

ОСНОВЫ РАСЧЕТА ДЕТАЛЕЙ МЕХАНИЗМОВ НА ПРОЧНОСТЬ, ЖЕСТКОСТЬ И УСТОЙЧИВОСТЬ

1. Основные положения

1.1. Введение

При проектировании и исследовании механизмов возникает определенный круг задач, например, по кинематике, динамике. Решение таких задач может быть осуществлено без учета деформируемости деталей, которые рассматриваются как абсолютно твердые тела.

Однако в реальных механизмах составляющие их звенья под воздействием внешних нагрузок деформируются, что при определенных условиях может привести к выходу механизма из строя (потеря прочности, жесткости или устойчивости). Одной из инженерных дисциплин, с помощью которых решаются задачи исследования прочности и деформируемости деталей, поперечные размеры которых значительно меньше длины, является “Сопротивление материалов”. На базе этой дисциплины, с учетом некоторых допущений и дополнений, изучаются общие методы расчетов деталей на прочность, жесткость и устойчивость, обеспечение минимальной массы и габаритов разрабатываемых авиационных механизмов. Рассмотрим эти методы.

1.2. Допущения

С целью упрощения расчетов примем некоторые допущения относительно свойств материала, нагрузок и характера взаимодействия деталей и нагрузок.

1-е допущение. Материалы тел предполагаются совершенно упругими, т.е. перемещения, являющиеся результатом деформации тела, линейно зависят от действующих сил и обращаются в ноль при снятии нагрузки.

2-е допущение. Материал тела сплошной, однородный, т.е. обладает во всех точках одинаковыми свойствами.

3-е допущение. Материалы деталей изотропны, т.е. обладают одинаковыми свойствами во всех направлениях.

4-е допущение. В материале детали до приложения нагрузки нет внутренних (начальных) усилий.

5-е допущение, или принцип независимости действия сил. Результат воздействия на тело системы сил равен сумме результатов воздействия тех же сил, прилагаемых к телу последовательно и в любом порядке. При этом перемещения при деформации считаются малыми по сравнению с размерами тела и подчиняются закону Гука: “До тех пор, пока величины внешних нагрузок не превысят определенных значений, между ними и перемещением любой точки тела по любому направлению существует линейная зависимость”.

6-е допущение, или принцип Сен-Венана. В точках тела, достаточно удаленных от мест приложения нагрузок, внутренние силы весьма мало зависят от конкретного способа приложения этих нагрузок.

Существует также ряд других частных допущений и гипотез, о которых будет сказано в соответствующих местах курса.

1.3. Нагрузки

Нагрузки, действующие на детали механизмов (или вызываемые взаимодействием деталей друг на друга) представляют собой силы или моменты сил. Они могут быть сосредоточенными (действующими практически в точке) и распределенными (действующими по длине, площади или объему детали). Согласно принципу Сен-Венана распределенную нагрузку при необходимости можно привести к сосредоточенной. В технической механике принято обозначать силу F в Ньютонах, Н; момент M — в Ньютон миллиметрах, Н·мм; длину l — в мм, площадь A — в мм².

Сосредоточенные и распределенные нагрузки могут быть статическими и динамическими.

Статическими называются нагрузки, которые изменяют свою величину, точку приложения или направление с очень небольшой скоростью, что позволяет пренебречь влиянием сил инерции на прочность.

Динамическими называются нагрузки, изменяющиеся со значительной скоростью и по определенному закону от времени, что влияет на прочностные характеристики материала деталей.

1.4. Деформации

Деформацией тела называется всякое изменение его первоначальных размеров или формы, возникающее под воздействием внешних нагрузок. Деформация есть результат изменения межатомных расстояний в материале тела, она сопровождается изменением сил межатомного взаимодействия, которые далее мы будем называть внутренними силами.

Изменение линейных размеров тела называется **линейной**, а изменение угловых размеров — **угловой** деформациями.

Деформации, практически полностью исчезающие после снятия нагрузки называются **упругими**, а свойство тел принимать после разгрузки свою первоначальную форму — **упругостью**.

Если же после снятия нагрузки исчезает не вся деформация, то оставшаяся её часть называется **остаточной**, а деформация — **пластичной**.

В данном разделе будем рассматривать только упругую деформацию.

1.5. Метод сечений

Если тело находится в равновесии, то в пространстве это условие записывается шестью уравнениями статического равновесия сил (рис. 1. 1),

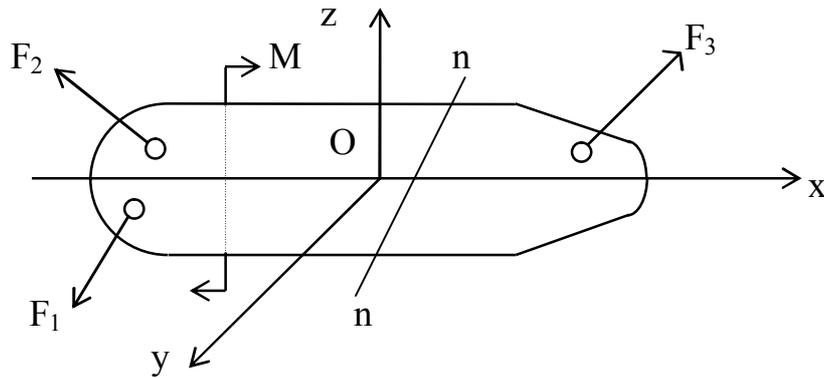


Рис. 1.1

$$\begin{aligned} \Sigma X &= 0 & \Sigma M_x &= 0 \\ \Sigma Y &= 0 & \Sigma M_y &= 0 \\ \Sigma Z &= 0 & \Sigma M_z &= 0, \end{aligned}$$

а на плоскости (например xOz) – тремя: $\Sigma X = 0, \Sigma Z = 0, \Sigma M_y = 0$.

Читается это так: проекции всех внешних сил на оси координат и моментов относительно осей координат равны нулю.

Задачей сопротивления материалов является определение внутренних силовых факторов. Для этого применяется метод сечений:

Если тело, находящееся в статическом равновесии под воздействием внешних сил и моментов **мысленно** рассечь поперечной плоскостью и отбросить какую либо часть, то оставшаяся часть также будет находится в состоянии равновесия под воздействием внутренних сил и моментов, действующих на оставшуюся часть.

Как было сказано выше, в данном разделе курса исследуются тела, длина которых много больше размеров их поперечного сечения. Рассмотрим случай пространственного нагружения тела, расположив его продольную ось вдоль оси Ox (рис.1.1). Согласно вышеизложенному методу мысленно рассежем тело поперечной плоскостью $n-n$ и отбросим, например, правую часть. В центре тяжести сечения O левой части расположим оси координат (рис.1.2).

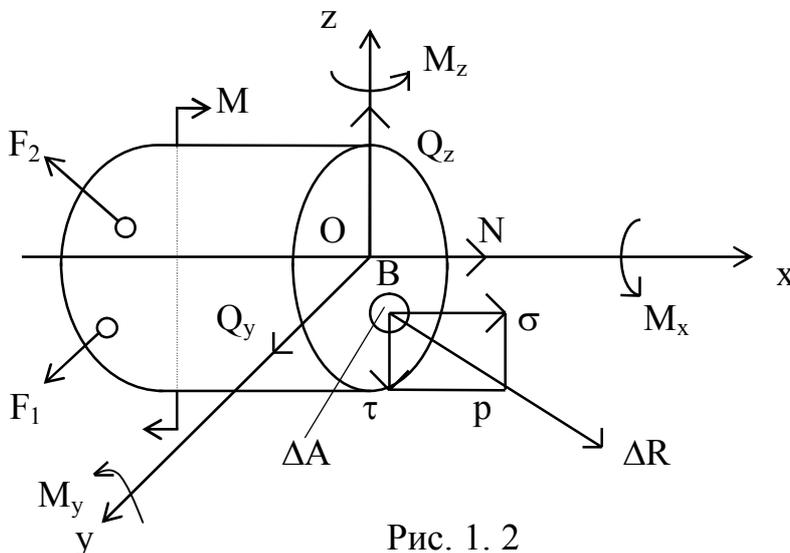


Рис. 1. 2

Действие правой отброшенной части заменим следующими внутренними силовыми факторами.

N — нормальная (продольная) сила, направлена по нормали к сечению вдоль продольной оси тела (совпадает с осью Ox). Она стремится оторвать одну часть тела от другой;

Q_y, Q_z — поперечные (перерезывающие) силы, они расположены в плоскости рассматриваемого сечения и стремятся сдвинуть одну часть тела относительно другой;

$M_x \equiv T$ (Torsion – кручение) – крутящий момент, он возникает при закручивании тела вокруг продольной оси;

M_y, M_z – изгибающие моменты в плоскостях xOz и xOy , они стремятся изогнуть продольную ось рассматриваемого тела.

Для определения этих шести внутренних силовых факторов необходимо использовать шесть уравнений равновесия, приравняв нулю суммы проекций сил, приложенных к отсеченной части на три оси координат и приравняв нулю суммы моментов сил относительно трех осей, имеющих начало в центре тяжести сечения (рис.1.2).

Для решения конкретной задачи количество уравнений статики берется ровно столько, сколько неизвестных внутренних сил и моментов требуется определить. “Лишние” уравнения могут быть использованы для дополнительной проверки правильности выполненных расчетов. Задача при этом считается **статически определимой**. Если число неизвестных внутренних усилий больше, чем уравнений статики, задача является **статически неопределимой** и для ее решения необходимы дополнительные уравнения деформации тела.

1.6. Виды деформаций. Понятие о напряжениях

1. Если в поперечном сечении рассмотренного тела (рис.1.2) возникает только нормальная сила N , а остальные факторы отсутствуют, то на этом участке в зависимости от направления N имеет место деформация **растяжения или сжатия**.
2. При деформации сжатия в месте приложения нагрузки наблюдается деформация **смятия**.
3. При наличии только поперечных сил происходит **сдвиг**.
4. Если действует только крутящий момент M_x , тело подвергается деформации **кручения**.
5. Если имеются только изгибающие моменты, искривляющие продольную ось, деформация называется **изгибом**.

Перечисленные пять видов деформаций называются **простыми**. Сочетание нескольких простых деформаций называют **сложной деформацией**.

Чтобы характеризовать закон распределения внутренних сил по сечению, вводят понятие **напряжения**. Как же измерить интенсивность внутренних сил в любой точке какого либо сечения? Например, в сечении тела, изображенного на рис. 1. 2, выделим вокруг точки B бесконечно малую

площадку ΔA . Равнодействующую внутренних сил, действующих на этой площадке, обозначим ΔR . Тогда напряжение в данной точке В будет равно:

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \Delta R / \Delta A = dR / dA \quad (1.1)$$

Напряжение — физический параметр, характеризующий интенсивность внутренних сил в определенной точке данного сечения и численно равный отношению элементарной внутренней силы к площади сечения, на которой она действует.

За единицу напряжения в “Технической механике” принят МПа (мегапаскаль) = Н/мм². Полное напряжение p можно разложить на две составляющие (рис. 1.2):

σ — **нормальное напряжение** (составляющая, нормальная к плоскости сечения);

τ — **касательное напряжение** (составляющая, лежащая в плоскости сечения). В зависимости от действующих сил касательное напряжение может иметь любое направление в плоскости сечения.

Разложение полного напряжения на нормальное и касательное имеет определенный физический смысл. Нормальное напряжение возникает, когда частицы материала стремятся отдалиться друг от друга или, наоборот, сблизиться. Касательные напряжения связаны со сдвигом частиц материала по плоскости рассматриваемого сечения.

1.7. Типовые детали механизмов

При изучении деформаций и напряжений многообразие форм деталей независимо от их функционального назначения сводятся к следующим простейшим типам в зависимости от характерных геометрических признаков и воспринимаемых нагрузок:

1 — брус — тело, длина которого значительно (на порядок) больше размеров поперечного сечения;

2 — стержень — прямой брус (с прямолинейной осью), подвергающийся деформации растяжения или сжатия;

3 — балка — брус, подвергающийся изгибу, или изгибу совместно с растяжением;

4 — вал — брус, подвергающийся деформации кручения (или сложной деформации — кручению совместно с изгибом и растяжением);

5 — оболочка — тело, имеющее один размер значительно меньше двух других;

6 — массив — тело, все три измерения которого одного порядка.

2. Растяжение и сжатие

2.1. Деформация и напряжение при осевом растяжении

Осевым растяжением (сжатием) стержня называется деформация его силами F , линия действия которых совпадает с продольной осью стержня (рис.2.1.).

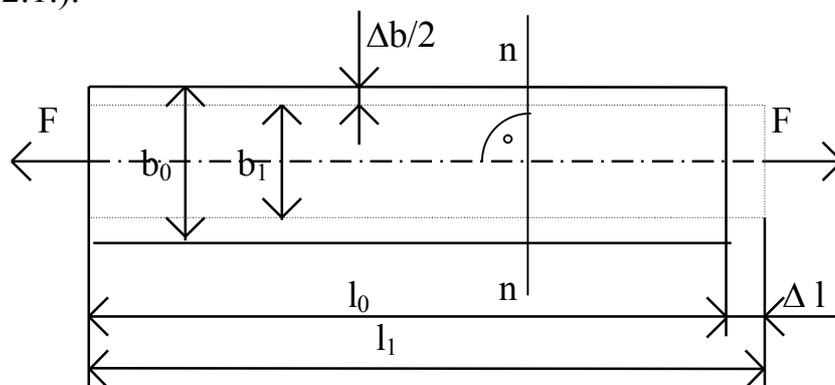


Рис. 2. 1

Деформация растяжения проявляется в изменении длины и поперечных размеров стержня.

Для количественной характеристики деформации растяжения используются следующие величины (см. рис.2.1.): l_0 — первоначальная длина стержня, l_1 — длина после деформации, $\Delta l = l_1 - l_0$ — абсолютное удлинение; b_0 — первоначальный, b_1 — конечный размер поперечного сечения стержня, $\Delta b = b_1 - b_0$ — абсолютное изменение поперечных размеров; $\varepsilon = \Delta l / l_0$ — относительное удлинение, $\varepsilon_1 = \Delta b / b_0 = (b_1 - b_0) / b_0$ — относительная поперечная деформация.

Для различных материалов $\varepsilon_1 = -\mu\varepsilon$, где μ — коэффициент Пуассона, он определяется экспериментально и равен: для сталей $\mu = 0,25 \dots 0,33$ (обычно в среднем берут $\mu = 0,3$), для бронз — $0,32 \dots 0,35$, для алюминиевых сплавов — $0,3 \dots 0,36$ и т. д. Коэффициент μ положителен, а знак "-" в формуле указывает, что при растяжении стержня его поперечное сечение уменьшается, а при сжатии — наоборот.

Для определения напряжений, действующих в поперечных сечениях стержня (сечение всегда нормально продольной оси), применим метод сечения и гипотезу плоских сечений (гипотезу Бернулли), согласно которой поперечные сечения бруса, плоские и нормальные к его оси до деформации, остаются плоскими и нормальными к оси и после деформации.

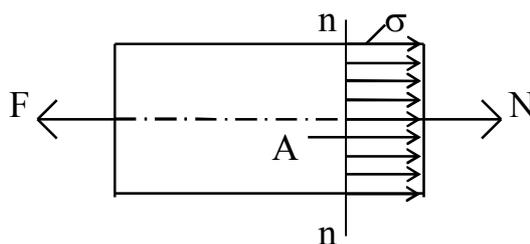


Рис. 2.2

Отсечем левую часть стержня (рис.2.1.) по сечению n-n, отбросив правую часть (рис.2.2.). Поскольку сечение n-n “нормально” оси стержня и внешней силе F , то в нем будут присутствовать только нормальные напряжения σ , равные во всех точках сечения A . Внутренняя сила N будет равна равнодействующей элементарных сил $dN = \sigma dA$, т.е. $N = \int_A \sigma dA = \sigma \int_A dA = \sigma A$. Отсюда:

$$\boxed{\sigma = N/A} \quad (2.1.)$$

При растяжении внутренняя сила N и напряжение σ считаются положительными, при сжатии — отрицательными.

2.2. Диаграмма растяжения и ее характерные точки

В расчетах на прочность и жесткость при растяжении, сжатии, сдвиге, кручении и изгибе необходимо знать механические свойства материалов. Эти свойства выявляются при испытаниях опытных образцов (обычно круглого сечения) с длиной рабочей части $l_0 = (5 \dots 10)d$. Испытания проводят на универсальных испытательных машинах, а для количественного выражения механических характеристик материала испытываемого образца используют условную диаграмму “напряжение — деформация”, изображенную в координатах $\sigma = N/A_0$ и $\varepsilon = \Delta l/l_0$, где $N = F$ — прилагаемая сила, A_0 и l_0 — первоначальная площадь сечения и длина рабочей части образца, Δl — абсолютная, ε — относительная деформации (см. рис.2.3.).

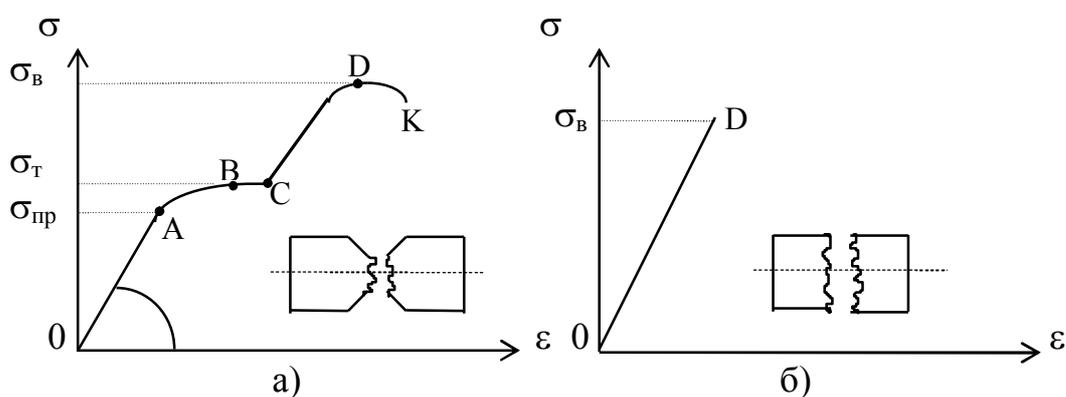


Рис. 2. 3

Рассмотрим диаграмму растяжения пластичного материала (рис.2.3,а), отметив на ней характерные точки А, В, С, D и К. На участке ОА между σ и ε существует строго пропорциональная зависимость, здесь свойства материала подчиняются закону Гука. Напряжение $\sigma_{пр}$, соответствующее точке А, называется **пределом пропорциональности**. На участке АВ диаграмма становится криволинейной, пропорциональность нарушается, однако деформация еще остается упругой (при снятии нагрузки остаточная деформация

ция не превосходит некоторую весьма малую величину $\varepsilon_{\text{ост}}=(0,002\dots 0,005)\%$.

На участке BC деформация растет быстрее нагрузки и в точке C материал начинает "течь". Это вызывается сдвигами в кристаллической решетке. Участок BC – зона текучести, когда удлинение образца Δl происходит без увеличения силы F. Напряжение, соответствующее точке B диаграммы, называется **пределом текучести** σ_T .

В случае полной разгрузки образца из пластичного материала, прошедшего зону текучести, в нем наблюдается остаточная деформация $\varepsilon_{\text{ост}}$. При повторном нагружении предел пропорциональности значительно возрастает. Это явление называется **наклёп** или **нагартовка** и учитывается при конструировании (может улучшить или ухудшить прочность конструкции).

На участке CD внутренняя структура материала значительно изменяется, благодаря чему с увеличением нагрузки деформация вновь растет, причем более интенсивно, чем в зоне упругости. В точке D напряжение достигает максимального значения, которое может выдержать образец. Это напряжение σ_B называют **пределом прочности** или временным сопротивлением.

За точкой D в образце возникает суженная зона (шейка), поэтому дальнейшая деформация протекает при уменьшении нагрузки F. В точке K происходит разрыв образца.

Диаграмма растяжения хрупких материалов имеет только одну характерную точку D (рис.2.3,б) в которой и наступает разрушение. Точке K соответствует напряжение σ_B .

Некоторые хрупкие материалы (бронзы, дюралюминий, специальные стали и др.) имеют так называемый **условный предел текучести** $\sigma_{0,2}$ — это такое напряжение, при котором остаточная деформация равна 0,2 %. Например, у стали 37ХН3А $\sigma_{0,2} = 1000$ МПа, у бронзы БрАЖ9-4 — 250 МПа.

Для большинства конструкционных материалов их прочностные характеристики при растяжении и сжатии можно считать одинаковыми, хотя предел прочности некоторых хрупких материалов (например, чугуна) при сжатии может быть значительно выше, чем при растяжении.

2.3. Закон Гука

При осевом растяжении стержня напряжение пропорционально деформации:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

(2.2)

где E — коэффициент пропорциональности (модуль Юнга, модуль упругости первого рода). Учитывая, что $\sigma = N/A_0$, а $\varepsilon = \Delta l/l_0$, получим:

$$\Delta l = Nl_0/EA_0$$

$$(2.3)$$

Зависимости (2.2) и (2.3) принято называть законом Гука при растяжении или сжатии.

Из рис.2.3,а видно, что закон Гука справедлив на участке ОА, где в любой точке диаграммы $\sigma = E\varepsilon$. Модуль Юнга геометрически пропорционален тангенсу угла наклона диаграммы $\operatorname{tg}\alpha$. Очень важна физическая интерпретация модуля упругости. Если условно представить, что $\Delta l = l_0$ (т.е. образец удлинился в 2 раза), то $\varepsilon = 1$ и тогда $E = \sigma$, МПа. Таким образом, модуль E численно равен напряжению, которое могло бы возникнуть в опытном образце при его удлинении в два раза. Модуль E определяется экспериментально и приводится в таблицах в числе механических характеристик материалов. Например, для стали $E = (2...2,2) \cdot 10^5$, для бронз — $(0,9...1,15) \cdot 10^5$, алюминиевые сплавы — $0,7 \cdot 10^5$, капрон — 10^3 МПа.

2.4. Твердость

Твердостью называется свойство материала оказывать сопротивление механическому проникновению в его поверхностные слои некоторого стандартного, достаточно твердого тела.

Для определения твердости существует несколько методов, наиболее распространенными из которых являются методы Бринелля (НВ) и Роквелла (HRC). В первом случае в поверхность детали исследуемого материала вдавливается стальной закалённый шарик, во втором — алмазный конус. Число твердости определяется отношением силы F , вдавливающей шарик или конус, к площади лунки A ; т.е. измеряется в МПа. Рекомендуется шкалой НВ пользоваться до твердости не выше 350 МПа, а далее HRC. Для сравнения между собой приближенно можно считать, что НВ $\cong 10$ HRC. Например, для термообработанной стали 45А НВ = 514, HRC = 52. В технической документации пишут: твердость 514НВ. Или : твердость 52HRC.

2.5. Механические характеристики некоторых материалов

Для решения задач, которые будут рассматриваться ниже, приведём механические характеристики некоторых материалов. Например конструкционная качественная сталь 45А имеет $\sigma_b = 590$ МПа, $\sigma_T = 315$ МПа, твердость = 180 МПа при нормальных условиях эксплуатации (температура +20°C, нормальное давление и т.д.) и термообработке, которая называется “нормализация”. При термоулучшении $\sigma_b = 690$, $\sigma_T = 490$, твердость = 220 МПа, а при поверхностной закалке токами высокой частоты (п.з. ТВЧ) и низком отпуске (н.о.) $\sigma_b = 880$, $\sigma_T = 635$, а твердость повышается до 514НВ (52HRC) МПа. У легированных сталей прочность и твердость значительно выше. Например, у стали 40ХН2МА при термоулучшении $\sigma_b = 980$, $\sigma_T = 835$, НВ = 300 МПа, а при п.з. ТВЧ, н.о. — $\sigma_b = 1080$, $\sigma_T = 930$, НВ = 512 (HRC = 52) МПа. У латуни ЛС59-1 $\sigma_b = 196$, $\sigma_T = 146$, НВ = 83 МПа. У бронзы

Бр0Ф6,5-0,15 $\sigma_B = 340 \dots 440$, $\sigma_T = 195 \dots 245$, HB = 68...88 МПа. У алюминиевого сплава Д16Т $\sigma_B = 292 \dots 422$, $\sigma_{0,2} = 275 \dots 294$ МПа. Магнийевый сплав МА1 имеет $\sigma_B = 196$, $\sigma_T = 98$, HB = 39 МПа.

Следует заметить, что хотя многие параметры и даны однозначно, реальные механические характеристики σ_B , σ_T , HB и др. при испытаниях подвержены большим рассеиваниям, хотя образцы идентичны и материал даже из одной плавки. Например, предел прочности стандартных образцов из стали 38ХА составляет $\sigma_B = 950 \dots 1200$ МПа. Причинами рассеивания являются различия в микроструктуре, степень дефектности материала, неточность измерения. А для совокупности всех плавок металла это рассеивание становится еще больше.

Таким образом, даже в нормальных условиях механические характеристики материалов являются случайными величинами, определяемыми с некоторой вероятностью.

Кроме этого, на механические характеристики материала влияют такие факторы, как изменение температуры, скорость изменения нагрузки и другие.

2.6. Основы расчета на прочность и жесткость при растяжении и сжатии

Прочность, т. е. способность сопротивляться разрушению, является важным свойством конструкции. Наибольшее распространение получили методы расчета по допускаемому напряжению и по запасам прочности.

Условие прочности при растяжении по допускаемому напряжению имеет вид:

$$\sigma_{\text{рmax}} = N/A \leq [\sigma_p] \quad (2.4)$$

где $\sigma_{\text{рmax}}$ — наибольшее расчетное напряжение детали, $[\sigma_p]$ — допускаемое напряжение материала детали при растяжении, N — расчетная внутренняя сила в сечении A.

Допускаемым называется такое наибольшее напряжение, при котором обеспечивается заданная надежность работы детали в течение заданного срока эксплуатации.

Ориентировочно допускаемое напряжение может быть определено по формуле:

$$[\sigma_p] = \sigma_{\text{оп}}/[n], \quad (2.5)$$

где $\sigma_{\text{оп}}$ — опасное или предельное напряжение, в качестве которого для пластичных материалов принимается предел текучести σ_T , для хрупких — предел прочности σ_B ; [n] — допускаемый (нормативный) запас прочности, зависящий от ряда факторов, основными из которых являются:

- 1 — неточность определения расчетных напряжений за счет отклонения условий работы системы от принятых в расчете;
- 2 — некоторый разброс характеристик материала;
- 3 — неточность определения значения внешних факторов;
- 4 — эксплуатационное назначение системы и связанная с ним серьезность последствий при возникновении опасных состояний;
- 5 — срок эксплуатации системы, определяющий снижение предельных параметров.

Выбор значений допускаемых запасов прочности и допускаемых напряжений в авиационных конструкциях основываются на опыте предшествующего проектирования и эксплуатации подобных конструкций и приводится в справочниках, заводских нормалях и др. В авиационной технике принимают $[n] = 1,5..2$. При меньших значениях $[n]$ деталь может разрушиться преждевременно, при больших — иметь лишний вес и габариты.

Условие прочности (2.4) используется в основном при предварительном проектировании для решения следующих задач:

а) по заданной силе N и допускаемому напряжению $[\sigma_p]$ определить минимальную площадь сечения детали A_{min} :

$$A_{min} \geq N/[\sigma_p] \quad (2.6)$$

б) по заданной площади A и допускаемому напряжению $[\sigma_p]$ определить максимально возможную нагрузку N_{max} :

$$N_{max} \leq A \cdot [\sigma_p] \quad (2.7)$$

При проверочных расчетах проверку на прочность удобнее проводить по расчетному запасу прочности n :

$$n = \sigma_{оп}/\sigma_{рmax} \geq [n] \quad (2.8)$$

Работоспособность подвергающихся растяжению или сжатию деталей определяется не только прочностью, но и **жесткостью**. Условие достаточной жесткости представляет собой неравенство, вытекающее из закона Гука (2.3):

$$\Delta l_{\Sigma} = \sum_{i=1}^n N_i \cdot l_i / (E \cdot A_i) \leq [\Delta l] \quad (2.9)$$

где $[\Delta l]$ — допускаемое абсолютное удлинение, Δl_{Σ} — суммарное расчетное удлинение всех участков стержня, $i = 1, 2, \dots, n$ — номера участков.

2.7. Построение эпюр N , σ_p , Δl

Эпюра — диаграмма, выражающая изменение какого-либо параметра по длине бруса. При построении эпюр нормальных сил N , напряжений σ_p и перемещений Δl используют рассмотренный выше метод сечений.

Рассмотрим построение эпюр N , σ_p и Δl , а также проверим выполнение условий прочности и жесткости для стального двухступенчатого стержня (рис. 2.4) имеющего следующие исходные параметры: $F = 100\text{Н}$, $A = 1\text{мм}^2$, $a = 20\text{мм}$, $E = 2 \cdot 10^5\text{МПа}$, $\sigma_T = 490\text{МПа}$ (сталь 45А), $[n] = 1,5$, $[\Delta l] = 0,05\text{мм}$.

Решение

1. Определяем реакцию R_A в заделке А на основании уравнения статического равновесия $\Sigma X = 0$, направим реакцию влево. Тогда:

$$-R_A - 4F + 2F + F = 0 \Rightarrow R_A = -F.$$

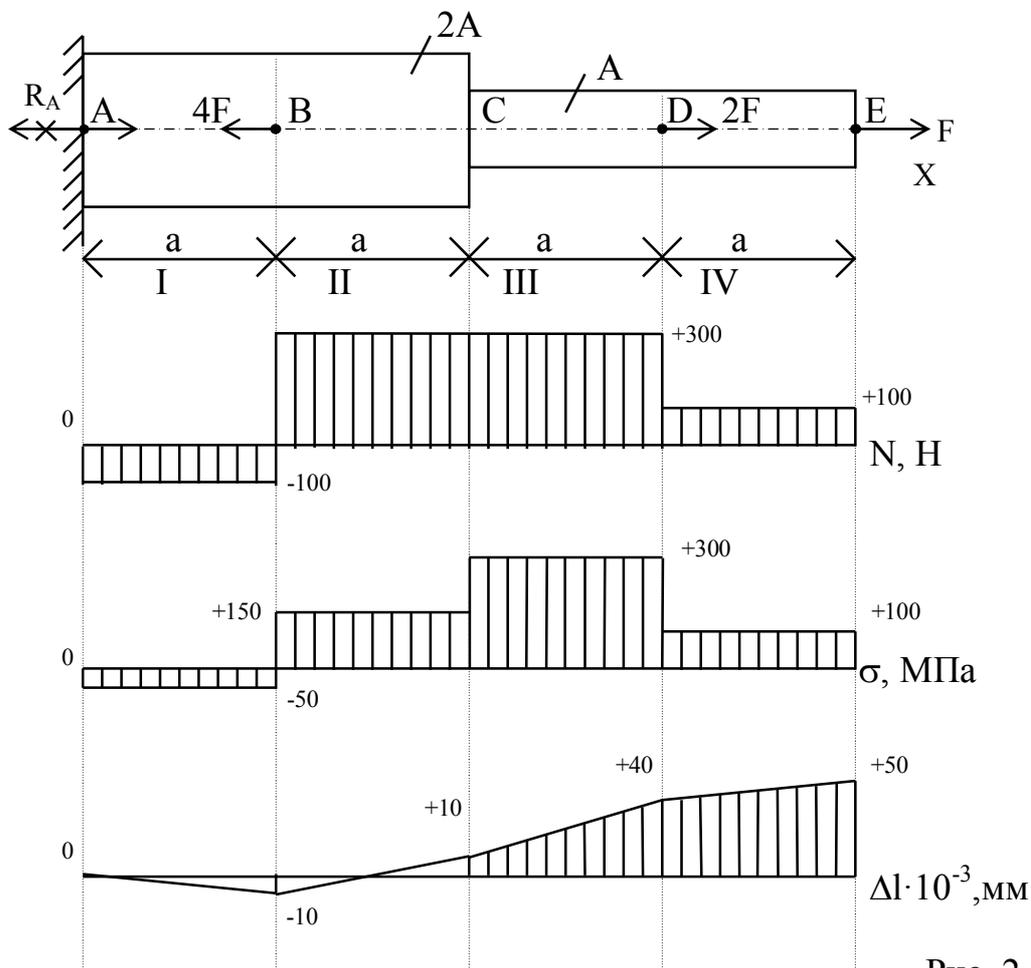


Рис. 2. 4

Знак “-” указывает на то, что истинное направление реакции R_A направлено в другую сторону. Зачеркиваем первоначальное направление и направляем R_A вправо. Теперь $R_A = F = 100\text{Н}$.

2. Строим эпюру распределения нормальных сил N , используя метод сечений, который в данном случае будет читаться так: “Если стержень, находящийся в равновесии под воздействием внешних сил, действующих

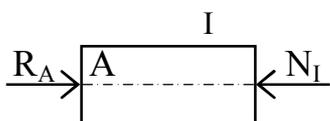
вдоль оси, мысленно рассечь поперечной плоскостью и отбросить какую-либо часть, то оставшаяся часть также будет находиться в равновесии под воздействием внутренней нормальной силы N , действующей на нее со стороны отброшенной части; при этом N численно равна **алгебраической** сумме внешних сил, действующих на оставшуюся часть:

$$N = \sum_{i=1}^n F_i - \sum_{k=1}^m F_k,$$

где F_i — силы, растягивающие рассматриваемый участок, F_k — сжимающие его, n и m — количество растягивающих и сжимающих сил”.

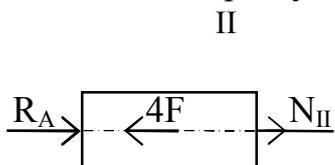
Разобьем стержень на 4 участка: I – AB, II – BC, III – CD, IV – DE. Начнем построения слева, с первого участка.

а) Рассекаем первый участок поперечной плоскостью, левую часть оставляем, правую - отбрасываем:



$N_I = - R_A = - 100$ Н. Знак “-” показывает, что участок АВ сжимается.

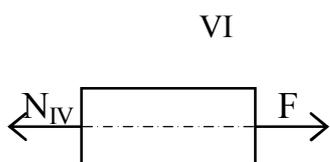
б) Рассекаем второй участок, оставив левую часть:.



$N_{II} = - R_A + 4F = - F + 4F = 3F = 300$ Н. (участок II растягивается).

в) На участке III внутренние силы такие же, как и на участке II, т. к. в сечении С изменяется только площадь.

г) Рассекаем участок VI, оставив правую часть :



$N_{IV} = + F = 100$ Н, участок растягивается. Строим эпюры N согласно расчетам.

3. Вычисляем по участкам и строим эпюру напряжений.

$\sigma_I = N_I/A_I = -100/2 = -50$ МПа; $\sigma_{II} = N_{II}/A_{II} = 300/2 = 150$ МПа;

$\sigma_{III} = N_{III}/A_{III} = 300/1 = 300$ МПа; $\sigma_{IV} = N_{IV}/A_{IV} = 100/1 = 100$ МПа.

Из эпюры напряжений видно, что наиболее нагруженным является участок CD, где $\sigma_{pmax} = 300$ МПа. По условию прочности (2.4) получим:

$\sigma_{pmax} = 300 < [\sigma_p] = \sigma_T/[n] = 496/1,5 = 326$ МПа, т. е. условие прочности выполняется.

4. Строим эпюру перемещений. Строить начинают обычно от заделки, а если ее нет, то от любого свободного конца стержня. Согласно закону Гука (2.3) на первом участке в сечении, отстоящем от заделки на расстоянии x , абсолютное удлинение равно:

$\Delta l_x = N_I \cdot x / (E \cdot A_I) = -100 \cdot x / (2 \cdot 10^5 \cdot 2) = -0,25 \cdot 10^{-3} x$ мм, где $0 \leq x \leq a$. Уравнение наклонной прямой с отрицательным уклоном. При $x = a$ получим

$$\Delta l_B = \Delta l_{AB} = -0,25 \cdot 10^{-3} \cdot 20 = -5 \cdot 10^{-3} \text{ мм.}$$

Далее используем “метод припасовывания”: перемещение точки С относительно заделки А равно перемещению точки В плюс абсолютное удлинение участка ВС:

$$\Delta l_C = \Delta l_B + \Delta l_{BC} = -5 \cdot 10^{-3} + N_{II} \cdot l_{II} / (E \cdot A_{II}) = -5 \cdot 10^{-3} + 300 \cdot 20 / (2 \cdot 10^5 \cdot 2) = (-5 + 15) \cdot 10^{-3} = 10 \cdot 10^{-3} \text{ мм.}$$

В точке D: $\Delta l_D = \Delta l_C + \Delta l_{CD} = 10 \cdot 10^{-3} + N_{III} \cdot l_{III} / (E \cdot A_{III}) = 10 \cdot 10^{-3} + 300 \cdot 20 / (2 \cdot 10^5 \cdot 1) = (10 + 30) \cdot 10^{-3} = 40 \cdot 10^{-3} \text{ мм.}$

В точке E: $\Delta l_E = \Delta l_D + \Delta l_{DE} = 40 \cdot 10^{-3} + N_{IV} \cdot l_{IV} / (E \cdot A_{IV}) = 40 \cdot 10^{-3} + 100 \cdot 20 / (2 \cdot 10^5 \cdot 1) = 50 \cdot 10^{-3} \text{ мм.}$ Строим эпюру Δl на рис. 2.4.

Проверяем условие жесткости:

$$\Delta l_{\max} = \Delta l_E = 50 \cdot 10^{-3} = 0,05 \text{ мм} = [\Delta l] = 0,05 \text{ мм, т.е. условие выполняется.}$$

Если хотя бы одно из условий не выполнялось, необходимо было бы принять дополнительные меры: снизить нагрузку, увеличить площадь сечения или взять более прочный материал.

5. Определяем расчетный запас прочности согласно (2.8):

$$n = \sigma_{\text{оп}} / \sigma_{p \max} = \sigma_T / \sigma_{p \max} = 490 / 300 = 1,63.$$

Поскольку $n = 1,63 > [n] = 1,5$, условие прочности выполняется.

2.8. Статически неопределимые системы

Имеется много конструкций, в элементах которых усилия не могут быть определены только из уравнений статического равновесия. Такие конструкции (системы) называются **статически неопределимыми**.

Рассмотрим две простейшие задачи статически неопределимых систем и методы их решения.

1. Стержень (рис. 2.5, а) зажат между двумя заделками так, что нагрузка F воспринимается как левой, так и правой заделками.

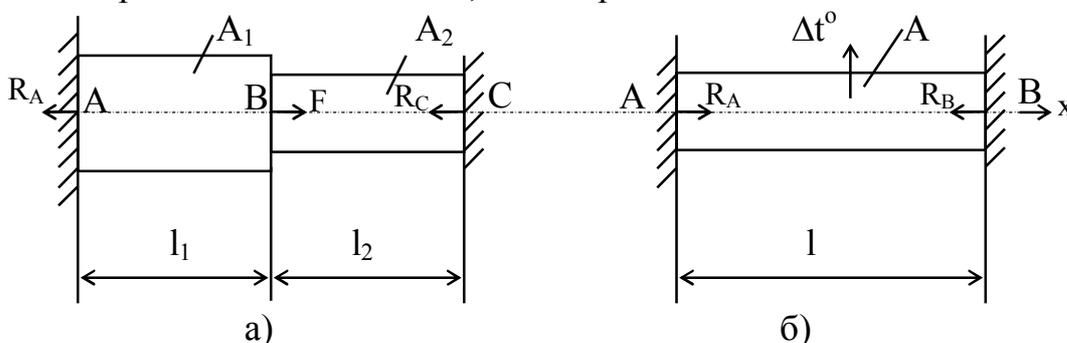


Рис. 2.5

Для определения реакций R_A и R_C можно использовать только одно уравнение статики $\sum X = 0$, из которого получаем: $R_A + R_C = F$. Так как неизвестных два, а уравнение одно, необходимо еще одно дополнительное уравнение — уравнение деформации стержня. Такая система будет называться **один раз статически неопределимой**. Если система требует двух уравнений перемещений, она называется **дважды статически неопределимой** и т. д.

Используя метод сечений, определяют внутренние силы $N_1 = R_A$ и $N_2 = -R_C$ на первом и втором участках, откуда на основании закона Гука находят суммарную деформацию стержня:

$$\Delta l_{AC} = \Delta l_{AB} + \Delta l_{BC} = (N_1 \cdot l_1) / (E \cdot A_1) + (N_2 \cdot l_2) / (E \cdot A_2). \text{ Поскольку стержень зажат с двух сторон и } \Delta l_{AC} = 0, \text{ получим:}$$

$$(R_A \cdot l_1) / (E \cdot A_1) + (-R_C \cdot l_2) / (E \cdot A_2) = 0.$$

Исходя из того, что из уравнения статики $R_C = F - R_A$, приняв, например, $l_1 = l_2$, $A_1 = 2A_2$, получим: $R_A = 2F / 3$, $R_C = F / 3$. Далее, при необходимости, осуществляется построение эпюр сил, напряжений, перемещений, производится анализ прочности и т. д.

2. Пусть металлический стержень длиной l зажат между двумя жесткими опорами А и В. При повышении температуры на Δt стержень должен удлиниться на $\Delta l_t = \alpha \cdot l \cdot \Delta t$, или $\varepsilon_t = \Delta l_t / l = \alpha \cdot \Delta t$, где α – температурный коэффициент линейного расширения (для стали $\alpha = 12 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$). Так как стержень зажат и не может удлиниться, в нем возникнет напряжение сжатия, значение которого определится по закону Гука:

$$\sigma_{сж} = E \cdot \varepsilon_t = E \cdot \alpha \cdot \Delta t \quad (2.10)$$

Например, если стальной вал жестко зажат между опорами, то независимо от его длины и размеров поперечного сечения при увеличении температуры напряжение в нем будет увеличиваться на

$$\sigma_{ст} = 2 \cdot 10^5 \cdot 12 \cdot 10^{-6} \cdot \Delta t = 2,4 \cdot \Delta t, \text{ т. е. на } 2,4 \text{ МПа на один градус.}$$

При $\Delta t = 100^\circ$ $\sigma_{сж} = 240$ МПа, что практически сделает вал неработоспособным. Реакции в опорах при этом будут равны $R_A = R_B = N = \sigma \cdot A$. При диаметре вала, например, равном $d = 10$ мм получим $R_A = 240 \cdot 78,5 = 18840$ Н. Это очень большая величина!

В более сложных случаях расчет статически неопределимых систем способом сравнения деформаций может приводить к ошибочным результатам, поэтому рекомендуется применять более строгие методы: метод сил или энергетический метод.

3. Сдвиг, смятие

3.1. Деформация и напряжение при сдвиге и срезе

Деформацией сдвига называют такую деформацию, при которой на брус действуют две равные по модулю, противоположные по направлению,

весьма близко расположенные друг к другу и перпендикулярные продольной оси бруса силы (рис. 3.1, а).

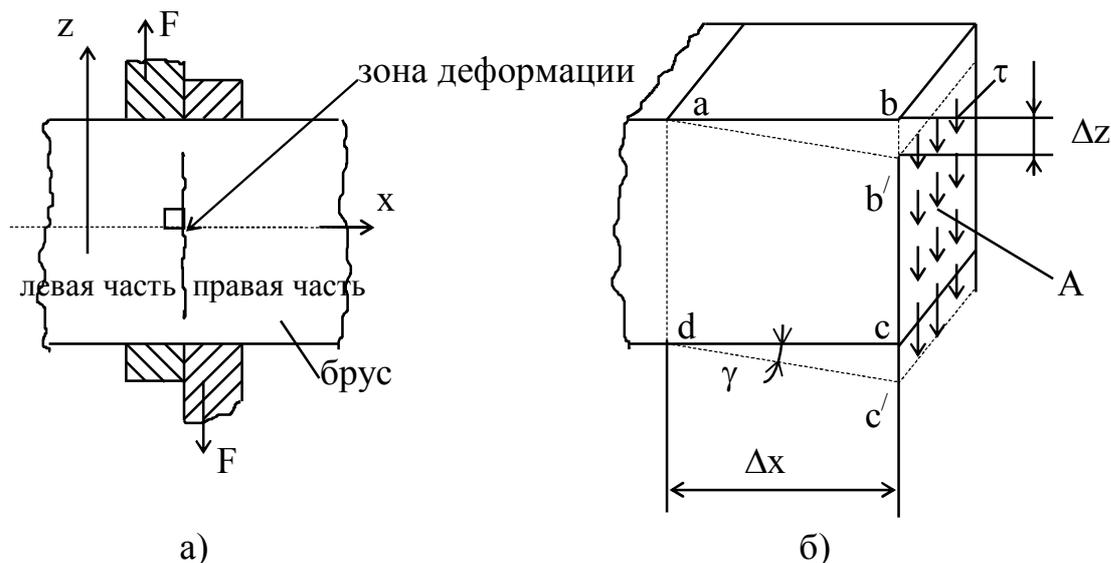


Рис. 3. 1

Выделенный в зоне деформации элемент (рис. 3.1, б) иллюстрирует относительное смещение его граней. Характерным для сдвига является перекашивание прямых углов в зоне деформации, в результате чего прямоугольник $abcd$ превращается в параллелограмм $ab'c'd$. Количественными характеристиками при сдвиге являются: Δz — абсолютный или линейный сдвиг; $\Delta z / \Delta x$ — относительный (угловой) сдвиг.

При деформации в пределах упругости значение $\Delta z / \Delta x$ мало и его можно выразить через угол сдвига:

$$\Delta z / \Delta x = \operatorname{tg} \gamma \approx \gamma \quad (3.1)$$

При сдвиге на гранях сечения A элемента $ab'c'd$ возникают внутренние силы взаимодействия с интенсивностью τ , где τ — касательное напряжение. Из опытов следует, что τ распределяется по сечению A равномерно, поэтому его значение может быть найдено из условия, что равнодействующая внутренних перерезывающих сил Q уравнивает внешнюю нагрузку F : $Q = \tau \cdot A = F$, откуда

$$\tau = F / A \quad (3.2)$$

При достижении касательным напряжением некоторого предельного значения, левая часть бруса (рис.3.1,а) может отделиться от правой, т.е. произойдет срез. В общем случае условие прочности детали на срез определяется выражением

$$\tau_{\text{ср}} = F_{\text{ср}} / A_{\text{ср}} \leq [\tau_{\text{ср}}], \quad (3.3)$$

где $[\tau_{\text{ср}}]$ — допустимое напряжение на срез.

В технической механике на срез проверяют в основном такие элементы конструкций, как штифты, шпонки, заклепки. Для элементов из углеродистых сталей принимают $[\tau_{\text{ср}}] = 70 \dots 80$ МПа, при ударных нагрузках его снижают до $[\tau_{\text{ср}}] = 35 \dots 40$ МПа (например для сталей 45, 50, А12 и др.).

3.2. Закон Гука при сдвиге

При деформации опытных образцов на сдвиг в пределах упругости установлено, что касательное напряжение τ пропорционально значению относительного сдвига γ :

$$\tau = G \cdot \gamma, \quad (3.4)$$

где G – коэффициент пропорциональности, который называется модулем упругости при сдвиге (модуль сдвига) или модулем упругости второго рода.

Между модулями упругости E и G существует зависимость:

$$G = E / 2 \cdot (1 + \mu) \approx 0,4 \cdot E \quad (3.5)$$

Например, для сталей $G = 0,8 \cdot 10^5$ МПа, для бронз $\approx 0,2 \cdot 10^5$, для алюминиевых сплавов $\approx 0,14 \cdot 10^5$ МПа.

Пример.

Для передачи вращающего момента $T = 1000$ Нмм с полого вала 1 (рис.3.2) на вал 2 диаметром $d = 10$ мм использовали штифт 3 диаметром $d_{\text{шт}} \leq 0,25d = 2,5$ мм, изготовленный из стали 45. Поскольку нагрузка реверсивно-ударная, принимается $[\tau_{\text{ср}}] = 40$ МПа. Провести проверку соединения на прочность и при необходимости внести коррективы в начальные условия.

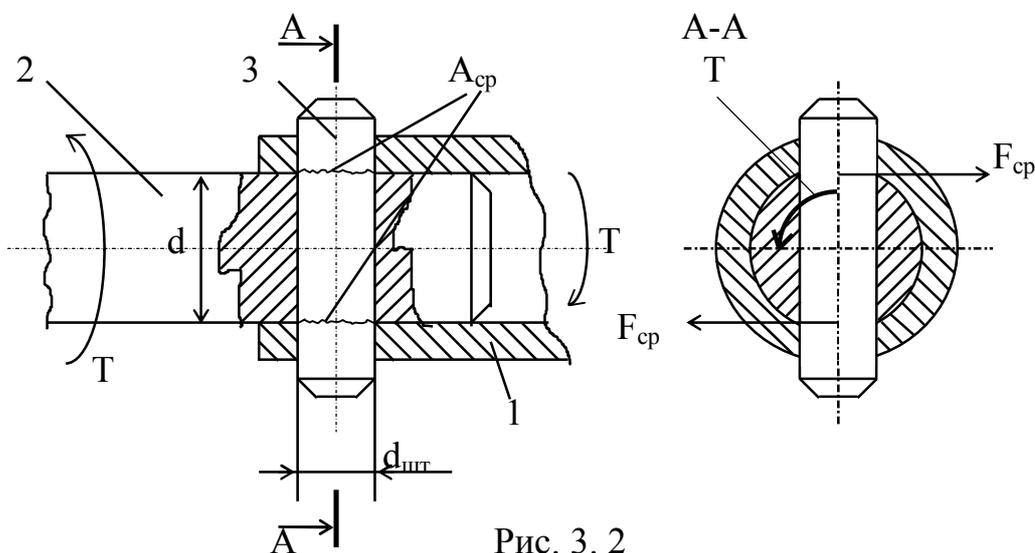


Рис. 3. 2

Решение.

Штифт срезается по двум сечениям, в которых площадь среза $A_{\text{ср}} = 2 \cdot \pi \cdot d_{\text{шт}}^2 / 4 = 2 \cdot 3,14 \cdot 2,5^2 / 4 = 9,8$ мм². Срезающая сила $F_{\text{ср}} = 2T / d = 2 \cdot 1000 / 10 = 200$ Н. Из условия прочности получим: $\tau_{\text{ср}} = F_{\text{ср}} / A_{\text{ср}} = 200 / 9,8 = 20$ МПа $< [\tau_{\text{ср}}] = 40$ МПа. Поскольку расчетное напряжение получилось меньше допустимого в два раза, можно либо оставить все как есть, либо увеличить в 2 раза вращающий момент, либо уменьшить диаметр

штифта из условия $A_{cp} \geq F_{cp} / [\tau_{cp}]$, откуда $d_{шт} \geq 1,78$ мм. По ГОСТ 3128-70 выбираем стандартный штифт диаметром $d_{шт} = 1,8$ мм.

3.3. Смятие

Особенностью деформации смятия является действие сжимающей силы на сравнительно небольшой площади. Например, головка стального стержня 1 давит на более мягкую пластину 2 силой F , (рис. 3.3, а), при этом поверхность пластины под головкой будет сжиматься, вдавливаясь внутрь.

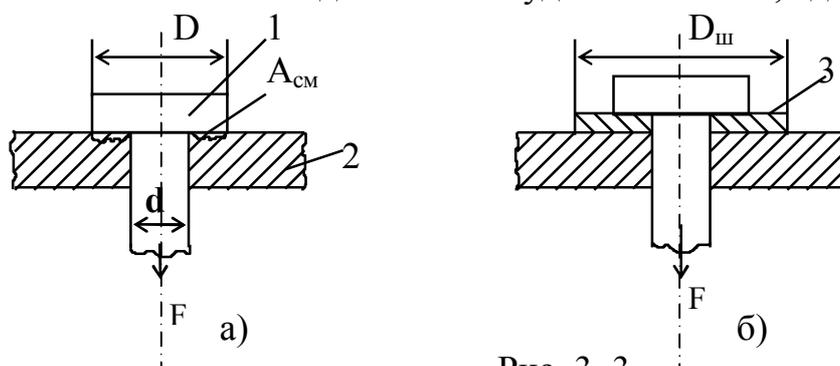


Рис. 3.3

В этих местах появится **местное** сжатие, напряжение от которого быстро убывает по мере удаления в стороны и вглубь материала пластины 2 и определяется по формуле:

$$\sigma_{см} = F_{см} / A_{см}, \quad (3.6)$$

где $F_{см} = F$ и при этом сминается как головка стержня, так и пластина. Если соприкасающиеся тела сделаны из разных материалов (как в данном примере), проверка на смятие проводится для более мягкого материала, т. е. в данном случае для пластины. Условие прочности при смятии имеет вид

$$\sigma_{см} = F_{см} / A_{см} \leq [\sigma_{см}], \quad (3.7)$$

где $[\sigma_{см}]$ — допускаемое напряжение более мягкого материала — пластины (например, литейный сплав АЛ7, $\sigma_{0,2} = 150$ МПа).

При статической нагрузке ориентировочно можно брать $[\sigma_{см}] = 0,8\sigma_T$, при пульсирующей — $0,5\sigma_T$, при знакопеременной — $0,4\sigma_T$ (или $\sigma_{0,2}$).

В данном примере при статическом нагружении силой $F = 6000$ Н, $d = 5$ мм, $D = 8$ мм получим:

$\sigma_{см} = F / A_{см} = F / 0,8(D^2 - d^2) = 6000 / 0,8(64 - 25) = 192$ МПа. Поскольку $[\sigma_{см}] = 0,8\sigma_T = 0,8 \cdot 150 = 120$ МПа, $\sigma_{см} > [\sigma_{см}]$, условие прочности на смятие не выполняется. Для удовлетворительного функционирования узла необходимо под головку стержня подложить стальную шайбу 3 (рис. 3.3, б), диаметр $D_{ш}$ которой определяется из условия прочности (3.7): $D_{ш} \geq 9,35$ мм. Принимаем $D_{ш} = 10$ мм. При этом согласно (3.7) и рис.3.3, $\sigma_{см} = F_{см}/A_{см} = F_{см} / 0,8(D_{ш}^2 - d^2) = 6000 / 0,8(10^2 - 5^2) = 100$ МПа $< [\sigma_{см}] = 120$ МПа, т.е. условие прочности на смятие выполняется.

В авиационных механизмах проверке на смятие подвергаются в основном штифтовые, шпоночные, шлицевые и др. соединения. Например, призматическая шпонка 2 (рис. 3.4), служащая для передачи крутящего момента T с вала 3 на колесо 1 имеет высоту h , ширину b и длину l (выбирается по таблицам стандартов в зависимости от диаметра вала d). Площадь смятия $A_{см} = l \cdot (h / 2)$, сила смятия $F_{см} = T / (d / 2) = 2T / d$.

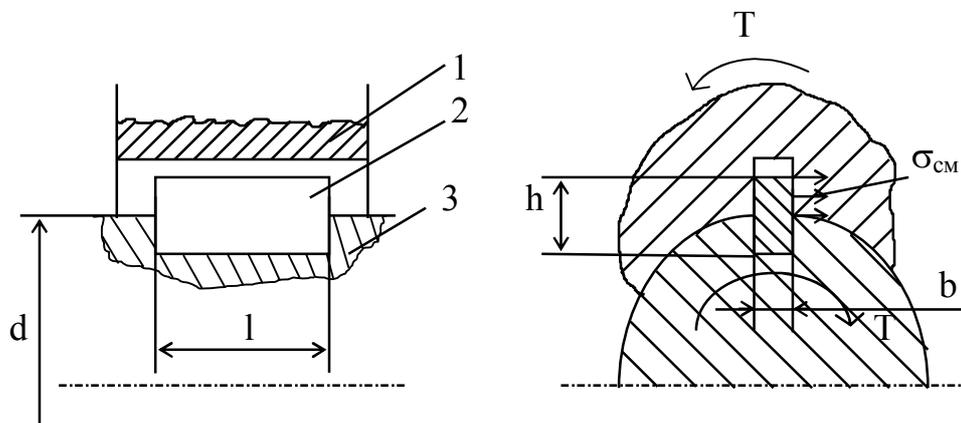


Рис. 3. 4

Проверку на смятие проводят по формуле 3.7, получаем $\sigma_{см} = 4T / (d \cdot l \cdot h) \leq [\sigma_{см}]$. При необходимости можно провести также и проверку на срез по формуле (3.3), где $A_{ср} = l \cdot b$, $F_{ср} = F_{см}$.

4. Геометрические характеристики плоских сечений

4.1. Общие положения

До сих пор при рассмотрении деформаций растяжения, сдвига или смятия площадь поперечного сечения элемента конструкции была единственной характеристикой, достаточной для рассмотрения на прочность и жесткость. При кручении и изгибе, как будет показано ниже, площадь сечения уже не может характеризовать меру сопротивляемости элемента внешним нагрузкам.

Например, при равных площадях сечений $A = b \cdot h$ и силе F сопротивляемость балки в положении рис. 4.1, а значительно выше, чем в положении рис. 4.1, б. То есть на величину напряжений в соответствующих сечениях балки при изгибе будет влиять не только величина площади A , но и ее конфигурация и ориентация относительно осей y и z .

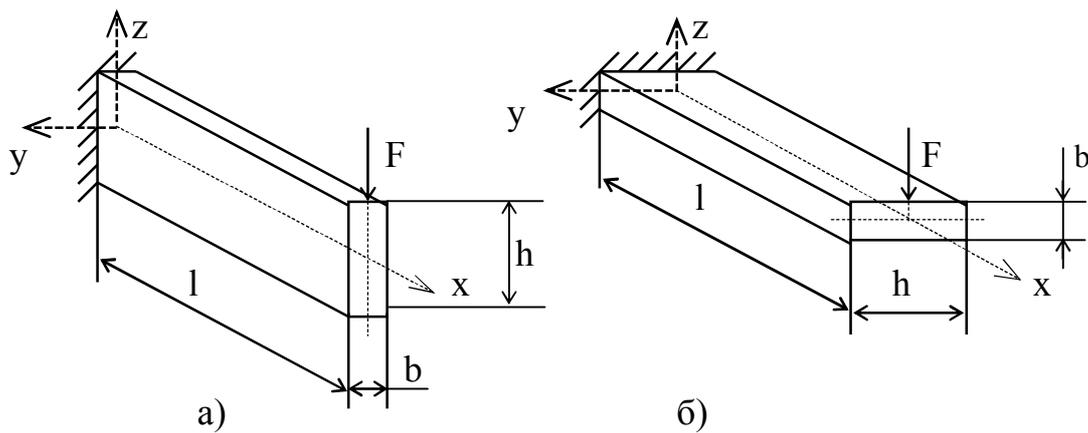


Рис. 4. 1

Рассмотрим некоторые геометрические характеристики сечений, используемые в теории изгиба и кручения.

Изобразим сечение балки произвольной конфигурации в произвольной системе координат yOz (рис. 4.2, а).

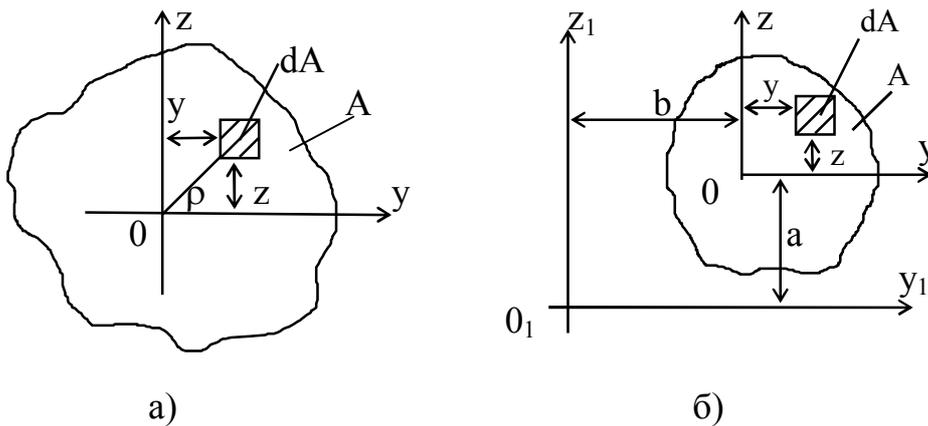


Рис. 4. 2

1) Статические моменты сечения относительно координатных осей определяются по формулам:

$$S_y = \int_A z dA; S_z = \int_A y dA \quad (4.1)$$

Отсюда при известных статических моментах центр тяжести сечения находится по формуле

$$y = S_z / A, z = S_y / A. \quad (4.2)$$

2) Осевые моменты инерции сечения представляют интегральную сумму произведений элементарных площадей dA сечения на квадрат расстояния их до соответствующих осей:

$$I_y = \int_A z^2 dA; I_z = \int_A y^2 dA \quad (4.3)$$

3) Полярный момент инерции

$$I_p = \int_A \rho^2 dA, \quad (4.4)$$

где ρ — радиус вектор элемента dA .

Приняв во внимание, что $\rho^2 = y^2 + z^2$, используя (4.3) и (4.4) получим:

$$I_p = I_y + I_z \quad (4.5)$$

4) Центробежный момент инерции сечения

$$I_{yz} = \int_A yz dA \quad (4.6)$$

Оси y и z сечения A можно расположить так, что центробежный момент инерции относительно этих осей обратится в ноль. Такие оси называются **главными осями инерции сечения**. I_y и I_z относительно этих осей имеют экстремальные значения. Если начало главных осей совмещено с центром тяжести сечения, оси называются **главными центральными осями инерции сечения**. Если сечение имеет оси симметрии, то главные центральные оси совпадают с ними.

5) Если деталь сложного сечения, ее суммарный осевой момент инерции можно найти как сумму простых моментов инерции сечений, используя параллельный перенос осей координат (рис. 4.2, б):

$$\begin{aligned} I_{y1} &= \int_A (z + a)^2 dA = I_y + a^2 A \\ I_{z1} &= \int_A (y + b)^2 dA = I_z + b^2 A \end{aligned} \quad (4.7)$$

Определим некоторые геометрические характеристики относительно главных центральных осей инерции наиболее часто встречающихся сечений — прямоугольника, круга и кольца.

4.2. Осевые и полярные моменты инерции прямоугольника, круга и кольца

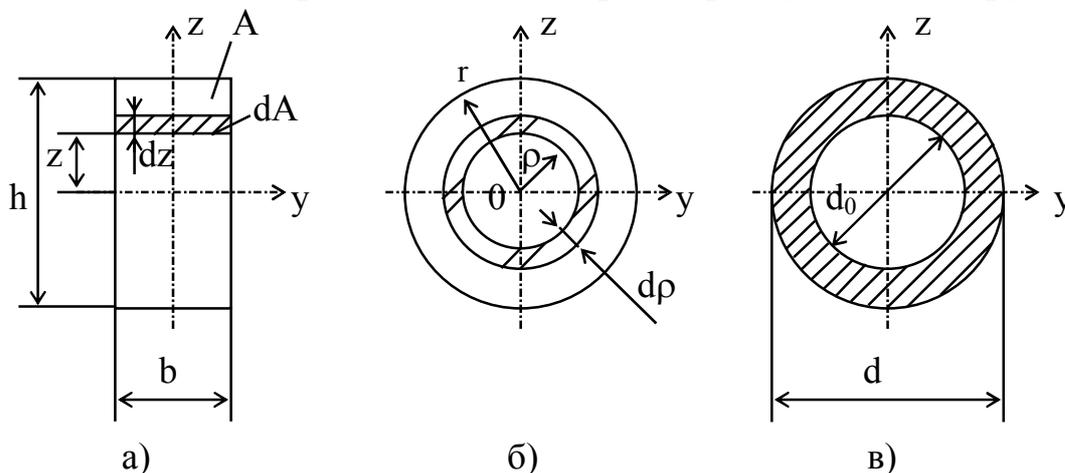


Рис. 4. 3

1. Рассмотрим прямоугольник с основанием b и высотой h (рис. 4.3, а). Проведем главные центральные оси инерции y и z , совместив их с осями симметрии, выделим элемент $dA = b \cdot dz$, отстоящий на расстоянии z от оси y . Согласно формуле (4.3) получим:

$$I_y = \int_A z^2 dA = \int_{-0.5h}^{+0.5h} z^2 b dz = b \cdot h^3 / 12 \quad (4.8)$$

Аналогично $I_z = h \cdot b^3 / 12$.

Размерность – мм^4 .

2. Рассмотрим сплошное круглое сечение радиусом r (диаметром $d = 2r$) (рис. 4.3, б). Выделим в сечении круга элементарное кольцо радиусом ρ , толщиной $d\rho$, площадью $dA = 2\pi\rho d\rho$. Полярный момент инерции определим по формуле (4.4):

$$I_p = \int_A \rho^2 dA = \int_0^r \rho^2 2\pi\rho d\rho = (\pi r^4 / 2) = (\pi d^4 / 32) \quad (4.9)$$

Поскольку осевые моменты инерции круглого сечения за счет симметрии равны между собой, то с учетом (4.5) получим:

$$I_y = I_z = I_p / 2 = \pi d^4 / 64 \quad (4.10)$$

3. Моменты инерции кольца с внешним диаметром d и внутренним d_0 (рис. 4.3, в) находятся как разность моментов инерции внешнего и внутреннего кругов:

$$I_y = I_z = \pi d^4 / 64 - \pi d_0^4 / 64 = (\pi d^4 / 64) (1 - c^4) \quad (4.11)$$

$$I_p = (\pi d^4 / 32) (1 - c^4),$$

где $c = d_0 / d$.

4. Определим осевые моменты инерции I_y и I_z сложного сечения (рис. 4.4), состоящего из прямоугольника со сторонами $b = 40$ мм и $h = 20$ мм с двумя равными отверстиями диаметром $d = 10$ мм, расположенными симметрично относительно главной центральной оси OZ на расстоянии $a = 10$ мм.

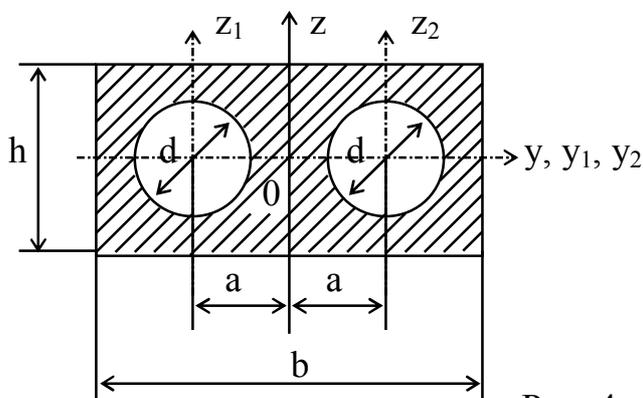


Рис. 4. 4

Проведем главные центральные оси yOz , которые будут совпадать с осями симметрии прямоугольника. Оси y_1 и y_2 отверстий совпадут с

осью y , а оси z_1 и z_2 отстоят от оси z на равные расстояния $a = 10$ мм. Получаем:

$$I_y = I_y^{\square} - 2I_y^{\circ} = (bh^3 / 12) - 2(\pi d^4 / 64) = (40 \cdot 20^3 / 12) - 2 \cdot (3.14 \cdot 10^4 / 64) = 26666 - 980 = 25686 \text{ мм}^4.$$

$$I_z = I_z^{\square} - 2(I_z^{\circ} + a^2 A^{\circ}) = (hb^3 / 12) - 2 \cdot (\pi d^4 / 64 + 10^2 \cdot \pi d^2 / 4) = (20 \cdot 40^3 / 12) - 2 \cdot (490 + 7850) = 106700 - 16680 = 90020 \text{ мм}^4.$$

5. Кручение

5.1. Общие сведения

Кручением называется такой вид деформации, при котором в поперечных сечениях внутренние усилия приводятся только к крутящему моменту. Такое кручение называют свободным или чистым. К деталям авиационных механизмов, подвергающихся деформации кручения, прежде всего относятся валы различных типов и конструкций, служащие для поддержания вращающихся деталей с целью передачи между ними крутящих моментов. При деформации кручения происходит чистый сдвиг. Представим вал в виде круглого цилиндра, состоящего из концентрически расположенных слоев-трубок (рис. 5.1).

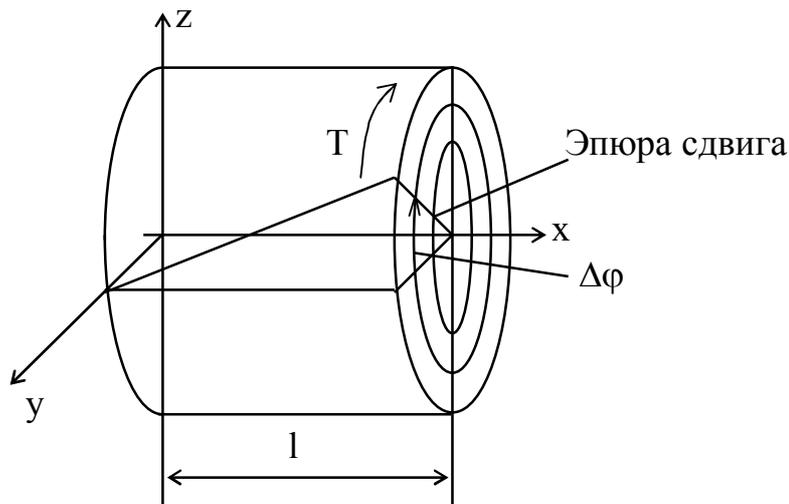


Рис. 5.1

При действии на вал внешнего крутящего момента T каждый из этих слоев поворачивается относительно соседних, т. е. отдельные элементы подвергаются деформации **чистого сдвига**. Мерой деформации кручения принято считать:

$\Delta\varphi$ - абсолютный угол закручивания концевое сечения вала относительно сечения, отстоящего от него на расстояние l (рис.5.1);

$\theta = d\varphi / dx$ - относительный угол закручивания или интенсивность закручивания (при однородном закручивании $\theta = \Delta\varphi / l$).

При дальнейших расчетах и исследованиях наряду с допущениями, изложенными в параграфе 1.2, добавим следующие гипотезы:

- 1 — поперечные сечения вала (плоские и перпендикулярные продольной оси вала до деформации) остаются таковыми и после деформации;
- 2 — радиусы сечений не искривляются;
- 3 — расстояния между поперечными сечениями вала в процессе деформации не изменяются;
- 4 — при деформации кручения в пределах упругости можно использовать закон Гука при сдвиге.

5.2. Определение деформаций и напряжений при кручении вала

Для рассмотрения напряженного состояния вала, изображенного на рис. 5.1, выделим из элемента вала длиной dx часть, ограниченную цилиндрической поверхностью радиуса ρ (рис. 5.2, а).

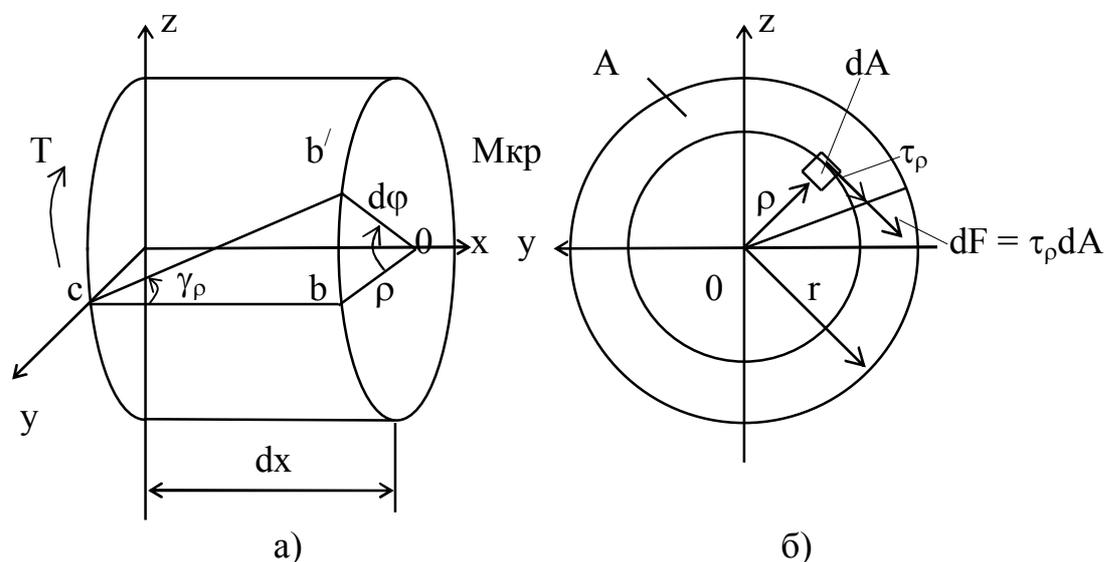


Рис. 5. 2

Поскольку на длине dx произошел абсолютный сдвиг bb' , то относительный сдвиг согласно (3.1) будет равен $\gamma_\rho = bb' / dx$. Однако из $\Delta 0bb'$ $bb' = \rho d\phi$, откуда получаем $\gamma_\rho = \rho d\phi / dx$. Учитывая, что $d\phi / dx = \theta$ (относительный угол закручивания), получим

$$\gamma_\rho = \rho \theta. \quad (5.1)$$

Учитывая, что при чистом сдвиге возникает касательное напряжение, его значение согласно допущению (4) может быть найдено на основании закона Гука: $\tau_\rho = G \cdot \gamma_\rho$, или с учетом (5.1)

$$\tau_\rho = G \theta \rho. \quad (5.2)$$

Относительный угол закручивания или интенсивность закручивания θ и напряжение τ_ρ в сечении элемента вала зависят от внешнего момента T . Поскольку внешний момент согласно методу сечений уравнивается внутренним крутящим моментом $M_{кр}$, уравнение равновесия согласно рис. 5.2, б имеет вид:

$$M_{кр} = \int_A dM = \int_A \rho dF = \int_A \rho(\tau_\rho dA).$$

Принимая во внимание уравнение (5.2), получаем

$$M_{кр} = \int_A G\theta\rho^2 dA = G\theta \int_A \rho^2 dA, \text{ с учетом (4.4)}$$

$$M_{кр} = G\theta I_p, \quad (5.3)$$

откуда определяется интенсивность закручивания

$$\theta = M_{кр} / (GI_p) \quad (5.4)$$

Для однородного вала с учетом, что $\theta = \Delta\varphi / l$ получим абсолютный угол закручивания:

$$\Delta\varphi = M_{кр} l / (GI_p) \quad (5.5)$$

Подставив значение θ из (5.4) в формулу (5.2) получим

$$\tau_\rho = G \rho \theta = G \rho M_{кр} / (GI_p) = M_{кр} \rho / I_p \quad (5.6)$$

Формулы (5.4) - (5.6) дают точное решение для вала круглого сечения, для сечения другой формы эти зависимости являются приближенными.

Рассмотрение напряженного состояния вала дает основание сделать следующие выводы:

- 1 — при деформации кручения в поперечных сечениях вала возникают касательные напряжения τ , значения которых изменяются вдоль радиуса сечения (рис. 5.2, б);
- 2 — наибольшие касательные напряжения τ_{max} действуют у поверхности вала при $\rho = \rho_{max} = r$, при этом согласно (5.6) получим:

$$\tau_{max} = \tau_{кр} = M_{кр} / W_p, \quad (5.7)$$

где $W_p = I_p / r$ — полярный момент сопротивления.

Для круглого сечения с учетом (4.9):

$$W_p = \pi r^4 / (2r) = \pi r^3 / 2 = \pi d^3 / 16 \approx 0,2d^3; \quad (5.8)$$

Для кольца с учетом (4.11) получим

$$W_p = \pi d^4 (1 - c^4) / (32d / 2) \approx 0,2d^3 (1 - c^4); \quad (5.9)$$

3 — условие прочности вала в опасном сечении при кручении выражается зависимостью

$$\tau_{кр} = M_{кр} / W_p = M_{кр} / 0,2d^3 \leq [\tau_{кр}], \quad (5.10)$$

где $[\tau_{кр}]$ — допускаемое напряжение при кручении. При действии статических нагрузок принимают $[\tau_{кр}] = (0,5 \dots 0,6) [\sigma_p]$.

Обычно формулу (5.10) используют при проектном расчете вала, когда незнание его длины и других возможных силовых факторов (например, изгибающего момента) компенсируют понижением допускаемого напряжения $[\tau_{кр}]$ до = 12...25 МПа; при этом получаем:

$$d \geq \sqrt[3]{T / 0,2 [\tau_{кр}]}, \quad (5.11)$$

где T — действующий в расчетном сечении вала вращающий момент;

4 — условие достаточной жесткости вала при действии в сечении крутящего момента с учетом (5.4) и (5.5) имеет вид:

$$\theta = M_{кр} / (GI_p) \leq [\theta], \quad \Delta\phi = M_{кр} l / (GI_p) \leq [\Delta\phi] \quad (5.12)$$

5.3. Построение эпюр крутящих моментов

При построении эпюр крутящих моментов используется метод сечений, согласно которому крутящий момент в любом сечении вала численно равен алгебраической сумме внешних вращающих моментов, расположенных по одну сторону этого сечения:

$$M_{кр} = \sum_{i=1}^n T_i, \quad (5.13)$$

Примем внешней вращающий момент T_i при этом брать со знаком “плюс”, если при взгляде со стороны сечения он вращает отсеченную часть против часовой стрелки (и наоборот). Значение крутящих моментов откладывается в виде ординат от оси вала.

Например, рассмотрим вал АМ, расположенный в подшипниках С и Е и находящийся в равновесии под воздействием вращающих моментов $T_B = 300$ Нмм, $T_D = 500$ Нмм и $T_K = 200$ Нмм (рис. 5.3).

Сделав сечение на участке АВ и рассмотрев равновесие левой оставшейся части видим, что $M_{кр} = 0$. В сечении участка ВД из условия равновесия левой части получим $M_{кр} = -T_B = -300$ Нмм (момент T_B направлен по часовой стрелке, мы его взяли со знаком минус). Участок ДК: $M_{кр} = -300 + 500 = 200$ Нмм. Получившаяся эпюра имеет форму двух прямоугольников, в местах приложения внешних моментов ординаты эпюры изменяются скачкообразно на величину этих моментов. Участки АВ и КМ не деформируются.

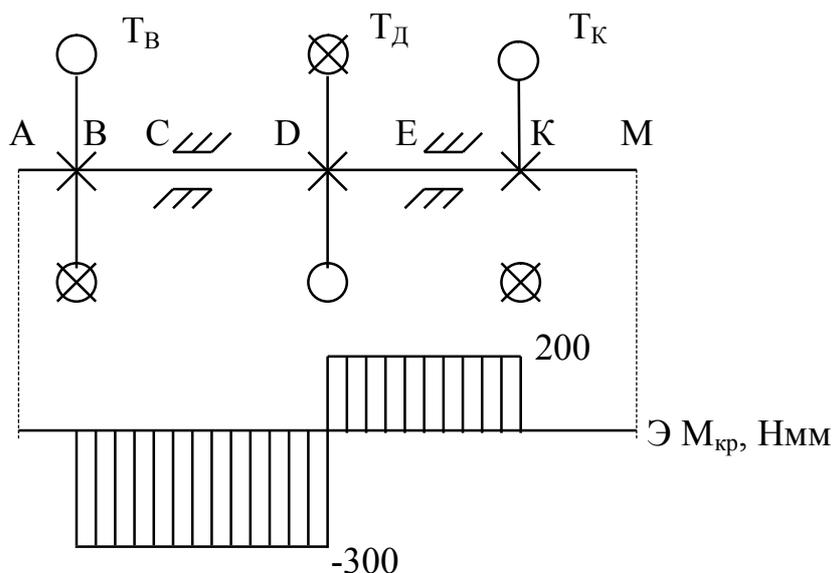


Рис. 5. 3

5.4. Определение вращающего момента двигателя

При расчетах ряда механизмов, имеющих на входе электродвигатель, необходимо знать его номинальный вращающий момент $M_{дв}$, а в паспортных данных обычно указывают номинальную мощность P , Вт и частоту вращения выходного вала n , мин^{-1} .

Учитывая, что $P = \omega M$, $\text{Нм} / \text{с}$; $\omega = 2\pi n / 60$, $1/\text{с}$; $M = P / \omega = 60P / (2\pi n) = 9,554 P/n$, Нм . Поскольку в технической механике вращающий момент принято измерять в Нмм , округлив, окончательно получим:

$$M_{дв} = 9554 P/n, \text{ Нмм.} \quad (5.14)$$

6. Изгиб

6.1. Виды изгиба и их особенности

Изгибом называется деформация, при которой искривляется продольная ось балки. Плоскость, в которой действуют внешние нагрузки (силы и моменты), называется силовой плоскостью, плоскость расположения изогнутой оси называется плоскостью изгиба. Если плоскость изгиба совпадает с силовой плоскостью, то такой вид деформации называется плоским поперечным изгибом, если не совпадает — косым. Если силовые нагрузки действуют на балку в различных плоскостях, может происходить пространственный изгиб.

Нагрузки, вызывающие поперечный изгиб балки, делятся на три группы (рис. 6.1).

Рис. 6.1, а) — сосредоточенные силы F_1, F_2 , Н; б) — сосредоточенные моменты пар сил M_1, M_2 , Нмм ; в) — распределенная по длине балки нагрузка интенсивностью q , Н/мм , $q_1 = \text{const}$ — равномерно распределенная, $q_2 = q_2(x)$ — неравномерно распределенная.

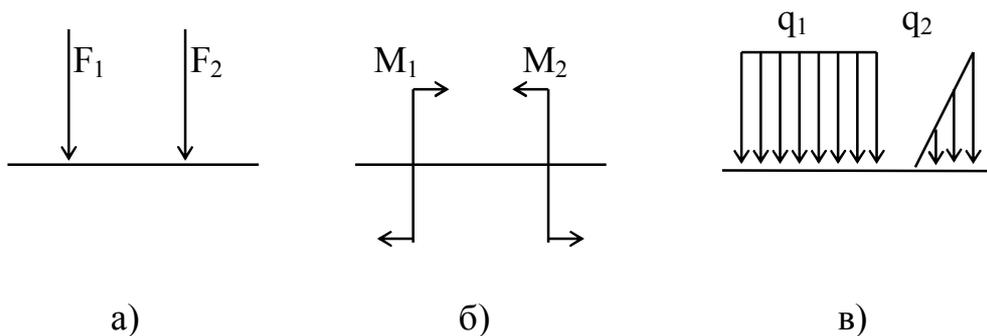


Рис. 6. 1

При плоском поперечном изгибе в любом поперечном сечении балки возникают внутренние силы взаимодействия, статическим эквивалентом которых являются поперечная сила Q и изгибающий момент $M_{из}$. Если на каком-то участке деформации внутренняя поперечная сила отсутствует, т. е. $Q = 0$, изгиб называется "чистым".

6.2. Опоры и опорные реакции балок

Опоры — это элементы конструкции механизмов, служащие для передачи нагрузок с балок на корпус или другую деталь. Опоры балок, рассматриваемые как плоские системы, бывают трех основных типов: шарнирно подвижная, шарнирно неподвижная опора и жесткая заделка (защемление) (рис. 6.2).

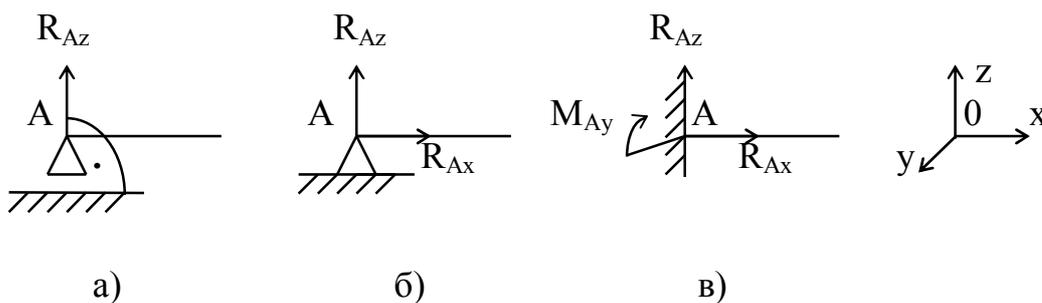


Рис. 6. 2

1. **Шарнирно подвижная опора** (рис. 6.2, а) не препятствует некоторому повороту балки относительно шарнира A и линейному перемещению вдоль опорной поверхности. Внешняя нагрузка может восприниматься этой опорой только по нормали к опорной поверхности. Реакция в опоре — R_{Az} , реакция R_{Ax} и реактивный момент M_{Ay} равны нулю (одно неизвестное).

2. **Шарнирно неподвижная опора** (рис. 6.2, б) допускает только некоторый поворот балки, поэтому $M_{Ay} = 0$, а реакция этой опоры складывается из двух составляющих — R_{Az} и R_{Ax} (два неизвестных).
3. **Жесткая заделка** (рис. 6.2, в) не допускает ни линейных, ни угловых перемещений опорного сечения, в ней могут возникать как реакции R_{Az} и R_{Ax} , так и реактивный момент M_{Ay} (три неизвестных).

Балка с одним заделанным концом называется **консольной балкой**.

В инженерной практике при конструировании балок, в том числе валов авиационных механизмов, их опоры обычно выполняют так, что общее число возникающих опорных реакций не превышает возможное число уравнений статического равновесия. Такие балки считаются статически определенными. Например, для рассмотренной плоской системы сил можно составить три уравнения статики: $\sum X = 0$, $\sum Z = 0$ и $\sum M_y = 0$. Следовательно и число неизвестных реакций в этом случае не должно превышать трех. Этому условию удовлетворяют лишь балки двух типов: а) с одной шарнирно подвижной и одной шарнирно неподвижной опорами, б) консольные балки.

Если указанные условия не соблюдаются, число неизвестных реакций может быть больше числа уравнений статики, балки будут считаться статически неопределимыми и для их решения необходимо дополнительно составлять уравнения перемещений, учитывающие деформацию балок.

6.3. Определение опорных реакций и внутренних силовых факторов при плоском поперечном изгибе

Прежде чем перейти к вопросам расчетов на прочность и жесткость, необходимо определить реакции в опорах и два внутренних силовых фактора — поперечную силу Q и изгибающий момент $M_{из}$.

Для определения реакций в опорах используются уравнения статики (более подробно см. ниже примеры 6.1-6.3).

Для определения поперечных сил и изгибающих моментов на различных участках балки используется метод сечений: если балку, находящуюся в состоянии статического равновесия под воздействием внешних сил и моментов, **мысленно** рассечь какой-либо плоскостью и отбросить какую-либо часть, то оставшаяся часть также будет находиться в состоянии равновесия под воздействием внутренней поперечной силы Q и изгибающего момента $M_{из}$, действующих на нее со стороны отброшенной части. При этом поперечная сила будет равна алгебраической сумме проекций на плоскость сечения всех внешних сил, действующих на оставшуюся часть балки, включая реакции в опорах:

$$Q = \sum F_i + \sum R_j \quad (6.1)$$

Значение изгибающего момента в каком-либо сечении балки равно алгебраической сумме моментов всех нагрузок, приложенных по одну сторону этого сечения и взятых относительно центра тяжести сечения:

$$M_{\text{И}} = \sum F_i x_i + \sum R_j x_j + \sum M_k, \quad (6.2)$$

где F_i — внешние силы, R_j — реакции в опорах, M_k — внешние моменты, x_i , x_j — расстояния соответствующих сил от плоскости сечения.

6.4. Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов

При расчете на прочность какой-либо детали, которую можно рассматривать как балку, прежде всего бывает необходимо определить поперечные силы и изгибающие моменты в наиболее опасных сечениях. Наиболее опасными сечениями балки будут считаться такие, где предположительно могут быть наибольшие напряжения. Эта задача решается с помощью эпюр Q и $M_{\text{И}}$ вдоль оси балки x .

При построении эпюры поперечных сил Q ее значение $Q = Q(x)$ в любом сечении определяется по формуле (6.1), причем внешняя сила берется со знаком "плюс", если она вращает оставшуюся часть балки по часовой стрелке относительно рассматриваемого сечения (и наоборот). Например: $Q_1 = F_1 - F_2$; $Q_2 = R_A - F_3$ (рис. 6.3, а).

При построении эпюр изгибающих моментов их значение определяется по формуле (6.2), а знаки моментов принимаются следующими: положительный, если балка обращена выпуклостью вниз (нижние волокна растянуты) и отрицательный, если выпуклость балки направлена вверх (рис. 6.3, б).

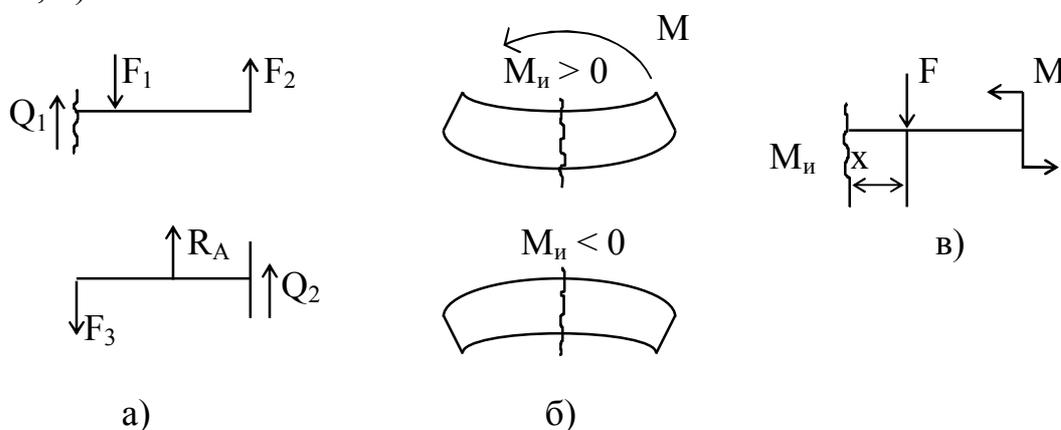


Рис. 6.3

Например: $M_{\text{И}} = -Fx + M$ (рис. 6.3, в).

При построении эпюр для проверки правильности их построения важную роль играет теорема Журавского: производная от изгибающего момента по абсциссе сечения балки равна поперечной силе:

$$Q = dM_{\text{И}} / dx \quad (6.3)$$

Взяв производную от обеих частей равенства (6.3), получим:

$$dQ / dx = d^2M_{\text{И}} / dx^2 = q, \quad (6.4)$$

т. е. вторая производная от изгибающего момента по абсциссе балки равна интенсивности распределенной нагрузки.

Рассмотрим несколько примеров построения эпюр поперечных сил и изгибающих моментов.

Пример 6.1.

Пусть на балку (рис. 6.4) действуют внешняя сила $F = 60$ Н и изгибающий момент $M_{и} = 600$ Нмм. Требуется определить реакции в опорах А и D и построить эпюры внутренних поперечных сил Q и изгибающих моментов $M_{и}$ ($a = c = 20$ мм, $b = 10$ мм).

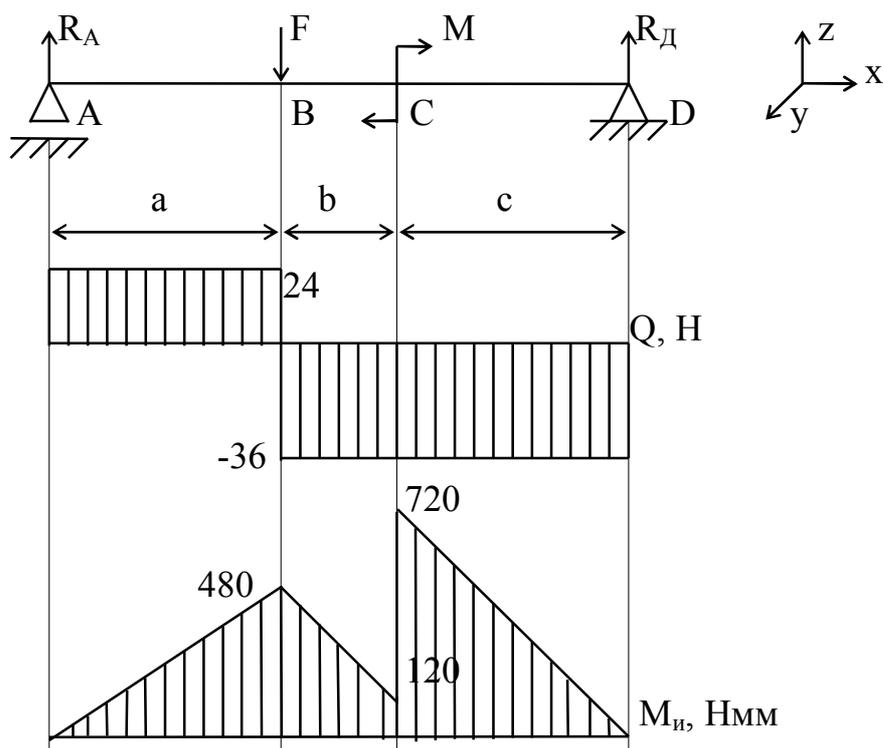


Рис. 6. 4

Решение.

Поскольку нагрузки по горизонтальной оси x нет, то $R_{Ax} = 0$ и реакции в опорах А и D обозначим просто R_A и R_D .

1. Определяем реакции в опорах. Для этого используем уравнение статики $\sum M_y = 0$ относительно какого-либо сечения. Рекомендуется выбирать сечение, через которое проходит одна из неизвестных реакций, чтобы получить одно уравнение с одним неизвестным. Например:

$$\sum M_A = 0. \text{ Получаем: } -F \cdot a - M + R_D(a + b + c) = 0, \text{ откуда}$$

$$R_D = \frac{F \cdot a + M}{a + b + c} = \frac{60 \cdot 20 + 600}{20 + 10 + 20} = 36 \text{ Н.}$$

$$\text{Из } \sum M_D = 0 \text{ получаем: } -R_A(a + b + c) + F(b + c) - M = 0,$$

$$R_A = \frac{F(b+c) - M}{a+b+c} = \frac{60 \cdot 30 - 600}{50} = 24 \text{ Н.}$$

Третье, неиспользованное уравнение $\sum Z = 0$ для таких балок рекомендуется использовать для проверки: $R_A - F + R_D = 24 - 60 + 36 \equiv 0$, т. е. реакции в опорах определены верно, их направление соответствует истинным.

2. При плоском поперечном изгибе в поперечных сечениях балки возникают два внутренних силовых фактора — поперечная сила Q и изгибающий момент $M_{И}$. Для их определения используется метод сечений.

а) В интересующем нас месте, например, на участке АВ на расстоянии x от левой опоры А рассечем балку поперечной плоскостью и отбросим правую часть (рис. 6.5, а).

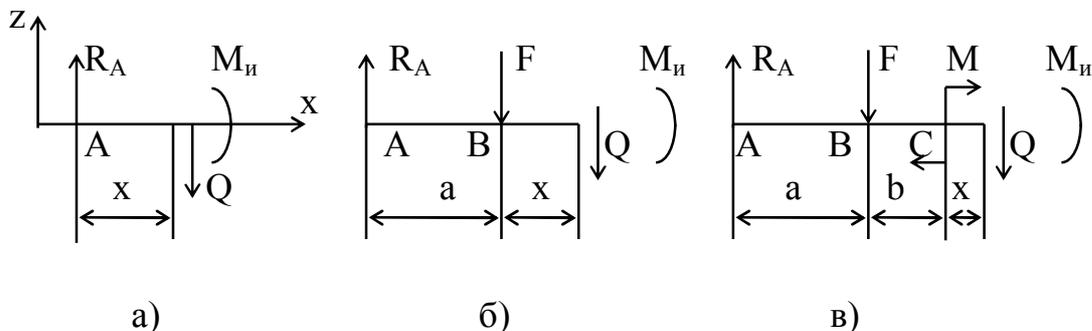


Рис. 6. 5

Получим: $Q = R_A = 24 \text{ Н}$, $M_{И} = + R_A \cdot x$ (плюс взят потому, что R_A изгибает отсеченную часть балки выпуклостью вниз). Параметр x — переменный, $0 \leq x \leq a$. При $x = 0$ в сечении А $M_{ИА} = 0$; при $x = a$ (сечение В) $M_{ИВ} = R_A \cdot a = 24 \cdot 20 = 480 \text{ Нмм}$. Строим эпюру Q и $M_{И}$ на рис. 6.4.

б) Далее рассмотрим участок ВС (рис. 6.5, б). Здесь $Q = R_A - F = 24 - 60 = -36 \text{ Н}$; $M_{И} = R_A(a+x) - F \cdot x$, $0 \leq x \leq b$;

При $x = 0$ момент в сечении В равен 480 Нмм, т. е. такой же, как и на рис. 6.5, а. При $x = b$ получим: $M_{ИС} = 24(20+10) - 60 \cdot 10 = 120 \text{ Нмм}$.

в) Рассмотрим участок СД.

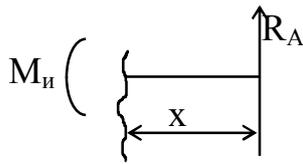
Поперечная сила не изменится и останется такой же, как и на предыдущем участке, т. к. момент M на силу не влияет; изгибающий момент будет равен:

$$M_{И} = R_A(a+b+x) - F(b+x) + M; 0 \leq x \leq c.$$

При $x = 0$ получим: $M_{ИС} = 720 \text{ Нмм}$,

$$x = c = 20 \text{ мм} \quad M_{ИД} = 0.$$

Строим эпюры на рис. 6.4. В принципе, на участке СД при построении эпюры $M_{И}$ можно (и нужно было) отбросить левую часть балки, а правую часть, где всего одна сила — реакция опоры R_D — оставить:



Тогда получим: $M_{И} = + R_{Д} \cdot x$, $c \geq x \geq 0$. Здесь x изменяется справа налево. При $x = 0$ $M_{Д} = 0$; при $x = c$ $M_{С} = 36 \cdot 20 = 720$ Нмм, т. е. результат тот же, но решение более легкое.

г) Проверим правильность построения эпюры $M_{И}$ по Журавскому: на участке АВ: $dM / dx = \Delta M / \Delta x = (480 - 0) / (20 - 0) = 24 = Q_{АВ}$;

$$BC: \Delta M / \Delta x = (120 - 480) / 10 = -36 = Q_{BC}$$

$$CD: \Delta M / \Delta x = (0 - 720) / 20 = -36 = Q_{CD}, \text{ т. е. результат верный.}$$

д) Заметим, что на эпюре Q скачок в месте приложения внешних сил на величину этих сил, на эпюре $M_{И}$ скачок в месте приложения момента $M = 600$ Нмм.

е) Наиболее опасным можно считать сечение С, где $M_{И\max} = 720$ Нмм.

Пример 6.2.

Рассмотрим консольную балку, на которую действует сила $F = 60$ Н. Длина балки $l = 100$ мм (рис. 6.6).

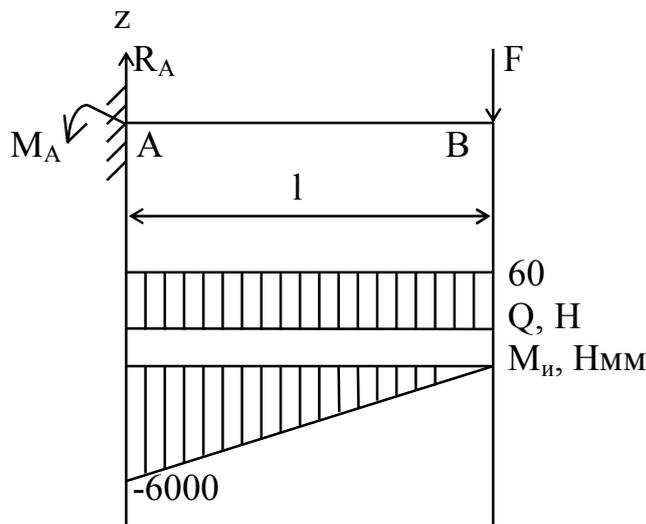


Рис. 6. 6

Решение

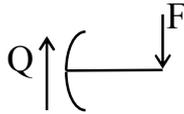
1. Определяем реакции в опоре А. Направим реакцию R_A вверх, а реактивный момент M_A — против часовой стрелки (интуитивно). Из условия статического равновесия $\sum Z = 0$, $\sum M_A = 0$, имеем:

$$R_A - F = 0 \Rightarrow R_A = F = 60 \text{ Н.}$$

$$M_A - F \cdot l = 0 \Rightarrow M_A = F \cdot l = 6000 \text{ Нмм.}$$

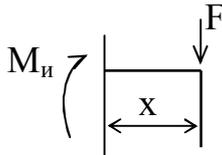
Для реакции и момента получили положительный знак; это указывает на то, что на схеме они были направлены верно.

2. Строим эпюру поперечных сил Q . Если отсечь правую часть балки,



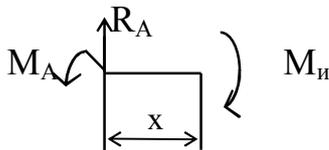
то получим: $Q = + F = 60$ Н (плюс потому, что F вращает оставшуюся часть по часовой стрелке). Для построения эпюры Q откладываем в масштабе отрезок 60 Н и проводим горизонтальную линию (рис. 6.6).

3. Строим эпюру изгибающих моментов. Рассмотрим два варианта. Вначале отсечем от консоли правую часть на расстоянии x от силы F :



Изгибающий момент будет равен: $M_{И} = - F \cdot x$, $l \geq x \geq 0$. При $x = 0$ $M_B = 0$, при $x = l$ $M_A = - 6000$ Нмм.

По второму варианту можно отсечь левую часть



Получим: $M_{И} = - M_A + R_A x = - 6000 + 60x$;

$0 \leq x \leq l$; $x = 0$ $M_{И} = M_A = -6000$ Нмм

$x = l$ $M_{И} = M_B = 0$. Результат тот же.

Из рис. 6.6 видно, что опасное сечение балки $M_{И} = M_{И\max} = 6000$ Нмм находится у заделки А.

Пример 6.3.

На балку действует распределенная нагрузка интенсивностью $q = 2$ Н/мм, $l = 40$ мм. Построить эпюры Q и $M_{И}$, определить опасное сечение (рис. 6.7).

Решение

1. Используя уравнения равновесия, определяем $R_A = R_B = q \cdot l / 2 = 40$ Н.

2. Отсечем левую часть на расстоянии x , получим:

$Q = R_A - qx$, $0 \leq x \leq l$. $x = 0$, $Q_A = R_A = 40$ Н.

$x = l$, $Q_B = -40$ Н, уравнение — прямая.

$M_{И} = R_A \cdot x - qx^2 / 2$, уравнение — параболы. При $x = 0$ $M_A = 0$; $x = l$, $M_B = 0$.

Очевидно экстремум функции будет в точке С при $Q = dM / dx = 0$, т. е. при $x = R_A / q = 20$ мм: $M_{Ис} = 400$ Нмм. Строим эпюру $M_{И}$.

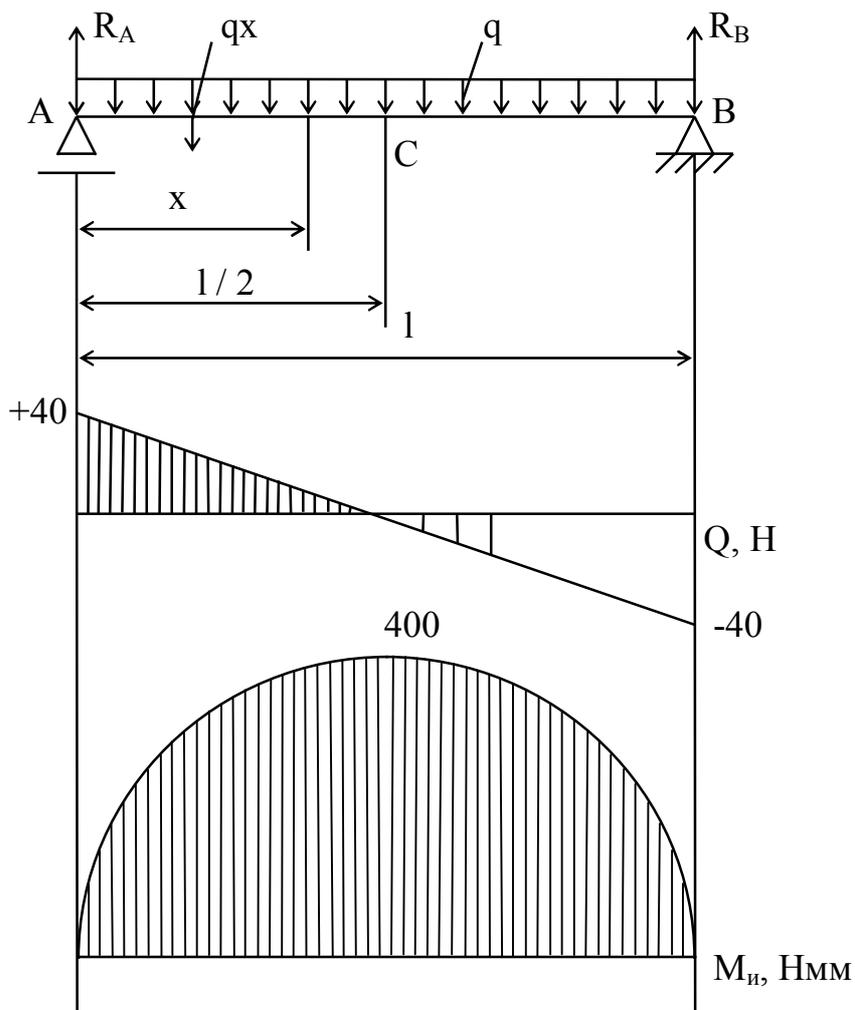


Рис. 6. 7

6.5 Напряжения при изгибе

Рассмотрим чистый изгиб балки моментами пар сил M , расположенными в продольной плоскости симметрии балки (рис. 6.8,а).

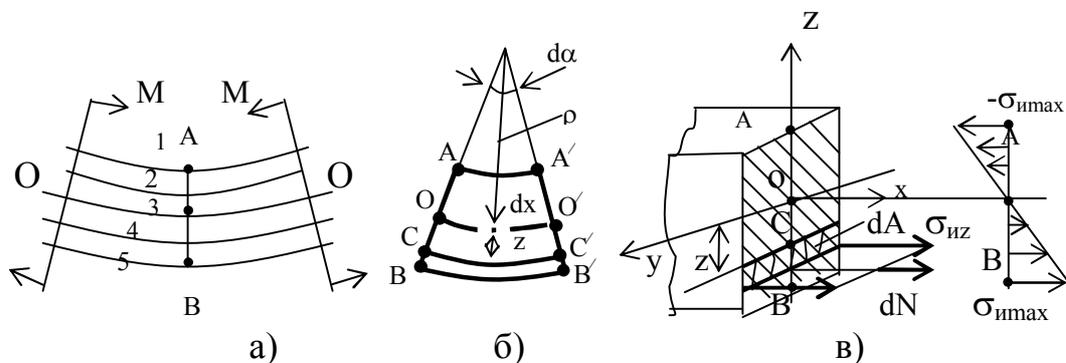


Рис. 6.8.

Под действием этих моментов балка деформируется: её верхние слои (1, 2) сжимаются, нижние (4, 5) – растягиваются. Длина волокон 3, лежащих

в плоскости, перпендикулярной плоскости самого изгиба и проходящей через продольную ось балки OO' , при деформации изгиба не изменяется. Совокупность этих волокон по ширине балки образует **нейтральный слой**, не испытывающий при изгибе ни растяжения, ни сжатия.

Чтобы установить закон распределения напряжений в поперечных сечениях балки, используют уравнения деформации балки, а также некоторые дополнительные допущения:

- 1) поперечные сечения балки, плоские до деформации, остаются плоскими и нормальными по отношению к продольной оси балки и в самом процессе деформации;
- 2) балку условно можно представить в виде совокупности продольных материальных слоев, которые подвергаются деформации простого растяжения или сжатия, для их характеристики справедлив закон Гука;
- 3) все волокна какого либо слоя, равноудаленного от нейтрального, деформируются одинаково.

Для определения величины напряжения в любой точке поперечного сечения балки АВ (рис. 6.8, а) выделим элемент длиной $dx = OO'$ и рассмотрим его деформацию (рис. 6.8, б). Обозначим ρ - радиус кривизны элемента dx , z - расстояние слоя CC' от нейтрального слоя dx .

Определим абсолютное удлинение слоя CC' : $\Delta l = CC' - dx$ (до деформации длины всех слоев были равны dx). Относительное удлинение $\epsilon_z = \Delta l / dx$. С учетом того, что $dx = \rho \cdot d\alpha$, $CC' = (\rho+z)d\alpha$, получим:

$$\epsilon_z = \frac{(\rho + z)d\alpha - \rho d\alpha}{\rho d\alpha} = \frac{z}{\rho} \quad (6.5)$$

Поскольку слой CC' удлинился, в нем возникнут нормальные напряжения $\sigma_{из}$, которые согласно закону Гука с учетом (6.5) будут равны:

$$\sigma_{из} = E \cdot \epsilon_z = \frac{E}{\rho} z, \quad (6.6)$$

где E - модуль упругости материала балки при растяжении.

Из выражения (6.6) следует, что напряжение $\sigma_{из}$ распределяется по сечению АВ **неравномерно**: если по ширине сечения $\sigma_{из} = \text{const}$, то по высоте оно изменяется пропорционально расстоянию z от нейтрального слоя OO' , достигая максимальных значений на поверхностных слоях балки А и В (рис.6.8, в).

Зависимость напряжения $\sigma_{из}$ в вертикальной плоскости xOz от изгибающего момента M может быть определена следующим образом. Момент M согласно условию статического равновесия и методу сечения должен быть уравновешен моментом $M_{и}$ внутренних сил взаимодействия в данном сечении балки:

$$M_{из} = \int_A dM = \int_A z dN = \int_A z \sigma_{из} dA$$

Подставив значение $\sigma_{из}$ из формулы (6.6), получим:

$$M_{из} = \int_A z \frac{E}{\rho} z dA = \frac{E}{\rho} \int_A z^2 dA = \frac{E}{\rho} I_y,$$

где $I_y = \int_A z^2 dA$ - осевой момент инерции поперечного сечения А относительно оси у.

Отсюда можно определить, что $\frac{E}{\rho} = \frac{M_{из}}{I_y}$

Подставив это выражение в формулу (6.6), получим:

$$\sigma_{из} = \frac{E}{\rho} z = \frac{M_{из}}{I_y} z \quad (6.7)$$

Таким образом, из формулы (6.7) следует, что:

- 1) в любом сечении балки возникают нормальные напряжения $\sigma_{из}$, значения которых изменяются по высоте сечения пропорционально расстоянию z от нейтрального слоя;
- 2) вблизи нейтрального слоя при $z=0$ напряжения равны нулю, а в поверхностных слоях балки при $z=z_{max}$ они достигают максимальных значений. Например, на рис. 6.8, вверху – сжимающих ($-\sigma_{имак}$), внизу - растягивающих ($+\sigma_{имак}$).

Условие прочности при изгибе по нормальным напряжениям с учетом вышесказанного будет иметь вид:

$$\sigma_{имак} = \sigma_{из} = \frac{M_{из}}{I_y} z_{max} = \frac{M_{из}}{W_y} \leq [\sigma_u], \quad (6.8)$$

где $W_y = \frac{I_y}{z_{max}}$ - осевой момент сопротивления поперечного сечения или

момент сопротивления при изгибе относительно оси у. Момент сопротивления является геометрической характеристикой поперечного сечения балки, определяющей ее прочность при изгибе.

Если изгиб происходит в горизонтальной плоскости, уравнение прочности имеет вид

$$\sigma_{из} = \frac{M_{из}}{W_z} \leq [\sigma_u] \quad (6.9)$$

Определим значения W_y и W_z для простейших сечений, осевые моменты инерции которых были рассмотрены выше.

Для прямоугольника:

$$W_y = \frac{bh^3}{12} \Big/ \frac{h}{2} = \frac{bh^2}{6}; \quad W_z = \frac{hb^3}{12} \Big/ \frac{b}{2} = \frac{hb^2}{6}; \quad (6.10)$$

Для круга:

$$W_y = W_z = \frac{\pi d^4}{64} \Big/ \frac{d}{2} = \frac{\pi d^3}{32} = 0.1d^3; \quad (6.11)$$

Для кругового кольца:

$$W_y = W_z = \frac{\pi d^4 (1 - c^4)}{64} \bigg/ \frac{d}{2} = 0.1 d^3 (1 - c^4); \quad (6.12)$$

Примечание. При плоском поперечном изгибе кроме нормальных напряжений, вызванных изгибающим моментом, в поперечных сечениях балки могут возникать и касательные напряжения, вызванные поперечной силой Q . Определение этих напряжений приводится в соответствующих разделах курса «Сопротивление материалов». Для балок простых сечений, приведенных выше, касательные напряжения незначительны по сравнению с нормальными и их можно не учитывать.

7. Устойчивость сжатых стержней

7.1. Продольный изгиб. Формула Эйлера

Как указывалось выше, кроме расчетов на прочность и жесткость третьей задачей сопротивления материалов является расчет конструкции на **устойчивость**. На устойчивость необходимо проверять длинные стержни, **работающие на сжатие**.

Рассмотрим стержень, укрепленный в двух шарнирных опорах: подвижной А и неподвижной В (рис.7.1,а)

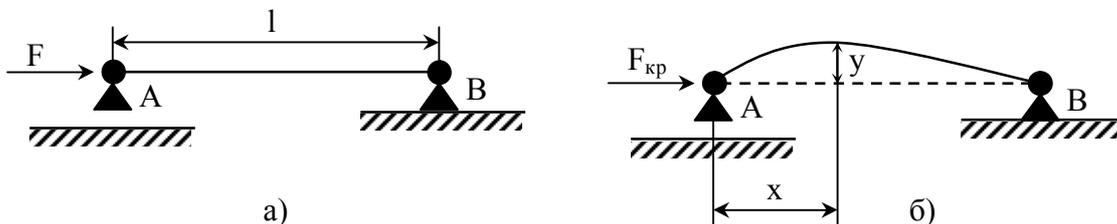


Рис 7.1

До тех пор, пока продольная сжимающая сила F сравнительно мала, стержень сохраняет свою первоначальную прямолинейную форму. Даже если ось стержня изогнуть какой-либо внешней поперечной силой, а затем отпустить, стержень снова станет прямолинейным. Такое состояние сжатого стержня называется устойчивым.

Если силу F увеличивать, то при определенном ее значении $F = F_{кр}$ (рис.7.1,б) любое, даже самое малое отклонение стержня y на расстоянии x от опоры А не исчезнет, он останется искривленным. С точки зрения прямолинейной формы равновесия сжатого стержня такая форма будет считаться **неустойчивой**. Вместо нее возникнет новая устойчивая форма - искривленная, а соответствующий этой форме вид деформации называют **продольный изгиб**.

Если деформация происходит в пределах упругости (а в данном разделе курса мы рассматриваем только такие задачи), то дифференциальное урав-

нение изогнутой продольной оси стержня для малых отклонений y будет иметь вид $EI_{\min} \frac{d^2y}{dx^2} = M_u$,

где $M_u = F_{кр}x$ - изгибающий момент в сечении на расстоянии x от опоры А.

Решив эту формулу, академик Петербургской академии наук Леонард Эйлер в 1744 году вывел формулу для определения критической силы:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{l^2}, \quad (7.1)$$

где E - модуль упругости при сжатии, I_{\min} - минимальный момент инерции сечения стержня (потеря устойчивости будет происходить именно в плоскости наименьшей жесткости).

Экспериментальные исследования показали, что при прочих равных условиях значение критической силы зависит от способа закрепления концов стержня. Ось стержня (рис. 7.1,б) при потере устойчивости приобретает вид полуволны синусоиды. При других случаях закрепления расчетная длина l заменяется ее приведенным значением $l_{пр} = \mu l$, где μ - коэффициент приведения длины. На рис.7.2 изображены несколько случаев закрепления стержня и указаны соответствующие коэффициенты приведения.

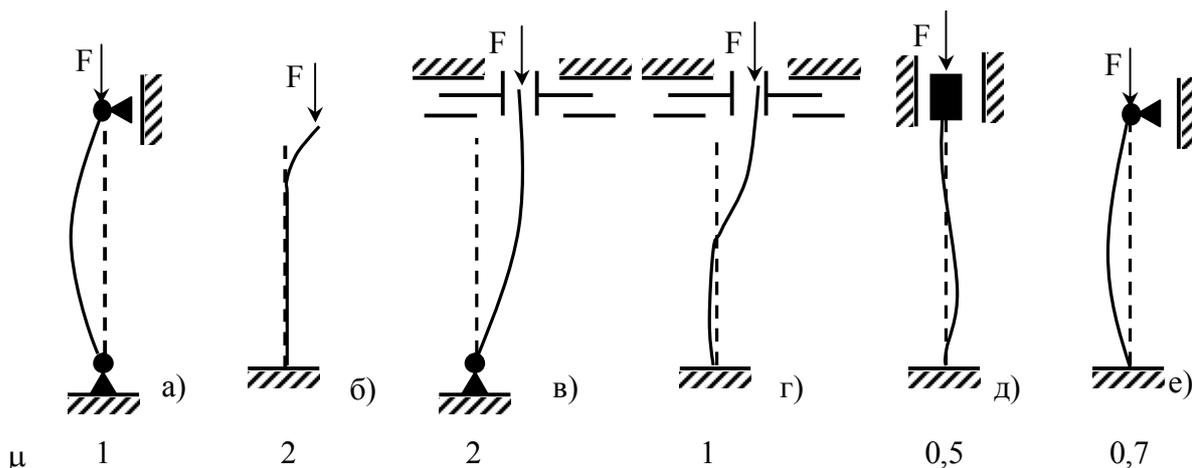


Рис.7.2

Таким образом, общее выражение критической силы при любом способе закрепления концов стержня имеет вид:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2} \quad (7.2)$$

Соответствующее этой силе критическое напряжение в поперечном сечении стержня будет равно

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2 A} \quad (7.3)$$

обозначим $i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}$ - минимальный радиус инерции стержня (мм),

$\lambda = \mu l / i_{\min}$ - гибкость стержня, тогда получим:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (7.4)$$

Таким образом при расчете тонких стержней на устойчивость важную роль играет безразмерная величина λ , называемая гибкостью стержня. Она характеризует сопротивляемость стержня потере устойчивости, не зависит от материала стержня, а определяется его длиной, формой и размерами сечения :

$$\lambda = \mu l / i_{\min} = \mu l \sqrt{A / I_{\min}} \quad (7.5)$$

7.2. Меры повышения устойчивости сжатых стержней

Для повышения устойчивости необходимо, чтобы λ , была как можно меньше. Для этого форма стержня должна быть такой, чтобы при заданной площади A осевой момент инерции сечения I_{\min} был как можно большим. В справочниках приводятся удельные радиусы инерции: $\rho_{\min} = i_{\min} / \sqrt{A} = \sqrt{I_{\min}} / A$. Например, для прямоугольного сечения с отношением сторон $h=2b$, $\rho_{\min} = 0,204$, для квадрата – 0,289, для круга – 0,36, для кольца, у которого $c = 0,7 \dots 0,9$, $\rho_{\min} = 0,86 \dots 1,53$.

7.3. Расчет сжатых стержней на устойчивость

Основной смысл расчета на устойчивость сжатого стержня заключается в следующем: сначала определяется критическое напряжение $\sigma_{кр}$ по формуле Эйлера (7.4). Если напряжение $\sigma_{кр}$ окажется меньше предела текучести σ_T (для пластичных материалов) или предела прочности σ_B (для хрупких), проводится расчет на устойчивость по формулам (2.4, 2.5, 2.8.), где в качестве опасного напряжения принимается $\sigma_{кр}$:

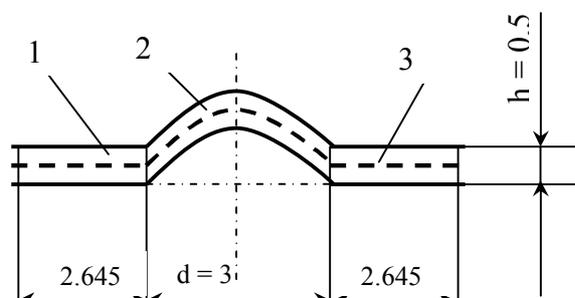
$$\sigma_{p \max} = F / A \leq [\sigma] = \sigma_{кр} / [n] \quad (7.6)$$

$$n = \sigma_{кр} / \sigma_{p \max} \geq [n] \quad (7.7)$$

Поскольку в авиационных механизмах не допускается работа деталей при рабочих напряжениях, больших предела текучести, расчет на устойчивость по эмпирическим зависимостям Ясинского для $\sigma_{кр} > \sigma_T$ проводить не обязательно, проводится только расчет на прочность по формулам (2.4, 2.5, 2.8)

Пример 7.1.

Рассчитать предельные значения сжимающих сил F , действующих на тяги привода длиной $l = 80$ мм, способ заделки которых соответствует (рис 7.2,д) ($\mu=0.5$). Материал обоих тяг - сталь 45А, термоулучшение ($\sigma_T = 490$ МПа, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа). Сечение первой тяги – прямоугольник $b \times h = 10 \times 0,5$ мм, вторая тяга сделана из той же пластины $b \times h$, однако имеет профиль, изображенный на рис.7.3. В обоих случаях $[n]=1,5$.



Решение

1. Определяем минимальные моменты инерции сечений первой и второй тяг. $I_{\min} = b \cdot h^3 / 12 = 10 \cdot 0,53 / 12 = 0,1 \text{ мм}^4$

Сечение второй тяги состоит из трех частей – двух одинаковых прямоугольников 1 (2,645 × 0,5) и половины кольца 2 диаметром $d = 3 \text{ мм}$:

$I_{(\min)2} = 2I_1 + I_2 = 2 \cdot 2,645 \cdot 0,5^3 / 12 + 0,5 \pi (3)^4 / 64 = 0,055 + 1,98 = 2,04 \text{ мм}^4$ (считаем, что нейтральная ось сечения совпадает с осью симметрии прямоугольников).

2. Определяем критические напряжения по формуле (7.4):

минимальные радиусы инерции:

$$i_{\min 1} = \sqrt{\frac{I_{\min 1}}{A}} = \sqrt{\frac{0,1}{5}} = 0,14 \text{ мм}, \quad i_{\min 2} = \sqrt{\frac{I_{\min 2}}{A}} = \sqrt{\frac{2,04}{5}} = 0,638 \text{ мм};$$

гибкости тяг:

$$\lambda_1 = \mu l / i_{\min 1} = 0,5 \cdot 80 / 0,14 = 285,7, \quad \lambda_2 = \mu l / i_{\min 2} = 0,5 \cdot 80 / 0,638 = 62,7;$$

критические напряжения:

$$\sigma_{кр1} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_1^2} = 24,2 \text{ МПа}, \quad \sigma_{кр2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_2^2} = 501 \text{ МПа};$$

3. Поскольку $\sigma_{кр1} < \sigma_T$, первая тяга потеряет устойчивость при $\sigma_{кр} = 24,2 \text{ МПа}$, поэтому предельное значение сжимающей силы $F_{\max 1}$ определим из условия проверки на устойчивость (7.6):

$$F_{\max 1} \leq \sigma_{кр} \cdot A / [n] = 24,2 \cdot 5 / 1,5 = 80,6 \text{ Н.}$$

Принимаем $F_{\max 1} = 80 \text{ Н}$.

У второй тяги $\sigma_{кр2} > \sigma_T$, поэтому прежде чем потерять устойчивость, она подвергнется пластической деформации, то есть потеряет прочность. Из условий прочности согласно уравнению (2.7) получим:

$$F_{\max 2} \leq \sigma_{кр} \cdot A / [n] = 490 \cdot 5 / 1,5 = 1633 \text{ Н.}$$

Принимаем $F_{\max 2} = 1600 \text{ Н}$.

Вывод : Изменение профиля тяги согласно рис 7.3 (что легко можно осуществить, например, штамповкой) позволит увеличить величину предельной сжимающей силы в 20(!) раз, причем в первом случае можно опасаться потери устойчивости, а во втором – прочности.

8. Сложное сопротивление

8.1. Общие сведения. Понятия о теориях прочности

Во всех вышерассмотренных случаях в поперечных сечениях деталей под воздействием внешних нагрузок возникало только одно внутреннее усилие: либо продольная сила, либо крутящий или изгибающий момент. Исклю-

чение составил лишь плоский поперечный изгиб, когда в поперечных сечениях балки возникают два внутренних усилия — изгибающий момент и поперечная сила. Но и в этом случае при расчете на прочность и жесткость обычно учитывают только изгибающий момент.

На практике часто встречаются более сложные деформации, когда в поперечных сечениях действуют два, три и более внутренних усилия одновременно. Эти случаи называются **сложным сопротивлением**.

Порядок решения таких задач:

- 1) с помощью метода сечений определяют внутренние силовые факторы, возникающие в поперечных сечениях стержня (балки, вала);
- 2) строят эпюры внутренних усилий, позволяющие определить координаты опасного сечения (в ряде случаев двух и более), где внутренние усилия максимальны;
- 3) в опасных сечениях на основании принципа независимости действия сил определяют нормальные и касательные напряжения от каждого внутреннего усилия отдельно;
- 4) исследуя распределение напряжений по сечению, устанавливают опасные участки (линии, точки), для которых и составляют условие прочности;
- 5) если окажется, что в опасном участке имеется одноосное напряженное состояние (например, при растяжении и изгибе), то при расчете на прочность сравнивают суммарное нормальное напряжение с допускаемым простым, например растягивающим или изгибающим. Если напряженное состояние в точке двухосное (например, кручение и изгиб), расчет выполняют, используя ту или иную теорию (гипотезу) прочности.

Суть теорий прочности заключается в том, что при расчете сложных напряженных состояний их комбинация условно заменяется одной простой деформацией, равноопасной (эквивалентной) сложной. В курсе «Сопротивление материалов» рассматриваются такие теории, как «теория наибольших нормальных напряжений», «теория наибольших деформаций», «теория наибольших касательных напряжений». В «Технической механике» для расчетов деталей авиационных механизмов применяется в основном четвертая, энергетическая теория прочности. Согласно этой теории два напряженных состояния детали — сложное и эквивалентное ему простое считаются равноопасными, если равны удельные потенциальные энергии изменения их формы. В основном эта теория применяется при расчетах деталей из пластичных материалов.

8.2. Изгиб с растяжением или сжатием

Рассмотрим консольную балку длиной l прямоугольного сечения $b \times h$ (рис. 8.1, а), которая подвергается осевому растяжению силой F_x и плоско-поперечному изгибу от силы F_z .

Задачу определения опасного сечения и дальнейшие расчеты на прочность проведем с помощью **принципа независимости действия сил**. Согласно этому принципу рассмотрим отдельно изгиб и растяжение. Построим эпюры изгибающих моментов M_u и продольных сил N (рис. 8.1, б).

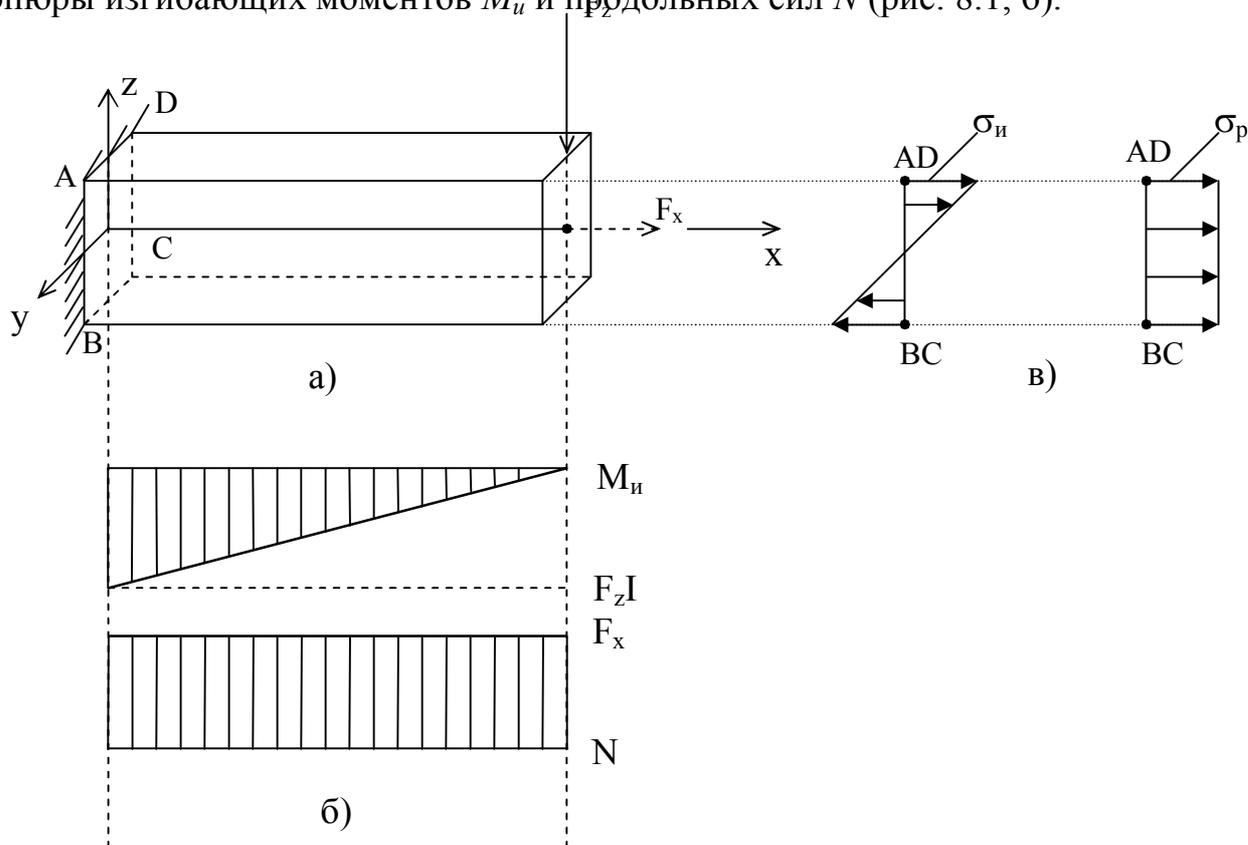


Рис 8.1

Из эпюр видно, что наибольших значений изгибающий момент M_u достигает в сечении $ABCD$, где он равен $F_z l$, а значение продольной силы $N = F_x$ постоянно по всей длине балки. Эпюры напряжений от изгиба σ_u и от растяжения в сечении $ABCD$ показаны на рис. 8.1, в. Как видно, наибольшего значения напряжение σ_u достигает в слоях AD и BC , наиболее удаленных от нейтральной оси: $\sigma_u = M_u / W_y = F_z l / (bh^2/6)$. Напряжение σ_p одинаково в любом сечении и равно $\sigma_p = N / A = F_x / bh$.

Нормальные напряжения σ_u и σ_p , направленные по одной прямой, можно **складывать алгебраически**. Очевидно, что в итоге наиболее опасным будет сечение в заделке, а в нем наиболее опасным является слой AD , где напряжения σ_u и σ_p имеют одинаковый знак. Условие прочности балки при этом будет иметь вид:

$$\sigma_3 = \sigma_u + \sigma_p = M_u / W_y + F_x / A \leq [\sigma_u], \quad (8.1)$$

где σ_3 - эквивалентное напряжение.

Если сила F_x будет сжимающей, уравнение прочности не изменится, напряжения σ_u и σ_p также будут складываться, но опасным будет слой BC . По той же причине не имеет значения направление силы F_z , т.е. знак момента M_u в уравнении (8.1) также берется по абсолютной величине.

8.3. Косой изгиб (изгиб в двух плоскостях)

Изгиб называется косым, если плоскость деформации (расположения изогнутой оси балки) не совпадает с плоскостью действия внешних сил и моментов.

Пусть на балку действует сила F , составляющая угол α с осью симметрии сечения z (рис. 8.2, а).

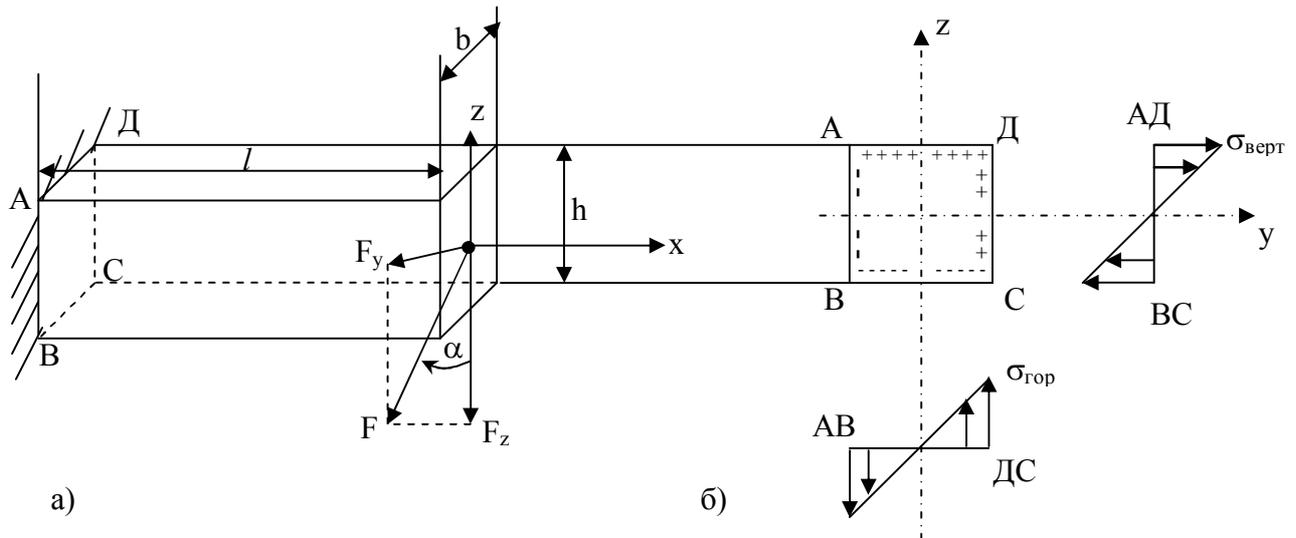


Рис 8.2

Балка имеет прямоугольное сечение, в котором высота h больше ширины b , вследствие чего и осевые моменты инерции сечения различны:

$$J_y = bh^3/12 > J_z = hb^3/12.$$

В данном случае наибольшие напряжения возникают в точках поперечного сечения, наиболее удаленных от нейтральной оси, где напряжение равно нулю. Для определения значений наибольших напряжений в опасном сечении $ABCD$ сила F раскладывается на две составляющие — горизонтальную F_y и вертикальную F_z по направлениям главных осей инерции сечения (рис 8.2, а). В этом случае эпюры $\sigma_{гор}$ в горизонтальной и $\sigma_{верт}$ в вертикальной плоскостях строятся на основании правил и формул, полученных ранее для плоского поперечного изгиба (рис. 8.2, б). Максимальные напряжения будут в точках опасного сечения, наиболее удаленных от соответствующих нейтральных осей. Так как растягивающим напряжениям приписывается знак плюс, а сжимающим - знак минус, то нетрудно увидеть из рис. 8.2, б, что наиболее напряженными будут точки B и D сечения. Возникающие в них напряжения $\sigma_{верт}$ и $\sigma_{гор}$ согласно принципу независимости действия сил суммируются. Таким образом в рассмотренном случае косого изгиба балки прямоугольного сечения условие прочности в опасном сечении приобретает вид:

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{Э}} &= \sigma_{\text{верт}} + \sigma_{\text{гор}} = M_{u_{\text{верт}}} / W_Y + M_{u_{\text{гор}}} / W_Z = \frac{Fl \cos \alpha}{b^2 h^2 / 6} + \frac{Fl \cos \alpha}{b^2 h^2 / 6} \\ &= \frac{6Fl \cos \alpha}{b^2 h^2} (b \cos \alpha + h \sin \alpha) \leq [\sigma_u]\end{aligned}\quad (8.2)$$

8.4. Изгиб и кручение

При нагружении круглого бруса (вала) крутящим $M_{кр}$ и изгибающим M_u моментами эквивалентное напряжение в рассматриваемом сечении определяется на основании энергетической теории прочности при статическом нагружении по формуле

$$\sigma_{\text{Э}} = \sqrt{\sigma_u + 3\tau_{кр}} = \sqrt{\left(\frac{M_u}{W_y}\right)^2 + 3\left(\frac{M_{кр}}{W_p}\right)^2} \quad (8.3)$$

Учитывая, что $W_p = 2W_y$, получим условия прочности в виде

$$\sigma_{\text{Э}} = \sqrt{\frac{M_u^2 + 0.75M_{кр}^2}{W_y^2}} = \frac{M_{\text{Э}}}{W_y} \leq [\sigma_u] \quad , \quad (8.4)$$

где $M_{\text{Э}} = \sqrt{M_u^2 + 0.75M_{кр}^2}$ - эквивалентный момент.

При переменных нагрузках проверку на прочность проводят по формуле

$$n = \frac{n_{\sigma} n_{\tau}}{\sqrt{n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2}} \geq [n] \quad , \quad (8.5)$$

где n_{σ} и n_{τ} - расчетные значения запасов прочности по нормальным и касательным напряжениям (более подробно см. раздел «Переменные напряжения»)

8.5. Расчет тонкостенных сосудов

К тонкостенным сосудам относятся емкости для хранения жидкостей и газов, элементы теплообменников, трубопроводов, регуляторов давления, сильфонов, толщина стенок которых не превышает 0,1 минимального радиуса кривизны. Конструктивные исполнения тонких сосудов может быть различное, а методика расчета на прочность отличается незначительно.

Если сосуды имеют форму тел вращения, то без большой погрешности можно принять, что в стенках возникают только нормальные напряжения (растягивающие или сжимающие) и что эти напряжения распределены равномерно по толщине стенки.

Рассмотрим тонкостенный сосуд с толщиной стенки t , находящийся под внутренним давлением p (рис. 8.3).

Вырежем из его стенки элемент площадью $dA = dl_1 dl_2$, радиусы кривизны поверхности сосуда в данном месте ρ_1 и ρ_2 .

Используя метод сечений, заменим взаимодействие элемента dA с оставшейся частью сосуда внутренними силами N_1 и N_2 , интенсивность которых равна σ_1 и σ_2 . Составим условие статического равновесия элемента, для чего спроецируем силы, действующие на элемент, на направление нормали $n - n$ к поверхности элемента.

Внешняя сила N от внутреннего давления p будет равна $N = p dA = p dl_1 dl_2$.

Проекция на нормаль $n - n$ внутренних сил N_1 и N_2 , действующих попарно на четырех гранях, равна $2N_1 \sin(d\varphi_1/2) + 2N_2 \sin(d\varphi_2/2) = 2\sigma_1 A_1 \sin(d\varphi_1/2) + 2\sigma_2 A_2 \sin(d\varphi_2/2)$.

С учетом малости размеров элемента dA примем $\sin(d\varphi_1/2) = d\varphi_1/2$, а $\sin(d\varphi_2/2) = d\varphi_2/2$.

Тогда уравнение равновесия элемента записывается в виде

$$p dl_1 dl_2 = 2\sigma_1 A_1 d\varphi_1/2 + 2\sigma_2 A_2 d\varphi_2/2 = \sigma_1 A_1 d\varphi_1 + \sigma_2 A_2 d\varphi_2.$$

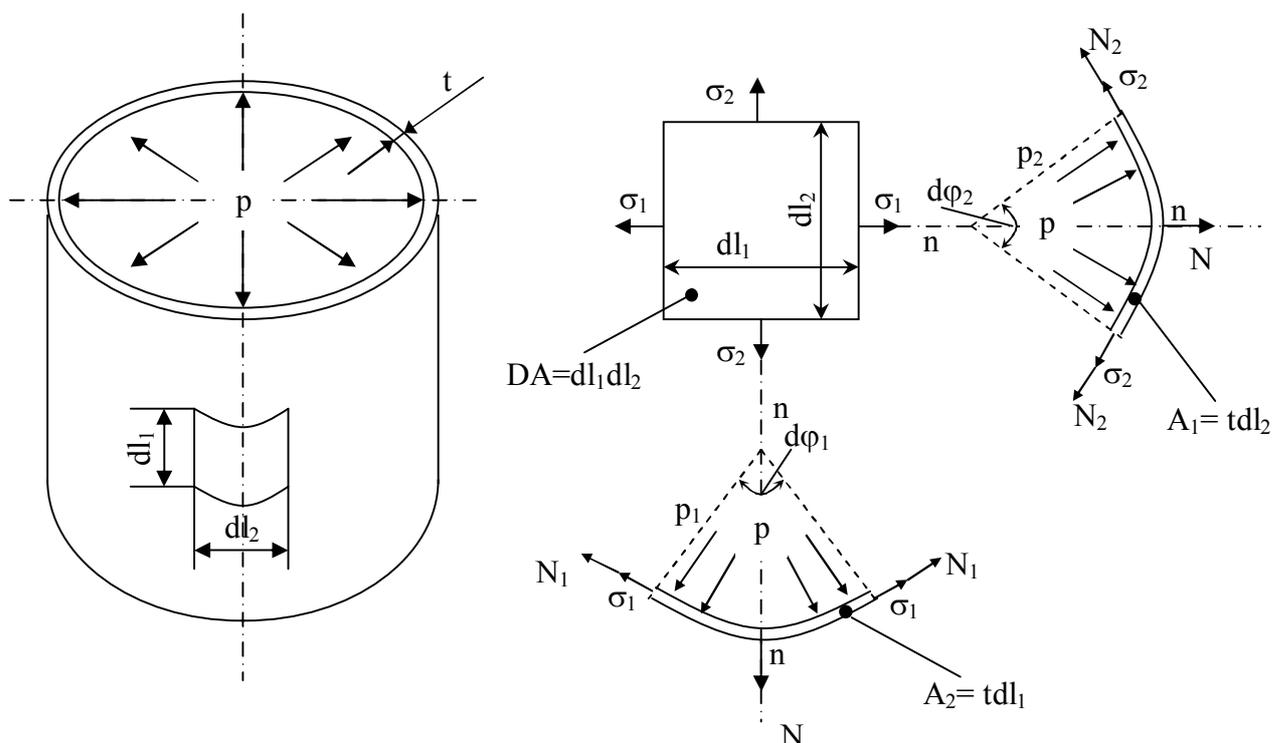


Рис. 8.3

Из условия $dl_1 = \rho_1 d\varphi_1$, $dl_2 = \rho_2 d\varphi_2$ выразим $d\varphi_1 = dl_1/\rho_1$, $d\varphi_2 = dl_2/\rho_2$. Подставив эти значения в уравнение с учетом того, что $A_1 = t dl_2$, а $A_2 = t dl_1$ (см. рис. 8.3) получим:

$$p dl_1 dl_2 = \sigma_1 t dl_2 dl_1 / \rho_1 + \sigma_2 t dl_1 dl_2 / \rho_2$$

Разделив левую и правую части уравнения на $t dl_1 dl_2$ получим окончательную формулу для расчета тонкостенных сосудов, которую называют формулой Лапласа:

$$\sigma_1/\rho_1 + \sigma_2/\rho_2 = p/t \quad (8.6)$$

Рассмотрим расчет двух видов сосудов, наиболее часто встречающихся на практике: сферического и цилиндрического. При этом ограничимся случаями действия внутреннего газового давления.

1. **Сферический сосуд.** В этом случае $\rho_1 = \rho_2 = r$, где r - радиус сферы, а $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$. Из формулы (8.6) следует, что

$$\sigma = pr/2t \quad (8.7)$$

Исследования показывают, что поскольку в данном случае имеет место плоское напряженное состояние, то согласно энергетической теории проверка прочности ведется, как в случае одноосного напряженного состояния:

$$\sigma = pr/2t \leq [\sigma] \quad (8.8)$$

2. **Цилиндрический сосуд.** В этом случае (рис. 8.4, а) $\rho_1 = r$ - радиус цилиндра, $\rho_2 = \infty$.

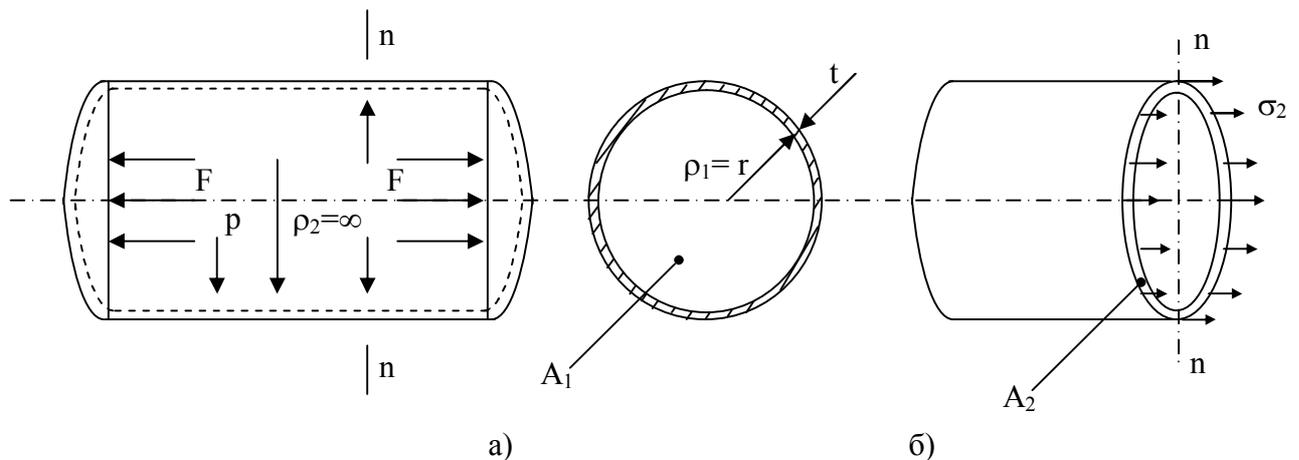


Рис. 8.4

Из уравнения Лапласа получаем $\sigma_1/r = p/t$, откуда

$$\sigma_1 = pr/t \quad (8.9)$$

Для определения напряжения σ_2 используем метод сечений. Рассечем сосуд плоскостью $n-n$, перпендикулярной его оси, мысленно отбросим правую часть и рассмотрим условие равновесия левой оставшейся части (рис. 8.4, б). На неё действуют сила давления газа на днище $F = pA_1 = p\pi r^2$, а также внутренняя сила от напряжения σ_2 , равная $N_2 = \sigma_2 A_2 = \sigma_2 2\pi r t$. Проецируя эти силы на ось сосуда, получаем:

$$-F + N_2 = 0; p\pi r^2 + \sigma_2 2\pi r t = 0, \text{ откуда } \sigma_2 = pr/2t. \quad (8.10)$$

Из зависимостей (8.9) и (8.10) видно, что в цилиндрическом сосуде напряжение в продольном сечении в 2 раза больше, чем в поперечном. Это учитывают на практике при изготовлении составных цилиндрических резервуаров: продольные сварные швы выполняют более прочными, чем поперечные. При расчете на прочность цилиндрического сосуда рекомендуется применять формулу, основанную на энергетической теории прочности:

$$\sigma_3 = 0,86\sigma_1 = 0,86pr/t \leq [\sigma] \quad (8.11)$$

9. Напряжения в элементах конструкций при динамических нагрузках

9.1. Общие сведения

Динамическими считаются нагрузки, изменяющиеся во времени с большой скоростью. Напряжения, возникающие при колебаниях от действия динамических нагрузок, могут во много раз превосходить по своему значению напряжения от статических нагрузок. Кроме того, многие пластичные материалы при динамическом воздействии становятся хрупкими, при действии многократно повторяющейся переменной нагрузке прочность материалов резко снижается.

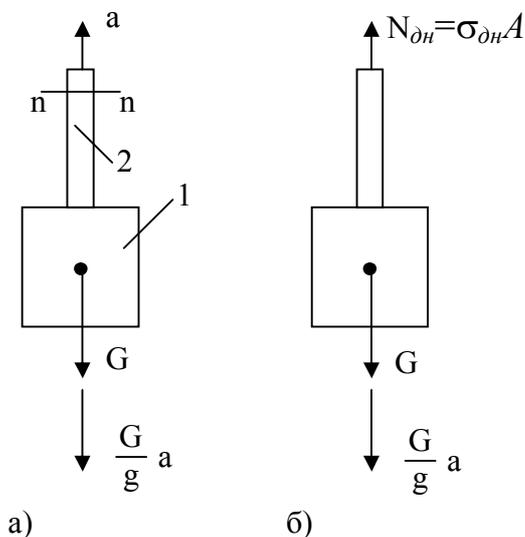
Общий метод расчета на динамическую нагрузку основан на известном из теоретической механики принципа Даламбера, согласно которому всякоедвигающееся тело может рассматриваться как находящееся в состоянии мгновенного равновесия, если к действующим на него внешним силам добавить силу инерции, равную произведению массы тела на его ускорение и направленную в сторону, противоположную ускорению.

Поэтому в случаях, когда известны силы инерции, можно применять метод сечений, а для определения внутренних нагрузок использовать уравнения статического равновесия.

В тех же случаях, когда определение сил инерции затруднено, например, при ударе, для определения динамических напряжений и деформаций используют закон сохранения энергии.

9.2. Напряжения при равноускоренном движении

Рассмотрим простейший пример. Пусть груз 1 весом G поднимается вверх с ускорением a (рис. 9.1, а). Определим напряжение в тяге 2, держащей груз, если ее площадь сечения равна A .



Прикладываем к грузу силу инерции $ma = (G/g)a$ и направленную вниз. Используя метод сечения, делаем мысленно разрез тяги по сечению $n - n$, отбрасываем верхнюю часть, обозначив внутреннее усилие в сечении $N_{дн}$ (динамическое). Поскольку напряжение распределено по сечению тяги A равномерно, можно записать, что $N_{дн} = \sigma_{дн}A$, где $\sigma_{дн}$ - искомое динамическое напряжение в тяге.

Рис. 9.1

Спроецировав все на вертикальную ось получим: $\sigma_{\text{дн}}A - G(1 + a/g) = 0$,
откуда

$$\sigma_{\text{дн}} = G/A(1 + a/g) = \sigma_{\text{ст}}K_{\text{дн}} \quad (9.1)$$

где $\sigma_{\text{ст}} = G/A$ - напряжение при статическом действии груза, $K_{\text{дн}} = (1 + a/g)$ - динамический коэффициент.

Таким образом, динамическое напряжение может быть выражено через статическое напряжение и динамический коэффициент. Это особенно удобно в тех случаях, когда динамический коэффициент приходится определять опытным путем.

9.3. Напряжения при продольном ударе

Пусть груз весом G падает с высоты h на неподвижный стержень (рис. 9.2, а). Под действием веса груза, а также сил инерции, которую он

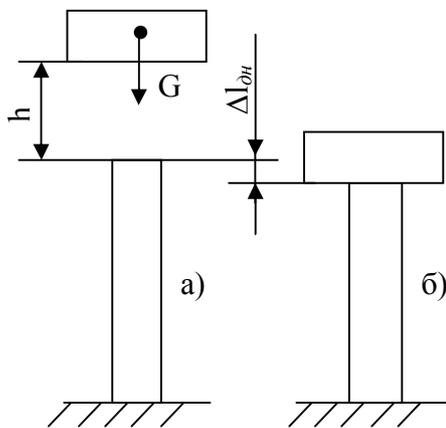


Рис. 9.2

приобрел при падении, стержень укоротится на величину $\Delta l_{\text{дн}}$ (рис. 9.2, б), при этом в нем возникнет соответствующее динамическое напряжение $\sigma_{\text{дн}}$, которое определяется с помощью закона сохранения энергии. При этом используются следующие допущения:

- 1) при ударе $\sigma_{\text{дн}} < \sigma_T$, т.е. закон Гука сохраняет свою силу;
- 2) тела после удара не отскакивают друг от друга;
- 3) масса груза \gg массы стержня;
- 4) пренебрегаем потерями энергии.

Приравняв работу падающего груза к потенциальной энергии деформации стержня, получаем:

$$\Delta l_{\text{дн}} = \Delta l_{\text{ст}}(1 + \sqrt{1 + 2h / \Delta l_{\text{ст}}}) = \Delta l_{\text{ст}}K_{\text{дн}} \quad (9.2)$$

Умножив левую и правую части (9.2) на (E/l) , на основании закона Гука получим

$$\sigma_{\text{дн}} = \sigma_{\text{ст}}K_{\text{дн}} \quad (9.3)$$

где динамический коэффициент $K_{\text{дн}}$ равен:

$$K_{\text{дн}} = 1 + \sqrt{1 + 2h / \Delta l_{\text{ст}}} \quad (9.4)$$

Из этих формул видно, что динамические деформации и напряжения зависят от статической деформации ударяемого тела. Чем больше статическая деформация (при прочих равных условиях), тем меньше динамическое напряжение. Вот почему для уменьшения динамического напряжения стараются конструктивными методами увеличить статическую деформацию (например, применением амортизаторов, пружин, мягких прокладок и др.).

Рассмотрим два частных случая.

1. Внезапное приложение нагрузки ($h = 0$):

$K_{\text{дн}} = 2$, $\sigma_{\text{дн}} = 2\sigma_{\text{ст}}$, т.е. напряжения и деформации вдвое больше, чем при статическом действии того же груза.

2. Груз падает с большой высоты ($h \gg \Delta l_{\text{ст}}$):

$$K_{\text{дн}} = \sqrt{2h / \Delta l_{\text{ст}}} \quad (9.5)$$

Например, пусть $\Delta l_{\text{ст}} = 5 \cdot 10^{-3}$ мм, $h = 250$ мм, тогда согласно (9.5) $K_{\text{дн}} = 300$. Применим амортизатор, у которого при данной статической нагрузке $\Delta l_{\text{ст}} = 5$ мм. Получим $K_{\text{дн}} = 10$ - напряжение уменьшилось в 30 (!) раз.

10. Прочность при переменных напряжениях

10.1. Понятие об усталостной прочности. Основные определения

Многие детали авиационных механизмов в процессе работы подвергаются действию периодически изменяющихся во времени нагрузок (напряжений). Установлено, что при этом в материале деталей возникают микротрещины, которые постепенно развиваются и значительно ослабляют сечение деталей. При разрушении на поверхности излома детали наблюдаются две ярко выраженные зоны: гладкая – результат постепенного развития трещины и грубозернистая – след внезапного разрушения. Такое явление называется **усталостью материала**.

При переменных напряжениях разрушение детали будет проходить при напряжениях, значительно меньших предела прочности. Дополнительной характеристикой свойств материала, определяющих возможность воспринимать многократное действие переменных напряжений без разрушения, является **предел выносливости**. Значение предела выносливости для одного и того же материала зависит от ряда факторов, в частности от закона изменения напряжения во времени. В деталях механических систем наиболее часто напряжения изменяются по циклическому закону, близкому к синусоидальному. На рис. 10.1 показано периодическое изменение нормального напряжения во времени от наименьшего σ_{min} до наибольшего σ_{max} . Однократная смена напряжений называется циклом изменения напряжений, $t_{\text{ц}}$ – время цикла.

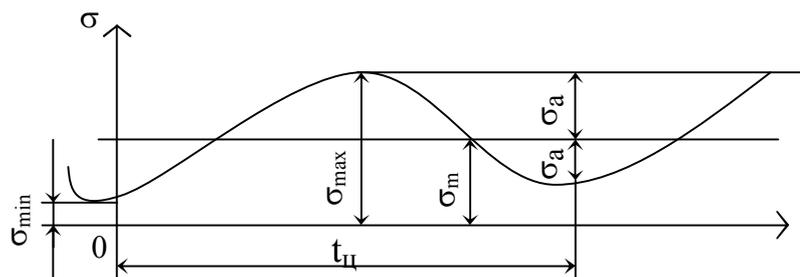


Рис. 10.1

Любой цикл может быть охарактеризован также средним напряжением

$$\sigma_m = (\sigma_{\min} + \sigma_{\max}) / 2, \quad (10.1)$$

амплитудой переменного напряжения

$$\sigma_a = (\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) / 2, \quad (10.2)$$

а также коэффициентом асимметрии цикла (его называют чаще “характеристика цикла”)

$$R = \sigma_{\min} / \sigma_{\max}, \quad (10.3)$$

Здесь σ_{\min} и σ_{\max} – минимальное и максимальное значение напряжений с точки зрения абсолютных значений, но с учётом знаков.

Если минимальное напряжение цикла $\sigma_{\min} = 0$, то $R = 0$, цикл называется отнулевым или пульсирующим (рис.10.2,а). У этого цикла амплитудные и средние значения напряжений равны.

Если минимальные значения напряжений и максимальные численно равны друг другу, но противоположны по знаку (рис.10.2.б), цикл называется симметричным, характеристика цикла $R = -1$, среднее напряжение $\sigma_m = 0$, $|\sigma_{\min}| = |\sigma_{\max}| = \sigma_a$.

В случае если напряжение в течение времени практически не изменяется, $\sigma_{\min} = \sigma_{\max}$, цикл называется приближенно статическим, для него $R = +1$.

Всё сказанное для нормальных напряжений распространяется и на касательные, однако, если в случае нормальных напряжений положительным считается напряжение при растяжении, а отрицательным – при сжатии, то в случае касательных напряжений знак принимается условно: например, в одну сторону положительный, в другую – отрицательный.

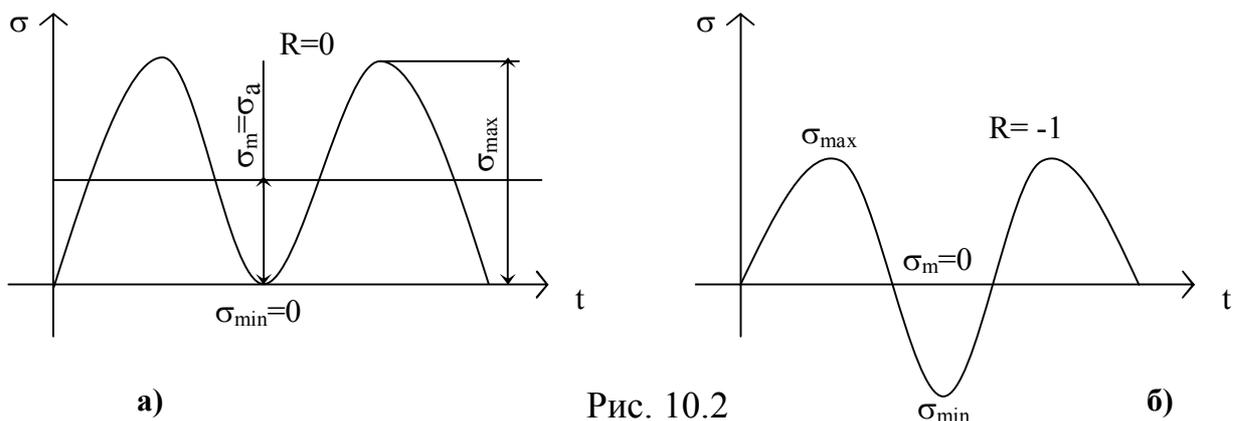


Рис. 10.2

10.2. Кривая выносливости. Предел выносливости

Чтобы исключить влияние различных конструктивных факторов и выявить усталостные характеристики самого материала, испытания на усталостную прочность проводят на образцах, имеющих одинаковые размеры, форму и чистоту обработки поверхности, например, отполированный вал диаметром 6...10 мм. Испытания проводятся на испытательных машинах, которые позволяют создавать в сечении образца циклически изме-

няющиеся напряжения с заданной характеристикой R . Испытания первого образца проводят при напряжении $\sigma_{\max}=0.7\sigma_B$, он разрушается при числе циклов примерно $10^3 \dots 10^4$. Затем испытывают второй образец, третий и т.д. (обычно около 10), снижая σ_{\max} . Количество циклов нагружения, необходимых для разрушения образцов, при этом растёт. По результатам испытаний строится график зависимости σ_{\max} от N , который называется кривой выносливости, или кривой усталостной прочности (рис.10.3).

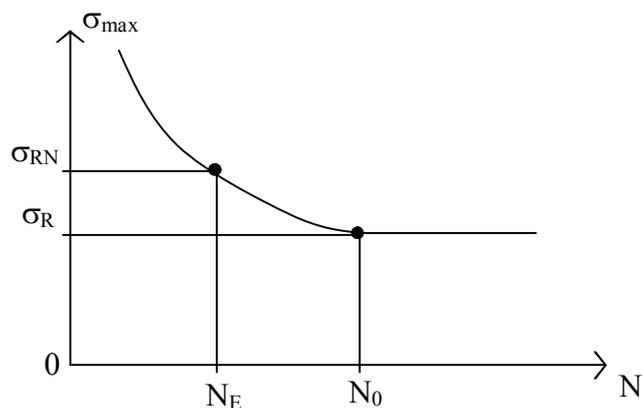


Рис.10.3

Как показывает опыт, при снижении максимального напряжения для остальных образцов кривая выносливости асимптотически приближается к некоторой горизонтали и, начиная с определённого напряжения, образец не разрушается, сколь велико не было бы число циклов нагружения. Это напряжение обозначается σ_R и называется пределом выносливости (рис.10.3).

Предел выносливости σ_R – это такое максимальное напряжение, которое с заданной вероятностью неразрушения материал опытного образца может выдержать практически неограниченное число циклов нагружения (образец стальной).

Число циклов нагружения N_0 , соответствующее пределу выносливости, называется базовым.

Эксперименты показывают, что если образец из среднеуглеродистой стали выдержал $N_0=10^7$ циклов нагружения, он не разрушится и при значительно большем количестве циклов.

У высокоуглеродистых закалённых сталей и цветных металлов предела выносливости не существует, у этих металлов кривая выносливости может стать асимптотой оси N . Для этих материалов вводится понятие **условный предел выносливости**: напряжение разрушения, значение которого определяется при базовом числе циклов нагружения $N_0=10$

Материал имеет не один предел выносливости, а несколько, в зависимости от значения коэффициента асимметрии цикла R . Наиболее часто в справочниках приводятся значения пределов выносливости при отнулевом ($R=0$) и симметричном ($R=-1$) циклах напряжений при изгибе: σ_0 и σ_{-1} . На основании испытаний установлены приближённые зависимости между

пределом выносливости при изгибе σ_{-1} и пределами выносливости для других видов деформации, например:

$$\sigma_{-1p} = 0,8\sigma_{-1}; \quad (10.4)$$

$$\tau_{-1} = 0,6\sigma_{-1}. \quad (10.5)$$

где σ_{-1p} – предел выносливости при симметричном цикле растяжения – сжатия; τ_{-1} – предел выносливости при кручении в условиях симметричного цикла.

Кроме того, ориентировочно пределы выносливости при различных видах деформации среднеуглеродистых сталей могут быть определены по пределу прочности по следующим эмпирическим зависимостям:

Вид деформации	отнулевой цикл	симметричный цикл
Растяжение:	$\sigma_{0p} = 0,52 \sigma_B$,	$\sigma_{-1p} = 0,36 \sigma_B$
Изгиб:	$\sigma_0 = 0,6 \sigma_B$,	$\sigma_{-1} = 0,43 \sigma_B$
Кручение:	$\tau_0 = 0,32 \sigma_B$,	$\tau_{-1} = 0,26 \sigma_B$

Нагружение образцов по законам, отличающимся от синусоидальных, показали, что пределы выносливости практически не зависят от формы цикла, а определяются только значениями σ_{\min} и σ_{\max} . Поэтому для всех циклов 1,2,3, показанных на рис.10.4 пределы выносливости одинаковые.

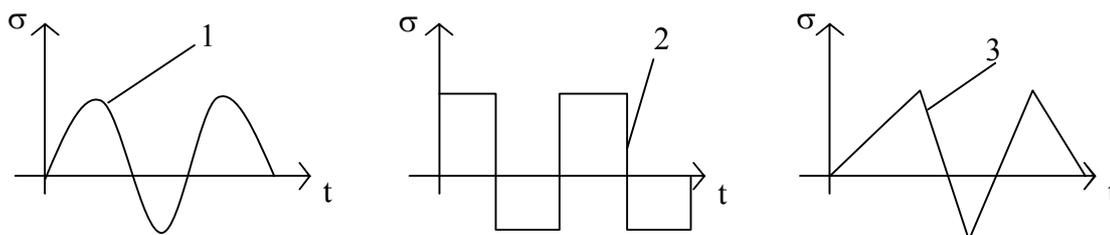


Рис.10.4

Не влияет на σ_R и частота нагружения, если она не превосходит 5...6 тысяч циклов в минуту.

10.3. Предел ограниченной выносливости

При расчете детали (например, вала) на прочность расчётное число циклов нагружения N_E может оказаться либо больше, либо меньше базового числа N_0 . В первом случае при $N_E > N_0$ в качестве опасного напряжения при расчёте на прочность выбирается предел выносливости σ_R , поскольку брать напряжение, меньшее, чем σ_R экономически нецелесообразно. Но если расчётное число циклов $N_E < N_0$, в качестве опасного напряжения принимают **предел ограниченной выносливости** σ_{RN} – такое максимальное напряжение, при котором не происходит разрушения опытного образца за расчётное число циклов N_E . Из рис.10.3 видно, что для $N_E < N_0$ получается $\sigma_{RN} > \sigma_R$, а чем больше опасное напряжение, тем больше запас прочности. Аппроксимируя кривую выносливости, получим:

$$\sigma_{RN} = \sigma_R \cdot K_L \quad (10.6)$$

где K_L – коэффициент долговечности.

Для сталей $K_L = \sqrt[9]{\frac{N_0}{N_E}}$, где $N_0=10^7$ – для среднеуглеродистых сталей, $N_0=10^8$ – для высокоуглеродистых сталей. Предел ограниченной выносливости при этом “сверху” ограничен прочностью материала σ_T (или σ_B), а “снизу” – пределом выносливости σ_R : $\sigma_T \leq \sigma_{RN} \leq \sigma_R$.

Если расчётные значения σ_{RN} выходят за эти пределы – берутся эти пределы. Для цветных сплавов $K_L = \sqrt[m]{\frac{10^8}{N_E}}$, где $m=10\dots12$, а расчётное значение σ_{RN} ограничивается только сверху $\sigma_{0,2} \geq \sigma_{RN} \geq 0$.

Всё вышесказанное распространяется и на касательные напряжения.

10.4 Факторы, влияющие на предел выносливости

Детали авиационных механизмов, работающих при циклических нагрузках, могут существенно отличаться от стандартных образцов, по испытаниям которых определяется предел выносливости используемого материала. Опыт эксплуатации и исследования показывают, что наиболее существенно на предел выносливости влияют следующие факторы:

- 1 – концентраторы напряжений;
- 2 – размеры поперечных сечений;
- 3 – шероховатость поверхности, упрочнение и другие факторы.

1. Резкие изменения формы, отверстия, проточки, надрезы и т.п. значительно снижают предел выносливости деталей по сравнению с опытными образцами. Это снижение учитывается эффективными коэффициентами концентрации напряжений K_σ и K_τ , которые приводятся в справочниках ($K_\sigma \geq 1$ и $K_\tau \geq 1$). Например, при симметричном цикле предела выносливости образцов при наличии концентраторов напряжения будут равны:

$$\sigma_{-1K} = \sigma_{-1} / K_\sigma, \quad (10.7)$$

$$\tau_{-1K} = \tau_{-1} / K_\tau. \quad (10.8)$$

2. Опыты показывают, что чем больше абсолютные размеры поперечного сечения детали, тем меньше предел выносливости. Это учитывается масштабным коэффициентом K_d .

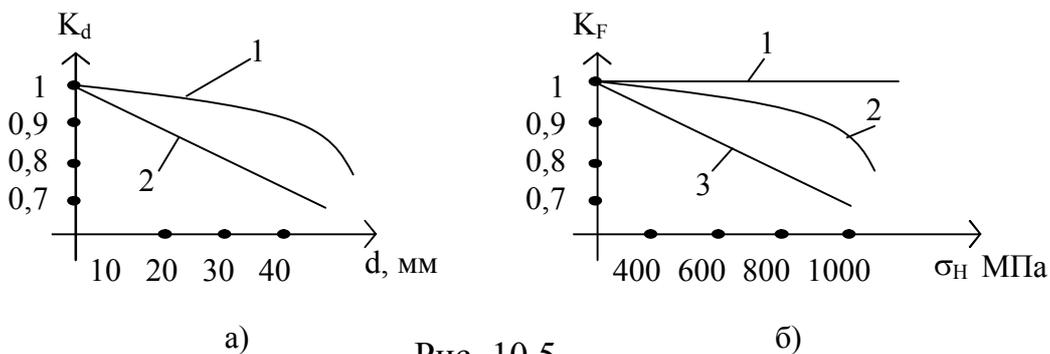


Рис. 10.5

На рисунке 10.5,а показана графическая зависимость масштабного коэффициента K_d (коэффициента влияния размера) от диаметра d : зависимость 1 – для углеродистых сталей ($\sigma_B=400...500$ МПа), 2 – для легированных сталей ($\sigma_B=1200...1400$ МПа). Для приборных механизмов при $d \leq 10$ мм $K_d=1$. При $d > 10$ мм $K_d < 1$, а предел выносливости будет равен $\sigma_{-1d} = \sigma_{-1} \cdot K_d$.

3. Влияние состояния поверхности деталей также существенно влияет на сопротивление усталости, что оценивают коэффициентом усталости поверхности K_F (рис. 10.5,б), где кривая 1 – при полировании, 2 – при шлифовании, 3 – при тонком точении. При полировании для всех материалов $K_F=1$, при остальных видах обработки $K_F < 1$, а предел выносливости будет равен $\sigma_{-1F} = \sigma_{-1} \cdot K_F$.

При необходимости могут учитываться и другие факторы, например, упрочнение деталей термической или специальной механической обработкой, азотированием, цементацией и т.д. Для повышения сопротивления усталости применяется ряд мер, основными из которых являются:

- 1 – применение более однородных материалов с мелкозернистой структурой, свободных от внутренних очагов концентраций;
- 2 – придание деталям таких очертаний, при которых была бы уменьшена концентрация напряжений; не следует допускать переходов от одного размера сечения к другому без переходных кривых;
- 3 – тщательная обработка поверхностей деталей, вплоть до полировки, так как малейшие царапины могут явиться началом будущей усталостной трещины;
- 4 – применение специальных методов упрочнения поверхности деталей (например, наклёп может повысить срок службы детали 2-3 раза при незначительных дополнительных расходах).

10.5 Проверка на прочность при переменных напряжениях

Рассмотрим работу деталей при асимметричном цикле нагружения. Если согласно теории энергетической прочности ввести понятие эквивалентного переменного напряжения σ_3 , то при асимметричном цикле для опытного образца получим:

$$\sigma_3 = \sigma_a + \psi_\sigma \cdot \sigma_m \quad (10.9)$$

$$\tau_3 = \tau_a + \psi_\tau \cdot \tau_m \quad (10.10)$$

где σ_a , σ_m , τ_a , τ_m – амплитудные и средние напряжения цикла, ψ_σ , ψ_τ – коэффициенты чувствительности материала к асимметрии цикла. Их значения принимают в зависимости от вида деформации (индекс σ – растяжение и изгиб, индекс τ – кручение) и предела прочности материала:

σ_B МПа	350...520	520...700	700...1000	1000...1250
ψ_σ	0	0,05	0,1	0,2
ψ_τ	0	0	0,05	0,1

Как показывают экспериментальные исследования, влияние концентраторов напряжений, масштабного эффекта и состояния поверхности следует относить только к **переменной составляющей цикла**. С учётом этого для нормальных и касательных напряжений получим:

$$\sigma_{\text{э}} = \sigma_a \frac{K_{\sigma}}{K_d \cdot K_F} + \psi_{\sigma} \cdot \sigma_m, \quad (10.11)$$

$$\tau_{\text{э}} = \tau_a \frac{K_{\tau}}{K_d \cdot K_F} + \psi_{\tau} \cdot \tau_m, \quad (10.12)$$

Вычислив опасные напряжения для симметричного цикла (пределы ограниченной выносливости σ_{-1N} и τ_{-1N} материала данной детали), можно найти запасы прочности по усталости для нормальных и касательных напряжений:

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1N}}{\sigma_a \frac{K_{\sigma}}{K_d \cdot K_F} + \psi_{\sigma} \cdot \sigma_m}, \quad (10.13)$$

$$n_{\tau} = \frac{\tau_{-1N}}{\tau_a \frac{K_{\tau}}{K_d \cdot K_F} + \psi_{\tau} \cdot \tau_m}, \quad (10.14)$$

Условие прочности при этом будет иметь вид $n_{\sigma} \geq [n]$, $n_{\tau} \geq [n]$. При сложном напряжённом состоянии условие прочности определяют по формуле (8.5)

$$n = \frac{n_{\sigma} \cdot n_{\tau}}{\sqrt{n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2}} \geq [n]$$

где $[n]$ – нормативный запас прочности, который для деталей авиационных приборов чаще всего равен 1,5. Если неравенство (8.5) выполняется, то элемент конструкции признаётся надёжным (работоспособным), если неравенство не выполняется, необходимо либо внести изменения в конструкцию детали, либо выбрать материал с более высоким пределом усталостной прочности, либо уменьшить расчётные значения амплитудных и средних значений напряжения.

Литература

1. Стёпин П.А. Сопротивление материалов. – М.: Высш. шк., 1988.
2. Долинский Ф.В., Михайлов М.В. Краткий курс сопротивления материалов. Уч. пособие. – М.: Высш. шк., 1988.
3. Красковский Е.Я. и др. Расчёт и конструирование приборов и вычислительных систем. Уч. пособие. – М.: Высш. шк., 1991.
4. Шалашилин В.И., Горшков А.Г., Трошин В.Н. Сопротивление материалов. Уч. пособие. – М.: МАИ, 2000.