сырья и рабочего времени запишем в виде ограничений—неравенств:

$$4x_1 + 5x_2 \le 300,$$

$$2x_1 + x_2 \le 100,$$

$$2x_1 + 3x_2 \le 160.$$

Составим математическую модель задачи: найти максимальное значение функции $f(x_1, x_2) = 10x_1 + 12x_2 \to \max$ при ограничениях

$$4x_1 + 5x_2 \le 300,$$

$$2x_1 + x_2 \le 100,$$

$$2x_1 + 3x_2 \le 160,$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Пример 2. На двух складах (1 и 2) имеются соответственно 12 и 15 тонн расходных материалов, которые надо перевезти в три ремонтных мастерских (РМ 1, РМ 2, РМ 3) в количестве 8 т, 10 т, 9 т соответственно. Необходимо составить оптимальный план перевозок. Стоимость перевозки в у. е. 1 т груза со складов в мастерские представлена в таблице:

Склады	РМ 1	РМ 2	РМ 3
Склад 1	30	46	32
Склад 2	20	53	40

Математическая модель задачи

Обозначим через x_1, x_2, x_3 количество материалов, доставляемых с первого склада в РМ 1, РМ 2 и РМ3, а через x_4, x_5, x_6— количество материалов, доставляемых со второго склада в РМ 1, РМ 2 и РМ 3.

Общая стоимость перевозок выразится формулой

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = 30x_1 + 46x_2 + 32x_3 + 20x_4 + 53x_5 + 40x_6$$

Ограничения на перевозки:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 12,$$
$$x_4 + x_5 + x_6 = 15,$$
$$x_1 + x_4 = 8,$$
$$x_2 + x_5 = 10,$$
$$x_3 + x_6 = 9.$$

К этой системе добавим систему неравенств $x_i \geq 0$, $i = 1,2,...,6$, которая означает, что товар обратно на базы не вывозится.

Составим математическую модель задачи: найти минимальное значение функции

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = 30x_1 + 46x_2 + 32x_3 + 20x_4 + 53x_5 + 40x_6 \to \min$$

при ограничениях

$$x_1 + x_2 + x_3 = 12,$$
$$x_4 + x_5 + x_6 = 15,$$
$$x_1 + x_4 = 8,$$
$$x_2 + x_5 = 10,$$
$$x_3 + x_6 = 9,$$
$$x_i \geq 0,\ i = 1,2,...,6$$

Пример 3. Для изготовления различных изделий *A, B, C* предприятие использует три различных вида сырьевых материалов. Нормы расхода сырья каждого вида на производство одного изделия каждого вида, цена одного изделия, а также общее количество сырья каждого вида, которое может быть использовано предприятием, приведено в таблице (табл. 1.1).

Изделия *A, B, C,* могут производиться в любых соотношениях, но производство ограничено имеющимися ресурсами. Необходимо составить план производства изделий, при котором, максимально используя имеющийся запас сырьевых материалов, общая стоимость всей произведенной продукции будет максимальной.

Таблица 1.1. Технологическая программа производства

Вид сырья	Нормы затрат сырья на одно изделие			Запас сырья
	A	B	C	
I	18	15	12	360
II	6	4	8	192
III	5	3	3	180
Цена изделия	9	10	16	

Математическая модель задачи

Обозначим через x_1, x_2, x_3 количество изделий соответственно типа *A, B, C*. Общая стоимость изделий выразится формулой

$$f(x_1, x_2, x_3) = 9x_1 + 10x_2 + 16x_3$$

Составим математическую модель задачи: найти максимальное значение функции

$$f(x_1, x_2, x_3) = 9x_1 + 10x_2 + 16x_3 \to \max$$

при ограничениях

$$18x_1 + 15x_2 + 12x_3 \le 360,$$

$$6x_1 + 4x_2 + 8x_3 \le 192,$$

$$5x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 180.$$

По своему экономическому содержанию переменные могут принимать только неотрицательные значения:

$x_1, x_2, x_3 \ge 0$.

Тема 2. ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Графический метод решения задачи линейного программирования применяется в основном при решении задач с двумя переменными и только некоторых задач с тремя, так как довольно трудно построить многогранник решений, который образуется в результате пересечения полупространств. Задачу пространства размерности больше трёх изобразить графически вообще невозможно.
Рассмотрим задачу ЛП в стандартной форме записи:

$$
\begin{aligned}
&f(x_1, x_2) = c_0 + c_1 x_1 + a_2 x_2 \to \max(\min) \\
&a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \le b_1, \\
&a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \le b_2, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 \le b_m, \\
&x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \dots
\end{aligned}
$$

Пусть система неравенств совместна (имеет хотя бы одно решение). Каждое неравенство этой системы геометрически определяет полуплоскость с граничной прямой $a_{i1}\ x_1\ +\ a_{i2}\ x_2\ =\ b_i\ ,\ i=1,2,\dots m$. Условия неотрицательности определяют полуплоскости, соответственно, с граничными прямыми $x_1 = 0, x_2 = 0$.

Так как система совместна, то полуплоскости, как выпуклые множества, пересекаясь, образуют общую часть, которая является выпуклым множеством и представляет собой совокупность точек, координаты каждой из которых являются решением данной системы. Совокупность этих точек называют многоугольником решений. Он может быть точкой, отрезком, лучом, многоугольником, неограниченной многоугольной областью.

Таким образом, геометрически задача линейного программирования (ЗЛП) представляет собой отыскание такой точки многоугольника решений, координаты которой доставляют линейной функции цели максимальное (минимальное) значение, причем допустимыми решениями являются все точки многоугольника решений.

Нахождение решения задачи линейного программирования графическим методом включает следующие этапы:

1. На плоскости в системе координат $\{x_1, x_2\}$ строят прямые, уравнения которых получаются в результате замены в ограничениях знаков неравенств на знаки точных равенств.

2. Находят полуплоскости, определяемые каждым из ограничений задачи.

3. Находят область допустимых решений (многоугольник решений).

4. Строят вектор-градиент функции $\nabla F = (c_1, c_2)$.

5. Строят прямую $c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0$

6. Перемещать найденную прямую параллельно самой себе в направлении градиента функции (при поиске максимума) или антиградиента (при поиске минимума) целевой функции. В результате, либо отыщется точка, в которой целевая функция принимает максимальное (минимальное) значение, либо будет установлена неограниченность функции на множестве решений.

7. Определяют координаты точки максимума (минимума) функции и вычисляют значение целевой функции в этой точке.

Если же многоугольник решений представляет собой неограниченную многоугольную область, то возможны два случая.

Случай 1. Прямая $c_1 x_1 + c_2 x_2 = \text{const}$, передвигаясь в направлении вектора Nили противоположно ему, постоянно пересекает многоугольник решений и ни в какой точке не является опорной к нему. В этом случае линейная функция не ограничена на многоугольнике решений как сверху, так и снизу. Задача е имеет оптимального решения.

Случай 2. Прямая, передвигаясь, всё же становится опорной относительно многоугольника решений. Тогда в зависимости от вида области линейная функция может быть ограниченной сверху и неограниченной снизу, ограниченной снизу и неограниченной сверху, либо ограниченной как снизу, так и сверху.

Покажем применение графического способа решения задач ЛП на следующем примере.

Пример 1. Найти максимальное значение функции

$$F = 2x_1 + 3x_2$$

при условиях

$$2x_1 + x_2 \le 10,$$

$$-2x_1+3x_2\le 6,$$
$$2x_1+4x_2\ge 8,$$
$$x_1,x_2\ge 0.$$

Решение. Начинаем с построения области допустимых решений. Условия неотрицательности переменных x_1,x_2 ограничивают область их допустимых значений первым квадрантом.

Каждому из оставшихся трех ограничений-неравенств соответствует некоторая полуплоскость. Пересечение этих полуплоскостей с первым квадрантом образует множество допустимых решений задачи.

Первое ограничение задачи имеет вид $2x_1+x_2\le 10$. Заменив в нем знак $\le$ на знак =, получаем уравнение $2x_1+x_2=10$.

На рис. 1 оно определяет прямую m-n, которая разбивает плоскость на две полуплоскости, в данном случае выше линии и ниже нее.

Чтобы выбрать, какая из них удовлетворяет неравенству $2x_1+x_2\le 10$, подставим в него координаты любой точки, не лежащей на данной прямой (например, начало координат $x_1=0, x_2=0$). Так как получаем верное выражение $0\le 10$, то неравенству удовлетворяет полуплоскость, содержащая начало координат (помечена стрелкой). В противном случае другая полуплоскость.

Аналогично поступаем с остальными ограничениями задачи. Пересечение всех построенных полуплоскостей с первым квадрантом образует многоугольник ABCDE (см. рис. 1). Это и есть область допустимых решений задачи.

Построение линии уровня. Линия уровня целевой функции это множество точек плоскости, в которых целевая функция принимает постоянное значение. Такое множество задается уравнением $F(x)=\text{const}$. Положим, например, $\text{const}=0$ и построим линию уровня $F(x)=0$, т.е. в нашем случае прямую $2x_1+3x_2=0$.

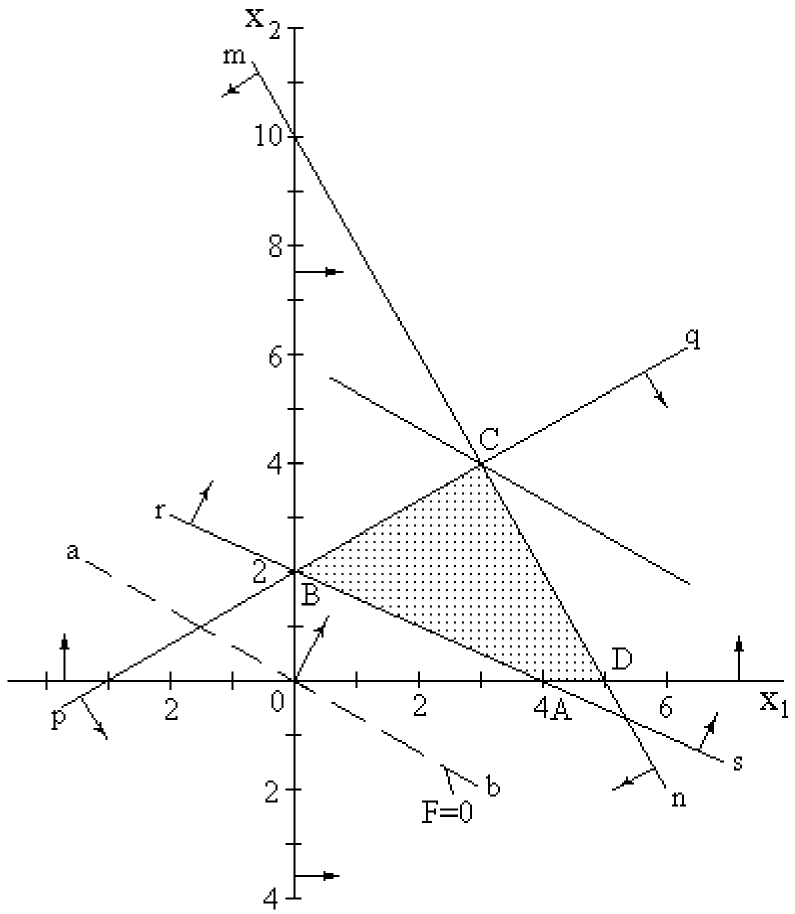


Рис. 2.1. Графическая интерпретация решения

Для нахождения оптимального решения построим линию уровней, для чего приравняем нулю функцию цели и найдем уравнение линии уровней

$$x_2 = -\frac{2}{3}x_1.$$

Её легко провести, положив в этом уравнении $x_1 = 0$ и $x_1 = 3$. Соответственно получим два значения другой координаты: $x_2 = 0$ и $x_2 = -2$. По этим двум точкам проведем линию *a-b*, которая отвечает значению функции цели *F=0*.

Построим вектор-градиент функции в начале координат – $\nabla = (2{,}3)$. Вектор-градиент указывает направление возрастания функции. Линия уровня перпендикулярна этому вектору – градиенту. Так как в задаче необходимо найти максимум функции, то перемещаем линию уровня параллельно самой себе в направлении градиента ∇ до тех пор, пока она не покинет пределов ОДР. Предельной точкой будет вершина *C* многоугольника *ABCD*. В этой точке функция принимает максимальное значение.

Определение координат точки максимума (минимума) и оптимального значения целевой функции. Чтобы найти координаты точки *C*, необходимо решить систему, состоящую из соответствующих прямым уравнений. В данном случае она лежит на пересечении прямых mn и pq (см. рис. 2.1). Записав их уравнения в систему

$$2x_1 + x_2 = 10,$$
$$-2x_1 + 3x_2 = 6$$

и решив ее, получим $x_1 = 3$, $x_2 = 4$.

Следовательно, оптимальным решением рассматриваемой задачи является $x_1^* = 3$ и $x_2^* = 4$. При этом решении значение функции цели есть $F_{max} = 18$.

Если бы необходимо было найти минимальное значение функции цели, то очевидно, что оно будет определяться решением, параметры которого соответствуют координатам точки *B* у многоугольника области допустимых решений. Именно в этой точке линия уровней впервые коснется этой области, а переменные x_1, x_2 будут иметь минимальные из возможных значения.

Отметим, что для любой задачи ЛП допустимое множество представляет собой некоторое выпуклое многогранное множество и если задача ЛП разрешима, то существует его вершина, в которой целевая функция достигает своего оптимального значения.

В рассмотренном примере задача ЛП имеет единственное оптимальное решение.

Задание для самостоятельной работы.

Решить графическим методом

1. $f = 3x_1 + 2x_2 \to max$,
$x_1 + 7x_2 \geq 14$,
$2x_1 + 5x_2 \leq 20$,
$3x_1 + 4x_2 \leq 24$,
$2x_1 + x_2 \leq 12$,
$x_1, x_2 \geq 0$.

2. $f = 3x_1 + 2x_2 \to max$,
$x_1 + x_2 \geq 10$,

$x_1 + x_2 \leq 20,$
$2x_1 - x_2 \geq 10,$
$2x_1 - x_2 \leq 20,$
$x_1 - 3x_2 \leq 30,$
$x_1, x_2 \geq 0.$

3. $f = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max,$
$x_1 + 2x_2 \geq 3,$
$-x_1 + x_2 \leq 1{,}5,$
$2x_1 - x_2 \leq 4,$
$-x_1 + 5x_2 \leq 10,$
$4x_1 + 5x_2 \leq 20,$
$x_1, x_2 \geq 0.$

4. $f = 2x_1 + x_2 \rightarrow \min,$
$x_1 + 2x_2 \geq 3,$
$-x_1 + x_2 \leq 1{,}5,$
$2x_1 - x_2 \leq 4,$
$-x_1 + 5x_2 \leq 10,$
$4x_1 + 5x_2 \leq 20,$
$x_1, x_2 \geq 0.$

5 $f = 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 20x_4 \rightarrow \max,$
$x_1 + 8x_2 + 7x_3 - 15x_4 = 17,$
$-x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 11x_4 = 9,$
$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

6 $f = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 20x_4 \rightarrow \max,$
$8x_1 + 8x_2 + 7x_3 - 15x_4 = 17,$
$5x_1 - x_2 + 6x_3 - 11x_4 = 9,$
$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

Тема 3. НАХОЖДЕНИЕ ДОПУСТИМОГО БАЗИСНОГО РЕШЕНИЯ СИМПЛЕКС-МЕТОДОМ

Для упрощения процесса решения исходные данные задачи линейного программирования при решении ее симплекс методом записываются в специальные симплекс-таблицы. Поэтому одна из модификаций симплекс метода получила название *табличный симплекс метод.*

Каждой симплексной таблице соответствует одно из решений задачи. По содержанию симплексной таблицы можно определить, решение оптимальное или неоптимальное, или определить, что задача решений не имеет.

Алгоритм решения стандартной задачи линейного программирования

Для определенности будем считать, что решается задача на отыскание максимума. Ниже приведем общую постановку такой задачи.

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max$$

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2 \\ &.. \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m \end{aligned}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, ..., x_n \ge 0$$

Приведем последовательность действий при решении задачи линейного программирования симплекс-методом.

Предварительный этап

Шаг 1. Формулировка ЗЛП (формирование целевой функции и системы ограничений) в стандартной постановке.

В случае если в исходной задаче необходимо найти максимум - знаки коэффициентов целевой функции f меняются на противоположные. Знаки коэффициентов ограничивающих условий со знаком "≥" так же меняются на противоположные. В случае если условие содержит знак "≤" - коэффициенты запишутся без изменений.

Шаг 2. Приведение задачи к основной задаче.

Это означает, что все ограничивающие условия должны быть представлены в виде равенств, а целью решения задачи должен быть поиск минимума целевой функции.

Для реализации шага вводятся дополнительные переменные $x_{n+1} \geq 0, x_{n+2} \geq 0, ..., x_{n+m} \geq 0$, где n - число переменных в исходной задаче, m - число уравнений. К каждому ограничивающему условию, при переходе от неравенств к равенствам, добавляется дополнительная переменная x_{n+i}. Дополнительная переменная не будет оказывать влияния на значение целевой функции и на оптимальное решение, которое будет получено в результате.

Основная задача линейного программирования имеет вид:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n \to \min$$

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m
\end{aligned}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, ..., x_n, x_{n+1} \geq 0, x_{n+2} \geq 0, ..., x_{n+m} \geq 0$$

Все дополнительные переменные $x_{n+1} \geq 0, x_{n+2} \geq 0, ..., x_{n+m} \geq 0$ также должны быть неотрицательными.

Шаг 3. В качестве базисных переменных выбираются переменные $x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{n+m}$. В качестве свободных - переменные $x_1, x_2, ..., x_n$ и выражаются через них базисные переменные:

$$\begin{aligned}
&x_{n+1} = b_1 - (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n); \\
&x_{n+2} = b_2 - (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n); \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&x_{n+m} = b_m - (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n).
\end{aligned}$$

Функция уже выражена через свободные переменные

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = a_0 - (a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n).$$

Шаг 4. Построение исходной симплекс-таблицы (получение первоначального базисного решения).

При ручной реализации симплексного метода удобно использовать так называемые симплексные таблицы (табл. 3.1).

Таблица 3.1. Общий вид исходной симплекс-таблицы

Базисные переменные	Свободные члены	Свободные переменные		
		x_1	…	x_n
x_{n+1}	b_1	a_{11}	…	a_{1n}
x_{n+2}	b_2	a_{21}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…
x_{n+m}	b_m	a_{m1}	…	a_{mn}
f	c_0	c_1	…	c_n

Рассмотрим структуру таблицы. Итак, в левом столбце записываются базисные переменные, в первой строке таблицы перечисляются все свободные переменные задачи. Крайний слева столбец содержит свободные члены системы ограничений $b_1, b_2, ..., b_m$. В последней строке таблицы записываются коэффициенты целевой функции. В рабочую область таблицы (начиная со второго столбца и второй строки) занесены коэффициенты a_{ij} при переменных системы ограничений.

Исходная симплекс-таблица соответствует первоначальному базисному решению:

$$x_{n+1} = b_1;$$
$$x_{n+2} = b_2;$$
$$..........$$
$$x_{n+m} = b_m.$$

Первый этап

Шаг 1. Проверка задачи на разрешимость.

Если среди свободных членов есть отрицательные элементы - а в соответствующей строке - отрицательных нет, то условия задачи несовместны и решения у задачи нет.

Шаг 2. Проверка решения на допустимость.

Проверяем на положительность элементы столбца b (свободные члены), если среди них нет отрицательных, то найдено допустимое решение (решение соответствующее одной из вершин многогранника условий) и мы переходим на 2 этап.

Предположим, что все свободные переменные $x_1, x_2,..., x_k$ равны нулю. Тогда

$$x_{k+1} = b_{k+1};$$
$$x_{k+2} = b_{k+2};$$
$$..........$$
$$x_n = b_n.$$

Это решение может быть допустимым или недопустимым. Оно допустимо, если все свободные члены $b_1, b_2,..., b_m$ неотрицательны. Предположим, что это условие выполнено. Тогда мы получили допустимое базисное решение и переходим на 2 этап. Иначе на шаг 3.

Шаг 3. Выбор разрещающих строки и столбца**.**

На этом шаге необходимо определиться, какую переменную исключить из базиса, а какую включить, для того, что бы получить новое базисное решение. Для этого в столбце свободных членов среди отрицательных элементов выбираем минимальный - он задает ведущую строку r. В этой строке также находим максимальный по модулю отрицательный элемент a_{rs} – он задает ведущий столбец s, a_{rs} является *ведущим элементом.*

Переменная, соответствующая ведущей строке исключается из базиса, переменная соответствующая ведущему столбцу включается в базис.

Шаг 4. Пересчет элементов симплекс-таблицы (переход к новому базисному решению).

Порядок пересчета различных элементов таблицы несколько отличается. Пересчитываем симплекс-таблицу согласно правилам:

- новое значение разрешающего элемента равно обратному:

$$a_{rs}^* = \frac{1}{a_{rs}};$$

- новое значение элементов разрешающей строки:

$$b_r^* = \frac{b_r}{a_{rs}}; \quad a_{rj}^* = \frac{a_{rj}}{a_{rs}}, \; j = \overline{1, n}, \; j \neq s;$$

- новое значение элементов разрешающего столбца получается делением старого значения на разрешающий элемент и все берется с обратным знаком

$$a_{is}^{*} = -\frac{a_{is}}{a_{rs}}, \; i = \overline{1,m}, \; i \neq r;$$

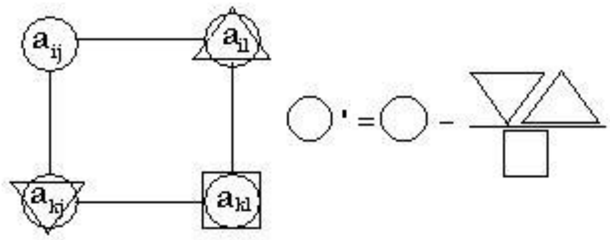
- новое значение остальных элементов преобразуются по формулам

$$b_i^{*} = b_j - \frac{b_r \cdot a_{is}}{a_{rs}}; \quad a_{ij}^{*} = a_{ij} - \frac{a_{rj} \cdot a_{is}}{a_{rs}}, \; j = \overline{1,n}, i = \overline{1,m}, \; i \neq r, \; j \neq s.$$

$$c_j^{*} = c_j - \frac{b_r \cdot c_s}{a_{rs}}; \quad c_s^{*} = -\frac{c_s}{a_{rs}}.$$

Для преобразования элементов симплекс-таблицы (кроме ведущей строки и ведущего столбца) можно воспользоваться правилом "прямоугольника".

Для этого в исходной таблице выделяют прямоугольник, вершинами которого служат нужные для вычисления элементы, и из соответствующего элемента вычесть произведение элемента разрешающей строки на элемент разрешающего столбца, разделенное на разрешающий элемент.



Преобразуемый элемент a_{ij} и соответствующие ему три сомножителя как раз и являются вершинами "прямоугольника".

Шаг 5. Заполнение новой симплексной таблицы.

При составлении новой симплекс-таблицы в ней происходят следующие изменения.

Вместо базисной переменной x_r записываем x_s; вместо свободной переменной x_s записываем x_r.

Если после перерасчета в столбце свободных членов остались отрицательные элементы, то переходим к первому шагу, если таких нет, то ко второму этапу.

После конечного числа итераций либо будет получено допустимое базисное решение (шаг 2), либо установлено, что исходная задача не имеет решения (шаг 1).

Пример. Решить задачу линейного программирования симплексным методом.

$$f = 2x_1 - x_2 + 3x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + x_3 \le 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \ge 5 \\ x_1 + x_2 \le 2 \\ -x_2 + x_3 \le 2 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

Предварительный этап

Шаг 1. Сформулируем задачу в стандартной постановке.

$$f = -2x_1 + x_2 - 3x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + x_3 \le 1 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 \le -5 \\ x_1 + x_2 \le 2 \\ -x_2 + x_3 \le 2 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

Шаг 2. Приводим задачу к основной задаче линейного программирования.

$$f = -2x_1 + x_2 - 3x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = -5 \\ x_1 + x_2 + x_6 = 2 \\ -x_2 + x_3 + x_7 = 2 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

$$x_4, x_5, x_6, x_7 \ge 0.$$

Шаг 3. Выбираем в качестве базисных переменных x_4, x_5, x_6, x_7 и x_1, x_2, x_3- свободных. Выразим базисные переменные через свободные и представим основную задачу линейного программирования в стандартном виде.

$$f = 0 - (2x_1 - x_2 + 3x_3) \to \min$$

$$\begin{cases} x_4 = 1 - (-x_1 - 2x_2 + x_3) \\ x_5 = -5 - (-2x_1 + x_2 - x_3) \\ x_6 = 2 - (x_1 + x_2) \\ x_7 = 2 - (-x_2 + x_3) \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0.$$

Шаг 4. Заполняем начальную симплексную таблицу, перенося коэффициенты со своим знаком.

Базисные переменные	Свободные члены	Свободные переменные		
		x_1	x_2	x_3
x_4	1	-1	-2	1
x_5	-5	-2	1	-1
x_6	2	1	1	0
x_7	2	0	-1	1
f	0	2	-1	3

Первый этап

Нахождение допустимого базисного решения

Имеем базисное решение:

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = -5, x_6 = 2, x_7 = 2.$$

Условием ДБР являются положительные значения базисных переменных ($x_i \geq 0$).Так как $x_5 < 0$, то это базисное решение не является допустимым.

Выбираем в качестве разрешающего столбца – столбец x_1. Для выбора разрещающей строки составляем симплексное отношение. Оно минимально для строки x_6. Выбираем ее в качестве разрешающей строки.

Выполняем преобразование симплексной таблицы. Записываем новую симплексную таблицу. Меняем местами переменные $x_1 \leftrightarrow x_6$ и выполняем преобразование таблицы.

Базисные переменные	Свободные члены	Свободные переменные		
		$x_6 \downarrow x_1$	x_2	x_3
x_4	1 3	-1 1	-2 -1	1 1
x_5	-5 -1	-2 2	1 3	-1 -1
$x_1 \rightarrow x_6$	2 2	1 1	1 1	0 0
x_7	2 2	0 0	-1 -1	1 1
f	0 -4	2 -2	-1 -3	3 3

Получили новое базисное решение:

$x_1 = 2,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 3,\ x_5 = -1,\ x_6 = 1,\ x_7 = 2.$

Так как $x_5 < 0$, то полученное базисное решение не является допустимым. Выбираем в качестве разрешающего столбца – столбец x_3. Выбираем в качестве разрешающей строки – строку x_5.

Выполняем преобразование симплексной таблицы. Записываем новую симплексную таблицу. Меняем местами переменные $x_3 \leftrightarrow x_5$.

Базисные переменные	Свободные члены	Свободные переменные			λ_i
		x_6	x_2	$x_5 \downarrow x_3$	
y_1	3 2	1 3	-1 2	1 1	3
$x_3 \rightarrow x_5$	-1 1	2 -2	3 -3	-1 -1	1
x_1	2 2	1 1	1 1	0 0	∞
x_7	2 1	0 2	-1 2	1 1	2
f	-4 -7	-2 4	-3 6	3 3	

Получили новое базисное решение:

$x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 2, x_5 = 0, x_6 = 0, x_7 = 1.$

Так как все $x_i \geq 0$, то получено допустимое базисное решение. Переходим ко второму этапу.

Тема 4. **НАХОЖДЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛП**

На предыдущем этапе было найдено допустимое базисное решение. Теперь необходимо проверить его на оптимальность.

Второй этап

Шаг 1. Проверка на оптимальность.

Если среди элементов симплексной таблицы, находящихся в строке f (не беря в расчет элемент c_0 - текущее значение целевой функции) нет положительных, то найдено оптимальное решение (смотри условие оптимальности). Базисные переменные полагаются равными соответствующим значениям столбца свободных членов, а свободные переменные полагаются равными нулю, минимальное значение целевой функции равно сводному члену в строке целевой функции. Алгоритм завершает работу.

Если в строке f есть положительные элементы, то решение требует улучшения.

Шаг 2. Проверка задачи на ограниченность функции.

Если невозможно найти разрешающую строку, так как нет положительных элементов в разрешающем столбце, то функция в области допустимых решений задачи не ограничена - алгоритм завершает работу.

Шаг 3. Выбор разрешающих столбца и строки.

На этом шаге необходимо определиться, какую переменную исключить из базиса, а какую включить, для того, что бы получить новое допустимое базисное решение и произвести перерасчет симплекс-таблицы.

Выбираем среди положительных элементов строки f максимальный (исключая значение функции b_0).

Тогда столбец l , в котором он находится, будет разрешающим. Для того, что бы найти ведущую строку, находим симплексное отношение, отношение свободного члена к соответствующему элементу разрешающего столбца, при условии, что этот элемент не неотрицательный.

Тогда строка k, для которой это отношение минимально – разрешающая. Элемент a_{kl} – разрешающий. Переменная x_k, соответствующая разрешающей строке исключается из базиса; переменная x_l, соответствующая разрешающему столбцу включается в базис.

Шаг 4. Пересчет симплексной таблицы.

Пересчитываем симплекс-таблицу по формулам.

Шаг 5. Заполнение новой симплексной таблицы.

При составлении новой симплекс-таблицы в ней происходят следующие изменения: вместо базисной переменной x_k записываем x_l; вместо свободной переменной x_l записываем x_k.

Переходим к шагу 1.

Пример. Найти оптимальное решение для выше рассмотренного примера.

На первом этапе было найдено допустимое базисное решение. Перепишем таблицу с ДБР и проверим его на оптимальность.

Базисные переменные	Свободные члены	Свободные переменные		
		x_6	x_2	x_5
x_4	2	3	2	1
x_3	1	-2	-3	-1
x_1	2	1	1	0
x_7	1	2	2	1
f	-7	4	6	3

Второй этап

Нахождение оптимального решения

Шаг 1. Проверка решения на оптимальность.

Чтобы решение было оптимальным необходимо, чтобы все коэффициенты строки целевой функции были меньше либо равными нулю. Это условие не выполняется, следовательно, полученное решение не является оптимальным.

Шаг 2. Проверка задачи на ограниченность функции.

Так как во всех столбцах с положительными элементами в строке целевой функции есть положительные, то функция в области допустимых решений задачи ограничена.

Шаг 3. Выбор разрешающих столбца и строки.

Выбираем в качестве разрешающего столбца – столбец x_2. Выбираем в качестве разрешающей строки строку с минимальным симплексным отношением – это строка x_7.

Шаг 4. Пересчет симплексной таблицы. Выполняем преобразование симплексной таблицы. Записываем новую симплексную таблицу. Меняем местами переменные $x_2 \leftrightarrow x_7$.

Базисные переменные	Свободные члены	Свободные переменные			λ_i
		x_6	$x_7 \downarrow x_2$	x_5	
x_4	2 1	3 1	2 -1	1 0	1
x_3	1 2,5	-2 1	-3 1,5	-1 0,5	-0,5
x_1	2 1,5	1 0	1 -0,5	0 -0,5	2
$x_2 \to x_7$	1 0,5	2 1	2 0,5	1 0,5	0,5
f	-7 -10	4 -2	6 -3	3 0	

Шаг 1. Проверка решения на оптимальность.

Так как все коэффициенты целевой функции меньше либо равны нулю, то получено оптимальное решение. $x_1 = 1{,}5; x_2 = 0{,}5; x_3 = 2{,}5$. При этом минимальное значение функции $f_{\min} = -10$. Но у нас задача на максимум, следовательно, $f_{\max} = 10$.

Ответ: $x_1 = 1{,}5; x_2 = 0{,}5; x_3 = 2{,}5,\ f_{\max} = 10.$

Задание для самостоятельной работы

Найти решение задачи симплексным методом.

1. $f = 5x_1 - 10x_2 + 7x_3 - 3x_4 \to \min,$

$2x_1 + 2x_2 + 8x_3 + x_4 = 4,$

$-x_1 + 10x_3 + 5x_4 = 5,$

$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 2,$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$

2. $f = 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 20x_4 \to \max,$

$x_1 + 8x_2 + 7x_3 - 15x_4 = 17,$

$-x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 11x_4 = 9,$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$

3. $f = 10x_1 - 5x_2 - 7x_3 + 3x_4 \to \max,$

$2x_1 + 2x_2 + 8x_3 + x_4 = 4,$

$-x_1 + 10x_3 + 5x_4 = 5,$

$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 2,$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$.
4. $f = 5x_1 – 10x_2 + 7x_3 - 3x_4 \rightarrow \min$,
$2x_1 + 2x_2 + 8x_3 + x_4 = 4$,
$-2x_1 - x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 3/2$,
$x_1 + x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 7/2$,
$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$.
5. $f = 2x_1 + x_2 - 5x_3 \rightarrow \max$,
$x_1 - 5x_2 + x_3 \geq 10$,
$x_1 + x_2 - x_3 \leq 8$,
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$.
6. $f = 2x_1 - x_2 - 5x_3 \rightarrow \max$,
$x_1 - 5x_2 + x_3 \geq 5$,
$x_1 + x_2 - x_3 \leq 4$,
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$.
7. $f = x_1 - 2x_2 - 3x_3 \rightarrow \min$,
$- x_2 + x_3 \geq 5$,
$x_1 + x_2 + x_3 \leq 10$,
$6x_1 + x_2 \geq 12$,
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$.

Тема 5. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛП С КОНТРОЛЕМ ВЫЧИСЛЕНИЕМ СИМПЛЕКСНЫМ МЕТОДОМ

В процессе преобразования симплексной таблицы могут возникнуть ошибки, в результате чего будет получено неверное решение. Поэтому необходимо контролировать результаты вычисления.

Алгоритм контроля вычисления

В симплексную таблицу добавляются два столбца контрольных сумм. В первом столбце записывается в верхней части клетки Σ_1, а в нижней - Σ_2. А во второй столбец - Σ_3.

После того как в симплексной таблице определены разрешающие столбец и строка, заполняются элементы верхней части первого столбца по следующему правилу:

Σ_1-для элементов разрешающей строки: сумма всех элементов строки за исключением элемента, расположенного в разрешающем столбце и “+1”;

-для всех остальных элементов эта сумма равна сумме всех элементов ,кроме элемента разрешающего столбца;

Осуществляется симплексное преобразование элемента ,т.е. по тем же правилам , что и над остальными элементами таблицы. Полученное значение записывается в нижнюю часть клетки. Получаем контрольные суммы Σ_2.

В преобразованной таблице находятся значения Σ_3. Значения равны Σ_3 сумме преобразованных новых значений строки.

Для каждой строки попарно сравниваются элементы Σ_2 и Σ_2. Если их значения совпадают, то вычисления были выполнены правильно. В противном случае следует выполнить пересчет элементов таблицы.

Задача 1. Решить задачу линейного программирования симплексным методом с контролем вычислений.

$$f = 2x_1 - x_2 - 5x_3 \to \max,$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \le 4, \\ x_1 - 5x_2 + x_3 \ge 5, \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

Решение

Этап 1. Нахождение допустимого базисного решения

Представим основную задачу линейного программирования в стандартном виде.

$$f = 2x_1 - x_2 - 5x_3 \to \max,$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \le 4, \\ -x_1 + 5x_2 - x_3 \le -5, \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

Приводим исходную задачу к основной задаче линейного программирования.

$$f = 2x_1 - x_2 - 5x_3 \to \max,$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ -x_1 + 5x_2 - x_3 + x_5 = -5, \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0,$$
$$x_4, x_5 \ge 0.$$

Заполняем симплексную таблицу

Базисные перемен-ные	Свобод-ные члены	Свободные переменные			Σ_1 Σ_2	Σ_3	λ_i
		$x_4 \downarrow x_1$	x_2	x_3			
$x_1 \to x_4$	4 4	[1] 1	2 2	-1 -1	6 6	6	4
x_5	-5 -1	-1 1	5 7	-1 -2	-1 5	5	5
$-f$	0 -8	2 -2	-1 -5	-5 -3	-6 -18	-18	

Базисное решение: $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 4,\ x_5 = -5.$

Это решение не является допустимым, так как $x_5 < 0$.

Выбираем в качестве разрешающего столбца – столбец x_1. Выбираем в качестве разрешающей строки – строку x_4, т.к. для нее симплексное отношение минимально.

Вычисляем контрольные суммы Σ_1. Преобразуем симплексную таблицу. Контрольные суммы Σ_2 вычисляются по общим правилам. Для новых элементов каждой строки вычисляем контрольные суммы Σ_3. Сравнивая контрольные суммы Σ_2 и Σ_3, устанавливаем, что вычисления были выполнены правильно.

Записываем новую симплексную таблицу. Меняем местами переменные $x_1 \leftrightarrow x_4$.

Получили новое базисное решение:
$$x_1 = 4, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = -1.$$

Так как $x_5 < 0$, то полученное базисное решение не является допустимым.

Выбираем в качестве разрешающего столбца – столбец x_3. Определим симплексные отношения. Выбираем в качестве разрешающей строки – строку x_5.

Вычисляем контрольные суммы Σ_1. Преобразуем симплексную таблицу. Контрольные суммы Σ_2 вычисляются по общим правилам. Для новых элементов каждой строки вычисляем контрольные суммы Σ_3. Сравнивая контрольные суммы Σ_2 и Σ_3, устанавливаем, что вычисления были выполнены правильно.

Записываем новую симплексную таблицу. Меняем местами переменные $x_3 \leftrightarrow x_5$.

Базисные переменные	Свободные члены	Свободные переменные			Σ_1 Σ_2	Σ_3	λ_i
		x_4	x_2	$x_5 \downarrow x_3$			
x_1	4 4,5	1 0,5	2 -1,5	-1 0,5	7 8	8	3
$x_3 \rightarrow x_5$	-1 0,5	1 -0,5	7 -3,5	[-2] -0,5	8 -4	-4	1
$-f$	-8 -6,5	-2 -3,5	-5 -15,5	-3 -1,5	-15 -27	-27	

Получили новое базисное решение:

$$x_1 = 4{,}5, x_2 = 0, x_3 = 0{,}5, x_4 = 0, x_5 = 0.$$

Так как все $x_i \geq 0$, то получено допустимое базисное решение.

Этап 2. Нахождение оптимального решения

Перепишем таблицу с ДБР. Чтобы решение было оптимальным необходимо, чтобы все коэффициенты строки целевой функции были меньше либо равными нулю. Это условие выполняется, следовательно, полученное решение является оптимальным. $x_1 = 4{,}5; x_2 = 0; x_3 = 0{,}5$. $f_{\max} = 6{,}5$.

Ответ. $x_1 = 4{,}5; x_2 = 0; x_3 = 0{,}5$ $f_{\max} = 6{,}5$

Тема 6. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛП ДВОЙСТВЕННЫМ СИМПЛЕКСНЫМ МЕТОДОМ

С каждой задачей линейного программирования тесным образом связана другая задача линейного программирования, составленная определенным образом. Связь между первой задачей и второй задачей, которую будем называть двойственной, заключается в том, что из решения одной задачи можно получить решение другой.

Метод, при котором вначале симплексным методом решается одна из двойственных задач, а затем оптимум и оптимальное решение другой задачи двойственным симплексным методом.

Пусть задача записана в стандартной форме:

$$
\begin{aligned}
& f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max \\
& a_{11}x_1 + a_{12}x_{12} + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_{12} + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_{12} + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \\
& x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}
\end{aligned}
\tag{6.1}
$$

Будем ее называть прямой задачей.

Двойственной задаче (1) называется следующая задача:

$$
\begin{aligned}
& f_1(z_1, z_2, \ldots, z_m) = b_1z_1 + b_2z_2 + \ldots + b_mz_m \to \min \\
& a_{11}z_1 + a_{21}z_2 + \ldots + a_{m1}z_m \ge c_1 \\
& a_{12}z_1 + a_{22}z_2 + \ldots + a_{m2}z_m \ge c_2 \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& a_{1n}z_1 + a_{2n}z_2 + \ldots + a_{mn}z_m \ge c_n \\
& z_i \ge 0, \quad i = \overline{1,m}
\end{aligned}
$$

$z_1, z_2, \ldots, z_m$ –двойственные переменные

Между прямыми и двойственными переменными установлено следующее соответствие

$$
\begin{gathered}
x_1 \leftrightarrow z_{m+1}, x_2 \leftrightarrow z_{m+2}, \ldots, x_j \leftrightarrow z_{m+j}, \ldots, x_n \leftrightarrow z_{n+m}, \\
x_{n+1} \leftrightarrow z_1, x_{n+2} \leftrightarrow z_2, \ldots, x_{n+j} \leftrightarrow z_j, \ldots, x_{n+m} \leftrightarrow z_m
\end{gathered}
$$

или

$$
x_j \leftrightarrow z_{m+j},\ j = 1,n, \quad x_{n+i} \leftrightarrow z_i, i = 1,m
$$

Справедлива теорема.

Компоненты оптимального решения двойственной задачи равны абсолютным значениям коэффициентов при соответствующих переменных функции прямой задачи, выраженной через дополнительные переменные его оптимального решения.

Задача. Найти оптимальное решение задачи линейного программирования двойственным симплексным методом.

$$f = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \min,$$
$$2x_1 + 2x_2 - x_3 \ge 2,$$
$$-x_1 + x_2 + 4x_3 \ge 3,$$
$$x_1 + x_2 - 2x_3 \ge 6,$$
$$2x_1 + x_2 - 2x_3 \ge 3,$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

$$f = 2z_1 + 3z_2 + 6z_3 + 3z_4 \to \max,$$
$$2z_1 + 3z_2 + 6z_3 + 3z_4 \le 1,$$
$$2z_1 + z_2 + z_3 + z_4 \le 2,$$
$$-z_1 + 4z_2 - 2z_3 + 2z_4 \le 3,$$
$$z_1, z_2, z_3, z_4 \ge 0.$$

Запишем расширенные задачи

$$f = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \min,$$
$$2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 2,$$
$$-x_1 + x_2 + 4x_3 - x_5 = 3,$$
$$x_1 + x_2 - 2x_3 - x_6 = 6,$$
$$2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_7 = 3,$$
$$x_1, x_2, \ldots, x_7 \ge 0.$$

$$f = 2z_1 + 3z_2 + 6z_3 + 3z_4 \to \max,$$
$$2z_1 + 3z_2 + 6z_3 + 3z_4 + z_5 = 1,$$
$$2z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_6 = 2,$$
$$-z_1 + 4z_2 - 2z_3 + 2z_4 + z_7 = 3,$$
$$z_1, z_2, z_3, \ldots, z_7 \ge 0.$$

Соответствие между переменными прямой и двойственной задачами: $x_1 \leftrightarrow z_5, x_2 \leftrightarrow z_6, x_3 \leftrightarrow z_7, x_4 \leftrightarrow z_1, x_5 \leftrightarrow z_2, x_6 \leftrightarrow z_3, x_7 \leftrightarrow z_4$.

Решая двойственную задачу симплексным методом, получим на последнем шаге симплексную таблицу

Базисные переменные	Свободные члены	Свободные переменные			
		z_1	z_5	z_6	z_4
z_3	1,5 -				
z_2	0,5				
z_7	2				
f	10,5	-10	-1,5	-4,5	-1,5

Решение двойственной задачи: $z_1 = 0; z_2 = 0{,}5; z_3 = 1{,}5; z_4 = 0$

$$f_{\max} = 10{,}5$$

На основании первой теоремы двойственности

$$f_{\min} = f_{\max} = 10{,}5$$

На основании второй теоремы двойственности, используя соответствия между прямыми и двойственными переменными, выписываем из таблицы решение прямой задачи

$$x_1 = 1{,}5; x_2 = 4{,}5; x_3 = 0; x_4 = 10; x_5 = 0; x_6 = 4{,}5; x_7 = 1{,}5.$$

$$f_{\min} = 10{,}5.$$

ТЕМА 7. ПОСТРОЕНИЕ ОПОРНЫХ ПЛАНОВ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

Постановка транспортной задачи

Однородный груз, имеющийся в m пунктах отправления (производства) A_1, A_2, ..., A_m соответственно в количествах a_1, a_2, ..., a_m единиц, требуется доставить в каждый из n пунктов назначения (потребления) B_1, B_2, ..., B_n соответственно в количествах b_1, b_2, ..., b_n единиц. Стоимость перевозки (тариф) единицы продукции из A_i в B_j известна для всех маршрутов A_i, B_j и c_{ij} ($i = 1, m$; $j = 1, n$). Требуется составить такой план перевозок, при котором весь груз из пунктов отправления вывозится, а запросы всех пунктов потребления удовлетворяются (закрытая модель) и при этом суммарные транспортные расходы минимальны.

Математическая модель транспортной задачи имеет вид:

$$F(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_y x_y \to \min;$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_y = a_i,\ j = 1,2,\ldots,n,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_y = b_j,\ j = 1,2,\ldots,n,$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1,2,\ldots,m;\ j = 1,2,\ldots,n.$$

В рассмотренной модели транспортной задачи предполагается, что суммарные запасы поставщиков равны суммарным запросам потребителей, т.е.:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Такая задача называется задачей *сбалансированной*, а модель задачи *закрытой*. Если же это равенство не выполняется, то задача называется задачей с *неправильным балансом*, а модель задачи — *открытой*.

Переменными (неизвестными) транспортной задачи являются x_{ij}, i=1,2,...,m, j=1,2,...,n — объемы перевозок от i-го поставщика каждому j-му потребителю. Эти переменные могут быть записаны в виде матрицы перевозок:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}.$$

Будем называть любой план перевозок допустимым, если он удовлетворяет системам ограничений и требованиям не отрицательности.

План будет называться оптимальным, если он, среди всех допустимых планов, приводит к минимальной суммарной стоимости перевозок.

Методы построения опорного плана транспортной задачи

Так как транспортная задача является задачей линейного программирования, то её можно решать симплекс-методом, но в силу своей особенности её можно решить гораздо проще.

Условия задачи удобно располагать в таблице, вписывая в ячейки количество перевозимого груза из A_i в B_j груза $X_{ij} \geq 0$, а в правом углу клетки – соответствующие тарифы C_{ij}.

Затем решение задачи разбивается на два этапа:

- определение опорного плана;
- нахождение оптимального решения.

Допустимый план, будем называть *опорным*, если в нем отличны от нуля не более $m+n$-1 базисных перевозок, а остальные перевозки равны нулю

Допустимое (опорное) решение транспортной задачи можно найти, используя метод "северо-западного угла" или метод "минимального элемента".

Метод северо-западного угла (диагональный)

Сущность метода заключается в том, что на каждом шаге заполняется левая верхняя (северо-западная) клетка оставшейся части таблицы. Причем клетки таблицы заполняют так, чтобы на каждом шаге исчерпывалась или потребность какого-либо потребителя, или возможности какого-либо поставщика. В соответствующем столбе или строке ставим в остальных пустых клетках нули. Если при этом одновременно исчерпывается и потребность и возможность, то вычеркивается и столбец и строка. При таком построении плана перевозок заполненными окажутся ровно (m+n-1) клетки, а остальные нулевые.

Метод наименьшего элемента

Сущность метода в том, что на каждом шаге заполняется та клетка оставшейся части таблицы, которая имеет наименьшую стоимость; в случае наличия нескольких таких равных стоимостях заполняется нулями одновременно строка и столбец. В остальном действуют аналогично предыдущему способу.

Тема 8. РЕШЕНИЕ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ МЕТОДОМ ПОТЕНЦИАЛОВ

Алгоритм решение транспортной задачи включает ряд шагов.

Шаг 1. Получение начального плана перевозок по методу "северо-западного" угла, минимального элемента или любым другим методом.

Шаг 2. Проверка плана на не вырожденность. Если полученный план вырожденный, формально заполняют нулями некоторые из свободных клеток так, чтобы общее число занятых клеток было равно $m + m - 1$. Нули надо расставлять так, чтобы образовался замкнутый цикл для всех не занятых клеток.

Шаг 3. Проверка плана на оптимальность.

Шаг 3.1. Определение потенциалов поставщиков и потребителей. Введем строку потенциалов α_i и столбец потенциалов . Составляют систему уравнений для заполненных клеток транспортной таблицы: формуле $\alpha_i + \beta_j = c_{ij}$, где i,j – номера строк и столбцов на пересечении которых стоят заполненные клетки, α_i – потенциал i-го поставщика, β_j – потенциал j-го потребителя, c_{ij} – тариф на перевозку из пункта i в пункт j. Число уравнений в системе равно $m+m-1$, а число неизвестных α_i и β_j равно $m+m-1$ Для решения данной системы одно из неизвестных выбирают произвольно. Обычно полагают $\alpha_1 = 0$. Решая систему уравнений, находят значения потенциалов α_i, β_j.

Систему потенциалов однозначно можно вычислить только для невырожденного ОП. В случае вырожденного ОП нужно ввести фиктивные перевозки с таким расчетом, чтобы из системы однозначно вычислить все потенциалы.

Шаг 3.2. Определение суммы потенциалов (косвенных тарифов) для свободных клеток: $\bar{c}_{ij} = \alpha_i + \beta_j$, где i и j – номера строки и столбца, на пересечении которых стоит свободная клетка, α_i – потенциал A_i-го поставщика, β_j – потенциал B_j-го потребителя, $\bar{c}_{ij}$ – косвенные тарифы.

Шаг 3.3. Проверка на оптимальность.

Для каждой свободной клетки транспортной таблицы составляется разность между $\bar{c}_{ij}$ и c_{ij} (косвенным и реальным тарифами) $\Delta_{ij} = \bar{c}_{ij} - c_{ij}$. Если все $\Delta_{ij} \le 0$, то полученный план оптимален. Если хотя бы для одной свободной клетки $\Delta_{ij} > 0$, то план может быть улучшен. Переход к шагу 4.

Шаг 4. Улучшение плана.

Шаг 4.1. Выбирают клетку, которой соответствует максимальное положительное значение разности, полученной на шаге 3.3. Если имеется несколько одинаковых значений, то из них выбирают любое.

Шаг 4.2. Заполнение клетки, выбранной на шаге 4.1, происходит следующим образом. Строят цикл, начинающийся и заканчивающийся в выбранной свободной клетке, содержащий в качестве вершин заполненные клетки таблицы и состоящий из горизонтальных и вертикальных отрезков. При этом в каждой клетке таблицы, являющейся вершиной цикла, соединяют обязательно горизонтальный и вертикальный отрезки. В свободной клетке условно ставят знак "+", а в остальных вершинах цикла, чередуясь, ставят "–" и "+". Затем происходит перераспределение груза по циклу. Для этого выбирают из клеток со знаком "-"наименьшее число единиц груза $k = \min x_{ij}$. Это значение прибавляют к значениям, стоящим в клетках со знаком "+", и отнимают от значений, стоящих в клетках со знаком "–" . При таком перераспределении общий баланс не изменяется. Свободная клетка заполняется, а клетка со знаком "–" , которой соответствует наименьшее количество груза, становится свободной.

Для нового плана повторяют все действия, т. е. переходят к шагу 3.

Пример. Решить методом потенциалов задачу.

Имеются три пункта поставки однородного груза А1, А2, А3 и четыре пункта В1, В2, В3, В4 потребления этого груза. На пунктах А1, А2, А3 находится груз в количествах 45, 35, 70 тонн. В пункты В1, В2, В3, В4 требуется доставить соответственно 25, 30, 40, 45 тонн груза. Стоимость перевозок между пунктами поставки и потребления приведены в таблице 8.1.

Таблица 8.1. Исходные данные к задаче

Пункты	В1	В2	В3	В4
А1	2	5	3	4
А2	6	1	2	5
А3	3	4	3	8

Найти такой план перевозок, при котором общие затраты будут минимальными.

Для решения задачи использовать методы северо-западного угла и потенциалов.

Решение. Проверим условие баланса:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 150, \quad \sum_{j=1}^{4} b_j = 140..$$

Эта задача является открытой транспортной задачей, так как не выполняется условие баланса.

Чтобы её сбалансировать, вводим фиктивный пункт назначения В5, его потребность 150-140=10. Стоимость перевозки единицы груза к фиктивному потребителю равна нулю.

Строим рабочую таблицу, которая первоначально содержит только транспортные издержки, запасы и потребности (табл. 2)..

Построим опорный план методом северо-западного угла. Принцип заполнения таблицы состоит в том, что, начиная с крайней левой верхней ячейки (принцип северо-западного угла), количество грузов вписывается в таблицу так, чтобы потребности полностью удовлетворялись или груз полностью (табл. 8.2).

Таблица 8.2. Транспортная таблица 1

Пункт от-правления	Пункт назначения					Запас	α_i
	B1	B2	B3	B4	B5		
A1	**2** 2 25	**5** - 5 20	**6** 3	**11** + 4	**3** 0	45	α_1=0
A2	**-2** 6	**1** 1 + 10	**2** -2 25	**7** 5	**-1** 0	35	α_2=-4
A3	**-1** 3	**2** 4	**3** 3 + 15	**8** 8 - 45	**0** 0 10	70	α_3=-3
Потребность	25	30	40	45	10	150 150	
β_j	β_1=2	β_2=5	β_3=6	β_4=11	β_5=3		

Получаем опорный план X_0. Его стоимость равна 615 ед.

$$X_0 = \begin{bmatrix} 20 & 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & 45 & 10 \end{bmatrix}$$

Проверим построенный план на невырожденность. В невырожденном плане отличными от нуля перевозками могут быть лишь (m+n-1) значений, где m – число поставщиков, n – число потребителей. Остальные переменные равны нулю. Будем их в таблице помечать прочерком.

В нашем примере m=3, n=5. Значит, число заполненных клеток должно быть: 3+5-1=7. Наш план невырожденный, потому что число базисных клеток равно 7. Стоимость этого плана: F0 =25*2+20*5+10+25*2+15*3+45*8+0=615.

Построим систему потенциалов α_i - потенциалы, соответствующие поставщикам, β_j - потенциалы, соответствующие потребителям.

Для занятых клеток таблицы составляем систему.

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 = 2, \\ \alpha_1 + \beta_2 = 5, \\ \alpha_2 + \beta_2 = 1, \\ \alpha_2 + \beta_3 = 2, \\ \alpha_3 + \beta_3 = 3, \\ \alpha_3 + \beta_4 = 8, \\ \alpha_3 + \beta_5 = 0. \end{cases}$$

В этой системе 8 неизвестных и 7 уравнений, т.е. ее нельзя решить. Поэтому выбираем сами $\alpha_1 = 0$. Тогда остальные неизвестные найдутся однозначно.

$\alpha_2 = -4$; $\alpha_3 = -3$; $\beta_1 = 2$; $\beta_2 = 5$; $\beta_3 = 6$; $\beta_4 = 11$; $\beta_5 = 3$.

Вычислим для каждой свободной клетки $\overline{c_{ij}} = \alpha_i + \beta_j$ и запишем в левый угол свободной клетки. Проверим выполнение критерия оптимальности: $(\alpha_i + \beta_j) \leq c_{ij}$ для свободных клеток.

Видим, что критерий оптимальности не выполнен (последние два неравенства), так что план X^0 неоптимален. Надо построить новый план перевозок. Идея состоит в изменении объема перевозок по некоторым из маршрутов. Для определения этих маршрутов строим цикл - последовательность ненулевых клеток таблицы (маршрутов), в которой соседними являются две и только две ненулевые клетки одного столбика или одной строки, а последняя клетка последовательности находится либо в том же столбике, либо в той же строке, что и начальная клетка последовательности. "Вершины" цикла (т.е. клетки, вошедшие в цикл) и показывают те маршруты, по которым нужно изменить объемы перевозок. Из тех условий, где критерий не выполняется, выбираем то условие, где разница максимальна. Это – клетка (1 , 4). Начиная с этой клетки, строим цикл (см. табл 8.1): (1,4) → (3,4) → (3,3) → (2,3) → (2,2) → (2,1) → (1,4). Впишем в начальную клетку знак "+" и далее последовательно "-", "+" по вершинам цикла, как это показано в таблице 1. Значение $K_{\min}$ (объем новых перевозок по маршруту) определяется из условия: $K_{\min} = \min\{\overline{x}_{ij}\}$, где $\overline{x}_{ij}$ - объем перевозок в клетках, отмеченным знаком "-". Итак $K_{\min}$ = {45; 25; 20} = 20. Эту величину 20 отнимаем из объема перевозок, отмеченных знаком “-“, и прибавляем к объемам перевозок, отмеченных знаком "+" (балансируем). Результаты записываем в новую таблицу, перенося туда остальные перевозки без изменения.

Таблица 8.3.

Пункт отправления	Пункт назначения					Запас	αi
	B1	B2	B3	B4	B5		
A1	**2** - 2 25	-2 5	**-1** 3	+4 **4** 20	0 **-4**	45	α 1=0
A2	**5** 6	**1** 1 30	**2** 2 5	**7** 5	0 **-1**	35	α 2=3
A3	**6** +3	**2** 4	**3** 3 35	8 **8** - 25	**0** 0 10	70	α 3=4
Потребность	25	30	40	45	10	150 150	
βj	β1=2	β2= -2	β3= -1	β4= 4	β5= -4		

Получаем новый опорный план X_1. Его стоимость равна 475 ед.

$$X_1 = \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 30 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 35 & 25 & 10 \end{bmatrix}.$$

План невырожденный. Число базисных клеток равно 7.

Для новой таблицы повторяем расчет потенциалов. Для занятых клеток таблицы составляем систему потенциалов.

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 = 2 \\ \alpha_1 + \beta_4 = 4 \\ \alpha_2 + \beta_2 = 1 \\ \alpha_2 + \beta_3 = 2 \\ \alpha_3 + \beta_3 = 3 \\ \alpha_3 + \beta_4 = 8 \\ \alpha_3 + \beta_5 = 0 \end{cases}$$

Полагаем $\alpha_1 = 0$, далее находим $\alpha_2 = 3$; $\alpha_3 = 4$; $\beta_1 = 2$; $\beta_2 = -2$; $\beta_3 = -1$; $\beta_4 = 4$; $\beta_5 = -4$.

Из условий, где критерий не выполняется, выбираем то условие, где разница максимальна. Это – клетка (3 , 1). Составляем для нее цикл, показанный в таблице 4. Свободной клетке присваивают знак "+", остальным – поочерёдно знаки "–" и "+". В минусовых клетках находят число $K_{\min}$ = {25; 25}=25.

Таблица 8.4.

Пункт отправления	Пункт назначения					Запас	αi
	B1	B2	B3	B4	B5		
A1	2 **0**	-1 5	**2** 3	**4** 4 - 45	**-1** 0	45	α_1=0
A2	**2** 6	**1** 1 30	**2** 2 5	**4** 5	**-1** 0	35	α_2=0
A3	**3** 3 - 25	**2** 4	**3** 3 35	**5** 8 +	**0** 0 10	70	α_3=1
Потребность	25	30	40	45	10	150 / 150	
β_j	β_1=2	β_2= 1	β_3= 2	β_4= 4	β_5= -1		

Получим опорный план

$$X_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 45 & 0 \\ 0 & 30 & 5 & 0 & 0 \\ 25 & 0 & 35 & 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

План вырожденный, потому что число базисных клеток равно 6. В клетку (1,1) запишем базисный нуль.

Для новой таблицы повторяем расчет потенциалов.

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 = 2 \\ \alpha_1 + \beta_4 = 4 \\ \alpha_2 + \beta_2 = 1 \\ \alpha_2 + \beta_3 = 2 \\ \alpha_3 + \beta_3 = 3 \\ \alpha_3 + \beta_1 = 3 \\ \alpha_3 + \beta_5 = 0 \end{cases}$$

Полагаем $\alpha_1 = 0$, далее находим $\alpha_2 = 0$; $\alpha_3 = 1$; $\beta_1 = 2$; $\beta_2 = 1$; $\beta_3 = 2$; $\beta_4 = 4$; $\beta_5 = -1$.

Поскольку для всех свободных клеток выполняется условие $\alpha_i + \beta_j \le c_{ij}$, то план оптимальный.

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 45 \\ 0 & 30 & 5 & 0 \\ 25 & 0 & 35 & 0 \end{bmatrix}.$$

Стоимость перезки равна 400

Вывод: Для того, чтобы транспортные расходы на перевозку продукции были минимальны и составляли 400 ден.ед., необходимо из пункта А1 перевозить 45 ед. в пункт В4, из А2 – 30 ед. в В2. и 5 ед. в В3 , А3 – 25 ед. в В1 и 35 ед. в В3.

Задание для самостоятельной работы

Решить транспортную задачу методом потенциалов.

1. $C = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 9 & 8 \\ 4 & 3 & 2 & 8 \\ 2 & 3 & 6 & 8 \end{bmatrix}$, A = (60,30,40), B = (40, 50, 10,30).

2. $C = \begin{bmatrix} 8 & 3 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 6 & 7 \\ 1 & 9 & 4 & 3 \end{bmatrix}$, A = (10, 15,25), B = (5, 10, 20,15).

3. $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$, A = (10, 15, 20), B = (15, 15, 10, 5) .

4. $C = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \\ 6 & 3 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 6 & 3 \end{bmatrix}$. A = (8, 14, 7), B = (8,5, 5,7) .

5. $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 & 4 \\ 8 & 4 & 1 & 4 & 1 \\ 9 & 7 & 3 & 7 & 2 \end{bmatrix}$. A = (14, 18,16), B = (6, 7, 12,13,10).

Тема 9. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ МЕТОДОМ ОТСЕЧЕНИЯ

Задача линейного программирования, переменные которой принимают целочисленные значения, называется целочисленной ЗЛП. Рассмотрим стандартную ЗЛП с дополнительными требованиями целочисленности переменных:

$$f = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \to \max$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, i = 1,2...m,$$

$$x_j \ge 0, \ j = 1,2...n,$$

$$x_j - целые, \ j = 1,2..n.$$

Для определения оптимального решения задачи требуются специальные методы. Существует несколько таких методов, из которых наиболее известным является метод отсечений, в основе которого лежит симплексный метод

Метод отсечения

Процедура решения задачи методом отсечения осуществляется следующим образом.

1. Исходную задачу решают симплекс-методом с отброшенным условием целочисленности. Если в полученном оптимальном решении хотя бы одна переменная или функция цели являются дробными, то переходят ко второму шагу.

2. Составляют дополнительное ограничение по строке, содержащей наибольшую дробную часть в столбце свободных членов симплексной таблицы.

3. Дробные части вносят в дополнительную строку новой симплексной таблицы.

Переход к первому этапу.

Пример. Решить задачу

$$
\begin{aligned}
& f = x_1 + 2x_2 \to \max, \\
& x_1 - 2x_2 \le 2_i, \\
& -2x_1 + x_2 \le 2, \\
& x_1 + x_2 \le 3, \\
& x_1, x_2 \ge 0, \\
& x_1, x_2 - \textit{целые}.
\end{aligned}
$$

Решение. Решаем задачу симплексным методом без учета требования целочисленности. Решение приведено в таблице:

Базисные переменные	Свободные члены	Свободные переменные	
		x_4	x_5
x_3	7	1/3	1/3
x_2	8/3	1/3	2/3
x_1	1 /3	-1/3	1/3
f	17/ 3	1/3	5/3

Получено оптимальное, но нецелочисленное решение:
$x_1 = 1/3; x_2 = 8/3; x_3 = 7$. $f_{\max} = 17/3$.

Нахождение целочисленного решения. Составляем дополнительное ограничение. Отсечение ведем по второй строке, содержащую наибольшую дробную часть в столбце свободных членов.

Добавляем в симплексную таблицу новую строку x_4, элементы которой равны дробным числам второй строки со знаком минус.

Базисные переменные	Свободные члены	Свободные переменные	
		$x_4 \downarrow x_6$	x_5
x_3	5	1/3	1/3
x_2	2	1/3	2/3
x_1	1	1	1/3
$x_4 \to x_6$	2	3	3
f	5	1	-5

Решаем задачу симплексным методом. Получим оптимальное и целочисленное решение: $x_1 = 1; x_2 = 2; x_3 = 5$. $f_{\max} = 5$.

Ответ: $x_1 = 1; x_2 = 2; x_3 = 5$. $f_{\max} = 5$.

Дадим интерпретацию решения данной задачи. Максимальное значение целевая функция принимает в точке $x_1 = 1/3; x_2 = 8/3$, то есть это решение является оптимальным, но без учета требования целочисленности. Поэтому строим дополнительное ограничение

$$\frac{1}{3}x_4 + \frac{2}{3}x_5 \geq \frac{2}{3}.$$

Значения переменных x_4 и x_5 подставим из второго и третьего уравнений системы ограничений $x_4 = 2 + 2x_1 - x_2$, $x_5 = 3 - x_1 - x_2$. В результате получим дополнительное ограничение $x_2 \leq 2$.

Задание для самостоятельной работы

Решить задачу целочисленного линейного программирования

1. $f = 2x_1 + x_2 \to \max,$
$7x_1 + 3x_2 \leq 21,$
$x_1 + x_2 \leq 5$
$x_1, x_2 \geq 0$,целые

2. $f = x_1 + x_2 \to \max,$
$2x_1 + 9x_2 \leq 99,$
$5x_1 + 19x_2 \leq 95$
$x_1, x_2 \geq 0$,целые

3. $f = 5x_1 + 7x_2 \to \max,$
$x_1 + 2x_2 \leq 13,$
$3x_1 + 2x_2 \leq 20,$
$x_1, x_2 \geq 0$,целые.

4. $f = 4x_1 + 7x_2 \to \max,$
$2x_1 + 3x_2 \leq 21,$
$3x_1 + 6x_2 \leq 37,$
$x_1, x_2 \geq 0$, целые.

5. $f = 2x_1 + x_2 - 5x_3 \to \max,$
$x_1 + 3_2 - x_3 \leq 4,$
$x_1 - 5x_2 + x_3 \geq 5,$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$, целые.

6. $f = 3x_1 + x_2 + 2x_3 \to \max,$
$x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 9,$
$3x_1 + x_2 + 5x_3 \leq 10,$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$, целые

Тема 10. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ КЛАССИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

Задача называется задачей нелинейного программирования, если её математическая модель имеет вид

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_1, \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_2, \\ \qquad \dots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_m, \end{cases}$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \to \max(\min),$$

в которой среди g_i или f есть нелинейная функция.

В отличие от задач линейного программирования не существует единого метода для решения задач нелинейного программирования.

Рассмотрим задачу нелинейного программирования

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max(\min)$$

$$g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_i,\ i = 1,2,...,m.$$

Пусть функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ непрерывна вместе с производными до второго порядка включительно.

Алгоритм классического метода

1. Отыскивается множество стационарных точек целевой функции, принадлежащих области допустимых решений внутри области допустимых решений. Множество точек функции $f(x)$ называется множеством стационарных точек, если они удовлетворяют условию:

$$\frac{\partial f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_j} = 0,\ j = \overline{1, n}$$

Найденные точки исследуются на max(min). Определяется точка с наибольшим (задача максимума), наименьшим (задача минимума) значениями функции. Пусть это точка X_0.

2. Исследуются точки границы области допустимых решений задачи. Берется граница $g_k(x_1, x_2, ..., x_n) = b_k$, начиная с первой, и если она с разделяемыми переменными, то из нее можно определить какую-либо переменную $x_i = \varphi_k(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n)$.

Далее x_i подставляется в функцию f и она становится функцией $(n-1)$ переменных. Затем отыскиваются стационарные точки на этой границе

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = 0,\ j = 1,2,\ldots,i-1, i+1,\ldots,n.$$

3. Найденные стационарные точки исследуются на max (min) и вычисляется значение функции в этих точках.

Непосредственно сравниваются значения функции в найденных стационарных точках и определяется точка абсолютного максимума (минимума) функции.

Задача.

$$f(x_1, x_2) = 10x_1 + 20x_2 + x_1x_2 - 2x_1^2 - 2x_2^2 \to \max,$$
$$x_1 + x_2 \le 6,$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

1. Находим стационарные точки функции:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 10 + x_2 - 4x_1;\quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 20 + x_1 - 4x_2.$$

$$\begin{cases} 10 + x_2 - 4x_1 = 0 \\ 20 + x_1 - 4x_2 = 0. \end{cases}$$

$$x_1 = 4;\ x_2 = 6.$$

Полученная точка не удовлетворяет ограничению задачи. Будем искать решение на границах области решений.

2. Граница $x_1 + x_2 = 6$; $x_2 = 6 - x_1$.

$$f(x_1) = 20x_1 - 5x_1^2 + 48 \to \max$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = -10x_1 + 20 = 0.$$

$$x_1 = 2;\ x_2 = 4.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = -10 < 0.$$

Это точка максимума, $f(2;4) = 68$.

3. граница $x_2 = 0$,

$$f(x_1) = 10x_1 - 2x_1^2 \to \max,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 10 - 4x_1 = 0,$$

$$x_1 = 2{,}5;\ x_2 = 0.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = -4 < 0\,.$$

Это точка максимума, $f(2{,}5;0) = 12{,}5.$.

4) граница $x_1 = 0$,

$$f(x_1, x_2) = 20x_2 - 2x_2^2 \to \max,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 20 - 4x_2.$$

$$x_1 = 0;\ x_2 = 5.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = -4 < 0\,.$$

Это точка максимума, $f(0;5) = 50.$

Сравнивая значение функции в найденных точках, устанавливаем, что максимальное значение она имеет в точке $x_1 = 2;\ x_2 = 4.$

Ответ: $x_1 = 2,\ x_2 = 4,\ f(2;4) = 68.$

Тема 11. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ МЕТОДОМ МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА

Одним из наиболее общих подходов к решению задачи поиска локального минимума или максимума функции при наличии ограничений на ее переменные (задача условной оптимизации) является метод Лагранжа. Он относится к непрямым методам оптимизации.

Сущность метода заключается в следующем.

Пусть функция цели имеет вид

$f(x_1; x_2; ...; x_n) \to \max(\min),$

а на переменные заданы ограничения

$g_i(x_1; x_2; ...; x_n) = b_i,\ (i=1 ... m),$

причем на переменные не наложены условия неотрицательности.

Ограничения, заданные в виде уравнений (равенств), свидетельствуют о том, что ОДР – это линия пересечения поверхности функции цели и поверхностей ограничений.

Взамен поиска условного максимума (минимума) вводится так называемая функция Лагранжа, для которой рассматривается безусловная оптимизация:

$$L(x_1;x_2;...;x_n;\lambda_1;\lambda_2;...;\lambda_m) = f(x_1;x_2;...;x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i [b_i - g(x_1;x_2;...;x_n)],$$

где λ_i – множители Лагранжа.

Функция $L(x_1;x_2;...;x_n;\lambda_1;\lambda_2;...;\lambda_m)$ называется “Лагранжиан”. Он имеет $(n+m)$ неизвестных. Очевидно, что входящая в его структуру сумма должна быть равна нулю. Поэтому исходная функция цели и Лагранжиан будут иметь общие стационарные точки (экстремумы). Для поиска максимума (минимума) Лагранжиана находят частные производные и приравнивают их к нулю:

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0, \ (j=1...n);$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = b_i - g_i(x_1;x_2;...;x_n) = 0, \ (i=1...m).$$

Получена система, включающая $(n+m)$ уравнений с таким же количеством неизвестных $(x_1;x_2;...;x_n;\lambda_1;\lambda_2;...;\lambda_m)$. Всякое ее решение определяет точку $X = (x_1^0;x_2^0;...;x_n^0)$, в которой может быть экстремум функции $f(x_1;x_2;...;x_n)$. Следовательно, решив систему уравнений, получают все точки, в которых функция цели (а более точно - линия пересечения двух поверхностей) может иметь экстремальное значение. В дальнейшем, применяя классические подходы математического анализа, исследуют эти точки на тип экстремума.

Итак, определение экстремальных точек задачи нелинейного программирования методом множителей Лагранжа включает следующие этапы:

- составляют функцию Лагранжа (Лагранжиан);

- находят частные производные от функции Лагранжа по переменным x_j и λ_i и приравнивают их к нулю;

- решая систему ($n+m$) уравнений частных производных, находят точки, в которых целевая функция *может иметь экстремум*;

- среди точек, подозрительных на экстремум, находят такие, в которых достигается заданный экстремум, и вычисляют значение функции цели в этих точках.

Задача . По плану производства продукции предприятию необходимо изготовить 180 изделий. Эти изделия могут быть получены по двум технологиям. По первой технологии расходы для изготовления x_1 объема продукции издержки составят $4x_1+x_1^2$ руб, для x_2 составят $8x_2+x_2^2$ руб. Найти объемы производства изделий по первой и по второй технологии при условии, что суммарные издержки будут минимальными.

Решение . Математически условие задачи записывается следующим образом: найти минимум функции

$$F = 4x_1 + 8x_2 + x_1^2 + x_2^2$$

при ограничении

$$x_1 + x_2 = 180,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Решим задачу, используя метод множителей Лагранжа. Для этого составим функцию Лагранжа:

$$L(x_1; x_2; \lambda) = 4x_1 + 8x_2 + x_1^2 + x_2^2 + \lambda(180 - x_1 - x_2),$$

Вычислим ее частные производные по x_1, x_2, λ и приравняем их нулю:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 4 + 2x_1 - \lambda = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 8 + 2x_2 - \lambda = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 180 - x_1 - x_2 = 0.$$

Перенося λ в первых двух уравнениях в правую часть и приравнивая их левые части, получим:

$$4 + 2x_1 = 8 + 2x_2,$$

или $x_1 - x_2 = 2$.

Решая последнее уравнение совместно с уравнением ограничений, находим: $x_1^* = 91$; $x_2^* = 89$.

Эта точка является подозрительной на экстремум. Используя вторые производные, получаем:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} = 2 > 0,$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} = 2 > 0,$$

следовательно, в точке D имеем минимум. Соответственно оптимальный план задачи: $x_1^* = 91$, $x_2^* = 89$; $F = 17278$ руб.

Задание для самостоятельной работы

Решить задачу нелинейного программирования методом Лагранжа.

1. $$f = x_1^2 + x_2^2 + x_3 \to \min, \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 = 12. \end{cases}$$

2. $$f = x_1 x_2 x_3 \to \max, \quad \begin{cases} 2x_1 x_2 + x_2 x_3 = 12, \\ 2x_1 - x_2 = 8. \end{cases}$$

3. $$f = x_1 x_2 + x_2 x_3 \to \max, \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = 4, \\ x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

4. $$f = 3x_1^2 + 2x_1 + 2x_2 + 4x_2 x_3 \to \max, \quad \begin{cases} x_1^2 + 2x_2^2 = 19, \\ x_1 + 2x_2 x_3 = 11. \end{cases}$$

5. $$f = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 4x_2 \to \min, \quad 2x_1 + 3x_2 = 6.$$

6. $$f = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 8x_2 \to \min, \quad x_1 + 2x_2 = 4.$$

Тема 12. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОДНОМЕРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ. МЕТОД ДЕЛЕНИЯ ПОПОЛАМ, ДИХОТОМИИ, ЗОЛОТОГО СЕЧЕНИЯ, ЧИСЕЛ ФИБОНАЧЧИ

Метод деления пополам

Пусть имеется унимодальная на интервале $[a,b]$ функция $f(x)$. Для отыскания минимума данной функции обратимся к алгоритму метода. На каждой итерации исключается половина интервала.

Задается начальный отрезок $[a,b]$, требуемая точность ε.

Вычисляем три точки

$$x_1 = \frac{a+b}{2},\ x_2 = \frac{a+x_1}{2},\ x_3 = \frac{x_1+b}{2},$$

на интервале $[a,b]$, которые делят его на четыре равных отрезка. Вычисляют значение функции $f(x)$в этих точках.

Сравниваются полученные значения $f(x_1), f(x_2), f(x_3)$. В силу унимодальности функции возможны три случая:

1. $f(x_2) < f(x_1) < f(x_3)$ - то оставляем отрезок $[a, x_1]$.
2. $f(x_2) > f(x_1) < f(x_3)$ - оставляем отрезок $[x_2, x_3]$.
3. $f(x_2) > f(x_1) > f(x_3)$ - оставляем отрезок $[x_1, b]$.

Таким образом, во всех трех случаях интервал неопределенности сократился вдвое. Далее, на следующей итерации, оставшийся отрезок снова делится на четыре части, но значения функции вычисляются только в двух точках, поскольку значение в третьей точке уже было вычислено на предыдущей итерации. Процесс продолжается до тех пор, пока интервал неопределенности $|b_k - a_k| \le 2\varepsilon$. Точка минимума функции определяется как середина интервала $x^* = \frac{a_k + b_k}{2}$.

Метод дихотомии

Поиск минимума начинается с вычисления 2-х точек x_1 и x_2:

$$x_1 = \frac{a+b-\delta}{2}, x_2 = \frac{a+b+\delta}{2},$$

где $0 < \delta < b-a$ - маленькое положительное число, параметр метода.

При малых δ, $x_1 \approx x_2$ и делит отрезок почти пополам. Вычисляем $f(x_1)$, $f(x_2)$. В силу унимодальности функции $f(x)$ возможны два случая:

1. $f(x_1) \le f(x_2)$: $a_1 = a, b_1 = x_2$.
2. $f(x_1) > f(x_2)$: $a_1 = x_1, b_1 = b$.

Процедура повторяется с интервалом $[a_1, b_1]$, так как именно он содержит минимум (вследствие принципа его выбора).

Процесс деления отрезка продолжается пока на k-й итерации $b_k - a_k < \varepsilon$, где ε - заданная точность.

Точка минимума функции определяется как середина интервала $x^* = \dfrac{a_k + b_k}{2}$.

Метод золотого сечения

Говорят, что точка осуществляет золотое сечение отрезка длиной l, если она его делит его в отношении $0{,}382l$ и $0{,}618l$.

Алгоритм метода схож с методом дихотомии, за исключением только способа расчета точек сравнивания x_1, x_2 - которые теперь вычисляются в пропорции золотого сечения.

В этом методе выбор нового интервала неопределенности происходит по результатам сравнения функции в двух точках. Но в отличии от метода дихотомии, на каждой итерации, кроме первой, вычислении функции производится только в одной точке .

На первом шаге (итерации) точки вычисляются по формулам:

$$x_1 = a + 0{,}382(b-a),\ x_2 = a + 0{,}618(b-a).$$

Затем вычисляются значение функции в этих точках. Возможны два случая:

1. Если $f(x_1) < f(x_2)$, то оставляем отрезок $[a, x_2]$. На второй итерации x_2 полагаем равным x_1, а x_1 вычисляем по формуле $x_1 = a + 0{,}382(x_2 - a)$. Значение функции вычисляется только в точке x_1, так как значение функции в x_2 уже было вычислено на предыдущем шаге.
2. $f(x_1) \ge f(x_2)$, то оставляем отрезок $[x_1, b]$. На второй итерации x_1

полагаем равным x_2, а x_2 вычисляем по формуле $x_2 = a + 0{,}618(b - x_1)$. Значение функции вычисляется только в точке x_2, так как значение функции в x_1 уже было вычислено на предыдущем шаге.

Вычисления продолжают пока длина интервала не станет меньше требуемой точности.

Метод чисел Фибоначчи

Числа Фибоначчи вычисляются по формуле

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right], \quad k = 1,2,\ldots.$$

Числа Фибоначчи могут быть вычислены по рекурентной формуле

$$F_k = F_{k-1} + F_{k-2},\ k = 1,2,\ldots,\ F_0 = F_1 = 1$$

В этом методе выбор нового интервала неопределенности происходит по результатам сравнения функции в двух точках. Как и в методе золотого сечения, на каждой итерации, кроме первой, вычислении функции производится только в одной точке. Но в отличии от других метод число итераций определяется сразу. Для достижения требуемой точности ε число итераций n следует задавать исходя из соотношения $\dfrac{b-a}{F_n} \le \varepsilon$.

На первой итерации точки вычисляются по формулам

$$x_1 = a + \frac{F_{n-2-k}}{F_{n+1-k}}(b-a), \tag{12.1}$$

$$x_2 = a + \frac{F_{n-1-k}}{F_{n+1-k}}(b-a). \tag{12.2}$$

Затем вычисляются значение функции в этих точках.

Возможны два случая:

1. $f(x_1) < f(x_2)$ - выбираем отрезок $\lfloor a, x_2 \rfloor$. На второй итерации полагаем $a_1 = a$, $b_1 = x_1$, x_2 равным x_1, а x_1 вычисляем по формуле (12.1). Значение функции вычисляется только в точке x_1, так как значение функции в x_2 уже было вычислено на предыдущем шаге.

И переходят к следующей итерации.

2. $f(x_1) \geq f(x_2)$ - оставляем отрезок $[x_1, b]$. На второй итерации второй x_1 полагаем равным x_2, а x_2 вычисляем по формуле (12.2). Значение функции вычисляется только в точке x_2, так как значение функции в x_1 уже было вычислено на предыдущем шаге. x_2 полагаем равным x_1, а x_1 вычисляем по формуле (12.1). Значение функции вычисляется только в точке x_1, так как значение функции уже было вычислено на предыдущем шаге. И переходят ко второй итерации.

Вычисления продолжают пока не будут исчерпаны все n.

Пример. Методом золотого сечения найти минимум функции $f(x) = x^4 + 2x^2 + 4x + 1$ на отрезке [-1;0] с точностью ε =0,1.

Решение.

Итерация №1.

Положим $a_1 = a = -1$, $b_1 = b = 0$ и вычислим $x_1 = a_1 + 0{,}382(b_1 - a_1) = -1 + 0{,}382 = -0{,}618$,

$x_2 = a_1 + 0{,}618(b_1 - a_1) = -1 + 0{,}618 = -0{,}382.$

Вычислим $f(x_1) = -0{,}5623$, $f(x_2) = -0{,}2149$.

Поскольку $f(x_1) < f(x_2)$, то $b_2 = -0{,}382$, $a_2 = a_1 = -1$.

Итерация №2.

$x_2 = x_1 = -0{,}618$. $x_1 = a_2 + 0{,}382(b_2 - a_2) = -1 + 0{,}382(-0{,}382 + 1) = -0{,}7639.$

$f(x_1) = f(-0{,}7639) = -0{,}5479.$

Поскольку $f(x_2) > f(x_1)$, то $a_3 = x_1 = -0{,}7639$, $b_3 = b_2 = -0{,}382.$

Итерация №3.

$x_1 = x_2 = -0{,}618$

$x_2 = a_3 + 0{,}382(b_3 - a_3) = -0{,}76391 + 0{,}618(-0{,}382 + 0{,}7639) = -0{,}5279.$

$f(x_2) = f(-0{,}5279) = -0{,}4766.$

Поскольку $f(x_1) < f(x_2)$, то $b_4 = x_2 = -0{,}5279$, $a_4 = a_3 = -0{,}7639.$,

И так далее. После шести итераций получим $a_6 = -0{,}708$, $b_6 = -0{,}618$, $|b_6 - a_6| = |-0{,}618 + 0{,}708| = 0{,}09.$

Требуемая точность достигнута. Находим х как середину интервала:

$x = (-0{,}618 - 0{,}708)/2 = -0{,}6603.$

Ответ: $x = -0{,}6603$; $f(x) = -0{,}55796$.

Тема 13. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ БЕЗУСЛОНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ. МЕТОД ПОКООРДИНАТНОГО СПУСКА, МЕТОД НАИСКОРЕЙШЕГО СПУСКА

Метод покоординатного спуска

Метод характеризуется выбором направлений поиска поочередно вдоль всех n координатных осей, шаг рассчитывается на основе одномерной оптимизации, критерий окончания поиска $|X_k - X_{k-1}| \le \varepsilon$, где ε - заданная точность определения локального экстремума. Очевидно, что X_k есть точка минимума. Метод покоординатного спуска не требует вычислений производных функции качества и на каждом шаге предполагает решение одномерной задачи оптимизации.

Сущность метода состоит в том, что производится раздельная оптимизация по параметрам функций: один из параметров считается изменяемым, а остальные фиксируются при некоторых значениях; затем изменяемым становится следующий параметр, а предыдущий принимает значение, полученное при предыдущей оптимизации (на предыдущем шаге). Процесс продолжается до окончания перебора всех параметров. Таким образом, данный метод сводит задачу поиска наименьшего значения функции нескольких переменных к многократному решению одномерных задач оптимизации.

Пусть нужно найти наименьшее значение целевой функции $f(x_1, x_2,..., x_n)$. Выберем какую-нибудь начальную точку $X_0 = \left(x_1^0, x_2^0,..., x_n^0\right)$ и рассмотрим функцию при фиксированных значениях всех переменных, кроме первой: $f\left(x_1, x_2^0,..., x_n^0\right)$. Тогда она превратится в функцию одной переменной x_1. Изменяя эту переменную, будем двигаться от начальной точки $x_1 = x_1^0$ в сторону убывания функции, пока не дойдем до ее минимума при $x_1 = x_1^1$, после которого она начинает возрастать. Точку с координатами $X_1 = \left(x_1^1, x_2^0,..., x_n^0\right)$ обозначим через X_1, при этом $f(X_1) \le f(X_0)$.

Фиксируем теперь переменные: $x_1 = x_1^1, x_3 = x_3^0,..., x_n = x_n^0$ и рассмотрим функцию f как функцию одной переменной x_2 : $f\left(x_1^1, x_2, x_2^0,..., x_n^0\right)$. Изменяя x_2, будем опять двигаться от начального значения $x_2 = x_2^0$ в сторону убывания функции, пока не дойдем до минимума при $x_2 = x_2^1$. Точку с координатами $X_2 = \left(x_1^1, x_2^1,..., x_n^0\right)$ обозначим через X_2, при этом $f(X_2) \le f(X_1)$.

Проведем такую же минимизацию целевой функции по переменным $x_3, x_4,..., x_n$. Дойдя до переменной x_n, снова вернемся к x_1 и продолжим процесс.

Эта процедура вполне оправдывает название метода. С ее помощью мы построим последовательность точек X^0, X^1, X^2,... которой соответствует монотонная последовательность значений функции $f(X_0) \ge f(X_1) \ge f(X_2) \ge ... f(X_k)$. Обрывая ее на некотором шаге k, можно приближенно принять значение функции $f(X_k)$ за ее наименьшее значение в рассматриваемой области.

Метод наискорейшего спуска

Идея метода наискорейшего спуска основана на том, что градиент функции указывает направление ее *наиболее быстрого возрастания* в окрестности той точки, в которой он вычислен. Поэтому, если из некоторой текущей точки $X^{(k)}$ перемещаться в направлении вектора $\nabla f\left(X^{(k)}\right)$, то функция f будет возрастать, по крайней мере, в некоторой окрестности $X^{(k)}$. Следовательно, можно записать такую рекуррентную формулу

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} + \lambda \cdot \nabla f(X^{(k)}), \quad (13.1)$$

где $\lambda > 0$ - шаг итерации. Его выбор представляет самостоятельную задачу. Но достаточно часто его назначают в пределах $0 \le \lambda \le 1$ и затем уточняют.

Метод реализуется по следующей схеме:

1) задают первоначальную точку отсчета (для успешного решения задачи начальная точка должна быть максимально приближена к предполагаемому экстремуму);

2) находят частные производные функционала (значения частных

производных в начальной точке);

3) находят значение функции в начальной точке;

4) по параметрам начальной точки вычисляют градиент функции;

5) по формуле (1) находят параметры новой точки;

6) если удовлетворяются условия уравнения $\left| f\left(X^{(k+1)}\right) - f\left(X^{(k)}\right) \right| \le \varepsilon$, то процесс прекращают, в противном случае возвращаются к пункту 2.

Задача. Найти максимальное значение функции

$$f = 2x_1 + 4x_2 - x_1^2 - 2x_2^2$$

с точностью $\varepsilon \le 0{,}05$.

Решение. Найдем градиент функции:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2 - 2x_1; \ \frac{\partial f}{\partial x_2} = 4 - 4x_2; \ \nabla f(X) = ((2 - 2x_1); (4 - 4x_2)).$$

Возьмем в качестве первого приближения $X^{(0)} = (0;0)$, т.е. $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = 0$. Тогда значение функции $f(X^{(0)}) = 0$, а вектор-строка градиента функции равен $\nabla f(X^{(0)}) = (2;4)$. Выберем шаг итерации $\lambda = 0{,}25$ и рассчитаем параметры следующей точки:

$$x_1^{(1)} = x_1^{(0)} + \lambda \cdot \nabla f(x_1^{(0)}) = 0 + 0{,}25 \cdot 2 = 0{,}5,$$

$$x_2^{(1)} = x_2^{(0)} + \lambda \cdot \nabla f(x_2^{(0)}) = 0 + 0{,}25 \cdot 4 = 1{,}0.$$

Вычислим значение функции цели в новой точке и определим степень приближения:

$$f(X^{(1)}) = 2 \cdot 0{,}5 + 4 \cdot 1 - 0{,}25 - 2 \cdot 1 = 2{,}75, \quad \left| f(X^{(1)} - f(X^{(0)} \right| = 2{,}75 > \varepsilon.$$

Так как заданная точность не достигнута, продолжим итерационный процесс. Градиент функции в новой точке будет определяться вектор-строкой $\nabla f(X^{(1)}) = (1;0)$. Рассчитаем параметры следующей точки:

$$x_1^{(2)} = x_1^{(1)} + \lambda \cdot \nabla f(x_1^{(1)}) = 0{,}5 + 0{,}25 \cdot 1 = 0{,}75,$$

$$x_2^{(2)} = x_2^{(1)} + \lambda \cdot \nabla f(x_2^{(1)}) = 1{,}0 + 0{,}25 \cdot 0 = 1{,}0.$$

Значение функции цели в исследуемой точке и степень приближения равны:

$$f(X^{(2)}) = 2 \cdot 0{,}75 + 4 \cdot 1 - 0{,}5625 - 2 \cdot 1 = 2{,}9375,$$

$$\left| f(X^{(2)} - f(X^{(1)}) \right| = 0{,}1875 > \varepsilon.$$

Продолжим вычисления. В точке $X^{(2)} = (0{,}75;1{,}0)$ градиент функции будет иметь следующий вектор-строку: $\nabla f(X^{(2)}) = (0{,}5;0)$. Рассчитываем параметры третьей точки итерации:

$$x_1^{(3)} = x_1^{(2)} + \lambda \cdot \nabla f(x_1^{(2)}) = 0{,}75 + 0{,}25 \cdot 0{,}5 = 0{,}875,$$

$$x_2^{(3)} = x_2^{(2)} + \lambda \cdot \nabla f(x_2^{(2)}) = 1 + 0{,}25 \cdot 0 = 1{,}0.$$

Функция цели в третьей точке примет значение

$$f(X^{(3)}) = 2 \cdot 0{,}875 + 4 \cdot 1 - 0{,}875^2 - 2 \cdot 1 = 2{,}9844.$$

Соответственно полученная точность:

$$\left| f(X^{(3)} - f(X^{(2)} \right| = 0{,}0469 < \varepsilon.$$

Тогда в пределах заданной точности ответ следующий:

$$X^* = (0{,}875;1{,}0), \; f_{\max} = 2{,}9844.$$

Если точность недостаточна, процесс итерации следует продолжить. Теоретическое решение данной задачи: $X^* = (1{,}0;1{,}0)$, $f_{\max} = 3{,}0$.

Тема 14. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ УСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ. МЕТОД ШТРАФНЫХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим задачу определения максимального значения вогнутой функции $f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max$

при условиях:

$$g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_i,\ i = 1,2,...,m, \quad x_i \ge 0,\ i = 1,2,...,n.$$

В методе штрафных функций нахождение решения данной задачи сводится к определению максимального значения функции

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_1, x_2, ..., x_n) + H(x_1, x_2, ..., x_n),$$

являющейся суммой целевой функции задачи и функции $H(x_1, x_2, ..., x_n)$, называемой штрафной функцией.

Штрафная функция $H(x_1, x_2, ..., x_n)$ подбирается так, чтобы $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ мало отличалась от $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ при $x \in X$, и быстро возрастала при удалении точки $x \notin X$ от допустимого множества решений X.

В качестве штрафной функции может быть взята функция

$$H(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(x_1, x_2, ..., x_n) g_i(x_1, x_2, ..., x_n),$$

$$\alpha_i(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{cases} 0,\ \textit{если}\ b_i - g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \ge 0, \\ \alpha_i,\ \text{если}\ b_i - g_i(x_1, x_2, ..., x_n) < 0. \end{cases}$$

Процесс нахождения решения задачи начинают с определения любой точки, принадлежащей области допустимых решений задачи $X^{(0)}$. Координаты каждой k+1точки $X^{(k+1)}$ находят по формуле:

$$X_j^{(k+1)} = \max\{0; X_j^{(k)} + \lambda \cdot [\frac{\partial F(X^{(k)})}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \frac{\partial g_i(X^{(k)})}{\partial x_j}]\}.$$

Если точка $X^{(k)}$ находится в области допустимых решений, то второе слагаемое в квадратных скобках равно нулю и переход к точке $X^{(k+1)}$ определяется градиентом целевой функции. Если же $X^{(k)}$ не принадлежит области допустимых решений, то за счет второго слагаемого точка $X^{(k+1)}$ возвращается в эту область.

Итерационный процесс завершается при достижении условия

$$\left| f(X^{(k)}) - f(X^{(k+1)}) \right| \le \varepsilon.$$

Алгоритм метода.

Метод штрафных функций включает следующие этапы:

1. Определяем исходное допустимое решение задачи.

2. Выбираем шаг вычислений λ.

3. Определяем координаты следующей точки.

4. Проверяем, принадлежит ли точка ОДР. Если да, то исследуем необходимость перехода к следующему решению, и либо находим оптимальное решение, либо переходим к п. 2. Если найденная точка лежит вне ОДР, то переходим к п. 5.

5. Устанавливаем значение весовых коэффициентов α_i и переходим к п. 3.

Пример. Найти максимальное значение функции $f(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2$

при условиях: $(x_1 - 7)^2 + (x_2 - 7)^2 \le 18, \qquad x_1, x_2 \ge 0.$

Точность решения ε взять равной 0,1.

Решение. В качестве исходного допустимого решения возьмем точку $X^{(0)} = (6;7)$. Шаг вычислений λ возьмем равным 0,1. Найдем частные производные от целевой функции и функции ограничения.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = -2x_1; \ \frac{\partial g}{\partial x_1} = -2x_1 + 14, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = -2x_2; \ \frac{\partial g}{\partial x_2} = -2x_2 + 14.$$

Итерация 1

Так как точка $X^{(0)} = (6;7)$ принадлежит ОДР, то α=0.

$x_1^{(1)} = \max\{0; 6 + 0{,}1 \cdot (-2) \cdot 6\} = 4{,}8, \ x_2^{(1)} = \max\{0; 7 + 0{,}1 \cdot (-2) \cdot 7\} = 5{,}6.$

$g(X^{(1)}) = 18 - 4{,}84 - 1{,}96 = 11{,}2.$ Точка $X^{(1)}$ принадлежит ОДР. Найдем значение целевой функции в этой точке $f(X^{(1)}) = -54{,}4.$

Итерация 2

$$x_1^{(2)} = \max\{0; 4{,}8 + 0{,}1 \cdot (-2) \cdot 4{,}8\} = 3{,}84,$$

$$x_2^{(2)} = \max\{0;5,6 + 0,1 \cdot (-2) \cdot 5,6\} = 4,48.$$

$$g(X^{(2)}) = 18 - 9,9856 - 6,3504 = 1,664 > 0.$$

Следовательно, точка $X^{(2)}$ принадлежит ОДР. $f(X^{(2)}) \approx -34,816.$

$$\left| f(X^{(2)}) - f(X^{(1)}) \right| = \left| -54,4 + 34,816 \right| > \varepsilon = 0,1.$$

следует продолжить итерационный процесс.

Итерация 3

$$x_1^{(3)} = \max\{0;3,84 + 0,1 \cdot (-2) \cdot 3,84\} = 3,072,$$

$$x_2^{(2)} = \max\{0;4,48 + 0,1 \cdot (-2) \cdot 4,48\} = 3,584$$

$$g(X^{(3)}) = 18 - 15,429 - 11,669 = -9,09 < 0.$$

Точка $X^{(3)}$ лежит вне области допустимых решений, и для определения следующей итерационной точки необходимо использовать весовой коэффициент α.

Итерация 4

Выбирать значение α будет таким образом, чтобы точка не слишком далеко удалялась от границы области и вместе с тем лежала внутри области. Этим требованиям, например, удовлетворяет α=1,9.

$$x_1^{(4)} = \max\{0;3,072 + 0,1 \cdot [(-2) \cdot 3,072 + 1,9 \cdot ((-2) \cdot 3,072 + 14\} \approx 3,95,$$

$$x_2^{(4)} = \max\{0;3,584 + 0,1 \cdot [(-2) \cdot 3,584 + 1,9 \cdot ((-2) \cdot 3,584 + 14\} \approx 4,17.$$

$$g(X^{(4)}) = 18 - 9,3025 - 8,0372 = 1,86 > 0. \quad f(X^{(4)}) \approx -32,95.$$

$$\left| f(X^{(2)}) - f(X^{(4)}) \right| = \left| -34,816 + 32,95 \right| = 1,86 > \varepsilon = 0,1.$$

Продолжим итерационный процесс. После десяти итераций получим решение с требуемой точностью:

$x_1^{(10)} \approx 4,04,\ x_1^{(10)} \approx 4,012.\ f(X^{(10)}) \approx -32,128.$

Ответ: $x_1 = 4,04,\ x_2 = 4,012.\ f(4,04;4,012) = -32,128.$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Пантелеев А.В., Летова Т.А. Методы оптимизации. Практический курс: учеб. Пособие с мультимедиа сопровождением. [Электронный ресурс] – Логос 2011г. 424 с. – Режим доступа: http://www.knigafund.ru

2. Соколов А.В., Токарев В.В. Методы оптимальных решений. В 2 т. Т.1. Общие положения. Математическое программирование учебное пособие. [Электронный ресурс]. ФИЗМАТЛИТ 2011г. – 564 с. – Режим доступа: http://www.knigafund.ru

3. Корниенко В.П. Методы оптимизации учебник для вузов/ В.П. Корниенко. – М.: Высш. шк., 2007 – 664 с.

Учебно-практическое издание

Долгополов Николай Владимирович

Методы оптимизации

Учебно-методическое пособие для практических занятий

Редактор Юшко Н.А.

Подписано в печать 12.03.2017 г.
Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 3,85. Уч.-изд. л. 3,75. Тираж 100 экз. Заказ 47-5746/26

Южно-Российский государственный политехнический университет
(НПИ) имени М.И. Платова
Редакционно-издательский отдел ЮРГПУ(НПИ)
346428, г.Новочеркасск, ул. Просвещения, 132

Отпечатано в Издательско-полиграфическом комплексе «Колорит»
346430, г.Новочеркасск, пр. Платовский, 82Е
Тел.: 8(8635) 226-442, 8-952-603-0-609, e-mail: center-op@mail.ru