

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

§1 Производная и дифференцируемость функции

1.1. Определение производной

Определение 1.1. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 . Допустим, что существует предел отношения приращения функции в этой точке к вызвавшему его приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$. Тогда этот предел называется **производной** функции в точке x_0 .

Производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 обозначается $f'(x_0)$, $f'_x(x_0)$, $\frac{df(x_0)}{dx}$, $y'(x_0)$.

Таким образом, $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$.

Операция вычисления производной называется **дифференцированием** функции.

Пример 1. Вычислить производную функции $f(x) = ax^2$ а) в точке $x_0 = 1$; б) в произвольной точке x .

☺ а) Составим приращение функции ax^2 в точке $x_0 = 1$:
 $\Delta f(1) = a(1 + \Delta x)^2 - a \cdot 1^2 = a(2\Delta x + (\Delta x)^2)$. Тогда

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a(2\Delta x + (\Delta x)^2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} a(2 + \Delta x) = 2a.$$

б) Составим приращение функции в произвольной точке x :

$$\Delta f(x) = a(x + \Delta x)^2 - ax^2 = a(2x\Delta x + (\Delta x)^2).$$

Тогда
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a(2x\Delta x + (\Delta x)^2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} a(2x + \Delta x) = 2ax. \quad \text{☺}$$

Замечание. Производная, вычисленная в произвольной точке, является функцией. Если сначала найти эту функцию, а затем вычислить значение производной функции при заданном значении аргумента, то получим производную в конкретной точке. В рассмотренном примере, производная в произвольной точке равна $2ax$. Следовательно, в точке $x = 1$ производная будет равна $2ax|_{x=1} = 2a$.

Пример 2. Вычислить производную функции $f(t) = 3\sin(2t + 1)$ в произвольной точке t .

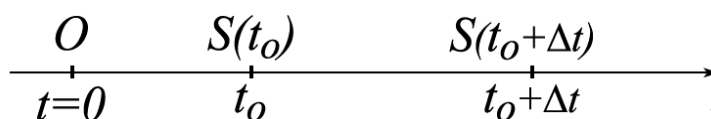
☺ Приращение функции в произвольной точке равно $\Delta f = 3 \sin(2(t + \Delta t) + 1) - 3 \sin(2t + 1) = 6 \sin(\Delta t) \cos(2t + 1 + \Delta t)$. Тогда

$$f'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{6 \sin(\Delta t) \cos(2t + 1 + \Delta t)}{\Delta t} = 6 \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sin(\Delta t)}{\Delta t} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \cos(2t + 1 + \Delta t) = 6 \cos(2t + 1). \ominus$$

1.2. Задачи, приводящие к производной

а) Задача о скорости

Пусть материальная точка движется по прямой и путь, пройденный точкой от начала движения за время t , равен $S(t)$. Тогда путь, пройденный точкой от момента t_0 до момента $t_0 + \Delta t$, равен $S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)$ и средняя скорость на этом участке пути будет $v_{cp} = \frac{S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)}{\Delta t}$.



Назовем **скоростью точки в момент t_0 (мгновенной скоростью)** предел, к которому стремится средняя скорость этой точки за промежуток времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$, когда $\Delta t \rightarrow 0$, т.е. $v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)}{\Delta t}$.

Согласно определению производной, получим $v(t_0) = S'(t_0)$. Таким образом, производная от функции, задающей закон движения материальной точки вдоль прямой, равна скорости движения этой точки.

Пример 3. Закон движения маятника вдоль оси OX : $x(t) = 3 \sin(2t + 1)$. Найти скорость (модуль скорости) его движения в момент, когда маятник находится в начале координат.

☺ Скорость движения маятника вдоль оси равна $x'(t) = 6 \cos(2t + 1)$. Так как функции $x(t)$ и $x'(t)$ периодичны, то можно выбрать значения переменной t , при которых маятник находится в начале координат, лежащие на любом периоде, например, $t_1 = -\frac{1}{2}$ и $t_2 = \frac{\pi - 1}{2}$. Тогда $|x'_1(t)| = |x'_2(t)| = 6$. ☉

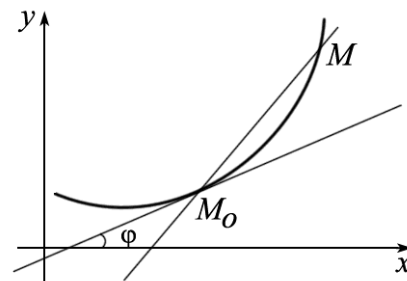
б) Задача о касательной. Уравнение касательной

Рассмотрим график функции $y = f(x)$. Предположим, что функция непрерывна в точке x_0 . Пусть $f(x_0) = y_0$, $f(x_0 + \Delta x) = y_1$ и проведем прямую через точки графика этой функции $M_0(x_0, y_0)$ и $M(x_0 + \Delta x, y_1)$. Назовем эту прямую **секущей** графика. Угловым коэффициентом секущей равен $k_{сек} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$, и ее уравнение будет иметь вид:

$$y - y_0 = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} (x - x_0).$$

Очевидно, что, если устремить Δx к нулю, то точка $M(x_0 + \Delta x, y_1)$ будет двигаться по графику функции к точке $M_0(x_0, y_0)$. При этом секущая будет поворачиваться и стремиться занять некоторое предельное положение, которое мы будем называть **касательным положением** или **касательной к графику функции в точке $M_0(x_0, y_0)$** .

Если существует конечный $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$, то, переходя к пределу в уравнении секущей, получим уравнение касательной $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$, т.е. $k_{кас} = f'(x_0)$.



Используя то, что угловой коэффициент прямой равен тангенсу угла наклона этой прямой к оси абсцисс, получаем **геометрический смысл производной**:

производная функции в точке x_0 равна тангенсу угла наклона касательной к графику этой функции, проведенной в точке $M_0(x_0, y_0)$, к положительному направлению оси абсцисс.

Пример 4. В какой точке графика функции $y = 2x^2$ касательная будет составлять с положительным направлением оси абсцисс угол 45° ? Составить уравнение этой касательной.

☺ Используя результат примера 1, получим $y'(x) = 4x$. Касательная будет составлять с осью абсцисс угол 45° в той точке, где $y'(x) = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$. Решая уравнение $4x_0 = 1$, получим $x_0 = 1/4$. Тогда $y_0 = \frac{2}{4^2} = \frac{1}{8}$ и уравнение касательной будет иметь вид $y - 1/8 = 1 \cdot (x - 1/4)$ или, после упрощения, $y = x - 1/8$. ☺

1.3. Дифференцируемость функции

Определение 1.2. Функция $f(x)$ называется **дифференцируемой** в точке x_0 , если существует число A такое, что $\Delta f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x)$ при $\Delta x \rightarrow 0$.

Теорема 1.1. Функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда она имеет производную в этой точке.

► Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 . Тогда

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{A\Delta x + o(\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \right) = A$, т.е. в этой точке производная существует и равна A .

Наоборот, если существует производная в точке x_0 , то по критерию существования предела функции, получим $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x)$, где $\alpha(\Delta x) \rightarrow 0$, если $\Delta x \rightarrow 0$.

Тогда $\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x = A\Delta x + o(\Delta x)$, где $A = f'(x_0)$. ◀

Замечание. Из доказательства теоремы следует, что, если функция дифференцируема, то число A , о котором говорится в определении дифференцируемости, равно производной функции в данной точке.

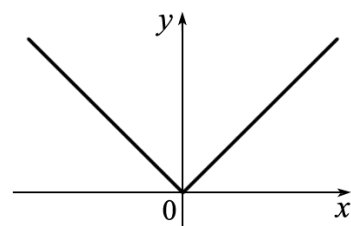
Из доказанной теоремы следует, что для функции одной переменной дифференцируемость равносильна существованию производной.

Теорема 1.2. Если функция дифференцируема в точке, то она непрерывна в этой точке.

► Если функция дифференцируема в точке x_0 , то для ее приращения выполняется соотношение $\Delta f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x)$ при $\Delta x \rightarrow 0$, откуда следует, что

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x_0) = 0$. А это означает, что функция непрерывна в точке x_0 . ◀

Замечание. Эта теорема необратима. Существуют функции, непрерывные в некоторой точке, но не имеющие производной в этой точке. Например, функция $f(x) = |x|$ непрерывна в точке $x = 0$, но ее график не будет иметь касательной в этой точке, следовательно, она не будет дифференцируемой в ней.

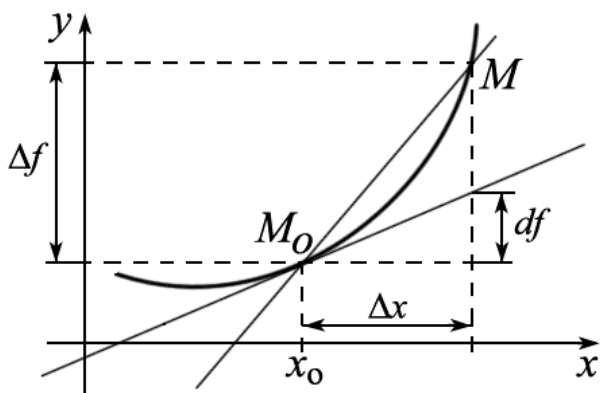


Определение 1.3. Если функция дифференцируема в каждой точке промежутка (a, b) , $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, то будем говорить, что она **дифференцируема на промежутке** (a, b) .

1.4. Дифференциал

Определение 1.4. Допустим, что функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 . Тогда выражение $f'(x_0)\Delta x$ будем называть **дифференциалом** этой функции в точке x_0 и обозначать $df(x_0)$ или df .

Если функция дифференцируема в точке, то в этой точке выполняется равенство $\Delta f(x_0) = df(x_0) + o(\Delta x)$. Поэтому часто говорят, что дифференциал — это главная, линейная часть приращения функции в данной точке.



Отметим на графике функции точку $M(x_0, y_0)$, построим касательную в этой точке и возьмем некоторое приращение аргумента Δx . Тогда ясно, что величина $df(x_0) = f'(x_0)\Delta x$ совпадает с приращением ординаты касательной, соответствующем приращению аргумента Δx . В этом состоит геометрический смысл дифференциала.

Разность между приращением функции и ее дифференциалом $\Delta f(x_0) - df(x_0) = o(\Delta x)$ очень мала при малых значениях Δx . Это позволяет использовать дифференциал для приближенных вычислений.

Найдем дифференциал от функции $f(x) = x$. Для этого найдем сначала производную этой функции: $(x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x) - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 1 = 1$.

Отсюда $dx = 1 \cdot \Delta x$ и в формуле $df(x_0) = f'(x_0)\Delta x$ приращение аргумента можно заменить дифференциалом функции $f(x) = x$:

$$df(x_0) = f'(x_0)dx,$$

что придает этой формуле симметричный вид.

Замечание. Из полученной формулы следует, что производную можно рассматривать как частное дифференциала функции и дифференциала аргумента:

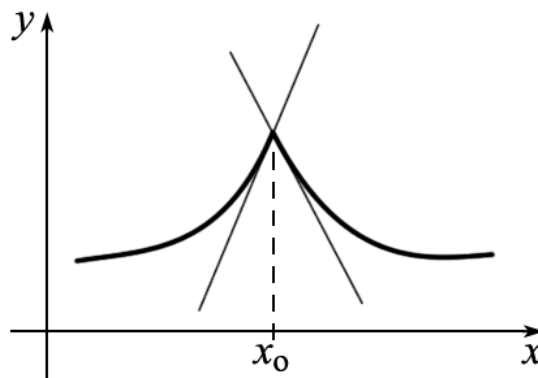
$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}.$$

1.5. Односторонние и бесконечные производные

Определение 1.5. Допустим, что функция определена на промежутке $[x_0, x_0 + \delta)$ и существует предел $\lim_{\Delta x \rightarrow x_0+0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$. Тогда этот предел будем называть **правосторонней производной** функции $f(x)$ и обозначать $f'_+(x_0)$.

Аналогично, если функция определена на промежутке $(x_0 - \delta, x_0]$ и существует $\lim_{\Delta x \rightarrow x_0-0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$, то его будем называть **левосторонней производной** функции $f(x)$ и обозначать $f'_-(x_0)$.

Прямые, проходящие через точку $M_0(x_0, y_0)$, где $y_0 = f(x_0)$ с угловыми коэффициентами $f'_+(x_0)$ и $f'_-(x_0)$ естественно называть **правосторонней и левосторонней касательными**.



Теорема 1.3. Для того чтобы существовала производная $f'(x_0)$ в точке x_0 необходимо и достаточно, чтобы в этой точке существовали односторонние производные и $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.

Доказательство этой теоремы очевидно и предоставляется читателю.

Теперь допустим, что $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \infty$. Тогда будем говорить, что в точке x_0 функция имеет **бесконечную производную**.

Запишем уравнение секущей в виде $\frac{\Delta x}{\Delta f(x_0)}(y - y_0) = x - x_0$. Тогда, так

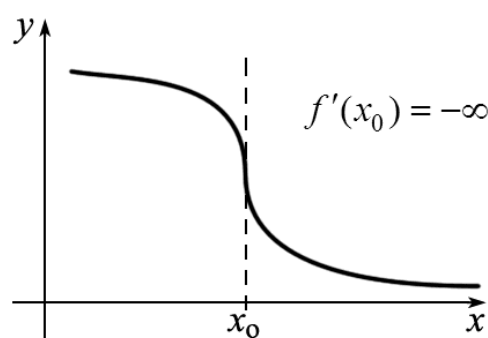
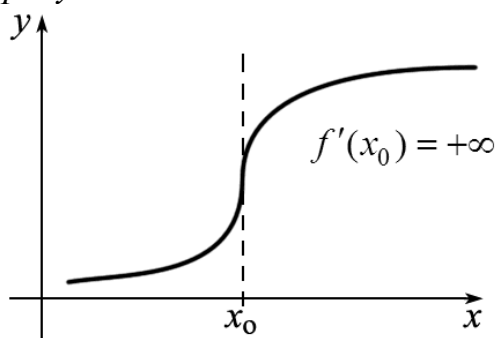
как $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta f(x_0)} = 0$, то предельное положение секущей задается уравнением

$x = x_0$. Геометрически это соответствует тому, что касательная к графику функции будет перпендикулярна оси абсцисс.

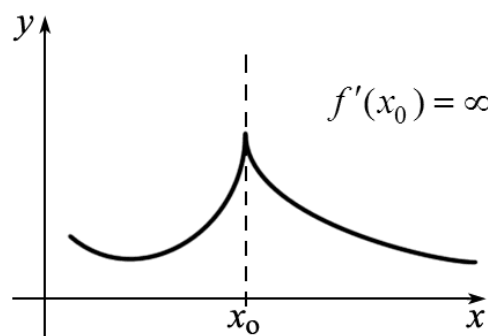
В точке, где производная функции бесконечна, функция не является дифференцируемой.

Замечания

1. Может оказаться, что $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = +\infty$ или $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = -\infty$. В этом случае, мы будем говорить, что $f'(x_0) = +\infty$ или, соответственно, $f'(x_0) = -\infty$. Графики таких функций в окрестности точки $x = x_0$ схематически изображены на рисунках.



2. Можно говорить об односторонних бесконечных производных. При этом, если обе односторонние производные бесконечны и разных знаков, то можно написать $f'(x_0) = \infty$. График такой функций приведен на рисунке.



§2 Правила дифференцирования. Таблица производных

2.1. Дифференцирование суммы, произведения, частного

Теорема 2.1. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x_0 . Тогда в этой точке дифференцируемы их сумма $f(x) + g(x)$, их произведение $f(x) \cdot g(x)$ и, при условии, что $g(x_0) \neq 0$, их частное $\frac{f(x)}{g(x)}$, при этом

$$a) \quad (f(x) + g(x))' \big|_{x=x_0} = f'(x_0) + g'(x_0),$$

$$б) \quad (f(x) \cdot g(x))' \big|_{x=x_0} = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0),$$

$$в) \quad \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' \big|_{x=x_0} = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

► Так как $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ и $\Delta g(x_0) = g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)$, то $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta f(x_0)$ и $g(x_0 + \Delta x) = g(x_0) + \Delta g(x_0)$.

Тогда, так как $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$ и $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g(x_0)}{\Delta x} = g'(x_0)$, то

$$\begin{aligned} \text{а) } (f(x) + g(x))' \big|_{x=x_0} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(f(x_0 + \Delta x) + g(x_0 + \Delta x)) - (f(x_0) + g(x_0))}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0) + \Delta g(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + g'(x_0). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } (f(x)g(x))' \big|_{x=x_0} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(f(x_0 + \Delta x)g(x_0 + \Delta x)) - (f(x_0)g(x_0))}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(f(x_0) + \Delta f(x_0))(g(x_0) + \Delta g(x_0)) - f(x_0)g(x_0)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)g(x_0) + f(x_0)\Delta g(x_0) + \Delta f(x_0)\Delta g(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x_0) \cdot \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} + \\ &+ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0) \cdot \frac{\Delta g(x_0)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta g(x_0) \cdot \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0). \end{aligned}$$

Последний из пределов равен нулю, так как приращение $\Delta g(x_0)$ есть приращение непрерывной в точке x_0 функции, следовательно, бесконечно малая функция, а отношение $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ ограничено в окрестности этой точки.

в) Для вычисления производной от частного вычислим сначала приращения частного:

$$\Delta \frac{f}{g} = \frac{f(x_0 + \Delta x)}{g(x_0 + \Delta x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \frac{f(x_0) + \Delta f(x_0)}{g(x_0) + \Delta g(x_0)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \frac{\Delta f(x_0)g(x_0) - f(x_0)\Delta g(x_0)}{g(x_0)(g(x_0) + \Delta g(x_0))}$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' \big|_{x=x_0} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \frac{f}{g}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} g(x_0) - f(x_0) \frac{\Delta g(x_0)}{\Delta x}}{g(x_0)(g(x_0) + \Delta g(x_0))} = \\ &= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Следствие 1. $(C \cdot f(x))' = C \cdot f'(x)$.

► Вычислим сначала производную от постоянной функции:

$$(C)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{C - C}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0.$$

Тогда, применяя правило дифференцирования произведения, получим

$$(C \cdot f(x))' = (C)' f(x) + C f'(x) = C f'(x). \blacktriangleleft$$

Следствие 2. Из доказанной теоремы следуют соответствующие формулы для дифференциалов функций:

$$\begin{aligned} \text{а) } d(f+g) &= df + dg, \\ \text{б) } d(f \cdot g) &= g \cdot df + f \cdot dg, \\ \text{в) } d\left(\frac{f}{g}\right) &= \frac{g \cdot df - f \cdot dg}{g^2}. \end{aligned}$$

Замечание. Эту теорему с помощью метода математической индукции легко распространить на случай суммы и произведения любого конечного числа функций:

$$\begin{aligned} (f_1 + f_2 + \dots + f_n)' &= f_1' + f_2' + \dots + f_n', \\ (f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_n)' &= f_1' \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_n + f_1 \cdot f_2' \cdot \dots \cdot f_n + \dots + f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_n'. \end{aligned}$$

2.2. Дифференцирование обратной функции

Теорема 2.2. Пусть функция $f(x)$ непрерывна и строго монотонна на промежутке $[a, b]$ и точка $x_0 \in (a, b)$ такова, что существует $f'(x_0) \neq 0$. Тогда функция $f^{-1}(y)$, обратная функции $f(x)$, дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$ и $(f^{-1}(y))'|_{y=y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}$.

► Допустим для определенности, что функция $f(x)$ строго возрастает. Так как точка x_0 - внутренняя точка промежутка $[a, b]$, то существует отрезок $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset [a, b]$, на котором функция $f(x)$ строго возрастает, следовательно, имеет обратную. Точка $y_0 = f(x_0)$ будет внутренней точкой промежутка $[f(x_0 - \delta), f(x_0 + \delta)]$, так как в силу монотонности функции $f(x)$ будет выполняться неравенство $f(x_0 - \delta) < f(x_0) < f(x_0 + \delta)$.

Возьмем приращение Δy такое, чтобы $y_0 + \Delta y \in [f(x_0 - \delta), f(x_0 + \delta)]$. Тогда $\Delta x = f^{-1}(y_0 + \Delta y) - f^{-1}(y_0) \neq 0$, так как, в силу монотонности функции $f^{-1}(y)$ будет выполнено $f^{-1}(y_0 + \Delta y) \neq f^{-1}(y_0)$. Кроме того, $\Delta x \rightarrow 0$ при $\Delta y \rightarrow 0$, так как функция $f^{-1}(y)$ непрерывна в точке y_0 .

Тогда можно написать $\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\Delta y / \Delta x}$ и, если существует

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) \neq 0, \text{ то существует и } \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{f'(x_0)}. \blacktriangleleft$$

Замечание. Доказанную формулу можно записать в виде

$$f'(x_0) = \frac{1}{(f^{-1}(y))'|_{y=f(x_0)}}.$$

2.3. Дифференцирование сложной функции

Теорема 2.3. Пусть функция $f(t)$ дифференцируема в точке t_0 и функция $\varphi(x)$ дифференцируема в точке x_0 , такой что $\varphi(x_0) = t_0$. Тогда сложная функция $f(\varphi(x))$ дифференцируема в точке x_0 , причем

$$(f(\varphi(x)))'|_{x=x_0} = f'_t(t_0) \cdot \varphi'_x(x_0) = f'_t(\varphi(x_0)) \cdot \varphi'_x(x_0).$$

► При заданных условиях функция $f(t)$ будет определена в некоторой окрестности точки t_0 и непрерывна в этой точке. Аналогично, функция $\varphi(x)$ будет определена в некоторой окрестности точки x_0 и непрерывна в ней. В гл3§4 было доказано, что тогда в окрестности точки x_0 будет определена сложная функция $f(\varphi(x))$. Возьмем приращение аргумента Δx такое, чтобы $x_0 + \Delta x$ принадлежало этой окрестности. Обозначим $\Delta t = \varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0)$ и отметим, что, так как функция $\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0 , то $\Delta t \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$.

Тогда, в силу дифференцируемости функции $f(t)$, можно написать $\Delta f(t_0) = f'_t(t_0)\Delta t + o(\Delta t)$, где $o(\Delta t) = \alpha(\Delta t) \cdot \Delta t$, $\alpha(\Delta t) \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0$.

Деля последнее равенство на Δx и переходя к пределу, получим

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(f'_t(t_0) \frac{\Delta t}{\Delta x} + \frac{o(\Delta t)}{\Delta x} \right) = f'_t(t_0) \varphi'_x(x_0), \quad \text{так как} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta t}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0)}{\Delta x} = \varphi'_x(x_0) \quad \text{и} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\alpha(\Delta t) \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) = 0. \quad \blacktriangleleft$$

Следствие. Инвариантность формы первого дифференциала

Форма записи дифференциала $df = f'(t)dt$ сохраняется, если аргумент t является дифференцируемой функцией какого-нибудь другого аргумента.

► Пусть $t = \varphi(x)$. Тогда по определению дифференциала

$$df = (f(\varphi(x)))' dx = f'_t(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx.$$

Так как $\varphi'(x)dx = dt$, и $\varphi(x) = t$, то $df = f'(t)dt$. ◀

Замечание. Необходимо понимать, что сохраняется только форма дифференциала $df = f'(t)dt$, но, если аргумент t - независимая переменная, то dt - приращение этого аргумента, а, если t - функция, то dt - это главная часть этого приращения.

2.5. Логарифмическое дифференцирование

Рассмотрим прием, с помощью которого можно дифференцировать показательно-степенную функцию $(u(x))^{v(x)}$ и некоторые другие функции.

Обозначим $y = (u(x))^{v(x)}$. Так как эта функция определена при условии, что $u(x) > 0$, то можно найти $\ln y$: $\ln y = v(x) \cdot \ln(u(x))$. Продифференцируем обе части последнего равенства по переменной x . Слева это будет производная

от сложной функции: $(\ln y)'_x = \frac{y'}{y}$, справа – производная от произведения:

$$(v(x) \cdot \ln(u(x)))' = v' \cdot \ln u + v \frac{u'}{u}. \quad \text{Тогда} \quad \frac{y'}{y} = v' \ln u + v \frac{u'}{u}, \quad \text{откуда}$$

$$y' = y \cdot \left(v' \ln u + v \frac{u'}{u} \right) = u^v \cdot \left(v' \ln u + v \frac{u'}{u} \right).$$

Пример 1. Вычислить производную от функции $(\sin x)^{\ln x}$.

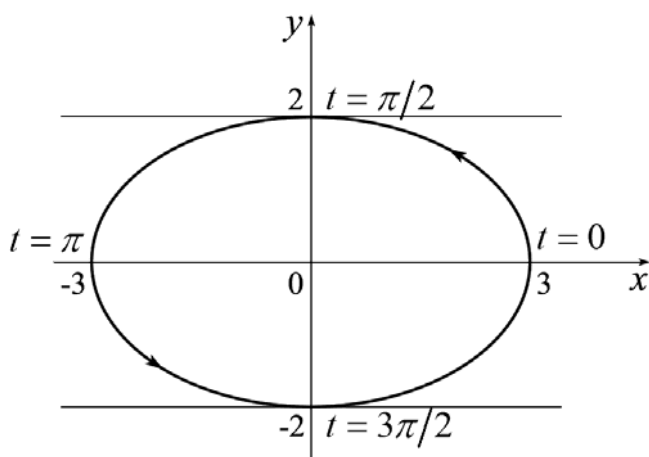
☺ Положим $y = (\sin x)^{\ln x}$. Тогда $\ln y = \ln x \cdot \ln(\sin x)$. Дифференцируя обе части этого равенства, получим $\frac{y'}{y} = \frac{1}{x} \ln(\sin x) + \ln x \cdot \frac{\cos x}{\sin x}$, откуда

$$y' = (\sin x)^{\ln x} \cdot \left(\frac{1}{x} \ln(\sin x) + \ln x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} \right). \quad \ominus$$

2.6. Дифференцирование функций, заданных параметрически

Теорема 2.4. Пусть функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$ определены на промежутке $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, причем функция $x(t)$ непрерывна и строго монотонна, так что существует обратная функция $t = t(x)$, которая тоже непрерывна и строго монотонна. Допустим также, что функции $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы в точке t_0 , причем $x'(t_0) \neq 0$. Тогда сложная функция $y = y(t(x))$ дифференцируема по переменной x в точке $x_0 = x(t_0)$, причем $y'_x(x_0) = \frac{y'_t(t_0)}{x'_t(t_0)}$.

► По правилу дифференцирования сложной функции получим, что в точке x_0 выполняется равенство $(y(t(x)))'_x = y'_t \cdot t'_x$. По формуле для производных взаимно обратных функций $t'_x = \frac{1}{x'_t}$, откуда $(y(t(x)))'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$. ◀



Пример 2. Найти точки на кривой, заданной уравнениями $x = 3 \cos t$, $y = 2 \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$, в которых касательная будет параллельна оси абсцисс.

☺ Прямая параллельна оси абсцисс, если ее угловой коэффициент $k = 0$. Угловой коэффициент касательной равен производной функции $y(t(x))$ по x :

$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2\cos t}{-3\sin t} = -\frac{2}{3}\operatorname{ctg} t$. Найдем значения t , при которых $y'_x = 0$. На проме-

жутке $[0, 2\pi]$ таких значений будет два: $t_1 = \frac{\pi}{2}$ и $t_2 = \frac{3\pi}{2}$. Следовательно, на кривой будет две искомые точки $M_1(0, 2)$ и $M_2(0, -2)$. ☹

Замечание. Уравнения $x = 3\cos t$, $y = 2\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$ задают две функции $y = y(x)$: первая соответствует $t \in [0, \pi]$ и вторая - $t \in [\pi, 2\pi]$. На каждом из этих промежутков функция $x(t)$ монотонна и, следовательно, имеет обратную. Тогда теорема 4.2.4 применима.

§3 Производные и дифференциалы высших порядков

3.1. Производные высших порядков

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на промежутке (a, b) так, что в каждой точке этого промежутка существует ее производная $f'(x)$. Таким образом, эта производная сама является функцией аргумента x . Если эта функция дифференцируема в точке $x_0 \in (a, b)$, то ее производную будем называть **второй производной** (или **производной второго порядка**) от данной функции в точке x_0 и обозначать одним из следующих способов:

$$f''(x_0), \frac{d^2 f(x_0)}{dx^2}, f^{(2)}(x_0), f_{xx}(x_0).$$

$$\text{Таким образом, } f''(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x}.$$

Выведем формулу для второй производной функции, заданной параметрически. Пусть функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$ удовлетворяют условиям теоремы 4.2.4 так, что для всех значений параметра из некоторого промежутка существует y'_x . Допустим также, что для значения параметра t_0 существуют x''_{tt} и y''_{tt} .

Тогда в некоторой окрестности точки t_0 функции $x = x(t)$ и $y'_x = \frac{y'_t(t)}{x'_t(t)} = \varphi(t)$

являются параметрическим заданием функции $y'_x(t(x))$, которая является производной функции $y(t(x))$ по переменной x . По правилу дифференцирования такой функции получим

$$y''_{xx} = \left(\varphi(t(x)) \right)'_x = \frac{\varphi'_t}{x'_t} = \frac{\left(\frac{y'_t}{x'_t} \right)'_t}{x'_t} = \frac{\frac{y''_{tt}x'_t - y'_tx''_{tt}}{(x'_t)^2}}{x'_t} = \frac{y''_{tt}x'_t - y'_tx''_{tt}}{(x'_t)^3}.$$

Аналогично, можно ввести производную от второй производной, которую будем называть **третьей производной** и обозначать $f^{(3)}(x)$, четвертую и т.д.

Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке (a, b) и имеет там производные $f'(x), f''(x), \dots, f^{(n-1)}(x)$ до $(n-1)$ -го порядка включительно. Если в точке $x_0 \in (a, b)$ функция $f^{(n-1)}(x)$ дифференцируема, то ее производную называют **производной n -го порядка** от функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначают $f^{(n)}(x_0)$ или $\frac{d^n f(x_0)}{dx^n}$.

Таким образом,
$$f^{(n)}(x_0) = \left(f^{(n-1)}(x) \right)' \Big|_{x=x_0}.$$

Очевидно, что, если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют производные n -го порядка в некоторой точке, то $(C_1 f(x) + C_2 g(x))^{(n)} = C_1 f^{(n)}(x) + C_2 g^{(n)}(x)$.

Приведем формулы для производных n -го порядка некоторых основных функций:

$$1. (x^\alpha)^{(n)} = \alpha \cdot (\alpha - 1) \dots (\alpha - n + 1) x^{\alpha - n}.$$

$$\text{В частности, если } \alpha = m \in \mathbb{N}, \text{ то } (x^m)^{(n)} = \begin{cases} m(m-1)\dots(m-n+1)x^{n-m}, & n < m, \\ m!, & n = m, \\ 0, & n > m. \end{cases}$$

$$2. (e^x)^{(n)} = e^x.$$

$$3. (\ln(a+x))^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{(a+x)^n}.$$

► Чтобы получить эту формулу, возьмем первую производную от логарифма $(\ln(a+x))' = \frac{1}{a+x} = (a+x)^{-1}$, а затем докажем данную формулу с помощью метода математической индукции. ◀

$$4. (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right), \quad (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right).$$

Эти формулы доказываются с помощью метода математической индукции.

Теорема 3.1. (Формула Лейбница)

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют в точке x производные n -го порядка. Тогда их произведение тоже имеет производную n -го порядка, причем

$$(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}.$$

Замечания

1. Здесь C_n^k - биномиальные коэффициенты.

2. Под производной нулевого порядка будем понимать саму функцию, т.е. $u^{(0)}(x) = u(x)$ и $v^{(0)}(x) = v(x)$.

► Воспользуемся методом математической индукции.

При $n=1$ биномиальные коэффициенты $C_1^0 = C_1^1 = 1$ и формула Лейбница дает равенство $(uv)' = uv' + u'v$, которое совпадает с правилом дифференцирования произведения.

Допустим, что формула верна для $n = m$, т.е. $(uv)^{(m)} = C_m^0 u v^{(m)} + C_m^1 u' v^{(m-1)} + \dots + C_m^m u^{(m)} v$.

Докажем, что формула будет верна для $n = m+1$.

$$\begin{aligned} (uv)^{(m+1)} &= \left((uv)^{(m)} \right)' = \left(C_m^0 u v^{(m)} + C_m^1 u' v^{(m-1)} + \dots + C_m^m u^{(m)} v \right)' = \\ &= C_m^0 u' v^{(m)} + C_m^0 u v^{(m+1)} + C_m^1 u'' v^{(m-1)} + C_m^1 u' v^{(m)} + \dots + C_m^m u^{(m+1)} v + C_m^m u^{(m)} v' = \\ &= C_m^0 u v^{(m+1)} + (C_m^0 + C_m^1) u' v^{(m)} + \dots + (C_m^{m-1} + C_m^m) u^{(m)} v' + C_m^m u^{(m+1)} v = \\ &= C_{m+1}^0 u v^{(m+1)} + C_{m+1}^1 u' v^{(m)} + \dots + C_{m+1}^m u^{(m)} v' + C_{m+1}^{m+1} u^{(m+1)} v. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Замечание. Доказательство аналогично выводу формулы бинома Ньютона и использует свойства биномиальных коэффициентов.

3.2. Дифференциалы высших порядков

Пусть функция $f(x)$ определена и дифференцируема на промежутке (a, b) . Ее дифференциал $df = f'(x)dx$, который мы будем называть первым дифференциалом функции, зависит от двух переменных x и $dx = \Delta x$. Зафиксируем приращение аргумента dx , тогда первый дифференциал можно рассматривать как функцию от переменной x . Если эта функция дифференцируема по x , то можно говорить о величине $d^2 f(x) = d(df) = (f'(x)dx)' dx = f''(x)(dx)^2$, которую называют **вторым дифференциалом** функции $f(x)$ или **дифференциалом второго порядка**. Очевидно, второй дифференциал существует, если функция имеет вторую производную.

Принято записывать $(dx)^2 = dx^2$, поэтому для второго дифференциала справедлива формула $d^2f = f''(x)dx^2$.

Аналогично, положим $d^n f = d(d^{n-1}f)$. Тогда методом индукции легко получить $d^n f = f^{(n)}(x)dx^n$, где $dx^n = (dx)^n$.

Данные формулы справедливы только тогда, когда переменная x является независимой переменной. Если переменная x сама является функцией, то величина dx будет дифференциалом этой функции, и ее нельзя считать константой. Следовательно,

$$d^2f = d(df) = d(f'(x)dx) = d(f'(x)) \cdot dx + f'(x)d^2x = f''(x)dx^2 + f'(x)d^2x.$$

По сравнению с дифференциалом функции, где x была независимой переменной, здесь появилось слагаемое $f'(x)d^2x$, в котором d^2x - второй дифференциал функции $x = x(t)$, т.е. равен $d^2x = x''(t)dt^2$ и обращается в нуль только когда $x(t) = at + b$ (будет доказано в следствии 3 из теоремы 4.4.3 (Лагранжа)). Это означает, что форма второго дифференциала $d^2f = f''(x)dx^2$ сохраняется для случая зависимой переменной, только если $x = at + b$.

§4 Свойства дифференцируемых функций

4.1. Экстремумы

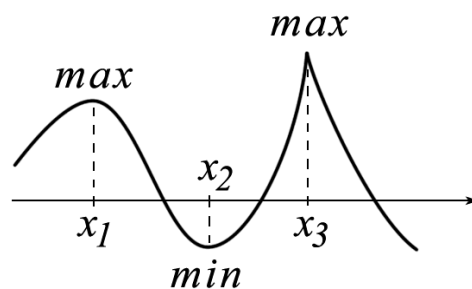
Определение 4.1. Пусть функция $f(x)$ определена в точке x_0 и некоторой ее окрестности $U(x_0)$, причем для всех значений $x \in U(x_0)$ выполняется неравенство $f(x_0) \geq f(x)$. Тогда точку x_0 будем называть **точкой максимума** этой функции.

Аналогично, если функция $f(x)$ определена в точке x_0 и некоторой ее окрестности $U(x_0)$ и для всех значений $x \in U(x_0)$ выполняется неравенство $f(x_0) \leq f(x)$, то точку x_0 будем называть **точкой минимума** этой функции.

Точки максимума и минимума называют **точками экстремума** функции.

Замечание. Если в окрестности $\overset{o}{U}(x_0)$ выполняется одно из неравенств $f(x_0) > f(x)$ или $f(x_0) < f(x)$, то будем говорить, что в точке x_0 функция имеет **строгий максимум** или, соответственно, **минимум**.

На рисунке справа точки x_1, x_3 являются точками строгого максимума, а точка x_2 - строгого минимума.



4.2. Теорема Ферма

Теорема 4.1 (Ферма). Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 , имеет экстремум в этой точке и дифференцируема в ней. Тогда $f'(x_0) = 0$.

► Пусть функция $f(x)$ определена в $U(x_0)$ и в точке x_0 имеет максимум, т.е. для всех $x \in U(x_0)$ выполняется неравенство $f(x_0) \geq f(x)$. Тогда, если $x, x_0 \in U(x_0)$ такие, что $x < x_0$, то будет справедливо неравенство $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$, следовательно, $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$, а так как в точке x_0

существует конечная производная, то $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$.

Аналогично, если взять $x, x_0 \in U(x_0)$ такие, что $x > x_0$, то будет выполне-

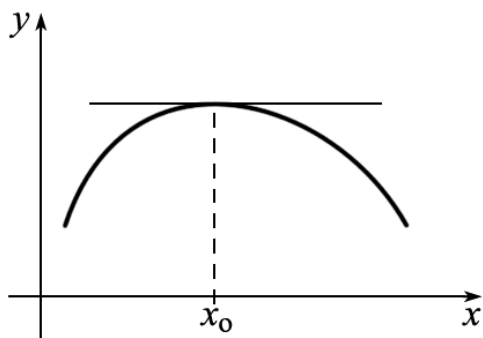
но неравенство $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$ и, переходя

к пределу при $x \rightarrow x_0 + 0$, получим

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0.$$

Неравенства $f'(x_0) \geq 0$ и $f'(x_0) \leq 0$ означают, что $f'(x_0) = 0$.

В случае минимума доказательство аналогично. ◀



4.3. Теорема Ролля

Теорема 4.2 (Ролля). Пусть функция $f(x)$

а) непрерывна на отрезке $[a, b]$;

б) дифференцируема на интервале (a, b) ;

в) принимает равные значения на концах промежутка, т.е. $f(a) = f(b)$.

Тогда на интервале (a, b) существует хотя бы одна точка c такая, что $f'(c) = 0$.

► По второй теореме Вейерштрасса (теорема 4.5) функция непрерывная на замкнутом промежутке достигает на этом промежутке своего наибольшего и наименьшего значений. Обозначим их через M и m , соответственно. Возможны два случая:

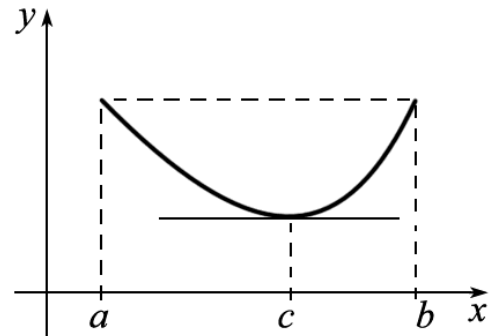
1) $M = m$. Тогда $f(x) = \text{const}$ и $f'(x) = 0$ в любой точке промежутка (a, b) .

2) $M \neq m$. Тогда, так как значения функции на концах промежутка совпадают, то по крайней мере, одно из этих значений функция принимает во внутренней

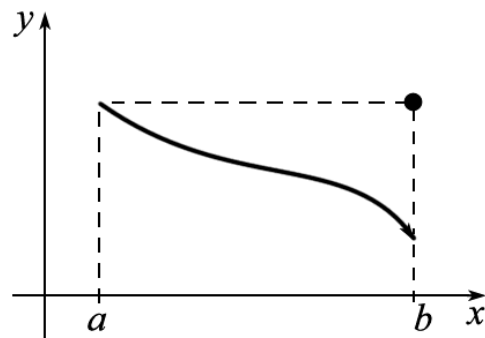
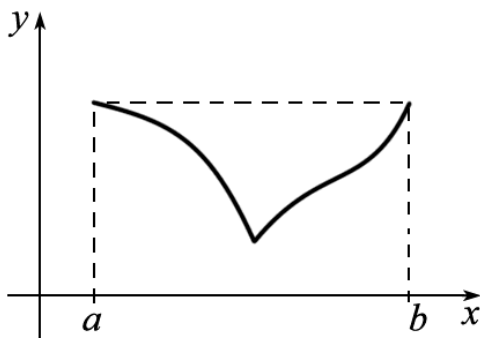
точке отрезка $[a, b]$. Обозначим эту точку через c . Тогда эта точка является точкой экстремума и по теореме Ферма $f'(c) = 0$. ◀

Замечания

1. Геометрически эта теорема означает, что, если функция непрерывна на отрезке, дифференцируема на интервале и принимает равные значения на концах этого отрезка, то на графике этой функции найдется по крайней мере одна точка, в которой касательная будет параллельна оси абсцисс.



2. Все условия теоремы существенны. Примеры показывают, что, если убрать одно из условий, то может не существовать точки, в которой $f'(x) = 0$. Некоторые из таких ситуаций изображены на рисунках:



3. Если $f(a) = f(b) = 0$, то теорему можно сформулировать следующим образом: между двумя нулями дифференцируемой функции лежит, по крайней мере, один нуль производной этой функции.

4. Теорема остается верной, если предположить, что существуют точки, в которых производная принимает бесконечное значение определенного знака.

4.4. Теорема Лагранжа

Теорема 4.3 (Лагранжа). Пусть функция $f(x)$

а) непрерывна на отрезке $[a, b]$;

б) дифференцируема на интервале (a, b) .

Тогда на интервале (a, b) существует, по крайней мере, одна точка c , в кото-

рой выполняется равенство $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

► Рассмотрим функцию $\varphi(x) = f(x) - \lambda x$. Эта функция будет непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b) . Коэффициент λ

выберем так, чтобы $\varphi(a) = \varphi(b)$. Для этого должно быть $f(a) - \lambda a = f(b) - \lambda b$, т.е. $\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Тогда функция $\varphi(x)$ будет удовлетворять условиям теоремы Ролля (теорема 4.4.2) и будет существовать точка c , в которой $\varphi'(c) = 0$. Так как $\varphi'(x) = f'(x) - \lambda$, то $f'(c) = \lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.



Замечания

1. Рассмотрим график функции, о которой говорится в теореме. Проведем отрезок, соединяющий концы этого графика – точки $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$. Тогда частное

$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ равно тангенсу угла наклона этого отрезка, а $f'(c)$ есть тангенс угла наклона касательной к графику функции, проведенной в точке $M(c, f(c))$.

Геометрический смысл теоремы состоит в том, что на графике функции существует хотя бы одна точка, в которой касательная к графику функции будет параллельна хорде AB .

2. Заключение теоремы Лагранжа иногда записывают в другом виде. Умножим обе части равенства $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ на знаменатель. Получим

$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$. Далее введем величину $\theta = \frac{c - a}{b - a}$. Так как $a < c < b$, то $0 < \theta < 1$. Тогда $c = a + \theta(b - a)$, $0 < \theta < 1$ и заключение теоремы примет вид

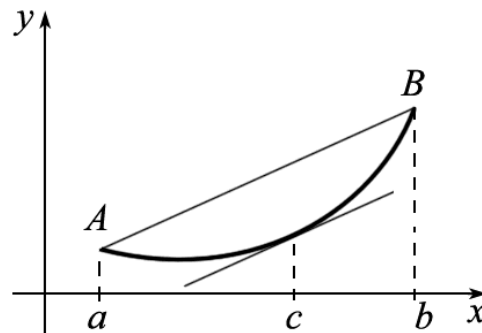
$$f(b) - f(a) = f'(a + \theta(b - a))(b - a).$$

Эту формулу принято называть **формулой конечных приращений**. Если положить $a = x$, $b = x + \Delta x$, то формула конечных приращений примет вид

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x + \theta \Delta x) \Delta x, \quad 0 < \theta < 1.$$

Следствие 1. Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) и во всех точках этого интервала $f'(x) = 0$, то $f(x) = \text{const}$, $x \in (a, b)$.

► Возьмем точки $x_0, x \in (a, b)$ и положим $\Delta x = x - x_0$, т.е. $x = x_0 + \Delta x$. Тогда по формуле конечных приращений получим $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta \Delta x) \Delta x$, $0 < \theta < 1$, откуда $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 0$. Это означает, что для любого $x \in (a, b)$ справедливо равенство $f(x) = f(x_0) = \text{const}$. ◀



Следствие 2. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы на интервале (a,b) и во всех точках этого интервала $f'(x) = g'(x)$, то $f(x) = g(x) + C$.

► Доказательство следует из первого следствия, если его применить к функции $f(x) - g(x)$. ◀

Следствие 3. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, дифференцируема на интервале (a,b) и во всех точках этого интервала $f'(x) = k$, где k - константа, то $f(x) = kx + d$, $x \in [a,b]$.

► Пусть $x \in (a,b)$. Тогда по формуле конечных приращений получим $f(x) - f(a) = k(x - a)$. Отсюда $f(x) = kx + d$, где $d = f(a) - ka$. ◀

Отсюда следует, что, если $f''(x) = 0$, $x \in (a,b)$, то функция линейная: $f(x) = kx + d$.

Следствие 4. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на интервале (a,b) и дифференцируема в каждой точке этого интервала за исключением, быть может, точки $x_0 \in (a,b)$. Тогда, если существует конечный или бесконечный $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f'(x) = A$, то в точке x_0 существует левосторонняя производная $f'_-(x_0) = A$. Аналогично, если существует $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f'(x) = B$, то существует правосторонняя производная $f'_+(x_0) = B$.

► Возьмем $a < x < x_0$ и применим теорему Лагранжа к данной функции на промежутке $[x, x_0]$: $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0 + \theta(x - x_0))$. Если $x \rightarrow x_0$, то суще-

ствует $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f'(x_0 + \theta(x - x_0)) = A$. Следовательно, существует и

$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, который с одной стороны равен левосторонней производной функции в точке x_0 , с другой стороны равен числу A . Таким образом, $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f'(x) = f'_-(x_0)$.

Вторая часть следствия доказывается аналогично. ◀

Отсюда следует, что, если функция в точке x_0 имеет конечную производную $f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$ и существуют пределы $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f'(x)$ и $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f'(x)$, то выполняется равенство $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f'(x) = f'(x_0)$, которое означает, что $f'(x)$ непрерывна в точке x_0 . Следовательно, если функция, дифференцируема на интервале, то ее производная не может иметь на этом интервале точек разрыва первого рода.

Упражнение. Докажите, что функция $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ дифференцируема в произвольной окрестности нуля, но ее производная имеет в нуле разрыв второго рода.

Следствие 5. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы при $x \geq x_0$ и выполняются условия $f(x_0) = g(x_0)$, $f'(x) > g'(x)$ при $x > x_0$, то $f(x) > g(x)$ при $x > x_0$.

► Рассмотрим функцию $\varphi(x) = f(x) - g(x)$. По условию $\varphi(x_0) = 0$ и $\varphi'(x) > 0$ при $x > x_0$. Тогда $\varphi(x) = \varphi(x) - \varphi(x_0) = \varphi'(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0) > 0$ при $x > x_0$. ◀

Пример 1. Доказать, что $\ln(1+x) < x$, $x > 0$.

☺ Положим $x_0 = 0$. Тогда $f(x) = x|_{x=0} = 0$ и $g(x) = \ln(1+x)|_{x=0} = 0$. Кроме того, $f'(x) = 1 > \frac{1}{1+x} = g'(x)$ при $x > 0$, откуда следует требуемое неравенство.

☺

4.5. Теорема Коши

Теорема 4.4 (Коши). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ и дифференцируемы на интервале (a, b) , причем $g'(x) \neq 0$ во всех точках этого интервала. Тогда на интервале (a, b) найдется хотя бы одна точка c , в

которой
$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

► Рассмотрим функцию $\varphi(x) = f(x) - \lambda \cdot g(x)$, где множитель λ выберем так, чтобы $\varphi(a) = \varphi(b)$, т.е. $f(a) - \lambda \cdot g(a) = f(b) - \lambda \cdot g(b)$. Отсюда получим $f(b) - f(a) = \lambda(g(b) - g(a))$. Если бы $g(b) = g(a)$, то по теореме 4.2 (Ролля) на интервале (a, b) существовала бы точка ξ , в которой $g'(\xi) = 0$, что противоречит условию теоремы. Тогда $g(b) - g(a) \neq 0$ и $\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$.

Таким образом, функция $\varphi(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля и существует точка $c \in (a, b)$, в которой $\varphi'(c) = 0$. Так как

$\varphi'(x) = f'(x) - \lambda g'(x)$, то $f'(c) = \lambda g'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(c)$. Деля обе части

последнего равенства на $g'(c)$, получим $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$. ◀

Замечания

1. В теоремах Ролля, Лагранжа и Коши речь идет о значениях производной функции в некоторой точке, которая лежит внутри промежутка. Поэтому эти теоремы часто называют **теоремами о среднем**.
2. Теорема Ролля является частным случаем теоремы Лагранжа, а теорема Лагранжа частным случаем теоремы Коши.
3. Эти три теоремы часто называют **французскими**.

§5 Формула Тейлора

5.1. Многочлен Тейлора

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и в этой точке имеет производную n -го порядка. Составим многочлен

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Этот многочлен будем называть **многочленом Тейлора** n -го порядка для функции $f(x)$ в точке x_0 .

Очевидно, многочлен Тейлора удовлетворяет условиям:

$$P_n(x_0) = f(x_0), \quad P'_n(x_0) = f'(x_0), \quad \dots, \quad P_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0),$$

поэтому его часто называют **многочленом наилучшего приближения функции** в точке x_0 .

Теорема 5.1. Если многочлен вида

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n$$

удовлетворяет условиям

$$P_n(x_0) = f(x_0), \quad P'_n(x_0) = f'(x_0), \quad \dots, \quad P_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0),$$

то его коэффициенты вычисляются по формулам

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

► Найдем производные от данного многочлена:

$$P'_n(x) = a_1 + 2a_2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^2 + \dots + na_n(x-x_0)^{n-1},$$

$$P''_n(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3(x-x_0) + \dots + n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2},$$

$$P_n^{(k)}(x) = k!a_k + (k+1)k \cdot \dots \cdot 2a_{k+1}(x-x_0) + \dots + n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)a_n(x-x_0)^{n-k},$$

$$P_n^{(n)}(x) = n!a_n.$$

Отсюда получим $P_n(x_0) = f(x_0) = a_0, \quad P'_n(x_0) = f'(x_0) = a_1,$

$P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) = k!a_k, \quad P_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) = n!a_n,$ откуда получим требуемое. ◀

5.2. Формула Тейлора

Пусть $P_n(x)$ - многочлен Тейлора n -го порядка для функции $f(x)$ в точке x_0 . Обозначим $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$. Тогда формулу

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

будем называть **формулой Тейлора**, а величину $R_n(x)$ - **остаточным членом** этой формулы.

Получим два представления остаточного члена.

Теорема 5.2. Пусть в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 функция $f(x)$ имеет все производные до $(n+1)$ -го порядка включительно. Тогда для всякого значения $x \in U(x_0)$ найдется точка ξ , лежащая между точками x и

$$x_0 \text{ такая, что } f(x) = P_n(x) + R_n(x), \text{ где } R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

► В силу условий, связывающих функцию с ее многочленом Тейлора, имеем $R_n(x_0) = R'_n(x_0) = \dots = R_n^{(n)}(x_0) = 0$.

Введем функцию $g(x) = (x - x_0)^{n+1}$, которая удовлетворяет условиям $g(x_0) = g'(x_0) = \dots = g^{(n)}(x_0) = 0$.

Рассмотрим теперь отношение $\frac{R_n(x)}{g(x)}$ на промежутке $[x_0, x_0 + \delta]$, где

$x_0 + \delta \in U(x_0)$. Применяя теорему 4.4.4(Коши), получим

$$\frac{R_n(x)}{g(x)} = \frac{R_n(x) - R_n(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{R'_n(\xi_1)}{g'(\xi_1)}, \text{ где } x_0 < \xi_1 < x. \text{ Производя аналогичные вы-}$$

$$\text{кладки с частным } \frac{R'_n(\xi_1)}{g'(\xi_1)}, \text{ получим } \frac{R'_n(\xi_1)}{g'(\xi_1)} = \frac{R'_n(\xi_1) - R'_n(x_0)}{g'(\xi_1) - g'(x_0)} = \frac{R''_n(\xi_2)}{g''(\xi_2)}, \text{ где}$$

$x_0 < \xi_2 < \xi_1$. Таким же образом, применяя далее теорему Коши, получим

$$\frac{R_n(x)}{g(x)} = \frac{R'_n(\xi_1)}{g'(\xi_1)} = \frac{R''_n(\xi_2)}{g''(\xi_2)} = \dots = \frac{R_n^{(n)}(\xi_n)}{g^{(n)}(\xi_n)} = \frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{g^{(n+1)}(\xi)},$$

где $x_0 < \xi < \xi_n < \dots < \xi_2 < \xi_1 < x$.

Но $R_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$ и $g^{(n+1)}(x) = (n+1)!$, поэтому

$$R_n(x) = \frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{g^{(n+1)}(\xi)} g(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

Аналогично рассматривается случай, когда $x \in [x_0 - \delta, x_0]$. ◀

Замечание. Остаточный член вида $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ называют **остаточным членом в форме Лагранжа**.

Теорема 5.3. Пусть существует $f^{(n)}(x_0)$. Тогда формула Тейлора будет иметь вид $f(x) = P_n(x) + o((x-x_0)^n)$ при $x \rightarrow x_0$.

► Применяя теорему 4.4.4 (Коши) к функциям $R_n(x)$ и $g(x) = (x-x_0)^n$ на промежутке $[x_0, x_0 + \delta]$, аналогично тому, как это было сделано в теореме 4.5.2, получим $\frac{R_n(x)}{g(x)} = \frac{R_n^{(n-1)}(\xi_{n-1}) - R_n^{(n-1)}(x_0)}{n!(\xi_{n-1} - x_0)}$, где $x_0 < \xi_{n-1} < \dots < \xi_1 < x$. Отсю-

да $\lim_{x \rightarrow x_0+0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x \rightarrow x_0+0} \frac{R_n^{(n-1)}(\xi_{n-1}) - R_n^{(n-1)}(x_0)}{n!(\xi_{n-1} - x_0)} = \frac{1}{n!} R_n^{(n)}(x_0) = 0$, так как

$\xi_{n-1} \rightarrow x_0$ при $x \rightarrow x_0$. Следовательно, $R_n(x) = o((x-x_0)^n)$. ◀

Замечание. Такой вид остаточного члена называется **остаточным членом в форме Пеано**.

Теорема 5.4. Пусть существует $f^{(n)}(x_0)$ и при $x \rightarrow x_0$ справедливо равенство $f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$. Тогда

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

► Так как существует $f^{(n)}(x_0)$, то справедлива формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. Таким образом,

$$\begin{aligned} & a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n) = \\ & = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n). \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $x \rightarrow x_0$ в последнем равенстве, получим $a_0 = f(x_0)$. Отбрасывая равные члены и сокращая это равенство на $x-x_0$, при-

$$\begin{aligned} & \text{дем к равенству} \quad a_1 + a_2(x-x_0) + \dots + a_n(x-x_0)^{n-1} + o((x-x_0)^{n-1}) = \\ & = \frac{f'(x_0)}{1!} + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^{n-1} + o((x-x_0)^{n-1}). \end{aligned}$$

Опять устремляя $x \rightarrow x_0$, получим $a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!}$ и, продолжая таким обра-

зом, получим $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$. ◀

Замечание. Из этой теоремы следует, что представление функции в виде $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$ единственно.

Упражнение. Докажите, что если функция $f(x)$ четная, то ее многочлен Тейлора в точке $x_0 = 0$ содержит только четные степени, а если $f(x)$ - нечетная, то этот же многочлен содержит только нечетные степени.

3. Разложение основных элементарных функций по формуле Тейлора - Маклорена

Если $x_0 = 0$, то формула Тейлора называется **формулой Маклорена**. Если функция имеет $f^{(n)}(0)$, то формула Маклорена имеет вид

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n), \quad x \rightarrow 0.$$

Получим формулы Маклорена для основных элементарных функций.

1) $f(x) = e^x$.

Функция дифференцируема бесконечное число раз, причем производная n -го порядка равна $(e^x)^{(n)} = e^x$. Поэтому $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n)}(0) = 1$ и формула Маклорена имеет вид

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x),$$

где $R_n(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}$, $0 < \theta < 1$.

2) $f(x) = \operatorname{sh} x$.

Эта функция также дифференцируема бесконечное число раз и

$$(\operatorname{sh} x)^{(n)} = \begin{cases} \operatorname{ch} x, & n - \text{нечетное}, \\ \operatorname{sh} x, & n - \text{четное}. \end{cases}$$

Поэтому $f(0) = f^{(2k)}(0) = 0$ и $f^{(2k-1)}(0) = 1$, $k \in \mathbb{N}$, и

$$\operatorname{sh} x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + R_{2m-1}(x),$$

где $R_{2m-1}(x) = \frac{e^{\theta x} - e^{-\theta x}}{2(2m)!} x^{2m} = \frac{\text{sh}(\theta x)}{(2m)!} x^{2m}$.

3) $f(x) = \text{ch } x$.

Формула Маклорена для этой функции выводится аналогично предыдущей и имеет вид

$$\text{ch } x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{2m}}{(2m)!} + \frac{\text{ch}(\theta x)}{(2m+1)!} x^{2m+1}.$$

4) $f(x) = \sin x$.

Как было сказано в пункте 3.1, $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)$, поэтому

$f(0) = f^{(2k)}(0) = 0$ и $f^{(2k-1)}(0) = (-1)^{k-1}$, $k \in \mathbb{N}$. Отсюда

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + \frac{\sin(\theta x + \pi m)}{(2m)!} x^{2m}.$$

5) $f(x) = \cos x$.

Эта формула получается аналогично предыдущей и имеет вид

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + \frac{\cos\left(\theta x + \frac{(2m+1)\pi}{2}\right)}{(2m+1)!} x^{2m+1}.$$

6) $f(x) = \ln(1+x)$.

$(\ln(1+x))^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{(1+x)^n}$, поэтому $f(0) = 0$, $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} (n-1)!$ и

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}.$$

7) $f(x) = (1+x)^\alpha$.

$\left((1+x)^\alpha\right)^{(n)} = \alpha \cdot (\alpha-1) \dots (\alpha-n+1) (1+x)^{\alpha-n}$. Отсюда $f(0) = 1$, $f'(0) = \alpha$,

$f^{(k)}(0) = \alpha \cdot (\alpha-1) \dots (\alpha-k+1)$ и

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)}{n!} x^n + \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n-1}}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Функцию $(1+x)^\alpha$ будем называть **биномом** или **биномиальной функцией**. Ясно, что формула бинома Ньютона получается из формулы Маклорена для биномиальной функции при $\alpha \in \mathbb{N}$.

Отметим частные случаи формулы Маклорена для биномиальной функции:

а) Если $\alpha = -1$, то формула примет вид

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + R_n(x).$$

б) Если в последней формуле заменить x на $-x$, то получим

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + R_n(x).$$

Замечания

1. Во всех формулах остаточный член написан в форме Лагранжа, но его можно было бы написать в форме Пеано, например,

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + o(x^n), \quad x \rightarrow 0.$$

2. В формулах для четных или нечетных функций степень x у остаточного члена можно увеличить на 1. Например,

$$\operatorname{sh} x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + \frac{e^{\theta x} + e^{-\theta x}}{2(2m+1)!} x^{2m+1}.$$

Это возможно, так как многочлен Маклорена для нечетной функции должен иметь только нечетные степени, следовательно, слагаемое со степенью x^{2m} будет равно нулю.

§6 Правило Лопиталья

Докажем несколько теорем, которые объединяются под общим названием «*правило Лопиталья*» и которые позволяют находить пределы частного.

6.1. Неопределенность вида $\frac{0}{0}$

Теорема 6.1. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$

- 1) определены на промежутке $[a, b]$;
- 2) $f(a) = g(a) = 0$;
- 3) существуют правосторонние производные $f'(a)$ и $g'(a)$, причем $g'(a) \neq 0$.

Тогда существует $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$.

► Так как существуют правосторонние производные функций $f(x)$ и $g(x)$ в точке $x = a$, то для $x > a$ справедлива формула Тейлора при $n = 1$, которая будет иметь вид:

$$f(x) = f'(a)(x - a) + o(x - a), \quad g(x) = g'(a)(x - a) + o(x - a).$$

$$\text{Тогда } \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(a)(x - a) + o(x - a)}{g'(a)(x - a) + o(x - a)} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(a) + \frac{o(x - a)}{x - a}}{g'(a) + \frac{o(x - a)}{x - a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$



Замечание. Аналогично можно доказать, что, если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют n производных в точке $x = a$, $f(a) = f'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0$, $g(a) = g'(a) = \dots = g^{(n-1)}(a) = 0$ и $g^{(n)}(a) \neq 0$, то $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}$.

Теорема 6.2. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$

- 1) определены на промежутке (a, b) ;
- 2) $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} g(x) = 0$;
- 3) на промежутке (a, b) существуют производные $f'(x)$ и $g'(x)$, причем $g'(x) \neq 0$;

4) существует $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ (конечный или бесконечный).

Тогда существует $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

► Доопределим функции $f(x)$ и $g(x)$, полагая $f(a) = g(a) = 0$, и возьмем некоторое значение $x \in (a, b)$. Тогда на промежутке $[a, x]$ для данных функций выполнены все условия теоремы 4.4.4 (Коши) и $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$, где $a < c < x$.

Если $x \rightarrow a + 0$, то и $c \rightarrow a + 0$, поэтому $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \rightarrow a+0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = A$. ◀

Замечания

1. Аналогично можно доказать, что при очевидных изменениях в условиях теоремы 6.1 будет выполнено $\lim_{x \rightarrow a-0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$ или $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$, а в теореме

6.2 $\lim_{x \rightarrow a-0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$ или $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

2. Теорема 4.6.2 будет верна и в случае, если $a = +\infty$ или $a = -\infty$. Для доказательства нужно сделать замену переменной по формуле $x = \frac{1}{t}$.

6.2. Неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$

Теорема 6.3. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы на промежутке $(a, +\infty)$, причем $g'(x) \neq 0$ на этом промежутке. Допустим также, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \infty$ и существует конечный $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$.

Тогда существует $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

► Найдем $\sigma_1 > a$ такое, чтобы $\forall x > \sigma_1$ выполнялись неравенства $|f(x)| > 1$ и $|g(x)| > 1$. Тогда $\forall x > \sigma_1$ будет $f'(x) \neq 0$ и $g'(x) \neq 0$.

Затем возьмем некоторое число $\varepsilon > 0$ и найдем $\sigma_2 > a$ такое, чтобы $\forall x > \sigma_2$ было выполнено $A - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{f'(x)}{g'(x)} < A + \frac{\varepsilon}{2}$.

Тогда для всех $x > \sigma = \max(\sigma_1, \sigma_2)$ будут выполнены все вышеперечисленные условия.

Фиксируем некоторое число $x_0 > \sigma$ и возьмем $x > x_0$. Тогда на промежутке $[x_0, x]$ для данных функций выполнены условия теоремы 4.4.4 (Коши). Следовательно, существует число $c \in (x_0, x)$ такое, что $\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

Преобразуем левую часть этого равенства следующим образом:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}}{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}}. \text{ Так как точка } x_0 \text{ фиксирована, то будет вы-}$$

$$\text{полнено } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x_0)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x_0)}{g(x)} = 0 \text{ и, следовательно, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}}{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}} = 1, \text{ и то-}$$

$$\text{гда } \frac{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}} = 1 + \alpha(x), \text{ где } \alpha(x) \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow +\infty. \text{ Тогда можно найти чис-}$$

ло $\sigma_0 > x_0$ такое, что если $x > \sigma_0$, то $|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon/2}{|A| + \varepsilon/2}$. Теперь можно оценить ча-

стное $\frac{f(x)}{g(x)}$. Сначала преобразуем его следующим образом:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} \cdot (1 + \alpha(x)) = \frac{f'(c)(1 + \alpha(x))}{g'(c)}. \text{ Оценим полученную дробь}$$

при $x > \sigma_0$ сверху:

$$\frac{f'(c)(1 + \alpha(x))}{g'(c)} < \left(A + \frac{\varepsilon}{2}\right)(1 + \alpha(x)) \leq A + \frac{\varepsilon}{2} + \left(|A| + \frac{\varepsilon}{2}\right)|\alpha(x)| < A + \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = A + \varepsilon$$

и снизу:

$$\frac{f'(c)(1 + \alpha(x))}{g'(c)} > \left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right)(1 + \alpha(x)) > A - \frac{\varepsilon}{2} - \left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right)\alpha(x) \geq$$

$$\geq A - \frac{\varepsilon}{2} - \left(|A| + \frac{\varepsilon}{2}\right)|\alpha(x)| > A - \varepsilon.$$

Таким образом, по $\varepsilon > 0$ мы нашли σ_0 такое, что если $x > \sigma_0$, то выполняется неравенство $A - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < A + \varepsilon$, что означает, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A$. ◀

Замечания

1. Теорема 6.3 верна и тогда, когда $x \rightarrow -\infty$.
2. Теорема 6.3 верна и тогда, когда $x \rightarrow a$, где a - конечная точка и когда $A = +\infty$ или $A = -\infty$.
3. В теореме 6.3 можно потребовать только чтобы $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \infty$, не налагая такого же условия на функцию $f(x)$. Тогда, если существует конечный или определенного знака бесконечный $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$, то существует

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

4. В теоремах §6 нельзя опустить условие существования $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Напри-

мер, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$ нельзя вычислить с помощью правила Лопиталя, так как не

существует $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x - \sin x)'}{(x + \sin x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$. Такой предел легко вычислить с по-

мощью теории бесконечно малых функций: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{\sin x}{x}}{1 + \frac{\sin x}{x}} = 1$.

§7 Исследование функций с помощью пределов и производных

7.1. Исследование функции на монотонность

Теорема 7.1. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на промежутке (a, b) . Тогда для того, чтобы $f(x)$ возрастала на всем промежутке, необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) \geq 0$, $x \in (a, b)$, и для того, чтобы функция убывала на (a, b) , необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) \leq 0$, $x \in (a, b)$.

► Необходимость. Пусть функция возрастает на (a, b) . Возьмем точку $x_0 \in (a, b)$ и приращение Δx такое, чтобы $x_0 + \Delta x \in (a, b)$. Тогда, если $\Delta x > 0$, то $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0$, так как числитель и знаменатель этой дроби неотрица-

тельны, и, если $\Delta x < 0$, то $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0$, так как числитель и знаменатель неположительны. Следовательно,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0.$$

Достаточность. Пусть $f'(x) \geq 0$ на (a, b) . Возьмем два значения аргумента $x_1, x_2 \in (a, b)$, причем $x_1 < x_2$. Тогда на промежутке $[x_1, x_2]$ выполнены все условия теоремы 4.4.3 (Лагранжа) и $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$, где $x_1 < c < x_2$. Так как $f'(c) \geq 0$ то $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$, следовательно, на промежутке (a, b) функция $f(x)$ возрастает.

Аналогично рассматривается убывание функции. ◀

Замечания

1. Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a, b]$, дифференцируема на (a, b) и для всех $x \in (a, b)$ справедливо неравенство $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$), то функция возрастает (убывает) на $[a, b]$.

2. Если в каждой точке (a, b) выполняется неравенство $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$), то функция строго возрастает (убывает) на (a, b) .

Это условие является только необходимым условием строгой монотонности, например, функция $f(x) = x^3$ строго возрастает на всей вещественной оси, но ее производная в точке $x = 0$ обращается в нуль.

3. Теорема 4.7.1 остается верна, когда функция непрерывна на промежутке (a, b) , но в некоторых точках этого промежутка ее производная бесконечна, оставаясь при этом определенного знака. Например, функция $f(x) = \sqrt[3]{x}$ строго возрастает на всей вещественной оси, но не имеет конечной производной в точке $x = 0$.

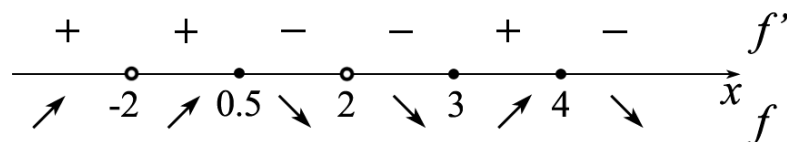
Из вышеизложенного следует, что для того, чтобы исследовать функцию на монотонность, нужно разделить область определения функции на части точками, где производная обращается в нуль или где она не существует (конечная). Такие точки называют **критическими точками**. Точки, где производная равна нулю, называются **стационарными точками**. Обращаем внимание читателя на то, что эти точки должны принадлежать области определения функции.

Пример 1. Исследовать на монотонность функцию $f(x) = \frac{\sqrt[3]{(x-3)^2}}{x^2-4}$.

☉ Область определения этой функции $D(f) = \{x \mid x \neq \pm 2\}$. Найдем производную этой функции $f'(x) = \frac{-4x^2 + 18x - 8}{3\sqrt[3]{x-3}(x^2-4)^2} = \frac{-4(x-4)(x-\frac{1}{2})}{3\sqrt[3]{x-3}(x^2-4)^2}$.

Критическими точками этой функции будут $x=4$, $x=\frac{1}{2}$ - стационарные точки, т.е. точки, где производная равна нулю, и $x=3$ - критическая точка, в которой не существует конечной производной. Точки $x=\pm 2$ не являются критическими, так как не входят в область определения функции.

Изобразим на числовой оси область определения функции и все критические точки. Получим ряд промежутков, на каждом из которых исследуем производную на знак. По этому знаку определим направление монотонности функции.



Ответ: функция возрастает на каждом из промежутков $(-\infty, -2)$, $(-2, \frac{1}{2}]$, $[3, 4]$ и убывает на каждом из промежутков $[\frac{1}{2}, 2)$, $(2, 3]$, $[4, +\infty)$.

7.2. Экстремумы функции

Понятие экстремума было введено в §4. Там же была доказана теорема 4.1 (Ферма), которая дает необходимое условие экстремума дифференцируемой функции: *если функция дифференцируема в точке и имеет экстремум в этой точке, то ее производная в этой точке равна нулю*. Это условие является только необходимым, но не достаточным. Примером тому служит функция $f(x) = x^3$, производная которой равна нулю в точке $x=0$, но которая не имеет экстремума в этой точке.

Теорема 7.2 (первое достаточное условие экстремума)

Пусть функция определена в точке $x = x_0$ и в некоторой ее окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ и возрастает на промежутке $(x_0 - \delta, x_0]$ и убывает на промежутке $[x_0, x_0 + \delta)$, то в точке $x = x_0$ функция имеет максимум.

Аналогично, *если функция убывает на промежутке $(x_0 - \delta, x_0]$ и возрастает на промежутке $[x_0, x_0 + \delta)$, то в точке $x = x_0$ функция имеет минимум.*

► Допустим, что функция возрастает на промежутке $(x_0 - \delta, x_0]$ и убывает на промежутке $[x_0, x_0 + \delta)$.

Тогда, если $x \in (x_0 - \delta, x_0]$, то $f(x_0) \geq f(x)$, и, если $x \in [x_0, x_0 + \delta)$, то $f(x_0) \geq f(x)$, т.е. для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ выполняется неравенство $f(x_0) \geq f(x)$. Это означает, что точка $x = x_0$ является точкой максимума.

Вторая часть теоремы доказывается аналогично. ◀

Следствие. Если функция непрерывна в точке x_0 и дифференцируема в $\overset{o}{U}_\delta(x_0)$ - проколотой окрестности точки x_0 , причем $f'(x) \geq 0$ на промежутке $(x_0 - \delta, x_0)$ и $f'(x) \leq 0$ на промежутке $(x_0, x_0 + \delta)$, то в точке x_0 функция имеет максимум.

Аналогично, функция непрерывная в точке x_0 и дифференцируемая в $\overset{o}{U}_\delta(x_0)$, имеет минимум в точке x_0 , если $f'(x) \leq 0$ на промежутке $(x_0 - \delta, x_0)$ и $f'(x) \geq 0$ на промежутке $(x_0, x_0 + \delta)$.

Доказательство очевидно следует из теоремы 4.7.2 и критерия монотонности функции.

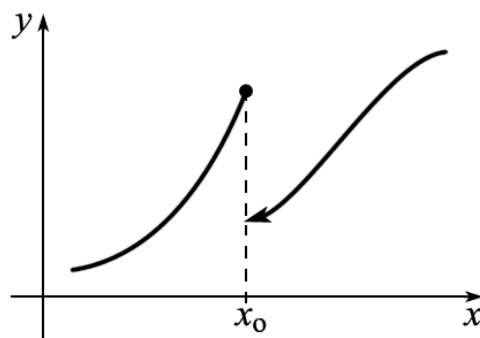
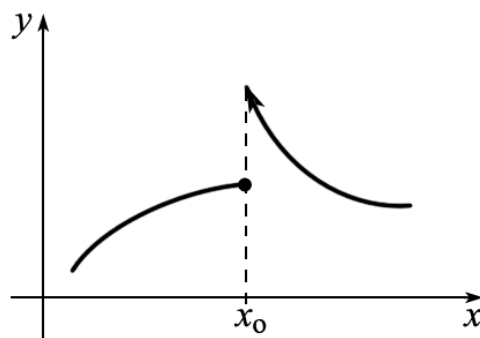
Замечания

1. Если в теореме 4.7.2 или следствии предположить строгую монотонность функции, то получим строгий экстремум.

2. Если отказаться от условия непрерывности функции в точке x_0 , то теорема перестает быть верной. Пример такой функции изображен на рисунке.

3. Условия, сформулированные в теореме (следствии), являются только достаточными, но не являются необходимыми.

Пример 2. На рисунке изображен график функции, которая в точке x_0 имеет экстремум (максимум), но характер монотонности при переходе через эту точку не меняется.



Пример 3. Функция $f(x) = \begin{cases} x^2 \left(2 + \cos \frac{1}{x} \right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ будет иметь минимум в точке $x = 0$, так как $f(x) \geq 0$, но знак ее производной, равной

$2x\left(2 + \cos\frac{1}{x}\right) + \sin\frac{1}{x}$, в достаточно малой окрестности нуля будет определяться слагаемым $\sin\frac{1}{x}$ и, следовательно, будет меняться бесконечное число раз.

4. Если $f'(x) \geq 0$ на промежутке $(x_0 - \delta, x_0)$ и $f'(x) \leq 0$ на промежутке $(x_0, x_0 + \delta)$, то будем говорить, что в точке x_0 производная $f'(x)$ меняет знак с «+» на «-» и наоборот, если $f'(x) \leq 0$ на промежутке $(x_0 - \delta, x_0)$ и $f'(x) \geq 0$ на промежутке $(x_0, x_0 + \delta)$, то будем говорить, что в точке x_0 производная меняет знак с «-» на «+».

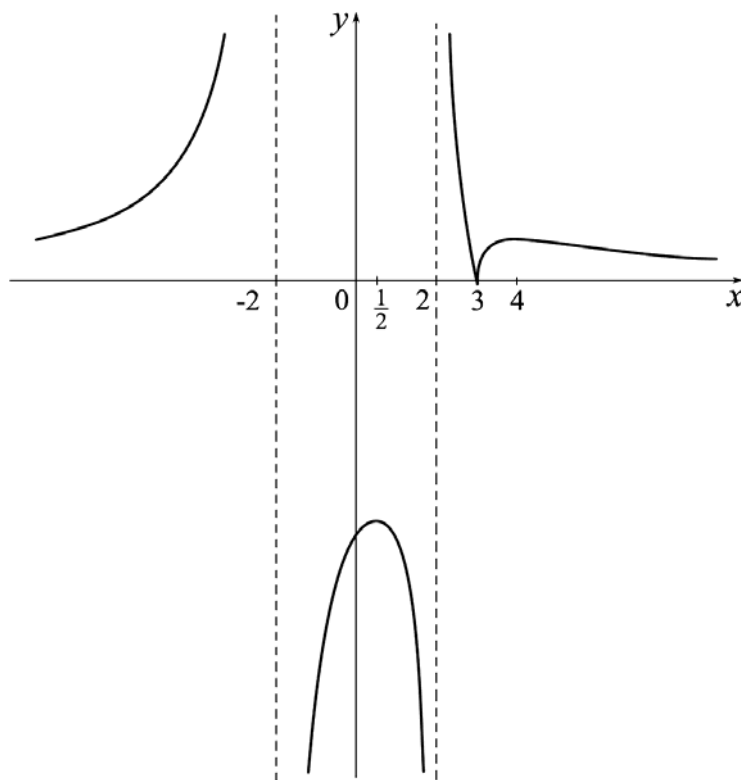
Очевидно, что точки, в которых производная может менять знак, — это критические точки функции, поэтому для исследования функции на экстремум находят критические точки и смотрят, как меняется знак производной.

Вернемся к примеру 1. В

точке $x = \frac{1}{2}$ производная меняет

знак с «+» на «-», следовательно, в этой точке функция имеет максимум. Отметим, что эта точка является стационарной, т.е. производная в ней равна нулю, поэтому касательная к графику функции параллельна оси абсцисс. Такой экстремум будем называть **гладким**.

В точке $x = 3$ производная меняет знак с «-» на «+», поэтому в этой точке функция имеет минимум, но производная в этой точке бесконечна, т.е. касательная к графику параллельна оси ординат. График функции приведен справа.



Экстремумы подобного рода (т.е. в точках, где не существует конечной производной) будем называть **острыми**.

Теорема 7.3 (Второе достаточное условие экстремума)

Пусть x_0 - стационарная точка функции $f(x)$ и пусть существует $f''(x_0)$. Тогда

- а) если $f''(x_0) > 0$, то x_0 - точка строгого минимума функции, и,
- б) если $f''(x_0) < 0$, то x_0 - точка строгого максимума функции.

► Если в точке x_0 существует $f''(x_0)$, то можно написать формулу Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + o((x-x_0)^2), \quad x \rightarrow x_0.$$

Так как $f'(x_0) = 0$, а $f''(x_0) \neq 0$, то последнее равенство можно переписать в виде $f(x) = f(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2(1+\alpha(x))$, где $\alpha(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow x_0$. Найдем $\delta > 0$ такое, чтобы для всех $x \in U_\delta(x_0)$ выполнялось неравенство $|\alpha(x)| < \frac{1}{2}$, тогда для этих значений x будет верно $1+\alpha(x) > 0$ и, таким образом, знак разности $f(x) - f(x_0)$ будет совпадать со знаком $f''(x_0)$. Следовательно, если $f''(x_0) > 0$, то $f(x) > f(x_0)$, и x_0 - точка минимума, и, если $f''(x_0) < 0$, то $f(x) < f(x_0)$, и x_0 - точка максимума. ◀

Замечание. Аналогично можно доказать, что, если существует $f^{(n)}(x_0)$ и $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, но $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, то,

а) если n - нечетное, то точка x_0 не является экстремумом, и,

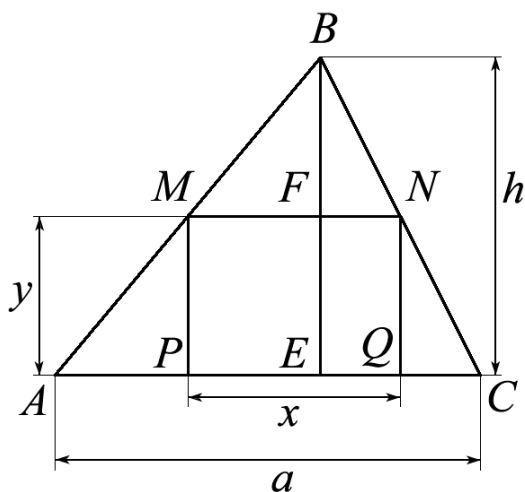
б) если n - четное, то в точке x_0 функция имеет экстремум, причем, если $f^{(n)}(x_0) > 0$, то минимум, и, если $f^{(n)}(x_0) < 0$, то максимум.

7.3. Наибольшее и наименьшее значения функции

Пусть функция задана на промежутке $[a, b]$ и непрерывна на нем. Тогда, согласно второй теореме Вейерштрасса (теорема 4.4.5), она достигает там своего наибольшего и наименьшего значений. Очевидно, что эти значения могут не совпадать с экстремальными значениями. Поэтому экстремальные значения часто называют **локальными экстремумами** функции, т.е. **локальным максимумом** или **локальным минимумом**.

Часто возникают задачи, в которых нужно найти наибольшее и (или) наименьшее значения функции на некотором промежутке. Если этот промежуток замкнутый, функция на нем непрерывна, имеет конечную или бесконечную производную и промежуток можно разбить на конечное число частей, на каждой из которых производная сохраняет постоянный знак, то пользуются следующим правилом нахождения наибольшего и наименьшего значений функции: Находим критические точки функции на этом промежутке, вычисляем значения функции в критических точках и на концах этого промежутка. Тогда самое большое из вычисленных значений будет наибольшим, а самое маленькое – наименьшим значениями функции на этом промежутке.

Пример 4. В треугольник с основанием a и высотой h вписан прямоугольник так, что основание прямоугольника лежит на основании треугольника, а две его другие вершины лежат на боковых сторонах треугольника. Найти стороны прямоугольника наибольшей площади.



☺ Пусть $PQ = x$, $MP = y$. Тогда площадь прямоугольника $S = xy$. Из подобия треугольников ABC и MBN получим пропорцию $\frac{AC}{MN} = \frac{BE}{BF}$ или $\frac{a}{x} = \frac{h}{h-y}$, откуда можно выразить x : $x = \frac{a(h-y)}{h}$.

Тогда площадь прямоугольника будет задана, как функция аргумента y :

$$S(y) = \frac{a}{h}(h-y)y, \text{ заданная на отрезке}$$

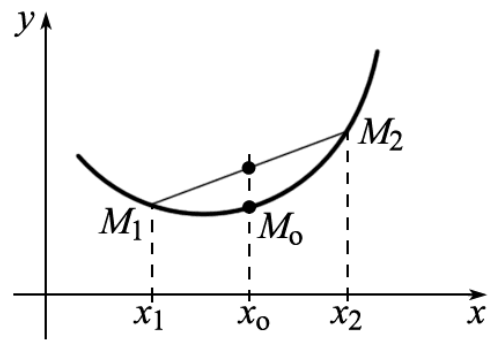
$y \in [0, h]$. Найдем производную этой функции $S'(y) = \frac{a}{h}(h-2y)$.

На промежутке $[0, h]$ существует одна стационарная точка функции $y = \frac{h}{2}$, в которой значение функции равно $\frac{ah}{4}$. Значения функции на концах промежутка $S(0) = S(h) = 0$. Следовательно, наибольшее значение функции равно $\frac{ah}{4}$, когда высота прямоугольника $y = \frac{h}{2}$, а длина его основания равна $x = \frac{a}{2}$. ☺

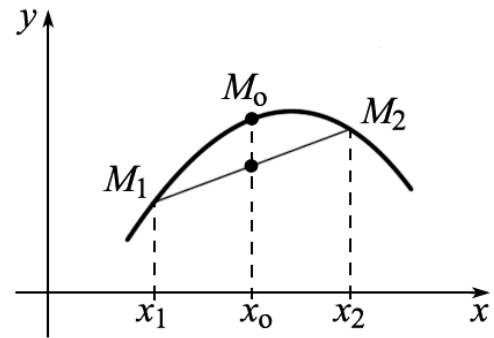
7.4. Выпуклость и вогнутость. Точки перегиба

Определение 7.1. Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке (a, b) . Будем говорить, что она **выпукла вниз (выпукла)** на этом промежутке, если для любых $x_1, x_2 \in (a, b)$ выполнено неравенство $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(f(x_1) + f(x_2))$ и **выпукла вверх (вогнута)**, если для любых $x_1, x_2 \in (a, b)$ выполнено неравенство $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{1}{2}(f(x_1) + f(x_2))$.

Рассмотрим график функции $f(x)$ на промежутке (a, b) . Возьмем две точки на этом графике с абсциссами x_1 и x_2 . Тогда $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$ - значение функции в точке $x = \frac{x_1+x_2}{2}$, которая является серединой от-



резка $[x_1, x_2]$, а $\frac{1}{2}(f(x_1) + f(x_2))$ - ордината середины хорды, соединяющей точки графика $M_1(x_1, f(x_1))$ и $M_2(x_2, f(x_2))$. Таким образом, выпуклость функции вниз означает, что для любых точек M_1 и M_2 , лежащих на графике функции, середина хорды M_1M_2 будет лежать не ниже точки графика



$M_0\left(\frac{x_1+x_2}{2}, f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right)$, а выпуклость вверх означает, что середина этой хорды лежит не выше точки M_0 .

Если в определении выпуклости поставить строгие неравенства, то говорят о **строгой выпуклости**.

Теорема 7.4 (Достаточное условие выпуклости)

Пусть на (a, b) существует $f''(x)$. Тогда, если $f''(x) \geq 0$, $x \in (a, b)$, то на этом промежутке функции выпукла вниз, и, если $f''(x) \leq 0$, $x \in (a, b)$, то функция выпукла вверх.

► Пусть $f''(x) \geq 0$, $x \in (a, b)$. Возьмем $x_1, x_2 \in (a, b)$ и предположим, что $x_1 < x_2$. Обозначим $x_0 = \frac{x_1+x_2}{2}$ и $h = x_0 - x_1 = x_2 - x_0$. Тогда по формуле Тейлора

$$f(x_1) = f(x_0) - \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(c_1)}{2!}h^2, \quad c_1 \in (x_1, x_0) \text{ и}$$

$$f(x_2) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(c_2)}{2!}h^2, \quad c_2 \in (x_0, x_2).$$

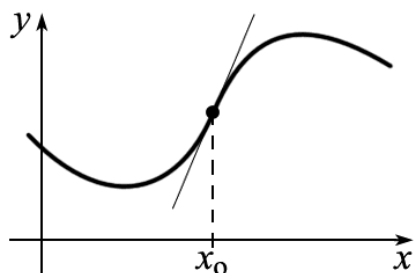
Складывая эти равенства, получим

$$f(x_1) + f(x_2) = 2f(x_0) + \frac{h^2}{2}(f''(c_1) + f''(c_2)).$$

Так как вторая производная функции в любой точке промежутка неотрицательна, то $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \geq f(x_0)$,

а это означает, что функция выпукла вниз. ◀

Замечание. Если $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$) на (a, b) , то функция строго выпукла. Это условие является только достаточным.



Определение 7.2. Пусть в точке x_0 функция имеет первую производную (конечную или бесконечную). Тогда, если при переходе через эту точку функция меняет направление выпуклости, то точка x_0 называется **точкой перегиба**.

Теорема 7.5. Пусть функция в точке x_0 имеет первую производную (конечную или бесконечную), и при переходе через эту точку ее вторая производная меняет знак. Тогда точка x_0 - точка перегиба функции.

Доказательство этой теоремы следует из теоремы 4.7.4.

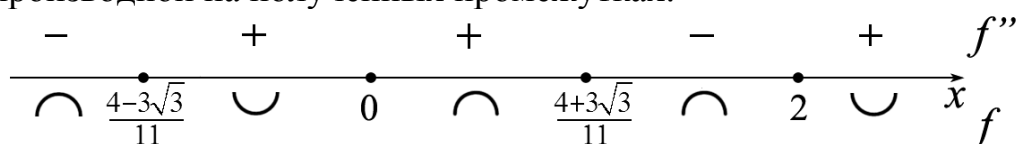
Замечание. Очевидно, точки перегиба нужно искать в тех точках области определения функции, где существует первая производная и где вторая производная обращается в нуль или не существует.

Пример 5. Исследовать функцию $f(x) = (x-2)^3 \sqrt[3]{x^2}$ на выпуклость и точки перегиба.

☉ Первая производная этой функции равна $f'(x) = \frac{(x-2)^2(11x-4)}{3\sqrt[3]{x}}$, а

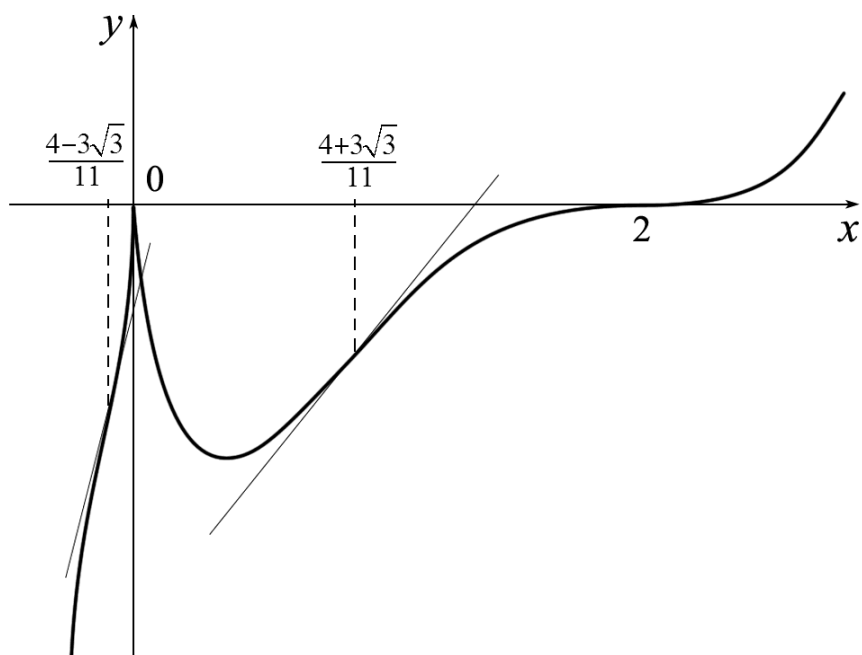
вторая $f''(x) = \frac{(x-2)(88x^2 - 64x - 8)}{9\sqrt[3]{x^4}}$. Отметим на числовой оси точки, в ко-

торых можно ожидать перегиб функции: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_{3,4} = \frac{4 \pm 3\sqrt{3}}{11}$ и знак второй производной на полученных промежутках.



Получим: функция выпукла вверх на каждом из промежутков $\left(-\infty, \frac{4-3\sqrt{3}}{11}\right)$, $\left(\frac{4+3\sqrt{3}}{11}, 2\right)$ и выпукла вниз на каждом из промежутков $\left(\frac{4-3\sqrt{3}}{11}, 0\right)$, $\left(0, \frac{4+3\sqrt{3}}{11}\right)$, $(2, +\infty)$. Точками перегиба будут $x = 2$ и $x = \frac{4 \pm 3\sqrt{3}}{11}$.

Примерный вид графика данной функции представлен на рисунке. ☉



В заключение приведем свойство выпуклой функции, которое для дифференцируемой функции можно положить определением выпуклости.

Теорема 7.6. Пусть функция дважды дифференцируема на промежутке (a, b) и $f''(x) \geq 0$. Тогда на этом промежутке график функции лежит не ниже касательной, проведенной к этому графику в любой точке с абсциссой на данном промежутке.

► Пусть x_0 - абсцисса точки графика, в которой проведена касательная. Тогда уравнение этой касательной будет $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Представим функцию по формуле Тейлора в виде

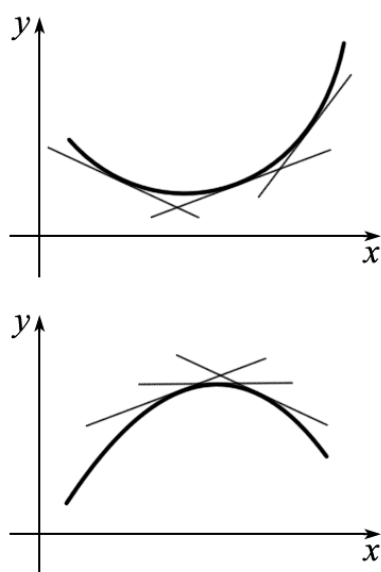
$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(c)}{2}(x - x_0)^2, \quad \text{где } c$$

лежит между x и x_0 . Тогда

$$f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)) = f(x) - y_{\text{кас}} = \frac{f''(c)}{2}(x - x_0)^2 \geq 0.$$

А это означает, что точки графика функции лежат не ниже соответствующих точек касательной. ◀

Аналогично, если $f''(x) \leq 0$, то точки графика будут лежать не выше соответствующих точек касательной.



Замечания

1. Можно доказать, что, если функция имеет на промежутке первую конечную производную, то для ее выпуклости вверх необходимо и достаточно, чтобы ее график лежал над ее касательной, проведенной в любой точке этого

промежутка (или на ней). Аналогично, для выпуклости вниз необходимо и достаточно, чтобы график лежал под такой касательной. (доказательство см. в [1], т.1)

2. Из определения точки перегиба следует, что в точке перегиба существует касательная к графику функции и график лежит по разные стороны от этой касательной.

7.5. Асимптоты графика функции

Определение 7.3. Пусть функция $f(x)$ определена при $|x| > \sigma$. Прямая $y = kx + b$ называется **наклонной асимптотой** графика функции $f(x)$, если $f(x) = kx + b + o(1)$, $x \rightarrow \infty$.

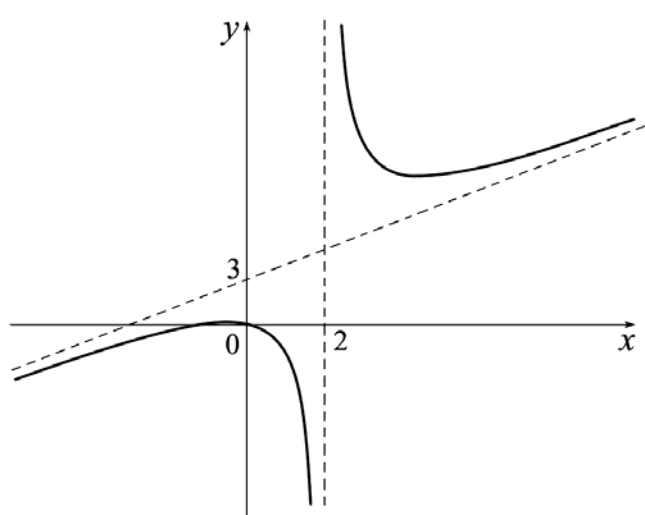
Определение 7.4. Прямая $x = x_0$ называется **вертикальной асимптотой** функции $f(x)$, если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$.

Пример 6. Найдем асимптоты графика функции $f(x) = \frac{x^2 + x}{x - 2}$.

☺ Выделяя из дроби целую часть, получим $f(x) = x + 3 + \frac{6}{x - 2}$. Так

как $\frac{6}{x - 2} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$, то прямая $y = x + 3$ будет наклонной асимптотой графика данной функции.

Далее, $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x}{x - 2} = \infty$, поэтому вертикальная прямая $x = 2$ будет вертикальной асимптотой графика этой функции. ☺



Для нахождения коэффициентов k и b в уравнении асимптоты можно получить формулы. Для этого сначала равенство $f(x) = kx + b + o(1)$ разделим на x и устремим x к бесконечности. Тогда получим

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Теперь перейдем к пределу в разности $f(x) - kx = b + o(1)$. Получим

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx).$$

Очень часто указанные пределы не существуют, но существуют односторонние пределы. Тогда говорят о наклонной асимптоте на $+\infty$ или $-\infty$, или об односторонней вертикальной асимптоте.

Пример 7. Найти асимптоты графика функции $f(x) = xe^{1/x}$.

☺ Сначала найдем ее наклонные асимптоты. Используя формулу Тейлора, представим функцию в виде

$$f(x) = xe^{1/x} = x \left(1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) = x + 1 + o(1).$$

Следовательно, прямая $y = x + 1$ будет наклонной асимптотой нашей функции.

Вертикальные асимптоты следует искать там, где функция имеет разрыв, т.е. в нашем случае в точке $x = 0$. С помощью правила Лопиталя найдем предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(xe^{1/x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{1/x}}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{1/x} \left(-\frac{1}{x^2} \right)}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{1/x} = \begin{cases} +\infty, & x \rightarrow 0+0, \\ 0, & x \rightarrow 0-0. \end{cases}$$

Следовательно, прямая $x = 0$ является правосторонней асимптотой графика нашей функции. ☹

Пример 8. Найти асимптоты графика функции $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 2} + \sqrt{x^2 - x + 2}$.

☺ Функция определена на всей вещественной оси и не имеет точек разрыва. Поэтому вертикальных асимптот нет.

Для нахождения наклонных асимптот используем формулу Тейлора:

$$f(x) = |x| \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} + |x| \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} =$$

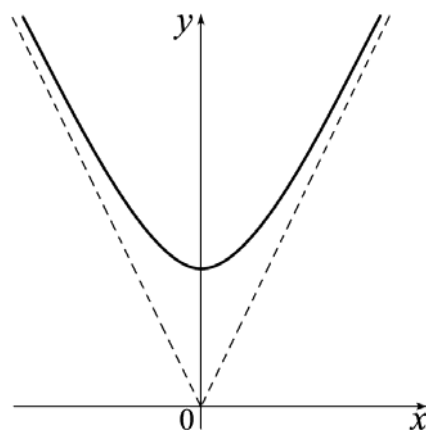
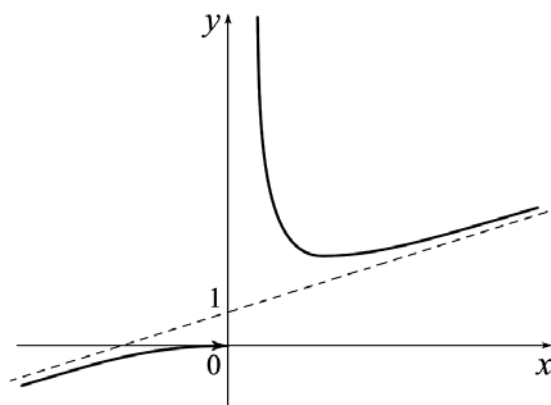
$$= |x| \left(\left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} \right) + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) + \left(1 + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} \right) + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) \right) = |x| \left(2 + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) =$$

$= 2|x| + o(1)$. Это означает, что функция имеет две наклонные асимптоты $y = 2x$, если $x \rightarrow +\infty$ и $y = -2x$, если $x \rightarrow -\infty$. ☹

Если угловой коэффициент наклонной асимптоты равен нулю, то получается **горизонтальная асимптота**, которую мы будем считать частным случаем наклонной. В этой ситуации достаточно сразу искать $b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, если он конечен.

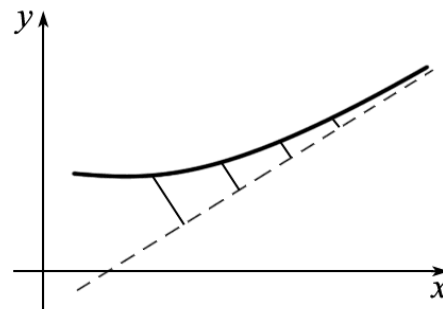
Например, функция, рассмотренная в примере 1, $f(x) = \frac{\sqrt[3]{(x-3)^2}}{x^2-4}$ имеет

горизонтальную асимптоту $y = 0$, так как $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{(x-3)^2}}{x(x^2-4)} = 0$ и



$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{(x-3)^2}}{x^2 - 4} = 0.$$

Очевидно, что асимптоты графика функции характеризуются следующим свойством: Расстояние от точки $M(x_M, y_M)$, лежащей на графике до асимптоты стремится к нулю при условии, что точка графика уходит в бесконечность, т.е. $\sqrt{x_M^2 + y_M^2} \rightarrow \infty$.



7.6. Исследование функции и построение графика

Изучение поведения функции целесообразно проводить по следующему плану:

1. Найти область определения функции и ее точки разрыва.
2. Отметить такие свойства, как четность, нечетность, периодичность (если они есть).
3. Вычислить первую производную и найти промежутки возрастания и убывания функции, а также ее экстремумы.
4. Найти вторую производную и исследовать функцию на выпуклость. Найти точки перегиба функции.
5. Найти асимптоты графика функции.
6. Если надо, найти дополнительные точки, например, точки пересечения графика с координатными осями.
7. Построить график.

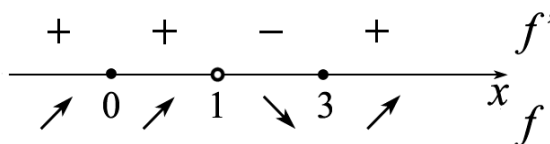
Пример 9. Исследовать функцию $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$.

☺ 1) Область определения этой функции $D(f) = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. Точка $x=1$ - точка разрыва функции.

2) Функция не является ни четной, ни нечетной.

3) Исследуем функцию на монотонность и экстремумы. Для этого найдем про-

изводную: $f'(x) = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$ и исследуем ее знак.

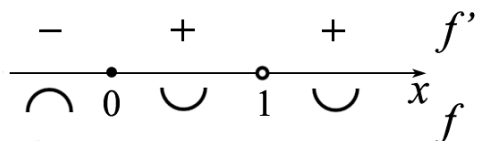


Функция возрастает на промежутке $(-\infty, 1)$ и на промежутке $[3, +\infty)$, и убывает на промежутке $(1, 3]$. В точке $x=3$ функция имеет минимум, причем

$$f(3) = \frac{27}{8}.$$

4) Исследуем выпуклость этой функции. Найдем ее вторую производную:

$$f''(x) = \frac{6x}{(x-1)^4} \text{ и исследуем ее знак.}$$



Функция выпукла вверх на промежутке $(-\infty, 0)$ и выпукла вниз на каждом из промежутков $(0, 1)$ и $(1, +\infty)$. Точка $x = 0$ - точка перегиба функции и $f(0) = 0$.

5) Найдем асимптоты графика функции. Сначала возьмем точку разрыва функции и найдем предел функции при x , стремящемся к этой точке:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty, \text{ следовательно, прямая } x = 1 \text{ является вертикальной асимпто-}$$

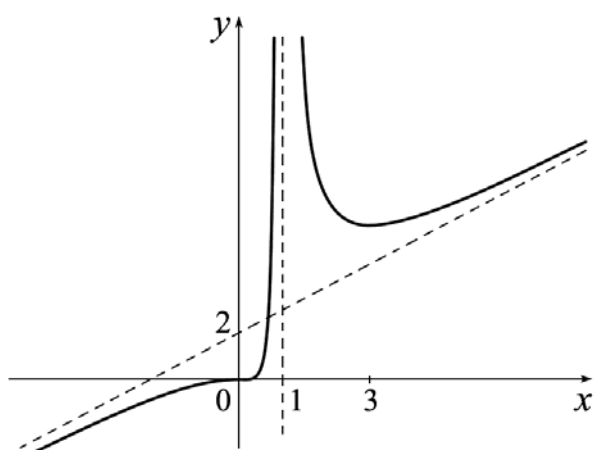
той графика. Для нахождения наклонной асимптоты выделим целую часть из дроб

$$\text{би } f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2} = x + 2 + \frac{3x+2}{(x-1)^2}. \text{ Так}$$

$$\text{как } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+2}{(x-1)^2} = 0, \text{ то прямая } y = x + 2$$

является наклонной асимптотой.

6) Теперь можно построить график функции. ☺



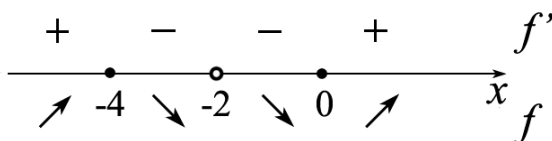
Пример 10. Исследовать функцию $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2}{x+2}}$.

☺ 1) Область определения этой функции $D(f) = (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$. Точка $x = -2$ является точкой разрыва этой функции.

2) Функция не является ни четной, ни нечетной.

3) Исследуем функцию на монотонность и экстремумы. Найдем производную:

$$f'(x) = \frac{x+4}{3\sqrt[3]{x(x+2)^4}} \text{ и исследуем ее знак.}$$

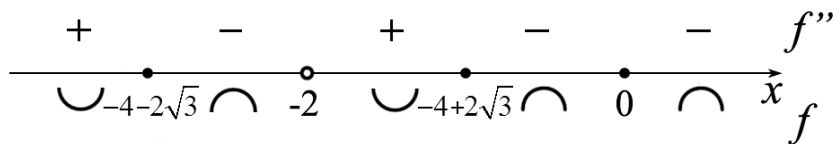


Функция возрастает на промежутке $(-\infty, -4]$ и на промежутке $[0, +\infty)$, и убывает на промежутке $[-4, -2)$ и на промежутке $(-2, 0]$. Точка $x = -4$ - точка

максимума, причем $f(-4) = -2$, а точка $x = 0$ - точка острого минимума.
 $f(0) = 0$.

4) Исследуем функцию на выпуклость. Найдем вторую производную.

$$f''(x) = \frac{-2(x+4-2\sqrt{3})(x+4+2\sqrt{3})}{9\sqrt[3]{x^4(x+2)^7}} \text{ и исследуем ее знак}$$



Функция выпукла вниз на промежутке $(-\infty, -4-2\sqrt{3})$ и на промежутке $(-2, -4+2\sqrt{3})$, и выпукла вверх на каждом из промежутков $(-4-2\sqrt{3}, -2)$, $(-4+2\sqrt{3}, 0)$ и $(0, +\infty)$. Точки $x = -4 \pm 2\sqrt{3}$ являются точками перегиба. $f(-4+2\sqrt{3}) \approx 0,6$ и $f(-4-2\sqrt{3}) \approx -2,1$.

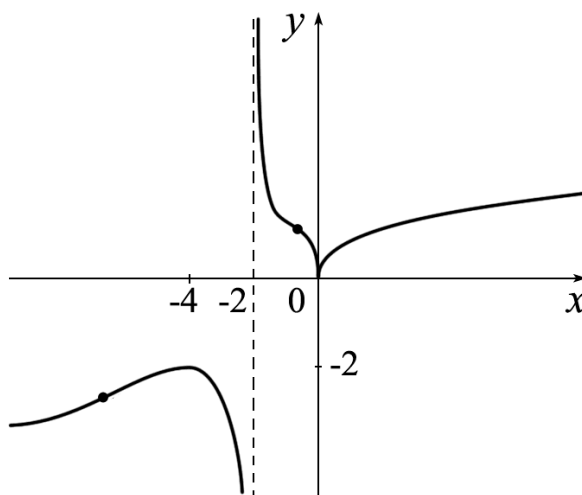
5) Прямая $x = -2$ является вертикальной асимптотой графика, так как

$$\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt[3]{\frac{x^2}{x+2}} = \infty.$$

Для удобства построения графика, найдем односторонние пределы:

$$\lim_{x \rightarrow -2-0} \sqrt[3]{\frac{x^2}{x+2}} = -\infty \text{ и } \lim_{x \rightarrow -2+0} \sqrt[3]{\frac{x^2}{x+2}} = +\infty.$$

Наклонных асимптот нет, так как $f(x) \sim \sqrt[3]{x}$ при $x \rightarrow \infty$.



6) Построим график (отмечены точки перегиба). ☺

Пример 11. Построить кривую, заданную параметрически:

$$x(t) = \frac{t^2}{t+1}, \quad y(t) = \frac{t^2 - t + 9}{t-1}.$$

☺ 1) Кривая определена при $t \neq \pm 1$, т.е. состоит из трех ветвей: для $t \in (-\infty, -1)$, для $t \in (-1, 1)$ и для $t \in (1, +\infty)$.

2) Найдем сначала асимптоты кривой.

$x \rightarrow -\infty$, $y \rightarrow -5,5$ при $t \rightarrow -1-0$, и $x \rightarrow +\infty$, $y \rightarrow -5,5$ при $t \rightarrow -1+0$, следовательно, прямая $y = -5,5$ является горизонтальной асимптотой.

Аналогично, если $t \rightarrow 1-0$, то $x \rightarrow \frac{1}{2}$, $y \rightarrow -\infty$, и, если $t \rightarrow 1+0$, то $x \rightarrow \frac{1}{2}$,

$y \rightarrow +\infty$, следовательно, прямая $x = \frac{1}{2}$ является вертикальной асимптотой.

Обе переменные x и y стремятся к бесконечности только при $t \rightarrow \infty$. Поэтому параметры наклонной асимптоты найдем при $t \rightarrow \infty$:

$$k = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(t^2 - t + 9)(t+1)}{(t-1)t^2} = 1 \text{ и}$$

$$b = \lim_{t \rightarrow \infty} (y(t) - kx(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{t^2 - t + 9}{t-1} - \frac{t^2}{t+1} \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{t^2 + 8t + 9}{t^2 - 1} \right) = 1. \text{ Отсюда, пря-}$$

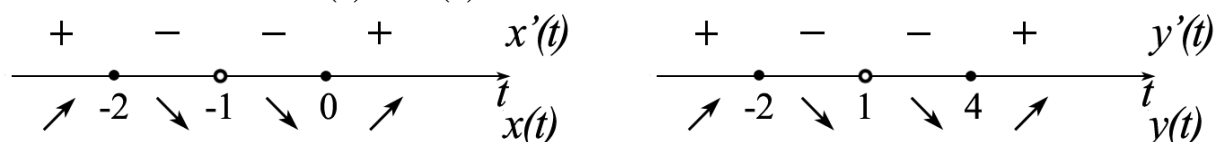
мая $y = x + 1$ - наклонная асимптота кривой.

3) Найдем производные от функций $x(t)$ и $y(t)$ по переменной t :

$$x'(t) = \frac{t(t+2)}{(t+1)^2} \text{ и } y'(t) = \frac{(t-4)(t+2)}{(t-1)^2}, \text{ и две первые производные от } y \text{ по } x:$$

$$y'_x = \frac{(t-4)(t+1)^2}{t(t-1)^2}, \text{ при } t \neq -2 \text{ и } y''_{xx} = \frac{(t+1)^3(16t-4)}{t^3(t+2)(t-1)^3}.$$

Исследуем функции $x(t)$ и $y(t)$ на монотонность.



Так как функции $x(t)$ и $y(t)$ определяют функцию $y(x)$ на тех промежутках изменения переменной t , где $x(t)$ монотонна, то можно сказать, что в нашем случае мы имеем три функции: $y_1(x)$ при $t \in (-\infty, -2]$, $y_2(x)$ при $t \in [-2, -1) \cup (-1, 0]$ и $y_3(x)$ при $t \in [0, +\infty)$.

Найдем некоторые точки, лежащие на кривой:
 $M_1(x(-2) = -4, y(-2) = -5);$ $M_2(x(0) = 0, y(0) = -9),$

$$M_3\left(x\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{20}, y\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{11}{4}\right), M_4\left(x(4) = \frac{16}{5}, y(4) = 7\right).$$

Теперь составим сводную таблицу изменения параметров искомой кривой

t	$x(t)$	$y(t)$
$(-\infty, -2)$	$x(t)$ возрастает от $-\infty$ до -4	$y(t)$ возрастает от $-\infty$ до -5
$(-2, -1)$	$x(t)$ убывает от -4 до $-\infty$	$y(t)$ убывает от -5 до $-5,5$
$(-1, 0)$	$x(t)$ убывает от $+\infty$ до 0	$y(t)$ убывает от $-5,5$ до -9
$(0, 1)$	$x(t)$ возрастает от 0 до $\frac{1}{2}$	$y(t)$ убывает от -9 до $-\infty$
$(1, 4)$	$x(t)$ возрастает от $\frac{1}{2}$ до $\frac{16}{5}$	$y(t)$ убывает от $+\infty$ до 7
$(4, +\infty)$	$x(t)$ возрастает от $\frac{16}{5}$ до $+\infty$	$y(t)$ возрастает от 7 до $+\infty$

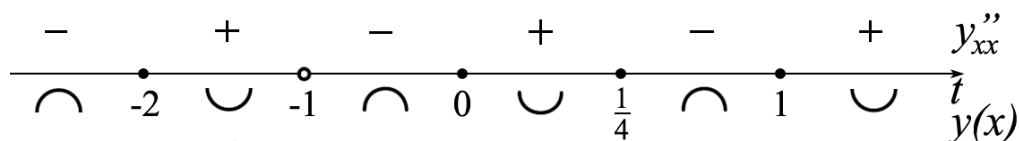
При $t = 4$ производная $y'_x = 0$ и меняет знак с «-» на «+», поэтому соответствующая точка кривой является точкой минимума.

При $t = 0$ производная $y'_x = \infty$, поэтому найдем $x'_y = \frac{t(t-1)^2}{(t-4)(t+1)^2}$, $t \neq -2$.

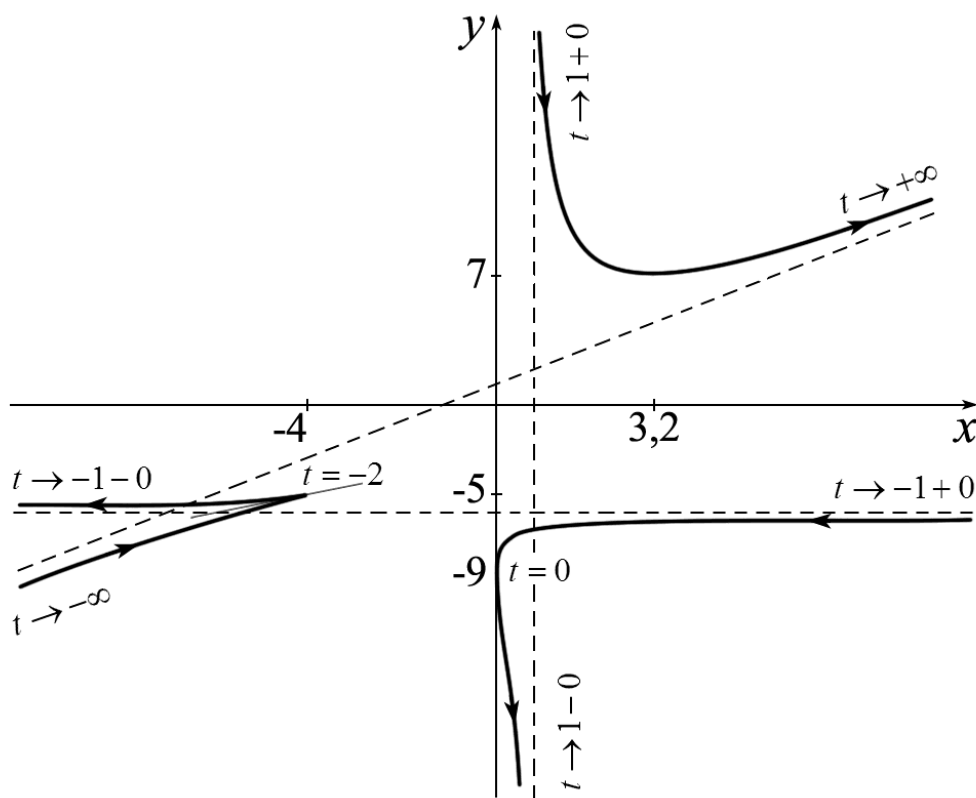
В точке $t = 0$ эта производная равна нулю и меняет знак с «-» на «+», поэтому эта часть кривой, рассматриваемая как функция $x = x(y)$, имеет минимум в соответствующей точке.

При $t = -2$ производной y'_x не существует, но существуют ее предельные значения справа и слева, равные $\frac{1}{3}$.

4). Исследуем на знак вторую производную y''_{xx} :



На промежутках $(-\infty, -2)$, $(-1, 0)$ и $(\frac{1}{4}, 1)$ кривая выпукла вверх, на промежутках $(-2, -1)$, $(0, \frac{1}{4})$ и $(1, +\infty)$ кривая выпукла вниз. При $t = \frac{1}{4}$ вторая производная y''_{xx} равна нулю и меняет знак, следовательно, в соответствующей точке кривая имеет перегиб. Строим график функции. ☺



§8 Векторная функция скалярного аргумента

8.1. Определения

Определение 8.1. Если каждому значению $t \in G$, где $G \subset \mathbb{R}$, ставится в соответствие вектор $\vec{r}(t)$ трехмерного пространства, то будем говорить, что на множестве G задана **векторная функция $\vec{r}(t)$ скалярного аргумента t** или **вектор-функция $\vec{r}(t)$** .

Если в пространстве задана прямоугольная система координат, то задание векторной функции $\vec{r}(t)$ равносильно заданию трех координатных функций $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$. Это можно записать в виде $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ или, используя координатные орты, $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$.

Если $z(t) = 0$, $t \in G$, то функцию $\vec{r}(t)$ называют **двумерной**.

Будем считать, что начало вектора $\vec{r}(t)$ находится в начале координат, т.е. векторы $\vec{r}(t)$ являются радиус-векторами. Тогда множество концов этих векторов называют **годографом** вектор-функции.

Символом $|\vec{r}(t)|$ будем обозначать длину вектора $\vec{r}(t)$, т.е.

$$|\vec{r}(t)| = \sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}.$$

8.2. Предел и непрерывность

Определение 8.2. Вектор $\vec{a}$ называют **пределом** вектор-функции $\vec{r}(t)$ при $t \rightarrow t_0$, если $\lim_{t \rightarrow t_0} |\vec{r}(t) - \vec{a}| = 0$.

Записывать этот факт будем следующим образом $\vec{a} = \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t)$.

Теорема 8.1. Вектор $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ тогда и только тогда будет пределом вектор-функции $\vec{r}(t)$ при $t \rightarrow t_0$, когда $x(t) \xrightarrow{t \rightarrow t_0} a_1$, $y(t) \xrightarrow{t \rightarrow t_0} a_2$, $z(t) \xrightarrow{t \rightarrow t_0} a_3$.

► Пусть $\vec{a} = \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t)$, т.е. $\lim_{t \rightarrow t_0} |\vec{r}(t) - \vec{a}| = 0$. Тогда $x(t) \xrightarrow{t \rightarrow t_0} a_1$, $y(t) \xrightarrow{t \rightarrow t_0} a_2$, $z(t) \xrightarrow{t \rightarrow t_0} a_3$ так как

$$|x(t) - a_1| \leq \sqrt{(x(t) - a_1)^2 + (y(t) - a_2)^2 + (z(t) - a_3)^2},$$

$$|y(t) - a_2| \leq \sqrt{(x(t) - a_1)^2 + (y(t) - a_2)^2 + (z(t) - a_3)^2},$$

$$|z(t) - a_3| \leq \sqrt{(x(t) - a_1)^2 + (y(t) - a_2)^2 + (z(t) - a_3)^2}.$$

Обратно, если $x(t) \xrightarrow{t \rightarrow t_0} a_1, y(t) \xrightarrow{t \rightarrow t_0} a_2, z(t) \xrightarrow{t \rightarrow t_0} a_3$, то

$$|\vec{r}(t) - \vec{a}| = \sqrt{(x(t) - a_1)^2 + (y(t) - a_2)^2 + (z(t) - a_3)^2} \xrightarrow{t \rightarrow t_0} 0. \blacktriangleleft$$

Очевидно, что для векторной функции выполнено утверждение: для того чтобы вектор $\vec{a}$ был пределом вектор-функции $|\vec{r}(t)|$ при $t \rightarrow t_0$ необходимо и достаточно, чтобы вектор-функцию можно было представить в виде $\vec{r}(t) = \vec{a} + \vec{\gamma}(t)$, где $\vec{\gamma}(t) \xrightarrow{t \rightarrow t_0} \vec{0}$.

Свойства пределов вектор-функции

Свойство 1. Если $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \vec{a}$, то $\lim_{t \rightarrow t_0} |\vec{r}(t)| = |\vec{a}|$.

Доказательство следует из неравенства $||\vec{r}(t)| - |\vec{a}|| \leq |\vec{r}(t) - \vec{a}|$.

Свойство 2. Равенство $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \vec{0}$ равносильно равенству $\lim_{t \rightarrow t_0} |\vec{r}(t)| = 0$.

В одну сторону это свойство следует из свойства 1, а в обратную из определения предела вектор-функции.

Свойство 3. Если $\vec{r}(t)$ - векторная функция, а $f(t)$ - скалярная функция аргумента $t \in G$, причем $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \vec{a}$ и $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = A$, то $\lim_{t \rightarrow t_0} (f(t) \cdot \vec{r}(t)) = A \cdot \vec{a}$.

► По критерию того, что число A является пределом функции $f(t)$, получим $f(t) = A + \beta(t)$, где $\beta(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow t_0$.

Аналогично, $\vec{r}(t) = \vec{a} + \vec{\gamma}(t)$, где $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{\gamma}(t) = \vec{0}$. Тогда

$$f(t) \cdot \vec{r}(t) = (A + \beta(t))(\vec{a} + \vec{\gamma}(t)) = A \cdot \vec{a} + (\beta(t)\vec{a} + A\vec{\gamma}(t) + \beta(t)\vec{\gamma}(t)),$$

причем $|\beta(t)\vec{a} + A\vec{\gamma}(t) + \beta(t)\vec{\gamma}(t)| \leq |\beta(t)||\vec{a}| + |A||\vec{\gamma}(t)| + |\beta(t)||\vec{\gamma}(t)|$,

так как каждая компонента правой части стремится к нулю, то $\beta(t)\vec{a} + A\vec{\gamma}(t) + \beta(t)\vec{\gamma}(t) \rightarrow \vec{0}$, следовательно, $A \cdot \vec{a} = \lim_{t \rightarrow t_0} (f(t) \cdot \vec{r}(t))$. ◀

Свойство 4. Если $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}_1(t) = \vec{a}_1$ и $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}_2(t) = \vec{a}_2$, то

$$a) \lim_{t \rightarrow t_0} (\vec{r}_1(t) + \vec{r}_2(t)) = \vec{a}_1 + \vec{a}_2;$$

$$б) \lim_{t \rightarrow t_0} (\vec{r}_1(t) \cdot \vec{r}_2(t)) = \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2;$$

$$в) \lim_{t \rightarrow t_0} (\vec{r}_1(t) \times \vec{r}_2(t)) = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2.$$

► Формула а) очевидно следует из того, что по условию можно записать $\vec{r}_1(t) = \vec{a}_1 + \vec{\gamma}_1(t)$ и $\vec{r}_2(t) = \vec{a}_2 + \vec{\gamma}_2(t)$, где $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{\gamma}_1(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{\gamma}_2(t) = \vec{0}$.

Для доказательства формулы б) используем эти же представления векторных функций и свойства скалярного произведения:

$$\begin{aligned} \vec{r}_1(t) \cdot \vec{r}_2(t) - \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 &= (\vec{a}_1 + \vec{\gamma}_1(t))(\vec{a}_2 + \vec{\gamma}_2(t)) - \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = \\ &= \vec{a}_1 \cdot \vec{\gamma}_2(t) + \vec{a}_2 \cdot \vec{\gamma}_1(t) + \vec{\gamma}_1(t) \cdot \vec{\gamma}_2(t) \end{aligned}$$

Так как выполнено неравенство $\left|(\vec{a} \cdot \vec{b})\right| \leq |\vec{a}||\vec{b}|$, то правая часть разности стремится к нулю.

Формула в) доказывается аналогично, так как $\left|(\vec{a} \times \vec{b})\right| \leq |\vec{a}||\vec{b}|$. ◀

Определение 8.3. Вектор-функцию $\vec{r}(t)$ будем называть **непрерывной** в точке $t = t_0$, если $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$.

Пусть дана вектор-функция $\vec{r}(t)$, определенная в некоторой окрестности точки $t = t_0$. Разность $\Delta \vec{r}(t_0) = \vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)$ будем называть **приращением вектор-функции** $\vec{r}(t)$ в точке $t = t_0$.

Очевидно, что вектор-функция непрерывна в точке $t = t_0$ тогда и только тогда, когда $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta \vec{r}(t_0) = \vec{0}$.

Очевидно также, что непрерывность векторной функции в точке $t = t_0$ равносильна непрерывности в этой точке координатных функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

8.3. Производная и дифференциал

Определение 8.4. $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}(t_0)}{\Delta t}$, если он существует, называют **производной вектор-функции** $\vec{r}(t)$ в точке $t = t_0$ и обозначают $\vec{r}'(t_0)$, $\dot{\vec{r}}(t_0)$, или $\frac{d\vec{r}(t_0)}{dt}$.

$$\text{Таким образом, } \vec{r}'(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t}.$$

Из свойств пределов следует, что $\vec{r}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$.

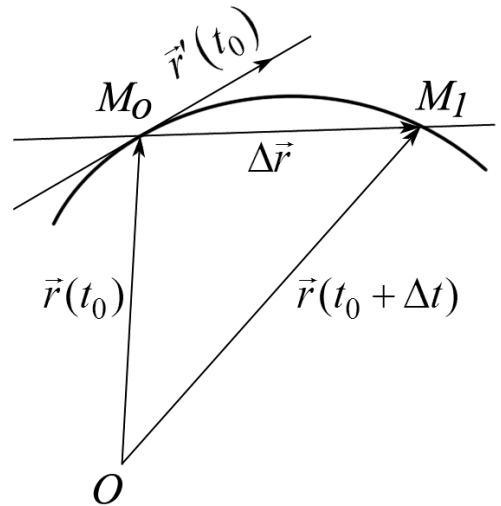
Из определения производной получим $\Delta \vec{r}(t_0) = \vec{r}'(t_0)\Delta t + \vec{\gamma}(\Delta t)\Delta t$, где $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{\gamma}(\Delta t) = \vec{0}$. Отсюда следует непрерывность векторной функции в каждой точке, где эта функция имеет производную.

Произведение $\vec{r}'(t_0)\Delta t$ будем называть **дифференциалом векторной функции**, а функцию, имеющую дифференциал, - **дифференцируемой**.

Выясним геометрический смысл производной векторной функции.

Пусть $\vec{r}(t)$ векторная функция, дифференцируемая в точке $t = t_0$, причем $\vec{r}'(t_0) \neq \vec{0}$. На годографе функции $\vec{r}(t)$ построим точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M_1(x_1, y_1, z_1)$, где $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$, $z_0 = z(t_0)$ и $x_1 = x(t_0 + \Delta t)$, $y_1 = y(t_0 + \Delta t)$, $z_1 = z(t_0 + \Delta t)$. Тогда прямая M_0M_1 называется **секущей**, а вектор

$\Delta \vec{r}(t_0) = \vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0) = \overrightarrow{M_0 M_1}$ - **вектором секущей**. Если $\vec{r}'(t_0) \neq \vec{0}$, то в некоторой окрестности точки $t = t_0$ вектор $\Delta \vec{r}(t_0) \neq \vec{0}$ и отношение $\frac{\Delta \vec{r}(t_0)}{\Delta t} \neq \vec{0}$. Тогда параметрическое уравнение секущей можно записать в виде $\vec{r}(\lambda) = \vec{r}(t_0) + \frac{\Delta \vec{r}(t_0)}{\Delta t} \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.



При $\Delta t \rightarrow 0$ точка M_1 будет перемещаться по кривой и стремиться к точке M_0 . При этом секущая будет поворачиваться и стремиться занять предельное положение, которое мы будем называть **касательным**. Таким образом, если существует $\vec{r}'(t_0) \neq \vec{0}$, то, переходя к пределу в уравнении секущей, получим уравнение касательной $\vec{r}(\lambda) = \vec{r}(t_0) + \vec{r}'(t_0) \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$ или в канонической форме

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}.$$

Таким образом, мы доказали, что $\vec{r}'(t_0)$ - **вектор касательной к годографу функции $\vec{r}(t)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$** и, что этот вектор существует, если $\vec{r}'(t_0) \neq \vec{0}$.

Замечание. Иногда под понятием «касательная» понимается касательный вектор. Так как график обычной функции можно понимать, как кривую, заданную параметрически (где в качестве параметра берется x), то при таком подходе, то при таком подходе функция не будет иметь касательную в точках, где ее производная бесконечна, но знак этой бесконечности не определен.

Теорема 8.2. Если функции $\vec{r}_1(t)$, $\vec{r}_2(t)$ и $f(t)$ имеют производные в точке t , то в этой точке справедливы формулы

$$a) (\vec{r}_1 + \vec{r}_2)' = \vec{r}_1' + \vec{r}_2';$$

$$б) (f \cdot \vec{r})' = f' \cdot \vec{r} + f \cdot \vec{r}';$$

$$в) (\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2)' = \vec{r}_1' \cdot \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2';$$

$$г) (\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)' = \vec{r}_1' \times \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \times \vec{r}_2'.$$

Доказательство теоремы легко следует из определения производной и свойств скалярного и векторного произведений, и предоставляются читателю.

“Вычисление производных”

2.1. Основные понятия

Определение 2.1

Производной функции $y = f(x)$ называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx}.$$

Из четырех стандартных обозначений для производной будут использоваться в дальнейшем первые два, как более простые.

Определение 2.2

Функция $y = f(x)$ называется *дифференцируемой* в точке $x = x_0$, если она имеет в этой точке производную.

Определение 2.3

Функция $y = f(x)$ называется *дифференцируемой* на некотором интервале, если она является дифференцируемой в каждой точке этого интервала.

Определение 2.4

Операция вычисления производной называется *дифференцированием* функции.

С помощью определения производной и свойств пределов можно доказать [1]–[4] следующие правила дифференцирования:

Правило 2.1

Постоянный множитель можно вынести за знак производной: $[cf(x)]' = cf'(x)$.

Правило 2.2

Производная от суммы (или разности) дифференцируемых функций равна сумме (или разности) их производных: $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$.

Правило 2.3

Производная от произведения дифференцируемых функций вычисляется по формуле: $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

Правило 2.4

Производная от отношения дифференцируемых функций в точках, где знаменатель не обращается в нуль, находится по формуле: $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

Правило 2.5

Если функция $y = f(x)$ является дифференцируемой и монотонной, причем $f'(x) \neq 0$ на некотором интервале, то обратная к ней функция $x = \varphi(y)$ тоже будет монотонной и дифференцируемой и для ее производной² справедлива формула:

$$\varphi'_y(y) = \frac{1}{f'_x(x)}.$$

²Здесь (и в дальнейшем) нижний индекс указывает аргумент, по которому вычисляется производная функции.

Определение 2.5

Если функция $y = f(x)$ может быть представлена в виде $y = u(v(x))$ или $y = u(t)$, $t = v(x)$, то y называется *сложной функцией* или *композицией функций* u и v , а t называется *промежуточным аргументом*.

Правило 2.6

Производная от композиции двух дифференцируемых функций вычисляется по формуле: $y'_x = (u(v(x)))'_x = u'_v v'_x$.

Пример 2.1

Вычислить производную функции $y = \frac{3}{x} - 2 \cos x$. Воспользуемся правилами 2.1 и 2.2, а также таблицей производных:

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{3}{x} - 2 \cos x \right)' = 3(x^{-1})' - 2(\cos x)' = \\ &= 3 \cdot (-1)x^{-2} - 2(-\sin x) = 2 \sin x - \frac{3}{x^2}. \end{aligned}$$

Пример 2.2

Вычислить производную функции $y = \sqrt[3]{x} \operatorname{arctg} x$. Воспользуемся правилом 2.3 и таблицей производных

$$\begin{aligned} y' &= (\sqrt[3]{x} \operatorname{arctg} x)' = (\sqrt[3]{x})' \operatorname{arctg} x + \sqrt[3]{x} (\operatorname{arctg} x)' = \\ &= \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} \operatorname{arctg} x + x^{\frac{1}{3}} \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2} \operatorname{arctg} x} + \frac{\sqrt[3]{x}}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Пример 2.3

Вычислить производную функции $y = \frac{\sin(\log_2 x)}{2^{\cos x}}$. Воспользуемся правилом 2.4

$$y' = \left(\frac{\sin(\log_2 x)}{2^{\cos x}} \right)' = \frac{(\sin(\log_2 x))' 2^{\cos x} - \sin(\log_2 x) (2^{\cos x})'}{(2^{\cos x})^2}.$$

Производную от числителя и от знаменателя вычислим с помощью правила 2.6. и таблицы производных

$$\underbrace{(\sin(\log_2 x))'}_{v(x)} = (\sin v)'_v v'_x = \cos v (\log_2 x)'_x = \cos(\log_2 x) \frac{1}{x \ln 2},$$

$$(2^{\cos x})' = [\cos x = t] = (2^t)'_t t'_x = 2^t \ln 2 (\cos x)' = 2^{\cos x} \ln 2 (-\sin x).$$

Теперь завершим вычисление искомой производной

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2^{2 \cos x}} \left(\frac{\cos(\log_2 x) 2^{\cos x}}{x \ln 2} + \sin(\log_2 x) 2^{\cos x} \ln 2 \sin x \right) = \\ &= 2^{-\cos x} \left(\frac{\cos(\log_2 x)}{x \ln 2} + \ln 2 \sin x \sin(\log_2 x) \right). \end{aligned}$$

Пример 2.4

Вычислить производную функции $y = 3 \arcsin(e^{-\operatorname{ctg}^5(7 \ln x)})$. Данная функция представляет собой композицию пяти функций, и поэтому правило 2.6 следует применить несколько раз

$$\begin{aligned} y' &= \frac{3}{\sqrt{1 - (e^{-\operatorname{ctg}^5(7 \ln x)})^2}} (e^{-\operatorname{ctg}^5(7 \ln x)})' = \\ &= \frac{3e^{-\operatorname{ctg}^5(7 \ln x)}}{\sqrt{1 - e^{-2 \operatorname{ctg}^5(7 \ln x)}}} (-\operatorname{ctg}^5(7 \ln x))' = \\ &= \frac{3e^{-\operatorname{ctg}^5(7 \ln x)} (-5 \operatorname{ctg}^4(7 \ln x))}{\sqrt{1 - e^{-2 \operatorname{ctg}^5(7 \ln x)}}} (\operatorname{ctg}(7 \ln x))' = \\ &= \frac{-15e^{-\operatorname{ctg}^5(7 \ln x)} (\operatorname{ctg}^4(7 \ln x))}{\sqrt{1 - e^{-2 \operatorname{ctg}^5(7 \ln x)}}} \frac{-1}{\sin^2(7 \ln x)} (7 \ln x)' = \\ &= \frac{15e^{-\operatorname{ctg}^5(7 \ln x)} (\operatorname{ctg}^4(7 \ln x))}{\sqrt{1 - e^{-2 \operatorname{ctg}^5(7 \ln x)}}} \frac{1}{\sin^2(7 \ln x)} \frac{7}{x}. \end{aligned}$$

2.3. Правило логарифмического дифференцирования

Определение 2.6

Логарифмической производной функции $y = f(x)$ называется производная от натурального логарифма этой функции $(\ln y(x))' = \frac{y'(x)}{y(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)}$.

Предварительное логарифмирование применяется, в частности, для нахождения производной от степенно-показательной

функции $y = u(x)^{v(x)} \Rightarrow \ln y(x) = v(x) \ln u(x) \Rightarrow (\ln y(x))' = (v(x) \ln u(x))' \Rightarrow$

$$\begin{aligned}\frac{y'(x)}{y(x)} &= v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)} \Rightarrow \\ y'(x) &= y(x) \left[v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)} \right].\end{aligned}$$

Правило 2.7

Производная степенно-показательной функции вычисляется по формуле

$$\boxed{(u(x)^{v(x)})' = u(x)^{v(x)} \ln u(x) v'(x) + v(x) u(x)^{v(x)-1} u'(x)}$$

Пример 2.5

Вычислить производную функции $y = (\operatorname{arccctg} \sqrt[4]{x})^{\operatorname{tg}(6x^5)}$. Воспользуемся правилами 2.7, 2.6, 2.1 и таблицей производных

$$\begin{aligned}y' &= (\operatorname{arccctg} \sqrt[4]{x})^{\operatorname{tg}(6x^5)} \ln(\operatorname{arccctg} \sqrt[4]{x}) (\operatorname{tg}(6x^5))' + \\ &+ \operatorname{tg}(6x^5) (\operatorname{arccctg} \sqrt[4]{x})^{\operatorname{tg}(6x^5)-1} (\operatorname{arccctg} \sqrt[4]{x})' = \\ &= (\operatorname{arccctg} \sqrt[4]{x})^{\operatorname{tg}(6x^5)} \ln(\operatorname{arccctg} \sqrt[4]{x}) \frac{30x^4}{\cos^2(6x^5)} + \\ &+ (\operatorname{arccctg} \sqrt[4]{x})^{\operatorname{tg}(6x^5)-1} \frac{\operatorname{tg}(6x^5) (-1) \frac{1}{4} x^{-3/4}}{1 + (\sqrt[4]{x})^2} = \\ &= (\operatorname{arccctg} \sqrt[4]{x})^{\operatorname{tg}(6x^5)} \left[\frac{30x^4 \ln(\operatorname{arccctg} \sqrt[4]{x})}{\cos^2(6x^5)} - \right. \\ &\left. - \frac{\operatorname{tg}(6x^5)}{4\sqrt[4]{x^3}(1 + \sqrt{x}) \operatorname{arccctg} \sqrt[4]{x}} \right].\end{aligned}$$

“Приложения производных”

Определение 3.1

Функция $y = f(x)$ называется *монотонно возрастающей* на интервале (a, b) , если большему значению аргумента из этого интервала отвечает большее значение функции

$$a < x_1 < x_2 < b \implies f(x_1) < f(x_2).$$

Определение 3.2

Функция $y = f(x)$ называется *монотонно убывающей* на интервале (a, b) , если большему значению аргумента из этого интервала отвечает меньшее значение функции

$$a < x_1 < x_2 < b \implies f(x_1) > f(x_2).$$

Известны ($[1] - [4]$) следующие признаки монотонности функции:

Правило 3.1

Если $f'(x) > 0$ во всех точках интервала (a, b) , то функция $y = f(x)$ будет возрастающей на этом интервале.

Правило 3.2

Если $f'(x) < 0$ во всех точках интервала (a, b) , то функция $y = f(x)$ будет убывающей на этом интервале.

Правило 3.3

Если $f'(x) = 0$ во всех точках интервала (a, b) , то функция $y = f(x)$ является тождественно постоянной на этом интервале, т.е. принимает одно и то же значение во всех точках интервала.

Определение 3.3

Точка x_0 называется точкой *локального максимума* функции $y = f(x)$, если существует окрестность этой точки, в пределах которой выполнено неравенство $f(x) \leq f(x_0)$.

Определение 3.4

Точка x_0 называется точкой *локального минимума* функции $y = f(x)$, если существует окрестность этой точки, в пределах которой выполнено неравенство $f(x) \geq f(x_0)$.

Определение 3.5

Точки локальных максимумов и минимумов называются *точками экстремумов* функции.

Правило 3.4

Если производная $f'(x)$ функции $y = f(x)$ в точке экстремума существует, то она обращается в нуль, т.е. $f'(x_0) = 0$.

Правило 3.5

Если при $x < x_0$ $f'(x) < 0$, а при $x > x_0$ $f'(x) > 0$, т.е. производная меняет знак в точке x_0 с “-” на “+”, при этом в самой точке $f'(x_0) = 0$ или не существует, тогда x_0 – точка локального минимума функции $y = f(x)$.

Правило 3.6

Если при $x < x_0$ $f'(x) > 0$, а при $x > x_0$ $f'(x) < 0$, т.е. производная меняет знак в точке x_0 с “+” на “-”, при этом в самой точке $f'(x_0) = 0$ или не существует, тогда x_0 – точка локального максимума функции $y = f(x)$.

Правило 3.7

Наибольшее или наименьшее значение непрерывной функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ может достигаться или в точке экстремума, или на конце отрезка.

Доказательство правил 3.4–3.7 можно найти в [1]–[4].

Пример 3.1

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x\sqrt{3} - 2\cos x$ на отрезке $\left[-\pi, \frac{\pi}{2}\right]$. Чтобы найти точки экстремумов, вычислим производную

$$y' = (x\sqrt{3} - 2\cos x)' = \sqrt{3} \cdot 1 - 2 \cdot (-\sin x) = 2\sin x + \sqrt{3}.$$

Теперь найдем корни производной, принадлежащие заданному отрезку $2 \sin x + \sqrt{3} = 0 \iff \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \implies x_1 = -\frac{\pi}{3}, x_2 = -\frac{2\pi}{3}$. Вычисляем значения функции в этих точках и на концах отрезка

$$\begin{aligned} f(-\pi) &= (-\pi)\sqrt{3} - 2 \cdot (-1) \approx -3,441. \\ f\left(-\frac{2\pi}{3}\right) &= \left(-\frac{2\pi}{3}\right)\sqrt{3} - 2\left(-\frac{1}{2}\right) \approx -2,628. \\ f\left(-\frac{\pi}{3}\right) &= \left(-\frac{\pi}{3}\right)\sqrt{3} - 2\left(\frac{1}{2}\right) \approx -2,814. \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{3} - 2 \cdot 0 \approx 2,721. \end{aligned}$$

О т в е т: Наибольшее значение $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}\pi}{2}$, наименьшее значение $f(-\pi) = 2 - \pi\sqrt{3}$.

Определение 3.6

График функции $y = f(x)$ называется *выпуклым (вверх)* на интервале (a, b) , если он расположен ниже любой касательной, проведенной к нему на этом интервале.

Определение 3.7

График функции $y = f(x)$ называется *вогнутым* (выпуклым вниз) на интервале (a, b) , если он расположен выше любой касательной, проведенной к нему на этом интервале.

Определение 3.8

Точка x_0 называется *точкой перегиба* графика функции $y = f(x)$, если в ней меняется характер его выпуклости – вогнутости.

Правило 3.8

Если $f''(x) > 0$ во всех точках интервала (a, b) , то график функции $y = f(x)$ будет вогнутым на этом интервале.

Правило 3.9

Если $f''(x) < 0$ во всех точках интервала (a, b) , то график функции $y = f(x)$ будет выпуклым на этом интервале.

Правило 3.10

Точки, в которых меняется знак второй производной $f''(x)$ являются точками перегибов графика функции $y = f(x)$.

Пример 3.2

Исследовать функцию $y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 11$ с помощью первой и второй производных и построить ее график.

1. Областью определения функции является все множество вещественных (действительных) чисел.
2. Четностью, нечетностью, периодичностью функция не обладает, т.е. является функцией общего вида.
3. Непрерывна во всей области определения и поэтому точек разрыва и вертикальных асимптот график функции не имеет.
4. Так как функция растет при $x \rightarrow \infty$ быстрее линейной:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-x^2 + 3x + 9 - \frac{11}{x} \right) = \infty,$$

то наклонных (и горизонтальных) асимптот график функции не имеет.

5. При $x = 0$ $y = -11$, следовательно график пересекает ось Oy в точке $y = -11$.
6. Вычислим первую производную:

$$y' = (-x^3 + 3x^2 + 9x - 11)' = -3x^2 + 6x + 9 = -3(x+1)(x-3).$$

По знаку производной находим интервалы монотонности и экстремумы: при $x \in (-\infty, -1) \cup (3, \infty)$ $y' < 0 \Rightarrow$ функция убывает; при $x \in (-1, 3)$ $y' > 0 \Rightarrow$ функция возрастает. При $x = -1$ функция имеет локальный минимум, причем $y_{\min} = -(-1)^3 + 3(-1)^2 + 9(-1) - 11 = -16$; при $x = 3$ функция имеет локальный максимум, причем $y_{\max} = -3^3 + 3 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 - 11 = 16$.

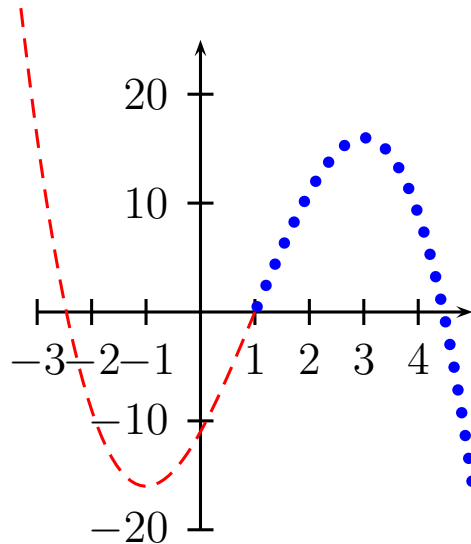


Рис. 1. График функции $y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 11$

7. Вычислим вторую производную: $y'' = (-3x^2 + 6x + 9)' = -6x + 6 = -6(x - 1)$. По знаку второй производной находим интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба графика функции: при $x \in (-\infty, 1)$ $y'' > 0$, следовательно график вогнутый; при $x \in (1, \infty)$ $y'' < 0$, следовательно график выпуклый. При $x = 1$ график имеет точку перегиба, причем ордината точки перегиба $y = -1^3 + 3 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 - 11 = 0$, т.е. в точке перегиба график функции пересекает ось Ox .
8. По найденным характерным точкам строим график функции (рис. 1). Разными штриховками показаны участки выпуклости и вогнутости графика.

Задание 4.3

Найти производную функции $y = 15 \log_5 x - 4 \operatorname{ctg} x$.

$$y' = 15(\log_5 x)' - 4(\operatorname{ctg} x)' = \frac{15}{x \ln 5} - 4 \cdot \frac{-1}{\sin^2 x} = \frac{15}{x \ln 5} + \frac{4}{\sin^2 x}.$$

Задание 4.4

Найти производную функции $y = 11 \operatorname{arctg} x \cdot 3^x$.

$$y' = 11 [(\operatorname{arctg} x)' 3^x + \operatorname{arctg} x (3^x)'] = 11 \left(\frac{3^x}{1+x^2} + \operatorname{arctg} x 3^x \ln 3 \right).$$

Задание 4.5

Найти производную функции $y = \frac{6 \arcsin x}{\cos x}$.

$$\begin{aligned} y' &= 6 \frac{(\arcsin x)' \cos x - \arcsin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{6}{\cos^2 x} \left(\frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}} + \sin x \arcsin x \right). \end{aligned}$$

Задание 4.6

Найти производную функции $y = 5 \sin(11 \arccos \sqrt[4]{x})$.

$$\begin{aligned} y' &= 5 \cos(11 \arccos \sqrt[4]{x}) (11 \arccos \sqrt[4]{x})' = \\ &= 5 \cos(11 \arccos \sqrt[4]{x}) \frac{-11(\sqrt[4]{x})'}{\sqrt{1-(\sqrt[4]{x})^2}} = \\ &= \frac{-55 \cos(11 \arccos \sqrt[4]{x}) x^{-3/4}}{\sqrt{1-\sqrt{x}}} \cdot \frac{1}{4} = \frac{-55 \cos(11 \arccos \sqrt[4]{x})}{4 \sqrt[4]{x^3} \sqrt{1-\sqrt{x}}}. \end{aligned}$$

Задание 4.7

Найти производную функции $y = 7 \log_7^7(8 \operatorname{tg}(9x^9))$.

$$\begin{aligned} y' &= 7 \cdot 7 \log_7^6(8 \operatorname{tg}(9x^9)) (\log_7(8 \operatorname{tg}(9x^9)))' = \\ &= 49 \log_7^6(8 \operatorname{tg}(9x^9)) \frac{(8 \operatorname{tg}(9x^9))'}{8 \operatorname{tg}(9x^9) \ln 7} = \frac{49 \log_7^6(8 \operatorname{tg}(9x^9))}{\operatorname{tg}(9x^9) \ln 7} \frac{(9x^9)'}{\cos^2(9x^9)} = \\ &= \frac{49 \log_7^6(8 \operatorname{tg}(9x^9))}{\cos^2(9x^9) \operatorname{tg}(9x^9) \ln 7} 9 \cdot 9x^8 = \frac{7938 x^8 \log_7^6(8 \operatorname{tg}(9x^9))}{\ln 7 \sin(18x^9)}. \end{aligned}$$

Задание 4.8

Найти производную функции $y = 5(\operatorname{arctg} \sqrt{x})^{5e^{(x^{10})}}$.

$$\begin{aligned} y' &= 5[(\operatorname{arctg} \sqrt{x})^{5e^{(x^{10})}} \ln(\operatorname{arctg} \sqrt{x})(5e^{(x^{10})})' + \\ &+ 5e^{(x^{10})}(\operatorname{arctg} \sqrt{x})^{5e^{(x^{10})}-1}(\operatorname{arctg} \sqrt{x})'] = \\ &= 5(\operatorname{arctg} \sqrt{x})^{5e^{(x^{10})}} \left[\ln(\operatorname{arctg} \sqrt{x}) 5e^{(x^{10})} (x^{10})' + \right. \\ &+ \left. 5e^{(x^{10})} \frac{-(\sqrt{x})'}{\operatorname{arctg} \sqrt{x}(1 + (\sqrt{x})^2)} \right] = 25e^{(x^{10})} (\operatorname{arctg} \sqrt{x})^{5e^{(x^{10})}} \cdot \\ &\cdot \left[\ln(\operatorname{arctg} \sqrt{x}) 10x^9 - \frac{1/2x^{-1/2}}{(1+x) \operatorname{arctg} \sqrt{x}} \right] = (\operatorname{arctg} \sqrt{x})^{5e^{(x^{10})}} \cdot \\ &\cdot 25e^{(x^{10})} \left[10x^9 \ln(\operatorname{arctg} \sqrt{x}) - \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x) \operatorname{arctg} \sqrt{x}} \right]. \end{aligned}$$

Последние два задания связаны с различными приложениями производных. Эти приложения даны в разделе 3.

Задание 4.9

На интервале $[-6, 6]$ найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2x + 11 \ln(x^2 - 10x + 26) + 46 \operatorname{arctg}(x - 5)$. Сначала вычислим и упростим производную, разложив квадратный трехчлен в числителе на множители и выделив полный квадрат в знаменателе $y' = \frac{2(x-2)(x+3)}{(x-5)^2 + 1}$. Видно, что корней

в знаменателе производной нет, поэтому наибольшее и наименьшее значения функция может принимать или в точках, в которых производная обращается в нуль (т.е. в точках $x = 2$ и $x = -3$), или на концах интервала (т.е. в точках $x = -6$ или $x = 6$). Вычислим значения функции в указанных точках:

$$y(-6) = -12 + 11 \ln 122 + 46 \operatorname{arctg}(-11) \approx -27.24,$$

$$y(-3) = -6 + 11 \ln 65 + 46 \operatorname{arctg}(-8) \approx -26.61,$$

$$y(2) = 4 + 11 \ln 10 + 46 \operatorname{arctg}(-3) \approx -28.12,$$

$$y(6) = 12 + 11 \ln 2 + 46 \operatorname{arctg}(1) \approx 55.75.$$

О т в е т: Наибольшее значение $y_{\max} \approx 55.75$ достигается на правом конце интервала, т.е. при $x = 6$; наименьшее значение $y_{\min} \approx -28.12$ достигается внутри интервала в точке $x = 2$.

Задание 4.10

Исследовать функцию $y = \frac{x^3}{6}(x^2 - 5)$ и построить ее график по характерным точкам. Функция определена при всех вещественных значениях x ; непрерывна во всей области существования; точек разрыва и асимптот график функции не имеет. Функция является нечетной, так как $y(-x) = -y(x)$ и ее график симметричен относительно начала координат. Вычислим производную

$$y' = \left(\frac{x^5}{6} - \frac{5x^3}{6} \right)' = \frac{5x^4}{6} - \frac{15x^2}{6} = \frac{5x^2}{6}(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}).$$

По знаку производной определяем, что функция возрастает

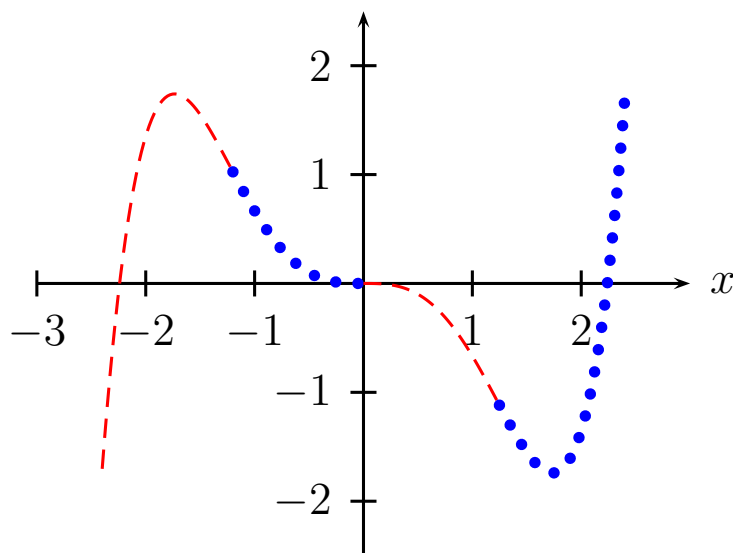


Рис. 2. График функции $y = \frac{x^3}{6}(x^2 - 5)$

при $x \in (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$ и убывает при $x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$. При $x = -\sqrt{3}$ функция имеет местный максимум $y_{\max} = y(-\sqrt{3}) = \sqrt{3}$. При $x = \sqrt{3}$ функция имеет местный минимум $y_{\min} = y(\sqrt{3}) = -\sqrt{3}$. Отметим, что в точке $x = 0$ экстремума нет, так как производная не меняет знак в этой точке. Вычислим вторую производную $y'' = \left(\frac{5x^4}{6} - \frac{15x^2}{6} \right)' = \frac{20x^3}{6} - \frac{10x}{2} = \frac{10x}{3} \left(x^2 - \frac{3}{2} \right) = \frac{10x}{3} \left(x + \frac{\sqrt{6}}{2} \right) \left(x - \frac{\sqrt{6}}{2} \right)$. По знаку второй

производной определяем, что при $x \in (-\infty, -\sqrt{6}/2) \cup (0, \sqrt{6}/2)$ график функции является выпуклым (вверх), а при $x \in (-\sqrt{6}/2, 0) \cup (\sqrt{6}/2, +\infty)$ является вогнутым (выпуклым вниз). График имеет точки перегиба $M_1 = \left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{7\sqrt{6}}{16}\right)$, $M_2 = (0, 0)$, $M_3 = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{7\sqrt{6}}{16}\right)$. По найденным характерным точкам строим график функции (рис. 2) (точками показаны интервалы вогнутости, а штрихами – интервалы выпуклости).

Дифференцирование

28. Пользуясь определением производной, найдите производную функции $f(x)$ в точке x_0 :

а) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$; б) $f(x) = x|x|$, $x_0 = 0$; в) $f(x) = x^2 \ln|x|$, $x \neq 0$, $f(0) = 0$, $x_0 = 0$.

29. Найдите левую и правую производные функций:

а) $y = |x|$ в точке $x = 0$; б) $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1 & \text{при } x \geq 0, \\ e^x & \text{при } x < 0 \end{cases}$ в точке $x = 0$;

в) $f(x) = |x - 1|e^x$ в точке $x = 1$; г) $f(x) = \begin{cases} x(1+x)^{\frac{1}{x}} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$ в точке $x = 0$;

д) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2)}{|x|}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ в точке $x = 0$.

30. Найдите производную и дифференциал функции $f(x)$:

а) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$; б) $f(x) = \sin^2(\cos x) + \cos^2(\sin x)$; в) $f(x) = e^{x^2} \cos 2x$;

г) $f(x) = x^{\sin x}$; д) $f(x) = e^{e^x} + x^{e^x}$; е) $f(x) = \ln^3(\ln^2(\ln x))$;

ж) $f(x) = \arctg(x + \sqrt{1+x^2})$;

з) $f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{1+x}$; и) $f(x) = \ln(e^x + \sqrt{1+e^{2x}})$; к) $f(x) = \sin x^{\cos x}$.

31. Найдите производную функции $f(x)$ в точке x_0 . Найдите значение дифференциала функции $f(x)$ в точке x_0 для указанного значения dx :

а) $f(x) = \arctg \sqrt{x}$, $x_0 = 1$, $dx = \frac{1}{2}$; б) $f(x) = \arcsin \sqrt{x}$, $x_0 = \frac{3}{4}$, $dx = \frac{1}{4}$.

32. Найдите первую и вторую производные функции $f(x)$ в точке x_0 . Найдите значения первого и второго дифференциалов функции $f(x)$ в точке x_0 для указанного значения dx :

а) $f(x) = \arctg x$, $x_0 = 1$, $dx = \frac{1}{2}$; б) $f(x) = \arcsin x$, $x_0 = \frac{1}{2}$, $dx = \frac{1}{2}$;

в) $f(x) = \ln(1+x)$, $x_0 = 0$, $dx = \frac{1}{2}$; г) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 16$, $dx = 9$;

д) $f(x) = \tg x$, $x_0 = 0$, $dx = \frac{\pi}{4}$; е) $f(x) = \cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$, $dx = -\frac{\pi}{2}$.

33. Пусть $F(x) = \begin{cases} f(x), & x \leq x_0, \\ px + q, & x > x_0, \end{cases}$ причем функция $f(x)$ имеет левую производную в точке x_0 .

При каком выборе коэффициентов p и q функция $F(x)$ будет: а) непрерывной в точке x_0 ? б) дифференцируемой в точке x_0 ?

34. Пусть $F(x) = \begin{cases} px^2 + q, & x \leq 2, \\ \frac{4}{x}, & x > 2. \end{cases}$ При каком выборе коэффициентов p и q функция $F(x)$

будет: а) непрерывной; б) дифференцируемой на промежутке $(-\infty, +\infty)$?

35. Заменяя функцию (подберите ее самостоятельно) многочленом Тейлора $P_n(x, x_0)$, найдите приближенное значение числа A без калькулятора: а) $A = \sqrt[3]{1,01}$, $n = 2$;

б) $A = \arctg \frac{11}{10}$, $n = 2$; в) $A = e^{\frac{1}{5}}$, $n = 2$.

36. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$, заданной параметрически

уравнениями $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $0 \leq t \leq \pi$, при: а) $t = \frac{\pi}{4}$; б) $t = \frac{\pi}{2}$.

37. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$, заданной параметрически

уравнениями $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $-\infty < t < +\infty$, при: а) $t = \frac{\pi}{4}$; б) $t = \frac{\pi}{2}$.

38. Найдите дифференциал n -го порядка функции $f(x)$: а) $f(x) = \ln(1+x)$; б) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$;

в) $f(x) = x^{n-1} + x^n + x^{n+1}$; г) $f(x) = e^{3x+2}$.

39. Найдите дифференциал n -го порядка функции $f(x)$ для указанного n :

а) $f(x) = x^2 \sin 2x$, $n = 20$; б) $f(x) = xe^{5x}$, $n = 11$; в) $f(x) = x^2 \ln(1+x)$, $n = 12$.

40. Найдите точку c в формуле конечных приращений Лагранжа $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ для

$$\text{функции } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(3 - x^2), & 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{x}, & 1 \leq x \leq \infty \end{cases} \quad \text{на сегменте } [0; 2].$$

41. Используя правило Лопиталя, найдите: а) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x - a}$; б) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^x - a^a}{x - a}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} x - \cos x}{x^2}$;

г) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \operatorname{ctg} 2x$; д) $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln(\sin \alpha x)}{\ln(\sin \beta x)}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

42. Напишите формулу Тейлора с многочленом Тейлора порядка n и остаточным членом в форме Пеано с центром разложения в точке x_0 для функций:

а) $f(x) = (2 + x)^3$, $x_0 = 1$, $n = 3$; б) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$, $n = 3$;

в) $f(x) = \sqrt{1 - x}$, $x_0 = 0,36$; $n = 2$; г) $f(x) = e^x$, $x_0 = 2$, $n = 3$;

д) $f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$, $n = 4$; е) $f(x) = \frac{1}{1 + x}$, $x_0 = 1$, $n = 4$.

43. Разложите по формуле Маклорена до члена указанного порядка n включительно следующие функции: а) $f(x) = \sin(\sin x)$, $n = 3$; б) $f(x) = \ln \cos x$, $n = 4$; в) $f(x) = e^{2x - x^2}$, $n = 3$;

г) $f(x) = \ln \frac{\sin x}{x}$, $n = 4$; д) $\sqrt{4 + x}$, $n = 2$.

44. Найдите значение многочлена Тейлора $P_n(x, x_0)$ функции $f(x)$ для указанных значений x_0 , x и n :

а) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 8$, $x = 9$, $n = 2$;

б) $f(x) = \ln(1 + x)$, $x_0 = 0$, $x = \frac{1}{10}$, $n = 3$;

в) $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$, $x = 1$, $n = 4$;

г) $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$, $x = 2$, $n = 5$.

45. Напишите выражение остаточного члена $R_{n+1}(x, x_0)$ в форме Лагранжа формулы Тейлора для функции $f(x)$ для указанных значений x_0 , x и n :

а) $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$, $x = 1$, $n = 3$;

б) $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$, $x = 2$, $n = 5$;

в) $f(x) = \ln(1 + x)$, $x_0 = 0$, $x = \frac{1}{10}$, $n = 3$.

46. Найдите: а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4}$; б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^x - x^2}{x - 2}$; в) $\lim_{x \rightarrow e} \frac{e^x - x^e}{(x - e)^2}$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - 2 \operatorname{tg} x}{\ln(1 + x^3)}$;

д) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{3/2} (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x})$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{2x^2}$; ж) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$;

з) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \sin x} \right)$.

47. Найдите промежутки возрастания и убывания функции $f(x)$, точки локального экстремума, промежутки сохранения направления выпуклости, точки перегиба. Нарисуйте эскиз графика функции: а) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9$; б) $f(x) = x \ln x$; в) $f(x) = x^2 \ln x$; г) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$;

д) $f(x) = \sqrt{x}e^{-x}$; е) $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$; ж) $f(x) = x^2(5-x)^3$.

48. Найдите промежутки возрастания и убывания функции $f(x)$, точки локального экстремума. Найдите наклонные асимптоты графика функции. Нарисуйте эскиз графика функции:

а) $f(x) = x \operatorname{arctg} x$; б) $f(x) = x \ln \frac{x+1}{x}$; в) $f(x) = x^2 \ln \frac{x+1}{x}$; г) $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$;

д) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$; е) $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$; ж) $f(x) = x \cos \frac{1}{\sqrt{x}}$; з) $f(x) = \sqrt[5]{x^2(5-x)^3}$;

и) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{(x-3)^5}{x^2}}$.