МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Российский химико-технологический университет
имени Д. И. Менделеева

СБОРНИК ЗАДАНИЙ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

ТОМ I

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ И НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ЭЛЕМЕНТЫ АЛГЕБРЫ. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ. РЯДЫ

Утверждено Редакционным советом
университета в качестве учебного пособия

Москва
2019

УДК 517 (075)
ББК 22.161.1
С23

Авторы: Е. Г. Рудаковская, В. В. Осипчик, О. В. Аверина, Т. Ф. Бурухина, К. А. Иншакова, М. А. Меладзе, Е. Ю. Напеденина, Ю. Т. Напеденин, В. Л. Орлова, Т. В. Ригер, А. Н. Шайкин

Рецензенты:
Доктор физико-математических наук, профессор Российского государственного социального университета
М. А. Чахкиев
Доктор технических наук, профессор Российского химико-технологического университета имени Д. И. Менделеева
Т. Н. Гартман

С23 **Сборник заданий по высшей математике для самостоятельной работы студентов: в 2-х томах: учеб. пособие. Т. I.** Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной и нескольких переменных. Элементы алгебры. Обыкновенные дифференциальные уравнения и системы. Ряды / Е. Г. Рудаковская, В. В. Осипчик, О. В. Аверина, Т. Ф. Бурухина, К. А. Иншакова, М. А. Меладзе, Е. Ю. Напеденина, Ю. Т. Напеденин, В. Л. Орлова, Т. В. Ригер, А. Н. Шайкин; под ред. Е. Г. Рудаковской. – М.: РХТУ им. Д. И. Менделеева, 2019. – 224 с.
ISBN 978-5-7237-1702-2

В сборнике заданий по высшей математике для самостоятельной работы студентов подобраны задачи и примеры, охватывающие все разделы программы по дисциплине «Математика» в соответствии с ФГОС 3 поколения. По каждому разделу приведены варианты типовых заданий с подробным решением, содержащим основные определения, формулы, алгоритм решения конкретной задачи и ответ, а также 30 вариантов индивидуальных заданий.

Предназначено для самостоятельной работы студентов с целью закрепления полученных навыков и подготовки к контрольным работам, зачетам и экзаменам.

УДК 517 (075)
ББК 22.161.1

ISBN 978-5-7237-1702-2 (Т. I)
ISBN 978-5-7237-1701-5

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

В сборнике заданий по высшей математике для самостоятельной работы студентов приведены задачи и примеры, охватывающие все разделы программы по дисциплине «Математика»: элементы алгебры, включающие векторы, аналитическую геометрию, матричное исчисление; предел функции, дифференциальное исчисление функции одной переменной, исследование функции; интегральное исчисление функции одной переменной, приложения определенного интеграла; дифференциальное исчисление функции многих переменных; интегральное исчисление функции многих переменных; ОДУ I порядка и задачи, приводящие к составлению ОДУ; ОДУ II порядка и системы ДУ; числовые и функциональные ряды; теория вероятностей; математическая статистика; уравнения в частных производных.

В каждом разделе подобраны типовые примеры и задачи, для решения которых студент должен владеть основными понятиями и теоремами курса, а также прочими навыками, полученными на семинарских занятиях под руководством преподавателя.

Настоящее пособие предназначено для самостоятельной работы студентов с целью закрепления полученных навыков и подготовки к контрольным работам, зачетам и экзаменам.

Для этого в каждом разделе приведен вариант типовых заданий по высшей математике для самостоятельной работы студентов с подробным решением, содержащим основные определения, формулы, алгоритм решения конкретной задачи и ответ. После чего предложены 30 вариантов индивидуальных заданий для каждого студента учебной группы. Это позволяет повысить эффективность самостоятельной работы студентов очного отделения, а также помогает в освоении курса студентами заочного отделения.

Задания по высшей математике для самостоятельной работы студентов, приведенные в настоящем сборнике, апробированы в течение ряда лет на кафедре высшей математике РХТУ им. Д. И. Менделеева. Они содержат как оригинальные примеры и задачи авторов, так и типовые задачи из известных пособий, таких как: Демидович Б.П. «Сборник задач и упражнений по математическому анализу», Минорский В.П. «Сборник задач по высшей математике», Данко П.Е. и др. «Высшая математика в упражнениях и задачах», Филиппов А.Ф. «Дифференциальные уравнения», Гмурман В.Е. «Теория вероятностей и математическая статистика», а также из учебно-методических пособий, созданных на кафедре высшей математики РХТУ им. Д. И. Менделеева.

1. ЗАДАНИЯ ПО ТЕМЕ: ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ

Примерный вариант заданий с решением

Найти предел функции:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-2x^2+2\sqrt[3]{x^2}-4}{3x-4x^2-8x^3+3x\sqrt{x}}$
2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{4-\sqrt{5x+1}}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x-2}-\sqrt{x^2-2x+3}\right)$
4. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2+4x-4}{16-2x-5x^2}$
5. $\lim\limits_{x\to 4-0}(x^2-16)\cdot\ln(4-x)$
6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+11}{4x+17}\right)^{5-8x}$
7. $\lim\limits_{x\to +0}(\sin 3x)^{\operatorname{tg} 9x}$
8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-\cos 3x}{\arcsin\dfrac{x}{2}}$

Продифференцировать функцию:

9. $y=\left(3^{\operatorname{ctg}\frac{2x}{5}}-\operatorname{tg}^4\frac{3}{2\sqrt{x}}\right)\cdot\log_2(3x-5);\ \ y'$–?
10. $y=\frac{\cos\sqrt{3x}+\arccos(2x-1)}{\operatorname{tg}(2-5x^2)};\ dy$–?
11. Составить уравнение касательной к графику функции $y=4x-3x^2+2$, перпендикулярной прямой $x-2y+5=0$.
12. Показать, что функция $y=4e^{-2x}\sin 4x$ является решением дифференциального уравнения $y''+4y'+20y=0$.
13. Тело движется вдоль оси *Ox* по закону $x(t)=t^3+2t^2+5t$. Найти скорость и ускорение в момент времени $t=2$.
14. Исследовать функцию $y=\frac{x^3}{x^2-4}$ и построить ее график.

Решение

1. $$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3-2x^2+2\sqrt[3]{x^2}-4}{3x-4x^2-8x^3+3x\sqrt{x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\left|\begin{matrix}\text{разделим числитель}\\ \text{и знаменатель дроби на } x^3\end{matrix}\right|=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{5-\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2\sqrt[3]{x}}-\dfrac{4}{x^3}}{\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{4}{x}-8+\dfrac{3}{x\sqrt{x}}}=-\frac{5}{8}.$$

2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{4-\sqrt{5x+1}}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\left|\begin{matrix}\text{домножим числитель и знаменатель}\\ \text{дроби}\\ \text{на сопряженное выражение}\end{matrix}\right|=$

$=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x-1)\cdot\left(4+\sqrt{5x+1}\right)}{\left(4-\sqrt{5x+1}\right)\cdot\left(4+\sqrt{5x+1}\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x-1)\cdot\left(4+\sqrt{5x+1}\right)}{(16-5x-1)}=$

$=\lim\limits_{x\to 3}\left(4+\sqrt{5x+1}\right)\cdot\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x-1)}{15-5x}=$

$=(4+\sqrt{16})\cdot\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)\cdot(x-1)}{-5(x-3)}=8\cdot\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-1}{-5}=-\dfrac{16}{5}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x-2}-\sqrt{x^2-2x+3}\right)=[\infty-\infty]=\left|\begin{matrix}\text{приведем к виду}\\ \text{дроби, домножив}\\ \text{и разделив на}\\ \text{сопряженное}\\ \text{выражение}\end{matrix}\right|=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+3x-2}-\sqrt{x^2-2x+3}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+3x-2}+\sqrt{x^2-2x+3}\right)}{\sqrt{x^2+3x-2}+\sqrt{x^2-2x+3}}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x-2-(x^2-2x+3)}{\sqrt{x^2+3x-2}+\sqrt{x^2-2x+3}}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x-5}{\sqrt{x^2+3x-2}+\sqrt{x^2-2x+3}}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\left|\begin{matrix}\text{разделим числитель и}\\ \text{знаменатель дроби на } x\end{matrix}\right|=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\cdot\left(5-\dfrac{5}{x}\right)}{|x|\cdot\left(\sqrt{1+\dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{x^2}}+\sqrt{1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}}\right)}=\dfrac{5}{2}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{|x|}=\begin{cases}\dfrac{5}{2}\ \text{при } x\to+\infty\\ -\dfrac{5}{2}\ \text{при } x\to-\infty\end{cases}$

4. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2+4x-4}{16-2x-5x^2}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\left|\begin{matrix}\text{разложим}\\ \text{многочлены}\\ \text{на множители}\end{matrix}\right|=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3\cdot(x+2)\cdot\left(x-\dfrac{2}{3}\right)}{-5\cdot(x+2)\cdot\left(x-\dfrac{8}{5}\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x-2}{8-5x}=\dfrac{-8}{18}=\dfrac{-4}{9}.$

5. $\lim\limits_{x\to 4-0}(x^2-16)\cdot\ln(4-x)=[0\cdot\infty]=\lim\limits_{x\to 4-0}\dfrac{\ln(4-x)}{\dfrac{1}{x^2-16}}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\left|\begin{matrix}\text{раскроем}\\ \text{неопреде-}\\ \text{ленность}\\ \text{по}\\ \text{правилу}\\ \text{Лопиталя}\end{matrix}\right|=$

$$= \lim_{x\to 4-0} \frac{(\ln(4-x))'}{\left(\frac{1}{x^2-16}\right)'} = \lim_{x\to 4-0} \frac{\frac{1}{4-x}\cdot(-1)}{-\frac{1}{(x^2-16)^2}\cdot 2x} = \lim_{x\to 4-0} \frac{(x-4)^2\cdot(x+4)^2}{2x\cdot(x-4)} =$$

$$= \lim_{x\to 4-0} \frac{(x-4)\cdot(x+4)^2}{2x} = \frac{0\cdot 64}{8} = 0.$$

6. $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x+11}{4x+17}\right)^{5-8x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x+17-6}{4x+17}\right)^{5-8x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-6}{4x+17}\right)^{5-8x} =$$

$$= [1^\infty] = \left|\begin{array}{c} \text{используем второй} \\ \text{замечательный предел} \\ \dfrac{-6}{4x+17} = t;\, t\to 0 \text{ при } x\to\infty \\ 4x+17 = -\dfrac{6}{t};\, x = \dfrac{1}{4}\cdot\left(-\dfrac{6}{t}-17\right) \end{array}\right| = \lim_{t\to o}(1+t)^{5+2\cdot\left(\frac{6}{t}+17\right)} =$$

$$= \lim_{t\to o}(1+t)^{\frac{12}{t}+39} = \lim_{t\to o}\left((1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^{12}\cdot\lim_{t\to o}(1+t)^{39} = e^{12}\cdot 1^{39} = e^{12}$$

7. $$\lim_{x\to +0}(\sin 3x)^{\operatorname{tg} 9x} = [0^0] = \lim_{x\to +0} e^{\ln(\sin 3x)^{\operatorname{tg} 9x}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to +0}\operatorname{tg} 9x\cdot\ln(\sin 3x)} = (*) = e^0 = 1.$$

$$(*)\left|\begin{array}{l} \text{Рассмотрим предел в показателе степени: } \lim\limits_{x\to +0}\operatorname{tg} 9x\cdot\ln(\sin 3x) = [0\cdot\infty] = \\ \quad = \lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\ln\sin 3x}{\operatorname{ctg} 9x} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to +0}\dfrac{(\ln\sin 3x)'}{(\operatorname{ctg} 9x)'} = \lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\frac{1}{\sin 3x}\cdot\cos 3x\cdot 3}{-\frac{1}{\sin^2 9x}\cdot 9} = \\ \quad = -\dfrac{1}{3}\cdot\lim\limits_{x\to +0}\cos 3x\cdot\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\sin^2 9x}{\sin 3x} = -\dfrac{1}{3}\cdot 1\cdot\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\sin^2 9x}{\sin 3x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \\ = -\dfrac{1}{3}\cdot\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{(\sin^2 9x)'}{(\sin 3x)'} = -\dfrac{1}{3}\cdot\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{2\sin 9x\cdot\cos 9x\cdot 9}{\cos 3x\cdot 3} = -\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2\cdot 0\cdot 1\cdot 9}{1\cdot 3} = 0 \end{array}\right|$$

8. $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{5x}-\cos 3x}{\arcsin\frac{x}{2}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \left|\begin{array}{c}\text{раскроем неопределенность} \\ \text{по правилу Лопиталя}\end{array}\right| =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(e^{5x}-\cos 3x)'}{\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)'} = \lim_{x\to 0}\frac{5e^{5x}+3\sin 3x}{\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{5\cdot e^0+3\cdot 0}{\frac{1}{\sqrt{1}}\cdot\frac{1}{2}} = 2\cdot(5+0) = 10$$

9. $y=\left(3^{\operatorname{ctg}\frac{2x}{5}}-\operatorname{tg}^4\frac{3}{2\sqrt{x}}\right)\cdot\log_2(3x-5);\quad y'-?$

Найдем производную сложной функции:

$$y'=\left(3^{\operatorname{ctg}\frac{2x}{5}}\cdot\ln3\cdot\frac{1}{\sin^2\left(\frac{2x}{5}\right)}\cdot\frac{2}{5}-4\operatorname{tg}^3\frac{3}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\cos^2\left(\frac{3}{2\sqrt{x}}\right)}\cdot\left(-\frac{3}{4\sqrt{x^3}}\right)\right)\cdot$$

$$\cdot\log_2(3x-5)+\frac{1\cdot3}{(3x-5)\ln2}\cdot\left(3^{\operatorname{ctg}\frac{2x}{5}}-\operatorname{tg}^4\frac{3}{2\sqrt{x}}\right)$$

10. $y=\dfrac{\cos\sqrt{3x}+\arccos(2x-1)}{\operatorname{tg}(2-5x^2)};\quad dy-?$

Найдем дифференциал функции по формуле $dy=y'(x)\cdot dx$. Тогда

$$dy=\left(\frac{\left(-\sin\sqrt{3x}\cdot\frac{1\cdot3}{2\sqrt{3x}}-\frac{2}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}\right)\cdot\operatorname{tg}(2-5x^2)}{\operatorname{tg}^2(2-5x^2)}-\right.$$

$$\left.-\frac{\left(\cos\sqrt{3x}+\arccos(2x-1)\right)\cdot\frac{-10x}{\cos^2(2-5x^2)}}{\operatorname{tg}^2(2-5x^2)}\right)dx$$

11. По условию касательная перпендикулярна заданной прямой l, следовательно, угловой коэффициент касательной $К_{кас}=-\frac{1}{К_l}$.

$l: y=\frac{x}{2}+\frac{5}{2}$. Таким образом, $К_l=\frac{1}{2}$, а $К_{кас}=-2$.

Известно, что $К_{кас}=y'(x_0)$, где x_0 – абсцисса точки касания. Для заданной функции $y'(x)=(4x-3x^2+2)'=4-6x$.

Найдем x_0 из уравнения $4-6\cdot x_0=-2 \Rightarrow x_0=1$. Вычислим $y_0=y(x_0)=y(1)=4-3+2=3$

Подставим найденные значения в уравнение касательной:

$$y-y_0=К_{кас}\cdot(x-x_0).$$

$$y-3=-2(x-1),\qquad y=-2x+5.$$

Ответ: $y=-2x+5$ – уравнение касательной.

12. Найдем первую и вторую производные данной функции, подставим их вместе с исходной функцией в уравнение и убедимся, что уравнение превратится в тождество.

$$y' = 4 \cdot (e^{-2x} \cdot (-2) \cdot \sin 4x + e^{-2x} \cdot \cos 4x \cdot 4) =$$
$$= -8e^{-2x} \cdot (\sin 4x - 2\cos 4x)$$
$$y'' = -8 \cdot (e^{-2x} \cdot (-2) \cdot (\sin 4x - 2\cos 4x) + e^{-2x} \cdot (4\cos 4x + 8\sin 4x)) =$$
$$= 16e^{-2x} \cdot (-3\sin 4x - 4\cos 4x).$$

Рассмотрим левую часть уравнения:

$$y'' + 4y' + 20y = 16e^{-2x} \cdot (-3\sin 4x - 4\cos 4x) +$$
$$+4 \cdot (-8) \cdot e^{-2x} \cdot (\sin 4x - 2\cos 4x) + 20 \cdot 4 \cdot e^{-2x} \sin 4x =$$
$$= e^{-2x} \cdot (-48\sin 4x - 64\cos 4x - 32\sin 4x + 64\cos 4x + 80\sin 4x) =$$
$$= e^{-2x} \cdot 0 = 0$$

Итак, уравнение принимает вид тождества $0 = 0$.

Следовательно, данная функция является решением уравнения.

13. Тело движется вдоль оси *Ox* по закону $x(t) = t^3 + 2t^2 + 5t$. Найти скорость $v(t)$ и ускорение $a(t)$ в момент времени $t = 2$.

$v(t) = x'(t) = 3t^2 + 4t + 5.$

$a(t) = x''(t) = 6t + 4.$

$v(2) = 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 5 = 25, a(2) = 6 \cdot 2 + 4 = 16.$

Ответ: $v(2) = 25;\ \ a(2) = 16.$

14. Исследовать функцию $y = \frac{x^3}{x^2-4}$ и построить ее график.

1) $D(y) = (-\infty; 2) \cup (-2; 2) \cup 2; +\infty)$

Найдем лево- и правосторонние пределы функции при $x \to 2$ и $x \to -2$

$$\lim_{x\to -2-0} \frac{x^3}{x^2-4} = \left[\frac{-8}{+0}\right] = -\infty, \lim_{x\to -2+0} \frac{x^3}{x^2-4} = \left[\frac{-8}{-0}\right] = +\infty,$$
$$\lim_{x\to 2-0} \frac{x^3}{x^2-4} = \left[\frac{8}{-0}\right] = -\infty, \lim_{x\to 2+0} \frac{x^3}{x^2-4} = \left[\frac{8}{+0}\right] = +\infty.$$

$x_1 = -2, x_2 = 2$ – точки разрыва II рода.

Прямые $x = -2$ и $x = 2$ являются вертикальными асимптотами.

2) Уравнение наклонных асимптот: $y = kx + b$, где $k = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ x\to-\infty}} \frac{f(x)}{x}$ и $b = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ x\to-\infty}} (f(x) - kx)$

$$k = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ x\to-\infty}} \frac{x^2}{x^2-4} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ x\to-\infty}} \frac{1}{1 - \frac{4}{x^2}} = 1,$$

$$b = \lim_{\substack{x \to +\infty \\ x \to -\infty}} \left(\frac{x^3}{x^2 - 4} - 1 \cdot x \right) = \lim_{\substack{x \to +\infty \\ x \to -\infty}} \frac{x^3 - x \cdot (x^2 - 4)}{x^2 - 4} =$$

$$= \lim_{\substack{x \to +\infty \\ x \to -\infty}} \frac{4x}{x^2 - 4} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{\substack{x \to +\infty \\ x \to -\infty}} \frac{\frac{4}{x}}{1 - \frac{4}{x^2}} = 0.$$

Следовательно, $y = x -$ наклонная асимптота при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$.

3) Точки пересечения графика с осями координат:

$c\ Ox$: $\begin{cases} y = 0 \\ y = \frac{x^3}{x^2 - 4} \end{cases}$; $\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$; $O(0; 0)$ $\qquad$ $c\ Oy$: $\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{x^3}{x^2 - 4} \end{cases}$; $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$; $O(0; 0)$

4) Исследуем функцию на четность / нечетность по определению:

$y(-x) = -y(x)$ – нечетная функция,

$y(-x) = y(x)$ – четная функция.

Рассмотрим $y(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 4} = \frac{-x^3}{x^2 - 4} = -y(x)$, следовательно, $y(x)$ – нечетная функция $\Rightarrow$ график симметричен относительно начала координат.

5) Функция не является периодической

6) Найдем критические точки функции по первой производной:

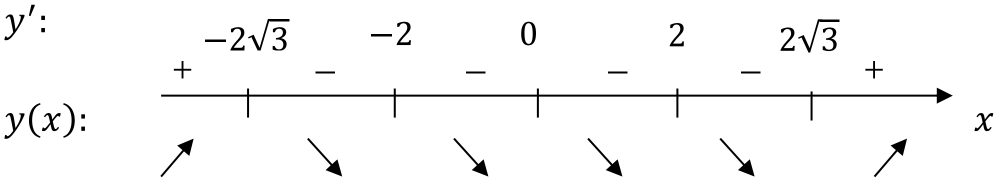
$$y' = \frac{3x^2 \cdot (x^2 - 4) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{3x^4 - 12x^2 - 2x^4}{(x^2 - 4)^2} = \frac{x^4 - 12x^2}{(x^2 - 4)^2} =$$

$$= \frac{x^2(x^2 - 12)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{x^2(x - 2\sqrt{3})(x + 2\sqrt{3})}{(x^2 - 4)^2}$$

Критические точки: а) $y'(x)$ не существует при $x_{1,2} = \pm 2 \notin D(y)$;

б) $y'(x) = 0$, при $x_3 = 0$, $x_{4,5} = \pm 2\sqrt{3}$.

7) Найдем интервалы монотонности:



8) Найдем точки экстремумов и экстремумы:

$x_{max} = -2\sqrt{3}, x_{min} = 2\sqrt{3}.$

$$y_{max} = y(-2\sqrt{3}) = \frac{-24\sqrt{3}}{12-4} = -3\sqrt{3}, y_{min} = y(2\sqrt{3}) = 3\sqrt{3}.$$

9) Найдем критичесие точки по второй производной:

$$y'' = \left(\frac{x^4 - 12x^2}{(x^2-4)^2}\right)' =$$

$$= \frac{(4x^3 - 24x)\cdot(x^2-4x)^2 - (x^4 - 12x^2)\cdot 2\cdot(x^2-4)\cdot 2x}{(x^2-4)^4} =$$

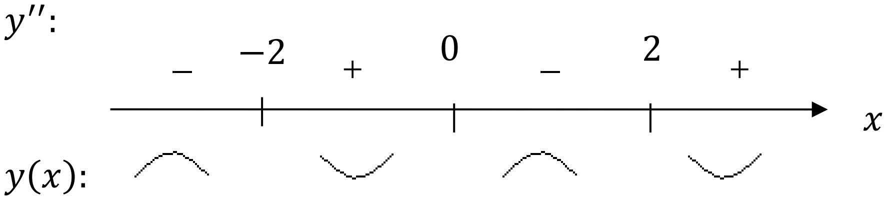
$$= \frac{(x^2-4)(4x^5 - 40x^3 + 96x - 4x^5 + 48x^3)}{(x^2-4)^4} =$$

$$= \frac{8x^3 + 96x}{(x^2-4)^3} = \frac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$$

Критические точки: а) y'' не существует при $x_{1,2} = \pm 2 \notin D(y)$

б) $y'' = 0$ при $x = 0$

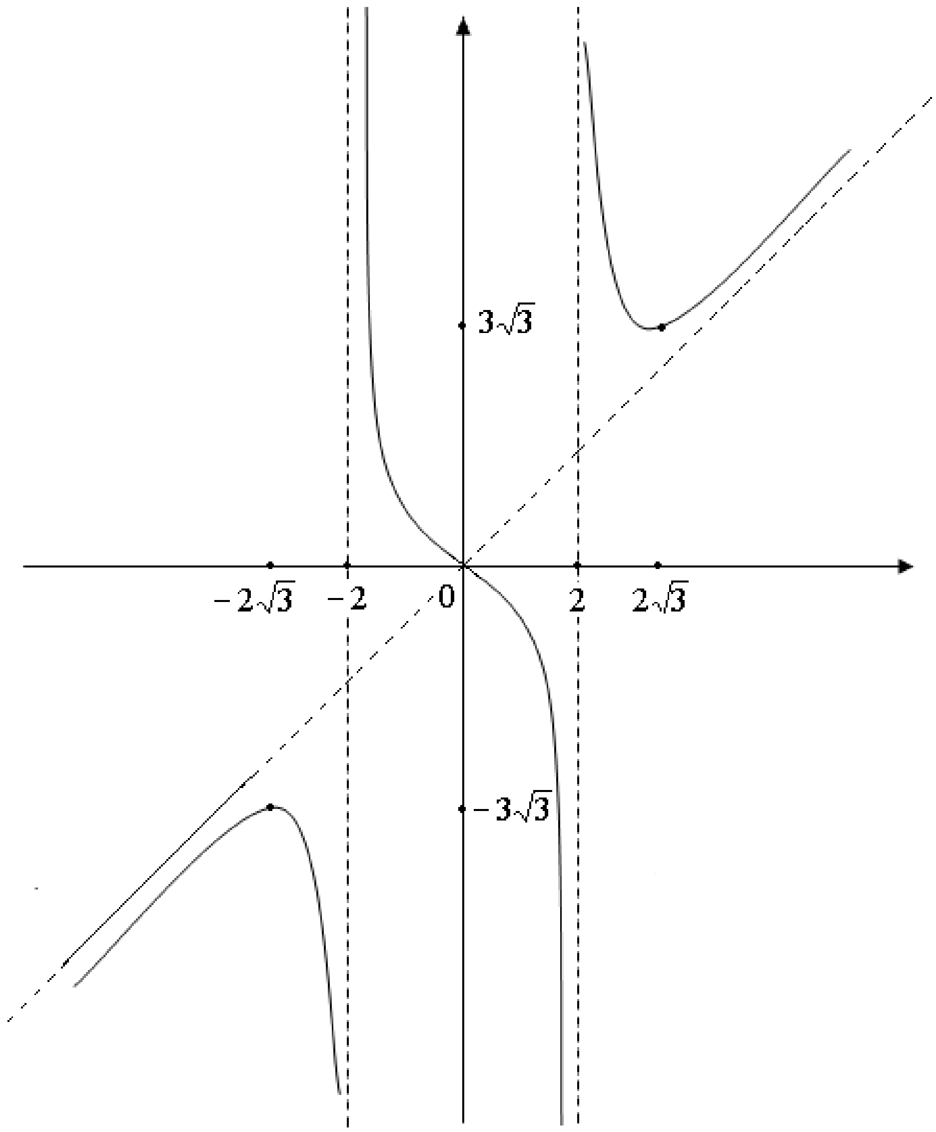
10) Интервалы выпуклости и вогнутости:



11) Точки перегиба: $x_0 = 0$, $y_0 = y(0) = 0$, $O\ (0; 0)$ $-$ точка перегиба

12) Сводная таблица результатов исследования:

x	$(-\infty; -2\sqrt{3})$	$-2\sqrt{3}$	$(-2\sqrt{3}; -2)$	-2	$(-2; 0)$	0	$(0; 2)$	2	$(2; 2\sqrt{3})$	$2\sqrt{3}$	$(2\sqrt{3}; +\infty)$
y'	$+$	0	$-$	Не сущ.	$-$	0	$-$	Не сущ.	$-$	0	$+$
y''	$-$	$-$	$-$	Не сущ.	$+$	0	$-$	Не сущ.	$+$	$+$	$+$
$y(x)$	$\nearrow$	$-3\sqrt{3}$	$\searrow$	Т.р.	$\searrow$	0	$\searrow$	Т.р.	$\searrow$	$3\sqrt{3}$	$\nearrow$



3√3
−2√3
−2
0
2
2√3
−3√3

Варианты заданий для самостоятельного решения (1–30)

Вариант 1

Найти предел функции:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3+12x^2-x+2}{8-17x^3-x\sqrt{3x^2}}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+5x}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+5x}-x)$

4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{x^3-1}$

5. $\lim\limits_{x\to 1}\ (x-1)\mathrm{tg}\dfrac{\pi x}{2}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x-8}\right)^{x+2}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\ (3x)^{\sin 7x}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{23x^2+\sin 3xe^x}{\mathrm{tg}7x+15x^3}$

Продифференцировать функции:

9. $y=\arcsin^6\sqrt{x}\ \cdot(6^{\mathrm{tg}\,5x}+\mathrm{tg}^4 5x);\ y'$–?

10. $y=\dfrac{\mathrm{arcctg}\,x+\mathrm{ctg}\,x}{\ln x};\ dy$–?

11. Составить уравнение касательной к графику функции $y=3x^2-7x$, образующей с осью Ox угол 135°.

12. Показать, что функция $y=e^{-x}\sin 2x$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y''+2y'+5y=0$.

13. Тело движется вдоль оси Ox по закону: $x(t)=\frac{t^3}{3}-2t^2+3t$. Найти скорость и ускорение в момент времени $t=3$.

14. Исследовать функцию $y=\frac{x^3-3x}{x^2-1}$ и построить ее график.

Вариант 2

Найти предел функции:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+5x^2+(7x)^3}{2+(x+3)^3}$

2. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{3x+1}-4}{x^2+4x-45}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{3x^2-26x+1}-\sqrt{3x^2+11}\right)$

4. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{-5x^2-3x+2}{7x^2+4x-3}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\cos 3x}{\mathrm{tg}\,5x\ \cdot\cos 2x}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+4}{5x-3}\right)^{1-x}$

7. $\lim\limits_{x\to +0}\left(\dfrac{1}{\ln x}\right)^{\ln^{-2}x}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\cos 3x}{\mathrm{tg}\,x}$

Продифференцировать функцию:

9. $y=\mathrm{ctg}\,e^{\sqrt{x}}\ \cdot\left(4^{\sin 5x}+\sin^4 5x\right);\ \ y'$–?

10. $y = \dfrac{\operatorname{arctg} x + \sqrt[3]{x}}{\cos x}$; dy–?

11. Составить уравнение касательной к графику функции $y = 3x^2 - 2x$, параллельной прямой $y = 4x + 3$.

12. Показать, что функция $y = e^{-x}\cos 3x$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y'' + 2y' + 10y = 0$.

13. Тело движется вдоль оси *Ox* по закону: $x(t) = \frac{t^3}{3} - \frac{3t^2}{2} + 2t$. Найти скорость и ускорение в момент времени $t = 4$.

14. Исследовать функцию $y = \frac{x^4}{x^3+1}$ и построить ее график.

Вариант 3

Найти предел функции:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^{11} - x^7 + 11}{3x^{11} - x^7 - 1}$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1 - 2x + 5x^2} - (1 + x)}{3x}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2 + 5x - 1} - \sqrt{x^2 - x + 1})$

4. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{-x^2 + 2x + 3}{5x^2 - 10x - 15}$

5. $\lim\limits_{x\to +0} \dfrac{\ln(2x + 1)}{\sin x}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3 - x}{7 - x}\right)^{8x-3}$

7. $\lim\limits_{x\to 0} (2x)^{x^2}$

8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - \operatorname{tg} x}{12x^2 - 8x}$

Продифференцировать функцию:

9. $y = \ln \operatorname{tg} 3x \cdot \left(7^{\sin(6x)} + \arcsin^7(6x)\right)$; y'–?

10. $y = \dfrac{\sqrt{x} + \operatorname{arcctg} x}{\cos\ x}$; dy–?

11. Составить уравнение касательной к графику функции $y = 3x^2 + x$, параллельной прямой $y = -5x + 1$.

12. Показать, что функция $y = e^{-x}\sin 3x$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y'' + 2y' + 10y = 0$.

13. Тело движется по закону: $x(t) = t^3 + 2t^2 + 4t$ вдоль оси *Ox*. Найти скорость и ускорение в момент времени $t = 3$.

20. Исследовать функцию $y = \frac{x^3}{3-x^2}$ и построить ее график.

Вариант 4

Найти предел функции:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{15x^3 - 8x^5 - 4}{6x^5 + 2x^4 + 5}$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2x^2 - 3x + 16} - 2(x - 2)}{4x}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-2x+3}-\sqrt{x^2+x-4})$

4. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-5x-2}{5x-2-2x^2}$

5. $\lim\limits_{x\to 2}(2-x)\cdot \operatorname{ctg} 4\pi x$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+7}\right)^{5-6x}$

7. $\lim\limits_{x\to 1}(\ln x)^{\sin 3\pi x}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-2^{\operatorname{tg} x}}{3x\cdot e^{5x}}$

Продифференцировать функцию:

9. $y=\operatorname{arcctg}(2-3x)\cdot\left(\log_2 \sin\frac{x}{2}-2^{\arcsin^2\sqrt{x}}\right);\ y'-?$

10. $y=\dfrac{\arccos 5x-\operatorname{ctg}\dfrac{2}{\sqrt{x}}}{\operatorname{tg}\dfrac{3x}{5}};\ dy-?$

11. Составить уравнение касательной к графику функции $y=5x^2-2x+3$, параллельной прямой $y=5-12x$.

12. Показать, что функция $y=4e^{-2x}\cdot\sin 3x$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y''+4y'+13y=0$.

13. Тело движется по закону: $x(t)=\frac{2t^3}{3}+\frac{t^2}{2}+3t$ вдоль оси *Ox*. Найти скорость и ускорение в момент времени $t=3$.

14. Исследовать функцию $y=\frac{x^4}{x^3-1}$ и построить ее график.

Вариант 5

Найти предел функции:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-2x^3+3}{5x^3-4x^2-6x^4}$

2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^2-2x)}{\sqrt{x^2-3}-x+1}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-3x+1}-\sqrt{x^2+x-5})$

4. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{27-x^3}{3x^2-5x-12}$

5. $\lim\limits_{x\to -2}(x^2-4)\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{\pi x}{2}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-2}{5x+9}\right)^{\frac{3x-4}{6}}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 4x)^{\operatorname{ctg} 3x}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 3x-x}{\sin^2 4x+5x}$

Продифференцировать функцию:

9. $\arcsin(2x+3)\cdot\left(4^{\operatorname{ctg} 3x}-\cos\frac{3x}{5}\right);\ y'-?$

10. $y=\dfrac{\dfrac{3}{\sqrt{2x}}-3\operatorname{arctg} 4x}{\ln(3x+2)}\ ;\ dy-?$

11. Составить уравнение касательной к графику функции $y=3x^2+x-2$, параллельной прямой $y=4-11x$.

12. Показать, что функция $y = 3e^{2x} \cdot \cos 5x$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y'' - 4y' + 29y = 0$.

13. Тело движется по закону: $x(t) = \frac{t^3}{3} + 3t^2 + 4t$ вдоль оси Ox. Найти скорость и ускорение в момент времени $t = 5$.

14. Исследовать функцию $y = \frac{x^2}{x^3 - 1}$ и построить ее график.

Вариант 6

Найти предел функции:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{7x^{\frac{13}{5}} - 2\sqrt{2}x^2 + 5}{-3x^{\frac{13}{5}} - \sqrt{x} + 7}$

2. $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{x^3 + 8}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2 - 7x + 1} - \sqrt{x^2 + 14x - 1}\right)$

4. $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{7x^2 - 15x + 2}{x^2 - 5x + 6}$

5. $\lim\limits_{x\to+0} x^2 \cdot \log_2 x$

6. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{4 - 3x}{34 - 3x}\right)^{5-21x}$

7. $\lim\limits_{x\to0} (\cos 3x)^{\frac{11}{x}}$

8. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\operatorname{tg} 2x + \sin 3x}{5x + x^2}$

Продифференцировать функцию:

9. $y = \ln(7x + 3) \cdot \left(5^{\sin 3x} + \sin^5 3x\right);\ y'-?$

10. $y = \dfrac{\arccos x + \sqrt{x}}{\sin x};\ dy-?$

11. Указать точку, в которой касательная к графику функции $y = x^2 + 2x - 3$, параллельна оси абсцисс.

12. Показать, что функция $y = e^{-3x}(2x + 1)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y'' + 6y' + 9y = 0$.

13. Тело массой 100 кг движется прямолинейно по закону: $S(t) = \frac{3t^2}{2} + \frac{t^3}{3}$. Определить кинетическую энергию $\left(\frac{mv^2}{2}\right)$ тела через 5 секунд после начала движения.

14. Исследовать функцию $y = \frac{3x^2 + 7x + 2}{(x+1)^2}$ и построить ее график.

Вариант 7

Найти предел функции:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-3x^{\frac{5}{2}} - x^{\frac{1}{2}} + 3}{8 - \sqrt{x} + 15x^{\frac{5}{2}}}$

2. $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{(x^2 + 2x - 15)}{\sqrt{5x + 1} - x - 1}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-7x+3}-\sqrt{x^2+7})$

4. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{3x^2-8x-28}{-2x^2+5x+18}$

5. $\lim\limits_{x\to 13}(x-13)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{13x-29}{13x-14}\right)^{11x+1}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\sin 2x}{\operatorname{tg}3x-x^2}$

Продифференцировать функцию:

9. $y=\arccos\sqrt{x+1}\cdot\ (5^{\operatorname{ctg}5x}+\operatorname{ctg}^3 5x); y'$–?

10. $y=\dfrac{\sin x+\log_4(3x+1)}{\operatorname{arctg}x}$; dy–?

11. В каких точках касательная к графику функции $y=x^3-12x^2+36x-1$ параллельна оси *Ox*.

12. Показать, что функция $y=e^{-x}(\cos 3x+\sin 3x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y''+2y'+10y=0$.

13. Точка движется по прямой по закону: $S(t)=5t^2-10t+1$. Определить скорость и ускорение точки в момент времени t = 2.

14. Исследовать функцию $y=\frac{x^3}{x^2-4}$ и построить ее график.

Вариант 8

Найти предел функции:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+3x^{\frac{7}{2}}+11x^{\frac{5}{2}}}{3x^{\frac{5}{2}}+3x^{\frac{3}{2}}-2}$

2. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt[3]{x^2-16}}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-7x+23})$

4. $\lim\limits_{x\to-10}\dfrac{4x^2+30x-100}{-x^2-5x+50}$

5. $\lim\limits_{x\to+0}\ln 13x\cdot\ \sin x$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{14-15x}{3-15x}\right)^{1+2x}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{tg}3x)^{\sin x}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-\cos 3x}{\operatorname{tg}5x}$

Продифференцировать функцию:

9. $y=\cos\sqrt{7x+3}\ \cdot\left(5^{\arcsin 4x}+\arcsin^5 4x\right); y'$–?

10. $y=\dfrac{3\operatorname{tg}2x}{\log_2 x-5e^x}$; dy–?

11. Определить угол наклона касательной к параболе $y=x^2+3x+2$ в точке пересечения параболы с осью абсцисс.

12. Показать, что функция $y=e^{-3x}(4x+2)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y''+6y'+9y=0$.

13. Точка движется вдоль оси Ox по закону: $x(t) = \frac{t^3}{3} - t^2 - 3t$. Определить скорость и ускорение точки в момент времени $t = 2$.

14. Исследовать функцию $y = \frac{4-x^2}{4+x^2}$ и построить ее график.

Вариант 9

Найти предел функции:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^3 - 4x^2 - \sqrt{3}}{15 - 2x^2 + \sqrt{31}x^3}$
2. $\lim\limits_{x\to-8} \dfrac{10 - x - 6\sqrt{1-x}}{x^2 + 8x}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2 + 7x} - \sqrt{x^2 + 1})$
4. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{5 - 3x - 2x^2}{3x^2 - 7x + 4}$
5. $\lim\limits_{x\to+0} (x - \sin x)\ln x$
6. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{27x - 8}{27x + 1}\right)^{\frac{x-1}{3}}$
7. $\lim\limits_{x\to+0} (\operatorname{tg} 5x)^{\sin 3x}$
8. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{5x^2 + 2x}{\sin x + \operatorname{tg} x}$

Продифференцировать функцию:

9. $y = \left(\arccos^3\sqrt{5x+1}\right) \cdot \left(8^{\operatorname{tg}\frac{x}{7}} + \operatorname{tg}^8 7x\right)$; y'–?

10. $y = \dfrac{\sqrt[3]{x} - \sin x}{\log_5 x}$; dy–?

11. Определить угол между осью абсцисс и касательной к параболе $y = x^2 + x + 5$, в точке пересечения параболы с осью ординат.

12. Показать, что функция $y = e^x \sin 4x$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y'' - 2y' + 17y = 0$.

13. Точка движется вдоль оси Ox по закону: $x(t) = t^3 + 3t^2 - 9t$. Определить скорость и ускорение точки в момент времени $t = 2$.

14. Исследовать функцию $y = \frac{x^3}{(x-2)^2}$ и построить ее график.

Вариант 10

Найти предел функции:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-x^{\frac{3}{2}} + 8\sqrt{x} + 13}{-\sqrt{2}x + 15x\sqrt{x}}$
2. $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{x^2 - 2x - 3}{\sqrt{3x-8} - x + 2}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2 - 7x + 14} - \sqrt{x^2 + 7x + 5})$
4. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^3 - 1}{x^4 - 1}$
5. $\lim\limits_{x\to+0} \sin 2x \cdot \ln x$
6. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3 - 2x}{7 - 2x}\right)^{14-x}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{tg} 5x)^{\sin 7x}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{2x\cdot \operatorname{tg} 2x}$

Продифференцировать функцию:

9. $y = \arcsin\sqrt{x}\cdot\left(9^{\sin 3x} + \sin^9 3x\right); y' -?$

10. $y = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{\log_3(2x+1)};\ dy -?$

11. В каких точках касательные к графику функции $y = x^3 + \frac{3x^2}{2} - 6x$ параллельны оси Ox?

12. Показать, что функция $y = e^{-x}\sin 4x$ является решением дифференциального уравнения $y'' + 2y' + 17y = 0$.

13. Тело движется вдоль оси Ox по закону: $x(t) = t^3 - 3t^2 - 9t$. Найти скорость и ускорение тела в момент времени $t = 3$.

14. Исследовать функцию $y = \frac{3-x^2}{x+2}$ и построить ее график.

Вариант 11

Найти предел функции:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{2}x^5+1}{-8x^5+4x^3-1}$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{2-\sqrt{5x-1}}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-23x+8}\right)$

4. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{7x^2-5x-12}{3x^2+8x+5}$

5. $\lim\limits_{x\to +0}\sin x\cdot \ln 2x$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{11x-7}{11x+5}\right)^{2x}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\cos x - x}{3x^2}$

Продифференцировать функцию:

9. $y = \sin(4x+1)\cdot(8^{\cos 3x} + \cos^8 3x);\ y' -?$

10. $y = \dfrac{\sqrt{x}+\operatorname{arctg} x}{\operatorname{tg} x}; dy -?$

11. Составить уравнение касательной к графику функции $y = 3x^2 - 2x$, образующей с осью Ox угол 45°.

12. Показать, что функция $y(x) = e^{-x}\cos 2x$ решением дифференциального уравнения $y'' + 2y' + 5y = 0$.

13. Тело движется вдоль оси Ox по закону: $x(t) = \frac{t^3}{3} - t^2 - 3t$. Найти скорость и ускорение в момент времени $t = 4$.

14. Исследовать функцию $y = \frac{x^3}{x^3+1}$ и построить ее график.

Вариант 12

Найти предел функции:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{23x-37x^2+15x^4}{3x^4-7x^3+29}$

2. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{x^2-8x}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+29x-14}-\sqrt{x^2-1})$

4. $\lim\limits_{x\to 11}\dfrac{x^2-10x-11}{(x-11)(x^2+3x+2)}$

5. $\lim\limits_{x\to 1}(4x-4)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-5}{x-7}\right)^{\frac{1-3x}{2}}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}(\sin 2x)^{3\operatorname{tg}7x}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x+4x^3}{-5\sin 18x+x^3}$

Продифференцировать функцию:

9. $y=\arcsin\sqrt{x}\cdot(5^{\operatorname{ctg}3x}+\operatorname{ctg}^5x);\ y'-?$

10. $y=\dfrac{\operatorname{tg}x+3^x}{\cos x};dy-?$

11. Составить уравнение касательной к графику функции $y=2x^2-3x$, параллельной прямой $y-5x-1=0$.

12. Показать, что функция $y(x)=(5x+6)e^{2x}$ является решением дифференциального уравнения $y''-4y'+4y=0$.

13. Тело движется вдоль оси Ox по закону: $x(t)=\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}-2t$. Найти скорость и ускорение в момент времени $t_0=3$.

14. Исследовать функцию $y=\frac{4x-12}{(x-2)^2}$ и построить ее график.

Вариант 13

Найти предел функции:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{6}x^{\frac{6}{5}}+x^2-13x^3}{1-71x^3}$

2. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-4x}{\sqrt{4+x}-\sqrt{2x}}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+24}-\sqrt{x^2-x+\sqrt{8}})$

4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{17x^2-24x+7}{3x^2+8x-11}$

5. $\lim\limits_{x\to 1}(x^3-1)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{76x-13}{76x+4}\right)^x$

7. $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{tg}13x)^{\sqrt{2}x}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{7x}-\cos 3x}{13x^3+\operatorname{tg}2x}$

Продифференцировать функцию:

9. $y=\ln(5x+6)\cdot(2^{\operatorname{tg}7x}+\operatorname{tg}^2 3x);y'-?$

10. $y=\dfrac{\cos x+\sqrt{x}}{\arccos x};\ dy-?$

11. Составить уравнение касательной к графику функции $y = 5x^2 - 6x + 2$, параллельной прямой $y = 4x - 7$.
12. Показать, что функция $y = (3x + 7)e^{-2x}$ является решением дифференциального уравнения $y'' + 4y' + 4y = 0$.
13. Тело движется вдоль оси *Ox* по закону: $x(t) = -3t + t^3$. Найти скорость и ускорение в момент времени $t = 2$.
14. Исследовать функцию $y = \frac{x^3+3x}{x^2+1}$ и построить ее график.

Вариант 14

Найти предел функции:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{3}x^{\frac{7}{6}} + \sqrt{x} - 14}{-5\sqrt{x} + 31x^{\frac{7}{6}}}$
2. $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{x^2 - 4}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2 - 17x + 37} - \sqrt{x^2 - 36x})$
4. $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{13x^2 - 7x - 20}{-5x^2 - 3x + 2}$
5. $\lim\limits_{x\to+0} (2x)^3 \cdot \ln 7x$
6. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{13x + 1}{13x - 1}\right)^{-5x+18}$
7. $\lim\limits_{x\to0} (\sqrt{5}x)^{\operatorname{tg} 7x}$
8. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\operatorname{tg} 5x - 2x}{24x^2 + 13x}$

Продифференцировать функцию:

9. $y = \ln\,(3x + 7) \cdot (3^{\cos 2x} + \sin^2 5x)$; y'–?
10. $y = \dfrac{2\operatorname{ctg} x}{3\ln x - 5e^x}$; dy–?
11. Составить уравнение касательной к графику функции $y = 2x^2 - 3x$, образующей с осью *Ox* угол 135° .
12. Проверить, является ли функция $y(x) = (4x + 3)e^{-x}$ решением дифференциального уравнения $y'' + 2y' + y = 0$.
13. Тело движется вдоль оси *Ox* по закону: $x(t) = \frac{t^3}{3} - \frac{3t^2}{2} + 2t$. Найти скорость и ускорение в момент времени $t = 3$. В какие моменты времени тело меняет направление движения?
14. Исследовать функцию $y = \frac{x^2-6x+9}{(x-1)^2}$ и построить ее график.

Вариант 15

Найти предел функции:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{17x^{\frac{19}{7}} + x^2 + 7}{9x^{\frac{19}{7}} - x + \sqrt{x}}$
2. $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{x^2 - 2x - 3}{\sqrt{3 + x} - \sqrt{2x}}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-5x+1}-\sqrt{x^2-11x-36})$

4. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-3x-9}{5x^2+5x-60}$

5. $\lim\limits_{x\to +0} x^5\cdot\ln 27x$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x+7}\right)^{2-5x}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{\cos x-1}}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+7x)}{9x}$

Продифференцировать функцию:

9. $y=\left(\cos\sqrt{3x+2}\,\right)\cdot\left(3^{\sin 2x}+\sin^2 x\right);\ y'-?$

10. $y=\dfrac{\sqrt{x}+\arcsin x}{\ln x};\ dy-?$

11. Составить уравнение касательной к графику функции $y=2x^2-3x$, образующей с осью *Ox* угол 45°.

12. Проверить, является ли функция $y(x)=(3x+1)e^{-x}$ решением дифференциального уравнения $y''+2y'+y=0$.

13. Тело движется вдоль оси *Ox* по закону: $x(t)=\frac{t^3}{3}-2t^2+3t$. Найти скорость и ускорение в момент времени $t_0=5$. В какие моменты времени тело меняет направление движения?

14. Исследовать функцию $y=\frac{2x^3}{x^2-3}$ и построить ее график.

Вариант 16

Найти предел функции:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{23x^8-17x^6+1}{-3+8x^2+7x^8}$

2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{3-\sqrt{7+x}}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-5x+3}-\sqrt{x^2+x-7})$

4. $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}\dfrac{x^2-2}{x^4-3x^2+2}$

5. $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x+8}{7x-1}\right)^{7x+1}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}(\sin 3x)^{\sin 5x}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{8x}-1}{\cos^2 5x-1}$

Продифференцировать функцию:

9. $y(x)=\ln(3x-1)\cdot\left(\arccos^5\frac{2}{x}-3^{\sin x}\right);\ y'-?$

10. $y(x)=\dfrac{2x+\operatorname{ctg} x}{e^{\operatorname{arctg} x}};\ dy-?$

11. Составить уравнение касательной к графику функции $f(x)=2x^2+4x+1$, параллельной оси *Ox*.

12. Проверить, является ли функция $y(x)=5e^{-x}\sin 2x$ решением дифференциального уравнения $y''+2y'+5y=0$.

13. Тело движется вдоль оси Ox по закону: $x(t)=\frac{t^3}{3}+2t^2-5t$. Найти скорость и ускорение в момент времени $t_0=2$.

14. Исследовать функцию $y=\frac{x^2+4x+1}{x^2}$ и построить ее график.

Вариант 17

Найти предел функции:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^5-14x^3-27}{149-31x^3-77x^5}$
2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2x}}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-17x}-\sqrt{x^2-5})$
4. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{7x^2-13x-2}{-2x^2-x+10}$
5. $\lim\limits_{x\to 10}(x-10)\operatorname{ctg}\pi x$
6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-5}{x+13}\right)^{-8x+2}$
7. $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{tg}17x)^{-5x}$
8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 17x-1}{\operatorname{tg}x-\sin^3 5x}$

Продифференцировать функцию:

9. $y(x)=\arccos(1-x)\cdot\left(3^{\sin x}-\operatorname{arctgx}^2 x\right)$; y'–?

10. $y(x)=\dfrac{e^{\arcsin x}}{3x+\operatorname{tg}x}$; dy–?

11. Составить уравнение касательной к графику функции $f(x)=2x^2-$ $-3x+2$, параллельной прямой $5x-y=1$.

12. Проверить, является ли функция $y(x)=2e^{-x}\cos 2x$ решением дифференциального уравнения $y''+2y'+5y=0$.

13. Тело движется вдоль оси Ox по закону: $x(t)=\frac{t^3}{3}+\frac{3t^2}{2}-4t$. Найти скорость и ускорение в момент времени $t_0=2$.

14. Исследовать функцию $y=\frac{x^3-3x}{x^2-1}$ и построить ее график.

Вариант 18

Найти предел функции:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{5}x^{\frac{7}{2}}+13x^{\frac{9}{2}}-8x^{\frac{11}{2}}}{-\sqrt{x}-19x^{\frac{3}{2}}-23x^{\frac{11}{2}}}$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-3x}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-2x+1}-\sqrt{x^2-17})$
4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-5x^2+13x-8}{2x^2+21x-23}$
5. $\lim\limits_{x\to +0}\sin 7x\cdot\ln 2x$
6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{11-11x}{12-11x}\right)^{11-11x}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}(13x)^{\text{tg}21x}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{18x}}{x\cos 2x}$

Продифференцировать функцию:

9. $y(x)=\cos^3\frac{x}{2}\cdot\left(\arcsin^3\sqrt{x+1}-2^{\text{tg}x}\right);\ y'-?$

10. $y(x)=\dfrac{\sin x-4x}{e^{\arccos x}};\ dy-?$

11. Составить уравнение касательной к графику функции $f(x)=3x^2+$ $+2x-4$, параллельной оси *Ox*.

12. Проверить, является ли функция $y(x)=2e^{-x}\sin 2x$ решением дифференциального уравнения $y''+2y'+5y=0$.

13. Тело движется вдоль оси *Ox* по закону: $x(t)=\frac{t^3}{3}-\frac{5t^2}{2}+6t$. Найти скорость и ускорение в момент времени $t_0=1$.

14. Исследовать функцию $y=\frac{(x+1)^2}{2(x-2)}$ и построить ее график.

Вариант 19

Найти предел функции:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{13x^2+14x^3+15x^4}{\sqrt{2}x^4-13\sqrt{x}}$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{\sqrt{1+x}-\sqrt{2x}}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-17x+37}-\sqrt{x^2-1}\right)$

4. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-3x^2+4x+4}{2x^2+7x-22}$

5. $\lim\limits_{x\to +0}\sin 3x\cdot\ln x$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{14-13x}{21-13x}\right)^{-5x}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}(\sin 21x)^{3x}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x x^2-x}{\sin 17x}$

Продифференцировать функцию:

9. $y(x)=\arcsin x\cdot\left(\log_3 x-arcctgx^5\frac{3}{x}\right);\ y'-?$

10. $y(x)=\dfrac{e^{\text{arctg}\,x}}{\cos x+3x};\ dy-?$

11. Составить уравнение касательной к графику функции $f(x)=3x-x^2+2$, образующей с осью *Ox* угол 45°.

12. Проверить, является ли функция $y(x)=-e^{-x}\cos 2x$ решением дифференциального уравнения $y''+2y'+5y=0$.

13. Тело движется вдоль оси Ox по закону: $x(t)=\frac{t^3}{3}-3t^2+8t$. Найти скорость и ускорение в момент времени $t_0=3$.

14. Исследовать функцию $y=\frac{x^3}{x^4-1}$ и построить ее график.

Вариант 20

Найти предел функции:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{13x^7+21x^5+16}{-4x^7-3x^3+2}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+3x+x^2}-2}{x+x^2}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-7x+24}-\sqrt{x^2+26x-13}\right)$

4. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-27x+50}{3x^2-5x-2}$

5. $\lim\limits_{x\to+0}\sin 13x\cdot\ln 27x$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{13-5x}{16-5x}\right)^{24x+8}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}(\sin 5x)^{\operatorname{tg} 13x}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{13x}-\cos x}{3x+\operatorname{tg}5x}$

Продифференцировать функцию:

9. $y(x)=\operatorname{arctg}3x\cdot\left(\operatorname{ctg}\sqrt{2-x}-\log_3{}^3x\right);\ y'$–?

10. $y(x)=\dfrac{\operatorname{tg}x-5x}{e^{\arcsin x}};\ dy$–?

11. Составить уравнение касательной к графику функции $\mathrm{f}(x)=3+2x-x^2$, перпендикулярной прямой $4y+x=1$.

12. Проверить, является ли функция $y(x)=3e^{-x}\sin 2x$ решением дифференциального уравнения $y''+2y'+5y=0$.

13. Тело движется вдоль оси *Ox* по закону: $x(t)=\frac{t^3}{3}-\frac{3t^2}{2}+12t$. Найти скорость и ускорение в момент времени $t_0=1$.

14. Исследовать функцию $y=\frac{x^2+3}{x-1}$ и построить ее график.

Вариант 21

Найти предел функции:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-2x^3+3x^7}{13x^7-x+3x^2}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-2x+3x^2}+x-1}{x}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-17x+8}-\sqrt{x^2+11x-1}\right)$

4. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5x^2-8x-4}{-3x^2+x+10}$

5. $\lim\limits_{x\to+0}\sin 9x\cdot\ln 13x$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-7}\right)^{3x}$

7. $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)^{\sin\pi x}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{-\sqrt{3}x^2}$

Продифференцировать функцию:

9. $y(x)=\operatorname{arcctg}(1-2x)\cdot\left(\arcsin\frac{3}{x}-\log_2{}^5x\right);\ y'$–?

10. $y(x)=\dfrac{e^{\operatorname{arctg}x}}{2x+\sin x};\ dy$–?

11. Составить уравнение касательной к графику функции $f(x) = 3x^2 + x + 2$, параллельной прямой $5x + y = 2$.
12. Проверить, является ли функция $y(x) = -e^{-x}\sin 2x$ решением дифференциального уравнения $y'' + 2y' + 5y = 0$.
13. Тело движется вдоль оси *Ox* по закону: $x(t) = \frac{t^3}{3} + 2t^2 - 5t$. Найти скорость и ускорение в момент времени $t_0 = 3$.
14. Исследовать функцию $y = \frac{x^2}{(x-3)^2}$ и построить ее график.

Вариант 22

Найти предел функции:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{27}x^3 - 3x^2 + x}{2x^3 - 7x + 11}$
2. $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{\sqrt{9+2x} - 5}{x^2 - 8x}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2 - 3x + 71} - \sqrt{x^2 + 8x - 3})$
4. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{-x^2 + 6x - 9}{-2x^2 + 3x + 9}$
5. $\lim\limits_{x\to +0} \operatorname{tg} 3x \cdot \ln 74x$
6. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{5 - 8x}{4 - 8x}\right)^{2x+23}$
7. $\lim\limits_{x\to 2} (x^2 - 4)^{\sin \pi x}$
8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(2x+1)}{e^{3x} - \cos 2x}$

Продифференцировать функцию:

9. $y(x) = \operatorname{arctg}^3 x \cdot \left(\operatorname{ctg}\sqrt{2-x} - \log_3{}^3 x\right);\ y'$–?
10. $y(x) = \dfrac{\operatorname{ctg} x + 4x}{e^{\arcsin x}};\ dy$–?

11. Составить уравнение касательной к графику функции $f(x) = -5x^2 + x + 4$, образующей с осью *Ox* угол 45°.
12. Проверить, является ли функция $y(x) = 5e^{-x}\cos 2x$ решением дифференциального уравнения $y'' + 2y' + 5y = 0$.
13. Тело движется вдоль оси *Ox* по закону: $x(t) = \frac{t^3}{3} + \frac{3t^2}{2} - 4t$. Найти скорость и ускорение в момент времени $t_0 = 3$.
14. Исследовать функцию $y = \frac{x^3}{(x+4)^2}$ и построить ее график.

Вариант 23

Найти предел функции:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^8 + 2x^2 - 5}{-\sqrt{3}x^8 - x^2 - 2x}$
2. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{x^2 + 2x}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1})$
4. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{7x^2 - 5x - 2}{2 - 13x + 11x^2}$

5. $\lim\limits_{x\to+0}(1-\cos x)\operatorname{ctg} x$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3-7x}{14-7x}\right)^{3-7x}$

7. $\lim\limits_{x\to0}(\sin 5x)^{\operatorname{tg} 31x}$

8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x\cos 5x-e^{3x}}{\sin x}$

Продифференцировать функцию:

9. $y(x)=\arccos\frac{x}{2}\cdot\left(7^{\sin x}-\operatorname{arctg}^8\frac{3}{x}\right);\ y'-?$

10. $y(x)=\dfrac{3x-\operatorname{tg} x}{e^{\arcsin x}};\ dy-?$

11. Составить уравнение касательной к графику функции $f(x)=4x^2-3x+2$, перпендикулярной прямой $5y+x=1$.

12. Проверить, является ли функция $y(x)=-2e^{-x}\sin 2x$ решением дифференциального уравнения $y''+2y'+5y=0$.

13. Тело движется вдоль оси *Ox* по закону: $x(t)=\frac{t^3}{3}-\frac{5t^2}{2}+6t$. Найти скорость и ускорение в момент времени $t_0=4$.

14. Исследовать функцию $y=\frac{x}{x^3+2}$ и построить ее график.

Вариант 24

Найти предел функции:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{13x^7+21x^5-\sqrt{3}}{\sqrt{7}x^7-3x^3-27}$

2. $\lim\limits_{x\to-8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{x^2+8x}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1})$

4. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2x^2-15x-38}{3x^2-17x-46}$

5. $\lim\limits_{x\to0}(1-\cos^2 2x)\cdot\operatorname{ctg} 11x$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5-12x}{7-12x}\right)^{5-3x}$

7. $\lim\limits_{x\to0}(\sin^2 3x)^{x^2}$

8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin 5x}{e^{3x}-e^{4x}}$

Продифференцировать функцию:

9. $y(x)=\operatorname{arctg} 3x\cdot\left(4^{\operatorname{ctg} x}-\arccos^6\frac{3}{x}\right);\ y'-?$

10. $y(x)=\dfrac{\sin x-5x}{e^{\operatorname{arctg} x}};\ dy-?$

11. Составить уравнение касательной к графику функции $f(x)=3x-2x^2-3$, образующей с осью *Ox* угол 135°.

12. Проверить, является ли функция $y(x)=-3e^{-x}\cos 2x$ решением дифференциального уравнения $y''+2y'+5y=0$.

13. Тело движется вдоль оси *Ox* по закону: $x(t)=\frac{t^3}{3}-3t^2+8t$. Найти скорость и ускорение в момент времени $t_0=1$.

14. Исследовать функцию $y = \frac{2x^3}{x^2-1}$ и построить ее график.

Вариант 25

Найти предел функции:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{15x^3 - 14x - 1}{3x^2 - 5x^3}$
2. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2 - 4x + 3}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2-5} - \sqrt{x^2-x-5})$
4. $\lim\limits_{x\to 10} \dfrac{2x^2 - 7x - 130}{-3x^2 + 15x + 150}$
5. $\lim\limits_{x\to 0} (1 - \cos 7x) \cdot \operatorname{ctg} 3x$
6. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{1-x}{11-x}\right)^{2-3x}$
7. $\lim\limits_{x\to 0} (\sin 5x)^{x^2}$
8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{15x - \cos 3x}{e^x \sin 5x}$

Продифференцировать уравнение:

9. $y(x) = 4^{\sin 3x} \cdot \left(\log_4 x - \arcsin^4 \sqrt{4-x}\right);\ y'$–?

10. $y(x) = \dfrac{\operatorname{ctg} x + 3x}{e^{\arccos x}};\ dy$–?

11. Составить уравнение касательной к графику функции $f(x) = 5x - 3x^2 + 2$, параллельной прямой $3y + 3x = 1$.

12. Проверить, является ли функция $y(x) = -2e^{-x} \cos 2x$ решением дифференциального уравнения $y'' + 2y' + 5y = 0$.

13. Тело движется вдоль оси Ox по закону: $x(t) = \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{32} + 12t$. Найти скорость и ускорение в момент времени $t_0 = 2$.

14. Исследовать функцию $y = \frac{x^2+1}{x}$ и построить ее график.

Вариант 26

Найти предел функции:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^{\frac{3}{2}} + x - 2}{-7x - 8x^{\frac{3}{2}} + 1}$
2. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2 - 9}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2+8x})$
4. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{12 + 11x - 5x^2}{11x^2 - 25x - 24}$
5. $\lim\limits_{x\to 1} \operatorname{ctg} \pi x \cdot \ln x$
6. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{17x-2}$
7. $\lim\limits_{x\to +0} (\sin 3x)^x$
8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 3x - 3x}{7x^2}$

Продифференцировать функцию:

9. $y(x) = \left(\arcsin x \cdot \log_3{}^4 x + \operatorname{ctg}^3 \frac{x}{6}\right) \cdot \left(3^{\operatorname{tg} x} - \operatorname{arcctg}^4 \sqrt{x}\right);\ y'$–?

10. $y(x)=\dfrac{\cos x+2x}{e^{\operatorname{arctg} x}}$; dy–?

11. Составить уравнение касательной к графику функции $f(x)=6x^2+2x+4$, перпендикулярной прямой $4y-x=1$.

12. Проверить, является ли функция $y(x)=-3e^{-x}\sin 2x$ решением дифференциального уравнения $y''+2y'+5y=0$.

13. Тело движется вдоль оси Ox по закону: $x(t)=\frac{t^3}{3}+2t^2-5t$. Найти скорость и ускорение в момент времени $t_0=4$.

14. Исследовать функцию $y=\frac{x^3+4}{x^2}$ и построить ее график.

Вариант 27

Найти предел функции:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{5}x^3-8x^2+5}{13x^3-9x+23}$

2. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{2-\sqrt{1-x}}{x^2+3x}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-37x+24}-\sqrt{x^2-9x+24})$

4. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{3x^2-5x-2}{7x-2x^2-6}$

5. $\lim\limits_{x\to+0}\operatorname{tg}2x\cdot\ln 16x$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x-13}{6x+24}\right)^{8x-7}$

7. $\lim\limits_{x\to0}\left(\sqrt{2}x\right)^{\sin 5x}$

8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}$

Продифференцировать функцию:

9. $y=2^{\cos 4x}\cdot\left(\log_3(2x-1)-\arccos^3\frac{6}{x}\right)$; y'–?

10. $y(x)=\dfrac{\operatorname{ctg} x+3x}{e^{\arcsin x}}$; dy–?

11. Составить уравнение касательной к графику функции $f(x)=4x^2-3x-5$, параллельной прямой $y-5x=3$.

12. Проверить, является ли функция $y(x)=4e^{-x}\cos 2x$ решением дифференциального уравнения $y''+2y'+5y=0$.

13. Тело движется вдоль оси *Ox* по закону: $x(t)=\frac{t^3}{3}+\frac{3t^2}{2}-4t$. Найти скорость и ускорение в момент времени $t_0=4$.

14. Исследовать функцию $y=\frac{x^2+1}{2x}$ и построить ее график.

Вариант 28

Найти предел функции:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{31x^5-x^3+8}{3+-x^5}$

2. $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-5x}{1-\sqrt{x-4}}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-3x+1}-\sqrt{x^2-1})$

4. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{3x^2-2x-16}{7x^2+5x-18}$

5. $\lim\limits_{x\to0}\operatorname{ctg}3x\cdot\ln(1+7x)$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-27}{x+31}\right)^{34x}$

7. $\lim\limits_{x\to0}(\sin 5x)^{\cos x-1}$

8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}2x-\sin x}{23x}$

Продифференцировать функцию:

9. $y=\log_2\sin x\cdot\left(\operatorname{arctg}^5\frac{3}{x}-5^{\cos x}\right);\ y'-?$

10. $y(x)=\dfrac{\sin x-5x}{e^{\operatorname{arcctg}x}};\ dy-?$

11. Составить уравнение касательной к графику функции $f(x)=5x-2x^2-3x$, образующей с осью Ox угол 45°.

12. Проверить, является ли функция $y(x)=-3e^{-x}\sin2x$ решением дифференциального уравнения $y''+2y'+5y=0$.

13. Тело движется вдоль оси Ox по закону: $x(t)=\frac{t^3}{3}-\frac{5t^2}{2}-6t$. Найти скорость и ускорение в момент времени $t_0=5$.

14. Исследовать функцию $y=\frac{36x}{1+x^2}$ и построить ее график.

Вариант 29

Найти предел функции:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3x^{\frac{19}{2}}+31x^3-\sqrt{3}}{18\sqrt{x}+3x^2-7x^{\frac{19}{2}}}$

2. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-4x}{3-\sqrt{2x+1}}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-7}-\sqrt{x^2+29x})$

4. $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{2x^2-x-45}{x^2-3x-10}$

5. $\lim\limits_{x\to1}(x-1)tg\dfrac{\pi x}{2}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{17x+1}{17x+3}\right)^{x+2}$

7. $\lim\limits_{x\to-0}(ln(1-2x))^{\sin 3x}$

8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin 5x}{x+\sin 5x}$

Продифференцировать функцию:

9. $y=(5^{\operatorname{ctg}2x}+\operatorname{ctg}^5 2x)\cdot\left(\cos\sqrt{4x+3}\right);\ y'-?$

10. $y=\dfrac{\sqrt{x}+\arcsin x}{\sin x};\ dy-?$

11. Составить уравнение касательной к графику функции $y=\sqrt{x}$, параллельной прямой $2y-x-6=0$.

12. Показать, что функция $y=\mathrm{e}^x\cos4x$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y''-2y'+17y=0$.

13. Тело движется прямолинейно по закону: $S(t) = \frac{3t^2}{2} + \frac{t^3}{3}$. Какую скорость и какое ускорение будет иметь тело через 4 секунды после начала движения?

14. Исследовать функцию $y = \frac{x^2}{1-x^3}$ и построить ее график.

Вариант 30

Найти предел функции:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{7x^4 - 8x^6 - 4}{18 + 3x^2 - 7x^6}$
2. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - x - 2}{\sqrt{5x-1} - x - 1}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2 - 3x} - \sqrt{x^2 + x + 1}\right)$
4. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{4x^2 + 5x - 21}{x^3 + 27}$
5. $\lim\limits_{x\to 2}(4 - x^2)\operatorname{ctg}\pi x$
6. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{4x+5}{4x-1}\right)^{4x-5}$
7. $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg} 3x)^{\sin 7x}$
8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x} - \cos 5x}{3 \operatorname{tg} 4x}$

Продифференцировать функцию:

9. $y = \left(\arccos\frac{3}{\sqrt{x}} - \operatorname{tg}^4 \frac{x}{3}\right) \cdot 4^{\operatorname{ctg}(3x-2)}$; y'–?

10. $y = \dfrac{2x - \operatorname{arctg} 2x}{e^{5\sin 5x}}$; dy–?

11. Составить уравнение касательной к графику функции $y = 3x^2 - 5x + 4$, параллельной прямой $y = 7x + 2$.

12. Показать, что функция $y = 3e^{-2x}\sin 4x$ является решением дифференциального уравнения $y'' + 4y' + 20y = 0$.

13. Тело движется вдоль оси *Ox* по закону: $S(t) = \frac{t^3}{3} - t^2 + 4t$. Найти скорость и ускорение в момент времени $t = 3$.

14. Исследовать функцию $y = \frac{x^2-3}{x+2}$ и построить ее график.

2. ЗАДАНИЯ ПО ТЕМЕ: ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Примерный вариант заданий с решением

Найти / вычислить интегралы:

1. $\int \frac{e^{2x}+e^x}{e^x-1}dx$
2. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{5x-1}dx$
3. $\int_1^2 (2x+1)\ln x dx$
4. $\int \sin^6\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}dx$
5. $\int \frac{1-3x}{\sqrt{9+8x-x^2}}dx$
6. $\int \frac{2x^2-4x+5}{3x^2+8}dx$
7. $\int \frac{x+17}{x^3-2x^2-5x+6}dx$
8. $\int \frac{dx}{\sqrt{(25+x^2)^3}}$
9. $\int_0^{63} \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$

10*****. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций: $y=2x-x^2+3$, $y=x^2-4x+3$. Сделать чертеж.

10******. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной графиками функций: $y=x^2-2x+1, y=0, x=2$. Сделать чертеж.

Решение

1. $\int \frac{e^{2x}+e^x}{e^x-1}dx=\int \frac{(e^x+1)e^x}{e^x-1}dx=$

$$=\begin{bmatrix}\text{замена переменной:}\\ e^x=t\\ d(e^x)=dt\\ e^xdx=dt\end{bmatrix}=\int\frac{t+1}{t-1}dt=\int\frac{t-1+2}{t-1}dt=$$

$$=\int 1+\frac{2}{t-1}dt=\int dt+2\int\frac{dt}{t-1}=t-2\ln|t-1|+C=$$

$$=e^x-2\ln|e^x-1|+C$$

2. $\int arctg\sqrt{5x-1}dx$

Интегралы вида: $\int P(x)\ln x\,dx$, $\int P(x)\operatorname{arctg} x\,dx$, $\int P(x)\arcsin x\,dx$, где $P(x)$ – многочлен, находят методом интегрирования по частям, причем, за $u(x)$ принимается трансцендентная функция: $\ln x$ $\left(\ln^n x,\ \ln\left(f(x)\right)\right)$ или $\operatorname{arctg} x(\operatorname{arcctg} x)$ или $\arcsin x\,(\arccos x)$.

Формула интегрирования по частям имеет вид: $\int udv = uv - \int vdu$.

$$\int \operatorname{arctg}\sqrt{5x-1}dx = \left[\begin{matrix} u = \operatorname{arctg}\sqrt{5x-1}\ , & du = \dfrac{dx}{2x\sqrt{5x-1}} \\ dv = dx\ , & v = x \end{matrix}\right] =$$

$$= x\operatorname{arctg}\sqrt{5x-1} - \int x\frac{dx}{2x\sqrt{5x-1}} = x\operatorname{arctg}\sqrt{5x-1} - \int \frac{dx}{2\sqrt{5x-1}} =$$

$$= x\operatorname{arctg}\sqrt{5x-1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\int (5x-1)^{-\frac{1}{2}}d(5x-1) =$$

$$= x\operatorname{arctg}\sqrt{5x-1} - \frac{1}{5}\sqrt{5x-1} + C$$

3. $\displaystyle\int_1^2 (2x+1)\ln x dx$

Формула интегрирования по частям имеет вид: $\int_a^b udv = uv|_a^b - \int_a^b vdu$.

$$\int_1^2 (2x+1)\ln x dx = \left[\begin{matrix} u = \ln x, & du = \dfrac{1}{x}dx \\ dv = (2x+1)dx, & v = x^2 + x \end{matrix}\right] =$$

$$= (x^2+x)\ln x|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2+x}{x}dx = (4+2)\ln 2 - (1+1)\ln 1 - \int_1^2 (x+1)\,dx =$$

$$= 6\ln 2 - \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\Bigg|_1^2 = 6\ln 2 - (2+2) + \left(\frac{1}{2} + 1\right) = 6\ln 2 - 2{,}5$$

4. $\displaystyle\int \sin^6\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}dx$

Для вычисления интегралов вида $\int \sin^{2m}x\cos^{2n}x\,\mathrm{d}x$, где m, n – целые неотрицательные числа, применяются формулы понижения степени:

$$\left[\sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x\,, \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}\right]$$

$$\int \sin^6\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}dx = \int (\sin^2\frac{x}{2})^2(\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2})^2dx =$$

$$= \int (\frac{1-\cos x}{2})^2(\frac{1}{2}\sin x)^2dx = \frac{1}{16}\int (1-\cos x)^2\sin^2 xdx =$$

$$= \frac{1}{16}\int (1 - 2\cos x + \cos^2 x)\sin^2 xdx =$$

$$= \frac{1}{16}\left(\int \sin^2 x dx - 2\int \cos x \sin^2 x\, dx + \int \cos^2 x \sin^2 x dx\right) =$$
$$= \frac{1}{16}\left(\int \frac{1-\cos 2x}{2} dx - 2\int \cos x \sin^2 x dx + \int \cos^2 x \sin^2 x dx\right) =$$
$$= \frac{1}{16}\left(\int \frac{1-\cos 2x}{2} dx - 2\int \sin^2 x d(\sin x) + \int (\sin x \cos x)^2\, dx\right) =$$
$$= \frac{1}{16}\left(\frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x dx - \frac{2}{3}\sin^3 x + \int \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 dx\right) =$$
$$= \frac{1}{16}\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{4}\int \sin^2 2x dx\right) =$$
$$= \frac{1}{16}\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{4}\int \frac{1-\cos 4x}{2} dx =\right.$$
$$= \frac{1}{16}\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x\right) + C =$$
$$= \frac{1}{16}\left(\frac{5}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{2}{3}\sin^3 x - \frac{1}{32}\sin 4x\right) + C$$

5. $$\int \frac{1-3x}{\sqrt{9+8x-x^2}} dx =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \text{Выделим полный квадрат в подкоренном выражении:} \\ 9+8x-x^2 = -(x^2-8x+16)+25 = 25-(x-4)^2 \\ \text{Замена переменной: } x-4=t \Rightarrow x=t+4, dx=dt, \\ 9+8x-x^2 = 25-t^2 \end{array}\right] =$$

$$= \int \frac{1-3(t+4)}{\sqrt{25-t^2}} dt = \int \frac{-3t-11}{\sqrt{25-t^2}} dt = \int \frac{-3tdt}{\sqrt{25-t^2}} - \int \frac{11dt}{\sqrt{25-t^2}} =$$
$$= 3\int \frac{-2tdt}{2\sqrt{25-t^2}} - 11\int \frac{dt}{\sqrt{5^2-t^2}} =$$
$$= 3\int \frac{d(25-t^2)}{2\sqrt{25-t^2}} - 11\arcsin\frac{t}{5} = 3\sqrt{25-t^2} - 11\arcsin\frac{t}{5} + C =$$
$$= 3\sqrt{9+8x-x^2} - 11\arcsin\frac{x-4}{5} + C$$

6. $$\int \frac{2x^2-4x+5}{3x^2+8} dx$$

$\frac{2x^2-4x+5}{3x^2+8}$ – неправильная рациональная дробь (так как высшие степени многочленов в числителе и знаменателе равны).

Выделим целую часть:

$$\frac{2x^2-4x+5}{3x^2+8}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3(2x^2-4x+5)}{3x^2+8}=\frac{1}{3}\cdot\frac{6x^2-12x+15}{3x^2+8}$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{2(3x^2+8)+(-12x-1)}{3x^2+8}=\frac{1}{3}\cdot(2+\frac{-12x-1}{3x^2+8})$$

Правильная дробь $\frac{-12x-1}{3x^2+8}$ является простейшей дробью II типа. Так как знаменатель–квадратный двучлен, то дробь раскладывают на сумму дробей:

$$\frac{-12x-1}{3x^2+8}=-\frac{12x}{3x^2+8}-\frac{1}{3x^2+8}=$$
$$=\frac{1}{3}\int\left(2+\frac{-12x-1}{3x^2+8}\right)dx==\frac{1}{3}(2x-\int\frac{12xdx}{3x^2+8}-\int\frac{dx}{3x^2+8}=$$
$$=\frac{1}{3}(2x-2\int\frac{6xdx}{3x^2+8}-\int\frac{3dx}{3(3x^2+8)}=$$
$$=\frac{1}{3}\int(2x-2\int\frac{d(3x^2+8)}{3x^2+8}-\int\frac{d(3x)}{(3x)^2+(\sqrt{24})^2})=$$
$$=\frac{1}{3}\left(2x-2\ln(3x^2+8)-\frac{1}{\sqrt{24}}\mathrm{arctg}\frac{3x}{\sqrt{24}}\right)+C$$

7. $\int\frac{x+17}{x^3-2x^2-5x+6}dx$

Подинтегральная функция – правильная рациональная дробь. Разложим знаменатель x^3-2x^2-5x+6 на простые множители: линейные множители или квадратные многочлены с отрицательным дискриминантом.

Так как $x=-1$ – корень многочлена $x^3-2x^2-5x+6,$ значит x^3-2x^2-5x+6 делится на $(x-1)$ без остатка:

Выполним деление «уголком»:

$$\begin{array}{r|l} x^3-2x^2-5x+6 & x-1 \\ \cline{2-2} \underline{-x^3-x^2} & x^2-x-6 \\ -x^2-5x+6 & \\ \underline{-(-x^2+x)} & \\ -6x+6 & \\ \underline{-(-6x+6)} & \\ 0 & \end{array}$$

Следовательно,

$$x^3-2x^2-5x+6=(x-1)(x^2-x-6)=(x-1)(x-3)(x+2).$$

Разложим дробь $\frac{x+17}{(x-1)(x-3)(x+2)}$ на сумму простейших дробей

$$\frac{x+17}{(x-1)(x-3)(x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{x+2}=$$

$$=\frac{A(x-3)(x+2)+B(x-1)(x+2)+C(x-1)(x-3)}{(x-1)(x-3)(x+2)} \Rightarrow$$

$$x+17=A(x-3)(x+2)+B(x-1)(x+2)+C(x-1)(x-3)$$

Найдем коэффициенты A, B, C методом частных значений:

при $x = 1$: $18 = -6A$ $A = -3$

при $x = 3$: $20 = 10B$ $B = 2$

при $x = -2$: $15 = 15C$ $C = 1$

Интегрируем рациональную дробь

$$\int \frac{x+17}{x^3-2x^2-5x+6}dx=\int \frac{-3}{x-1}dx+\int \frac{2}{x-3}dx+\int \frac{1}{x+2}dx=$$

$$=-3\int \frac{d(x-1)}{x-1}+2\int \frac{d(x-3)}{x-3}+\int \frac{d(x+2)}{x+2}=$$

$$=-3\ln|x-1|+2\ln|x-3|+\ln|x+2|+C$$

8. $$\int \frac{dx}{\sqrt{(25+x^2)^3}}=$$

$$=\left[\begin{gathered}\text{Замена переменной:}\\ x=5\operatorname{tg}t\,; \quad dx=\frac{5}{\cos^2 t}dt;\\ \sqrt{(25+x^2)}=\sqrt{25+25\operatorname{tg}^2 t}=\sqrt{\frac{25}{\cos^2 t}}=\frac{5}{|\cos t|}=\frac{5}{\cos t}\\ \text{так как} \cos t>0\ \forall t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\end{gathered}\right]=$$

$$=\int \frac{5dt}{\cos^2 t\,(\frac{5}{\cos t})^3}dt=\frac{1}{25}\int \cos t dt=\frac{1}{25}\sin t+C=$$

$$=\left[\begin{gathered}x=5\operatorname{tg}t=\frac{5}{\cos t}\sin t\\ \frac{5}{\cos t}=\sqrt{25+x^2}\\ x=\sqrt{25+x^2}\sin t\Rightarrow\\ \sin t=\frac{x}{\sqrt{25+x^2}}\end{gathered}\right]=\frac{x}{\sqrt{25+x^2}}+C$$

9. $$\int_0^{63} \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}=$$

$$= \left[\begin{array}{c} \text{Найдем наименьшее общее кратное показателя корня} \\ \text{подинтегрального выражения:} \\ \text{НОК}(2;3) = 6 \\ \text{Замена переменной } \sqrt[6]{x+1} = \text{t} \Rightarrow \\ x+1 = t^6, x = t^6 - 1, dx = 6t^5dt \\ \sqrt[3]{x+1} = t^2, \qquad \sqrt{x+1} = t^3 \\ \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 63 \\ \hline t & 1 & 2 \end{array} \end{array} \right] =$$

$$\int_1^2 \frac{6t^5dt}{t^3+t^2} = 6\int_1^2 \frac{t^3dt}{t+1} = 6\int_1^2 \frac{(t^3+1)-1}{t+1}dt = 6(\int_1^2 \frac{t^3+1}{t+1}dt - \int_1^2 \frac{dt}{t+1}) =$$

$$6(\int_1^2 \frac{(t+1)(t^2-t+1)}{t+1}dt - \ln(t+1)|_1^2) = 6(\int_1^2 (t^2-t+1)\,dt -$$

$$-\ln 3 + \ln 2) = 6\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t\Big|_1^2 - \ln 3 + \ln 2\right) =$$

$$= 6\left(\left(\frac{8}{3} - 2 + 2\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1\right) + \ln\frac{2}{3}\right) = 11 + 6\ln\frac{2}{3}$$

10*. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций: $y = 2x - x^2 + 3$, $y = x^2 - 4x + 3$. Сделать чертеж.

Графиком функции $y = ax^2 + bx + c$ является парабола, ветви которой направлены вниз при а $<$ 0, вверх при а $>$ 0.

Координаты вершин параболы: $x_в = -\frac{b}{2a}$, $y_в = y(-\frac{b}{2a})$.

Для $y = 2x - x^2 + 3$ ветви направлены вниз,$(1;4)$ – вершина параболы.

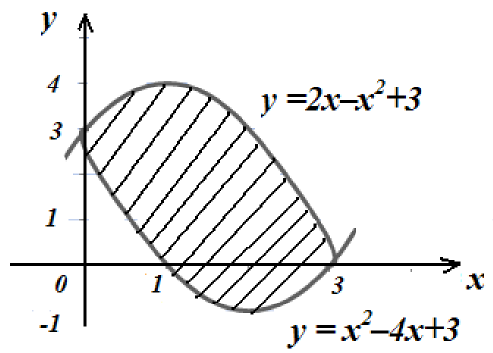
Для $y = x^2 - 4x + 3$ ветви направлены вверх, $(2;-1)$ – вершина параболы.

Найдем точки пересечения парабол: $y = 2x - x^2 + 3$ и $y = x^2 - 4x + 3$:

$$\begin{cases} y = 2x - x^2 + 3 \\ y = x^2 - 4x + 3 \end{cases} \Rightarrow 2x - x^2 + 3 = x^2 - 4x + 3 \Rightarrow 2x^2 - 6x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} y_1 = 3 \\ y_2 = 0 \end{matrix}$$

Итак, $(0;3), (3;0)$ – точки пересечения парабол.



Если фигура ограничена графиками функций

$y = f(x), y = q(x), x = a, x = b \ (a < b)$, где $f(x) \geq q(x) \quad \forall x \in [a, b]$, то

$$S_{\text{фигуры}} = \int_a^b [f(x) - q(x)]dx.$$

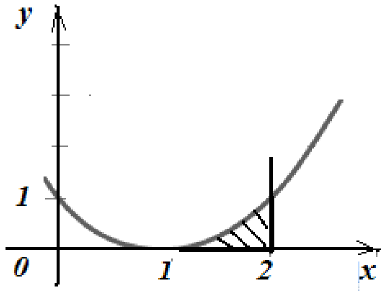
В данном случае: $-x^2 + 2x + 3 \geq x^2 - 4x + 3 \quad \forall x \in [0; 3]$

Следовательно, $S_{\text{фигуры}} = \int_0^3 \big((-x^2 + 2x + 3) - (x^2 - 4x + 3)\big)dx =$

$$= \int_3^3 (-2x^2 + 6x)dx = (-\frac{2}{3}x^3 + 3x^2)|_0^3 = (-18 + 27) - 0 = 9 \ (\text{кв. ед.})$$

10**. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси *Ox* фигуры, ограниченной графиками функций: $y = x^2 - 2x + 1, y = 0, x = 2.$

Сделать чертеж.



$y = x^2 - 2x + 1$ – график параболы, ветви направлены вверх, (1; 0) – вершина. Вращаемая фигура – криволинейная трапеция.

Если вокруг оси Ox вращается криволинейная трапеция, ограниченная графиками функциями: $y = f(x), y = 0, x = a, x = b(a < b),$ причем $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$, то объем тела вращения находится по формуле:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

В данном случае:

$$V = \pi \int_1^2 (x^2 - 2x + 1)^2 dx = \pi \int_1^2 (x - 1)^4 d(x - 1) = \pi \left.\frac{(x-1)^5}{5}\right|_1^2 =$$

$$= \frac{\pi}{5} - 0 = \frac{\pi}{5} (\text{куб. ед.})$$

Варианты заданий для самостоятельного решения (1–30)

В заданиях 1–9 найти/вычислить интегралы.

В задании 10 необходимо найти:

10* – площадь фигуры, ограниченной заданными линиями.

10** – объем тела, полученного вращением вокруг оси *Ox* фигуры, ограниченной графиками функций. Сделать чертеж.

Вариант 1

1. $\int \frac{x^2+4x-3}{x^2+9}dx$

2. $\int_0^{\pi}(4x-7)\,cos\frac{x}{2}dx$

3. $\int 7^{-x}\,(3-x)dx$

4. $\int \operatorname{arcctg}(4x)dx$

5. $\int sin^5 2xdx$

6. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}}$

7. $\int \frac{19-2x}{x^2-2x+82}dx$

8. $\int \frac{3x^2-7x+10}{(x^2+4)(x-2)}\,dx$

9. $\int_2^{14}\frac{dx}{\sqrt{x+2}+5}$

10*. $y=2^x;\ y=0;\ x=1;\ x=2.$

Вариант 2

1. $\int \frac{3x^3-7}{x^2+8}dx$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}(x+2)\,sin\,2xdx$

3. $\int (5x-2)2^x\,dx$

4. $\int \arcsin\frac{x}{4}dx$

5. $\int \frac{sin^5 x}{cos^3 x}dx$

6. $\int \frac{dx}{x^2\cdot\sqrt{3+x^2}}$

7. $\int \frac{9-4x}{x^2+6x+13}dx$

8. $\int \frac{3x^2+2x+1}{(x+4)(x+1)^2}dx$

9. $\int_0^{3}\frac{dx}{\sqrt{x+1}+1}$

10*. $y=\cos x;\ y=0;\ x=\frac{\pi}{6};\ x=\frac{\pi}{3}$

Вариант 3

1. $\int \frac{x^3-x}{x^2+3}dx$

2. $\int_0^{\pi}(2x-1)\cos\frac{x}{3}dx$

3. $\int e^{\frac{x}{2}}\left(\frac{x}{2}+2\right)dx$

4. $\int arctg\frac{x}{4}dx$

5. $\int \sin^3 x\cos^3 xdx$

6. $\int \frac{x^4}{\sqrt{4-x^2}}dx$

7. $\int \frac{15-2x}{x^2-4x+5}dx$

8. $\int \frac{x-3x^2-1}{(x-1)(x^2+2)}dx$

9. $\int_0^{8}\frac{dx}{\sqrt{3x+1}+1}$

10*. $y=(x-2)^2;\ y=0;\ y=1;\ x=0.$

Вариант 4

. $\int \frac{x^2-2x+3}{x^2+16}dx$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2x-1)\cos 2xdx$

3. $\int \arccos(2x)\,dx$

4. $\int (x+4)2^x dx$

5. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}dx$

6. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx$

7. $\int \frac{2x+7}{x^2+2x+2}dx$

8. $\int \frac{x-8}{x(x-2)^2}dx$

9. $\int_0^9 \frac{dx}{3+\sqrt{9-x}}$

10*. $y=(x-1)^2;\ y=0;\ x=0.$

Вариант 5

1. $\int \frac{x^2-2x+2}{x^2+3}dx$

2. $\int_0^{\pi}(2x-1)\cos\frac{x}{2}dx$

3. $\int (1-\frac{x}{2})3^{x+2}dx$

4. $\int x\mathrm{arctg}2xdx$

5. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^8 x}dx$

6. $\int x^2\sqrt{49-x^2}dx$

7. $\int \frac{4x-5}{x^2+4x+20}dx$

8. $\int \frac{dx}{x(3x+1)^2}$

9. $\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{x-1+2}}$

10*. $y=\ln x;\ y=0;\ x=e;\ x=e^3.$

Вариант 6

1. $\int \frac{x^2+2x}{x^2+5}dx$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{3}}(x-1)\cos 3xdx$

3. $\int \mathrm{arctg}2xdx$

4. $\int (\frac{x}{2}-1)e^{3x}dx$

5. $\int \cos^6 x\sin^3 xdx$

6. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{4+x^2}}$

7. $\int \frac{17-2x}{x^2+4x+13}dx$

8. $\int \frac{x^3+3}{x^2(x^2+3)}dx$

9. $\int_0^{12} \frac{dx}{1+\sqrt{16-x}}$

10*. $y=\log_2 x; y=0; x=4.$

Вариант 7

1. $\int \frac{x^3 + 4x - 5}{x^2 + 4} dx$

2. $\int_0^{\pi} (8x - 1) \sin \frac{x}{2} dx$

3. $\int (x + 1) e^{-x} dx$

4. $\int \arccos \frac{x}{3} dx$

5. $\int \frac{4x + 13}{x^2 + 6x + 18} dx$

6. $\int \frac{x - 1}{x(4x^2 + 1)} dx$

7. $\int \cos^3 x \sin^4 x dx$

8. $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4 - x^2}}$

9. $\int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{4 - x}}$

10*. $y = \sqrt{x - 1}; y = 1; x = 5.$

Вариант 8

1. $\int \frac{x^3 + 1}{x^2 + 5} dx$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (20 - 8x) \sin 2x dx$

3. $\int \arcsin(3x) dx$

4. $\int (2x + 3) e^{-4x} dx$

5. $\int \cos^5 3x dx$

6. $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{9 + x^2}}$

7. $\int \frac{2x - 3}{x^2 - 6x + 34} dx$

8. $\int \frac{2x^2 - 3x + 4}{x(x - 1)(x + 2)} dx$

9. $\int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{2x + 1}}$

10*. $y = \log_2 x; y = 0; x = 8.$

Вариант 9

1. $\int \frac{x^3 + 16}{x^2 + 2} dx$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} (4 - x) \sin 3x dx$

3. $\int (3 - x) e^{x+3} dx$

4. $\int \operatorname{arctg} \frac{x}{3} dx$

5. $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^6 x} dx$

6. $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{9 - x^2}}$

7. $\int \frac{19 - 4x}{x^2 + 4x + 5} dx$

8. $\int \frac{x - 12}{x^2 (x + 4)} dx$

9. $\int_0^6 \frac{dx}{1 + \sqrt{2x + 4}}$

10*. $y = \sin x; y = 0;\ x = \frac{\pi}{6};\ x = \frac{\pi}{2}.$

Вариант 10

1. $\int \frac{x^2+2x}{x^2+1}dx$
2. $\int_0^{\pi} x\cos\frac{x}{2}dx$
3. $\int (3x+1)e^{2x}dx$
4. $\int \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}dx$
5. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx$
6. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{(16+x^2)^3}}$
7. $\int \frac{2x+2}{x^2+10x+26}dx$
8. $\int \frac{2x^2-x+1}{(x-1)(x^2+3)}dx$
9. $\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{3x+1}+1}$

10*. $y=\cos x; y=0;\ x=0;\ x=\frac{\pi}{4}$

Вариант 11

1. $\int \frac{3x^2+2x}{x^2+4}dx$
2. $\int_0^{\pi} (x-1)\sin\frac{x}{2}dx$
3. $\int (2x+6)\,3^{-x}dx$
4. $\int \arccos 3x dx$
5. $\int \cos^3 x\sin^2 x dx$
6. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}}$
7. $\int \frac{2x+7}{x^2-4x+29}dx$
8. $\int \frac{x-1}{x(x^2+1)}dx$
9. $\int_0^4 \frac{dx}{4+\sqrt{2x+1}}$

10*. $y=x^2-1; y=0$

Вариант 12

1. $\int \frac{3x^3+2}{x^2+4}dx$
2. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (2-x)\sin 2x dx$
3. $\int (4-x)3^{-\frac{x}{2}}dx$
4. $\int \arcsin 2x dx$
5. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx$
6. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{16-x^2}}$
7. $\int \frac{2x+10}{x^2+2x+10}dx$
8. $\int \frac{x^2+2x-5}{(x^2+1)(x-2)}dx$
9. $\int_2^6 \frac{dx}{9+\sqrt{2x-3}}$

10*. $y=\sin x;\ y=0;\ x=\frac{\pi}{4};\ x=\frac{\pi}{2}.$

Вариант 13

1. $\int \frac{x^2+4x-1}{x^2+6}dx$

2. $\int_0^{2\pi} (2x+3)\sin\frac{x}{4}dx$

3. $\int 4x\text{arctg}2xdx$

4. $\int 5^x(5-x)dx$

5. $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^2 x}dx$

6. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{(9-x^2)^3}}$

7. $\int \frac{2x-21}{x^2-2x+10}dx$

8. $\int \frac{4dx}{(x+1)(x-1)^2}$

9. $\int_2^{23} \frac{dx}{6+\sqrt{x+2}}$

10*. $y=\sin x;\ y=0;\ x=\frac{\pi}{3};\ x=\frac{\pi}{2}.$

Вариант 14

1. $\int \frac{x^3+2x}{x^2+8}dx$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{8}} (1-x)\sin 8xdx$

3. $\int (7-2x)3^{x+1}\,dx$

4. $\int \text{arctg}\,(4x)dx$

5. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx$

6. $\int x^2\sqrt{16-x^2}\,dx$

7. $\int \frac{4x+31}{x^2+8x+17}dx$

8. $\int \frac{x^3+x+2}{x^3(x+2)}dx$

9. $\int_5^{10} \frac{dx}{1-\sqrt{x-1}}$

10*. $y=\cos x; y=0; x=\frac{\pi}{3}; x=\frac{\pi}{6}$

Вариант 15

1. $\int \frac{x^3+5x}{x^2+4}dx$

2. $\int_0^{\frac{5\pi}{2}} (x-1)\sin\frac{x}{5}dx$

3. $\int (x-2)\ln(x+1)dx$

4. $\int 2^{-x}(2x+3)dx$

5. $\int \sin^4 x\cos^5 xdx$

6. $\int x^2\sqrt{1-x^2}dx$

7. $\int \frac{10x-1}{x^2+2x+2}dx$

8. $\int \frac{2x^3+x+1}{x^3(x+1)}dx$

9. $\int_{-2}^{1} \frac{dx}{1+\sqrt{2-x}}$

10*. $y=e^x;\ y=0;\ x=0;\ x=1$

Вариант 16

1. $\int \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 + 16} dx$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{10}} (x - 7) \sin 5x dx$

3. $\int (2x - 1)e^{-x} dx$

4. $\int x^2 \ln(x + 1) dx$

5. $\int \sin^4 2x dx$

6. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{4 + x^2}}$

7. $\int \frac{17 - 2x}{x^2 - 6x + 25} dx$

8. $\int \frac{x^3 + 3}{x^2(x^2 + 3)} dx$

9. $\int_0^{12} \frac{dx}{1 + \sqrt{16 - x}}$

10*. $y = \log_2 x;\ y = 0;\ x = 4;$

Вариант 17

1. $\int \frac{2x^2 + 5x}{x^2 + 1} dx$

2. $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} (4 - 2x) \cos \frac{x}{3} dx$

3. $\int e^{-\frac{x}{2}} (x + 10) dx$

4. $\int (\frac{x}{2} + 1) \ln x dx$

5. $\int \cos^3 5x dx$

6. $\int x^2 \sqrt{9 - x^2}\, dx$

7. $\int \frac{15 - 2x}{x^2 - 4x + 40} dx$

8. $\int \frac{x^2 - 5x + 1}{(x - 2)(x^2 + 1)} dx$

9. $\int_0^{3} \frac{dx}{3 + \sqrt{x + 1}}$

10**. $y = -x^2 + 5x,\ y = 0$

Вариант 18

1. $\int \frac{3x^2 - 7}{x^2 + 10} dx$

2. $\int_0^{\pi} (7x - 2) \cos \frac{x}{2} dx$

3. $\int 4^{-x} (3 - 2x) dx$

4. $\int \frac{\ln(x + 1)}{(x + 1)^2} dx$

5. $\int \mathrm{tg}^5 x dx$

6. $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{25 + x^2}}$

7. $\int \frac{4x + 27}{x^2 - 2x + 26} dx$

8. $\int \frac{x^2 + 4x - 3}{x^2(x - 3)} dx$

9. $\int_4^{11} \frac{dx}{\sqrt{x + 5} - 1}$

10**. $y = 2x - x^2;\ y = 0$

Вариант 19

1. $\int \frac{5x^2 + x}{x^2 + 5} dx$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} (5 - x) \cos 3x dx$

3. $\int (6 - 3x) 2^{-x} dx$

4. $\int x \operatorname{arctg} x dx$

5. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx$

6. $\int x^2 \sqrt{16 - x^2} dx$

7. $\int \frac{4x - 10}{x^2 - 2x + 10} dx$

8. $\int \frac{4dx}{(x - 1)(x^2 + 1)}$

9. $\int_0^3 \frac{dx}{5 - \sqrt{x + 1}}$

10**. $y = x^2 - 4; y = 0$

Вариант 20

1. $\int \frac{3x^2 - 2x}{x^2 + 1} dx$

2. $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} (3 - x) \cos \frac{x}{3} dx$

3. $\int (1 - 4x) 4^{-x} dx$

4. $\int \arccos 3x dx$

5. $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}} dx$

6. $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{25 - x^2}}$

7. $\int \frac{4x - 2}{x^2 - 4x + 13} dx$

8. $\int \frac{2x^2 - 3x + 6}{x^2 (x^2 + 3)} dx$

9. $\int_1^6 \frac{dx}{3 + \sqrt{3 + x}}$

10**. $y = x^2 - 1,\ y = 0.$

Вариант 21

1. $\int \frac{x^3 - 6}{x^2 + 6} dx$

2. $\int_0^{\pi} (4 + x) \sin \frac{x}{2} dx$

3. $\int 5^x (8 - x) dx$

4. $\int \frac{\ln(x - 1)}{(x - 1)^2} dx$

5. $\int \cos x \cos 2x dx$

6. $\int x^2 \sqrt{49 - x^2} dx$

7. $\int \frac{6x - 2}{x^2 + 2x + 5} dx$

8. $\int \frac{x - 1}{(x - 3)(x^2 + 1)} dx$

9. $\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{2x - 1} + 5}$

10**. $y = 3x - x^2; y = 0.$

Вариант 22

1. $\int \frac{x^3}{x^2+4}dx$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} (6+x)\cos 3x dx$

3. $\int (1+2x)7^{-x}dx$

4. $\int x^3 \ln x dx$

5. $\int \sin 2x \sin x dx$

6. $\int \frac{x^4}{\sqrt{(1-x^2)^3}}dx$

7. $\int \frac{2x+23}{x^2+4x+20}dx$

8. $\int \frac{4x^2+x-1}{x(4x^2+1)}dx$

9. $\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{3x+1}+2}$

10**. $y = 5x - 3x^2; y = 0$

Вариант 23

1. $\int \frac{4x^4-x}{x^2+7}dx$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (3-x)\cos 2x dx$

3. $\int (1+2x)\cdot 2^{-x}\, dx$

4. $\int (x^2+1)\ln x dx$

5. $\int \cos 2x \sin x dx$

6. $\int x^3\sqrt{4-x^2}dx$

7. $\int \frac{4x-7}{x^2+8x+20}dx$

8. $\int \frac{x+1}{(x-1)(x^2+1)}dx$

9. $\int_2^{10} \frac{dx}{1+\sqrt{5+2x}}$

10**. $y = 5x - x^2; y = 0$

Вариант 24

1. $\int \frac{4x^3+1}{x^2+4}dx$

2. $\int_0^{\pi} (1-4x)\sin\frac{x}{2}dx$

3. $\int \arcsin 4x dx$

4. $\int (1+x)e^{\frac{x}{2}}dx$

5. $\int \frac{\sin 2x}{\cos^3 x}dx$

6. $\int \frac{x^4}{\sqrt{36-x^2}}dx$

7. $\int \frac{7-2x}{x^2-8x+25}dx$

8. $\int \frac{5x+4}{(x-2)(x^2+3)}dx$

9. $\int_5^8 \frac{dx}{\sqrt{3x+1}-1}$

10**. $y = -x^2 - 5x;\ y = 0$

Вариант 25

1. $\int \frac{x^3-1}{x^2+8}dx$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{6}}(4-5x)\cos 3xdx$

3. $\int x\mathrm{arctg}2xdx$

4. $\int (1-2x)e^{\frac{x}{3}}dx$

5. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^4 x}dx$

6. $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^4}dx$

7. $\int \frac{4x-11}{x^2-10x+29}dx$

8. $\int \frac{2x^2-3x+6}{x(x-3)(x+2)}dx$

9. $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{5x+1}+2}$

10**. $y=x^2-9; y=0$

Вариант 26

1. $\int \frac{x^2+2x-3}{x^2+6}dx$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}(6x-2)\cos 2xdx$

3. $\int (x-2)10^{3x}dx$

4. $\int (x^5+3x)\ln xdx$

5. $\int \sqrt{\sin x}\cos^3 xdx$

6. $\int \frac{x^4}{\sqrt{(4-x^2)^3}}dx$

7. $\int \frac{16-2x}{x^2+10x+34}dx$

8. $\int \frac{x^2-6}{(x-1)(x^2+4)}dx$

9. $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{5x-1}+1}$

10**. $y=x-2x^2; y=0$

Вариант 27

1. $\int \frac{x^3+2}{x^2+4}dx$

2. $\int_0^{2\pi}(4+x)\sin\frac{x}{4}dx$

3. $\int e^{\sqrt{x}}dx$

4. $\int (x+2)\ln(x+2)dx$

5. $\int \sqrt{\cos x}\sin^3 xdx$

6. $\int \frac{x^4}{\sqrt{25-x^2}}dx$

7. $\int \frac{7-2x}{x^2-6x+25}dx$

8. $\int \frac{x^2+3x-1}{x^2(x-1)^2}dx$

9. $\int_2^{10} \frac{dx}{\sqrt{2x+5}+1}$

10**. $y=2x-x^2;\; y=0$

Вариант 28

1. $\int \frac{2x^2+3x-10}{x^2+5}dx$
2. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}(20-5x)\sin 2xdx$
3. $\int e^{\sqrt{x-1}}dx$
4. $\int \arcsin 2xdx$
5. $\int \cos^2 x \sin^3 x\, dx$
6. $\int \frac{x^4}{\sqrt{(16-x^2)^3}}dx$
7. $\int \frac{7+8x}{x^2+2x+10}dx$
8. $\int \frac{x+5}{x^2(x+1)^2}dx$
9. $\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{3x+1}+2}$

10**. $y=-2x-x^2; y=0$

Вариант 29

1. $\int \frac{x^2-x+2}{x^2+4}dx$
2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2x+7)\cos xdx$
3. $\int \ln\sqrt{x-1}\, dx$
4. $\int \arccos\frac{x}{3}dx$
5. $\int \frac{23-4x}{x^2-4x+8}dx$
6. $\int \frac{2x+3}{(x-3)x^3}dx$
7. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x}dx$
8. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}}$
9. $\int_3^{23} \frac{dx}{\sqrt{2x+3}+1}$

10**. $y=7x-3x^2; y=0.$

Вариант 30

1. $\int \frac{x^3-1}{x^2+6}dx$
2. $\int_0^{\pi}(3+2x)\sin\frac{x}{2}dx$
3. $\int xe^{2x}dx$
4. $\int \mathrm{arctg}\frac{x}{2}dx$
5. $\int \frac{\sin^3 2x}{\cos^3 2x}dx$
6. $\int \frac{x^2}{\sqrt{(16-x^2)^3}}dx$
7. $\int \frac{24-4x}{x^2-6x+13}dx$
8. $\int \frac{x-7}{(x-2)(x^2+1)}dx$
9. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3x+1}+5}$

10**. $y=7x-2x^2; y=0.$

3. ЗАДАНИЯ ПО ТЕМЕ: ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Примерный вариант заданий с решением

1. Найти частные производные первого и второго порядков
$$z = xy\sin(x-y).$$
2. Найти dz, $z = z(x,y,t)$, $z = \operatorname{arctg}{(x-y)^t}$.
3. Показать, что функция $z = \ln x + \frac{y}{x}$ удовлетворяет уравнению:
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} + y\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$
4. Найти $\dfrac{du}{dx}$ и $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, если $u = \arcsin\frac{x}{y}, y = \sqrt{x^2+1}$.
5. Найти $\dfrac{\partial u}{\partial p}$ и $\dfrac{\partial u}{\partial t}$, если $u = \log_2(x^2+y^2)$, $x = pt$, $y = \frac{p}{t}$.
6. Найти $y'(x)$ с помощью логарифмирования и последующего дифференцирования по x функции $y(x) = x^{x^2}$.
7. Найти dz функции $z = z(x,y)$ заданой неявно уравнением $x = z\ln\frac{z}{y}$.
8. Найти экстремумы функции $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$.
9. Найти величину и направление градиента функции
$$u = \operatorname{tg} x - x + 3\sin y - \sin^3 y + z + \operatorname{ctg} z \quad \text{в т. } M(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}).$$
10. Найти производную функции $u = \ln\frac{z^2}{x-2y}$ в точке $A(2,2,3)$ в направлении, идущем от точки A к точке $B(5,6,15)$.

Решение

1. Нахождение частных производных функции нескольких переменных сводится к нахождеию обыкновенной производной этой функции по одной из переменных при условии, что остальные переменные выступают в роли параметров.

Найдем частные производные первого порядка по формуле производной произведения $(uv)' = u' \cdot v + v' \cdot u$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot \sin(x-y) + xy \cdot \cos(x-y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x \cdot \sin(x-y) + xy \cdot \cos(x-y) \cdot (-1) = x \cdot \sin(x-y) - xy \cdot \cos(x-y)$$

Найдем частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y\cos(x-y) + y\cos(x-y) - xy\sin(x-y) =$$
$$= 2y\cos(x-y) - xy\sin(x-y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x\cos(x-y)\cdot(-1) - x\cos(x-y) + xy\sin(x-y)\cdot(-1) =$$
$$= -2x\cos(x-y) - xy\sin(x-y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \sin(x-y) + x\cos(x-y) - y\cos(x-y) + xy\sin(x-y) =$$
$$= \sin(x-y)\cdot(1+xy) + \cos(x-y)\cdot(x-y)$$

2. Полный дифференциал функции $z = z(x, y, t)$ определяется по формуле $dz = z'_x dx + z'_y dy + z'_t dt$. Найдем частные производные $z'_x,\ z'_y,\ z'_t$:

$$z'_x = \frac{1}{1+(x-y)^{2t}} \cdot t \cdot (x-y)^{t-1} = \frac{t\cdot(x-y)^{t-1}}{1+(x-y)^{2t}};$$

$$z'_y = \frac{-t\cdot(x-y)^{t-1}}{1+(x-y)^{2t}}; \qquad z'_t = \frac{(x-y)^t \cdot \ln|x-y|}{1+(x-y)^{2t}}.$$

Подставим найденные частные производные в формулу полного дифференциала функции.

$$dz = \frac{t\cdot(x-y)^{t-1}}{1+(x-y)^{2t}}\,dx + \frac{-t\cdot(x-y)^{t-1}}{1+(x-y)^{2t}}\,dy + \frac{(x-y)^t\cdot\ln|x-y|}{1+(x-y)^{2t}}\,dt.$$

3. Найдем частные производные функции $z = z(x, y)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x} - \frac{y}{x^2}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x}; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{x^2};$$

Подставим найденные значения производных в заданное уравнение:

$$\frac{1}{x} - \frac{y}{x^2} = \frac{1}{x} + y\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right), \qquad \frac{x-y}{x^2} = \frac{x-y}{x^2}$$

Получили тождество.

Следовательно, функция $z = ln\,x + \frac{y}{x}$ удовлетворяет уравнению.

4. Полная производная функции $u = u(x, y)$, где $y = f(x)$ находится по формуле: $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} \cdot \dfrac{dy}{dx}$.

Найдем частные производные $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial u}{\partial y}$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\arcsin\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\arcsin\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{y\sqrt{y^2 - x^2}};$$

Найдем производную функции $y = f(x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}};$$

Подставим найденные производные в формулу полной производной:

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}} - \frac{x}{y\sqrt{y^2 - x^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}} - \frac{x^2}{y\sqrt{y^2 - x^2} \cdot \sqrt{x^2+1}} =$$

$$= \frac{y\sqrt{x^2+1} - x^2}{y\sqrt{y^2 - x^2} \cdot \sqrt{x^2+1}};$$

5. Частные производные сложной функции $u = u(x, y)$, где $x = x(p, t)$ и $y = y(p, t)$ находим по формулам:

$$\frac{\partial u}{\partial p} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial p}; \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial u}{\partial p} = \frac{2x}{\left(x^2 + y^2\right) \cdot \ln 2} \cdot t + \frac{2y}{\left(x^2 + y^2\right)\ln 2} \cdot \frac{1}{t} = \frac{2xt^2 + 2y}{t\left(x^2 + y^2\right)\ln 2} = \frac{2pt^3 + \frac{2p}{t}}{t\left(p^2t^2 + \frac{p^2}{t^2}\right)\ln 2} =$$

$$= \frac{2pt^4 + 2p}{(p^2t^4 + p^2)\ln 2} = \frac{2p\left(t^4+1\right)}{p^2\left(t^4+1\right)\ln 2} = \frac{2}{p \cdot \ln 2};$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{2x}{\left(x^2 + y^2\right) \cdot \ln 2} \cdot p + \frac{2y}{\left(x^2 + y^2\right)\ln 2} \cdot \left(-\frac{p}{t^2}\right) =$$

$$=\frac{2p(xt^2-y)}{t^2\ln 2\left(x^2+y^2\right)}=\frac{2p\left(pt^3-\frac{p}{t}\right)}{t^2\ln 2\left(p^2t^2+\frac{p^2}{t^2}\right)}=\frac{2p^2\left(t^4-1\right)}{t^3\cdot\ln 2\cdot\left(p^2t^2+\frac{p^2}{t^2}\right)}=$$

$$=\frac{2p^2\left(t^4-1\right)}{t\cdot\ln 2\cdot\left(p^2t^4+p^2\right)}=\frac{2\left(t^4-1\right)}{t\cdot\ln 2\cdot\left(t^4+1\right)};$$

6. Прологарифмируем обе части уравнения по основанию e, тогда:

$$\ln y=\ln x^{x^2},\ \ln y=x^2\ln x$$

Продифференцируем по x обе части полученного уравнения:

$$\frac{1}{y}y'=2x\cdot\ln x+x^2\frac{1}{x} \qquad y'=x^{x^2}\left(2x\ln x+x\right)$$

$$y'=x^{x^2}\cdot x\left(2\ln x+1\right) \qquad y'=x^{x^2+1}\left(2\ln x+1\right)$$

7. $x=z\ln\frac{z}{y}$ => $x-z\ln\frac{z}{y}=0.$ Тогда найдем F'_x, F'_y, F'_z, где $F(x,y,z)=x-z\ln\frac{z}{y}$:

$$F'_x=1; \qquad F'_y=-z\cdot\frac{y}{z}\cdot\left(-\frac{z}{y^2}\right)=\frac{z}{y}; \qquad F'_z=-1\cdot\ln\frac{z}{y}-1=-\ln\frac{z}{y}-1;$$

Частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ находятся по формулам:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z} \text{ и } \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z},$$

Тогда полный дифференциал функции, заданной неявно, можно записать:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=-\frac{F'_x}{F'_z}dx-\frac{F'_y}{F'_z}dy=-\frac{F'_xdx+F'_ydy}{F'_z}$$

Подставим найденные производные в формулу полного дифференциала функции, заданной неявно:

$$dz=-\frac{F'_xdx+F'_ydy}{F'_z}=-\frac{dx+\frac{z}{y}dy}{-\ln\frac{z}{y}-1}=\frac{ydx+zdy}{y\ln\frac{z}{y}+y}$$

8. Найдем критические точки функции, используя необходимые условия существования экстремума функции двух переменных: $\begin{cases} z'_x\ (x,y) = 0 \\ z'_y\ (x,y) = 0 \end{cases}$

$z'_x = 2x + y - 3$, $z'_y = x + 2y - 6$

Решим систему:

$$\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x + 2y - 6 = 0 \end{cases}; \qquad \begin{cases} 2(6-2y) + y - 3 = 0 \\ x = 6 - 2y \end{cases}; \qquad \begin{cases} y = 3 \\ x = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ точка $P_0(0;3)$ – критическая точка функции.

Исследуем точку $P_0(0;3)$ на экстремум, используя достаточное условие существования экстремума функции двух переменных:

$$\Delta(P_0) = \begin{vmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{yx} & z''_{yy} \end{vmatrix} > 0$$

$$z''_{xx} = 2$$
$$z''_{xy} = z''_{yx} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \Delta(P_0) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0,$$
$$z''_{yy} = 2$$

следовательно $P_0(0;3)$ – точка экстремума.

С учетом знака $z''_{xx}(P_o)$ ($z''_{xx} = 2 > 0$) точка $P_0(0;3)$ является точкой минимума.

Найдем значение функции в точке минимума: $z(P_o) = 9 - 6 \cdot 3 = -9$

Ответ: $z_{min}(P_o) = -9$

9. Градиентом функции $u = u(x,y,z)$, дифференцируемой в точке M, называется вектор $\overline{grad}\ u\ (M) = \left(u'_x(M), u'_y(M), u'_z(M)\ \right)$

$$\left|\overline{grad}\ u\ (M)\right| = \sqrt{\left(u'_x(M)\right)^2 + \left(u'_y(M)\right)^2 + \left(u'_z(M)\right)^2}$$

Найдем частные производные функции $u(x,y,z)$ в точке $M\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$u'_x(M) = \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)\Big|_M = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} - 1 = 1$$

$$u'_y(M) = (3\cos y - 3\sin^2 y \cdot \cos y)|_M = \frac{3}{2} - 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - \frac{9}{8} = \frac{3}{8}$$

$$u'_z(M) = \left(1 - \frac{1}{\sin^2 z}\right)\Big|_M = 1 - \frac{1}{1} = 0$$

$$\overline{grad}\,u\,(M) = \left(u'_x(M), u'_y(M), u'_z(M)\right) = \left(1, \frac{3}{8}, 0\right)$$

$$\left|\overline{grad}\,u\,(M)\right| = \sqrt{(1)^2 + \left(\frac{3}{8}\right)^2 + (0)^2} = \frac{\sqrt{73}}{8}$$

Ответ: $\overline{grad}\,u\,(M) = \left(1, \frac{3}{8}, 0\right)$, $\left|\overline{grad}\,u\,(M)\right| = \frac{\sqrt{73}}{8}$

10. Найдем частные производные функции $u(x; y; z)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x-2y}{z^2} \cdot \frac{-z^2}{(x-2y)^2} = -\frac{1}{x-2y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x-2y}{z^2} \cdot \frac{2z^2}{(x-2y)^2} = \frac{2}{x-2y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{x-2y}{z^2} \cdot \frac{2z}{x-2y} = \frac{2}{z}$$

Вычислим их в точке A (2,2,3)

$$\frac{\partial u}{\partial x}(A) = -\frac{1}{2-4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(A) = \frac{2}{2-4} = -1$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}(A) = \frac{2}{3}$$

Найдем координаты вектора $\overline{AB}$

$$\overline{AB} = (5-2; 6-2; 15-3) = (3; 4; 12)$$

Найдем длину вектора $\overline{AB}$ и его направляющие косинусы.

$$|\overline{AB}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$$

$$\cos\alpha = \frac{3}{13};\ \cos\beta = \frac{4}{13};\ \cos\gamma = \frac{12}{13}$$

Тогда по формуле производной по направлению:

$$\frac{\partial u}{\partial \overline{AB}}(A) = \frac{\partial u}{\partial x}(A)\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}(A)\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}(A)\cos\gamma$$

вычисляем:

$$\frac{\partial u}{\partial \overline{AB}}(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{13} + (-1) \cdot \frac{4}{13} + \frac{2}{3} \cdot \frac{12}{13} =$$

$$= \frac{9-24+48}{78} = \frac{33}{78} = \frac{11}{26}$$

Ответ:

$$\frac{\partial u}{\partial \overline{AB}}(A) = \frac{11}{26}$$

Варианты заданий для самостоятельного решения (1–30)

Вариант 1

1. Найти частные производные первого и второго порядков
$$z = e^{3x^2} + 2y^2 - xy.$$
2. Найти dz, $z = \ln\left(\text{ctg}2x + \sqrt{y}\right)$.
3. Показать, что функция $u = xe^{\frac{-y}{x}}$ удовлетворяет уравнению
$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + 2\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) = y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$
4. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{dz}{dx}$, если $z = \text{arctg}\frac{\sqrt{y}}{x}$, $y = 3^{x^2}$.
5. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial u}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v}$, если $z = x^3y - y^4x$, $x = u\cos v$, $y = u\sin v$.
6. Найти $y'(x)$ с помощью логарифмирования и последующего дифференцирования по x функции $y = (\sin 3x)^{\ln(\arcsin x)}$.
7. Найти dz, где функция $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением
$$3x^2 + 6x\sqrt{y} - \sqrt{x}z^3 + z^2 - 5x = 0$$
8. Найти экстремумы функции $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$.
9. Найти производную функции $u = 3xy^2 + z^3 - xyz$ в точке M (1;1;2) по направлению вектора $\overrightarrow{MN}$, если точка N (–1;3;3).
10. $u = \text{tg}\, x - x + 3\sin y + z - \text{ctg}\, z$. Найти $\overrightarrow{grad\, u}$ в точке $M\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Вариант 2

1. Найти частные производные первого и второго порядков
$$z = \text{tg}\sqrt{y}(\sqrt[3]{4x^2} + 1)^2$$
2. Найти dz, $z = \log_2(\sqrt{x} + y^2 + 3^{x/y})$
3. Найти d^2z, если $z = y^2 \arcsin x$.
4. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{dz}{dx}$, если $z = \text{tg}^2\frac{\sqrt{x}}{y}$, $y = \cos^3 x$.
5. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial u}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v}$, если $z = e^{x^2+y^2}$, $x = u^2\text{tg}\, v$, $y = \frac{u}{v}$.
6. Найти $y'(x)$ с помощью логарифмирования и последующего дифференцирования по x функции $y = (\text{tg}\, 2x)^{\sin(\ln x)}$.
7. Найти dz, где функция $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением
$$\text{arctg}\sqrt{x} + yz^2 - \sin z = 0$$

8. Найти экстремумы функции $z = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$.
9. Найти производную функции $u = (\ln y - \operatorname{arctg} z)x$ в точке M (–2;1;–1) по направлению вектора $\vec{l} = 8\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 8\vec{k}$.
10. Найти величину наибольшей скорости изменения функции $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 3x + 2y - 6z$ в точке A(1;1;1).

Вариант 3

1. Найти частные производные первого и второго порядков
$$z = \ln(y + \sqrt{x^2 + y^2})$$
2. Найти dz, $z = (5 - y^2)^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}$.
3. Показать, что функция $u = \ln\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ удовлетворяет уравнению $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, при $\forall$ a и b.
4. Найти $\dfrac{dz}{dt}$, если $z = \operatorname{arsin}\sqrt{\frac{y}{x}}, x = \frac{1}{t},\ y = ln^2 t$.
5. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial v}$, если $z = x^2 \ln y$, $x = \frac{u}{v}$, $y = 3u - 2v$.
6. Найти $y'(x)$ с помощью логарифмирования и последующего дифференцирования по x функции $y = (\ln \sin x)^{\arccos 3x}$.
7. Найти dz, где функция $z=z(x,y)$ задана неявно уравнением
$$\operatorname{arctg}(xy) - 3^{(2y+3z)} + z^2 = 15$$
8. Найти экстремумы функции $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2$.
9. Найти производную функции $u = x^2 + \ln(x^2 + 2y^2 + z^2)$ в точке M (1;2;2) в направлении вектора $\vec{s} = 6\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - 6\vec{k}$.
10. Найти $\overrightarrow{grad\, u}$ в точке A (2; 1; 1), если $u = \frac{x}{y} - \sqrt{z}$ и его величину.

Вариант 4

1. Найти частные производные первого и второго порядков
$$z = \sqrt{y}e^{x^2} + \frac{y}{\sqrt[3]{x}}$$
2. Найти dz, если $z = x\operatorname{tg}^2(xy)$.
3. Найти $d^2 z$, если $z = \cos^2(5x - y^2)$.
4. Найти $\dfrac{dz}{dt}$, если $z = \ln(4x + \sin y)$, $x = \operatorname{tg} t$, $y = \operatorname{ctg} t$.
5. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial v}$, если $z = \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{y}}$, $x = \sqrt{y}\ln v$, $y = u^2 \cos\frac{v}{3}$.

6. Найти $y'(x)$ с помощью логарифмирования и последующего дифференцирования по x функции $y = (\arcsin 2x)^{\ln(\cos x)}$.
7. Найти dz, где функция $z=z(x,y)$ задана неявно уравнением
$$(xy)^2 - y^2 + z^2 - xy^2 = 0$$
8. Найти экстремумы функции $z = x^2 + xy + y^2 + x + y$.
9. Найти производную функции $u = \ln\frac{z^2}{x-2y}$ в точке P (3;1;–1) в направлении, составляющем равные острые углы с осями координат.
10. $z = 3^{\frac{x^2}{y}}$. Найти $\overrightarrow{grad\, z}$, его длину и направление в точке A (1;1).

Вариант 5

1. Найти частные производные первого и второго порядков
$$z = \sin\frac{x}{y}\cos\frac{x}{y} + e^{-\frac{x}{y}}$$
2. Найти dz, $z = \ln(\sqrt{x} + \sqrt[3]{y})$.
3. Показать, что функция $u = \ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ удовлетворяет уравнению
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$
4. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{dz}{dx}$, если $z = \text{arsin}\frac{\sqrt{x}}{y}$, $y = \frac{1}{\ln(x^2+4)}$.
5. Найти $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$, если $z = \ln(x^2 + \frac{1}{y^2})$, $x = uv$, $y = u^2v^2$.
6. Найти $y'(x)$ с помощью логарифмирования и последующего дифференцирования по x функции $y = (\ln\cos x)^{\sin x}$.
7. Найти dz, где функция $z = z(x,y)$ задана неявно уравнением
$$z = \text{arctg}\,\frac{y}{z-x} + x$$
8. Найти экстремумы функции $z = x^2 - xy + 2y^2 + 3x + 2y + 1$.
9. Найти производную функции $u = ln(x^2 + xy + z^2)$ в точке M (1;3;1) по направлению вектора $\overrightarrow{grad\, u}(M)$.
10. Найти производную функции $u = \text{arctg}(x^2 + y^2) - xy^2z^3$ в точке $M\,(1;1;1)$ по направлению $\overrightarrow{MN}$, где точка N (2;3;3).

Вариант 6

1. Найти частные производные первого и второго порядков

$$z = \ln \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}$$

2. Найти dz, где $z = y \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x}}{y}$.
3. Найти d^2z, если $z = \frac{\sin^2 3y}{x}$.
4. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{dz}{dx}$, если $z = xe^{y^2} - \ln(x - 2y)$, $y = \cos 2x$.
5. Найти $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$, если $z = 2^{\operatorname{tg} xy}$, $x = u^2 \sin^2 v$, $y = u^3 + \cos v$.
6. Найти $y'(x)$ с помощью логарифмирования и последующего дифференцирования по x функции $y = (\operatorname{tg} \ln x)^{\arcsin x}$.
7. Найти dz, где функция $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением
$$\sin^3 xy + z^3 x - y\sqrt{z} = 5$$
8. Найти экстремумы функции $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$.
9. Найти производную функции $z = x^{\sin 2y}$ в точке A $(2;\frac{\pi}{4})$ по направлению вектора, составляющего с осью Ox угол 60°.
10. Найти направление наибольшего возрастания функции $u = xy - \frac{x}{z}$ в точке M $(-4;3;-1)$.

Вариант 7

1. Найти частные производные первого и второго порядков
$$z = \sin(x^2 + xy) + 2^{\ln \sin(xy)}$$
2. Найти dz, где $z = (2y^3 x + 1)\, 5^{\cos^2 \frac{x}{y}}$.
3. Показать, что функция $z = \ln x + \frac{y}{x}$ удовлетворяет уравнению
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} + y \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$
4. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{dz}{dx}$, если $z = 2e^{y^2} - \ln(x - 2y)$, $y = \cos 2x$.
5. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = \operatorname{ctg} uv$, $u = x^{3y}$, $v = 2^{x+y}$.
6. Найти $y'(x)$ с помощью логарифмирования и последующего дифференцирования по x функции $y = (\cos \frac{x}{3})^{\operatorname{ctg} x}$.
7. Найти dz, где функция $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением
$$z = x + \operatorname{arctg} \frac{y}{z - x}$$

8. Найти экстремумы функции $z = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2)$.
9. Найти скорость изменения скалярного поля $u = 5x^2yz - 7xy^2z + +5xyz^2$ в точке M (1;1;1) в направлении вектора $\vec{a} = 8\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} + 8\vec{k}$.
10. Найти угол между градиентами скалярных полей $u = x^2 + y^2 - z^2$ и $u = \arcsin\frac{x}{x+y}$ в точке $M\,(1; 1; \sqrt{7})$.

Вариант 8

1. Найти частные производные первого и второго порядков
$$z = (x^2 + y^2)^5 + \arcsin\sqrt{xy}$$
2. Найти dz, где $z = (2\cos y + 1)^{x^3}$.
3. Найти d^2z, если $z = \sqrt[5]{x^3 + y^2 + 1}$.
4. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{dz}{dx}$, если $z = \cos^2(5x - y^2)$, $y = \ln(x^2 + 4)$.
5. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $z = u\sin^2 v$, $u = \frac{3x+1}{y}$, $v = \frac{yx}{3}$.
6. Найти $y'(x)$ с помощью логарифмирования и последующего дифференцирования по x функции $y = \sqrt[x]{\operatorname{arcctg} 2x}$.
7. Найти dz, где функция $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением
$$x^2yz^3 + tg\,\frac{x}{z} = 0$$
8. Найти экстремумы функции $z = x^2y^2(x + y - 1)$, $x > 0, y > 0$.
9. Найти скорость изменения скалярного поля $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$ в точке M (1;1;1) в направлении вектора $\vec{l} = 2\vec{\imath} - \vec{k}$.
10. Найти наибольшую скорость возрастания поля $u = \ln(x^2 + 4y^2)$ в точке M (6;4).

Вариант 9

1. Найти частные производные первого и второго порядков
$$z = \ln(y + \sqrt{x^2 + y^2}) + \operatorname{arctg}(x^2y)$$
2. Найти dz, где $z = \frac{\operatorname{tg}^2(2x-3y)}{\ln(\cos 5y)}$.
3. Показать, что функция $u = \sin^2(x - 2t)$ удовлетворяет уравнению
$$4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$
4. Найти $\dfrac{du}{dt}$, если $u = e^{x-2y}, x = \sin t$, $y = t^3$.

5. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial u}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v}$, если $z = ctg\left(\frac{x}{2y} + y^2\right)$, $y = \sqrt{\frac{v}{u}}$, $x = \sin\frac{u}{v}$.
6. Найти $y'(x)$ с помощью логарифмирования и последующего дифференцирования по x функции $y = (\sin x)^{e^{\cos x}}$.
7. Найти dz, где функция $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением
$$x^2 + y^3 + z = 3^{x^2-3y^2+z^2}$$
8. Найти экстремумы функции $z = x^2 + xy + y^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, $x > 0, y > 0$.
9. Найти производную $\left(\frac{\partial u}{\partial \bar{l}}\right)_M$ в направлении, идущем от точки M (1;1;1) к точке N (4;5;13) $u = x^2y^3z + \sin^2(x + y - 2z)$.
10. Найти $\overline{grad\, z}\,(A)$, в точке $A(1; -1)$, если $z = \operatorname{arctg}\frac{x+2y}{x}$.

Вариант 10

1. Найти частные производные первого и второго порядков
$$z = \ln(\sin yx^3) + (\operatorname{tg} y)^x$$
2. Найти dz, где $z = x^3 \arcsin\frac{x}{\sqrt{y}}$.
3. Найти d^2z, где $z = e^{2y}\cos\frac{x}{3}$.
4. Найти $\dfrac{du}{dt}$, если $u = z^2 + y^2 + zy$, $z = \sin t$, $y = e^t$.
5. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial u}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v}$, если $z = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{2y}}$, $x = u^2v$, $y = \frac{u}{v}$.
6. Найти $y'(x)$ с помощью логарифмирования и последующего дифференцирования по x функции $y = (x^2 + 3)^{\arcsin 2x}$.
7. Найти dz, где функция $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением
$$xz + y^2xz^2 + ln(x^2 + z^2) = 0$$
8. Найти экстремумы функции $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$.
9. Найти $\left(\frac{\partial u}{\partial \bar{l}}\right)_M$ в направлении, идущем от точки M (0;–1;2) к точке N (3;3;14), $u = x\operatorname{ctg}^2\frac{(y+z)\pi}{x+1-y}$.
10. Найти $\overline{grad\, z}\,(A)$, в точке $A(2; 1)$, если $z = \frac{x}{\sqrt{2x^2+y^2}}$.

Вариант 11

1. Найти частные производные первого и второго порядков
$$z = \operatorname{arctg}\sqrt[3]{xy} + 3(\sin y)^x$$

2. Найти dz, где $z = \operatorname{ctg}^3\left(x^2 y + \frac{\sqrt[5]{x}}{y}\right)$.
3. Показать, что функция $z = \cos(x + \ln y)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

4. Найти $\frac{dz}{dt}$, $z = \arcsin(x - y)$, $x = 3t$, $y = 4t^3$.
5. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = \log_3(2u^2 + v^3)$, $u = xy^2$, $v = 3^{x^2 y}$.
6. Найти $y'(x)$ с помощью логарифмирования и последующего дифференцирования по x функции $y = (\operatorname{ctg} 4x)^{x^7}$.
7. Найти dz, если функция $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением $3z \cdot \sin(x + y) - \cos(x - y) = 0$.
8. Найти экстремумы функции $z = x^3 + xy^2 + 6xy$.
9. Найти производную $\left(\frac{\partial z}{\partial \bar{l}}\right)_M$ в направлении, идущем от точки M (1;–1) к точке N (4;3), $z = x \arcsin\frac{x-1}{y+2}$.
10. Найти $\overline{grad\, z}\,(A)$ и $\overline{grad\, z}\,(B)$, если $z = x^2 y + \ln\frac{x}{2y}$, $A(2; 1)$, $B(1; 2)$.

Вариант 12

1. Найти частные производные первого и второго порядков

$$z = 3^{\sin \ln(x+y) + \operatorname{tg} x^2 y^3}$$

2. Найти dz, где $z = \sin(\log_5 \frac{x^2+4}{y^3})$.
3. Найти $d^2 z$, где $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{x+y}$.
4. Найти $\frac{du}{dt}$, если $u = \frac{yz}{x}$, $x = e^{3t}$, $y = e^{t^2-1}$, $z = \frac{1}{\cos t}$.
5. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = \log_3 \frac{u}{v}$, $u = e^{x+y}$, $v = e^{x-y}$.
6. Найти $y'(x)$ с помощью логарифмирования и последующего дифференцирования по x функции $y = \sqrt[7]{\frac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+4}}}$.
7. Найти dz, если функция $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением

$$(3x - zy)\operatorname{tg}\frac{x}{z} + y^2 z = 0$$

8. Найти экстремумы функции $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

9. Найти $\left(\frac{\partial z}{\partial \bar{l}}\right)_M$ в направлении, составляющем с осью Ox угол 135°. Точка M (–1;2), $z = x^2 \operatorname{tg}(y^2 + 4x)$.
10. Найти величину наибольшего подъема поверхности $z = 3x^2 + 4y^2$, в точке A (1;1;7).

Вариант 13

1. Найти частные производные первого и второго порядков
$$u = \sin(x^2 + y^2 + z^2).$$
2. Найти dz, где $z = \frac{\sqrt[3]{3x-5}}{\cos(xy+7y^2)}$.
3. Показать, что функция $z = x^2 \sin(x - y)$ удовлетворяет уравнению
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{2}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} - z = 0$$
4. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{dz}{dx}$, если $z = \ln\left(\frac{x+y}{y}\right)$, где $y = \cos 3x$.
5. Найти $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}$, если $z = \operatorname{arctg}(xy)$, $x = v - 2u$, $y = v + 2u$.
6. Найти $y'(x)$ с помощью логарифмирования и последующего дифференцирования по x функции $y = \sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(1-x)^2}}$.
7. Найти dz, если функция $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением
$$4y^2 z + x \operatorname{tg}(yz) = 0$$
8. Найти экстремумы функции $z = \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y$, $x > 0$, $y > 0$.
9. Найти $\left(\frac{\partial u}{\partial \bar{l}}\right)_M$ в направлении, составляющем одинаковые тупые углы с осями координат, $u = x \arcsin\frac{\sqrt{x}}{y} + x^2 yz$, точка M (1;2;1).
10. Найти $\overline{grad\, u}\,(A)$, $u = 3^{x^2+y^2+z^2}$, A (1;–1;1).

Вариант 14

1. Найти частные производные первого и второго порядков $u = x^{y/z}$.
2. Найти dz, где $z = (1 + \sqrt[3]{x})^{\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{y}}}$.
3. Найти $d^2 z$, где $z = x \ln\frac{y}{x}$.
4. Найти $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{du}{dx}$, если $u = \ln(e^x + e^y)$, $y = x^3$.

5. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial u}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v}$, если $z = x^2y + 2y^2$, $x = \frac{2u}{u+v}$, $y = v^2 - 3u^2$.
6. Найти $y'(x)$ с помощью логарифмирования и последующего дифференцирования по x функции $y = (\arcsin 3x)^{\operatorname{tg}\sqrt{x}}$.
7. Найти dz, где функция $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением
$$z\cos(2x - y) - \frac{xz^2}{y} + \sqrt{z} = 0$$
8. Найти экстремумы функции $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 11$.
9. Найти $\left(\dfrac{\partial u}{\partial \bar{l}}\right)_M$ в направлении, составляющем с Ox угол $\alpha = \frac{\pi}{3}$, с Oy угол $\beta = \frac{\pi}{3}$ и тупой угол с Oz; $u = x^2 + 2xy - 2y^2 - zx$ и точка M (2;1;3).
10. Найти угол между $\overline{grad\, z}\,(A)$ и $\overline{grad\, u}\,(B)$, $z = xe^{2x^2+3y}$, A(1;0), B(2;–3).

Вариант 15

1. Найти частные производные первого и второго порядков
$$z = (2x + y)^{2x+y}$$
2. Найти dz, где $z = \sqrt[3]{x^2 + y^3}$.
3. Показать, что функция $z = e^x \cos y$ удовлетворяет уравнению
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$
4. Найти $\dfrac{\partial u}{\partial t}$, $\dfrac{du}{dt}$, если $u = \sqrt{2x + y - t}$; $x = \cos 2t$; $y = 1 - \sin^2 2t$.
5. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $z = (\sin u)^v$, $u = x^y$, $v = y - x$.
6. Найти $y'(x)$ с помощью логарифмирования и последующего дифференцирования по x функции $y = \sqrt[x]{\operatorname{arctg} 3x}$.
7. Найти dz, если функция $z=z(x,y)$ задана неявно уравнением
$$z\ln(x + y + z) = \frac{xy}{z}$$
8. Найти экстремумы функции $z = x^2y(2 - x - y)$, $x > 0$, $y > 0$.
9. Найти $\overrightarrow{grad\, z}\,(M)$, $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y^2}$ в точке M (–1;1).
10. $u = z^2(x + y)$. Найти $\left(\dfrac{\partial u}{\partial \bar{l}}\right)_M$, где точка M $(0; 1; -3)$, $\vec{l} = \overline{MN}$, точка $N(2; 3; -2)$.

Вариант 16

1. Найти частные производные первого и второго порядков
$$z = 2\sqrt{\frac{1-\sqrt{xy}}{1+\sqrt{xy}}}$$
2. Найти dz, где $z = (\text{arctg}\,(2x)^{3y^2}$.
3. Найти $d^2z, z = (2x-y)e^{xy}$.
4. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{dz}{dx}$, если $z = \text{arctg}(x^2y) - \cos\frac{x}{y}$, $y = \ln 2x$.
5. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $z = \ln(1+uv)$, $u = y\sin x$, $v = x\cos y$.
6. Найти $y'(x)$ с помощью логарифмирования и последующего дифференцирования по x функции $y = (\cos x)^{e^{\sin x}}$.
7. Найти dz, если функция $z=z(x,y)$ задана неявно уравнением
$$\frac{x}{z} = \ln\frac{z}{y} + 1$$
8. Найти экстремумы функции $z = e^{2x}(x+y^2+2y)$.
9. Найти производную функции $u = 3x^4 + xy + y^3$ в точке M (1;2) в направлении, составляющем с осью Ox угол 135°.
10. Найти $\overrightarrow{grad\,z}(M)$ в точке M (–1;4;1), где $z = x^2\sqrt{y-2t}$.

Вариант 17

1. Найти частные производные первого и второго порядков
$$z = \frac{y}{(x^2-y^2)^5}$$
2. Найти dz, где $z(x,y) = \text{ctg}^2(xy) + 2^{\frac{y}{x}}$.
3. Показать, что функция $z = ln\,x + \frac{y}{x}$ удовлетворяет уравнению
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} + y\,\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$
4. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{dz}{dx}$, если $z = \text{arsin}\frac{\sqrt{x}}{y}$, $y = \frac{1}{\ln(x^2+4)}$.
5. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial v}$, если $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $x = u\sin 3v$, $y = u\cos 3v$.
6. Найти $y'(x)$ с помощью логарифмирования и последующего дифференцирования по x функции $y(x) = (\cos x)^{x^2+1}$.
7. Найти dz, если функция $z = z(x,y)$ задана неявно уравнением
$$x\cos(y+z) = \frac{z}{x+y}$$

8. Найти экстремумы функции $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$.

9. Найти $\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}$ в точке $A(0;0)$, если $u = \ln(e^x + e^y)$, а $\vec{l} = \overrightarrow{AB}$, где точка B (3;4).

10. Найти $\overline{grad\ z}\ (A)$ в точке A (1;1), где $z = \arcsin\frac{x}{x+y}$.

Вариант 18

1. Найти частные производные первого и второго порядков
$$u(x,y,z) = \ln^2(3x + 5yz) - \frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}} - 8x$$

2. Найти dz, где $z(x,y) = (\sin^2 3y)^{3x^4}$.

3. Найти d^2z, где $z = \frac{\cos(y+x)}{y-x}$.

4. Найти $\frac{\partial z}{\partial t}$, $\frac{dz}{dt}$, если где $z = \ln(e^{2t} + 4x + \sin y)$, $x = \operatorname{tg} t$, $y = \operatorname{ctg} t$.

5. Найти $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$, если $z = x^2y - y^2x$, $x = u\cos v$, $y = u\sin v$.

6. Найти $y'(x)$ с помощью логарифмирования и последующего дифференцирования по x функции $y(x) = (x^2+1)^{\sin x}$.

7. Найти dz, если функция $z = z(x,y)$ задана неявно уравнением
$$e^{2x} - \ln z = \operatorname{arctg}(z - y)$$

8. Найти экстремумы функции $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 5y$.

9. Найти $\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(A)$, где $u = x^2y^2z^2$ точке A(5;1;–2) в направлении $\vec{l} = \overrightarrow{AB}$, точке B (9;4;10).

10. Найти направление наибольшего возрастания функции
$z = \frac{x+\sqrt{y}}{y}$ в точке M (2;1).

Вариант 19

1. Найти частные производные первого и второго порядков
$$u(x,y,z) = \operatorname{arctg}\frac{x+z}{y}$$

2. Найти dz, где $z(x,y) = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x} - 2y\cos x$.

3. Показать, что функция $u = u(x,y)$ удовлетворяет уравнению
$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, где $u = x\sin(x+y) + y\cos(x+y)$.

4. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{dz}{dx}$, где $z = xy^2 - tg\,(x+y)$, $y = \frac{1}{\cos^3 x}$.
5. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial v}$, $z = \arccos(x^2 + \sqrt{y})$, $x = u\cos^2 v$, $y = u^3 \sin v$.
6. Найти $y'(x)$ с помощью логарифмирования и последующего дифференцирования по x функции $y(x) = (x^3+2)^{ln\,x}$.
7. Найти dz, если функция $z = z(x,y)$ задана неявно уравнением $z = \ln\frac{z+x}{y}$.
8. Найти экстремумы функции $z = x^4 + y^4 - 4(x+y)$.
9. Найти $\overrightarrow{grad\,z}(M)$ в точке M (1;2), где $z = e^{-\frac{x}{y}}$.
10. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial \vec{l}}$ функции $z = xy\ln(x+y)$ в точке A(–1;2) по направлению $\vec{l}$, составляющему равные углы с осями координат**.**

Вариант 20

1. Найти частные производные первого и второго порядков
$$z(x,y) = e^{xy}(1+y^2)$$
2. Найти dz, где $z(x,y) = \ln(x + e^{xy})$.
3. Найти d^2z, где $z(x,y) = \sin^2(e^{3x} + e^{2y})$.
4. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial v}$, если $z = \operatorname{arctg}\frac{x^2}{y}$, $x = u^2\ln(1+v^2)$, $y = \ln(v^2+4)$.
5. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ и $\dfrac{dz}{dt}$, если $\mathrm{z} = \ln^2(t + 3x^2 - 6y)$, $x = \operatorname{tg} t$, $\mathrm{y} = \operatorname{ctg} t$.
6. Найти $y'(x)$ с помощью логарифмирования и последующего дифференцирования по x функции $y(x) = (\cos x)^{\operatorname{tg} x}$.
7. Найти dz, если функция $z = z(x,y)$ задана неявно уравнением $3x^2 - 6x\sqrt{y} + \sqrt{x}z^3 - z^2 - 5x = 0$.
8. Найти экстремумы функции $z = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$.
9. Найти производную функции $u = \ln\frac{z^2}{x-2y}$ в точке A(3;1;–1) в направлении, составляющем с осями координат одинаковые острые углы.
10. Найти угол между градиентами скалярных полей $u = xyz$ и $v = x^2 + 9y^2 + 6z^2$ в точке $M\left(1;\frac{1}{3};\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

Вариант 21

1. Найти частные производные первого и второго порядков

$$z = \ln\left(\frac{3x - y}{x^2}\right)$$

2. Найти dz, где $z = \arccos\left(\frac{x^2}{x+y}\right)$.
3. Показать, что функция $u = u(x,t) = sin(x - at) + cos(x + at)$ удовлетворяет уравнению $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при $\forall a$.
4. Найти $\frac{du}{dt}$, если $u = x \cdot \sin y + y \cdot \cos x$, $x = 2t^2 + 1$; $y = 3\sqrt{t}$.
5. Найти $\frac{\partial z}{\partial t}$ и $\frac{\partial z}{\partial p}$, если $z = \arcsin(x - y)$, $x = p \cdot \operatorname{tg} t$, $y = t \cdot \operatorname{tg} p$.
6. Найти $y'(x)$ с помощью логарифмирования и последующего дифференцирования по x функции $y(x) = x^{\operatorname{arctg} x}$.
7. Найти dz, если функция $z = z(x,y)$ задана неявно уравнением $z^2(x + y) = x \cdot e^z - 4y$.
8. Найти экстремумы функции $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$.
9. Найти $\frac{\partial u}{\partial \bar{l}}$ в точке A (–1;2), если $u = x \operatorname{arctg}(x + y)$, а направление $\vec{l} = \overrightarrow{AB}$, B (2;6).
10. Найти угол между градиентами скалярных полей $u = \frac{yz^2}{x}$ и $v = x^2 - y^2 - 3z^2$ в точке M $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Вариант 22

1. Найти частные производные первого и второго порядков
$$z = \frac{x^2}{2y} + \frac{x}{2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$$
2. Найти dz, где $z = x^2 2^{\sqrt{x+y}}$.
3. Найти d^2z, где $z = \ln(x^2 + y^2 + 2x + 1)$.
4. Найти $\frac{dz}{dx}$, если $z = \frac{1}{2}\ln\frac{u}{v}$, $u = \operatorname{tg}^3 x$, $v = \operatorname{ctg}^2 x$.
5. Найти $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$, если $z = \operatorname{tg}^4(4x^2 + 5y)$, $x = 2u + v^3$, $y = 2u \cdot v^3$.
6. Найти $y'(x)$ с помощью логарифмирования и последующего дифференцирования по x функции $y(x) = (\sin 3x)^x$.
7. Найти dz, если функция $z = z(x,y)$ задана неявно уравнением

$$\operatorname{tg}(z+x)-\frac{y}{x}=2z$$

8. Найти экстремумы функции $z=x^3y^2(6-x-y),\ x>0,\ y>0$.
9. Найти $\dfrac{\partial u}{\partial \bar{l}}$ в точке A (1;1;1), где $u=arcsin\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \ \bar{l}=\overrightarrow{grad\,u}(A)$.
10. Найти угол между градиентами скалярных полей $u=x^2-y^2-3z^2$ и $v=\frac{x}{yz^2}$ в точке $M\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Вариант 23

1. Найти частные производные первого и второго порядков
$$u(x,y,z)=x\cdot\sin z-y\cdot\cos z$$
2. Найти dz в т. $A\left(\frac{\pi}{12};2\right)$, где $z=y^{3\sin^2 4x}$.
3. Показать, что функция $z=\frac{xy}{x-y}$ удовлетворяет уравнению
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2}{x-y}$$
4. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{dz}{dx}$, если $z=e^{\operatorname{arctg}(x-y)}$, $y=\operatorname{ctg}x$.
5. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$: $z=u\cdot\cos v-v\cdot\sin u$, $u=x^3+2y$, $v=y-x$.
6. Найти $y'(x)$ с помощью логарифмирования и последующего дифференцирования по x функции $y(x)=x^{\sqrt{x+1}}$.
7. Найти dz, где функция $z=z(x,y)$ задана неявно уравнением $5^z+tg\,x^2+\arcsin(xyz)=0$
8. Найти экстремумы функции $z=(x^2+y)\cdot\sqrt{e^y}$.
9. Найти производную функции $u=x^2y^2z^2$ в точке A (5;1;–2) в направлении вектора $\overrightarrow{AB}$, где B (9;4;10).
10. Найти угол между градиентами скалярных полей
$$u=\frac{6}{x}+\frac{2}{y}-\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}z}\ \text{ и }\ v=\frac{y^2z^3}{x^2}\ \text{ в точке }\ M\left(\sqrt{2};\sqrt{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Вариант 24

1. Найти частные производные первого и второго порядков
$$z=6xy+5\sqrt{x^2+y^2}$$
2. Найти dz, где $z=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$.
3. Найти d^2z, где $z=x\cdot e^{-\frac{y}{x}}$.

4. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{dz}{dx}$, если $z = \operatorname{tg}(x+y) - \ln^2(x-y)$, $y = \operatorname{ctg} x^2$.
5. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$: $z = \operatorname{ctg}^3(u-3v)$, $u = 6x^4 + 5y^2$, $v = x^3 + 2y$.
6. Найти $y'(x)$ с помощью логарифмирования и последующего дифференцирования по x функции $y(x) = (\operatorname{tg} 2x)^{\sin x}$.
7. Найти dz, где функция $z = z(x,y)$ задана неявно уравнением
$$2^{x+z^2} + \cos^2(xy) - z = 0$$
8. Найти экстремумы функции $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$.
9. Найти производную скалярного поля $u = x^2y^2z - \ln(z-1)$ в точке M (1;1;2) по направлению $\vec{l} = 5\vec{\imath} - 6\vec{\jmath} + 2\sqrt{5}\vec{k}$.
10. Найти величину наибольшей скорости изменения функции $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 3x - 2y - 6z$ в точке $A\,(1;1;1)$.

Вариант 25

1. Найти частные производные первого и второго порядков
$$u(x,y,z) = \ln(3x-2y) - 4ze^{\frac{x}{y}}$$
2. Найти dz в точке $A\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{3\pi}{4}\right)$, где $z = \frac{\cos x}{2\cos^2 y} - \frac{1}{2}\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{y}{2}\right)$.
3. Показать, что функция $u = xe^{\frac{-y}{x}}$ удовлетворяет уравнению
$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) = y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$
4. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial v}$, если $z = \ln(x^2 + y^2)$, $x = uv$, $y = \frac{u}{v}$.
5. Найти $\dfrac{dz}{dx}$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, если $z = \arcsin\left(x\sqrt{x} - 5y^2\right)$, $y = \ln\left(x^2 + 1\right)$.
6. Найти $y'(x)$ с помощью логарифмирования и последующего дифференцирования по x функции $y(x) = (3x^2+1)^{\cos x}$.
7. Найти dz, если функция $z = z(x,y)$ задана неявно уравнением $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{z-x}$.
8. Найти экстремумы функции $z = x^3 + y^3 - 3xy$.
9. Найти производную функции $z = \operatorname{arctg}\frac{x}{y^2}$ в точке $A\,(1;-1)$ по направлению вектора $\overrightarrow{AB}$, если точка B (1;2).
10. Найти угол между градиентами скалярных полей $u = 6\sqrt{6}x^3 - 6\sqrt{6}y^3 + 2z^3$ и $v = \frac{y}{xz^2}$ в т. $M\left(\frac{1}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}};1\right)$.

Вариант 26

1. Найти частные производные первого и второго порядков

$$u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - \cos(xy)$$

2. Найти dz, где $z = (5 - y)^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}$.
3. Найти d^2z, где $z = \cos\,(xy)$.
4. Найти $\dfrac{dz}{dt}$, если $z = \operatorname{arctg}\sqrt{x^2 + y^2}$, $x = t^3$, $y = \ln t$.
5. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $z = \ln^3(u^2 + 4v)$, $u = xy^2$, $v = \frac{y}{x^2}$.
6. Найти $y'(x)$ с помощью логарифмирования и последующего дифференцирования по x функции $y(x) = (\operatorname{arctg} x)^{\sqrt{x}}$.
7. Найти dz, если функция $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением

$$\sin^2\,(x - z) - xy^2 + e^z = 0$$

8. Найти экстремумы функции $z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$.
9. Найти производную функции $u = \ln\sin\frac{x}{y}$ в точке $M\,(\frac{\pi}{2}; 2)$ в направлении вектора $\vec{s} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$.
10. Найти угол между градиентами скалярных полей $u = \frac{x^3}{\sqrt{2}} - \frac{y^3}{\sqrt{2}} - \frac{8z^3}{\sqrt{3}}$ и $v = \frac{x^2}{y^2z^3}$ в точке $M\,(\sqrt{2}; \sqrt{2}; \frac{\sqrt{3}}{2})$.

Вариант 27

1. Найти частные производные первого и второго порядков

$$z = \frac{y^2}{3x} + \arcsin(xy)$$

2. Найти dz, $z = sin^3(xy + y^2) - (\frac{1}{2})^{\sqrt{x}}$.
3. Показать, что функция $u = \ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

4. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{dz}{dx}$, если $z = \ln\left(xy + y^3\right)$, $y = \operatorname{ctg}\frac{1}{x}$.
5. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial v}$, если $z = xy^3 + y2^x$, $x = u + v$, $y = u - v$.
6. Найти $y'(x)$ с помощью логарифмирования и последующего дифференцирования по x функции $y(x) = (\cos 3x^2)^{x+1}$.

7. Найти dz, если функция $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением $yz + \arccos(x - z) = 0$.
8. Найти экстремумы функции $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$.
9. Найти производную функции $z = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 1$ в точке A(3:1) в направлении вектора $\overrightarrow{AB}$, точка B (6;5).
10. Найти угол между градиентами функции

$$\mathrm{z} = \arcsin\frac{x}{x+y} \quad \text{в точках} \quad A(1;1) \ \text{и} \ B(3;4).$$

Вариант 28

1. Найти частные производные первого и второго порядков

$$z = e^x(\cos y + x\sin y)$$

2. Найти dz, если $z = \log_2(\sqrt{x} + y^2) + 3^{\frac{x}{y}}$.
3. Найти d^2z, $z = y^{x^3}$.
4. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial v}$, если $z = \operatorname{arctg}\frac{x^2}{y}$, $x = u^2 \cdot \ln(1 + v^2)$, $y = \sqrt{u}e^v$.
5. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{dz}{dx}$, если $z = \ln(x^2 - y^2)$, $y = e^x$.
6. Найти $y'(x)$ с помощью логарифмирования и последующего дифференцирования по *x* функции $y(x) = x^{\ln x}$.
7. Найти dz, если функция $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением

$$\frac{x}{z} = \ln\frac{z}{y} + 1$$

8. Найти экстремумы функции $z = x^2 + y^2 - 6x + 4y + 2$.
9. Найти точку, в которой градиент функции $z = \ln(x + \frac{1}{y})$ равен $\vec{\imath} - \frac{16}{9}\vec{\jmath}$
10. Найти производную функции $u = xy^2z^2$ в точке $M\ (3; 2; 1;)$ в направлении вектора $\overrightarrow{MN}$, где точка $N\ (5; 4; 1;)$

Вариант 29

1. Найти частные производные первого и второго порядков $u = x^{\frac{y}{z}}$.
2. Найти dz, если $z = \operatorname{arctg}\frac{2(x+\sin y)}{4-x\sin y}$.
3. Показать, что функция $u = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

4. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{dz}{dx}$, если $z = \operatorname{tg}^2(x + y) - \frac{x}{y}$; $y = \sqrt{x + 2}$.

5. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial v}$, если $z = x^2y - y^2x,\ x = u^2\cos v,\ y = u^3\sin v$.
6. Найти $y'(x)$ с помощью логарифмирования и последующего дифференцирования по x функции $y(x) = (\mathrm{tg}\,2x)^{\mathrm{ctg}\frac{x}{2}}$.
7. Найти dz, если функция $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением $e^{2x}\cdot\sin z - \cos^2(x - z) = 0$.
8. Найти экстремумы функции $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.
9. Найти точки, в которых модуль градиента функции $z = (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$ равен 2.
10. Найти производную функции $z = x^2y^2 - xy^3 - 3y - 1$ в точке $A\,(2; 1)$ в направлении, идущем от этой точки к началу координат.

Вариант 30

1. Найти частные производные первого и второго порядков $z = \sin\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}$
2. Найти dz, где $z = \arcsin\sqrt{xy} + \ln\left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$.
3. Найти d^2z, где $z = \sin^2(ax + by)$.
4. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial t}$, если $z = \mathrm{arctg}\sqrt{x^2 + y^2}$, $x = t^3$, $y = \ln t$.
5. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ и $\dfrac{dz}{dv}$, если $z = x^2\ln y$, $x = \frac{u}{v}$, $y = 3u - 2v$.
6. Найти $y'(x)$ с помощью логарифмирования и последующего дифференцирования по x функции $y(x) = \left(\frac{x}{1+x}\right)^x$.
7. Найти dz, если функция $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением
$$2^{xy} + \sin^2(2x - z) = 0$$
8. Найти экстремумы функции $z = 2x^3 + 2y^3 - 36xy + 430$.
9. Найти производную функции $z = \mathrm{arctg}\,(xy)$ в точке $A\,(1; 1)$ в направлении биссектрисы первого координатного угла.
10. Каково направление наибольшего изменения функции $u(x, y, z) = x\sin z - y\cos z$ в начале координат?

4. ЗАДАНИЯ ПО ТЕМЕ: ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Примерный вариант заданий с решением

1. Изменить порядок интегрирования:

а) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{\sqrt{1-x^2}}^{1+2x} f(x,y)dy$. б) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)dx$

2. Вычислить двойной интеграл

а) $\iint\limits_D (y+2x)dxdy$, где D: $x+y \le 2$, $y \le \sqrt{x}$, $y \ge 0$

б) $\iint\limits_D ydxdy$, где D: $x^2+y^2 \le 4$, $x \ge 1$.

3. С помощью двойного интеграла найти площадь области, заданной неравенствами $y \ge \dfrac{1}{x}$, $y \ge x$, $1 \le y \le 2$.

4. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z=0$, $y+z=1$ и $y=x^2$.

5. Вычислить криволинейный интеграл, $\int\limits_l (x^2-y)dx + xy^2dy$, где l – кривая, $y^2=x$ от точки A $(0;0)$ до точки B (4;2).

6. Вычислить работу силы $\vec{F} = \frac{y}{x+1}\vec{\imath} + e^{-1}\vec{\jmath}$ при перемещении материальной точки по прямой, соединяющей точки M(0;1) и N(1;3).

7. Применяя формулу Грина, вычислить криволинейный интеграл $I = \oint\limits_C \sqrt{x^2+y^2}dx + (x+y+y\ln(x+\sqrt{x^2+y^2}))dy$ по замкнутому контуру С, ограниченному кривыми $x \cdot y = 1$; $x+y=2{,}5$. Обход контура С совершается против часовой стрелки.

8. Доказать, что криволинейный интеграл

$$I = \int\limits_{(0{,}5;0{,}5)}^{(1;e)} (e^{-x} - \frac{2}{yx^3})dx + (\ln y - \frac{1}{x^2y^2})dy$$

не зависит от формы пути интегрирования и вычислить его.

Решение

1. а) Область интегрирования D определяется неравенствами:

$$D:\ \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ \sqrt{1-x^2} \le y \le 1+2x \end{cases}$$

Ее границы – линии: $y=\sqrt{1-x^2}$ – верхняя половина окружности $x^2+y^2=1$, прямые $y=1+2x$ и $x=1$ (рис. 1.1).

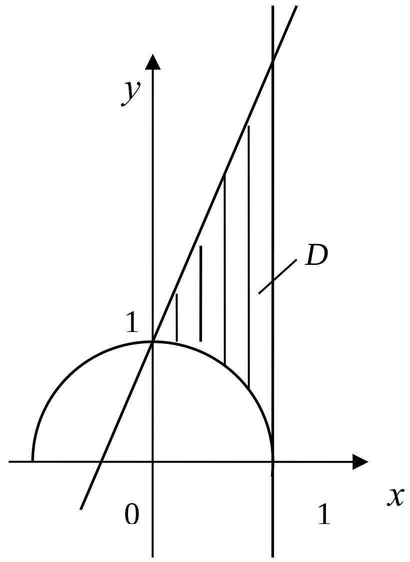


Рис. 1.1. Область интегрирования D

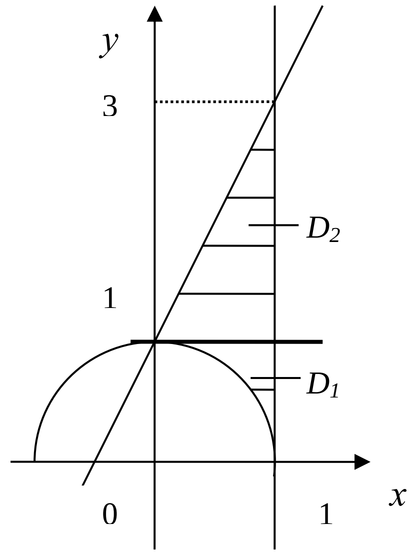


Рис. 1.2. Разбиение области интегрирования на D_1 и D_2

Левая граница области задается уравнениями различных функций: прямой $y=1+2x$ и полуокружностью $y=\sqrt{1-x^2}$, поэтому при изменении порядка интегрирования область необходимо разбить на две области D_1 и D_2, как показано на рис. 1.2.

Области D_1 и D_2 определяются неравенствами:

$$D_1:\ \begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ \sqrt{1-y^2} \le x \le 1 \end{cases}. \qquad D_2:\ \begin{cases} 1 \le y \le 3 \\ \dfrac{y-1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$$

Запишем повторный интеграл в виде суммы двух повторных интегралов по нижней D_1 и верхней D_2 областям интегрирования.

Ответ: $\displaystyle\int_0^1 dy \int_{\sqrt{1-y^2}}^{1} f(x,y)dx + \int_1^3 dy \int_{\frac{y-1}{2}}^{1} f(x,y)dx.$

1. б) Область интегрирования D определяется неравенствами:

$$D: \quad \begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ \sqrt{y} \le x \le 2-y \end{cases}.$$

Ее границы – линии: $x=\sqrt{y}$ – правая ветвь параболы $y=x^2$ и прямые $x=2-y \Rightarrow y=2-x$ и $y=0$ (рис. 1.3).

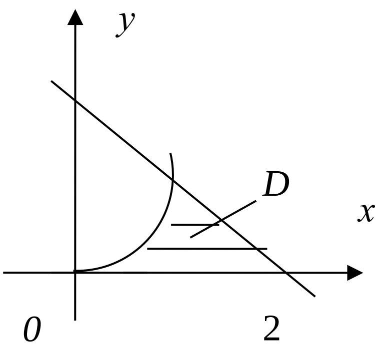


Рис. 1.3. Область интегрирования D

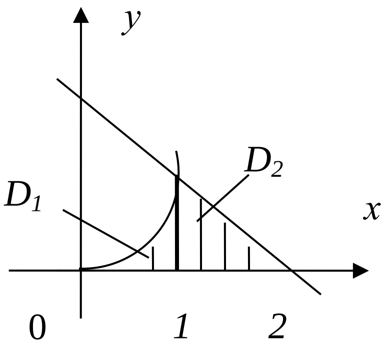


Рис. 1.4. Разбиение области интегрирования на D_1 и D_2

Верхняя граница области D задается уравнениями различных функций: прямой $y=2-x$ и правой ветвью параболы $y=x^2$, поэтому при изменении порядка интегрирования область необходимо разбить на две области D_1 и D_2, как показано на рис. 1.4.

Области D_1 и D_2 определяются неравенствами:

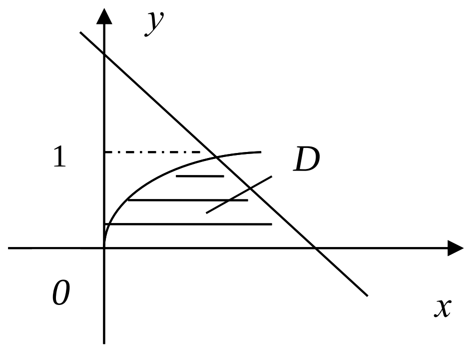
$$D_1: \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le x^2 \end{cases} \qquad D_2: \begin{cases} 1 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 2-x \end{cases}$$

Запишем повторный интеграл в виде суммы двух повторных интегралов по левой D_1 и правой D_2 областям интегрирования.

Ответ: $$\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x,y)dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x,y)dy .$$

2. а) Границы области интегрирования – линии: $y=\sqrt{x}$ – верхняя ветвь параболы $x=y^2$, прямые $y=2-x$ и $y=0$. Перейдем к повторному интегралу, выбрав порядок интегрирования так, чтобы область не пришлось разбивать (рис. 2.1).

Тогда область интегрирования D определяется неравенствами:



$$D: \begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ y^2 \le x \le 2-y \end{cases}$$

Рис. 2.1. Область интегрирования *D*

$$\iint_D (y+2x)dxdy = \int_0^1 dy \int_{y^2}^{2-y} (y+2x)dx = \int_0^1 \left(yx\Big|_{y^2}^{2-y} + x^2\Big|_{y^2}^{2-y} \right) dy =$$

$$= \int_0^1 (2y - y^2 - y^3 + 4 - 4y + y^2 - y^4)\, dy = \int_0^1 (4 - 2y - y^3 - y^4) dy =$$

$$= \left(4y - y^2 - \frac{y^4}{4} - \frac{y^5}{5} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{51}{20}$$

Ответ: $\frac{51}{20}$

2. б) Область интегрирования лежит внутри окружности с центром в начале координат, радиусом 2, правее вертикальной прямой $x = 1$ (рис. 2.2). Для упрощения вычислений целесообразно перейти в полярную систему координат по формулам: $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ dxdy = \rho d\rho d\varphi \end{cases}$

Тогда: 1) $x^2 + y^2 = 4$ => $\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = 4$ => ρ^2=4 => $\rho = 2$

2) $x = 1$ => $\rho\cos\varphi = 1$ => $\rho = \frac{1}{\cos\varphi}$.

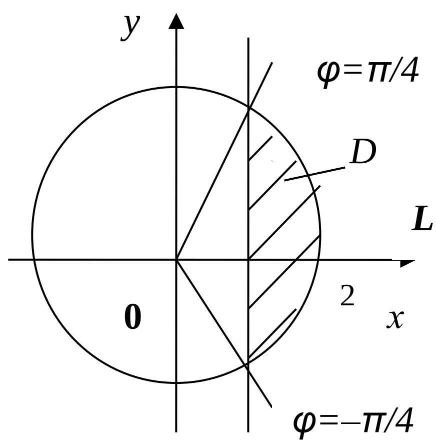


Рис. 2.2. Область интегрирования в декартовой (*XOY*) и полярной (*OL*) системах координат

Уравнения границ области в полярной системе координат будут иметь вид: окружность $\rho = 2$ и прямая $\rho = \frac{1}{\cos\varphi}$

$$D: \begin{cases} -\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{4} \\ \frac{1}{\cos\varphi} \le \rho \le 2 \end{cases}$$

$$\iint_D \rho^2\cos\varphi d\rho d\varphi=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos\varphi d\varphi\int_{\frac{1}{\cos\varphi}}^{2}\rho^2 d\rho=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos\varphi\left(\frac{\rho^3}{3}\Bigg|_{\frac{1}{\cos\varphi}}^{2}\right)d\varphi=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{8}{3}\cos\varphi-\frac{1}{3\cos^2\varphi}\right)d\varphi=$$

$$=\frac{1}{3}(8\sin\varphi-tg\varphi)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{8\sqrt{2}-2}{3}$$

Ответ: $\dfrac{8\sqrt{2}-2}{3}$.

3. С помощью двойного интеграла площадь области D вычисляется по формуле $S_D=\iint_D dxdy$.

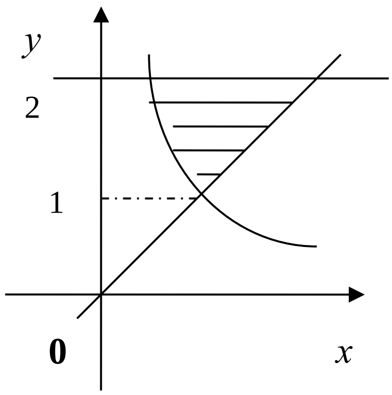


Рис. 3.1. Область интегрирования D

Перейдем к повторному интегралу, выбрав порядок интегрирования так, чтобы область не пришлось разбивать (рис. 3.1). Уравнения левой и правой границ при этом нужно представить в виде $x=\dfrac{1}{y}$ и $x=y$

$$D:\ \begin{cases}1\le y\le 2\\ \dfrac{1}{y}\le x\le y\end{cases}$$

$$S_D=\int_1^2 dy\int_{\frac{1}{y}}^{y}dx=\int_1^2\left(y-\frac{1}{y}\right)dy=\left(\frac{y^2}{2}-\ln y\right)\Bigg|_1^2=2-\ln 2-\frac{1}{2}+\ln 1=\frac{3}{2}-\ln 2.$$

Ответ: $S_D=\dfrac{3}{2}-\ln 2$ (кв. ед.)

4. $z=0$ – плоскость xOy;

$y+z=1$ – плоскость параллельная оси Ox, пересекающая ось Oy и Oz в точках $A(0;1;0)$ и $B(0;0;1)$, а плоскость xOy по прямой $y=1$, параллельной оси Ox;

$y=x^2$ – цилиндрическая поверхность, образующая которой параллельна оси Oz, а направляющей является парабола $y=x^2$, лежащая в плоскости xOy.

Искомое цилиндрическое тело изображено на рис. 4.1. С помощью двойного интеграла его объем вычисляется по формуле:

$V=\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, где D – основание тела (рис. 4.2), а z = $f(x,y)$ – уравнение поверхности, ограничивающей тело сверху. В нашем случае это плоскость $y+z=1 \;\Rightarrow\; z=1-y$

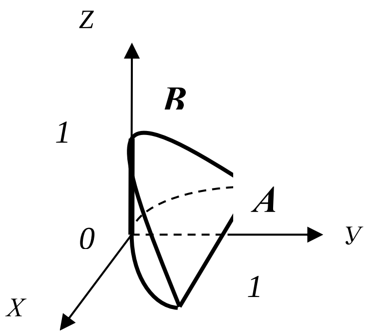


Рис. 4.1. Тело, объем которого нужно найти

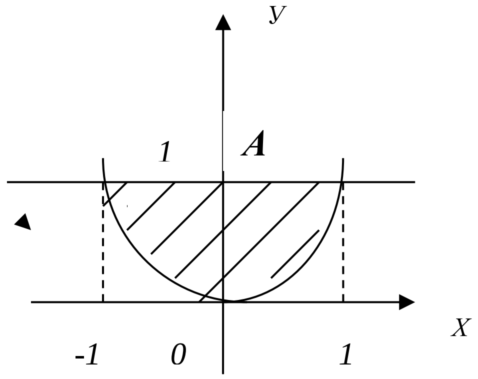


Рис. 4.2. Область интегрирования D

$$D:\begin{cases}-1\le x\le 1\\ x^2\le y\le 1\end{cases}$$

$$V=\iint\limits_D(1-y)dxdy=\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{1}(1-y)dy=\int_{-1}^{1}dx\left(\left(y-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{x^2}^{1}\right)=\int_{-1}^{1}\left(1-\frac{1}{2}-x^2+\frac{x^4}{2}\right)dx=$$

$$=\left(\frac{x}{2}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{10}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{10}\right)=\frac{8}{15}$$

Ответ: $V=\dfrac{8}{15}$ (куб. ед.)

5. Так как $x=y^2$, $dx=2ydy$ и при движении из точки A в точку B y меняется от 0 до 2 (рис. 5.1), то криволинейный интеграл вычисляется:

$$\int\limits_l\left(x^2-y\right)dx+xy^2dy=\int_0^2\left(y^4-y\right)\cdot 2ydy+y^4dy=\int_0^2\left(2y^5+y^4-2y^2\right)dy=$$

$$=\left(\frac{2y^6}{6}+\frac{y^5}{5}-\frac{2y^3}{3}\right)\Bigg|_0^2=\frac{64}{3}+\frac{32}{5}-\frac{16}{3}=\frac{112}{5}$$

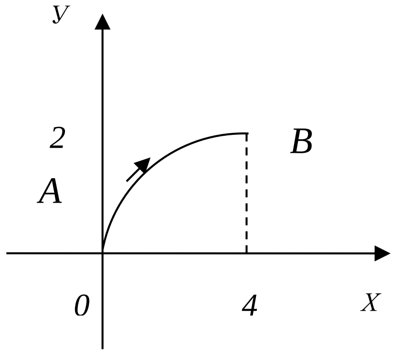


Рис. 5.1. Путь интегрирования *l*

Ответ: $\frac{112}{5}$.

6. Используя уравнение прямой, проходящей через две заданные точки: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$, найдем уравнение прямой *MN*:

$$\frac{x-0}{1-0}=\frac{y-1}{3-1} \Rightarrow y=2x+1.$$

Работа *A* силы $\vec{F}=P(x;y)\vec{\imath}+Q(x;y)\vec{\jmath}$ при перемещении точки вдоль линии l вычисляется по фрмуле: $A=\int_l P(x;y)dx+Q(x;y)dy$.

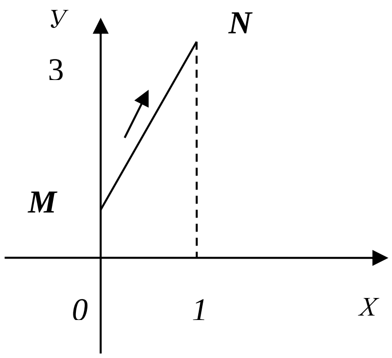


Рис. 6.1. Путь интегрирования *l*

В примере $P(x;y)=\frac{y}{x+1}$; $Q(x;y)=e^{-x}$.

Так как $y=2x+1$, то $dy=2dx$ и при движении из точки M в точку N выполняется неравенство $0\le x\le 1$ (рис. 6.1), тогда работа вычисляется:

$$.\,A=\int_l \frac{y}{x+1}dx+e^{-x}dy=\int_0^1\left(\frac{2x+1}{x+1}+2e^{-x}\right)dx=\int_0^1\left(2-\frac{1}{x+1}+2e^{-x}\right)dx=$$

$$=\left(2x-\ln|x+1|-2e^{-x}\right)\Big|_0^1=2-\ln 2-\frac{2}{e}+2=4-\ln 2-\frac{2}{e}$$

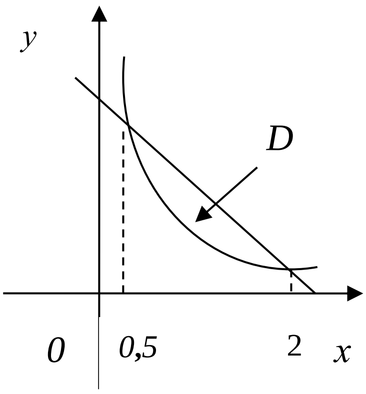
Ответ: $A=4-\ln 2-\frac{2}{e}$

7. Для вычисления криволинейного интеграла по формуле Грина предварительно найдем частные производные функций

$$P(x;y)=\sqrt{x^2+y^2} \text{ и } Q(x;y)=(x+y+y\ln(x+\sqrt{x^2+y^2}))$$

$$P_y{}'(x;y)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}};\; Q_x{}'(x;y)=1+y\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x+\sqrt{x^2+y^2}}=1+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Область интегрирования ограничена замкнутым контуром (рис. 7.1). Ее нижняя граница задается уравнением $x\cdot y=1\Rightarrow y=\frac{1}{x}$, верхняя – $x+y=2{,}5\Rightarrow y=2{,}5-x$. Точки пересечения этих кривых находим из уравнения $2{,}5-x=\frac{1}{x}\Rightarrow x^2-2{,}5x+1=0\Rightarrow x_1=0{,}5;\ x_2=2$



$$D:\begin{cases}0{,}5\le x\le 2\\ \frac{1}{x}\le y\le 2{,}5-x\end{cases}$$

Рис. 7.1. Область интегрирования *D*

$$I=\iint\limits_D\left(Q_x{}'-P_y{}'\right)dxdy=\iint\limits_D 1dxdy=\int\limits_{0,5}^{2}dx\int\limits_{\frac{1}{x}}^{2,5-x}dy=\int\limits_{0,5}^{2}\left(2{,}5-x-\frac{1}{x}\right)dx=$$

$$=\left(2{,}5x-\frac{x^2}{2}-\ln|x|\right)\Bigg|_{0,5}^{2}=5-2-\ln 2-\frac{5}{4}+\frac{1}{8}+\ln\frac{1}{2}=\frac{15}{8}-2\ln 2.$$

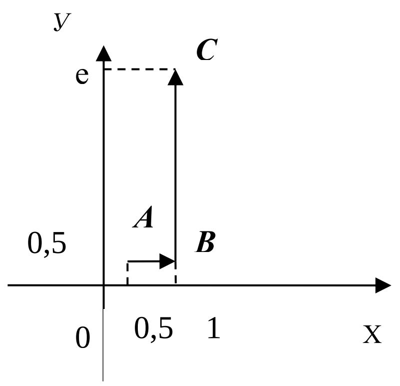
Ответ: $\frac{15}{8}-2\ln 2.$

8. Проверим равенство частных производных функций:

$$P(x;y)=e^{-x}-\frac{2}{yx^3} \text{ и } Q(x;y)=\ln y-\frac{1}{x^2y^2}$$

$$P_y{}'(x;y)=\frac{2}{x^3y^2};\ Q_x{}'(x;y)=\frac{2}{x^3y^2}\Rightarrow P_y{}'=Q_x{}'.$$

Условие независимости интеграла от формы пути интегрирования выполнено. Интеграл не зависит от формы пути интегрирования, поэтому выберем наиболее удобный для вычисления путь – ломаную линию *ABC*, состоящую из отрезков прямых, параллельных осям координат $y=0{,}5$ и $x=1$ (рис. 8.1).



При движении по прямой *AB* (*y=0,5*) от точки *A* до *B* $dy=0$, *x* изменяется от 0,5 до 1; при движении по прямой *BC (x=1)* от точки *B* до точки C $dx=0$, *y* изменяется от 0,5 до e.

Рис. 8.1. Путь интегрирования *ABC*

Тогда интеграл I будет равен сумме криволинейных интегралов по пути *AB* и *AC*:

$$I=\int_{AB}P(x;y)dx+Q(x;y)dy+\int_{BC}P(x;y)dx+Q(x;y)dy=$$

$$=\int_{0,5}^{1}\left(e^{-x}-\frac{4}{x^3}\right)dx+\int_{0,5}^{e}\left(\ln y-\frac{1}{y^2}\right)dy=\left(-e^{-x}+\frac{2}{x^2}\right)\Bigg|_{0,5}^{1}+$$

$$+\left(y\ln y-y+\frac{1}{y}\right)\Bigg|_{0,5}^{e}=\frac{1}{\sqrt{e}}+0{,}5\ln 2-7{,}5.$$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{e}}+0{,}5\ln 2-7{,}5.$

Варианты заданий для самостоятельного решения (1–30)

Вариант 1

1. Изменить порядок интегрирования

а) $\int_0^4 dx \int_{2\sqrt{x}}^{8-x} f(x,y)\,dy$ б) $\int_{-6}^{2} dy \int_{\frac{y^2}{4}-1}^{2-y} f(x,y)dx$

2. Вычислить двойной интеграл

а) $\iint\limits_D (2x-y)dxdy$, где область D задается неравенствами $x \ge 0,\ y \ge x,\quad y \le 2-x^2$.

б) $\iint\limits_D \frac{dxdy}{x^2+y^2+1}$, где область D задается неравенствами $x \ge 0,\ y \ge 0,\quad x^2+y^2 \le 1$. Перейти в полярную систему координат.

3. С помощью двойного интеграла найти площадь области, заданной неравенствами $y \le \sqrt{1-x},\quad x \ge 0,\quad y \ge x-1$.
4. Вычислить объем тела, ограниченного координатными плоскостями $x=0,\quad y=0,\quad z=0,$ плоскостью $x+y=1$ и параболоидом $z = x^2 + y^2$.
5. Вычислить $\int_{1;1}^{\left(4;\frac{1}{4}\right)} x^2\,dy + \frac{dx}{y^2}$ по дуге кривой $y=\frac{1}{x}$.
6. Вычислить работу силы $\vec{F} = (3y + x)\vec{\imath} + (3x - y)\,\vec{\jmath}$ при перемещении точки вдоль дуги параболы $y=1-x^2$ от точки A (0;1) до точки B (1;0).
7. Применяя формулу Грина, вычислить $\oint\limits_{(C)} (xdy - ydx)$ по замкнутому контуру, образованному графиками кривых, заданных уравнениями $y = x^2 - 1;\ \ y = \frac{1-y^2}{2}$. Обход контура совершается против часовой стрелки.
8. Доказать, что интеграл не зависит от формы пути интегрирования и вычислить его $\int\limits_{(0,1)}^{(1,2)} (2x-3xy^2+2y)dx+(2x-3x^2y+2y)dy$.

Вариант 2

1. Изменить порядок интегрирования

а) $\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy$ б) $\int\limits_0^3 dy \int\limits_y^{1+\sqrt{1+y}} f(x,y)dx$

2. Вычислить двойной интеграл

а) $\iint\limits_D (x+y)dxdy$, где область D задается неравенствами $0 \le x \le 1, \quad y \ge -x, \quad y \le \sqrt{x}$.

б) $\iint\limits_D ydxdy$, где область D задается неравенствами $y \ge 1,\ x^2 + y^2 \le 2.$

Перейти в полярную систему координат.

3. С помощью двойного интеграла найти площадь области, заданной неравенствами $y \ge 1 - x^2,\ y \ge \frac{x^2-1}{2}$.

4. Вычислить площадь части поверхности цилиндра $z = 1 - x^2$, лежащей в первом октанте, вырезанную плоскостями $y = 0, \quad y = x$ и плоскостью $x = 1$.

5. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_z \cos^3 x dx + y dy$, где z – кривая, $y = \sin x$ от точки A $(0;0)$ до точки B $\left(\pi/2;1\right)$.

6. Вычислить работу силы $\vec{F} = y^2\vec{\imath} + x^2\,\vec{\jmath}$ при перемещении точки вдоль кривой $y = \frac{1}{x}$ от точки A (0,5;2) до точки B (1;1).

7. Применяя формулу Грина, вычислить $\oint\limits_{(c)} (x+y)^2 dx + x^2 dy$, где c – замкнутый контур $\Delta ABCA$ с вершинами A (2;0), B (2;2), C (0;2).

8. Доказать, что интеграл не зависит от формы пути интегрирования и вычислить его $\int\limits_{(0;2)}^{(1;4)} ye^x dx + e^x dy$.

Вариант 3

1. Изменить порядок интегрирования

а) $\int\limits_0^4 dy \int\limits_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{20-y^2}} f(x,y)dx$; б) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{\frac{x}{2}}^{3-x} f(x,y)dy$.

2. Вычислить двойной интеграл

а) $\iint\limits_D xdxdy$, где область D задается неравенствами $y \ge \frac{x^2}{2}, \quad y \le x$.

б) $\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$, где область D задается неравенствами $y \ge x, \quad x^2+y^2 \le 1$. Перейти в полярную систему координат.

3. С помощью двойного интеграла найти площадь области, заданной неравенствами $x \ge 0; \quad y \ge 0; \quad y \ge 1-x^2; \quad y \le 1-\frac{x^2}{4}$.
4. Вычислить объем тела, ограниченного координатными плоскостями $x=0, \quad z=0$, цилиндром $x=1-y^2$ и плоскостью $2x+z=2$.
5. Вычислить криволинейный интеграл $\int_Z (x+y)dx-2ydy$, где z – линия, заданная параметрически $\begin{cases} x=2t+1 \\ y=t^2-1 \end{cases}$ от точки $A(1;–1)$ до точки $B(3;0)$.
6. Вычислить работу силы $\vec{F}=2xy\vec{i}+x^2\,\vec{j}$ при перемещении точки вдоль дуги параболы $x=2y^2$ от точки O (0;0) до точки A (2;1).
7. Используя формулу Грина, вычислить $\oint_C (x-y)^2dx+2xydy$, где c – замкнутый контур $\Delta ABCA$ с вершинами в точках $A(1;0)$, $B(2;1)$ и $C(0;1)$.
8. Доказать, что интеграл не зависит от формы пути интегрирования и вычислить его $\int\limits_{(3,1)}^{(5,2)} 2x\ln y dx+(\frac{x^2}{y}-\ln y)dy$.

Вариант 4

1. Изменить порядок интегрирования

а) $\int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y^2} f(x,y)dx$; б) $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{2x^2}^{\sqrt{5-x^2}} f(x,y)dy$.

2. Вычислить двойной интеграл

а) $\iint\limits_D x^2y^{-2}dxdy$, где область D ограничена прямыми $x=2, \quad y=x$ и кривой $y=\frac{1}{x}$;

б) $\iint\limits_D ydxdy$, где область D задается неравенствами $y \ge 0, \quad x^2+y^2 \le 2x$.
Перейти в полярную систему координат.

3. С помощью двойного интеграла найти площадь области, заданной неравенствами $y \ge (x-1)^2, \; y \le \frac{x}{2}$.

4. Вычислить площадь части плоскости $z+y=1$, вырезанную координатной плоскостью $z=0$ и цилиндром $y=x^2$.
5. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_Z \sin 2xdx + ydy$, где z – кривая, $y=\sin x$ от точки $A(0;0)$ до точки $B\left(\frac{\pi}{2};1\right)$.
6. Вычислить работу силы $\vec{F}=(x+y)\vec{\imath}-x\vec{\jmath}$ при перемещении материальной точки вдоль второй четверти эллипса $x=3\cos t$, $y=2\sin t$ от точки A (0;2) до точки B (–3;0).
7. Используя формулу Грина, вычислить криволинейный интеграл, $\oint_C (ye^{xy}+2xcosy-2y)dx+(e^{xy}x-x^2siny)dy$, где c – замкнутый контур, образованный линиями $x+y=1$, $y=e^x$, $x=1$. Обход контура совершается против часовой стрелки.
8. Доказать, что интеграл не зависит от формы пути интегрирования и вычислить его $\int_{1;0}^{2;1}\left(\frac{x-2y}{(y-x)^2}+x\right)dx+\left(\frac{y}{(y-x)^2}+y^2\right)dy$.

Вариант 5

1. Изменить порядок интегрирования

а) $\int\limits_{-6}^{2}dx\int\limits_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x}f(x,y)dy$; б) $\int\limits_{0}^{1}dy\int\limits_{\frac{y-1}{2}}^{1-y^2}f(x,y)dx$.

2. Вычислить двойной интеграл

а) $\iint\limits_D \sin(2x+y)dxdy$, где область D ограничена прямыми $x=\pi,\quad y-x=0,\quad y-2x=0$;

б) $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$, где область D задается неравенствами $y\geq\frac{x}{\sqrt{3}},\quad x^2+y^2\leq 2x$. Перейти в полярную систему координат.

3. С помощью двойного интеграла найти площадь области, заданной неравенствами $y\geq 0,\quad y\leq x^2+2x,\quad x+y\leq 4,\quad (x\geq 0)$.
4. Вычислить объем тела, ограниченного координатной плоскостью $z=0$, и цилиндрами $z=1-y^2,\quad y=x^2$.

5. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_z x^2 y dy + (xy-1)dx$, где z – кривая, заданная параметрически $x=\cos t$, $y=2\sin t$ от точки A $(1;0)$ до точки B $(0;2)$.
6. Вычислить работу силы $\vec{F}= y\vec{\imath} - (x^2+y)\,\vec{\jmath}$ при перемещении точки вдоль дуги параболы $y=2x^2+x-1$ от точки A (0;–1) до точки B (1;2).
7. Используя формулу Грина, вычислить $\oint\limits_z \frac{dx}{y} - \frac{dy}{x}$, где z – контур $\Delta ABCA$ с вершинами A(1;1), B(2;1), C (2;2).
8. Доказать, что интеграл не зависит от формы пути интегрирования и вычислить его $\int\limits_{\left(\frac{\pi}{4};4\right)}^{\left(\frac{\pi}{2};1\right)} 2y\sin 2x dx - \cos 2x dy$.

Вариант 6

1. Изменить порядок интегрирования

а) $\int\limits_{-\frac{3}{2}}^{0} dx \int\limits_{2x^2}^{3-x} f(x,y)dy$; б) $\int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{\frac{3y}{2}}^{\sqrt{13-y^2}} f(x,y)dx$.

2. Вычислить двойной интеграл

а) $\iint\limits_D e^{(x+y)}dxdy$, где область D ограничена прямыми $x=2-y,\quad y=x,\quad y=0$;

б) $\iint\limits_D \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$, где область D задается неравенствами $x^2+y^2 \ge \frac{\pi^2}{9},\quad x^2+y^2 \le \pi^2$. Перейти в полярную систему координат.

3. С помощью двойного интеграла найти площадь области, заданной неравенствами $y \le 2x,\quad y \ge \frac{x}{2},\quad xy \le 2$, лежащей в первой четверти.
4. Вычислить объем тела, ограниченного плоскостями $z=x,\quad z=0$ и цилиндром $y^2+x^2=1$, лежащего выше плоскости XOY.

5. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_z \left(x^2+2y\right)dx+xydy$,

где z – кривая, заданная параметрически уравнениями $\begin{cases} x=1-t \\ y=2t^2+1 \end{cases}$ от точки A (1;1) до точки B (0;3).

6. Вычислить работу силы $\vec{F}=\frac{x}{y^2}\vec{\imath}+x^2y\,\vec{\jmath}$ при перемещении точки вдоль дуги параболы $x=2y^2-1$ от точки A (1;1) до точки B (3;2).

7. Используя формулу Грина, вычислить $\oint\limits_{(C)} -x^2ydx+xy^2dy$,

с – окружность: $x^2+y^2=4$, обход которой совершается против часовой стрелки.

8. Доказать, что интеграл не зависит от формы пути интегрирования и вычислить его $\int\limits_{(1,2)}^{(3,4)} (4x^3y^3-3y^2-5)dx+(3x^4y^2-6xy-4)dy$.

Вариант 7

1. Изменить порядок интегрирования

а) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{2-y} f\left(x,y\right)dx$; б) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_x^{\sqrt{8-x^2}} f(x,y)dy$.

2. Вычислить двойной интеграл

а) $\iint\limits_D 2y\sin xdxdy$, где область D ограничена прямыми

$x=0,\quad y=0,\quad (0\le x\le\frac{\pi}{2},\quad y\ge 0)$ и графиком функции $y=\cos x$;

б) $\iint\limits_D xdxdy$, где область D задается неравенствами $y\ge 1,\quad x^2+y^2\le 2y$.

Перейти в полярную систему координат.

3. С помощью двойного интеграла найти площадь области, заданной неравенствами $y\le 2x^2,\quad y\ge x^2,\quad 0\le x\le 1$.

4. Вычислить объем тела, ограниченного плоскостями $x+2y+z=4,\quad y=0,\quad z=0$ и цилиндром $x=2y^2$.

5. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_l \frac{x}{y^2}dx-xydy$,

l – дуга кривой $x=\frac{1}{y}$ от точки A (1;1) к точке B $\left(4;\frac{1}{4}\right)$.

6. Вычислить работу силы $\vec{F}= (2x+y)\vec{\imath} - x^2 y\,\vec{\jmath}$ при перемещении точки вдоль кривой, заданной параметрически уравнениями $\begin{cases} x = 3 - t^2 \\ y = 2t - 1 \end{cases}$ от точки A (3;–1) до точки B (2;1).
7. Применяя формулу Грина, вычислить $\oint_C (x^3y^3 + xy + x^5)dx + \left(\frac{3}{4}x^4y^2 + x^2 + y^5\right)dy$, где C – замкнутый контур, образованный графиками функций $y = x^2$, $y = 2 - x$, $x = 0$. Контур обходится против часовой стрелки.
8. Доказать, что интеграл не зависит от формы пути интегрирования и вычислить его $\int\limits_{(-1;0)}^{(1;1)} \left(15x^2 + 8xy^2 - 2y\right)dx + \left(8x^2y - 2x - 3y^2\right)dy$.

Вариант 8

1. Изменить порядок интегрирования

а) $\int\limits_{-2}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{2-x} f(x,y)dy$ б) $\int\limits_{-3}^{1} dy \int\limits_{2y+1}^{4-y^2} f(x,y)dx$.

2. Вычислить двойной интеграл

а) $\iint\limits_D (x+2y)dxdy$, где область D задается неравенствами $y \le x^2$, $y \le (x-2)^2$, $y \ge 0$, $(0 \le x \le 2)$;

б) $\iint\limits_D \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)dxdy$, где область D задается неравенствами $y \ge 0$, $y \le x$, $x^2 + y^2 \le 4$, $x^2 + y^2 \ge 1$. Перейти в полярную систему координат.

3. С помощью двойного интеграла найти площадь области, заданной неравенствами $y + x \le 3$, $y \ge 2^x$, $0 \le x \le 1$.
4. Вычислить площадь части поверхности цилиндра $2z = x^2$, отсеченной плоскостями $x - 2y = 0$, $y = 2x$, $x = 2\sqrt{2}$.
5. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_e y^2dx + (x+1)dy$, l – дуга кривой, заданной параметрически уравнениями $\begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = 2t + 1 \end{cases}$ от точки A $(-1;1)$ до B $(0;3)$.
6. Вычислить работу силы $\vec{F}= \frac{y^2}{x^2}\vec{\imath} + xy\,\vec{\jmath}$ при перемещении точки вдоль дуги параболы $y = x^3 + 1$ от точки A (3;1) до точки B (1;2).

7. Применяя формулу Грина, вычислить криволинейный интеграл $\oint\limits_c (2xy+5y)dx+(2x^2+5x)dy$, где с – замкнутый контур, состоящий из графиков функций $y=1-\sqrt{x}$; $y=x+1$; $x=1$. Обход контура совершается против часовой стрелки.
8. Доказать, что интеграл не зависит от формы пути интегрирования и вычислить его $\int\limits_{(0;0)}^{\left(1;\frac{\pi}{2}\right)} \left(e^{2x}+y^3x+\cos x\right)dx+\left(\sin y+\frac{3}{2}y^2x^2\right)dy$.

Вариант 9

1. Изменить порядок интегрирования

а) $\int\limits_0^4 dy \int\limits_{-\sqrt{4-y}}^{2-y/2} f(x,y)dx$; б) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f(x,y)dy$.

2. Вычислить двойной интеграл

а) $\iint\limits_D (3x+2xy)dxdy$, где область D задается неравенствами $y\le x,\quad y\ge 2x^2-1$;

б) $\iint\limits_D \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}+1}dxdy$, где область D задается неравенствами $y\ge 0,\quad x^2+y^2\le 1$. Перейти в полярную систему координат.

3. С помощью двойного интеграла найти площадь области, заданной неравенствами $y\le 2\sqrt{x},\quad y\ge\sqrt{x},\quad 0\le x\le 4$.
4. Вычислить площадь части плоскости $z=x$, отсеченной плоскостью $y=0$ и цилиндрами $y=\sqrt{x},\quad y=\sqrt{2-x}$.
5. Вычислить $\int\limits_l (x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy$, l – дуга параболы $y=x^2$ от точки A $(-1;1)$ до B $(1;1)$.
6. Вычислить работу силы $\vec{F}=(3y+x)\vec{i}+(3x-y)\vec{j}$ при перемещении точки вдоль дуги окружности $\begin{cases} x=3\cos t \\ y=3\sin t \end{cases}$ от точки $A(3;0)$ до точки $B(0;3)$.
7. Применяя формулу Грина, вычислить: $\oint\limits_c 2(x^2+y^2)dx+(x+y)^2dy$, с – замкнутый контур треугольника ABC с вершинами A $(1;1)$, B $(2;2)$, C $(1;3)$.

8. Доказать, что интеграл не зависит от пути интегрирования и вычислить его $\int\limits_{(1;0)}^{(0;1)} \left(x^4 + 4xy^3\right)dx + \left(6x^2y^2 - 5y^4\right)dy$.

Вариант 10

1. Изменить порядок интегрирования

а) $\int\limits_1^3 dx \int\limits_{\frac{3}{x}}^{5-\sqrt{-x^2+6x-5}} f(x,y)dy;$ б) $\int\limits_0^2 dy \int\limits_{-y^2}^{\frac{1}{4}y^2} f(x,y)dx$.

2. Вычислить двойной интеграл

а) $\iint\limits_D (x-2y)dxdy$, где область D задается неравенствами $y \ge \dfrac{x^2}{4} - 1,\quad y \le 2 - \dfrac{x^2}{2},\quad x \ge 0$;

б) $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}dxdy$, где область D задается неравенствами $y \ge \sqrt{3}x,\quad x^2 + y^2 \le 1$. Перейти в полярную систему координат.

3. С помощью двойного интеграла найти площадь области, ограниченной графиками функций $y = \sin 2x,\quad y = \sin x,\quad 0 \le x \le \dfrac{\pi}{4}$.

4. Вычислить объем тела, ограниченного плоскостями $y + z = 1,\ z = 0$ и цилиндром $x^2 + z^2 = 1$.

5. Вычислить $\int\limits_l 2xydx - x^2dy$, l – дуга кривой, заданной параметрически уравнениями $\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = t^2 + t \end{cases}$ от точки A (3;0) до точки B (1;2).

6. Вычислить работу силы $\vec{F} = 2xy\vec{i} + e^{x^2}\vec{j}$ при перемещении точки вдоль линии $y = x^2 + 1$ от точки A (0;1) до точки B (1;2).

7. Применяя формулу Грина, вычислить криволинейный интеграл $\oint\limits_c e^x \cdot arctgydx + \left(\dfrac{e^x}{y^2+1} + x^2\right)dy$, где с – замкнутый контур, состоящий из графиков функций $y = x;\quad y = 2x - x^2$. Обход контура совершается против часовой стрелки.

8. Доказать, что интеграл не зависит от формы пути интегрирования и вычислить его $\int\limits_{(0;1)}^{(1;2)} \left(2x - 3xy^2 + 2y\right)dx + \left(2x - 3yx^2 + 2y\right)dy$.

Вариант 11

1. Изменить порядок интегрирования

а) $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{-\sqrt{x}}^{x} f(x,y)dy$; б) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)dx$.

2. Вычислить двойной интеграл

а) $\iint\limits_D \left(x + y\right)dxdy$, где область D задается неравенствами $x \geq 0,\ y \geq \dfrac{x}{2}, \quad y \leq 5 - x^2$.

б) $\iint\limits_D \dfrac{dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2} + 1}$, где область D задается неравенствами $x \geq 0, \quad x^2 + y^2 \leq 1$. Перейти в полярную систему координат.

3. С помощью двойного интеграла найти площадь области, заданной неравенствами $x \geq y^2 - 1, \quad y \geq x - 1$.

4. Вычислить объем тела, ограниченного координатными плоскостями $x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0,$ плоскостью $2x + y = 1$ и параболоидом $2z = x^2 + y^2$.

5. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} \left(x^2 + 3xy\right)dx - \left(2xy + y^2\right)dy$ по прямой, соединяющей точки с координатами A (0;1) и B (1;–1).

6. Вычислить работу силы $\vec{F} = (y + 2x)\vec{\imath} + (x - y)\,\vec{\jmath}$ при перемещении точки вдоль дуги параболы $y = 2x - x^2$ от точки A (1;1) до точки B (2;0).

7. Применяя формулу Грина, вычислить $\oint\limits_{(C)} 2xdy - (x + y)dx$ по замкнутому контуру, образованному графиками кривых, заданных уравнениями $y = 2x - x^2; \quad y = x - 2$. Обход контура совершается против часовой стрелки.

8. Доказать, что интеграл не зависит от формы пути интегрирования и вычислить его $\int\limits_{(0,1)}^{(1,4)} (2e^x y + 3x^2\sqrt{y} + y)dx + (2e^x + \dfrac{x^3}{2\sqrt{y}} + x)dy$.

Вариант 12

1. Изменить порядок интегрирования

а) $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$; б) $\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-y}^{1+\sqrt{1+y}} f(x,y)dx$.

2. Вычислить двойной интеграл

а) $\iint\limits_{D} xydxdy$, где область D задается неравенствами $y \ge x, \quad y \le \sqrt{x}$.

б) $\iint\limits_{D} (x+y)dxdy$, где область D задается неравенствами $y \ge x, \quad x^2 + y^2 \le 4$. Перейти в полярную систему координат.

3. С помощью двойного интеграла найти площадь области, заданной неравенствами $\frac{y}{2} \ge 1 - x^2, \quad y \ge \frac{x^2-1}{3}$.

4. Вычислить площадь части поверхности цилиндра $z^2 + x^2 = 1$, лежащей в первом октанте, вырезанную плоскостями $y = 0, \quad z = 0, \quad y = x$.

5. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{l} y(x-y)dx + xdy$ по кривой l $y = 2x^2$ от точки O $(0;0)$ до точки A $(1;2)$.

6. Вычислить работу силы $\vec{F} = \frac{x}{y^2}\vec{i} + \frac{y}{x^2}\vec{j}$ при перемещении точки вдоль кривой $y = \frac{1}{x}$ от точки A (0,5;2) до точки B (1;1).

7. Применяя формулу Грина, вычислить $\oint\limits_{(C)} xdx - 3(x+y)dy$, с – замкнутый контур треугольника ABC с вершинами A $(1;0)$, B $(1;3)$, $C(-2;3)$.

8. Доказать, что интеграл не зависит от формы пути интегрирования и вычислить его $\int\limits_{(0;2)}^{(1;4)} ye^x dx + e^x dy$.

Вариант 13

1. Изменить порядок интегрирования

а) $\int\limits_{0}^{4} dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{\sqrt{20-y^2}} f(x,y)dx$; б) $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{x}^{2x} f(x,y)dy$.

2. Вычислить двойной интеграл

а) $\iint\limits_D (x-y)dxdy$, где область D задается неравенствами $y \geq \frac{x^2}{4} - 1, \quad y \leq x+2$.

б) $\iint\limits_D \sqrt{2-x^2-y^2}\,dxdy$, где область D задается неравенствами $y \geq -\sqrt{3}x, \quad x^2+y^2 \leq 4$. Перейти в полярную систему координат.

3. С помощью двойного интеграла найти площадь области, ограниченной графиками функций $y = \sin x; \quad y = \frac{2x}{\pi} \geq 0; \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.
4. Вычислить объем тела, ограниченного координатной плоскостью $z = 0$, цилиндром $x = 1 - y^2$ и плоскостью $2x - z = 0$.
5. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_l (x^2+y^2)dx + xydy$ вдоль кривой l, заданной уравнением $y = e^x$ от точки $A\ (0;1)$ до $B\ (1;e)$.
6. Вычислить работу силы $\vec{F} = (2x-y)\vec{i} + (x-2y)\,\vec{j}$ при перемещении точки вдоль линии, заданной параметрически $\begin{cases} x = 2t-1 \\ y = t^2+1 \end{cases}$ от точки $A(-1;1)$ до точки $B(1;2)$.
7. Используя формулу Грина, вычислить $\oint\limits_c (2xy-y)dx + x^2dy$, где c – замкнутый контур, образованный графиками функций $y = \frac{x^2}{4} - 1$, $y = 2 - \frac{x^2}{2}$. Обход контура осуществляется против часовой стрелки.
8. Доказать, что интеграл не зависит от формы пути интегрирования и вычислить его $\int\limits_{(1;1)}^{(2;3)} \ln y dx + \left(\frac{x}{y} + 2\right)dy$.

Вариант 14

1. Изменить порядок интегрирования

а) $\int\limits_0^2 dy \int\limits_y^{2+\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx$;   б) $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-2x}^{\sqrt{5-x^2}} f(x,y)dy$.

2. Вычислить двойной интеграл

а) $\iint\limits_D \sin(x+2y)dxdy$, где область D ограничена прямыми $x=\frac{\pi}{3}$, $y=x$, $y=-x$;

б) $\iint\limits_D \frac{dxdy}{x^2+y^2+9}$, если D – область, ограниченная полуокружностью $y=\sqrt{9-x^2}$ и осью Ox. Перейти в полярную систему координат.

3. С помощью двойного интеграла найти площадь области, заданной неравенствами $y \le x-2$, $y \ge x^2-5x+6$.
4. Вычислить площадь части плоскости $z-2x=0$, вырезанную координатной плоскостью $z=0$ и цилиндром $2x=y^2$.
5. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{(l)} xydx+4dy$ по дуге кривой $y=\frac{x^2}{4}$ от точки A $(0;0)$ до точки B $(2;1)$.
6. Вычислить работу силы $\vec{F}=2y^2x^{-2}\vec{i}+\frac{y+2x}{x}\vec{j}$ при перемещении материальной точки по прямой AB от точки A (0;2) до точки B (1;–1).
7. Используя формулу Грина, вычислить криволинейный интеграл, $\oint\limits_l (x+y)^2dx-(y-x)^2dy$, где l – замкнутый контур, образованный линиями $y=2-x^2$, $y=-x$. Обход контура совершается против часовой стрелки.
8. Доказать, что интеграл не зависит от формы пути интегрирования и вычислить его $\int\limits_{(2;3)}^{(3;4)} (6xy^2+4x^3)dx+(6x^2y+3y^2)dy$.

Вариант 15

1. Изменить порядок интегрирования

а) $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{x} f(x,y)dy$; б) $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{\frac{y-1}{2}}^{2(1-y)} f(x,y)dx$.

2. Вычислить двойной интеграл

а) $\iint\limits_D \cos(x+2y)dxdy$, где область D ограничена прямыми $x=\frac{\pi}{6}$, $y-x=0$, $2y-x=0$;

б) $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$, где область D задается неравенствами $y \ge 0, \quad y \le \sqrt{3}x, \quad x^2+y^2 \le 2y$. Перейти в полярную систему координат.

3. С помощью двойного интеграла найти площадь области, заданной неравенствами $x \ge 0, \quad y \ge x^2+2x, \quad x+y \le 4$.
4. Вычислить объем тела, ограниченного координатной плоскостью $z=0$, и цилиндрами $z=1-x^2, \quad x=y^2$.
5. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_z (x-2y)dx+(3x+y)dy$, где z – кривая, заданная параметрически $x=\cos t$, $y=2\sin t$ от точки $A(1;0)$ до точки $B(0;2)$.
6. Вычислить работу силы $\vec{F}=\sin x\,\vec{\imath}-2y\,\vec{\jmath}$ при перемещении точки вдоль кривой $y=\cos x$ от точки A $(0;1)$ до точки B $(\frac{\pi}{2};0)$.
7. Используя формулу Грина, вычислить $\oint\limits_z (3x-y)dx+(3y-x^2)dy$, где z – контур $\Delta ABCA$ с вершинами $A(1;1)$, $B(2;1)$, $C(2;2)$.
8. Доказать, что интеграл не зависит от формы пути интегрирования и вычислить его $\int\limits_{(0;1)}^{(1;2)} \left(2x-3xy^2+2y\right)dx+\left(2x-3x^2y+2y\right)dy$.

Вариант 16

1. Изменить порядок интегрирования

а) $\int\limits_2^3 dx \int\limits_{\frac{1}{x-1}}^{x-1} f(x,y)dy$; б) $\int\limits_0^3 dy \int\limits_{\frac{2y}{3}}^{\sqrt{13-y^2}} f(x,y)dx$.

2. Вычислить двойной интеграл

а) $\iint_D (yx^4+xy)dxdy$, где область D ограничена прямыми $x=2-y, \quad y=x, \quad x=0$;

б) $\iint\limits_D \frac{\cos 2\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$, где область D задается неравенствами $x^2+y^2 \ge \frac{\pi^2}{36}, \quad x^2+y^2 \le \pi^2$. Перейти в полярную систему координат.

3. С помощью двойного интеграла найти площадь области, заданной неравенствами $x \ge 1, \quad y \ge \dfrac{x}{2}, \quad xy \le 2$.
4. Вычислить объем тела ограниченного плоскостями $z = 2y, \quad z = 0$ и цилиндром $y^2 + x^2 = 1$, лежащего выше плоскости xOy.
5. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{(0;0)}^{(2;8)} \left(x^2 - y^2\right)dx + xydy$ по дуге кривой $y = x^3$.
6. Вычислить работу силы $\vec{F} = x\vec{\imath} - 3y\,\vec{\jmath}$ при перемещении точки вдоль ломанной линии ABC, соединяющей точки A (1;1), B (2;3) и C (3;1).
7. Используя формулу Грина, вычислить криволинейный интеграл $\oint_C \; xy^2dx + (x^2y + x^2)dy$, где с – замкнутый контур, образованный графиками функций $y = 4x - x^2; \quad y = x$. Обход контура совершается против часовой стрелки.
8. Доказать, что интеграл не зависит от формы пути интегрирования и вычислить его $\int\limits_{(1,0)}^{(3,4)} \left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{3y^2}{x^4}\right)dx - \dfrac{2y}{x^3}dy$.

Вариант 17

1. Изменить порядок интегрирования

а) $\int\limits_0^2 dy \int\limits_{1-\frac{y}{2}}^{e^y} f(x,y)dx$; б) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{x^2-4x}^{\frac{x}{2}} f(x,y)dy$.

2. Вычислить двойной интеграл

а) $\iint\limits_D y\cos x dxdy$, где область D ограничена прямыми $x = \dfrac{\pi}{2}, \quad y = 0, \quad (0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}, \quad y \ge 0)$ и графиком функции $y = 2\sin x$;

б) $\iint\limits_D 3(x-y)dxdy$, где область D задается неравенствами $y \ge 1, \quad x^2 + y^2 \le 4$. Перейти в полярную систему координат.

3. С помощью двойного интеграла найти площадь области, заданной неравенствами $y \le 2x^2, \quad y \ge x^2, \quad y \le 1$.

4. Вычислить объем тела ограниченного плоскостями $x+2y+z=4, \quad x=0, \quad z=0$ и цилиндром $y=\dfrac{x^2}{4}$.
5. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_l (x^2-y^2)dx+xydy$, l – дуга кривой $y=x+x^2$ от точки $A(1;2)$ к точке $B(-1;0)$.
6. Вычислить работу силы $\vec{F}=(x+y^2)\vec{i}+xy\,\vec{j}$ при перемещении точки вдоль кривой, заданной параметрически уравнениями $\begin{cases} x=1-2t^2 \\ y=t+3 \end{cases}$ от точки $A(1;3)$ до точки $B(-1;4)$.
7. Применяя формулу Грина, вычислить $\oint\limits_c \left(\dfrac{\sqrt{1-tg(xy)}}{x}-y\right)dx+\dfrac{\sqrt{1-tg(xy)}}{y}dy$, где c – замкнутый контур, образованный графиками функций $y=x^2$, $y=2-x$, $x=0$. Контур обходится против часовой стрелки.
8. Доказать, что интеграл не зависит от формы пути интегрирования и вычислить его $\int\limits_{(1;0)}^{(0;2)} (2e^{2x}+y+\sin y)dx+(e^{3y}+x+x\cos y)dy$.

Вариант 18

1. Изменить порядок интегрирования

а) $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{1-2x}^{2x-x^2+1} f(x,y)dy$ б) $\int\limits_1^e dy \int\limits_{1-y}^{\ln y} f(x,y)dx$.

2. Вычислить двойной интеграл

а) $\iint\limits_D (3x-2)dxdy$, где область D задается неравенствами $y\ge x^2, \quad y\ge (x-2)^2, \quad y\le 4$;

б) $\iint\limits_D \dfrac{y}{x}dxdy$, где область D задается неравенствами $y\ge 0, \quad y\le \sqrt{3}x, \quad x^2+y^2\le 4, \quad x^2+y^2\ge 1$. Перейти в полярную систему координат.

3. С помощью двойного интеграла найти площадь области, заданной неравенствами $y\le 4, \quad y\ge 2^x, \quad y\ge 2^{-x}$.

4. Вычислить площадь части поверхности цилиндра $z = x^2$, отсеченной плоскостями $x + y = 0, \quad y = x, \quad y = 1,$ лежащей правее плоскости xOz.

5. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{(0;0)}^{(1;1/2)} 3dy - \frac{ydx}{x^2}$; по кривой $y = \frac{x^2}{2}$

6. Вычислить работу силы $\vec{F} = y\vec{i} + x\vec{j}$ при перемещении точки вдоль верхней дуги эллипса $\begin{cases} x = 4\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$ от точки $A(4;0)$ до точки $B(-4;0)$.

7. Применяя формулу Грина, вычислить криволинейный интеграл $\oint\limits_{(c)} -x^2ydx + xy^2dy$, где c – замкнутый контур, состоящий из графиков функций $y = 1 - x; \quad y = x + 1; \quad x = 1$. Обход контура совершается против часовой стрелки.

8. Доказать, что интеграл не зависит от формы пути интегрирования и вычислить его $\int\limits_{(1;2)}^{(3;4)} \left(4x^3y^3 - 3y^2 - 5\right)dx + \left(3x^4y^2 - 6xy - 4\right)dy$.

Вариант 19

1. Изменить порядок интегрирования

а) $\int\limits_0^4 dy \int\limits_{\frac{y}{2}-2}^{\sqrt{4-y}} f(x, y)dx$; б) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f(x, y)dy$.

2. Вычислить двойной интеграл

а) $\iint\limits_D (3x - 2y)dxdy$, где область D задается неравенствами $y + 2x \le 1, \quad y \ge 4x^2 - 1, \quad x \ge 0$;

б) $\iint\limits_D \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2 + 2}dxdy$, где область D задается неравенствами $x \ge 0, \quad x^2 + y^2 \le 2$. Перейти в полярную систему координат.

3. С помощью двойного интеграла найти площадь области, заданной неравенствами $y \le 2\sqrt{1 - x}, \quad y \ge \sqrt{1 - x}, \quad 0 \le x \le 1$.

4. Вычислить площадь части плоскости $z = x$, отсеченной плоскостью $z = 0$ и цилиндрами $y = x^2, \quad y = 2 - x^2$.

5. Вычислить $\int\limits_{(l)}\left(x^3-y\right)dx+xdy$ по дуге параболы $y=2x-x^2$, расположенной над осью Ox. Движение совершается по ходу часовой стрелки
6. Вычислить работу силы $\vec{F}=(2y-x)\vec{\imath}+(2y+x)\,\vec{\jmath}$ при перемещении точки по прямой от точки $A(0;3)$ до точки $B(1;5)$.
7. Применяя формулу Грина, вычислить: $\oint\limits_{c}2xydx+(x+y)^2\,dy$, с – замкнутый контур, состоящий из графиков функций $y=x^2$, $x=y^2$. Обход контура совершается против часовой стрелки.
8. Доказать, что интеграл не зависит от пути интегрирования и вычислить его $\int\limits_{(1;0)}^{(2;3)}\left(3x^2\sqrt{y}+y\right)dx+\left(\dfrac{x^3}{2\sqrt{y}}+x\right)dy$.

Вариант 20

1. Изменить порядок интегрирования

а) $\int\limits_{0}^{5}dx\int\limits_{-x}^{4x-x^2}f(x,y)dy;$ б) $\int\limits_{0}^{1}dy\int\limits_{y^2-1}^{1-y^2}f(x,y)dx$.

2. Вычислить двойной интеграл

а) $\iint\limits_{D}(1-y)dxdy$, где область D задается неравенствами $y\ge x-2,\quad y\le 2-\dfrac{x^2}{2},\quad x\ge 0$;

б) $\iint\limits_{D}2^{x^2+y^2}\,dxdy$, где область D задается неравенствами $y\le\sqrt{3}x,\quad x^2+y^2\le 1$. Перейти в полярную систему координат.

3. С помощью двойного интеграла найти площадь области, ограниченной графиками функций $y=\sin\dfrac{x}{2},\quad y=\sin x,\quad 0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$.
4. Вычислить объем тела, ограниченного плоскостями $y=2x,\quad y=\dfrac{x}{2},\quad z=0$ и цилиндром $y^2+z^2=1$, лежащего в первом октанте.

5. Вычислить $\int\limits_l 2xydx - x^2dy$, l – дуга кривой, заданной параметрически уравнениями $\begin{cases} x = 1-2t \\ y = t^2 + 2t \end{cases}$ от точки $A(1;0)$ до точки $B(-1;3)$.
6. Вычислить работу силы $\vec{F} = x\sqrt{y}\vec{i} + e^{x^2}\vec{j}$ при перемещении точки вдоль линии $y = 2x^2 + 1$ от точки $A(0;1)$ до точки $B(1;3)$.

7. Применяя формулу Грина, вычислить криволинейный интеграл $\oint\limits_c e^x \cdot \arcsin y dx + \left(\frac{e^x}{\sqrt{1-y^2}} + x\right)dy$, где с – замкнутый контур, состоящий из графиков функций $y = x$; $y = x^2 - 2x$. Обход контура совершается против часовой стрелки.
8. Доказать, что интеграл не зависит от формы пути интегрирования и вычислить его $\int\limits_{(0;1)}^{(1;2)} 3x^2y^2dx + \left(2x^3y + y\right)dy$.

Вариант 21

1. Изменить порядок интегрирования

а) $\int\limits_1^4 dx \int\limits_{\frac{1}{x}}^{x} f(x,y)dy$; б) $\int\limits_0^4 dy \int\limits_{2-\sqrt{4-y}}^{6-y} f(x,y)dx$.

2. Вычислить двойной интеграл

а) $\iint\limits_D (2y+1)dxdy$, где область D задается неравенствами $x \ge 0,\ y \ge \frac{x}{2},\quad y \le 3 - x$.

б) $\iint\limits_D \frac{dxdy}{2\sqrt{x^2+y^2}+1}$, где область D задается неравенствами $y \ge 0,\quad x^2 + y^2 \le 1$. Перейти в полярную систему координат.

3. С помощью двойного интеграла найти площадь области, заданной неравенствами $x \ge y^2 - 1,\quad 1 - y^2 \ge x.$
4. Вычислить объем тела, ограниченного координатными плоскостями $x = 0,\quad y = 0,\quad z = 0,$ плоскостью $x + 2y = 1$ и параболоидом $2z = 8 - x^2 - y^2$.

5. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{AB}\left(2x^2-xy\right)dx-\left(3xy+y^2\right)dy$ по прямой, соединяющей точки $A(0;2)$ и $B(1;–1)$.
6. Вычислить работу силы $\vec{F}=(3y-2x)\vec{\imath}+(x+2y)\,\vec{\jmath}$ при перемещении точки вдоль дуги параболы $y=5x-2x^2+1$ от точки $A(0;1)$ до $B(1;4)$.
7. Применяя формулу Грина, вычислить $\oint\limits_{(C)}(2x-1)dy-(x-2y)dx$ по замкнутому контуру, образованному графиками кривых, заданных уравнениями $y=2x-x^2;\quad y=0$. Обход контура совершается против часовой стрелки
8. Доказать, что интеграл не зависит от формы пути интегрирования и вычислить его $\int\limits_{(0,1)}^{(1,4)}(2e^x y+3x^2\sqrt{y}+y)dx+(2e^x+\dfrac{x^3}{2\sqrt{y}}+x)dy$.

Вариант 22

1. Изменить порядок интегрирования

а) $\int\limits_0^1 dx\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x}f\left(x,y\right)dy$; б) $\int\limits_0^3 dy\int\limits_4^{\sqrt{25-y^2}}f(x,y)dx$.

2. Вычислить двойной интеграл

а) $\iint\limits_D x^{-2}ydxdy$, где область D задается неравенствами $y\le x,\quad y\ge\sqrt{x},\quad 1\le x\le 4$.

б) $\iint\limits_D(x+y)dxdy$, где область D задается неравенствами $x\ge\sqrt{3},\quad x^2+y^2\le 4$. Перейти в полярную систему координат.

3. С помощью двойного интеграла найти площадь области, заданной неравенствами $y\le 4x-x^2,\quad y-x+4\ge 0$.
4. Вычислить площадь части поверхности цилиндра $z^2+y^2=1$, лежащей в первом октанте, вырезанную плоскостями $x=0,\quad z=0,\quad y=x$.
5. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{(l)}2xdx-\left(x+2y\right)dy$ вдоль ломаной линии, соединяющей точки $A(–1;0)$, $B(0;2)$, $C(2;0)$.
6. Вычислить работу силы $\vec{F}=\frac{x+1}{y}\vec{\imath}+\frac{y+1}{x^2}\vec{\jmath}$ при перемещении точки вдоль кривой $y=x^3$ от точки $A(1;1)$ до точки $B(2;8)$.

7. Применяя формулу Грина, вычислить $\oint\limits_{(c)}(3x-y)dx+(3y+x)dy$, где c – замкнутый контур, образованный графиками функций $y=4-x^2$, $x+y=2$. Обход контура совершается против часовой стрелки.
8. Доказать, что интеграл не зависит от формы пути интегрирования и вычислить его $\int\limits_{(2;0)}^{(0;3)}\frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}dx+\left(\frac{e^y}{1+x^2}+1\right)dy$.

Вариант 23

1. Изменить порядок интегрирования

а) $\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^{e^y} f(x,y)dx$; б) $\int\limits_0^1 dx\int\limits_x^{2-x^2} f(x,y)dy$.

2. Вычислить двойной интеграл

а) $\iint\limits_D (2x+3)dxdy$, где область D задается неравенствами $y\ge\frac{x^2}{4}-1,\quad y+x\le 2$.

б) $\iint\limits_D \sqrt{2+x^2+y^2}dxdy$, где область D задается неравенствами $y\ge -x,\quad x^2+y^2\le 2$. Перейти в полярную систему координат.

3. С помощью двойного интеграла найти площадь области, ограниченной графиками функций $y=\cos x;\quad y=x-\frac{\pi}{2};\quad 0\le x\le\frac{\pi}{2}.$
4. Вычислить объем тела, ограниченного координатными плоскостями $x=0,\quad z=0,$ цилиндром $x=1-y^2$ и плоскостью $2x+z=2$.
5. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_l (xy-1)dx+x^2ydy$ по кривой l: $4x+y^2=4$ от точки $A(1;0)$ до точки $B(0;2)$.
6. Вычислить работу силы $\vec{F}=2xy\,\vec{i}+(3x-2y)\,\vec{j}$ при перемещении точки вдоль линии, заданной параметрически $\begin{cases}x=-2t+1\\ y=t^2\end{cases}$ от точки $A(-1;1)$ до точки $B(1;0)$.

7. Используя формулу Грина, вычислить $\oint\limits_{(c)}\left(x^2-y\right)dx+xdy$ вдоль замкнутого контура, образованного линиями $x=y^2$ и $y=\dfrac{x}{2}$. Обход контура осуществляется против часовой стрелки.
8. Доказать, что интеграл не зависит от формы пути интегрирования и вычислить его $\int\limits_{(1;0)}^{(3;5)}\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3y^2}{x^4}\right)dx-\dfrac{2y}{x^3}dy$.

Вариант 24

1. Изменить порядок интегрирования

а) $\int\limits_1^e dy\int\limits_{\ln y}^{e+1-y}f(x,y)dx$; б) $\int\limits_0^1 dx\int\limits_{2x}^{\sqrt{5-x^2}}f(x,y)dy$.

2. Вычислить двойной интеграл

а) $\iint\limits_D\cos(x+y)dxdy$, где область D ограничена прямыми $x=\dfrac{\pi}{2},\quad y=x,\quad y=2x$;

б) $\iint\limits_D\dfrac{1}{9+\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$, если D – область задана неравенствами $x^2+y^2\le 4,\quad y\ge x$. Перейти в полярную систему координат.

3. С помощью двойного интеграла найти площадь области, заданной неравенствами $y\le x-2,\ y\ge x^2+x-6.$
4. Вычислить площадь части плоскости $z+x=1$, вырезанную координатной плоскостью $z=0$ и цилиндром $x=y^2$.
5. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{(l)}xydx+4dy$ по дуге кривой $y=\dfrac{x^2}{4}$ от точки $A(0;0)$ до точки $B(2;1)$.
6. Вычислить работу силы $\vec{F}=yx^{-2}\vec{\imath}+\frac{y+2x^2}{x}\vec{\jmath}$ при перемещении материальной точки по прямой AB от точки $A(0;–3)$ до точки $B(1;–1)$.

7. Используя формулу Грина, вычислить криволинейный интеграл, $\oint\limits_l (x+y)^2\,dx-(y-x)^2\,dy$, где l – замкнутый контур, образованный линиями $y=2-x^2$, $y=x$. Обход контура совершается против часовой стрелки.
8. Доказать, что интеграл не зависит от формы пути интегрирования и вычислить его $\int\limits_{(2;0)}^{(3;4)} y(x+4)dx+\left(\frac{(x+4)^2}{2}+3y^2\right)dy$.

Вариант 25

1. Изменить порядок интегрирования

а) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{3^x}^{4-x} f(x,y)dy$; б) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{y^2-1}^{1-y} f(x,y)dx$.

2. Вычислить двойной интеграл

а) $\iint\limits_D (\cos x+x)dxdy$, где область D ограничена прямыми $x=\pi$, $y-x=0$, $2y+x=0$;

б) $\iint\limits_D \frac{ydxdy}{x}$, где область D задается неравенствами $y\le x$, $x^2+y^2\le 2x$. Перейти в полярную систему координат.

3. С помощью двойного интеграла найти площадь области, заданной неравенствами $y\ge x^2+2x$, $x+y\le 0$.
4. Вычислить объем тела, ограниченного плоскостью $z=0$, и цилиндрами $z=1-x^2$, $x=y^2$.
5. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_z (x-2y)dx+(3x+y)dy$, где z – кривая, заданная параметрически $x=\cos t$, $y=2\sin t$ от точки $A(1;0)$ до точки $B(0;2)$.
6. Вычислить работу силы $\vec{F}=\sin x\,\vec{i}-2y\,\vec{j}$ при перемещении точки вдоль кривой $y=\cos x$ от точки $A(0;1)$ до точки $B(\frac{\pi}{2};0)$.
7. Используя формулу Грина, вычислить $\oint\limits_z (3x-y)dx+(3y-x^2)dy$, где z – замкнутый контур соединяющий точки *A(1;1), B(2;1), C(2;2).*
8. Доказать, что интеграл не зависит от формы пути интегрирования и вычислить его $\int_{(2;1)}^{(4;3)}\left(x+\frac{2}{yx^3}\right)dx+\left(3y+\frac{1}{x^2y^2}\right)dy$.

Вариант 26

1. Изменить порядок интегрирования

а) $\int\limits_{\frac{3}{2}}^{2} dx \int\limits_{x-1}^{\frac{1}{x-1}} f(x,y)dy$; б) $\int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{-\ln y}^{\ln y} f(x,y)dx$.

2. Вычислить двойной интеграл

а) $\iint\limits_{D} (1-x)dxdy$, где область D ограничена кривыми $x = 2 - y, \quad y = x^2, \quad x = 0$;

б) $\iint\limits_{D} \frac{\sin 2\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy$, где область D задается неравенствами $x^2 + y^2 \geq \frac{\pi^2}{9}, \quad x^2 + y^2 \leq \pi^2$. Перейти в полярную систему координат.

3. С помощью двойного интеграла найти площадь области, заданной неравенствами $y \leq 2x, \quad y \geq \frac{x}{2}, \quad xy \leq 2$.

4. Вычислить объем тела, ограниченного плоскостями $z + x = 1, \quad x = 0, \quad z = 0$ и цилиндром $y = 1 - x^2$.

5. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{l} (2x + y)dx - (x - 2y)dy$, где l – дуга эллипса $x = 3\cos t$, $y = 2\sin t$ от точки A (3;0) до точки B (0;2).

6. Вычислить работу силы $\vec{F} = 2x\vec{i} + 3y\,\vec{j}$ при перемещении точки вдоль ломаной линии ABC, соединяющей точки A(1;1), B(2;3) и C (3;1).

7. Используя формулу Грина, вычислить криволинейный интеграл $\oint\limits_{(C)} 2xdx + (xy^2 - x^2)dy$, где с – замкнутый контур, образованный графиками функций $y = 2x - x^2$; $y = 0$. Обход контура совершается против часовой стрелки.

8. Доказать, что интеграл не зависит от формы пути интегрирования и вычислить его $\int\limits_{(0;2)}^{(1;3)} yxe^x dx + (x-1)e^x dy$.

Вариант 27

1. Изменить порядок интегрирования

а) $\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{y+1} f(x,y)dx$; б) $\int\limits_{0}^{2,5} dx \int\limits_{x^2-2x}^{\frac{x}{2}} f(x,y)dy$.

2. Вычислить двойной интеграл

а) $\iint\limits_{D} y\sin x dxdy$, где область D ограничена прямыми $x=0, \quad y=0, \quad (0 \le x \le \frac{\pi}{2}, \quad y \ge 0)$ и графиком функции $y = 2\cos x$

б) $\iint\limits_{D} 3(x+y)dxdy$, где область D задается неравенствами $y \ge 1$, $x^2 + y^2 \le 2$. Перейти в полярную систему координат.

3. С помощью двойного интеграла найти площадь области, заданной неравенствами $y \le 2 - x^2, \quad y \ge x^2$.

4. Вычислить объем тела ограниченного плоскостями $z = 0, \quad x + y + 3z = 3$ и цилиндром $y = 2x^2$.

5. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{l} (2x^2 - xy)dx - y^2 dy$, l – дуга кривой $y = x^2 + x + 1$ от точки A (0;1) к точке B (1;3).

6. Вычислить работу силы $\vec{F} = (x - y^2)\vec{i} + 3y\,\vec{j}$ при перемещении точки вдоль кривой, заданной параметрически уравнениями $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t + 3 \end{cases}$, от точки A (0;3) до точки B (1;4).

7. Применяя формулу Грина, вычислить $\oint\limits_{c} \left(\frac{\sqrt{1 + ctg(xy)}}{x} - y \right) dx + \frac{\sqrt{1 + ctg(xy)}}{y} dy$, где с – замкнутый контур, образованный графиками функций $y = x^2$, $y = 4$, $x = 4$. Контур обходится против часовой стрелки.

8. Доказать, что интеграл не зависит от формы пути интегрирования и вычислить его $\int\limits_{(0;1)}^{(1;2)} \left(e^x \ln y + 2x \right) dx + \frac{e^x}{y} dy$.

Вариант 28

1. Изменить порядок интегрирования

а) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{\frac{2}{x+1}}^{2(x+1)} f(x,y)dy$ б) $\int\limits_1^e dy \int\limits_{-\ln y}^{y-1} f(x,y)dx$.

2. Вычислить двойной интеграл

а) $\iint\limits_D (x-2)dxdy$, где область D задается неравенствами $y \le 2x - x^2, \quad y \ge \dfrac{x}{2}$;

б) $\iint\limits_D \dfrac{x}{y\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$, где область D задается неравенствами $y \ge 1, \quad x^2 + y^2 \le 2y$. Перейти в полярную систему координат.

3. С помощью двойного интеграла найти площадь области, заданной неравенствами $x \ge y^2 - 2y + 2, \quad x \le \dfrac{y+4}{2}$.

4. Вычислить площадь части поверхности цилиндра $z = x^2$, отсеченной плоскостями $x + y = 0, \quad y = x, \quad x = 1, \quad x \ge 0$.

5. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_l ydx + dy$, где l – дуга циклоиды: $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ $(0 \le t \le \pi)$.

6. Вычислить работу силы $\vec{F} = y^2\vec{i} - x^2\vec{j}$ при перемещении материальной точки по прямой, соединяющей точку $A(1;0)$ и точку B (1;1).

7. Применяя формулу Грина, вычислить: криволинейный интеграл $\oint\limits_C (\sin^2 x + y)dx + (\cos y + x)dy$, где C – замкнутый контур, состоящий из графиков функций $y = 1 - x$; $y = x + 1$; $x = 1$. Обход контура совершается против часовой стрелки.

8. Доказать, что интеграл не зависит от формы пути интегрирования и вычислить его $\int\limits_{(0;0)}^{\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4}\right)} \cos x \cos y dx - \sin y(\sin x - \cos y)dy$.

Вариант 29

1. Изменить порядок интегрирования

а) $\int\limits_{0}^{2,5} dy \int\limits_{y^2-2y+2}^{\frac{y+4}{2}} f(x,y)dx$; б) $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{2\sqrt{x}}^{3-x} f(x,y)dy$.

2. Вычислить двойной интеграл

а) $\iint\limits_{D} (1-2y)dxdy$, где область D задается неравенствами $y \le 2-x^2, \quad y \ge x, \quad y \ge -x$;

б) $\iint\limits_{D} \sqrt[3]{x^2+y^2}\,dxdy$, где область D задается неравенствами $x \ge y, \quad x^2+y^2 \le 1$. Перейти в полярную систему координат.

3. С помощью двойного интеграла найти площадь области, заданной неравенствами $y \le 2\sqrt{1+x}, \quad y \ge \sqrt{1+x}, \quad -1 \le x \le 0$.
4. Вычислить площадь части плоскости $z = y$, отсеченной плоскостью $z = 0$ и цилиндрами $x = y^2, \quad x = 2 - y^2$.
5. Вычислить $\int\limits_{C} (x+y-1)dx + (2x-y)dy$ по дуге параболы $y = 2x - x^2 + 3$, расположенной над осью Ox. Движение совершается по ходу часовой стрелки
6. Вычислить работу силы $\vec{F} = (y-x)\vec{i} + (y+x)\vec{j}$ при перемещении точки по прямой от точки A (0;0,5) до точки B (1;2).
7. Применяя формулу Грина, вычислить: $\oint\limits_{c} (1-xy)dx + (x+y)^2 dy$, c – замкнутый контур, состоящий из графиков функций $y = x^2, \quad x+y=2, \quad x=0$.
8. Доказать, что интеграл не зависит от пути интегрирования и вычислить его $\int\limits_{(0;0)}^{(\frac{\pi}{6};3)} \left(2cos\,2x + y^2\right)dx + (2xy+5)dy$.

Вариант 30

1. Изменить порядок интегрирования

а) $\int\limits_{-2}^{1} dx \int\limits_{x^2+2x-2}^{x} f(x,y)dy$; б) $\int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{0}^{\frac{2}{y}} f(x,y)dx$.

2. Вычислить двойной интеграл

а) $\iint\limits_D (x-2)dxdy$, где область D задается неравенствами $y \geq 1-x^2, \quad y \leq 1+x^2, \quad 0 \leq x \leq 1;$

б) $\iint\limits_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy$, где область D задается неравенствами $y \geq -\sqrt{3}x, \quad x^2+y^2 \leq 1$. Перейти в полярную систему координат.

3. С помощью двойного интеграла найти площадь области, ограниченной графиками функций $y=\cos 2x, \quad y=\cos x, \quad 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$.

4. Вычислить объем тела, ограниченного плоскостями $y=\dfrac{x}{2}, \quad x=0, \quad z=0$ и цилиндром $y^2+z^2=1$.

5. Вычислить $\int\limits_l 2xydx - x^2dy$, l – дуга кривой, заданной параметрически уравнениями $\begin{cases} x=2-t \\ y=t^2+2t \end{cases}$ от точки $A(2;0)$ до точки $B(1;3)$.

6. Вычислить работу силы $\vec{F}=(2x+y)\vec{\imath}+\frac{1}{x^2+3}\vec{\jmath}$ при перемещении точки вдоль линии $y=2x^2-1$ от точки $A(0;-1)$ до точки $B(1;1)$.

7. Применяя формулу Грина, вычислить криволинейный интеграл $\oint\limits_c e^x \cdot \ln ydx + \left(\dfrac{e^x}{y}+x^2\right)dy$, где c – замкнутый контур, состоящий из графиков функций $y=x, \; y=x^2-x$. Обход контура совершается против часовой стрелки.

8. Доказать, что интеграл не зависит от формы пути интегрирования и вычислить его $\int\limits_{(0;1)}^{(1;2)} \left(3yx^2+y^3+10x\right)dx+\left(x^3+3xy^2-3\right)dy$.

5. ЗАДАНИЯ ПО ТЕМЕ: ЭЛЕМЕНТЫ АЛГЕБРЫ: ВЕКТОРЫ. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ. МАТРИЦЫ

Примерный вариант заданий с решением

1. Решить систему уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} 5x + 6y + 6z = 84 \\ 4x + y + 4z = 45 \\ 6x + 6y + 7z = 94. \end{cases}$$

2. Изобразить корни 6 степени из -2 на комплексной плоскости.

3. Проверить, что векторы $\vec{a} = (5;\ 4;\ 4)$, $\vec{b} = (6;\ 1;\ 6)$, $\vec{c} = (4;\ 4;\ 7)$ образуют базис и разложить вектор $\vec{d} = (76;\ 45;\ 82)$ по этому базису.

4. Найти объем пирамиды, если известны координаты ее вершин $A(2;-1;-1)$, $B(-4;-6;-5)$, $C(5;4;6)$, $D(-5;-4;-6)$.

5. Даны вершины треугольника $A(6;-5)$, $B(0;-1)$, $C(6;15)$. Найти координаты точки пересечения высоты CH и медианы BM.

6. Привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду и построить ее:

$$25x^2 - 36y^2 + 100x - 72y - 836 = 0.$$

7. Выполнить действия $A \cdot (B - C)^{-1} \cdot D$, где

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 7 & 6 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 9 & 11 & 5 \\ -2 & 3 & -1 \\ 11 & 1 & 13 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -6 & 2 & -5 \\ 5 & -5 & 6 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -3 & -1 \\ -8 & -1 \end{bmatrix}.$$

8. Решить матричное уравнение $X \cdot A = B$, где

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 5 \\ 3 & -1 & 3 \\ 5 & 5 & 6 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 27 & 4 & 29 \\ 42 & 31 & 49 \\ -5 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

9. Исследовав систему на совместность, найти ее общее решение методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 - 5x_3 - x_4 = 15 \\ 4x_1 + 24x_2 - 21x_3 + x_4 = 61 \\ x_1 + 6x_2 + 4x_3 - 6x_4 = 46. \end{cases}$$

10. Найти собственные значения, собственные и присоединенные векторы матрицы линейного оператора. Найти вид этой матрицы в базисе из собственных и присоединенных векторов $A=\begin{bmatrix}3 & 4 & 4\\ -1 & 5 & 1\\ 0 & 2 & 6\end{bmatrix}$.

Решение

1. Найдем определитель матрицы системы:

$$\Delta=\begin{vmatrix}5 & 6 & 6\\ 4 & 1 & 4\\ 6 & 6 & 7\end{vmatrix}=35+144+144-36-120-168=-1.$$

Он отличен от нуля, следовательно, система имеет единственное решение. Для его нахождения методом Крамера, вычислим определители Δ_x, Δ_y, Δ_z, получающиеся из Δ заменой соответствующего столбца на столбец свободных членов. Тогда x, y, z получаем следующим образом:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta};\quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta};\quad z=\frac{\Delta_z}{\Delta}.$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}84 & 6 & 6\\ 45 & 1 & 4\\ 94 & 6 & 7\end{vmatrix}=588+1620+2256-564-2016-1890=-6;\ \ x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=6;$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}5 & 84 & 6\\ 4 & 45 & 4\\ 6 & 94 & 7\end{vmatrix}=1575+2256+2016-1620-1880-2352=-5;\ \ y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=5;$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix}5 & 6 & 84\\ 4 & 1 & 45\\ 6 & 6 & 04\end{vmatrix}=470+2016+1620-504-1350-2256=-4;\ \ z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=4;$$

Ответ: $x=6,\ \ y=5,\ \ z=4.$

2. Представим число -2 как комплексное в алгебраической форме записи, т.е. в виде $z=a+b\cdot i$. Получим $-2=-2+0i$. Таким образом $a=-2,\ b=0$. После чего переведем его в тригонометрическую форму $z=r\cdot(\cos\varphi+i\,\sin\varphi)$: где $r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(-2)^2+0^2}=2$, $\begin{cases}\cos\varphi=a/r=-1\\ \sin\varphi=b/r=0\end{cases}$, т. е. $\varphi=\pi.$

Тогда $z=2(\cos\pi+i\sin\pi)$. Используем формулу для корней n степени из комплексного числа z в тригонометрической форме: $\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}++i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$, где $n=6,\ k=0,1,\ldots,n-1.$

Получаем $\sqrt[6]{-2}=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{6}++i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{6}\right)$, где $k=0,1,2,3,4,5.$

При $k=0$: $\sqrt[6]{-2}=\sqrt[6]{2}(\cos(\pi/6)+i\sin(\pi/6))=\sqrt[6]{2}(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2})$.

При $k=1$: $\sqrt[6]{-2}=\sqrt[6]{2}(\cos(\pi/2)+i\sin(\pi/2))=\sqrt[6]{2}(0+i)=\sqrt[6]{2}i$.

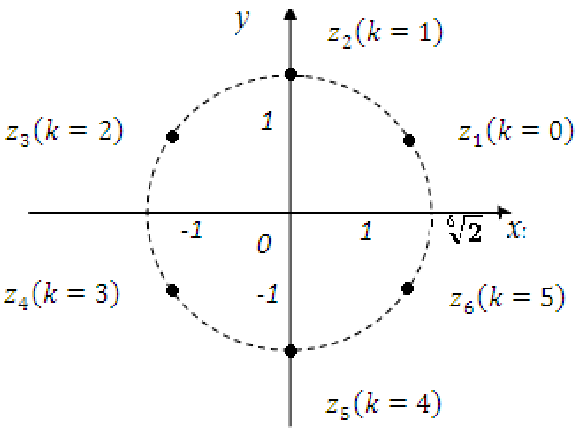
При $k=2$: $\sqrt[6]{-2}=\sqrt[6]{2}(\cos(5\pi/6)+i\sin(5\pi/6))=\sqrt[6]{2}(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2})$.

При $k=3$: $\sqrt[6]{-2}=\sqrt[6]{2}(\cos(7\pi/6)+i\sin(7\pi/6))=\sqrt[6]{2}(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2})$.

При $k=4$: $\sqrt[6]{-2}=\sqrt[6]{2}(\cos(3\pi/2)+i\sin(3\pi/2))=\sqrt[6]{2}(0-i)=-\sqrt[6]{2}i$.

При $k=5$: $\sqrt[6]{-2}=\sqrt[6]{2}(\cos(11\pi/6)+i\sin(11\pi/6))=\sqrt[6]{2}(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2})$.

Ответ:



3. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют базис в пространстве R^3 в случае их линейной независимости. Векторы линейно независимы, если определитель, составленный из их координат, отличен от нуля. Проверим это условие:

$$\begin{vmatrix}5 & 6 & 4\\4 & 1 & 4\\4 & 6 & 7\end{vmatrix}=5\cdot\begin{vmatrix}1 & 4\\6 & 7\end{vmatrix}-6\cdot\begin{vmatrix}4 & 4\\4 & 7\end{vmatrix}+4\cdot\begin{vmatrix}4 & 1\\4 & 6\end{vmatrix}=5\cdot(-17)-6\cdot12+4\cdot20=-77\neq0$$

Следовательно, векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ образуют базис. Будем искать разложение вектора $\vec{d}$ по базису в векторном виде $\vec{d}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$. Расписав по координатам, получим систему

$$\begin{cases}5x+6y+4z=76\\4x+y+4z=45\\4x+6y+7z=82.\end{cases}$$

Решив систему как в задании 1, получим: $x = 6,\ \ y = 5,\ \ z = 4$.

Ответ: $\vec{d} = 6\vec{a} + 5\vec{b} + 4\vec{c}$.

4. Объем пирамиды численно равен одной шестой модуля смешанного произведения этих трех векторов, на которых она построена и выходящих из одной точки. Найдем координаты векторов, выходящих из точки *A*: $\overrightarrow{AB} = (-6;-5;-4)$, $\overrightarrow{AC} = (3;5;7)$, $\overrightarrow{AD} = (-7;-3;-5)$. Смешанное произведение векторов, заданных координатами, можно вычислить как определитель матрицы, стороки которой представляют координаты векторов. Тогда

$$V = \frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})| = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} -6 & -5 & -4 \\ 3 & 5 & 7 \\ -7 & -3 & -5 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{6}|90| = 15.$$

Ответ: 15.

5. Уравнение прямой, проходящей через две точки $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$, имеет вид $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$. Найдем уравнение прямой AB: $\dfrac{x-6}{0-6} = \dfrac{y+5}{-1+5}$ или $y = -\dfrac{2}{3}x - 1$. Ее угловой коэффициент $k_1 = -2/3$. Тогда по условию перпендикулярности двух прямых угловой коэффициент прямой *CH* будет $k_2 = -1/k_1 = 3/2$, а уравнение прямой CH: $y = \dfrac{3}{2}x + b$. Подставим в него координаты точки C: $15 = \dfrac{3}{2}\cdot 6 + b$, и находим $b = 6$. Получили уравнение прямой *CH*: $y = \dfrac{3}{2}x + 6$. Найдем координаты точки *M* как середины отрезка *AC*: $M(\dfrac{6+6}{2};\ \dfrac{-5+15}{2})$, т.е. $M(6;\ 5)$. Составим уравнение прямой BM: $\dfrac{x-0}{6-0} = \dfrac{y+1}{5+1}$ или $y = x - 1$. Координаты точки пересечения высоты CH и медианы BM находим, решая систему:

$$\begin{cases} y = \frac{3}{2}x + 6 \\ y = x - 1 \end{cases}. \quad \text{Получим} \quad \begin{cases} x = -14 \\ y = -15 \end{cases}.$$

Ответ: высота *CM* $(3x - 2y + 12 = 0)$ и медиана *BM* $(x - y - 1 = 0)$ пересекаются в точке $(-14;\ -15)$.

6. Сгруппируем слагаемые, содержащие только x, и слагаемые, содержащие только y: $25(x^2+4x)-36(y^2+2y)-836=0$. Дополним выражения в скобках до полных квадратов:

$$25(x^2+4x+4-4)-36(y^2+2y+1-1)-836=0,$$

$$25((x+2)^2-4)-36((y+1)^2-1)-836=0,$$

$$25(x+2)^2-36(y+1)^2=900.$$

Разделим обе части уравнения на 900:

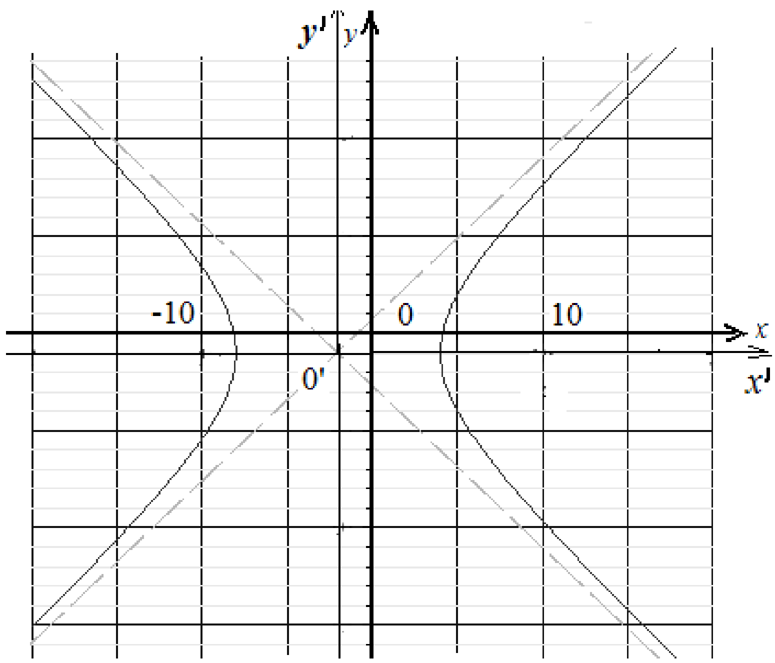
$$\frac{(x+2)^2}{36}-\frac{(y+1)^2}{25}=1.$$

Сделаем замену переменных:

$$\frac{(x')^2}{36}-\frac{(y')^2}{25}=1, \text{ где } x'=x+2,\ y'=y+1.$$

Полученное уравнение является каноническим уравнением гиперболы с полуосями: действительной $a=6$ и мнимой $b=5$, центром в точке $O'(-2;-1)$ (в основных координатах) и асимптотами $y'=\pm\frac{5}{6}x'$ (в новых координатах x' и y'). Далее в новых координатных осях проводим асимптоты, отмечаем вершины гиперболы и проводим ее ветви.

Ответ: $\frac{(x+2)^2}{36}-\frac{(y+1)^2}{25}=1$.



7. Сложение и вычитание матриц выполняется поэлементно:

$$B-C=\begin{bmatrix} 9 & 11 & 5 \\ -2 & 3 & -1 \\ 11 & 1 & 13 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -6 & 2 & -5 \\ 5 & -5 & 6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & 6 & 6 \\ 4 & 1 & 4 \\ 6 & 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

Для нахождения матрицы, обратной к $B-C$, припишем к найденной матрице единичную и получившуюся матрицу приведем к ступенчатому виду Гаусса.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 6 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 6 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right](-1) \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 6 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right](-4) \quad (-6) \quad \to$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -19 & -4 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & -24 & -5 & -6 & 6 & 1 \end{array}\right](-1) \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -19 & -4 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right](-4) \to$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & -4 \\ 0 & -5 & -1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right](-5) \quad (5) \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -19 & -6 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 18 & 6 & -19 \end{array}\right](-1)$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -19 & -6 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -18 & -6 & 19 \end{array}\right](-2) \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 17 & 6 & -18 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -18 & -6 & 19 \end{array}\right]$$

Получили матрицу, имеющую ступенчатый вид Гаусса, левая часть которой единичная матрица, что является критерием существования обратной матрицы, а правая часть – искомая обратная матрица. Таким образом, $(B-C)^{-1}=\begin{bmatrix} 17 & 6 & -18 \\ 4 & 1 & -4 \\ -18 & -6 & 19 \end{bmatrix}$.

Обратную матрицу к матрице A можно найти и другим методом, используя алгебраические дополнения к элементам матрицы:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix}, \text{ где } A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij},$$

M_{ij} – определитель, полученый путем вычеркивания из матрицы A i строки и j столбца. Для полученной матрицы $B-C$ имеем:

$$(B-C)=\begin{vmatrix} 5 & 6 & 6 \\ 4 & 1 & 4 \\ 6 & 6 & 7 \end{vmatrix}=35+144+144-36-120-168=-1$$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}=-17,\quad A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}=-4$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 6 \end{vmatrix}=18,\quad A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}=-6,$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}5&6\\6&7\end{vmatrix}=-1,\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}5&6\\6&6\end{vmatrix}=6,$$
$$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}6&6\\1&4\end{vmatrix}=18,\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}5&6\\4&4\end{vmatrix}=-4,$$
$$A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}5&6\\4&1\end{vmatrix}=-19$$
$$(B-C)^{-1}=\frac{1}{-1}\cdot\begin{bmatrix}-17&-6&18\\-4&-1&4\\18&6&-19\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}17&6&-18\\4&1&-4\\-18&-6&19\end{bmatrix}$$

Матрица $(B-C)^{-1}$ совпадает с матрицей $(B-C)^{-1}$, полученной методом присоединенной матрицы.

Произведением матрицы A, имеющей размерность $m\times n$, на матрицу B, имеющую размерность $n\times p$, называется матрица C, имеющая размерность $m\times p$, элементы которой вычисляются по формуле:

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\ \ (i=1,2,...,m;\ k=1,2,...,n;\ j=1,2,...,p).$$

Перемножая матрицы, получаем:

$$A\cdot(B-C)^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&-2\\7&6&2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}17&6&-18\\4&1&-4\\-18&-6&19\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}57&19&-60\\107&36&-112\end{bmatrix}.$$

$$A\cdot(B-C)^{-1}\cdot D=\begin{bmatrix}57&19&-60\\107&36&-112\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-4&2\\-3&-1\\-8&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}195&155\\360&290\end{bmatrix}.$$

Ответ: $\begin{bmatrix}195&155\\360&290\end{bmatrix}$.

8. Сначала получим решение матричного уравнения в общем виде. Домножим обе части уравнения справа (так как матрица A справа от матрицы X) на матрицу, обратную к A: $X\cdot A\cdot A^{-1}=B\cdot A^{-1}$. По определению обратной матрицы имеем $X\cdot E=B\cdot A^{-1}$, а по определению единичной матрицы получаем $X=B\cdot A^{-1}$. Таким образом, чтобы найти искомую матрицу X, надо сначала найти матрицу, обратную к A, а потом матрицу B на нее умножить справа. Найдем обратную матрицу A^{-1} (см. задание 7).

Тогда $A^{-1}=\begin{bmatrix}-21&-5&20\\-3&-1&3\\20&5&-19\end{bmatrix}$. Далее выполним умножение матриц B и A^{-1}:

$$X = B\cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 27 & 4 & 29 \\ 42 & 31 & 49 \\ -5 & 2 & -5 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -21 & -5 & 20 \\ -3 & -1 & 3 \\ 20 & 5 & -19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 5 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ответ: $X = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 5 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$

9. По теореме Кронекера–Капелли система совместна тогда и только тогда, когда ранг ее матрицы равен рангу ее расширенной матрицы. Приведем расширенную матрицу системы к ступенчатому виду Гаусса:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & -5 & -1 & 15 \\ 4 & 24 & -21 & 1 & 61 \\ 1 & 6 & 4 & -6 & 46 \end{array}\right] (-4) \quad (-1) \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & -5 & -1 & 15 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & -5 & 31 \end{array}\right] (-1) \to$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & -5 & -1 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 9 & -5 & 31 \end{array}\right] (5) \quad (-9) \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & 0 & -26 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 40 & 40 \end{array}\right] \frac{1}{40} \to$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & 0 & -26 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] (5) \quad (26) \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & 0 & 0 & 36 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Ранг матрицы системы совпадает с рангом расширенной матрицы (они равны 3), следовательно, система совместна. По полученной матрице вида Гаусса запишем систему уравнений в виде: $\begin{cases} x_1 + 6x_2 = 36 \\ x_3 = 4 \\ x_4 = 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} x_1 = -6x_2 + 36 \\ x_3 = 4 \\ x_4 = 1 \end{cases}$.

При выполнении элементарных преобразований над строками расширенной матрицы системы получается система равносильная исходной.

Здесь переменные x_1, x_3, x_4, как соответствующие базисным столбцам, можно объявить главными, а переменную x_2 – свободной. Свободные переменные в общем решении полагаем равными константам. Тогда общее решение системы имеет вид: $\begin{cases} x_1 = -6c + 36 \\ x_2 = c \\ x_3 = 4 \\ x_4 = 1 \end{cases}$, где c – произвольное число.

Ответ: $x_1 = -6c + 36,\ x_2 = c,\ x_3 = 4,\ x_4 = 1$, где c – произвольное число.

10. Найдем характеристический многочлен матрицы A:

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}3-\lambda & 4 & 4\\ -1 & 5-\lambda & 1\\ 0 & 2 & 6-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)\begin{vmatrix}5-\lambda & 1\\ 2 & 6-\lambda\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}4 & 4\\ 2 & 6-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)(\lambda^2-11\lambda+28)+16-4\lambda=$$

$$=(3-\lambda)(4-\lambda)(7-\lambda)+4(4-\lambda)=(4-\lambda)(\lambda^2-10\lambda+25)=(4-\lambda)(5-\lambda)^2.$$

Корни характеристического уравнения $|A-\lambda E|=0$: $\lambda_1=4$, $\lambda_{2,3}=5$ (кратность 2).

Найдем собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_1=4$ из уравнения $(A-4E)\vec{h}=\vec{0}$. $\begin{bmatrix}-1 & 4 & 4\\ -1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$.

Выполним элементарные преобразования строк с целью приведения матрицы к виду Гаусса:

$$\begin{bmatrix}-1 & 4 & 4\\ -1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 2\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ (-4) \quad (-2)\\ \\\end{matrix}\rightarrow\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 0\end{bmatrix}\frac{1}{3}\rightarrow$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{matrix}(1) \quad (-2)\\ \\ \\\end{matrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

откуда $\begin{cases}a=0\\ b+c=0\end{cases}$. Получили, что переменные a и b – главные, а переменная c – свободная. Пусть $c=C$. Тогда $b=-C$. Полагая $C=1$, получаем базисный собственный вектор, соответствующий $\lambda_1=4$: $\vec{h}_1=(0;\ 1;\ -1)^T$.

Найдем собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_{2,3}=5$. Решаем уравнение $(A-5E)\vec{h}=\vec{0}$. $\begin{bmatrix}-2 & 4 & 4\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$.

Выполним элементарные преобразования строк с целью приведения матрицы к виду Гаусса:

$$\begin{bmatrix}-2 & 4 & 4\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}(-\frac{1}{2})\rightarrow\begin{bmatrix}1 & -2 & -2\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}(1)\rightarrow\begin{bmatrix}1 & -2 & -2\\ 0 & -2 & -1\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ (-1) \quad (1)\\ \\\end{matrix}\rightarrow$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}(-\frac{1}{2})\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$\begin{cases} a-c=0 \\ b+\frac{1}{2}c=0 \end{cases}$, тогда $\begin{cases} a=c \\ b=-\frac{1}{2}c \end{cases}$. Переменные a и b – главные, а переменная c – свободная.

Полагая $C=-2$, получаем только один базисный собственный вектор, соответствующий $\lambda_{2,3}=5$: $\vec{h}_2=(-2;\ 1;\ -2)^T$. Поскольку $\lambda_{2,3}=5$ – корень кратности 2, то необходимо найти присоединенный вектор $\vec{h}_2'$: $(A-5E)\vec{h}_2'=\overrightarrow{h_2}$, т.е. $\begin{bmatrix} -2 & 4 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Выполним элементарные преобразования строк с целью приведения матрицы к виду Гаусса:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & 4 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right](-\frac{1}{2}) \to \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right](1) \to \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right](-1)\quad(1)$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right](-\frac{1}{2}) \to \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & -1 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

откуда $\begin{cases} a-c=-1 \\ b+\frac{1}{2}c=-1 \end{cases}$; $\begin{cases} a=c-1 \\ b=-\frac{1}{2}c-1 \end{cases}$

Полагая $C=0$, получаем базисный присоединенный вектор $\vec{h}_2'$ к собственному вектору $\vec{h}_2$: $\vec{h}_2'=(-1;\ -1;\ 0)^T$.

Найдем матрицу оператора в базисе из собственных и присоединенных векторов $\vec{h}_1,\ \vec{h}_2,\ \vec{h}_2'$ (обозначим ее B). Матрица перехода от старого базиса к новому состоит из векторов нового базиса, являющихся ее столбцами: $S=\begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$.

Найдем обратную матрицу S^{-1} (см. задание 7). Получим $S^{-1}=\begin{bmatrix} 2 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$

Тогда $B=S^{-1}AS=\begin{bmatrix} 2 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 \\ -1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

Ответ: $\lambda_1 = 4,\ \lambda_{2,3} = 5,\ \vec{h}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{h}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},\ \vec{h}_2' = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$

Варианты заданий для самостоятельного решения (1–30)

Вариант 1

1. Решить систему методом Крамера

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4z = 28 \\ 4x + y + 4z = 27 \\ 4x + 2y + 5z = 34. \end{cases}$$

2. Изобразить корни 2 степени из $\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ на комплексной плоскости.

3. Проверить, что векторы $\vec{a} = (3;\ 4;\ 2)$, $\vec{b} = (2;\ 1;\ 2)$, $\vec{c} = (2;\ 4;\ 5)$ образуют базис и разложить вектор $\vec{d} = (20;\ 27;\ 30)$ по этому базису.

4. Найти объем пирамиды, если известны координаты ее вершин $A(-2;1;1)$, $B(-4;-2;-3)$, $C(3;4;2)$, $D(-3;-4;-2)$.

5. Даны вершины треугольника $A(2;13)$, $B(8;9)$, $C(2;-7)$. Найти координаты точки пересечения высоты CH и медианы BM.

6. Привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду и построить ее $9x^2 - 4y^2 - 36x + 8y - 4 = 0$.

7. Выполнить действия $A \cdot (B - C)^{-1} \cdot D$, где

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 7 & -1 & 7 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & -3 \\ 3 & -3 & 2 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -5 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

8. Решить матричное уравнение $X \cdot A = B$, где $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 5 \\ 12 & -3 & 13 \\ 5 & -2 & 5 \end{bmatrix}$.

9. Исследовав систему на совместность, найти ее общее решение методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 = -5 \\ 4x_1 + 8x_2 - 13x_3 + x_4 = -19 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 6x_4 = 10. \end{cases}$$

10. Найти собственные значения, собственные и присоединенные векторы матрицы линейного оператора. Найти вид этой матрицы в базисе из собственных и присоединенных векторов $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -4 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

Вариант 2

1. Решить систему методом Крамера

$$\begin{cases} 6x + 2y + 7z = 52 \\ 4x + y + 4z = 30 \\ 7x + 2y + 8z = 58. \end{cases}$$

2. Изобразить корни 2 степени из i на комплексной плоскости.

3. Проверить, что векторы $\vec{a} = (6;\ 4;\ 5)$, $\vec{b} = (2;\ 1;\ 2)$, $\vec{c} = (5;\ 4;\ 8)$ образуют базис и разложить вектор $\vec{d} = (44;\ 30;\ 54)$ по этому базису.

4. Найти объем пирамиды, если известны координаты ее вершин $A(-2;4;-2)$, $B(-4;-2;-6)$, $C(6;4;2)$, $D(-6;-4;-2)$.

5. Даны вершины треугольника $A(2,\ 16)$, $B(-10,\ 12)$, $C(2,\ -4)$. Найти координаты точки пересечения высоты CH и медианы BM.

6. Привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду и построить ее $9x^2 - 4y^2 - 54x + 16y + 29 = 0$.

7. Выполнить действия $A \cdot (B - C)^{-1} \cdot D$, где

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 8 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 8 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \\ 7 & -1 & 7 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & -3 \\ 3 & -3 & 2 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -7 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

8.Решить матричное уравнение $X \cdot A = B$, где $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$,$B = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 7 \\ 17 & -5 & 17 \\ 8 & -4 & 7 \end{bmatrix}$

9. Исследовав систему на совместность, найти ее общее решение методом Гаусса $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 = -8 \\ 5x_1 + 10x_2 - 16x_3 + x_4 = -39 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 11. \end{cases}$

10. Найти собственные значения, собственные и присоединенные векторы матрицы линейного оператора. Найти вид этой матрицы в базисе из собственных и присоединенных векторов $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ -3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

Вариант 3

1. Решить систему методом Крамера

$$\begin{cases} 5x + 3y + 6z = 66 \\ 6x + y + 6z = 59 \\ 6x + 3y + 7z = 75. \end{cases}$$

2. Изобразить корни 2 степени из $-\frac{1}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$ на комплексной плоскости.

3. Проверить, что векторы $\vec{a}=(5;\ 6;\ 4)$, $\vec{b}=(3;\ 1;\ 3)$, $\vec{c}=(4;\ 6;\ 7)$ образуют базис и разложить вектор $\vec{d}=(54;\ 59;\ 69)$ по этому базису.

4. Найти объем пирамиды, если известны координаты ее вершин $A(-3;2;1)$, $B(-6;-3;-5)$, $C(5;6;3)$, $D(-5;-6;-3)$.

5. Даны вершины треугольника $A(3,\ 20)$, $B(9,\ 14)$, $C(3,\ -10)$. Найти координаты точки пересечения высоты CH и медианы BM.

6. Привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду и построить ее $9x^2-4y^2-72x+24y+72=0$.

7. Выполнить действия $A\cdot(B-C)^{-1}\cdot D$, где

$$A=\begin{bmatrix} -1 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & 10 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 9 & 5 & 3 \\ 4 & 3 & 3 \\ 7 & -1 & 7 \end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix} 6 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & -3 \\ 3 & -3 & 2 \end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix} -4 & -4 \\ -9 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

8. Решить матричное уравнение $X\cdot A=B$, где $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$,$B=\begin{bmatrix} 9 & -2 & 9 \\ 24 & -7 & 23 \\ 13 & -6 & 11 \end{bmatrix}$

9. Исследовав систему на совместность, найти ее общее решение методом Гаусса $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3-x_4=-11 \\ 6x_1+12x_2-19x_3+x_4=-65 \\ x_1+2x_2+2x_3-8x_4=12. \end{cases}$

10. Найти собственные значения, собственные и присоединенные векторы матрицы линейного оператора. Найти вид этой матрицы в базисе из собственных и присоединенных векторов $A=\begin{bmatrix} 10 & 9 & -9 \\ -1 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & -1 \end{bmatrix}$.

Вариант 4

1. Решить систему методом Крамера

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4z = 32 \\ 5x + y + 5z = 38 \\ 4x + 2y + 5z = 39. \end{cases}$$

2. Изобразить корни 2 степени из -1 на комплексной плоскости.

3. Проверить, что векторы $\vec{a} = (3;\ 5;\ 2)$, $\vec{b} = (2;\ 1;\ 2)$, $\vec{c} = (2;\ 5;\ 5)$ образуют базис и разложить вектор $\vec{d} = (22;\ 38;\ 35)$ по этому базису.

4. Найти объем пирамиды, если известны координаты ее вершин $A(-3;1;2)$, $B(-5;-2;-3)$, $C(3;5;2)$, $D(-3;-5;-2)$.

5. Даны вершины треугольника $A(2,\ 18)$, $B(14,\ 12)$, $C(2,\ -12)$. Найти координаты точки пересечения высоты CH и медианы BM.

6. Привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду и построить ее $16x^2 - 4y^2 - 32x - 8y - 52 = 0$.

7. Выполнить действия $A \cdot (B - C)^{-1} \cdot D$, где

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 4 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \\ 9 & -2 & 8 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -2 & 2 & -4 \\ 4 & -4 & 2 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} -6 & -1 \\ -2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

8. Решить матричное уравнение $X \cdot A = B$, где $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$,

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 14 & 0 & 17 \\ 12 & 2 & 15 \end{bmatrix}$$

9. Исследовав систему на совместность, найти ее общее решение методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 - x_4 = -3 \\ 3x_1 + 6x_2 - 13x_3 + x_4 = -8 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 14. \end{cases}$$

10. Найти собственные значения, собственные и присоединенные векторы матрицы линейного оператора. Найти вид этой матрицы в базисе из собственных и присоединенных векторов $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & -2 \\ -7 & 3 & 9 \end{bmatrix}$.

Вариант 5

1. Решить систему методом Крамера

$$\begin{cases} 6x + 2y + 7z = 59 \\ 5x + y + 5z = 41 \\ 7x + 2y + 8z = 66. \end{cases}$$

2. Изобразить корни 2 степени из $-\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ на комплексной плоскости.

3. Проверить, что векторы $\vec{a} = (6;\ 5;\ 5)$, $\vec{b} = (2;\ 1;\ 2)$, $\vec{c} = (5;\ 5;\ 8)$ образуют базис и разложить вектор $\vec{d} = (49;\ 41;\ 62)$ по этому базису.

4. Найти объем пирамиды, если известны координаты ее вершин $A(-3;4;-1)$, $B(-5;-2;-6)$, $C(6;5;2)$, $D(-6;-5;-2)$.

5. Даны вершины треугольника $A(2,\ 21)$, $B(-4,\ 15)$, $C(2,\ -9)$. Найти координаты точки пересечения высоты CH и медианы BM.

6. Привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду и построить ее $16x^2 - 4y^2 - 96x + 8y + 76 = 0$.

7. Выполнить действия $A \cdot (B - C)^{-1} \cdot D$, где

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 8 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 9 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \\ 9 & -2 & 8 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -1 \\ -2 & 2 & -4 \\ 4 & -4 & 2 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} -6 & -3 \\ -6 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

8. Решить матричное уравнение $X \cdot A = B$, где $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 20 & -4 & 21 \\ 14 & -2 & 15 \end{bmatrix}$

9. Исследовав систему на совместность, найти ее общее решение методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 - x_4 = -11 \\ 5x_1 + 10x_2 - 21x_3 + x_4 = -54 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 18. \end{cases}$$

10. Найти собственные значения, собственные и присоединенные векторы матрицы линейного оператора. Найти вид этой матрицы в базисе из собственных и присоединенных векторов $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 4 \\ -1 & 5 & 1 \\ -8 & 6 & 10 \end{bmatrix}$.

Вариант 6

1. Решить систему методом Крамера

$$\begin{cases} 6x + 3y + 7z = 50 \\ 2x + y + 2z = 16 \\ 7x + 3y + 8z = 55. \end{cases}$$

2. Изобразить корни 2 степени из $-i$ на комплексной плоскости.

3. Проверить, что векторы $\vec{a} = (6;\ 2;\ 5)$, $\vec{b} = (3;\ 1;\ 3)$, $\vec{c} = (5;\ 2;\ 8)$ образуют базис и разложить вектор $\vec{d} = (46;\ 16;\ 49)$ по этому базису.

4. Найти объем пирамиды, если известны координаты ее вершин $A(1;3;-4)$, $B(-2;-3;-6)$, $C(6;2;3)$, $D(-6;-2;-3)$.

5. Даны вершины треугольника $A(3,\ 1)$, $B(-21,\ 3)$, $C(3,\ 11)$. Найти координаты точки пересечения высоты CH и медианы BM.

6. Привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду и построить ее $16x^2 - 4y^2 - 128x + 16y + 176 = 0$.

7. Выполнить действия $A \cdot (B - C)^{-1} \cdot D$, где

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 10 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 10 & 6 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \\ 9 & -2 & 8 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 6 & 4 & -1 \\ -2 & 2 & -4 \\ 4 & -4 & 2 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} -6 & -4 \\ -8 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

8. Решить матричное уравнение $X \cdot A = B$, где $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 26 & -6 & 26 \\ 18 & -4 & 18 \end{bmatrix}$

9. Исследовав систему на совместность, найти ее общее решение методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 - x_4 = -15 \\ 6x_1 + 12x_2 - 25x_3 + x_4 = -89 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 8x_4 = 20. \end{cases}$$

10. Найти собственные значения, собственные и присоединенные векторы матрицы линейного оператора. Найти вид этой матрицы в базисе из собственных и присоединенных векторов $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -7 & -1 & 10 \\ -3 & -1 & 6 \end{bmatrix}$.

Вариант 7

1. Решить систему методом Крамера

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4z = 36 \\ 6x + y + 6z = 51 \\ 4x + 2y + 5z = 44. \end{cases}$$

2. Изобразить корни 2 степени из $\frac{1}{2}-i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$ на комплексной плоскости.

3. Проверить, что векторы $\vec{a}=(3;\ 6;\ 2), \vec{b}=(2;\ 1;\ 2), \vec{c}=(2;\ 6;\ 5)$ образуют базис и разложить вектор $\vec{d}=(24;\ 51;\ 40)$ по этому базису.

4. Найти объем пирамиды, если известны координаты ее вершин $A(-4;1;3)$, $B(-6;-2;-3)$, $C(3;6;2)$, $D(-3;-6;-2)$.

5. Даны вершины треугольника $A(2,\ 23), B(20,\ 15), C(2,\ -17)$. Найти координаты точки пересечения высоты CH и медианы BM.

6. Привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду и построить ее $25x^2-4y^2-50x-16y-91=0$.

7. Выполнить действия $A\cdot(B-C)^{-1}\cdot D$, где

$$A=\begin{bmatrix}-3 & 2 & 1\\ -1 & 7 & 4\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}8 & 7 & 5\\ 1 & 3 & -2\\ 11 & -3 & 9\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}3 & 5 & -1\\ -2 & 2 & -5\\ 5 & -5 & 2\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}-8 & -1\\ -1 & -2\\ -1 & 3\end{bmatrix}$$

8. Решить матричное уравнение $X\cdot A=B$, где $A=\begin{bmatrix}4 & 1 & 5\\ 2 & -1 & 2\\ 5 & 1 & 6\end{bmatrix}$,

$B=\begin{bmatrix}-7 & -4 & -9\\ 21 & 1 & 25\\ 24 & 4 & 29\end{bmatrix}$

9. Исследовав систему на совместность, найти ее общее решение методом Гаусса $\begin{cases}x_1+2x_2-5x_3-x_4=-4\\ 3x_1+6x_2-16x_3+x_4=-11\\ x_1+2x_2+4x_3-5x_4=19.\end{cases}$

10. Найти собственные значения, собственные и присоединенные векторы матрицы линейного оператора. Найти вид этой матрицы в базисе из собственных и присоединенных векторов $A=\begin{bmatrix}3 & 1 & 2\\ -7 & 7 & 10\\ 3 & -1 & 0\end{bmatrix}$.

Вариант 8

1. Решить систему методом Крамера

$$\begin{cases}2x+3y+3z=24\\ 4x+y+4z=30\\ 3x+3y+4z=31.\end{cases}$$

2. Изобразить корни 3 степени из 1 на комплексной плоскости.

3. Проверить, что векторы $\vec{a}=(2;\ 4;\ 1)$, $\vec{b}=(3;\ 1;\ 3)$, $\vec{c}=(1;\ 4;\ 4)$ образуют базис и разложить вектор $\vec{d}=(16;\ 30;\ 25)$ по этому базису.

4. Найти объем пирамиды, если известны координаты ее вершин $A(-1;-1;2)$, $B(-4;-3;-2)$, $C(2;4;3)$, $D(-2;-4;-3)$.

5. Даны вершины треугольника $A(3,\ 7)$, $B(15,\ 5)$, $C(3,\ -3)$. Найти координаты точки пересечения высоты CH и медианы BM.

6. Привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду и построить ее $25x^2-4y^2-100x-8y-4=0$.

7. Выполнить действия $A\cdot(B-C)^{-1}\cdot D$, где

$$A=\begin{bmatrix}-3 & 1 & 2\\ -1 & 6 & 6\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}9 & 7 & 5\\ 2 & 3 & -1\\ 11 & -3 & 9\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}4 & 5 & -1\\ -2 & 2 & -5\\ 5 & -5 & 2\end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix}-8 & -2\\ -3 & -1\\ 0 & 3\end{bmatrix}$$

8.Решить матричное уравнение $X\cdot A=B$, где $A=\begin{bmatrix}4 & 1 & 4\\ 3 & -1 & 3\\ 5 & 1 & 6\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-5 & -4 & -7\\ 22 & -1 & 25\\ 23 & 2 & 27\end{bmatrix}$

9. Исследовав систему на совместность, найти ее общее решение методом Гаусса $\begin{cases}x_1+2x_2-5x_3-x_4=-9\\ 4x_1+8x_2-21x_3+x_4=-35\\ x_1+2x_2+4x_3-6x_4=22.\end{cases}$

10. Найти собственные значения, собственные и присоединенные векторы матрицы линейного оператора. Найти вид этой матрицы в базисе из собственных и присоединенных векторов $A=\begin{bmatrix}6 & 4 & -4\\ -1 & 4 & 1\\ 0 & 2 & 3\end{bmatrix}$.

Вариант 9

1. Решить систему методом Крамера

$$\begin{cases}6x+3y+7z=64\\ 4x+y+4z=34\\ 7x+3y+8z=71.\end{cases}$$

2. Изобразить корни 3 степени из i на комплексной плоскости.

3. Проверить, что векторы $\vec{a}=(6;\ 4;\ 5)$, $\vec{b}=(3;\ 1;\ 3)$, $\vec{c}=(5;\ 4;\ 8)$ образуют базис и разложить вектор $\vec{d}=(56;\ 34;\ 65)$ по этому базису.

4. Найти объем пирамиды, если известны координаты ее вершин $A(-1;3;-2)$, $B(-4;-3;-6)$, $C(6;4;3)$, $D(-6;-4;-3)$.

5. Даны вершины треугольника $A(3,\ 11)$, $B(-9,\ 9)$, $C(3,\ 1)$. Найти координаты точки пересечения высоты CH и медианы BM.

6. Привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду и построить ее $25x^2-4y^2-200x+8y+296=0$.

7. Выполнить действия $A\cdot(B-C)^{-1}\cdot D$, где

$$A=\begin{bmatrix}-3 & -1 & 4\\ -1 & 4 & 10\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}11 & 7 & 5\\ 4 & 3 & 1\\ 11 & -3 & 9\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}6 & 5 & -1\\ -2 & 2 & -5\\ 5 & -5 & 2\end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix}-8 & -4\\ -7 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$$

8. Решить матричное уравнение $X\cdot A=B$, где $A=\begin{bmatrix}4 & 1 & 5\\ 5 & -1 & 5\\ 5 & 1 & 6\end{bmatrix}$,

$B=\begin{bmatrix}-1 & -4 & -3\\ 30 & -5 & 31\\ 27 & -2 & 29\end{bmatrix}$

9. Исследовав систему на совместность, найти ее общее решение методом Гаусса $\begin{cases}x_1+2x_2-5x_3-x_4=-19\\ 6x_1+12x_2-31x_3+x_4=-113\\ x_1+2x_2+4x_3-8x_4=28.\end{cases}$

10. Найти собственные значения, собственные и присоединенные векторы матрицы линейного оператора. Найти вид этой матрицы в базисе из собственных и присоединенных векторов $A=\begin{bmatrix}3 & 1 & 1\\ -1 & 5 & 1\\ -3 & 2 & 6\end{bmatrix}$.

Вариант 10

1. Решить систему методом Крамера

$$\begin{cases}4x+2y+5z=31\\ 3x+y+3z=19\\ 5x+2y+6z=36.\end{cases}$$

2. Изобразить корни 3 степени из -1 на комплексной плоскости.

3. Проверить, что векторы $\vec{a}=(4;\ 3;\ 3)$, $\vec{b}=(2;\ 1;\ 2)$, $\vec{c}=(3;\ 3;\ 6)$ образуют базис и разложить вектор $\vec{d}=(25;\ 19;\ 32)$ по этому базису.

4. Найти объем пирамиды, если известны координаты ее вершин $A(-1;2;-1)$, $B(-3;-2;-4)$, $C(4;3;2)$, $D(-4;-3;-2)$.

5. Даны вершины треугольника $A(2,\ 9)$, $B(-4,\ 7)$, $C(2,\ -1)$. Найти координаты точки пересечения высоты CH и медианы BM.

6. Привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду и построить ее $36x^2-4y^2-72x-24y-144=0$.

7. Выполнить действия $A\cdot(B-C)^{-1}\cdot D$, где

$A=\begin{bmatrix}-4 & 3 & 1\\ -2 & 9 & 4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}9 & 8 & 6\\ 1 & 3 & -3\\ 13 & -4 & 10\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}3 & 6 & -1\\ -2 & 2 & -6\\ 6 & -6 & 2\end{bmatrix}$, $D=\begin{bmatrix}-10 & -1\\ 0 & -3\\ -1 & 4\end{bmatrix}$

8. Решить матричное уравнение $X\cdot A=B$, где $A=\begin{bmatrix}5 & 1 & 6\\ 2 & -1 & 2\\ 6 & 1 & 7\end{bmatrix}$,

$B=\begin{bmatrix}-15 & -5 & -18\\ 30 & 2 & 35\\ 40 & 6 & 47\end{bmatrix}$.

9. Исследовав систему на совместность, найти ее общее решение методом Гаусса $\begin{cases}x_1+2x_2-6x_3-x_4=-5\\ 3x_1+6x_2-19x_3+x_4=-14\\ x_1+2x_2+5x_3-5x_4=24.\end{cases}$

10. Найти собственные значения, собственные и присоединенные векторы матрицы линейного оператора. Найти вид этой матрицы в базисе из собственных и присоединенных векторов $A=\begin{bmatrix}11 & 9 & -9\\ -1 & 5 & 1\\ 3 & 6 & 0\end{bmatrix}$.

Вариант 11

1. Решить систему методом Крамера

$$\begin{cases}2x+3y+3z=27\\ 5x+y+5z=42\\ 3x+3y+4z=35.\end{cases}$$

2. Изобразить корни 3 степени из $-i$ на комплексной плоскости.

3. Проверить, что векторы $\vec{a}=(2;\ 5;\ 1)$, $\vec{b}=(3;\ 1;\ 3)$, $\vec{c}=(1;\ 5;\ 4)$ образуют базис и разложить вектор $\vec{d}=(20;27;30)$ по этому базису.

4. Найти объем пирамиды, если известны координаты ее вершин $A(-2;-1;3)$, $B(-5;-3;-2)$, $C(2;5;3)$, $D(-3;-5;-3)$.

5. Даны вершины треугольника $A(3,\ 12),\ B(21,\ 8),\ C(3,\ -8)$. Найти координаты точки пересечения высоты CH и медианы BM.

6. Привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду и построить ее $36x^2-4y^2-144x-16y-16=0$.

7. Выполнить действия $A\cdot(B-C)^{-1}\cdot D$, где

$$A=\begin{bmatrix}-4 & 2 & 2\\ -2 & 8 & 6\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}10 & 8 & 6\\ 2 & 3 & -2\\ 13 & -4 & 10\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}4 & 6 & -1\\ -2 & 2 & -6\\ 6 & -6 & 2\end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix}-10 & -2\\ -2 & -2\\ 0 & 4\end{bmatrix}$$

8. Решить матричное уравнение $X\cdot A=B$, где $A=\begin{bmatrix}5 & 1 & 6\\ 3 & -1 & 3\\ 6 & 1 & 7\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-13 & -5 & -16\\ 30 & 0 & 34\\ 38 & 4 & 44\end{bmatrix}$

9. Исследовав систему на совместность, найти ее общее решение методом Гаусса $\begin{cases}x_1+2x_2-6x_3-x_4=-11\\ 4x_1+8x_2-25x_3+x_4=-43\\ x_1+2x_2+5x_3-6x_4=28.\end{cases}$

10. Найти собственные значения, собственные и присоединенные векторы матрицы линейного оператора. Найти вид этой матрицы в базисе из собственных и присоединенных векторов $A=\begin{bmatrix}3 & 1 & 2\\ 5 & 3 & -2\\ -7 & 3 & 10\end{bmatrix}$.

Вариант 12

1. Решить систему методом Крамера

$$\begin{cases}6x+3y+7z=71\\ 5x+y+5z=46\\ 7x+3y+8z=79.\end{cases}$$

2. Изобразить корни 4 степени из 1 на комплексной плоскости.

3. Проверить, что векторы $\vec{a}=(6;\ 5;\ 5),\ \vec{b}=(3;\ 1;\ 3),\ \vec{c}=(5;\ 5;\ 8)$ образуют базис и разложить вектор $\vec{d}=(61;\ 46;\ 73)$ по этому базису.

4. Найти объем пирамиды, если известны координаты ее вершин $A(-2;3;-1),\ B(-5;-3;-6),\ C(6;5;3),\ D(-6;-5;-3)$.

5. Даны вершины треугольника $A(3,\ 16),\ B(-3,\ 12),\ C(3,\ -4)$. Найти координаты точки пересечения высоты CH и медианы BM.

6. Привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду и построить ее $36x^2-4y^2-216x-8y+176=0$.

7. Выполнить действия $A\cdot(B-C)^{-1}\cdot D$, где

$A=\begin{bmatrix}-4&1&3\\-2&7&8\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}11&8&6\\3&3&-1\\13&-4&10\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}5&6&-1\\-2&2&-6\\6&-6&2\end{bmatrix}$, $D=\begin{bmatrix}-10&-3\\-4&-1\\1&4\end{bmatrix}$

8. Решить матричное уравнение $X\cdot A=B$, где $A=\begin{bmatrix}5&1&6\\4&-1&4\\6&1&7\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-11&-5&-14\\32&-2&35\\38&2&43\end{bmatrix}$.

9. Исследовав систему на совместность, найти ее общее решение методом Гаусса $\begin{cases}x_1+2x_2-6x_3-x_4=-17\\5x_1+10x_2-31x_3+x_4=-84\\x_1+2x_2+5x_3-7x_4=32.\end{cases}$

10. Найти собственные значения, собственные и присоединенные векторы матрицы линейного оператора. Найти вид этой матрицы в базисе из собственных и присоединенных векторов $A=\begin{bmatrix}0&4&4\\-1&6&1\\-8&6&11\end{bmatrix}$.

Вариант 13

1. Решить систему методом Крамера

$$\begin{cases}4x+2y+5z=41\\5x+y+5z=39\\5x+2y+6z=48.\end{cases}$$

2. Изобразить корни 4 степени из $-\frac{1}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$ на комплексной плоскости.

3. Проверить, что векторы $\vec{a}=(4;\ 5;\ 3)$, $\vec{b}=(2;\ 1;\ 2)$, $\vec{c}=(3;\ 5;\ 6)$ образуют базис и разложить вектор $\vec{d}=(31;\ 39;\ 44)$ по этому базису.

4. Найти объем пирамиды, если известны координаты ее вершин $A(-3;2;1)$, $B(-5;-2;-4)$, $C(4;5;2)$, $D(-4;-5;-2)$.

5. Даны вершины треугольника $A(2,\ 19)$, $B(8,\ 13)$, $C(2,\ -11)$. Найти координаты точки пересечения высоты CH и медианы BM.

6. Привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду и построить ее $4x^2-9y^2-8x+36y-68=0$.

7. Выполнить действия $A\cdot(B-C)^{-1}\cdot D$, где

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ 4 & 0 & 5\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}6 & 5 & 2\\ 1 & 3 & 2\\ 5 & 1 & 7\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}4 & 2 & -1\\ -3 & 2 & -2\\ 2 & -2 & 3\end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -6 & 2\\ -2 & -1\end{bmatrix}$$

8. Решить матричное уравнение $X\cdot A=B$, где $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 3 & -1 & 3\\ 2 & 2 & 3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}12 & 1 & 14\\ 12 & -2 & 13\\ -2 & -7 & -5\end{bmatrix}$

9. Исследовав систему на совместность, найти ее общее решение методом Гаусса $\begin{cases}x_1+3x_2-2x_3-x_4=0\\ 4x_1+12x_2-9x_3+x_4=1\\ x_1+3x_2+x_3-6x_4=7.\end{cases}$

10. Найти собственные значения, собственные и присоединенные векторы матрицы линейного оператора. Найти вид этой матрицы в базисе из собственных и присоединенных векторов $A=\begin{bmatrix}4 & 1 & -1\\ -1 & 2 & 1\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}$.

Вариант 14

1. Решить систему методом Крамера

$$\begin{cases}2x+3y+3z=30\\ 6x+y+6z=56\\ 3x+3y+4z=39.\end{cases}$$

2. Изобразить корни 4 степени из -1 на комплексной плоскости.

3. Проверить, что векторы $\vec{a}=(2;\ 6;\ 1)$, $\vec{b}=(3;\ 1;\ 3)$, $\vec{c}=(1;\ 6;\ 4)$ образуют базис и разложить вектор $\vec{d}=(18;\ 56;\ 33)$ по этому базису.

4. Найти объем пирамиды, если известны координаты ее вершин $A(-3;-1;4)$, $B(-6;-3;-2)$, $C(2;6;3)$, $D(-2;-6;-3)$.

5. Даны вершины треугольника $A(3,\ 17)$, $B(27,\ 11)$, $C(3,\ -13)$. Найти координаты точки пересечения высоты CH и медианы BM.

6. Привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду и построить ее $4x^2-9y^2-16x+54y-101=0$.

7. Выполнить действия $A\cdot(B-C)^{-1}\cdot D$, где

$$A=\begin{bmatrix}1 & -3 & 2\\ 4 & -1 & 7\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}7 & 5 & 2\\ 2 & 3 & 3\\ 5 & 1 & 7\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}5 & 3 & -1\\ -3 & 2 & -2\\ 2 & -2 & 3\end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix}-1 & -2\\ -8 & 3\\ -1 & -1\end{bmatrix}$$

8. Решить матричное уравнение $X\cdot A=B$, где $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 4 & -1 & 4\\ 2 & 2 & 3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}15 & 1 & 17\\ 18 & -5 & 18\\ 1 & -10 & -3\end{bmatrix}$

9. Исследовав систему на совместность, найти ее общее решение методом Гаусса $\begin{cases}x_1+3x_2-2x_3-x_4=-2\\ 5x_1+15x_2-11x_3+x_4=-9\\ x_1+3x_2+x_3-7x_4=7.\end{cases}$

10. Найти собственные значения, собственные и присоединенные векторы матрицы линейного оператора. Найти вид этой матрицы в базисе из собственных и присоединенных векторов $A=\begin{bmatrix}1 & 4 & 4\\ -1 & 3 & 1\\ 0 & 2 & 4\end{bmatrix}$.

Вариант 15

1. Решить систему методом Крамера

$$\begin{cases}2x+4y+3z=25\\ 3x+y+3z=23\\ 3x+4y+4z=32.\end{cases}$$

2. Изобразить корни 4 степени из $-\frac{1}{2}-i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$ на комплексной плоскости.

3. Проверить, что векторы $\vec{a}=(2;\ 3;\ 1)$, $\vec{b}=(4;\ 1;\ 4)$, $\vec{c}=(1;\ 3;\ 4)$ образуют базис и разложить вектор $\vec{d}=(19;\ 23;\ 24)$ по этому базису.

4. Найти объем пирамиды, если известны координаты ее вершин $A(1;-2;1)$, $B(-3;-4;-2)$, $C(2;3;4)$, $D(-2;-3;-4)$.

5. Даны вершины треугольника $A(4,\ -3)$, $B(10,\ -1)$, $C(4,\ 7)$. Найти координаты точки пересечения высоты CH и медианы BM.

6. Привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду и построить ее $4x^2-9y^2-24x+72y-144=0$.

7. Выполнить действия $A\cdot(B-C)^{-1}\cdot D$, где

$$A=\begin{bmatrix}1 & -4 & 3\\ 4 & -2 & 9\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}8 & 5 & 2\\ 3 & 3 & 4\\ 5 & 1 & 7\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}6 & 2 & -1\\ -3 & 2 & -2\\ 2 & -2 & 3\end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix}-1 & -3\\ -10 & 4\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

8. Решить матричное уравнение $X\cdot A=B$, где $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 5 & -1 & 5\\ 2 & 2 & 3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}18 & 1 & 20\\ 26 & -8 & 25\\ 6 & -13 & 1\end{bmatrix}$

9. Исследовав систему на совместность, найти ее общее решение методом Гаусса $\begin{cases} x_1+3x_2-2x_3-x_4=-4 \\ 6x_1+18x_2-13x_3+x_4=-23 \\ x_1+3x_2+x_3-8x_4=7. \end{cases}$

10. Найти собственные значения, собственные и присоединенные векторы матрицы линейного оператора. Найти вид этой матрицы в базисе из собственных и присоединенных векторов $A=\begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -7 & 0 & 10 \\ -3 & -1 & 7 \end{bmatrix}$.

Вариант 16

1. Решить систему методом Крамера

$$\begin{cases} 4x+2y+5z=46 \\ 6x+y+6z=52 \\ 5x+2y+6z=54. \end{cases}$$

2. Изобразить корни 2 степени из $1+i\cdot\sqrt{3}$ на комплексной плоскости.

3. Проверить, что векторы $\vec{a}=(4;\ 6;\ 3)$, $\vec{b}=(2;\ 1;\ 2)$, $\vec{c}=(3;\ 6;\ 6)$ образуют базис и разложить вектор $\vec{d}=(34;\ 52;\ 50)$ по этому базису.

4. Найти объем пирамиды, если известны координаты ее вершин $A(-4;2;2)$, $B(-6;-2;-4)$, $C(4;6;2)$, $D(-4;-6;-2)$.

5. Даны вершины треугольника $A(2,\ 24)$, $B(14,\ 16)$, $C(2,\ -16)$. Найти координаты точки пересечения высоты CH и медианы BM.

6. Привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду и построить ее $16x^2-9y^2+32x-36y-164=0$.

7. Выполнить действия $A\cdot(B-C)^{-1}\cdot D$, где

$A=\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 6 & 7 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \\ 9 & -1 & 9 \end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -3 & 2 & -4 \\ 4 & -4 & 3 \end{bmatrix}$, $D=\begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 0 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$

8.Решить матричное уравнение $X\cdot A=B$, где $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 18 & 8 & 23 \\ 10 & 7 & 13 \end{bmatrix}$

9. Исследовав систему на совместность, найти ее общее решение методом Гаусса $\begin{cases} x_1+3x_2-4x_3-x_4=6 \\ 2x_1+6x_2-9x_3+x_4=13 \\ x_1+3x_2+3x_3-4x_4=17. \end{cases}$

10. Найти собственные значения, собственные и присоединенные векторы матрицы линейного оператора. Найти вид этой матрицы в базисе из собственных и присоединенных векторов $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -7 & 8 & 10 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Вариант 17

1. Решить систему методом Крамера

$$\begin{cases} 4x + 3y + 5z = 34 \\ 2x + y + 2z = 14 \\ 5x + 3y + 6z = 39. \end{cases}$$

2. Изобразить корни 2 степени из $2i$ на комплексной плоскости.

3. Проверить, что векторы $\vec{a} = (4;\ 2;\ 3)$, $\vec{b} = (3;\ 1;\ 3)$, $\vec{c} = (3;\ 2;\ 6)$ образуют базис и разложить вектор $\vec{d} = (30;\ 14;\ 33)$ по этому базису.

4. Найти объем пирамиды, если известны координаты ее вершин $A(1;1;-2)$, $B(-2;-3;-4)$, $C(4;2;3)$, $D(-4;-2;-3)$.

5. Даны вершины треугольника $A(3,\ -1)$, $B(-9,\ 1)$, $C(3,\ 9)$. Найти координаты точки пересечения высоты CH и медианы BM.

6. Привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду и построить ее $16x^2 - 9y^2 - 64x + 18y - 89 = 0$.

7. Выполнить действия $A \cdot (B - C)^{-1} \cdot D$, где

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 7 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 9 & 7 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 9 & -1 & 9 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -1 \\ -3 & 2 & -4 \\ 4 & -4 & 3 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ -6 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

8. Решить матричное уравнение $X \cdot A = B$, где $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 4 & -1 & 4 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 11 & -3 & 11 \\ 24 & -1 & 26 \\ 7 & -2 & 7 \end{bmatrix}$

9. Исследовав систему на совместность, найти ее общее решение методом Гаусса $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 - x_4 = -6 \\ 5x_1 + 15x_2 - 21x_3 + x_4 = -29 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 23. \end{cases}$

10. Найти собственные значения, собственные и присоединенные векторы матрицы линейного оператора. Найти вид этой матрицы в базисе из собственных и присоединенных векторов $A = \begin{bmatrix} 7 & 4 & -4 \\ -1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

Вариант 18

1. Решить систему методом Крамера

$$\begin{cases} 2x + 4y + 3z = 31 \\ 5x + y + 5z = 47 \\ 3x + 4y + 4z = 40. \end{cases}$$

2. Изобразить корни 2 степени из $-1+i\cdot\sqrt{3}$ на комплексной плоскости.

3. Проверить, что векторы $\vec{a}=(2;\ 5;\ 1)$, $\vec{b}=(4;\ 1;\ 4)$, $\vec{c}=(1;\ 5;\ 4)$ образуют базис и разложить вектор $\vec{d}=(21;\ 47;\ 32)$ по этому базису.

4. Найти объем пирамиды, если известны координаты ее вершин $A(-1;-2;3)$, $B(-5;-4;-3)2$, $C(2;5;4)$, $D(-2;-5;-4)$.

5. Даны вершины треугольника $A(4,\ 7)$, $B(22,\ 5)$, $C(4,\ -3)$. Найти координаты точки пересечения высоты CH и медианы BM.

6. Привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду и построить ее $16x^2-9y^2-96x+36y-36=0$.

7. Выполнить действия $A\cdot(B-C)^{-1}\cdot D$, где

$$A=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 3\\ 2 & 2 & 9\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}10 & 7 & 4\\ 3 & 3 & 2\\ 9 & -1 & 9\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}6 & 4 & 1\\ -3 & 2 & -4\\ 4 & -4 & 3\end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix}-5 & -3\\ -8 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

8. Решить матричное уравнение $X\cdot A=B$, где $A=\begin{bmatrix}3 & 2 & 4\\ 5 & -1 & 5\\ 4 & 2 & 5\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}14 & -3 & 14\\ 30 & -4 & 31\\ 10 & -5 & 9\end{bmatrix}$

9. Исследовав систему на совместность, найти ее общее решение методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1+3x_2-4x_3-x_4=-10 \\ 6x_1+18x_2-25x_3+x_4=-59 \\ x_1+3x_2+3x_3-8x_4=25. \end{cases}$$

10. Найти собственные значения, собственные и присоединенные векторы матрицы линейного оператора. Найти вид этой матрицы в базисе из собственных и присоединенных векторов $A=\begin{bmatrix}4 & 1 & 1\\ -1 & 6 & 1\\ -3 & 2 & 7\end{bmatrix}$.

Вариант 19

1. Решить систему методом Крамера

$$\begin{cases} 5x + 2y + 6z = 38 \\ 3x + y + 3z = 20 \\ 6x + 2y + 7z = 43. \end{cases}$$

2. Изобразить корни 2 степени из -2 на комплексной плоскости.

3. Проверить, что векторы $\vec{a} = (5;\ 3;\ 4)$, $\vec{b} = (2;\ 1;\ 2)$, $\vec{c} = (4;\ 3;\ 7)$ образуют базис и разложить вектор $\vec{d} = (32;\ 20;\ 39)$ по этому базису.

4. Найти объем пирамиды, если известны координаты ее вершин $A(-1;3;-2)$, $B(-3;-2;-5)$, $C(5;3;2)$, $D(-5;-3;-2)$.

5. Даны вершины треугольника $A(2,\ 10)$, $B(-10,\ 8)$, $C(2,\ 0)$. Найти координаты точки пересечения высоты CH и медианы BM.

6. Привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду и построить ее $25x^2 - 9y^2 + 50x - 54y - 281 = 0$.

7. Выполнить действия $A \cdot (B - C)^{-1} \cdot D$, где

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 8 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 5 \\ -1 & 3 & -3 \\ 11 & -2 & 10 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -3 & 2 & -5 \\ 5 & -5 & 3 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ 1 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

8.Решить матричное уравнение $X \cdot A = B$, где $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 & -5 & -4 \\ 27 & 10 & 33 \\ 22 & 11 & 27 \end{bmatrix}$

9. Исследовав систему на совместность, найти ее общее решение методом Гаусса $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 - x_4 = 7 \\ 2x_1 + 6x_2 - 11x_3 + x_4 = 15 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 22. \end{cases}$

10. Найти собственные значения, собственные и присоединенные векторы матрицы линейного оператора. Найти вид этой матрицы в базисе из собственных и присоединенных векторов $A = \begin{bmatrix} 8 & 4 & -4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 8 & 6 & -3 \end{bmatrix}$.

Вариант 20

1. Решить систему методом Крамера

$$\begin{cases} 4x + 3y + 5z = 49 \\ 5x + y + 5z = 44 \\ 5x + 3y + 6z = 57. \end{cases}$$

2. Изобразить корни 2 степени из $-1 - i \cdot \sqrt{3}$ на комплексной плоскости.

3. Проверить, что векторы $\vec{a}=(4;\ 5;\ 3)$, $\vec{b}=(3;\ 1;\ 3)$, $\vec{c}=(3;\ 5;\ 6)$ образуют базис и разложить вектор $\vec{d}=(39;\ 44;\ 51)$ по этому базису.

4. Найти объем пирамиды, если известны координаты ее вершин $A(-2;1;1)$, $B(-5;-3;-4)$, $C(4;5;3)$, $D(-4;-5;-3)$.

5. Даны вершины треугольника $A(3,\ 14)$, $B(9,\ 10)$, $C(3,\ -6)$. Найти координаты точки пересечения высоты CH и медианы BM.

6. Привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду и построить ее $25x^2-9y^2-50x-18y-209=0$.

7. Выполнить действия $A\cdot(B-C)^{-1}\cdot D$, где

$A=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & 6 & 5\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}9 & 8 & 5\\ 1 & 3 & -1\\ 11 & -2 & 10\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}4 & 5 & -1\\ -3 & 2 & -5\\ 5 & -5 & 3\end{bmatrix}$, $D=\begin{bmatrix}-7 & -1\\ -3 & -1\\ -2 & 2\end{bmatrix}$

8.Решить матричное уравнение $X\cdot A=B$, где $A=\begin{bmatrix}4 & 2 & 5\\ 3 & -1 & 3\\ 5 & 2 & 6\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3 & -5 & 2\\ 27 & 4 & 31\\ 16 & 5 & 19\end{bmatrix}$

9. Исследовав систему на совместность, найти ее общее решение методом Гаусса $\begin{cases}x_1+3x_2-5x_3-x_4=-3\\ 4x_1+12x_2-21x_3+x_4=-11\\ x_1+3x_2+4x_3-6x_4=28.\end{cases}$

10. Найти собственные значения, собственные и присоединенные векторы матрицы линейного оператора. Найти вид этой матрицы в базисе из собственных и присоединенных векторов $A=\begin{bmatrix}5 & 1 & -2\\ 5 & 5 & -2\\ 7 & 3 & -2\end{bmatrix}$.

Вариант 21

1. Решить систему методом Крамера

$$\begin{cases}2x+4y+3z=34\\ 6x+y+6z=62\\ 3x+4y+4z=44.\end{cases}$$

2. Изобразить корни 2 степени из $-2i$ на комплексной плоскости.

3. Проверить, что векторы $\vec{a}=(2;\ 6;\ 1)$, $\vec{b}=(4;\ 1;\ 4)$, $\vec{c}=(1;\ 6;\ 4)$ образуют базис и разложить вектор $\vec{d}=(22;\ 62;\ 36)$ по этому базису.

4. Найти объем пирамиды, если известны координаты ее вершин $A(-2;-2;4)$, $B(-6;-2;-5)$, $C(2;6;4)$, $D(-2;-6;-4)$.

5. Даны вершины треугольника $A(4,\ 12),\ B(28,\ 8),\ C(4,\ -8)$. Найти координаты точки пересечения высоты CH и медианы BM.

6. Привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду и построить ее $25x^2-9y^2-150x+18y-9=0$.

7. Выполнить действия $A\cdot(B-C)^{-1}\cdot D$, где

$A=\begin{bmatrix}-2 & -1 & 3\\ 1 & 4 & 9\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}11 & 8 & 5\\ 3 & 3 & 1\\ 11 & -2 & 10\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}6 & 5 & -1\\ -3 & 2 & -5\\ 5 & -5 & 3\end{bmatrix}$, $D=\begin{bmatrix}-7 & -3\\ -7 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$

8. Решить матричное уравнение $X\cdot A=B$, где $A=\begin{bmatrix}4 & 2 & 5\\ 5 & -1 & 5\\ 5 & 2 & 6\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}9 & -5 & 8\\ 35 & -2 & 37\\ 18 & -1 & 19\end{bmatrix}$

9. Исследовав систему на совместность, найти ее общее решение методом Гаусса $\begin{cases}x_1+3x_2-5x_3-x_4=-13\\ 6x_1+18x_2-31x_3+x_4=-77\\ x_1+3x_2+4x_3-8x_4=34.\end{cases}$

10. Найти собственные значения, собственные и присоединенные векторы матрицы линейного оператора. Найти вид этой матрицы в базисе из собственных и присоединенных векторов $A=\begin{bmatrix}-3 & 9 & 9\\ -1 & 3 & 1\\ -3 & 6 & 8\end{bmatrix}$.

Вариант 22

1. Решить систему методом Крамера

$$\begin{cases}5x+2y+6z=44\\ 4x+y+4z=29\\ 6x+2y+7z=50.\end{cases}$$

2. Изобразить корни 2 степени из $1-i\cdot\sqrt{3}$ на комплексной плоскости.

3. Проверить, что векторы $\vec{a}=(5;\ 4;\ 4)$, $\vec{b}=(2;\ 1;\ 2)$, $\vec{c}=(4;\ 4;\ 7)$ образуют базис и разложить вектор $\vec{d}=(36;\ 29;\ 46)$ по этому базису.

4. Найти объем пирамиды, если известны координаты ее вершин $A(-2;3;-1)$, $B(-4;-2;-5)$, $C(5;4;2)$, $D(-5;-4;-2)$.

5. Даны вершины треугольника $A(2,\ 15),\ B(-4,\ 11),\ C(2,\ -5)$. Найти координаты точки пересечения высоты CH и медианы BM.

6. Привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду и построить ее $36x^2-9y^2+72x-72y-432=0$.

7. Выполнить действия $A\cdot(B-C)^{-1}\cdot D$, где

$A=\begin{bmatrix}-3 & 4 & -1\\ 0 & 10 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}8 & 9 & 6\\ -1 & 3 & -4\\ 13 & -3 & 11\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}2 & 6 & -1\\ -3 & 2 & -6\\ 6 & -6 & 3\end{bmatrix}$, $D=\begin{bmatrix}-9 & 1\\ 2 & -4\\ -4 & 3\end{bmatrix}$

8. Решить матричное уравнение $X\cdot A=B$, где $A=\begin{bmatrix}5 & 2 & 6\\ 1 & -1 & 1\\ 6 & 2 & 7\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-10 & -7 & -12\\ 38 & 12 & 45\\ 38 & 15 & 45\end{bmatrix}$

9. Исследовав систему на совместность, найти ее общее решение методом Гаусса $\begin{cases}x_1+3x_2-6x_3-x_4=8\\ 2x_1+6x_2-13x_3+x_4=17\\ x_1+3x_2+5x_3-4x_4=27.\end{cases}$

10. Найти собственные значения, собственные и присоединенные векторы матрицы линейного оператора. Найти вид этой матрицы в базисе из собственных и присоединенных векторов $A=\begin{bmatrix}5 & 1 & -1\\ -1 & 3 & 1\\ 3 & 2 & 2\end{bmatrix}$.

Вариант 23

1. Решить систему методом Крамера

$$\begin{cases}4x+3y+5z=54\\ 6x+y+6z=58\\ 5x+3y+6z=63.\end{cases}$$

2. Изобразить корни 3 степени из 2 на комплексной плоскости.

3. Проверить, что векторы $\vec{a}=(4;\ 6;\ 3)$, $\vec{b}=(3;\ 1;\ 3)$, $\vec{c}=(3;\ 6;\ 6)$ образуют базис и разложить вектор $\vec{d}=(42;\ 58;\ 57)$ по этому базису.

4. Найти объем пирамиды, если известны координаты ее вершин $A(-3;1;2)$, $B(-6;-3;-4)$, $C(4;6;3)$, $D(-4;-6;-3)$.

5. Даны вершины треугольника $A(3,\ 19)$, $B(15,\ 13)$, $C(3,\ -11)$. Найти координаты точки пересечения высоты CH и медианы BM.

6. Привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду и построить ее $36x^2-9y^2-72x-36y-324=0$.

7. Выполнить действия $A\cdot(B-C)^{-1}\cdot D$, где

$$A=\begin{bmatrix}-3 & 2 & 1\\ 0 & 8 & 5\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}10 & 9 & 6\\ 1 & 3 & -2\\ 13 & -3 & 11\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}4 & 6 & -1\\ -3 & 2 & -6\\ 6 & -6 & 3\end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix}-9 & -1\\ -2 & -2\\ -2 & 3\end{bmatrix}$$

8.Решить матричное уравнение $X\cdot A=B$, где $A=\begin{bmatrix}5 & 2 & 6\\ 3 & -1 & 3\\ 6 & 2 & 7\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-4 & -7 & -6\\ 36 & 6 & 41\\ 30 & 9 & 35\end{bmatrix}$

9. Исследовав систему на совместность, найти ее общее решение методом Гаусса $\begin{cases}x_1+3x_2-6x_3-x_4=-4\\ 4x_1+12x_2-25x_3+x_4=-15\\ x_1+3x_2+5x_3-6x_4=35.\end{cases}$

10. Найти собственные значения, собственные и присоединенные векторы матрицы линейного оператора. Найти вид этой матрицы в базисе из собственных и присоединенных векторов $A=\begin{bmatrix}2 & 4 & 4\\ -1 & 4 & 1\\ 0 & 2 & 5\end{bmatrix}$.

Вариант 24

1. Решить систему методом Крамера

$$\begin{cases}3x+4y+4z=32\\ 2x+y+2z=15\\ 4x+4y+5z=38.\end{cases}$$

2. Изобразить корни 3 степени из $2i$ на комплексной плоскости.

3. Проверить, что векторы $\vec{a}=(3;\ 2;\ 2)$, $\vec{b}=(4;\ 1;\ 4)$, $\vec{c}=(2;\ 2;\ 5)$ образуют базис и разложить вектор $\vec{d}=(28;\ 15;\ 30)$ по этому базису.

4. Найти объем пирамиды, если известны координаты ее вершин $A(2;-1;-1)$, $B(-2;-4;-3)$, $C(3;2;4)$, $D(-3;-2;-4)$.

5. Даны вершины треугольника $A(4,\ -7)$, $B(-2,\ -3)$, $C(4,\ 13)$. Найти координаты точки пересечения высоты CH и медианы BM.

6. Привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду и построить ее $36x^2-9y^2-144x-18y-189=0$.

7. Выполнить действия $A\cdot(B-C)^{-1}\cdot D$, где

$$A=\begin{bmatrix}-3 & 1 & 2\\ 0 & 7 & 7\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}11 & 9 & 6\\ 2 & 3 & -1\\ 13 & -3 & 11\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}5 & 6 & -1\\ -3 & 2 & -6\\ 6 & -6 & 3\end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix}-9 & -2\\ -4 & -1\\ -1 & 3\end{bmatrix}$$

8.Решить матричное уравнение $X \cdot A = B$, где $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 6 \\ 4 & -1 & 4 \\ 6 & 2 & 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & -7 & -3 \\ 38 & 3 & 42 \\ 29 & 6 & 33 \end{bmatrix}$

9. Исследовав систему на совместность, найти ее общее решение методом Гаусса $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 6x_3 - x_4 = -10 \\ 5x_1 + 15x_2 - 31x_3 + x_4 = -49 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 7x_4 = 39. \end{cases}$

10. Найти собственные значения, собственные и присоединенные векторы матрицы линейного оператора. Найти вид этой матрицы в базисе из собственных и присоединенных векторов $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -7 & 1 & 10 \\ -3 & -1 & 8 \end{bmatrix}$.

Вариант 25

1. Решить систему методом Крамера

$$\begin{cases} 5x + 2y + 6z = 56 \\ 6x + y + 6z = 53 \\ 6x + 2y + 7z = 64. \end{cases}$$

2. Изобразить корни 3 степени из -2 на комплексной плоскости.

3. Проверить, что векторы $\vec{a} = (5;\ 6;\ 4)$, $\vec{b} = (2;\ 1;\ 2)$, $\vec{c} = (4;\ 6;\ 7)$ образуют базис и разложить вектор $\vec{d} = (44;\ 53;\ 60)$ по этому базису.

4. Найти объем пирамиды, если известны координаты ее вершин $A(-4;3;1)$, $B(-6;-2;-5)$, $C(5;6;2)$, $D(-5;-6;-2)$.

5. Даны вершины треугольника $A(2,\ 25)$, $B(8,\ 17)$, $C(2,\ -15)$. Найти координаты точки пересечения высоты CH и медианы BM.

6. Привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду и построить ее $4x^2 - 16y^2 + 8x + 32y - 76 = 0$.

7. Выполнить действия $A \cdot (B - C)^{-1} \cdot D$, где

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 6 & 1 & 2 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 8 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -4 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$$

8.Решить матричное уравнение $X \cdot A = B$, где $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 13 & 5 & 16 \\ 10 & 6 & 13 \\ -6 & -8 & -9 \end{bmatrix}$

9. Исследовав систему на совместность, найти ее общее решение методом Гаусса $\begin{cases} x_1+4x_2-2x_3-x_4=5 \\ 3x_1+12x_2-7x_3+x_4=16 \\ x_1+4x_2+x_3-5x_4=10. \end{cases}$

10. Найти собственные значения, собственные и присоединенные векторы матрицы линейного оператора. Найти вид этой матрицы в базисе из собственных и присоединенных векторов $A=\begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -7 & 9 & 10 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Вариант 26

1. Решить систему методом Крамера

$$\begin{cases} 5x+3y+6z=42 \\ 2x+y+2z=15 \\ 6x+3y+7z=47. \end{cases}$$

2. Изобразить корни 3 степени из $-2i$ на комплексной плоскости.

3. Проверить, что векторы $\vec{a}=(5;\ 2;\ 4)$, $\vec{b}=(3;\ 1;\ 3)$, $\vec{c}=(4;\ 2;\ 7)$ образуют базис и разложить вектор $\vec{d}=(38;\ 15;\ 41)$ по этому базису.

4. Найти объем пирамиды, если известны координаты ее вершин $A(1;2;-3)$, $B(-2;-3;-5)$, $C(5;2;3)$, $D(-5;-2;-3)$.

5. Даны вершины треугольника $A(3,\ 0)$, $B(-15,\ 2)$, $C(3,\ 10)$. Найти координаты точки пересечения высоты CH и медианы BM.

6. Привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду и построить ее $4x^2-16y^2-8x+96y-204=0$.

7. Выполнить действия $A\cdot(B-C)^{-1}\cdot D$, где

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 6 & -1 & 6 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 7 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 5 & 2 & 8 \end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ -4 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -8 & 3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$

8.Решить матричное уравнение $X\cdot A=B$, где $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$,$B=\begin{bmatrix} 21 & 5 & 24 \\ 20 & -2 & 21 \\ -4 & -16 & -9 \end{bmatrix}$

9. Исследовав систему на совместность, найти ее общее решение методом Гаусса $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 - x_4 = 1 \\ 5x_1 + 20x_2 - 11x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 - 7x_4 = 10. \end{cases}$

10. Найти собственные значения, собственные и присоединенные векторы матрицы линейного оператора. Найти вид этой матрицы в базисе из собственных и присоединенных векторов $A = \begin{bmatrix} 9 & 4 & -4 \\ -1 & 3 & 1 \\ 8 & 6 & -2 \end{bmatrix}$.

Вариант 27

1. Решить систему методом Крамера

$$\begin{cases} 3x + 4y + 4z = 44 \\ 5x + y + 5z = 48 \\ 4x + 4y + 5z = 53. \end{cases}$$

2. Изобразить корни 4 степени из 2 на комплексной плоскости.

3. Проверить, что векторы $\vec{a} = (3;\ 5;\ 2)$, $\vec{b} = (4;\ 1;\ 4)$, $\vec{c} = (2;\ 5;\ 5)$ образуют базис и разложить вектор $\vec{d} = (34;\ 48;\ 45)$ по этому базису.

4. Найти объем пирамиды, если известны координаты ее вершин $A(-1;-1;2)$, $B(-5;-4;-3)$, $C(3;5;4)$, $D(-3;-5;-4)$.

5. Даны вершины треугольника $A(4,\ 8)$, $B(16,\ 6)$, $C(4,\ -2)$. Найти координаты точки пересечения высоты CH и медианы BM.

6. Привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду и построить ее $4x^2 - 16y^2 - 16x + 128y - 304 = 0$.

7. Выполнить действия $A \cdot (B - C)^{-1} \cdot D$, где

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 6 & -2 & 8 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 8 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -1 \\ -4 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -10 & 4 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

8.Решить матричное уравнение $X \cdot A = B$, где $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 25 & 5 & 28 \\ 28 & -6 & 28 \\ 0 & -20 & -6 \end{bmatrix}$

9. Исследовав систему на совместность, найти ее общее решение методом Гаусса $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 - x_4 = -1 \\ 6x_1 + 24x_2 - 13x_3 + x_4 = -5 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 - 8x_4 = 10. \end{cases}$

10. Найти собственные значения, собственные и присоединенные векторы матрицы линейного оператора. Найти вид этой матрицы в базисе из собственных и присоединенных векторов $A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 5 & 6 & -2 \\ 7 & 3 & -1 \end{bmatrix}$.

Вариант 28

1. Решить систему методом Крамера

$$\begin{cases} 6x + 2y + 7z = 45 \\ 3x + y + 3z = 21 \\ 7x + 2y + 8z = 50. \end{cases}$$

2. Изобразить корни 4 степени из $-1+i\cdot\sqrt{3}$ на комплексной плоскости.

3. Проверить, что векторы $\vec{a}=(6;\ 3;\ 5)$, $\vec{b}=(2;\ 1;\ 2)$, $\vec{c}=(5;\ 3;\ 8)$ образуют базис и разложить вектор $\vec{d}=(39;\ 21;\ 46)$ по этому базису.

4. Найти объем пирамиды, если известны координаты ее вершин $A(-1;4;-3)$, $B(-3;-2;-6)$, $C(6;3;2)$, $D(-6;-3;-2)$.

5. Даны вершины треугольника $A(2,\ 11)$, $B(-16,\ 9)$, $C(2,\ 1)$. Найти координаты точки пересечения высоты CH и медианы BM.

6. Привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду и построить ее $9x^2-16y^2+36x-32y-124=0$.

7. Выполнить действия $A\cdot(B-C)^{-1}\cdot D$, где

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 5 & 4 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \\ 7 & 1 & 9 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & 2 & -3 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1 & -1 \\ -6 & -1 \end{bmatrix}$$

8.Решить матричное уравнение $X\cdot A=B$, где $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$,$B = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 11 \\ 14 & 13 & 19 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

9. Исследовав систему на совместность, найти ее общее решение методом Гаусса $\begin{cases} x_1+4x_2-3x_3-x_4=9 \\ 2x_1+8x_2-7x_3+x_4=19 \\ x_1+4x_2+2x_3-4x_4=16. \end{cases}$

10. Найти собственные значения, собственные и присоединенные векторы матрицы линейного оператора. Найти вид этой матрицы в базисе из собственных и присоединенных векторов $A = \begin{bmatrix} -2 & 9 & 9 \\ -1 & 4 & 1 \\ -3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$.

Вариант 29

1. Решить систему методом Крамера

$$\begin{cases} 5x + 3y + 6z = 54 \\ 4x + y + 4z = 33 \\ 6x + 3y + 7z = 61. \end{cases}$$

2. Изобразить корни 4 степени из -2 на комплексной плоскости.

3. Проверить, что векторы $\vec{a} = (5;\ 4;\ 4)$, $\vec{b} = (3;\ 1;\ 3)$, $\vec{c} = (4;\ 4;\ 7)$ образуют базис и разложить вектор $\vec{d} = (46;\ 33;\ 55)$ по этому базису.

4. Найти объем пирамиды, если известны координаты ее вершин $A(-1;2;-1)$, $B(-4;-3;-5)$, $C(5;4;3)$, $D(-5;-4;-3)$.

5. Даны вершины треугольника $A(3,\ 10)$, $B(-3,\ 8)$, $C(3,\ 0)$. Найти координаты точки пересечения высоты CH и медианы BM.

6. Привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду и построить ее $9x^2 - 16y^2 - 18x + 64y - 199 = 0$.

7. Выполнить действия $A \cdot (B - C)^{-1} \cdot D$, где

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & 6 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 7 & 1 & 9 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -4 & 2 & -3 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -7 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$

8. Решить матричное уравнение $X \cdot A = B$, где $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 4 & -1 & 4 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 21 & 2 & 23 \\ 23 & 1 & 25 \\ -4 & -10 & -7 \end{bmatrix}$

9. Исследовав систему на совместность, найти ее общее решение методом Гаусса $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 - x_4 = 0 \\ 5x_1 + 20x_2 - 16x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 19. \end{cases}$

10. Найти собственные значения, собственные и присоединенные векторы матрицы линейного оператора. Найти вид этой матрицы в базисе из собственных и присоединенных векторов $A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Вариант 30

1. Решить систему методом Крамера

$$\begin{cases} 3x + 4y + 4z = 48 \\ 6x + y + 6z = 63 \\ 4x + 4y + 5z = 58. \end{cases}$$

2. Изобразить корни 4 степени из $-1-i\cdot\sqrt{3}$ на комплексной плоскости.

3. Проверить, что векторы $\vec{a}=(3;\ 6;\ 2)$, $\vec{b}=(4;\ 1;\ 4)$, $\vec{c}=(2;\ 6;\ 5)$ образуют базис и разложить вектор $\vec{d}=(36;\ 63;\ 50)$ по этому базису.

4. Найти объем пирамиды, если известны координаты ее вершин $A(-2;-1;3)$, $B(-6;-4;-3)$, $C(3;6;4)$, $D(-3;-6;-4)$.

5. Даны вершины треугольника $A(4,\ 13)$, $B(22,\ 9)$, $C(4,\ -7)$. Найти координаты точки пересечения высоты CH и медианы BM.

6. Привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду и построить ее $9x^2-16y^2-36x+96y-252=0$.

7. Выполнить действия $A\cdot(B-C)^{-1}\cdot D$, где

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 5 & 0 & 8 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 9 & 7 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 7 & 1 & 9 \end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix} 6 & 3 & -1 \\ -4 & 2 & -3 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -9 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

8. Решить матричное уравнение $X\cdot A=B$, где $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 5 & -1 & 5 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 25 & 2 & 27 \\ 30 & -3 & 31 \\ -1 & -14 & -5 \end{bmatrix}$

9. Исследовав систему на совместность, найти ее общее решение методом Гаусса $\begin{cases} x_1+4x_2-3x_3-x_4=-3 \\ 6x_1+24x_2-19x_3+x_4=-17 \\ x_1+4x_2+2x_3-8x_4=20. \end{cases}$

10. Найти собственные значения, собственные и присоединенные векторы матрицы линейного оператора. Найти вид этой матрицы в базисе из собственных и присоединенных векторов $A=\begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 \\ -1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

6. ЗАДАНИЯ ПО ТЕМЕ: ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Примерный вариант заданий с решением

1. Решить уравнение $2(xy+y)\cdot y' + x(y^4+1) = 0$
2. Решить уравнение: $y' = e^{x+y} + 2$
3. Решить уравнение: $(x^2+2xy)dx + xydy = 0$
4. Решить уравнение: $y' = \frac{x-y+1}{x+y-3}$
5. Решить задачу Коши $y'\cdot\cos^2 x + y = \operatorname{tg} x, y(0) = 0$
6. Решить уравнение: $xy' + y = y^2 \ln x$
7. Решить задачу Коши: $y = xy' + y'\cdot\ln y,\ y(0) = 1$
8. Решить уравнение: $2x\left(1+\sqrt{x^2-y}\right)dx - \sqrt{x^2-y}dy = 0$
9. Решить уравнение: $(1-x^2y)dx + x^2(y-x)dy = 0$
10. В комнате, где температура 20 ℃, некоторое тело остыло за 20 мин от 100 до 60 ℃. Найти закон охлаждения тела и установить, через сколько минут оно остынет до 30 ℃. Повышением температуры в комнате пренебречь.

Решение

1. Для решения дифференциального уравнения I порядка с разделяющимися переменными разделим переменные:

$$2(x+1)y\cdot\frac{dy}{dx} = -x(y^4+1),$$

$$\frac{2y}{y^4+1}dy = -\frac{xdx}{x+1}$$

Интегрируем:

$$\int\frac{2ydy}{y^4+1} = -\int\frac{xdx}{x+1},$$

$$\int\frac{dy^2}{(y^2)^2+1} = -\int\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx,$$

$\operatorname{arctg} y^2 = -x + \ln|x+1| + c$, где c – произвольная постоянная.

В процессе разделения переменных, т.е. при делении на $(x+1)(y^4+1)$, могло быть потеряно решение $x \equiv -1$.

Легко проверить (подстановкой в исходное уравнение), что $x \equiv -1$ не является решением данного уравнения.

Ответ: $\operatorname{arctg} y^2 = \ln|x+1| - x + c$.

2. Данное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью замены:

$$z = x + y,$$

$$z' = 1 + y' \Rightarrow y' = z' - 1.$$

Тогда для функции $z = z(x)$ получим уравнение с разделяющимися переменными: $z' - 1 = e^z + 2$,

$$\frac{dz}{dx} = e^z + 3, \qquad \frac{dz}{e^z + 3} = dx$$

Интегрируем:

$$\int \frac{dz}{e^z + 3} = \int dx \quad (1)$$

Найдем интеграл в левой части уравнения (1):

$$\int \frac{dz}{e^z + 3} = \begin{bmatrix} e^z = t \\ z = \ln t \\ dz = \dfrac{dt}{t} \end{bmatrix} = \int \frac{dt}{t(t+3)} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t} - \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t+3} =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|t| - \frac{1}{3}\ln|t+3| + c = \frac{z}{3} - \frac{1}{3}\ln(e^z + 3) + c$$

Возвращаясь в равенство (1), получаем:

$$\frac{z}{3} - \frac{1}{3}\ln(e^z + 3) = x + c$$

$$z - \ln(e^z + 3) = 3x + c$$

Делаем обратную замену:

$x + y - \ln(e^{x+y} + 3) = 3x + c$ или $y = \ln(e^{x+y} + 3) + 2x + c$

Ответ: $y = \ln(e^{x+y} + 3) + 2x + c$.

3. Функции $P(x;y)=x^2+2xy$ и $Q(x;y)=xy$ – однородные второго измерения. Поэтому данное уравнение является однородным дифференциальным уравнением I порядка.

Запишем уравнение в виде: $x^2+2xy+xy\cdot y'=0$;

$$y'=-\frac{x^2+2xy}{xy}$$

Сделаем замену $\frac{y}{x}=u(x)\Rightarrow y=u\cdot x, y'=u'x+u$. Тогда для функции $u=u(x)$ получим уравнение с разделяющимися переменными:

$$u'x+u=-\frac{1+2u}{u},$$

$$u'x=-\frac{1+2u+u^2}{u},$$

$$u'x=-\frac{(1+u)^2}{u}$$

Разделяя переменные и интегрируя, имеем:

$$\frac{udu}{(1+u)^2}=-\frac{dx}{x},$$

$$\int\frac{udu}{(1+u)^2}=-\int\frac{dx}{x}\quad(1)$$

Найдем интеграл в левой части уравнения (1):

$$\int\frac{(u+1)-1}{(1+u)^2}du=\int\frac{du}{1+u}-\int\frac{du}{(1+u)^2}=\ln|1+u|+\frac{1}{1+u}+c$$

Возвращаясь в равенство (1), получаем:

$$\ln|1+u|+\frac{1}{1+u}=-\ln|x|+c$$

Делаем обратную замену: $\ln|x+y|+\frac{x}{x+y}=c$, c – произвольная постоянная, кроме того, у уравнения есть особые решения $x\equiv0$; $y\equiv0$; $y\equiv-x$, которые были потеряны при разделении переменных.

Ответ: $\ln|x+y|+\frac{x}{x+y}=c,\ x\equiv0;\ y\equiv0;\ y\equiv-x.$

4. Уравнение можно привести к виду однородного дифференциального уравнения. Для этого предварительно решим систему:

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0, \\ x + y - 3 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y = x + 1, \\ 2x - 2 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 2 \end{cases}$$

Сделаем замену:

$$x^* = x - x_0 = x - 1, dx^* = dx$$

$$y^* = y - y_0 = y - 2, dy^* = dy$$

Тогда уравнение примет вид:

$$\frac{dy^*}{dx^*} = \frac{x^* - y^*}{x^* + y^*}$$

Полученное уравнение является однородным дифференциальным уравнением.

Выполним замену:

$$y^* = u \cdot x^*, \quad \frac{dy^*}{dx^*} = u + x^* \frac{du}{dx^*}$$

Тогда для функции $u\,(x^*)$ получим уравнение с разделяющимися переменными:

$$u + x^* \cdot \frac{du}{dx^*} = \frac{1 - u}{1 + u}$$

Отсюда, последовательно находим:

$$x^* du = \left(\frac{1 - u}{1 + u} - u\right) dx^*, \qquad x^* du = \frac{1 - 2u - u^2}{1 + u} dx^*,$$

$$\frac{(1 + u)du}{(1 - 2u - u^2)} = \frac{dx^*}{x^*},$$

$$-\frac{1}{2} \frac{d(1 - 2u - u^2)}{(1 - 2u - u^2)} = \frac{dx^*}{x^*}$$

Интегрируя, получаем:

$\ln|1 - 2u - u^2| = -2\ln|x^*| + \ln|c|$, c – постоянная производная, $c \neq 0$ или $(1 - 2u - u^2) \cdot (x^*)^2 = c$

Возвращаясь к исходным переменным, получаем общий интеграл исходного уравнения:

$$(x^*)^2 - 2y^* \cdot x^* - (y^*)^2 = c,$$

$$(x - 1)^2 + 2(x - 1)(y - 2) - (y - 2)^2 = c,$$

$$x^2 - 2xy - y^2 + 2x + 6y = c + 7, \quad c + 7 = c_1$$

$$(x-y)^2-2y^2+2x+6y=c_1$$

Ответ: $(x-y)^2-2y^2+2x+6y=c_1$, c_1 – произвольная постоянная.

5. Это линейное дифференциальное уравнение I порядка. Решим его методом вариации произвольных постоянных. Для этого решаем сначала соответствующее однородное уравнение:

$$y'\cdot\cos^2 x+y=0$$

Разделив переменные, получим:

$$\frac{dy}{y}=-\frac{dx}{\cos^2 x}\ ,$$

$$\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{dx}{\cos^2 x}\ ,$$

$$\ln|y|=\ln|c|-\operatorname{tg}x\ ,$$

$$y=ce^{-\operatorname{tg}x}$$

Будем искать решение исходного неоднородного уравнения в виде $y=c(x)e^{-\operatorname{tg}x}$, где $c(x)$ – неизвестная функция.

Подставим в исходное уравнение:

$y=c(x)e^{-\operatorname{tg}x}$ и $y'=u'(x)e^{-\operatorname{tg}x}-c(x)e^{-\operatorname{tg}x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}$

Получим уравнение:

$$\cos^2 x\cdot c'(x)e^{-\operatorname{tg}x}-c(x)e^{-\operatorname{tg}x}+c(x)e^{-\operatorname{tg}x}=\operatorname{tg}x,$$

$$c'(x)\cos^2 x\cdot e^{-\operatorname{tg}x}=\operatorname{tg}x$$

Откуда

$$c(x)=\int\frac{e^{\operatorname{tg}x}\cdot\operatorname{tg}x}{\cos^2 x}dx=\int e^{\operatorname{tg}x}\cdot\operatorname{tg}x d(\operatorname{tg}x)=[\operatorname{tg}x=t]=$$

$$\int e^t t\,dt=\left|\begin{matrix}\text{Интегрирование по частям}\\ u=t\qquad du=dt\\ dv=e^t dt\qquad v=e^t\end{matrix}\right|=$$

$$=te^t-\int e^t dt=te^t-e^t+c=e^{\operatorname{tg}x}(\operatorname{tg}x-1)+c$$

Находим общее решение дифференциального уравнения:

$$y=\operatorname{tg}x-1+ce^{-\operatorname{tg}x}$$

Используя начальное условие $y(0)=0$, найдем значение C:

$$0=-1+c,\qquad \text{откуда } c=1$$

Получаем частное решение в виде:

$$y = \text{tg}x - 1 + e^{-\text{tg}x}$$

Ответ: $y = \text{tg}x - 1 + e^{-\text{tg}x}$.

6. Данное уравнение является уравнением Бернулли. Решим его методом Бернулли. Запишем уравнение в стандартном виде:

$$y' + \frac{y}{x} = y^2 \ln x$$

Полагая, что $y = u(x) \cdot v(x)$, $y' = u'v + uv'$, имеем

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = u^2 v^2 \ln x$$

$$\text{или } u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = u^2 v^2 \ln x$$

Разбиваем на два уравнения с разделяющимися переменными:

$$\begin{cases} v' + \dfrac{v}{x} = 0 \ (c = 0) & (1) \\ u'v = u^2 v^2 \ln x & (2) \end{cases}$$

Решаем уравнение (1):

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x},$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x},$$

$$\ln|v| = -\ln|x|,$$

$$v = \frac{1}{x}$$

Решаем уравнение (2), подставляя в него найденную функцию $v = \frac{1}{x}$

$$u' \cdot \frac{1}{x} = u^2 \frac{1}{x^2} \ln x,$$

$$\frac{du}{u^2} = \frac{\ln x}{x} dx$$

Интегрируем полученное уравнение:

$$-\frac{1}{u} = \frac{\ln^2 x}{2} + c_{1,}, \qquad u = -\frac{2}{\ln^2 x + 2c_1};$$

$$2c_1 = c$$

$$u = -\frac{2}{\ln^2 x + c}$$

Перемножая найденные функции $u(x)$ и $v(x)$, находим общее решение исходного уравнения:

$$y = -\frac{2}{x(\ln^2 x + c)}$$

Кроме того, исходное уравнение имеет особое решение $y = 0$.

Ответ: $y = -\frac{2}{x(\ln^2 x + c)}$, где с – любое число и $y \equiv 0$.

7. Будем считать y независимой переменной $(y > 0)$, а $x = x(y) -$ искомой функцией. Тогда $y'_x = \frac{1}{x'_y}$ и исходное уравнение запишем в виде:

$$y \cdot x' = x + \ln y \qquad \text{или} \qquad x' - \frac{x}{y} = \frac{\ln y}{y}$$

Полученное линейное уравнение относительно функции $x(y)$ решим методом Бернулли.

Сделаем замену: $x = u(y) \cdot v(y) \Rightarrow x' = u'v + uv'$. Получим:

$$u'v + uv' - \frac{uv}{y} = \frac{\ln y}{y},$$

$$u'v + u(v' - \frac{v}{y}) = \frac{\ln y}{y}$$

Выберем одну конкретную функцию $v \neq 0$ так, чтобы $v' - \frac{v}{y} = 0$,

В итоге получаем два уравнения с разделяющимися переменными:

1) $v' - \frac{v}{y} = 0$

2) $u'v = \frac{\ln y}{y}$

1) Решаем первое уравнение:

$$\frac{dv}{v} = \frac{dy}{y},$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dy}{y},$$

$$\ln|v| = \ln|y|,$$

$$v = y$$

2) Решаем второе уравнение, подставляя в него найденную функцию v

$$u'y = \frac{\ln y}{y}\ , \qquad\qquad u' = \frac{\ln y}{y^2}\ ,$$

$$du = \frac{\ln y}{y^2}dy\ ,$$

$$\int du = \int \frac{\ln y}{y^2}dy\ ,$$

Проинтегрируем правую часть по частям:

$$\int \frac{\ln y}{y^2}dy = \begin{bmatrix} u = \ln y & du = \dfrac{dy}{y} \\ dv = \dfrac{1}{y^2}dy & v = -\dfrac{1}{y} \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{\ln y}{y} + \int \frac{dy}{y^2} = -\frac{\ln y}{y} - \frac{1}{y} + c$$

Тогда

$$u = -\frac{1 + \ln y}{y} + c$$

Общее решение имеет вид:

$$x = uv = y\left(c - \frac{1 + \ln y}{y}\right), x = yc - 1 - \ln y$$

Подставим в полученное общее решение начальное условие $y(0) = 1$

$$0 = c - 1 \Rightarrow\ c = 1$$

Частное решение имеет вид:

$$x = y - 1 - \ln y$$

Ответ: $x = y - 1 - \ln y$.

8. Обозначим в исходном уравнении:

$$P(x;y) = 2x\left(1 + \sqrt{x^2 - y}\right), \qquad\qquad Q(x;y) = -\sqrt{x^2 - y}$$

Найдем частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$:

$$\left.\begin{matrix} \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{2x(-1)}{2\sqrt{x^2 - y}} = -\dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = -\dfrac{1 \cdot 2x}{2\sqrt{x^2 - y}} = -\dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \end{matrix}\right] => \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Следовательно, и исходное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Найдем функцию $u(x;y)$, полный дифференциал которой совпадает с левой частью исходного уравнения:

$$du = 2x\left(1+\sqrt{x^2-y}\right)dx - \sqrt{x^2-y}dy,$$

а так как $du = 0$, то $u(x;y) = c$ – общий интеграл данного уравнения.
Для поиска функции $u(x;y)$ решим систему:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x\left(1+\sqrt{x^2-y}\right) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\sqrt{x^2-y} \end{cases}$$

1) Проинтегрируем первое уравнение системы по переменной x

$$u(x;y) = \int 2x\left(1+\sqrt{x^2-y}\right)dx = 2\int xdx + \int \sqrt{x^2-y}\cdot 2x\,dx =$$

$$= x^2 + \int \sqrt{x^2-y}\,dx^2 = x^2 + \frac{2}{3}\sqrt{(x^2-y)^3} + \varphi(y)$$

2) Подставим найденную функцию $u(x;y)$ во второе уравнение системы для нахождения функции $\varphi(y)$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\sqrt{x^2-y} + \varphi'(y)$$

$$-\sqrt{x^2-y} + \varphi'(y) = -\sqrt{x^2-y}$$

Следовательно, $\varphi'(y) = 0 \Rightarrow \varphi(y) = c_1$

Искомая функция $u(x;y)$ имеет вид: $u(x;y) = x^2 + \frac{2}{3}\sqrt{(x^2-y)^3} + c_1$

Итак, общий интеграл исходного уравнения может быть написан в виде:

$$x^2 + \frac{2}{3}\sqrt{(x^2-y)^3} = c$$

Ответ: $x^2 + \frac{2}{3}\sqrt{(x^2-y)^3} = c$

9. Обозначим в исходном уравнении:

$$P(x;y) = 1 - x^2y, \qquad Q(x;y) = x^2(y-x)$$

Найдем частные производные $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -x^2$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=2x(y-x)-x^2=2xy-3x^2$$

Откуда получаем:

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}=\frac{-x^2-2xy+3x^2}{x^2(y-x)}=-\frac{2x(y-x)}{x^2(y-x)}=-\frac{2}{x}$$

Данная дробь является функцией только переменной x: $f(x)=-\frac{2}{x}$.
Следовательно, исходное уравнение имеет интегрирующий множитель, зависящий только от x, который вычисляют по формуле: $\mu(x)=e^{\int f(x)dx}$

$$\mu(x)=e^{-\int\frac{2dx}{x}}=e^{-2\,|\ln|\,x}=e^{\ln\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{x^2}$$

Умножив данное уравнение на $\mu(x)$, получим уравнения в полных дифференциалах:

$$\left(\frac{1}{x^2}-y\right)dx+(y-x)dy=0 \quad (1)$$

Обозначим:

$$P_1(x;y)=\frac{1}{x^2}-y, \qquad\qquad Q_1(x;y)=y-x$$

Находим

$$\frac{\partial P_1}{\partial y}=-1 \ \text{ и } \ \frac{\partial Q_1}{\partial x}=-1 \quad => \ \frac{\partial P_1}{\partial y}=\frac{\partial Q_1}{\partial x}$$

Найдем функцию $u(x;y)$, для которой полный дифференциал имеет вид:

$$du=\left(\frac{1}{x^2}-y\right)dx+(y-x)dy$$

Составим систему:

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{x^2}-y\\ \frac{\partial u}{\partial y}=y-x\end{cases}$$

Из первого уравнения системы находим:

$$u(x;y)=\int\left(\frac{1}{x^2}-y\right)dx=-\frac{1}{x}-yx+\varphi(y)$$

Следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-x+\varphi'(y)$$

И с учетом второго уравнения системы имеем:

$$-x + \varphi'(y) = y - x$$
$$\varphi'(y) = y$$
$$\varphi(y) = \frac{y^2}{2} + c_1$$

Следовательно

$$u(x;y) = -\frac{1}{x} - yx + \frac{y^2}{2} + c_1$$

Тогда общий интеграл исходного уравнения имеет вид:

$$u(x;y) = c$$

т.е. $-\frac{1}{x} - yx + \frac{y^2}{2} = c,\ c$ – произвольная постоянная

Кроме того необходимо проверить, не обращается ли функция $\mu(x)$ в ноль и существует ли она при всех значениях x. Проверка показывает, что $x \equiv 0$ также является особым решением исходного уравнения.

Ответ: $\frac{y^2}{2} - \frac{1}{x} - yx = c,\ x \equiv 0,\ c -$ произвольная постоянная.

10. На основании закона Ньютона (скорость охлаждения тела пропорциональна разности температур) можем записать:

$$\frac{dT}{dt} = K(T - 20)\ ,$$

Разделим переменные:

$$\frac{dt}{T - 20} = Kdt,$$

Проинтегрируем уравнение:

$$\int \frac{dT}{T - 20} = \int Kdt,$$
$$\ln|T - 20| = Kt + C_{1,}$$
$$T - 20 = Ce^{Kt}$$

Если $t = 0$, то $T = 100\ ℃$ отсюда $C = 80$, т.е. $T - 20 = 80e^{kt}$

Если $t = 20$, то $T = 60\ ℃$, следовательно $60 - 20 = 80e^{20k}$, или $e^{20k} = \frac{1}{2}$,

$$20K = \ln\frac{1}{2}\ , \qquad K = -\frac{1}{20}\ln 2$$

Итак, закон охлаждения тела имеет вид:

$$T-20=80e^{-\frac{t}{20}\ln 2} \text{ или } T=20+80\left(\frac{1}{2}\right)^{t/20}$$

При $T=30\ ℃$ имеем $10=80\left(\frac{1}{2}\right)^{t/20}$, или $\left(\frac{1}{2}\right)^{t/20}=\frac{1}{8}$, таким образом, $\frac{t}{20}=3$, $t=60$ мин.

Ответ: Закон охлаждения тела $\mathrm{T}=20+80\cdot 2^{-\frac{t}{20}}$, тело остынет до 30 $^{\circ}$C за 60 минут.

Варианты заданий для самостоятельного решения (1–30)

Вариант 1

1. $4xdx-3ydy=3x^2ydy-2xy^2dx$.
2. $y'=(x-y)^2+1$.
3. $y'=\dfrac{y^2}{x^2}+4\dfrac{y}{x}+2$.
4. $y'=\frac{x+y-2}{y-x-4}$.
5. $y'-\dfrac{y}{x}=x^2$, $y(1)=0$.
6. $y'+xy=(1+x)e^{-x}y^2, y(0)=1$.
7. $y'=\frac{1}{x\cos y+\sin 2y}$.
8. $3x^2e^ydx+(x^3e^y-1)dy=0$.
9. $(xy^2-y^3)dx+(1-xy^2)dy=0$
10. Моторная лодка движется со скоростью $v=18$ км/ч. Через 5 минут после выключения мотора $v=6$ км/ч. Найти путь, пройденный лодкой по инерции за 15 минут, если сопротивление пропорционально скорости лодки.

Вариант 2

1. $x\sqrt{1+y^2}+yy'\sqrt{1+x^2}=0$.

2. $y' = e^{2x+4y} - \frac{1}{2}$.

3. $xy' = \dfrac{3y^3 + 2yx^2}{2y^2 + x^2}$.

4. $y' = \frac{x+4y-5}{6x-y-5}$.

5. $y' - y\operatorname{ctg} x = 2x\sin x$, $y(\frac{\pi}{2}) = 0$.

6. $xy' + y = 2y^2 \ln x$, $y(1) = \dfrac{1}{2}$.

7. $(y^4 e^y + 2x)y' = y$, $y(0) = 1$.

8. $(3x^2 + \dfrac{2}{y}\cos\dfrac{2x}{y})dx - \dfrac{2x}{y^2}\cos\dfrac{2x}{y}dy = 0$.

9. $(y^2 - 2x - 2)dx + 2ydy = 0$.

10. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $M(0;1)$, если длина отрезка, отсекаемого любой ее касательной на оси Oy, равна поднормали.

Вариант 3

1. $\sqrt{4 + y^2}dx - ydy = x^2 ydy$.

2. $y' = \frac{1}{\ln(2x+y)} - 2$.

3. $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$.

4. $y' = \frac{y+2}{2x+y-4}$.

5. $y' + y\cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x$, $y(0) = 0$.

6. $2(xy' + y) = xy^2$, $y(1) = 2$.

7. $y^2 dx + (xy - 1)dy = 0$, $y(1) = e$.

8. $(3x^2 + 4y^2)dx + (8xy + e^y)dy = 0$.

9. $(2y + xy^3)dx + (x + x^2y^2)dy = 0$

10. Известно, что скорость охлаждения тела в воздухе пропорционально разности температур тела $\mathrm{T}(t)$ и воздуха. Найти $\mathrm{T}(t)$, если за 10 минут температура тела снизилась от 100 до 60° С, а температура воздуха была постоянной, равной 20° С.

Вариант 4

1. $\sqrt{3+y^2}dx - ydy = x^2ydy$.
2. $y' = \frac{5}{(2x+y)\sin(2x+y+1)} - 2.$
3. $xy' = \sqrt{x^2+y^2} + y$.
4. $y' = \frac{x+y-2}{3x-y-2}.$
5. $y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \cos^2 x$, $y(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$.
6. $y' + 4x^3y = 4(x^3+1)e^{-4x}y^2$, $y(0) = 1$.
7. $2(4y^2+4y-x)y' = 1$, $y(0) = 0$.
8. $(2x - 1 - \frac{y}{x^2})dx - (2y - \frac{1}{x})dy = 0$.
9. $y^2dx + (xy-1)dy = 0.$
10. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $M(0;2)$, если угловой коэффициент касательной, проведенной в любой точке этой кривой, равен сумме координат точки касания.

Вариант 5

1. $6xdx - 6ydy = 2x^2ydy - 3xy^2dx$.
2. $y' = \frac{2}{arctg(4x+y)} - 4.$
3. $2y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 3$.
4. $y' = \frac{x+3y-4}{5x-y-4}.$
5. $y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 2x$, $y(-1) = \frac{3}{2}$.

6. $xy' - y = -y^2(\ln x + 2)\ln x$, $y(1) = 1$.

7. $(\cos 2y \cdot \cos^2 y - x)y' = \sin y \cdot \cos y$, $y(\frac{1}{4}) = \frac{\pi}{3}$.

8. $(y^2 + \frac{y}{\cos^2 x})dx + (2xy + \operatorname{tg} x)dy = 0$.

9. $y^2dx - (xy + x^3)dy = 0$.

10. Парашютист, масса которого m, совершает прыжок. В процессе движения на парашютиста действуют сила тяжести и сила сопротивления воздуха, пропорциональная скорости движения: $-kv$. Найти скорость парашютиста в произвольный момент полета.

Вариант 6

1. $x\sqrt{3 + y^2}dx + y\sqrt{2 + x^2}dy = 0$.

2. $y' = 3x - 2y + 1$.

3. $xy' = \frac{3y^3 + 4yx^2}{2y^2 + 2x^2}$.

4. $y' = \frac{2x+y+1}{x+2y-1}$.

5. $y' = \frac{1}{x+1}y + e^x(x+1)$, $y(0) = 1$.

6. $2(y' + xy) = (1 + x)e^{-x}y^2$, $y(0) = 2$.

7. $(x\cos^2 y - y^2)y' = y\cos^2 y$, $y(\pi) = \frac{\pi}{4}$.

8. $(3x^2y + 2y + 3)dx + (x^3 + 2x + 3y^2)dy = 0$.

9. $(x\cos y - y\sin y)dy + (x\sin y + y\cos y)dx = 0$.

10. Замедляющее действие трения на вращающийся в жидкости диск пропорционально угловой скорости $\omega(t)$. Найти $\omega(t)$, если известно, что за 25 секунд с начала движения угловая скорость снизилась со 100 до 50 об./с.

Вариант 7

1. $(e^{2x} + 5)dy + ye^{2x}dx = 0$.

2. $y' = \sin(y - x)$.

3. $y' = \dfrac{x+2y}{2x-y}$.

4. $y' = \frac{x+y-8}{3x-y-8}$.

5. $y' - \dfrac{y}{x} = x \cdot \sin x, y(\dfrac{\pi}{2}) = 1$.

6. $3(xy' + y) = y^2 \ln x$, $y(1) = 3$.

7. $e^{y^2}(dx - 2xydy) = ydy$, $y(0) = 0$.

8. $(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y})dx + (\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \dfrac{1}{y} - \dfrac{x}{y^2})dy = 0$.

9. $y\sqrt{1-y^2}dx + \left(x\sqrt{1-y^2} + y\right)dy = 0.$

10. Через 12 часов после начала опыта численность некоторой популяции бактерий возросла в 3 раза. Во сколько раз увеличится число бактерий через трое суток? Скорость размножения бактерий пропорциональна их количеству.

Вариант 8

1. $y'y\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = 0$.

2. $y' = (x + y + 1)^2$.

3. $xy' = 2\sqrt{x^2+y^2} + y$.

4. $y' = \frac{x+3y+4}{3x-6}$.

5. $y' + \dfrac{y}{x} = \sin x, y(\pi) = \dfrac{1}{\pi}$.

6. $2y' + y\cos x = y^{-1} \cdot \cos x(1 + \sin x)$, $y(0) = 1$.

7. $(104y^3 - x)y' = 4y$, $y(8) = 1$.

8. $(\sin 2x - 2\cos(x+y))dx - 2\cos(x+y)dy = 0$.

9. $(x^2 + y)dx - xdy = 0$

10. Известно, что скорость распада радия пропорциональна его наличному количеству и что половина его первоначального количества (a)

распадется в течение 1600 лет. Определить, какой процент данного количества (a) радия распадется в течение 100 лет.

Вариант 9

1. $6xdx-6ydy=3x^2ydy-2xy^2dx$.
2. $y'=\cos^2(x-y)$.
3. $3y'=\dfrac{y^2}{x^2}+8\dfrac{y}{x}+4$.
4. $y'=\frac{3y+3}{2x+y-1}$.
5. $y'+\dfrac{y}{2x}=x^2$, $y(1)=1$.
6. $y'+4x^3y=4y^2e^{4x}(1-x^3)$, $y(0)=-1$.
7. $dx+(xy-y^3)dy=0$, $y(-1)=0$.
8. $(xy^2+\dfrac{x}{y^2})dx+(x^2y-\dfrac{x^2}{y^3})dy=0$.
9. $\frac{y}{x}dx+(y^3-\ln x)dy=0$.
10. Моторная лодка движется со скоростью $v=20$ км/ч. Через 6 минут после выключения мотора скорость $v=5$ км/ч. Найти путь, пройденный лодкой по инерции за 15 минут, если сопротивление пропорционально скорости лодки.

Вариант 10

1. $x\sqrt{5+y^2}dx+y\sqrt{4+x^2}dy=0$.
2. $y'=\sqrt{2x+y+1}$.
3. $xy'=\dfrac{3y^3+6yx^2}{2y^2+3x^2}$.
4. $y'=\frac{x+2y-3}{4x-y-3}$.
5. $y'+\dfrac{2x}{1+x^2}y=\dfrac{2x^2}{1+x^2}$, $y(0)=\dfrac{2}{3}$.

6. $3y' + 2xy = 2xy^{-2}e^{-2x^2}$, $y(0) = -1$.

7. $(3y\cos 2y - 2y^2 \sin 2y - 2x)y' = y$, $y(16) = \frac{\pi}{4}$.

8. $(\frac{1}{x^2} + \frac{3y^2}{x^4})dx - \frac{2y}{x^3}dy = 0$.

9. $\left(\frac{x}{\sin y} + 1\right)dx + (x\mathrm{ctg}y + 1)dy = 0$.

10. Найти такую кривую, проходящую через точку $M(0;3)$, чтобы угловой коэффициент касательной в любой ее точке равнялся ординате этой точки, уменьшенной на 2 единицы.

Вариант 11

1. $y(4 + e^x)dy - e^x dx = 0$.

2. $y' = (10x + 5y + 1)^3$.

3. $y' = \frac{x^2 + xy - y^2}{x^2 - 2xy}$.

4. $y' = \frac{x+5y-6}{7x-y-6}$.

5. $y' - \frac{2x-5}{x^2}y = 5$, $y(2) = 4$.

6. $2xy' - 3y = -(5x^2 + 3)y^3$, $y(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

7. $8(4y^3 + xy - y)y' = 1$, $y(0) = 0$.

8. $\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}dx - (\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x} + 2y)dy = 0$.

9. $\left(\frac{\ln y}{y} - 5y\sin 5x\right)dx + \left(\frac{x}{y^2} + 2\cos 5x\right)dy = 0$.

10. Замедляющее действие на диск, вращающийся в жидкости, пропорционально угловой скорости $\omega(t)$. Найти $\omega(t)$, если известно, что за 30 секунд с начала движения угловая скорость снизилась со 150 до 30 об./с.

Вариант 12

1. $\sqrt{4 - x^2}\,y' + xy^2 + x = 0$.

2. $y' = (x+y)^{10} - 1.$

3. $xy' = \sqrt{2x^2 + y^2} + y$.

4. $y' = \frac{3y-2x+1}{3x+3}$.

5. $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{x+1}{x}e^x$, $y(1) = e$.

6. $3xy' + 5y = (4x-5)y^4$, $y(1) = 1$.

7. $(2\ln y - \ln^2 y)dy = ydx - xdy$, $y(4) = e^2$.

8. $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + y\right)dx + \left(x + \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dy = 0$.

9. $xy^2(xy' + y) = 1.$

10. Известно, что скорость охлаждения тела в воздухе пропорционально разности температур тела ($\mathrm{T}(t)$) и воздуха. Найти $\mathrm{T}(t)$, если за 20 минут температура тела снизилась от 150 до 50° С, а температура воздуха была постоянной, равной 25° С.

Вариант 13

1. $2xdx - 2ydy = x^2ydy - 2xy^2dx$.

2. $y' = e^{x+2y}$.

3. $y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 6\dfrac{y}{x} + 6$.

4. $y' = \frac{y+2}{2x+y-4}$.

5. $y' - \dfrac{y}{x} = -2\dfrac{\ln x}{x}$, $y(1) = 1$.

6. $2y' + 3y\cos x = e^{2x}(2 + 3\cos x)y^{-1}$, $y(0) = 1$.

7. $2(x + y^4)y' = y$, $y(-2) = -1$.

8. $\dfrac{1+xy}{x^2y}dx + \dfrac{1-xy}{xy^2}dy = 0$.

9. $(2x^3 + 5y)y' = y^3 + 3x^2y.$

10. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $M(1;2)$, если ее подкасательная вдвое больше абсциссы точки касания.

Вариант 14

1. $x\sqrt{4+y^2}dx + y\sqrt{1+x^2}dy = 0$.
2. $y' = (8x+2y+1)^2$.
3. $xy' = \dfrac{3y^3+8yx^2}{2y^2+4x^2}$.
4. $y' = \frac{x+6y-7}{8x-y-7}$.
5. $y' - \dfrac{y}{x} = -\dfrac{12}{x^3}$, $y(1)=4$.
6. $3(xy'+y) = xy^2$, $y(1)=3$.
7. $y^3(y-1)dx + 3xy^2(y-1)dy = (y+2)dy$, $y(\frac{1}{4}) = 2$.
8. $\dfrac{dx}{y} - \dfrac{x+y^2}{y^2}dy = 0$.
9. $(x+e^{-2x}+y^2)dx + ydy = 0$.
10. Сила тока $i(t)$ в цепи с сопротивлением R, самоиндукцией L и электродвижущей силой E удовлетворяет уравнению: $L\dfrac{di}{dt} + Ri = E$. Найти $i(t)$, считая L и R постоянными, а $E = kt$ и $i(0)=0$.

Вариант 15

1. $(e^x+8)dy - ye^x dx = 0$.
2. $y' = \sin^2(y-x)$.
3. $y' = \dfrac{x^2+2xy-y^2}{2x^2-2xy}$.
4. $y' = \frac{6y-6}{5x+4y-9}$.
5. $y' + \dfrac{2}{x}y = x^3$, $y(1) = -\dfrac{5}{6}$.

6. $y' - y = 2xy^2, \quad y(0) = \frac{1}{2}$.

7. $2y^2dx + (x + e^{-\frac{1}{y}})dy = 0, \; y(e) = 1$.

8. $\frac{y}{x^2}dx - \frac{xy+1}{x}dy = 0$.

9. $\left(\frac{y^2}{x} - \frac{2y}{x^3}\right)dx + \left(y - \frac{1}{x^2}\right)dy = 0.$

10. Известно, что скорость распада радия пропорциональна его наличному количеству и что половина его первоначального количества (a) распадется в течение 1600 лет. Определить, какой процент данного количества (a) радия распадется в течение 200 лет.

Вариант 16

1. $\sqrt{5+y^2} + y'y\sqrt{1-x^2} = 0$
2. $y' = \frac{2}{(2x-y)^2}$.
3. $xy' = 3\sqrt{x^2+y^2} + y$.
4. $y' = \frac{2x+y-1}{2x-2}$.
5. $y' + \frac{y}{x} = 3x, \; y(1) = 1$.
6. $2xy' - 3y = -(20x^2+12)y^3, \; y(1) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.
7. $(xy + \sqrt{y})dy + y^2dx = 0, \; y(-\frac{1}{2}) = 4$.
8. $(xe^x + \frac{y}{x^2})dx - \frac{1}{x}dy = 0$.
9. $(x^2 - y)dy + x(y-1)dx = 0.$
10. Моторная лодка движется со скоростью v=24 км/ч. Через 5 минут после выключения мотора v = 6 км/ч. Найти путь, пройденный лодкой по инерции за 10 минут, если сопротивление пропорционально скорости лодки.

Вариант 17

1. $6xdx - ydy = yx^2dy - 3xy^2dx$.
2. $y' = \frac{e^{x+y}}{x+y-4} - 1$.
3. $2y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 8$.
4. $y' = \frac{x+y-4}{x-2}$.
5. $y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 1 + x^2,\ y(1) = 3$
6. $y' + 2xy = 2x^3y^3, y(0) = \sqrt{2}$
7. $\sin 2ydx = (\sin^2 2y - 2\sin^2 y + 2x)dy,\ y(-\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{4}$
8. $(10xy - \frac{1}{\sin y})dx + (5x^2 + \frac{x\cos y}{\sin^2 y} + y^2 \sin y^3)dy = 0$.
9. $ydx - (x + y^2)dy = 0$.
10. По закону Ньютона скорость охлаждение какого-либо тела в воздухе пропорционально разности между температурой T тела и температурой воздуха $T_{0.}$ Если температура воздуха равна 18^{o} C и тело в течение получаса охлаждается от 120 до 40^{o} C, то через сколько времени его температура понизится до 25^{o} C.

Вариант 18

1. $y\ln y + xy' = 0$.
2. $y' = \cos(y - x)$.
3. $xy' = \frac{3y^3 + 10yx^2}{2y^2 + 5x^2}$.
4. $y' = \frac{2x+y-3}{2x-2}$.
5. $y' = \frac{2x-1}{x^2}y + 1,\ y(1) = 1$.
6. $xy' + y = y^2 \ln x,\ y(1) = 1$.
7. $(y^2 + 2y - x)y' = 1,\ y(2) = 0$.

8. $(\frac{y}{x^2+y^2}+e^x)dx-\frac{xdy}{x^2+y^2}=0$.
9. $(1+3x^2\sin y)dx - x\mathrm{ctg}y dy = 0$.
10. Замедляющее действие трения на вращающийся в жидкости диск пропорционально угловой скорости ω. Найти $\omega(t)$, если известно, что за 20 секунд с начала движения угловая скорость снизилась с 200 до 50 об./с.

Вариант 19

1. $(1+e^x)y'=ye^x$.
2. $y' = \frac{(3x+y)^2}{\ln(3x+y)^2} - 3$.
3. $y'=\frac{x^2+3xy-y^2}{3x^2-2xy}$.
4. $y' = \frac{2x+y-3}{4x-4}$.
5. $y'+\frac{3y}{x}=\frac{2}{x^3}$, $y(1)=1$.
6. $2y'+3y\cos x=(8+12\cos x)e^{2x}y^{-1}$, $y(0)=2$.
7. $2y\sqrt{y}dx-(6x\sqrt{y}+7)dy=0, y(-4)=1$.
8. $e^y dx+(\cos y+xe^y)dy=0$.
9. $(x\cos y - y\sin y)dy + (x\sin y + y\cos y)dx = 0$
10. Известно, что скорость охлаждения тела в воздухе пропорциональна разности температур тела (Т(t)) и воздуха. Найти Т(t), если за 15 минут температура тела снизилась от 200 до 5 $^{\circ}$С, а температура воздуха была постоянной 25°С.

Вариант 20

1. $\sqrt{1-x^2}y'+xy^2+x=0$.
2. $y' = (x+y)^2$.
3. $xy'=3\sqrt{2x^2+y^2}+y$.

4. $y' = \frac{x+y+2}{x+1}$.
5. $y' + 2xy = -2x^3,\ y(1) = e^{-1}$.
6. $4y' + x^3y = (x^3+8)e^{-2x}y^2;\ y(0) = 1$.
7. $dx = (\sin y + 3\cos y + 3x)dy,\ y(e^{\frac{\pi}{2}}) = \frac{\pi}{2}$.
8. $(y^3 + \cos x)dx + (3xy^2 + e^y)dy = 0$.
9. $e^{-y}dx + (2 - xe^{-y})dy = 0$.
10. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $M(0;3)$, если подкасательная в любой точке равна сумме абсциссы точки касания и расстояния от начала координат до точки касания.

Вариант 21

1. $6xdx - 2ydy = 2yx^2dy - 3xy^2dx$.
2. $y' = \mathrm{tg}^2(y - x) + 2$.
3. $y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 12$.
4. $y' = \frac{x+4y-5}{6x-y-5}$.
5. $y' + \frac{xy}{2(1-x^2)} = \frac{x}{2},\ y(0) = \frac{2}{3}$.
6. $8xy' - 12y = -(5x^2+3)y^3,\ y(1) = \sqrt{2}$.
7. $2(\cos^2 y\cos 2y - x)y' = \sin 2y,\ y(\frac{3}{2}) = \frac{5\pi}{4}$.
8. $xe^{y^2}dx + (x^2ye^{y^2} + \mathrm{tg}^2\, y)dy = 0$.
9. $\left(1 + \frac{y}{x^2}\right)dx + \left(\frac{1}{x} + \frac{2y}{x^2}\right)dy = 0$.
10. Моторная лодка движется со скоростью 15 км/ч. Через 10 минут после выключения мотора скорость стала 3 км/ч. Найти путь, пройденный лодкой по инерции за 20 минут, если сопротивление пропорционально скорости лодки.

Вариант 22

1. $y(1+\ln y)+xy'=0$.
2. $y' = \sqrt{x+y+5}$.
3. $xy' = \dfrac{3y^3+12yx^2}{2y^2+6x^2}$.
4. $y' = \frac{5y+5}{4x+3y-1}$.
5. $y'+xy=-x^3,\ y(0)=3$.
6. $2(y'+y)=xy^2,\ y(0)=2$.
7. $\dfrac{e^y+e^{-y}}{2}dx=\left(1+x\cdot\dfrac{e^y-e^{-y}}{2}\right)dy,\ y(1)=\ln 2$.
8. $(5xy^2-x^3)dx+(5x^2y-y)dy=0$.
9. $(x^2-\sin^2 y)dx + x\sin 2y dy = 0$.
10. При брожении скорость прироста действующего фермента пропорциональна его массе. Через 2 часа после начала брожения масса фермента составила 6 г, а после 6 часов – 24 г. Какова была первоначальная масса фермента?

Вариант 23

1. $(3+e^x)yy'=e^x$.
2. $y' = 2x - y + 4$.
3. $y' = \dfrac{x^2+xy-3y^2}{x^2-4xy}$.
4. $y' = \frac{3x+2y-1}{x+1}$.
5. $y'-\dfrac{2}{x+1}y=e^x(x+1)^2,\ y(0)=1$.
6. $y'+xy=(x-1)e^x y^2,\ y(0)=1$.
7. $(13y^3-x)y'=4y,\ y(5)=1$.
8. $(\cos(x+y^2)+\sin x)dx+2y\cos(x+y^2)dy=0$.
9. $(x-2xy-y^2)dy+y^2dx=0$.

10. Замедляющее действие трения на вращающийся в жидкости диск пропорционально угловой скорости ω. Найти $\omega(t)$, если известно, что за 15 секунд с начала движения угловая скорость снизилась от 250 до 125 об./с.

Вариант 24

1. $\sqrt{3+y^2}+\sqrt{1-x^2}yy'=0$.
2. $y' = (x-y)^2+5$.
3. $xy'=2\sqrt{3x^2+y^2}+y$.
4. $y' = \frac{x+2y-3}{x-1}$.
5. $y'+2xy=xe^{-x^2}\sin x,\ y(0)=1$.
6. $2y'-3y\cos x=-e^{-2x}(2+3\cos x)y^{-1},\ y(0)=1$.
7. $y^2(y^2+4)dx+2xy(y^2+4)dy=2dy,\ y(\frac{\pi}{8})=2$.
8. $\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}dx-\left(\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}+2y\right)dy=0$.
9. $\left(1+\frac{1}{3}xy^3\right)dx+(x+x^2y^2)dy=0$.
10. Известно, что скорость охлаждения тела в воздухе пропорциональна разности температур тела (Т(t)) и воздуха. Найти Т(t), если за 10 минут температура тела снизилась от 100 до 65° С, а температура воздуха была постоянной 30° С.

Вариант 25

1. $xdx-ydy=yx^2dy-xy^2dx$.
2. $y' = \mathrm{ctg}^2(2y-6x)+3$.
3. $4y'=\frac{y^2}{x^2}+10\frac{y}{x}+5$.
4. $y' = \frac{y-2x+3}{x-1}$.
5. $y'-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^3,\ y(0)=\frac{1}{2}$.

6. $y' - y = xy^2,\ y(0) = 1.$

7. $(x + \ln^2 y - \ln y)y' = \dfrac{y}{2},\ y(2) = 1.$

8. $(\sin y + y\sin x + \dfrac{1}{x})dx + (x\cos y - \cos x + \dfrac{1}{y})dy = 0.$

9. $\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right)dx + (x^2 + y^2)dy = 0.$

10. Известно, что скорость распада радия пропорциональна его наличному количеству и что половина его первоначального количества (а) распадается в течение 1600 лет. Определить, какой процент данного количества (а) радия распадется в течение 400 лет.

Вариант 26

1. $\sqrt{5 + y^2}dx + 4(x^2y + y)dy = 0.$

2. $y' = \frac{8}{(x+y)^3}.$

3. $xy' = \dfrac{3y^3 + 14yx^2}{2y^2 + 7x^2}.$

4. $y' = \frac{x+3y-4}{5x-y-4}.$

5. $y' - y\cos x = -\sin 2x,\ y(0) = 3.$

6. $y' + y = xy^2,\ y(0) = 1.$

7. $ydx + (2x - 2\sin^2 y - y\sin 2y)dy = 0,\ y(\dfrac{3}{2}) = \dfrac{\pi}{4}.$

8. $(1 + \dfrac{1}{y}e^{\frac{x}{y}})dx + (1 - \dfrac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}})dy = 0.$

9. $(x^2 + y^2 + 2x)dx - 2ydy = 0.$

10. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $M(1;0)$, если длина отрезка оси абсцисс, отсекаемой ее нормалью, на 2 единицы больше абсциссы точки касания.

Вариант 27

1. $(1+e^x)yy'=e^x$.
2. $y' = \sqrt[3]{3x-y}+2.$
3. $y'=\dfrac{x^2+xy-5y^2}{x^2-6xy}$.
4. $y' = \frac{4y-8}{3x+2y-7}$.
5. $y'-4xy=-4x^3,\ y(0)=\dfrac{1}{2}$.
6. $2(xy'+y)=y^2\ln x,\ y(1)=2$.
7. $(2xy+\sqrt{y})dy+2y^2dx=0,\ y(-\dfrac{1}{2})=1$.
8. $\dfrac{(x-y)dx+(x+y)dy}{x^2+y^2}=0$.
9. $(e^y+\sin x)dx+\cos x dy=0.$
10. Моторная лодка движется со скоростью v = 12 км/ч. Через 10 минут после выключения мотора v = 3 км/ч. Найти путь, пройденный лодкой по инерции за 20 минут, если сопротивление пропорционально скорости лодки.

Вариант 28

1. $3(x^2y+y)dy+\sqrt{2+y^2}dx=0$.
2. $y' = 5x+10y+2.$
3. $xy'=4\sqrt{x^2+y^2}+y$.
4. $y' = \frac{2x+3y-5}{5x-5}$.
5. $y'-\dfrac{y}{x}=-\dfrac{\ln x}{x},\ y(1)=1.$
6. $x^2y^2y'+xy^3=1,\ y(1)=1.$
7. $2(y^3-y+xy)dy=dx,\ y(-2)=0$.
8. $2(3xy^2+2x^3)dx+3(2x^2y+y^2)dy=0$.

9. $(x^2\cos x - y)dx + xdy = 0.$
10. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $M(1;3)$, если произведение углового коэффициента касательной, проведенной в любой точке этой кривой, на абсциссу точки касания равно полусумме координат точки касания.

Вариант 29

1. $2xdx - ydy = yx^2dy - xy^2dx$.
2. $y' = \frac{4}{2x-y}$.
3. $3y' = \frac{y^2}{x^2} + 10\frac{y}{x} + 10$.
4. $y' = \frac{x+8y-9}{10x-y-9}$.
5. $y' - 3x^2y = \frac{x^2(1+x^3)}{3},\ y(0) = 0$.
6. $3y^2y' + y^3 = x + 1,\ y(1) = -1.$
7. $ydx - (3x + 1 + \ln y)dy = 0,\ y(-\frac{1}{3}) = 1.$
8. $2x\cos^2 ydx + (2y - x^2\sin 2y)dy = 0$.
9. $y^2dx + (xy - 1)dy = 0.$
10. Известно, что скорость распада радия пропорциональна его наличному количеству и что половина его первоначального количества (а) распадается в течение 1600 лет. Определить, какой процент данного количества (а) радия распадется в течение 800 лет.

Вариант 30

1. $2x + 2xy^2 + \sqrt{2-x^2}\,y' = 0$.
2. $y' = \frac{5}{(y+5x+1)^2}$.
3. $xy' = 4\sqrt{2x^2 + y^2} + y$.
4. $y' = \frac{x-2y+3}{-2x-2}$.

5. $y' - y\cos x = \sin 2x,\ y(0) = 1.$

6. $(1 - x^2)y' - xy = xy^2,\ y(0) = \frac{1}{2}.$

7. $\cos y dx = (x + 2\cos y)\sin y dy,\ y(\frac{1}{2}) = 0.$

8. $(3x^2 y - 4xy^2)dx + (x^3 - 4x^2 y + 12y^3)dy = 0.$

9. $ydx - xdy + \ln x\, dx = 0.$

10. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $M(1;2)$, если произведение абсциссы точки касания на абсциссу точки пересечения нормали с осью Ox равна удвоенному квадрату расстояния от начала координат до точки касания.

7. ЗАДАНИЯ ПО ТЕМЕ: ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА. СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Примерный вариант заданий с решением

1. Решить задачу Коши: $y''y^3 + 81 = 0, y(1) = 3, y'(1) = -3$.
2. Решить уравнение: $xy'' + y' = x^{\frac{3}{2}}$.
3. Решить уравнение: $y'' + 4y = 4\cos 2x$.
4. Решить уравнение: $y'' - 4y = e^x\big((-4x+4)\cos x - (2x+6)\sin x\big)$.
5. Решить уравнение: $y'' + y = \operatorname{tg} x$.
6. Найти решение системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} y' = 1 - \frac{1}{z}, \\ z' = \frac{1}{y-x}, \end{cases}$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = -1, z(0) = 1$.
7. Найти общее решение ЛОДУ: $\begin{cases} y' = y + 2z, \\ z' = 2y + z. \end{cases}$
8. Решить ЛНДУ: $\begin{cases} y' = -y - 2z + 2e^{-x}, \\ z' = 3y + 4z + e^{-x}. \end{cases}$

Решение

1. Данное уравнение 2-го порядка для функции $y = y(x)$ не содержит явно независимую переменную x.

Принимаем y за новую независимую переменную, а производную 1-го порядка $y'(x)$ – за новую функцию $p(y)$. Тогда $y''(x) = (p(y))'_x = p'_y \cdot y'_x = p'(y) \cdot p(y)$.

Таким образом уравнение $F(y, y', y'') = 0$ сводится к уравнению $F_1(y, p, p') = 0$. В нашем случае мы приходим к уравнению: $p'py^3 = -81$. Решаем уравнение 1-го порядка с разделяющимися переменными при начальном условии $p(3) = -3$.

$$pdp = \frac{-81}{y^3}dy;\ \frac{p^2}{2} = \frac{81}{2y^2} + \frac{C_1}{2};\ p^2 = \frac{81}{y^2} + C_1.$$

Подставляя начальные условия, получаем $p(y) = -\frac{9}{y}$.

Вернемся к старым переменным $y'(x) = -\frac{9}{y}$, т.е. пришли к уравнению 1-го порядка, которое является уравнением с разделяющимися переменными. Решаем его: $ydy = -9dx$; $\frac{y^2}{2} = -9x + C_2$.

Подставляя начальные условия, получаем частный интеграл поставленной задачи Коши.

Ответ: $y^2 = -18x + 27$.

2. Данное уравнение не содержит явно искомую функцию $y(x)$.

В этом случае можно выполнить подстановку $y'(x) = z(x)$.

Тогда $y''(x) = z'(x)$ и уравнение 2-го порядка $F(y, y', y'') = 0$ для функции $y(x)$ переходит в уравнение 1-го порядка $F(x, z, z') = 0$ для функции $z(x)$. В нашем случае будем иметь следующее уравнение: $xz' + z = x^{\frac{3}{2}}$. Это линейное уравнение 1-го порядка для функции $z(x)$. Решим его: $z' + \frac{1}{x}z = x^{\frac{1}{2}}$. Применим метод Бернулли: $u'v + uv' + \frac{1}{x}uv = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow v' + \frac{1}{x}v = 0 \Rightarrow v = \frac{1}{x}$, а для функции $u(x)$ получим $u' \cdot \frac{1}{x} = x^{\frac{1}{2}}$, откуда следует $u(x) = \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} + C_1 \Rightarrow z(x) = u(x) \cdot v(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} + C_1\right)$ и $y'(x) = \frac{2}{5}x^{\frac{3}{2}} + \frac{C_1}{x}$. Итак, для функции $y(x)$ получили дифференциальное уравнение 1-го порядка с разделяющимися переменными: $dy = \left(\frac{2}{5}x^{\frac{3}{2}} + \frac{C_1}{x}\right)dx \Rightarrow y(x) = \frac{4}{25}x^{\frac{5}{2}} + C_1 \ln|x| + C_2$ – общее решение заданного дифференциального уравнения.

Ответ: $y(x) = \frac{4}{25}x^{\frac{5}{2}} + C_1 \ln|x| + C_2$.

3. Заданное уравнение является ЛНДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами с правой частью специального вида, который позволяет воспользоваться методом неопределенных коэффициентов. Общее решение ЛНДУ есть $y(x) = y_{o.o} + \tilde{y}$, где $y_{o.o}(x)$ – общее решение соответствующего ЛОДУ, $\tilde{y}(x)$ – частное решение заданного ЛНДУ. Найдем общее решение ЛОДУ: $y'' + 4y = 0$.Характеристическое уравнение имеет вид: $k^2 + 4 = 0$.

Откуда следует $k_{1,2} = \pm 2i$, т.е. $\alpha = 0, \beta = 2$. Тогда общее решение ЛОДУ будет $y_{o.o} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$, где C_1 и C_2 – произвольные постоянные. Правая часть исходного уравнения $y'' + 4y = 4\cos 2x$ имеет специальный вид $f(x) = 4\cos 2x = M_p(x)\cos 2x + N_q(x)\sin 2x$, здесь $p = 0$, а многочлен $N_q(x) \equiv 0$. $S = max(p; q) = 0$. Составим по правой части ЛНДУ $f(x)$ число $\alpha + \beta i = 0 + 2i = 2i$. Это число совпадает с одним из корней характеристического уравнения $\Rightarrow r = 1 \Rightarrow$ вид частного решения есть $\tilde{y}(x) = x(A\cos 2x + B\sin 2x)$, где A и B – неизвестные пока числа (неопределенные коэффициенты многочленов нулевого порядка, $S = 0$). Для определения A и B находим $\tilde{y}'(x), \tilde{y}''(x)$ и подставляем в исходное уравнение:

$$-4A\sin 2x + 4B\cos 2x - 4Ax\cos 2x - 4Bx\sin 2x + 4Ax\cos 2x +$$
$$+4Bx\sin 2x = 4\cos 2x.$$

Приводя подобные члены и приравнивая затем коэффициенты при $\cos 2x$, $\sin 2x$ в левой и правой частях последнего выражения, получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} -4A = 0 \\ 4B = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 1 \end{cases}.$$

Окончательно общее решение заданного уравнения имеет вид:

$$y(x) = y_{o.o}(x) + \tilde{y}(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + x\sin 2x.$$

Ответ: $y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + x\sin 2x$.

4. Заданное уравнение является ЛНДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами с правой частью специального вида, который позволяет воспользоваться методом неопределенных коэффициентов. Общее решение ЛНДУ есть $y(x) = y_{o.o} + \tilde{y}$, где $y_{o.o}(x)$ – общее решение соответствующего ЛОДУ, $\tilde{y}(x)$ – частное решение заданного ЛНДУ. Найдем общее решение соответствующего ЛОДУ:

$$y'' - 4y = 0.$$

Характеристическое уравнение $k^2 - 4 = 0$ имеет корни $k_{1,2} = \pm 2$.

Следовательно, общее решение ЛОДУ есть

$$y_{o.o.}(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x},$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Строим частное решение заданного ЛНДУ.

Правая часть уравнения

$$f(x) = e^x\big((-4x+4)\cos x - (2x+6)\sin x\big) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = 1, \beta = 1 \;\Rightarrow\; \alpha + i\beta = 1 + i \neq k_1, k_2 \;\Rightarrow r = 0$$

$$p = q = 1 \;\Rightarrow S = max(p, q) = 1$$

Следовательно, частное решение исходного уравнения имеет вид

$$\tilde{y}(x) = e^x\big((Ax+B)\cos x + (Cx+D)\sin x\big).$$

Найдем производные первого и второго порядков от функции $\tilde{y}(x)$:

$$\tilde{y}'(x) = e^x\{\cos x\,(Ax + Cx + A + B + D) + \sin x\,(Cx - Ax + C + D - B)\}.$$

$$\tilde{y}''(x) = e^x\{\cos x \cdot (2Cx + 2A + 2C + 2D) + \sin x \cdot (-2Ax + 2C - 2A - 2B)\}.$$

Подставляем функции $\tilde{y}'(x)$, $\tilde{y}''(x)$ в левую часть заданного ЛНДУ и приравняем получившееся выражение к правой части $f(x)$ исходного уравнения. В результате для коэффициентов A, B, C и D получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} C - 2A = -2 \\ 2C + A = 1 \\ A + C + D - 2B = 2 \\ C - A - B - 2D = -3 \end{cases}$$

Откуда находим $A = 1, B = 0, C = 0, D = 1$. Следовательно общее решение заданного уравнения имеет вид:

$$y(x) = y_{o.o}(x) + \tilde{y}(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + e^x(x\cos x + \sin x).$$

Ответ: $y(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + e^x(x\cos x + \sin x)$.

5. Заданное уравнение является ЛНДУ 2-го порядка с правой частью, которая не позволяет применить метод неопределенных коэффициентов. Поэтому для решения этого уравнения применим метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа).

Находим общее решение соответствующего ЛОДУ:

$$y'' + y = 0, k^2 + 1 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = \pm i \Rightarrow y_{o.o}(x) = C_1\cos x + C_2\sin x,$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Далее ищем решение заданного ЛНДУ в виде:

$$y(x) = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x,$$

где $C_1(x)$ и $C_2(x)$ – некоторые непрерывно дважды дифференцируемые функции от x, подлежащие определению. Эти функции находим из следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} C_1{}'(x)\cos x + C_2{}'(x)\sin x = 0, \\ -C_1{}'(x)\sin x + C_2{}'(x)\cos x = \operatorname{tg} x. \end{cases}$$

Решая эту систему относительно функций $C_1{}'(x)$ и $C_2{}'(x)$, получаем $C_1'(x) = -\frac{\sin^2 x}{\cos x}$; $C_2'(x) = \sin x$. Откуда будем иметь:

$$C_1(x) = \sin x + \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right| + \tilde{C}_1,\ \ C_2(x) = -\cos x + \tilde{C}_2,$$

где $\tilde{C}_1$ и $\tilde{C}_2$ – произвольные постоянные.

Следовательно, общим решением исходного дифференциального уравнения $y'' + y = \operatorname{tg} x$ будет следующее двухпараметрическое семейство функций:

$$y(x) = \tilde{C}_1\cos x + \tilde{C}_2\sin x + \cos x \cdot \left(\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right|\right).$$

Ответ: $y(x) = \tilde{C}_1\cos x + \tilde{C}_2\sin x + \cos x \cdot \left(\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right|\right).$

6. Будем искать общее решение методом исключения, который состоит в приведении заданной системы к одному дифференциальному уравнению. Дифференцируем второе уравнение по независимой переменной x:

$$z'' = -\frac{1}{(y-x)^2}\cdot(y' - 1).$$

Чтобы исключить из полученного уравнения y и y', заменим в нем y и $(y' - 1)$ их значениями из данной системы:

$$y' - 1 = -\frac{1}{z}, \frac{1}{y-x} = z' \Rightarrow z'' = z'^2 \cdot \frac{1}{z}.$$

Откуда будем иметь $\frac{z''}{z'} = \frac{z'}{z} \Rightarrow z' = C_1 z \Rightarrow z(x) = C_2 e^{C_1 x}$.

Для нахождения $y(x)$ воспользуемся вторым уравнением системы:

$$y - x = \frac{1}{z'} = \frac{1}{C_1 z} = \frac{1}{C_1 C_2}e^{-C_1 x}.$$

Откуда $y = x + \frac{1}{C_1 C_2}e^{-C_1 x}$. Следовательно, общим решением заданной системы уравнений будет

$$\begin{cases} y = x + \dfrac{1}{C_1C_2}e^{-C_1x} \\ z = C_2e^{C_1x} \end{cases}.$$

Решим теперь поставленную задачу Коши.

Подставим в общее решение вместо x, y, z их начальные значения $0, -1$ и 1:

$$-1 = \frac{1}{C_1C_2}, 1 = C_2 \Rightarrow C_1 = -1, C_2 = 1.$$

Следовательно, решением задачи Коши будет пара функций

$$y = x - e^x, z = e^{-x}.$$

Ответ: $y = x - e^x, z = e^{-x}$.

7. Задана система линейных однородных дифференциальных уравнений (ЛОДУ).

Представим $y(x) = \alpha_1 e^{\lambda x}, z(x) = \alpha_2 e^{\lambda x}$,где $\alpha_1, \alpha_2, \lambda -$ пока неизвестные параметры. Продифференцируем обе функции по x и подставим $y'(x), z'(x), y(x), z(x)$в заданную систему уравнений:

$$\begin{cases} \lambda\alpha_1 e^{\lambda x} = \alpha_1 e^{\lambda x} + 2\alpha_2 e^{\lambda x} \\ \lambda\alpha_2 e^{\lambda x} = 2\alpha_1 e^{\lambda x} + \alpha_2 e^{\lambda x} \end{cases}$$

Так как $e^{\lambda x} > 0$, то на $e^{\lambda x}$ можно сократить оба уравнения, соберем также все слагаемые с α_1 и α_2 в правую часть и в итоге получим:

$$\begin{cases} (1-\lambda)\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 + (1-\lambda)\alpha_2 = 0. \end{cases}$$

Полученная система уравнений является линейной однородной системой двух алгебраических уравнений с двумя неизвестными α_1, α_2. Чтобы эта однородная линейная система имела нулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы ее определить равнялся нулю, т.е. λ было корнем так называемого характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0; \quad (1-\lambda)^2 - 4 = 0$$

Откуда следует, что $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = -1$.

Подставим первый характеристический корень $\lambda_1 = 3$ в алгебраическую систему уравнений и найдем первое ненулевое решение этой системы. Так как ранг алгебраической системы равен единице, то это решение определяется с точностью до постоянного множителя: $\lambda_1^1 = \lambda_2^1 = C.$ Возьмем для простоты $C = 1$, тогда первым решением системы ЛОДУ будет

$$y_1(x) = e^{3x}, z_1(x) = e^{3x}.$$

Теперь подставим в одно из уравнений алгебраической системы уравнений второе характеристическое число $\lambda_2 = -1$ и определим второе решение алгебраической системы: $\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = -1$. Тогда вторым ненулевым решением ЛОС ДУ будет $y_2(x) = e^{-x}, z_2(x) = e^{-x}$.

Итак, построена фундаментальная система решений системы ЛОДУ и, следовательно, общим решением заданной системы дифференциальных уравнений будет

$$\begin{cases} y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) = C_1e^{3x} + C_2e^{-x}, \\ z(x) = C_1z_1(x) + C_2z_2(x) = C_1e^{3x} - C_2e^{-x}, \end{cases}$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Ответ: $\begin{cases} y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) = C_1e^{3x} + C_2e^{-x}, \\ z(x) = C_1z_1(x) + C_2z_2(x) = C_1e^{3x} - C_2e^{-x}. \end{cases}$

8. Задана система линейных неоднородных дифференциальных уравнений – ЛНДУ. Решим эту систему методом вариации произвольных постоянных (методом Лагранжа).

Соответствующей однородной системой будет следующая система ЛОДУ:

$$\begin{cases} y' = -y - 2z, \\ z' = 3y + 4z. \end{cases}$$

Найдем ее общее решение методом Эйлера, подробно изложенным выше. В результате будем иметь

$$\begin{cases} y(x) = C_1e^{x} + 2C_2e^{2x}, \\ z(x) = -C_1e^{x} - 3C_2e^{2x}, \end{cases}$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Далее ищем общее решение заданной системы ЛНДУ в виде

$$\begin{cases} y(x) = C_1(x)e^{x} + 2C_2(x)e^{2x}, \\ z(x) = -C_1(x)e^{x} - 3C_2(x)e^{2x}, \end{cases}$$

где $C_1(x)$ и $C_2(x)$ – некоторые дифференцируемые функции аргумента *x*.
Функции $C_1{}'(x)$ и $C_2{}'(x)$находятся из системы уравнений:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = f_1(x) \\ C_1'(x)z_1(x) + C_2'(x)z_2(x) = f_2(x) \end{cases}.$$

Здесь $y_1(x)$,$z_1(x)$ – первое решение системы ЛНДУ, а $y_2(x)$, $z_2(x)$ – второе ее решение. В нашем случае для нахождения $C_1'(x)$ и$C_2{}'(x)$ будем иметь следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x + 2C_2'(x)e^{2x} = 2e^{-x} \\ -C_1'(x)e^x - 3C_2'(x)e^{2x} = e^{-x} \end{cases}.$$

Откуда получаем $C_1'(x) = 8e^{-2x}, C_2'(x) = -3e^{-3x}$. Следовательно, общим решением заданной системы уравнений будет

$$\begin{cases} y(x) = -2e^{-x} + C_1e^x + 2C_2(x)e^{2x} \\ z(x) = e^{-x} - C_1e^x - 3C_2e^{2x} \end{cases}.$$

Замечание. Частное решение исходной системы дифференциальных уравнений можно было искать в виде $y(x) = ae^{-x}, z(x) = be^{-x}$методом неопределенных коэффициентов, т.е. для решения заданной системы можно было бы избежать применения метода Лагранжа.

Ответ: $\begin{cases} y(x) = -2e^{-x} + C_1e^x + 2C_2(x)e^{2x} \\ z(x) = e^{-x} - C_1e^x - 3C_2e^{2x} \end{cases}.$

Варианты заданий для самостоятельного решения (1–30)

Вариант 1

Решить задачу Коши:

1. $4y^3y'' = y^4 - 1; y(0) = \sqrt{2}$; $y'(0) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

Решить дифференциальные уравнения:

2. $y''x\ln x = y'$;
3. $y'' - 4y' + 3y = (16 - 12x)e^{-x}$;
4. $y'' - 4y' + 4y = -e^{2x}\sin 6x$;
5. $y'' - 2y' + y = e^x \ln x$.

Найти решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = -1, z(0) = 1$:

6. $\begin{cases} y' = -\dfrac{1}{z}, \\ z' = \dfrac{1}{y}. \end{cases}$

Решить системы дифференциальных уравнений:

7. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = y - 2x + 18t. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x' = x - 3y, \\ y' = 3x + y. \end{cases}$

Вариант 2

Решить задачу Коши:

1. $y'' = 128y^3$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 8$.

Решить дифференциальные уравнения:

2. $xy'' + y' = 1$;

3. $y'' - y = x^2 + x$;

4. $y'' + 2y' = -2e^x(\sin x + \cos x)$;

5. $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{1}{xe^{2x}}$.

Найти решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = -1, z(0) = 1$:

6. $\begin{cases} y' = -z, \\ \mathrm{z}' = \dfrac{z^2}{y}. \end{cases}$

Решить системы дифференциальных уравнений:

7. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 2y + 4e^{5t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$

Вариант 3

Решить задачу Коши:

1. $y''y^3 + 64 = 0$; $y(0) = 4$; $y'(0) = 2$.

Решить дифференциальные уравнения:

2. $2xy'' = y'$;

3. $y'' + 2y' + y = (2x - 5)e^{-x}$;

4. $y'' - 4y' + 5y = (x - 1)e^{-x}$;

5. $y'' + 9y = \dfrac{1}{\sin 3x}$.

Найти решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = -1, z(0) = 1$:

6. $\begin{cases} y' = xy, \\ z' + y' = z + xy. \end{cases}$

Решить системы дифференциальных уравнений:

7. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 2y + 2\sin t. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = y - 4x. \end{cases}$

Вариант 4

Решить задачу Коши:

1. $y'' + 2\sin y \cos^3 y = 0$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$.

Решить дифференциальные уравнения:

2. $xy'' + y' = x + 1$;
3. $y'' - y' = 2x + 3$;
4. $y'' - 2y' + 2y = (6x - 11)e^{-x}$;
5. $y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos 2x}$

Найти решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = -1, z(0) = 1$:

6. $\begin{cases} y' = \dfrac{1}{z}, \\ z' = \dfrac{1}{y}. \end{cases}$

Решить системы дифференциальных уравнений:

7. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - 4y + 4e^{-2t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - 2y. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x' + x + 5y = 0, \\ y' - x - y = 0. \end{cases}$

Вариант 5

Решить задачу Коши:

1. $y'' = 32\sin^3 y \cdot \cos y$; $y(1) = \dfrac{\pi}{2}$; $y'(1) = 4$.

Решить дифференциальные уравнения:

2. $\operatorname{tg} x \cdot y'' - y' + \dfrac{1}{\sin x} = 0$;

3. $3y'' + y' = 6x - 1$;

4. $y'' - 3y' + 2y = (4x+9)e^{2x}$;

5. $y'' + \dfrac{1}{9} y = \dfrac{1}{\cos^2 \dfrac{x}{3}}$.

Найти решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1, z(0) = 1$:

6. $\begin{cases} y' = \dfrac{z^2}{y}, \\ z' = y. \end{cases}$

Решить системы дифференциальных уравнений:

7. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3 - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - 2t. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x' + x - 8y = 0, \\ y' - x - y = 0. \end{cases}$

Вариант 6

Решить задачу Коши:

1. $y'' = 98y^3$; $y(1) = 1$; $y'(1) = 7$.

Решить дифференциальные уравнения:

2. $x^2 y'' + xy' = 1$;

3. $y'' - 6y' + 8y = xe^{-3x}$;

4. $y'' + 2y' + 5y = 10\cos x$;

5. $y'' - y' = \dfrac{1}{2 + e^{-x}}$.

Решить системы дифференциальных уравнений и выделить решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = -1, z(0) = 1$:

6. $\begin{cases} y' = z, \\ z' = y + z. \end{cases}$

Решить системы дифференциальных уравнений:

7. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y + 8t, \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x - y. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x' = 3x + 8y, \\ y' = -3y - x. \end{cases}$

Вариант 7

Решить задачу Коши:

1. $y'' \cdot y^3 + 49 = 0$, $y(3) = -7$; $y'(3) = -1$.

Решить дифференциальные уравнения:

2. $y'' \cdot \operatorname{ctg} 2x + 2y' = 0$;
3. $y'' + y' = 5x^2 - 1$;
4. $y'' + 2y' = 6e^x(\sin x + \cos x)$;
5. $y'' - 2y' + y = 3e^x\sqrt{x-1}$.

Найти решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = -1, z(0) = 1$:

6. $\begin{cases} y' = 3z^2, \\ 2z' = y, \end{cases}$

Решить системы дифференциальных уравнений:

7. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + 2y = 3t, \\ \dfrac{dy}{dt} - 2x = 4. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = 3y - 2x. \end{cases}$

Вариант 8

Решить задачу Коши:

1. $4y^3y'' = 16y^4 - 1$, $y(0) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $y'(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Решить дифференциальные уравнения:

2. $x^3y'' + x^2y' = 1$;
3. $y'' + y' - 2y = (6x+5)e^x$;
4. $y'' + 49y = 14\sin 7x + 7\cos 7x$;
5. $4y'' - 4y' + y = e^{\frac{x}{2}}\ln x$.

Найти решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = -1, z(0) = 1$:

6. $\begin{cases} y' = -z + x^2, \\ z' = y + e^x. \end{cases}$

Решить системы дифференциальных уравнений:

7. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + 2x - 4y = 0, \\ \dfrac{dy}{dt} + x - 3y = 3t^2. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x' = -7x + y, \\ y' = -5y - 2x. \end{cases}$

Вариант 9

Решить задачу Коши:

1. $y'' + 8\sin y \cdot \cos^3 y = 0$, $y(0) = 0$; $y'(0) = 2$.

Решить дифференциальные уравнения:

2. $\operatorname{tg} x \cdot y'' = 2y'$;
3. $y'' - y' = 4x^2 - 3x + 2$;
4. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \cdot \sin 4x$;
5. $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{e^x}{3 + e^{-x}}$.

Найти решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = -1, z(0) = 1$:

6. $\begin{cases} y' = z + \operatorname{tg}^2 x - 1, \\ z' = -y + \operatorname{tg} x. \end{cases}$

Решить системы дифференциальных уравнений:

7. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - 5\cos t, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 4y - x. \end{cases}$

Вариант 10

Решить задачу Коши:

1. $y'' = 72y^3$; $y(2) = 1$; $y'(2) = 6$.

Решить дифференциальные уравнения:

2. $y'' + \dfrac{2x}{x^2 + 1} y' = 2x$;
3. $y'' + 3y' + 2y = (1 - 2x)e^{-x}$;
4. $y'' + y = 2\cos 5x + 3\sin 5x$;
5. $y'' + 16y = \operatorname{ctg} 4x$.

Найти решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = -1, z(0) = 1$:

6. $\begin{cases} y' = y + z - \cos x, \\ z' = -2y - z + \sin x + \cos x. \end{cases}$

Решить системы дифференциальных уравнений:

7. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 1 - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - \sin 2t. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x' = x - 4y \\ y' = x - 3y \end{cases}$

Вариант 11

Решить задачу Коши:

1. $y''y^3 + 36 = 0$, $y(0) = 3$; $y'(0) = 2$.

Решить дифференциальные уравнения:

2. $x^4 y'' + x^3 y' = 1$;
3. $y'' + y' = 49 - 24x^2$;
4. $y'' - 4y' + 8y = e^x(2\sin x + \cos x)$;
5. $y'' + y = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$.

Найти решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = -1, z(0) = 1$:

6. $\begin{cases} y' = \dfrac{z}{y}, \\ z' = y + 1. \end{cases}$

Решить системы дифференциальных уравнений:

7. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2y - 5x, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 6y + e^{-2t}. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x' = 2y - 3x, \\ y' = y - 2x. \end{cases}$

Вариант 12

Решить задачу Коши:

1. $y'' = 18\sin^3 y \cdot \cos y$, $y(1) = \dfrac{\pi}{2}$; $y'(1) = 3$.

Решить дифференциальные уравнения:

2. $xy'' + 2y' = 0$;
3. $y'' + 5y' + 4y = (20 - 16x)e^{-x}$;
4. $y'' - 4y' + 8y = e^x(2\sin x - \cos x)$;
5. $y'' + 4y = \mathrm{tg}2x$.

Найти решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = -1, z(0) = 1$:

6. $\begin{cases} y' = 5y - 3z + xe^{2x}, \\ z' = 3y - z + e^{3x}. \end{cases}$

Решить системы дифференциальных уравнений:

7. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -6x + 3y + t, \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x + 2y. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x' - 5x - 3y = 0, \\ y' + 3x + y = 0. \end{cases}$

Вариант 13

Решить задачу Коши:

1. $4y^3y'' = y^4 - 16$, $y(0) = 2\sqrt{2}$; $y'(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Решить дифференциальные уравнения:

2. $(1+x^2)y'' + 2xy' = x^3$;
3. $y'' - 4y' + 3y = -4xe^x$;
4. $y'' + 2y' + 5y = -\cos x$;
5. $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{1+2e^{2x}}$.

Найти решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = -1, z(0) = 1$:

6. $\begin{cases} y' = yz, \\ z' = -y. \end{cases}$

Решить системы дифференциальных уравнений:

7. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 2y + 4e^{5t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y. \end{cases}$
8. $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$

Вариант 14

Решить задачу Коши:

1. $y'' = 50y^3$, $y(3) = 1$; $y'(3) = 5$.

Решить дифференциальные уравнения:

2. $x^5y'' + x^4y' = 1$;
3. $y'' + 2y' - 3y = (8x+6)e^x$;
4. $y'' + 2y' = 3e^x(\sin x + \cos x)$;
5. $y'' + y = \dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$.

Найти решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = -1, z(0) = 1$:

6. $\begin{cases} y' = 2z + e^{3x}, \\ z' = y + x. \end{cases}$

Решить системы дифференциальных уравнений:

7. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = y - 2x + 18t. \end{cases}$
8. $\begin{cases} x' = x - 3y, \\ y' = 3x + y. \end{cases}$

Вариант 15

Решить задачу Коши:

1. $y'' + 18\sin y \cdot \cos^3 y = 0,\ y(0) = 0;\ y'(0) = 3.$

Решить дифференциальные уравнения:

2. $(1 + x^2)y'' + 2xy' = 12x^3;$
3. $y'' + 3y' + 2y = x^2 + 2x + 3;$
4. $y'' + 2y' + 5y = x\sin 2x;$
5. $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}\ln x.$

Найти решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = -1, z(0) = 1$:

6. $\begin{cases} y' = 2z - y, \\ z' = 4z - 3y + \dfrac{e^{3x}}{e^{2x} + 1}. \end{cases}$

Решить системы дифференциальных уравнений:

7. $\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = x + y + e^t. \end{cases}$
8. $\begin{cases} x' = x + 3y, \\ y' = -x + 5y. \end{cases}$

Вариант 16

Решить задачу Коши:

1. $y''y^3 + 25 = 0, y(2) = -5, y'(2) = -1.$

Решить дифференциальные уравнения:

2. $xy'' + y' + x = 0;$
3. $y'' - y' = 6x^2 + 3x;$
4. $y'' - 6y' + 10y = 2e^{3x}\sin 2x;$
5. $y'' - y' = \dfrac{1}{e^x + 1}.$

Найти решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = -1, z(0) = 1$:

6. $\begin{cases} y' = y - z + \dfrac{1}{\cos x}, \\ z' = 2y - z. \end{cases}$

Решить системы дифференциальных уравнений:

7. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - 3y \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 2y + 2\sin t \end{cases}$
8. $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = y - 4x \end{cases}$

Вариант 17

Решить задачу Коши:

1. $y''=32y^3,\ y(4)=1,\ y'(4)=4$.

Решить дифференциальные уравнения:

2. $xy''-y'+\dfrac{1}{x}=0$;

3. $y''-2y'+y=2xe^{-x}$;

4. $y''+4y=5(x+2)^2$;

5. $y''+16y=\dfrac{1}{\sin^2 4x}$.

Найти решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=-1, z(0)=1$:

6. $\begin{cases} y'=2y-z, \\ z'=2z-y-5e^x\sin x. \end{cases}$

Решить системы дифференциальных уравнений:

7. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=2x-4y+4e^{-2t} \\ \dfrac{dy}{dt}=2x-2y \end{cases}$

8. $\begin{cases} x'+x+5y=0 \\ y'-x-y=0 \end{cases}$

Вариант 18

Решить задачу Коши:

1. $y''=8\sin^3 y\cos y,\ y(1)=\dfrac{\pi}{2},\ y'(1)=2$.

Решить дифференциальные уравнения:

2. $xy''+y'=\sqrt{x}$;

3. $y''+2y'+y=x^2+x-1$;

4. $y''+2y'+y=(18x+21)e^{2x}$;

5. $9y''+6y'+y=3e^{-x/3}\sqrt{x}$.

Найти решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=-1, z(0)=1$:

6. $\begin{cases} y'=2y+z+2e^x, \\ z'=y+2z-3e^{4x}. \end{cases}$

Решить системы дифференциальных уравнений:

7. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=3-2y \\ \dfrac{dy}{dt}=2x-2t \end{cases}$

8. $\begin{cases} x'+x-8y=0, \\ y'-x-y=0. \end{cases}$

Вариант 19

Решить задачу Коши:

1. $y''y^3+16=0,\ y(1)=2,\ y'(1)=2$.

Решить дифференциальные уравнения:

2. $y''\operatorname{tg}x=y'+1$;
3. $7y''-y'=12x$;
4. $y''+y=2\cos 3x-3\sin 3x$;
5. $y''+2y'+y=3e^{-x}\sqrt{x+1}$.

Найти решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=-1, z(0)=1$:

6. $\begin{cases} y'=4y-3z+\sin x, \\ z'=2y-z-2\cos x. \end{cases}$

Решить системы дифференциальных уравнений:

7. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=x-y+8t \\ \dfrac{dy}{dt}=5x-y \end{cases}$
8. $\begin{cases} x'=3x+8y \\ y'=-3y-x \end{cases}$

Вариант 20

Решить задачу Коши:

1. $y''+32\sin y\cos^3 y=0,\ y(0)=0,\ y'(0)=4$.

Решить дифференциальные уравнения:

2. $y''\operatorname{tg}5x=5y'$;
3. $y''+4y'+13y=2x^2-1$;
4. $y''+4y'+4y=x-x^2$;
5. $4y''+y=\operatorname{ctg}^2\dfrac{x}{2}$

Найти решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=-1, z(0)=1$:

6. $\begin{cases} y'=-4y-2z+\dfrac{2}{e^x+1}, \\ z'=6y+3z-\dfrac{3}{e^x+1}. \end{cases}$

Решить системы дифференциальных уравнений:

7. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}+2y=3t \\ \dfrac{dy}{dt}-2x=4 \end{cases}$
8. $\begin{cases} x'=x+y \\ y'=3y-2x \end{cases}$

Вариант 21

Решить задачу Коши:

1. $y''=50\sin^3 y\cos y,\ y(1)=\dfrac{\pi}{2},\ y'(1)=5.$

Решить дифференциальные уравнения:

2. $y''\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=y'$;

3. $y''+6y'+9y=(16x+24)e^x$;

4. $y''+2y'+5y=-2\sin x$;

5. $y''-y=\dfrac{1}{1+e^x}$.

Найти решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее начальным условиям $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-1, z\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$:

6. $\begin{cases} y'=y-z+\dfrac{1}{\sin x}, \\ z'=2y-z. \end{cases}$

Решить системы дифференциальных уравнений:

7. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}+2x-4y=0 \\ \dfrac{dy}{dt}+x-3y=3t^2 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x'=-7x+y \\ y'=-5y-2x \end{cases}$

Вариант 22

Решить задачу Коши:

1. $y''=18y^3,\ y(1)=1,\ y'(1)=3.$

Решить дифференциальные уравнения:

2. $x^3y''+x^2y'=\sqrt{x}$;

3. $y''-4y'=32-384x^2$;

4. $y''-4y'+4y=e^{2x}\sin 5x$;

5. $y''-6y'+9y=e^{3x}(x+1).$

Найти решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=-1, z(0)=1$:

6. $\begin{cases} y' = \dfrac{x}{z}, \\ z' = -\dfrac{x}{y}. \end{cases}$

Решить системы дифференциальных уравнений:

7. $\begin{cases} x' = y - x + e^t \\ y' = x - y + e^t \end{cases}$ 8. $\begin{cases} x' = 2x - 5y \\ y' = 5x - 6y \end{cases}$

Вариант 23

Решить задачу Коши:

1. $y''y^3 + 9 = 0,\ y(1) = 1,\ y'(1) = 3$.

Решить дифференциальные уравнения:

2. $y''\operatorname{ctg} x + y' = -\dfrac{1}{\cos x}$;
3. $y'' - 2y' - 3y = (8x - 14)e^{-x}$;
4. $y'' - 4y' + 8y = e^x(3\sin x + 5\cos x)$;
5. $9y'' - 6y' + y = \dfrac{e^{x/3}}{x}$.

Найти решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее начальным условиям $y(1)=4, z(1)=2$:

6. $\begin{cases} y' = \dfrac{2x}{1+x^2}y, \\ z' = -\dfrac{1}{x}z + y + x. \end{cases}$

Решить системы дифференциальных уравнений:

7. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - 5\cos t \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y \end{cases}$ 8. $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 4y - x \end{cases}$

Вариант 24

Решить задачу Коши:

1. $y^3y'' = 4(y^4 - 1),\ y(0) = \sqrt{2},\ y'(0) = \sqrt{2}$.

Решить дифференциальные уравнения:

2. $(x+1)y''+y'=x+1$;

3. $y''+2y'+y=2-3x^2$;

4. $y''+2y'+5y=-17\sin 2x$;

5. $y''+y=\dfrac{1}{\sin^3 x}$.

Найти решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее начальным условиям $y(1)=-1, z(1)=1$:

6. $\begin{cases} xy'=y, \\ z'=y+z. \end{cases}$

Решить системы дифференциальных уравнений:

7. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=1-2y \\ \dfrac{dy}{dt}=2x-\sin 2t \end{cases}$

8. $\begin{cases} x'=3x-y \\ y'=4x-y \end{cases}$

Вариант 25

Решить задачу Коши:

1. $y''+4y=\dfrac{4}{\cos 2x}, \; y(0)=2, \; y'(0)=0$.

Решить дифференциальные уравнения:

2. $(1+\sin x)y''=y'\cos x$;

3. $y''+4y'+4=(9x+15)e^x$;

4. $y''-3y'+7y=xe^{-3x}$;

5. $9y''+y=\mathrm{tg}^2\dfrac{x}{3}$.

Найти решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=-1, z(0)=1$:

6. $\begin{cases} y'=z, \\ z'=\dfrac{z^2}{y}. \end{cases}$

Решить системы дифференциальных уравнений:

7. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=2y-5x \\ \dfrac{dy}{dt}=x-6y+e^{-2t} \end{cases}$

8. $\begin{cases} x'=2y-3x \\ y'=y-2x \end{cases}$

Вариант 26

Решить задачу Коши:

1. $y''+y'=\dfrac{e^x}{2+e^x},\ y(0)=\ln 27,\ y'(0)=1-\ln 9$.

Решить дифференциальные уравнения:

2. $xy''-y'=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$;
3. $y''-5y'+6y=(x-1)^2$;
4. $y''+\dfrac{y}{4}=x^2-1$;
5. $y''+9y=\mathrm{ctg}3x$.

Найти решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=-1, z(0)=1$:

6. $\begin{cases} y'=y^2+z, \\ z'=-2yy'+y. \end{cases}$

Решить системы дифференциальных уравнений:

7. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=-6x+3y+t \\ \dfrac{dy}{dt}=-4x+2y \end{cases}$

8. $\begin{cases} x'-5x-3y=0 \\ y'+3x+y=0 \end{cases}$

Вариант 27

Решить задачу Коши:

1. $y''y^3+4=0,\ y(0)=-1,\ y'(0)=-2$.

Решить дифференциальные уравнения:

2. $-xy''+2y'=\dfrac{2}{x^2}$;
3. $y''+3y'=x^3+1$;
4. $y''+y=2\cos 7x-3\sin 7x$;
5. $y''+8y'+16y=e^{-4x}\dfrac{\ln x}{x}$.

Найти решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=-1, z(0)=1$:

6. $\begin{cases} y'=\dfrac{y}{z}, \\ z'=y. \end{cases}$

Решить системы дифференциальных уравнений:

7. $\begin{cases} x'=3x-2y+t \\ y'=3x-4y \end{cases}$

8. $\begin{cases} x'=x-4y \\ y'=x-3y \end{cases}$

Вариант 28

Решить задачу Коши:

1. $y''=2\sin^3 y\cos y,\ y(1)=\dfrac{\pi}{2},\ y'(1)=1$.

Решить дифференциальные уравнения:

2. $xy''=y'\ln\dfrac{y'}{x}$;

3. $y''-4y=5xe^{-x}$;

4. $y''-9y'+18y=(x-1)e^{3x}$;

5. $y''+2y'+y=\dfrac{\ln(x+2)}{\sqrt{x}}e^{-x}$.

Найти решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=-1, z(0)=1$:

6. $\begin{cases} y'=4y-3z+\sin x, \\ z'=2y-z-2\cos x. \end{cases}$

Решить системы дифференциальных уравнений:

7. $\begin{cases} x'=-x+4y+t \\ y'=3x-5y \end{cases}$

8. $\begin{cases} x'=3x-2y \\ y'=4x+7y \end{cases}$

Вариант 29

Решить задачу Коши:

1. $y^3y''=-1,\ y(1)=1,\ y'(1)=0$.

Решить дифференциальные уравнения:

2. $y''=\dfrac{y'}{x}+x$;

3. $y''-4y'-5y=(1-x)e^{-2x}$;

4. $y''+10y'+26y=-3\sin x$;

5. $y''-4y'+4y=\dfrac{e^{2x}}{\sqrt{1+3x}}$.

Найти решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=-1, z(0)=1$:

6. $\begin{cases} y'=2y-3z+e^{x}, \\ z'=y-2z+2\sin x. \end{cases}$

Решить системы дифференциальных уравнений:

7. $\begin{cases} x'=2x+4y+t \\ y'=5x+3y \end{cases}$

8. $\begin{cases} x'=-x+2y \\ y'=-2x-5y \end{cases}$

Вариант 30

Решить задачу Коши:

1. $2y''=3y^2,\ y(-2)=1,\ y'(-2)=-1$.

Решить дифференциальные уравнения:

2. $xy''=y'\ln\dfrac{y'}{x}$;

3. $y''+y'-6y=(x+2)e^{2x}$;

4. $y''+8y'+17y=-5\cos x$;

5. $y''+6y'+9y=\dfrac{\sqrt{x+1}}{e^{3x}}$.

Найти решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=-1, z(0)=1$:

6. $\begin{cases} y'=y+2z+16xe^x, \\ z'=2y-2z+x. \end{cases}$

Решить системы дифференциальных уравнений:

7. $\begin{cases} x'=2x+y+t \\ y'=2x+3y \end{cases}$

8. $\begin{cases} x'=-7x+y \\ y'=-2x-5y \end{cases}$

8. ЗАДАНИЯ ПО ТЕМЕ: ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

Примерный вариант заданий с решением

1. Проверить выполнение необходимого признака сходимости ряда:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\cdot\sin^2\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right).$;   б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}}{\ln n}.$

2. Исследовать ряды на сходимость.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(3n+1)\cdot\ln(3n+1)}.$;   б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^5+2}}.$;   в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{n+1}{2^n(n-1)}.$

3. Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{2n+1}{n(n+1)}.$;   б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\dfrac{\pi}{2^n}.$

4. Найти область сходимости ряда:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{(n+1)!}.$;   б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+4)^n}{3^n\cdot\sqrt{4n+1}}.$

5. Вычислить приближенно с точностью $\varepsilon=0,01$ интеграл:

$$\int\limits_0^{0,4}\frac{1-e^{-\frac{x}{2}}}{x}dx.$$

Решение

1. а) Общий член данного ряда: $u_n=\sqrt{n}\cdot\sin^2\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right).$

Необходимым признаком сходимости ряда является: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0.$

Найдём указанный предел:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \cdot \sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = [\infty \cdot 0] = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \cdot \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \cdot$$

$$\cdot \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1 \cdot 0 = 0;$$

(так как $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ – первый замечательный предел).

Ответ: необходимый признак сходимости исходного ряда выполняется.

1. б) Общий член данного ряда: $u_n = \frac{\sqrt[3]{n^2}}{\ln n}$.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}}{\ln n} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\sqrt[3]{n^2}\right)'}{(\ln n)'} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{2}{3} \cdot n^{-\frac{1}{3}}}{\frac{1}{n}} = \frac{2}{3} \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3} \lim_{n\to+\infty} \sqrt[3]{n^2} = +\infty \neq 0.$$

Ответ: необходимый признак сходимости исходного ряда не выполняется.

2. а) Применим интегральный признак Коши–Маклорена.

Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{(3x+1)\ln(3x+1)}$ при $x \in [1;+\infty)$.

Проверим выполнение условий теоремы интегрального признака Коши–Маклорена:

- $f(x) > 0$ при $x \in [1;+\infty)$;
- $f(x)-$непрерывна при $x \in [1;+\infty)$;
- $f(x)-$ монотонно убывает при $x \in [1;+\infty)$,

так как $f'(x) = -\frac{3(\ln(3x+1)+1)}{(3x+1)^2 \ln^2(3x+1)} < 0$ при $x \in [1;+\infty)$.

Так как выполнены все условия указанной теоремы, то можно применить интегральный признак Коши–Маклорена:

$$I = \int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(3x+1)\ln(3x+1)} = \frac{1}{3} \lim_{\beta\to+\infty} \left(\int_1^{\beta} \frac{d(3x+1)}{\ln(3x+1)} \right) = \frac{1}{3} \lim_{\beta\to+\infty} \left(\ln\left|\ln(3x+1)\right| \Big|_1^{\beta} \right) =$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{\beta\to+\infty} \left(\ln\left|\ln(3\beta+1)\right| - \ln\left|\ln 4\right| \right) = +\infty \Rightarrow I - \text{расходится} \Rightarrow \text{исходный ряд расходится}.$$

Ответ: расходится.

2. б) Общий член данного ряда: $u_n = \dfrac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^5+2}}$.

Рассмотрим вспомогательный ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^5}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{5}{2}-\frac{1}{3}}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{13}{6}}}$$ – это ряд Дирихле

с показателем $p = \dfrac{13}{6} > 1 \Rightarrow$ этот ряд сходится, его общий член $v_n = \dfrac{1}{n^{\frac{13}{6}}}$.

Применим предельный признак сравнения данного и вспомогательного рядов:

$$q = \lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{n}\cdot n^{\frac{13}{6}}}{\sqrt{n^5+2}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{n}\cdot\sqrt{n^5}}{\sqrt{n^5+2}\cdot\sqrt[3]{n}} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{n^5}{n^5+2}} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{1+\frac{2}{n^5}}} = 1 \neq 0 \Rightarrow$$

исходный и вспомогательный ряды эквивалентны с точки зрения сходимости. Учитывая, что второй эталонный ряд, взятый для сравнения, является сходящимся, то и исходный ряд тоже сходится.

Ответ: сходится.

2. в) Применим признак Д'Аламбера.

$$u_n = \frac{n+1}{2^n(n-1)}, \quad u_{n+1} = \frac{(n+1)+1}{2^{n+1}((n+1)-1)} = \frac{n+2}{2\cdot 2^n\cdot n}.$$

$$q = \lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n+2}{2\cdot 2^n\cdot n}\cdot\frac{2^n(n-1)}{n+1} = \frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty}\frac{n+2}{n+1}\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{n-1}{n} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$$ ряд

сходится.

Ответ: сходится.

3. а)

1) Исходный ряд является знакочередующимся.

Составим для него абсолютный ряд: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+1}{n(n+1)}$, $u_n = \dfrac{2n+1}{n(n+1)}$ и исследуем его на сходимость.

Рассмотрим вспомогательный ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}-$ это расходящийся гармонический ряд, его общий член $v_n=\frac{1}{n}$.

Применим предельный признак сравнения абсолютного и вспомогательного рядов:

$q=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(2n+1)n}{n(n+1)}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n+1}{n+1}=2\neq 0\ \Rightarrow$ абсолютный ряд расходится, так как проводили сравнение с расходящимся рядом. А значит исходный ряд не сходится абсолютно.

2) Исследуем исходный ряд на условную сходимость.

Проверим выполнение условий теоремы признака Лейбница:

$$*\ \lim_{n\to+\infty}u_n=0;\qquad **\ u_n>u_{n+1}.$$

$*\ \lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}}=\left[\frac{0}{1}\right]=0\Rightarrow$ первое условие выполнено;

** Для проверки второго условия рассмотрим функцию

$$f(x)=\frac{2x+1}{x(x+1)}=\frac{2x+1}{x^2+x}$$

Исследуем эту функцию на монотонность:

$f'(x)=\frac{2(x^2+x)-(2x+1)^2}{(x^2+x)^2}=-\frac{2x^2+2x+1}{(x^2+x)^2}<0,$ при $x\geq 1,$ а так как $f(n)=u_n,$ то $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$ является монотонно убывающей $\Rightarrow\ u_n>u_{n+1}$.

Значит, все условия теоремы признака Лейбница выполнены $\Rightarrow$ исходный ряд сходится условно.

Ответ: сходится условно.

3. б)

1) Исходный ряд является знакочередующимся.

Составим для него абсолютный ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^n}$, $u_n=\sin\frac{\pi}{2^n}$ и исследуем его на сходимость.

Рассмотрим вспомогательный ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{2^n}$ – составленный из членов геометрической прогрессии с общим членом $v_n = \frac{\pi}{2^n}$ и знаменателем $q = \frac{1}{2} < 1$, а значит ряд сходится.

Применим первый признак сравнения абсолютного и вспомогательного рядов. Так как $u_n = \sin\frac{\pi}{2^n} < v_n = \frac{\pi}{2^n}$ при $n \geq 1$, то абсолютный ряд сходится $\Rightarrow$ исходный ряд сходится абсолютно.

Ответ: сходится абсолютно.

4. а) Исследуем на сходимость исходный ряд по признаку Д'Аламбера.

$$q = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+2)!}\cdot\frac{(n+1)!}{x^n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x^n\cdot x\cdot(n+1)!}{x^n\cdot(n+2)\cdot(n+1)!}\right| = |x|\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+2} = 0 < 1$$

при всех значениях x $\Rightarrow$ исходный ряд сходится при любом $x\in(-\infty;+\infty)$.

Ответ: $x\in(-\infty;+\infty)$.

4. б) Общий член исходного ряда $u_n(x) = \frac{(x+4)^n}{3^n\cdot\sqrt{4n+1}}$. (1)

1) Применим признак Д'Аламбера для нахождения интервала сходимости исходного ряда:

$$q = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(x+4)^{n+1}\cdot 3^n\cdot\sqrt{4n+1}}{(x+4)^n\cdot 3^{n+1}\cdot\sqrt{4n+5}}\right| = \frac{|x+4|}{3}\cdot\sqrt{\lim_{n\to+\infty}\frac{4+\frac{1}{n}}{4+\frac{5}{n}}} = \frac{|x+4|}{3} < 1 \Rightarrow |x+4| < 3 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow\ -3 < x+4 < 3 \Leftrightarrow -7 < x < -1 \Leftrightarrow x\in(-7;-1)$ – интервал сходимости ряда (1).

2) Исследуем ряд (1) на сходимость в точке $x=-7$:

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-7+4)^n}{3^n\cdot\sqrt{4n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{4n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot b_n$ – это знакочередующийся ряд.

Составим его абсолютный ряд (3) $\sum_{n=1}^{\infty}b_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4n+1}}$.

Сравним ряд (3) с рядом (4) $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ – это положительный ряд Дирихле с показателем $p = \frac{1}{2} < 1$, а значит ряд (4) расходится.

Найдем предел: $\lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{v_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{4n+1}} = \frac{1}{2} \neq 0 \Rightarrow$ по 2-му признаку сравнения рядов с положительными членами, ряд (3) расходится $\Rightarrow$ ряд (2) не сходится абсолютно.

Исследуем ряд (2) на условную сходимость по признаку Лейбница:

а) $\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{4n+1}} = 0$ – верно;

б) Рассмотрим функцию $f(t) = \frac{1}{\sqrt{4t+1}}$, $D(f) = \left(-\frac{1}{4};+\infty\right)$.

Исследуем ее на монотонность:

$f'(t) = -\frac{2}{\sqrt{(4t+1)^3}} < \forall t \in [1;+\infty), D(f') = \left(-\frac{1}{4};+\infty\right)$, а так как $f(n) = b_n$,

то последовательность $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонно убывает.

Тогда по признаку Лейбница ряд (2) сходится условно $\Rightarrow x = -7 \in D(x)$.

3) Исследуем ряд (1) на сходимость в точке $x = -1$:

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1+4)^n}{3^n \cdot \sqrt{4n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ – этот ряд расходится (установили в п. 2) $\Rightarrow x = -1 \notin D(x)$.

Ответ: $D(x) = [-7;-1)$.

5. Разложим функцию $e^{-\frac{x}{2}}$ в ряд Маклорена:

$$e^{-\frac{x}{2}} = 1 + \left(-\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2!}\left(-\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(-\frac{x}{2}\right)^3 + \frac{1}{4!}\left(-\frac{x}{2}\right)^4 + \ldots = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{48} + \frac{x^4}{384} - \ldots$$

Тогда:

$$\int_0^{0,4}\frac{1-e^{-\frac{x}{2}}}{x}dx=\int_0^{0,4}\frac{1-\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{48}+\frac{x^4}{384}-\ldots\right)}{x}dx=\ldots=\frac{1}{2}\int_0^{0,4}\left(1-\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{24}-\frac{x^4}{192}+\ldots\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{72}-\frac{x^4}{768}+\ldots\right)\Bigg|_0^{0,4}=\frac{1}{2}\left(0,4-\frac{0,16}{8}+\frac{0,064}{72}-\frac{0,0256}{768}+\ldots\right)=\ldots\approx 0,19$$

с точностью $\varepsilon=0,01$, так как весь «хвост» ряда, начиная с 0,00044, – сходящийся знакочередующийся ряд, а значит, (по признаку Лейбница) сумма его не превзойдет по величине первого члена – 0,00044 < 0,01.

Ответ: $\int\limits_0^{0,4}\frac{1-e^{-\frac{x}{2}}}{x}dx\approx 0,19.$

Варианты заданий для самостоятельного решения (1–30)

Вариант 1

1. Проверить выполнение необходимого признака сходимости ряда:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2\cdot\sin\left(\frac{1}{n^2}\right).$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n^3}}.$

2. Исследовать ряды на сходимость:

а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln^4 n}.$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}+1}{\sqrt{n^7+n}}.$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^{10}}{n!}.$

3. Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{5^n}.$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{\sqrt{n^3+1}}.$

4. Найти область сходимости ряда:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{2^n\cdot\sqrt{n^2+5}}.$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!x^n.$

5. Вычислить приближенно с точностью $\varepsilon=0,001$ интеграл: $\int\limits_0^{0,1}\frac{1-e^{-2x}}{x}dx.$

Вариант 2

1. Проверить выполнение необходимого признака сходимости ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\left(arctgn-\frac{\pi}{2}\right).$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n^2+n}}.$

2. Исследовать ряды на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(3n+2)}{3n+2}.$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-2}{n^4+4n^3+5n^2}.$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{2n+3}.$

3. Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{\pi}{n^2}.$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2+2}{\sqrt{n^5+n}}.$

4. Найти область сходимости ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{3^n\cdot\sqrt[3]{n^3+1}}.$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$

5. Вычислить приближенно с точностью $\varepsilon=0,001$ интеграл: $\int_0^1\frac{\ln\left(1+\frac{x}{5}\right)}{x}dx.$

Вариант 3

1. Проверить выполнение необходимого признака сходимости ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2\cdot arcctgn.$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{5n^2+3n}.$

2. Исследовать ряды на сходимость:

а) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\left(\ln^2 n-25\right)}.$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+1}{\sqrt{7n^5+n}}.$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+n^2}{5^n}.$

3. Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n}{n!}.$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3n-2}{\sqrt{n^3+4}}.$

4. Найти область сходимости ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^n}{4^n\cdot(2n+7)}.$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^n}.$

5. Вычислить приближенно с точностью $\varepsilon=0,001$ интеграл: $\int_0^{0,2}\sin 25x^2dx.$

Вариант 4

1. Проверить выполнение необходимого признака сходимости ряда:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[3]{n}\cdot\sin^2\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}\right).$ б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{\ln\sqrt{n}}.$

2. Исследовать ряды на сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{arcctgn}{n^2+1}.$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt[4]{n^3}}{\sqrt{n^3+3}}.$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2+5}{(n+2)!}.$

3. Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость:

а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n\ln^3 n}.$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{2n+1}{n^2+1}.$

4. Найти область сходимости ряда:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-4)^n}{3^n\sqrt[2]{n^2+1}}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{n+1}x^n.$

5. Вычислить приближенно с точностью $\varepsilon=0,001$ интеграл: $\int\limits_0^1\cos x^2dx.$

Вариант 5

1. Проверить выполнение необходимого признака сходимости ряда:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)\cdot\sin\left(\dfrac{1}{n+1}\right).$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n^2+3n+1}{6n^3+5}.$

2. Исследовать ряды на сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(3n+2)\cdot\ln^2(3n+2)}.$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{\sqrt{n^7+5}}.$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{7^{2n}}{9n+2}.$

3. Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}.$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}tg\,\dfrac{5}{\sqrt{n}}.$

4. Найти область сходимости ряда:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(x-5)^n}{5^n\cdot(3n-2)}.$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{(n+3)!}.$

5. Вычислить приближенно с точностью $\varepsilon=0,001$ интеграл: $\int\limits_0^{0,1}e^{-6x^2}dx.$

Вариант 6

1. Проверить выполнение необходимого признака сходимости ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\left(arctg\sqrt{n}-\frac{\pi}{2}\right).$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^2+1}}.$

2. Исследовать ряды на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}.$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n-3}{\sqrt{2n^3+1}}.$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{2n}}{(n+1)!}.$

3. Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^{n+1}}{n!}.$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{2n+1}{n(5n+3)}.$

4. Найти область сходимости ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+7)^n}{7^n\cdot\sqrt[3]{8n^3+1}}.$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)^n(x+1)^n.$

5. Вычислить приближенно с точностью $\varepsilon=0,001$ интеграл: $\int_0^{0,2}\frac{1-e^{-x}}{x}dx.$

Вариант 7

1. Проверить выполнение необходимого признака сходимости ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2\cdot arcctgn^2.$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{n^2+2}.$

2. Исследовать ряды на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{\ln^3(7n-6)}}{7n-6}.$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\sqrt{5n^7+3}}.$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n}{(2n-1)!}.$

3. Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{\sqrt{(3n-1)^3}}.$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\sin\frac{\pi}{n^2}.$

4. Найти область сходимости ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-7)^n}{6^n\cdot(5n-2)}.$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)!(x+1)^n.$

5. Вычислить приближенно с точностью $\varepsilon=0,001$ интеграл:

$$\int_0^{0,4}\frac{\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)}{x}dx.$$

Вариант 8

1. Проверить выполнение необходимого признака сходимости ряда:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^3 \cdot \sin^2 \frac{1}{n^3}$ б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n^3}{\ln n^2}.$

2. Исследовать ряды на сходимость:

а) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2 \cos^2 \frac{\pi}{n}}.$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{\sqrt{2n^3+3}}.$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{10n+1}{(3n+2)!}.$

3. Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5^{n-2}}{(n+1)!}.$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+3}{\sqrt{3n^3+1}}.$

4. Найти область сходимости ряда:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{3^n \cdot \sqrt[4]{2n^4+3}}.$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{(2n+1)!}.$

5. Вычислить приближенно с точностью $\varepsilon = 0,001$ интеграл: $\int\limits_0^{0,5} \cos(4x^2)dx.$

Вариант 9

1. Проверить выполнение необходимого признака сходимости ряда:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot \left(arctgn - \frac{\pi}{2} \right).$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^5}}$

2. Исследовать ряды на сходимость:

а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \sin \frac{\pi}{n}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{\sqrt{n^3+4}}.$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2n+3}.$

3. Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{2^n}.$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{\sqrt{2n^5+1}}.$

4. Найти область сходимости ряда:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^n}{3^n \cdot \sqrt{4n^2-1}}.$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{(n+1)^n}.$

5. Вычислить приближенно с точностью $\varepsilon = 0,001$ интеграл: $\int\limits_0^{0,1} \sin(100x^2)dx.$

Вариант 10

1. Проверить выполнение необходимого признака сходимости ряда:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\cdot arcctg\sqrt{n}.$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4\sqrt{n}+7}{2n+1}.$

2. Исследовать ряды на сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}\cos\frac{1}{n}.$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+2}}{n+5n^2}.$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7n-2}{(2n+3)!}.$

3. Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4^n}{(2n+7)!}.$ б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n\ln n}.$

4. Найти область сходимости ряда:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{5^n\cdot\sqrt{6n-5}}.$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{n+1}(x+2)^n.$

5. Вычислить приближенно с точностью $\varepsilon=0,001$ интеграл: $\int\limits_0^{0,2}e^{-3x^2}dx.$

Вариант 11

1. Проверить выполнение необходимого признака сходимости ряда:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\cdot tg\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^7}}.$

2. Исследовать ряды на сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(8n-3)\cdot\sqrt{\ln(8n-3)}}.$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4n+7}{3n^3+n}.$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{2^n}.$

3. Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{5n+1}{3^n}.$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+3}{n^2+4}.$

4. Найти область сходимости ряда:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x+1)^n}{6^n\cdot\sqrt{4n^2+7}}.$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{(n+1)!}.$

5. Вычислить приближенно с точностью $\varepsilon=0,001$ интеграл: $\int\limits_0^{0,2}\frac{1-e^{-\frac{x}{4}}}{x}dx.$

Вариант 12

1. Проверить выполнение необходимого признака сходимости ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 \cdot \left(arctgn - \frac{\pi}{2} \right).$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^3+2}}.$

2. Исследовать ряды на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2} e^{-\frac{1}{n}}.$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{1+n^4}}{n^2+3n+4}.$ в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (3n-2)}{2^n}$

3. Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n+2}{5^n}.$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln \sqrt{n}}{n}.$

4. Найти область сходимости ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{3^n \cdot (4n+1)}.$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{n+1} (x+3)^n .$

5. Вычислить приближенно с точностью $\varepsilon = 0,001$ интеграл:

$$\int_0^{0,1} \frac{\ln(1+2x)}{x} dx.$$

Вариант 13

1. Проверить выполнение необходимого признака сходимости ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \cdot arcctgn.$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^3+5n+7}{4n^3+5}.$

2. Исследовать ряды на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{(2n+5) \cdot \ln^7 (2n+5)}.$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{\sqrt{4n^9+5}}.$ в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n-1}}{5n-2}.$

3. Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{7n+2}{(2n+1)!}.$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5n+1}{\sqrt{4n^3+7}}.$

4. Найти область сходимости ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+5)^n}{5^n \cdot (3n+2)}.$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)! \cdot (x-2)^n.$

5. Вычислить приближенно с точностью $\varepsilon = 0,001$ интеграл: $\int_0^{0,5} \sin 4x^2 dx.$

Вариант 14

1. Проверить выполнение необходимого признака сходимости ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n^3}\cdot tg^2\left(\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right).$ б) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2+1}}{\ln n}.$

2. Исследовать ряды на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{arcctg\left(3n+2\right)}}{1+\left(3n+2\right)^2}.$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n+5}{2n^3+n-1}.$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{2n}}{1000n}.$

3. Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n\left(n+2\right)}.$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{7n+3}{n\left(9n+2\right)}.$

4. Найти область сходимости ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{3^n\cdot\sqrt[3]{8n^4-7}}.$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(x+1\right)^n}{\left(2n-1\right)!}.$

5. Вычислить приближенно с точностью $\varepsilon=0,001$ интеграл: $\int_0^{0,2}\cos 25x^2dx.$

Вариант 15

1. Проверить выполнение необходимого признака сходимости ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\cdot\left(arctg\sqrt{n}-\frac{\pi}{2}\right).$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2+n}.$

2. Исследовать ряды на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n\sqrt{\ln^2 n+4}}.$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^3+3}}{5n^5+2n}.$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{\left(n+1\right)!}.$

3. Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{5^n}{\left(2n-1\right)!}.$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{\ln\left(n+1\right)}.$

4. Найти область сходимости ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{2^n\cdot\sqrt[4]{\left(5n+2\right)^3}}.$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(x-1\right)^n}{\left(n+1\right)^n}.$

5. Вычислить приближенно с точностью $\varepsilon=0,001$ интеграл: $\int_0^{0,3}e^{-2x^2}dx.$

Вариант 16

1. Проверить выполнение необходимого признака сходимости ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 \cdot arcctg n^2.$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{n^2+3n}.$

2. Исследовать ряды на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{n^2}}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{2n^3+3}.$ в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{(n+1)!}.$

3. Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{n-2}(5n+1)}.$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{n}.$

4. Найти область сходимости ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+9)^n}{10^n \cdot \sqrt[4]{2n^3+7}}.$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{(n+2)!}.$

5. Вычислить приближенно с точностью $\varepsilon = 0{,}001$ интеграл: $\int_0^{0,2} \frac{1-e^{-3x}}{x} dx.$

Вариант 17

1. Проверить выполнение необходимого признака сходимости ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} (n+2)\cdot \arcsin\left(\frac{1}{n+2}\right).$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{16n-7}{4\sqrt{n^3}-1}.$

2. Исследовать ряды на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2} tg\left(\frac{2}{n}\right).$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2n+3}{\sqrt{n^5+3n}-1}.$ в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{e^n}.$

3. Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{7}{(n+1)\sqrt{n+2}}.$ б) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{9}{n\ln n}.$

4. Найти область сходимости ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{4^n \cdot \sqrt[4]{n^2+8}}.$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)!(x-2)^n.$

5. Вычислить приближенно с точностью $\varepsilon = 0{,}001$ интеграл:

$\int_0^{0,1} \frac{\ln(1+3x)}{x} dx.$

Вариант 18

1. Проверить выполнение необходимого признака сходимости ряда:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot \left(1-\cos\frac{1}{n}\right).$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{7n^2+3}{\sqrt{n^5+2n}}.$

2. Исследовать ряды на сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{7}{(2n+1)\sqrt[3]{\ln^4(2n+1)}}.$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{(n+2)^3}}{(5n+4)(3n+1)}.$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(2n)!}.$

3. Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1+n^2}{\sqrt{n+n^7}}.$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{1+n\sqrt{n}}.$

4. Найти область сходимости ряда:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+8)^n}{7^n \cdot \sqrt[3]{4n^3+5}}.$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n!}.$

5. Вычислить приближенно с точностью $\varepsilon = 0,001$ интеграл: $\int\limits_0^{0,4} \sin\frac{25x^2}{4}dx.$

Вариант 19

1. Проверить выполнение необходимого признака сходимости ряда:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - arctg\sqrt{n}\right).$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{5\ln n^2+3}.$

2. Исследовать ряды на сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{21}{(n^2+1)arctgn}.$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n^3+1}}{7n^5+n}.$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{6n+5n^2}{(n+2)!}.$

3. Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3n-1}{n!}.$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n-2}{(4n-1)(5n+6)}.$

4. Найти область сходимости ряда:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+3)^n}{2^n \cdot (7n+2)}.$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n^{n+1}}.$

5. Вычислить приближенно с точностью $\varepsilon = 0,001$ интеграл: $\int\limits_0^{0,1} \cos 100x^2 dx.$

Вариант 20

1. Проверить выполнение необходимого признака сходимости ряда:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^3 arcctgn.$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}.$

2. Исследовать ряды на сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^{-2}}}{n^3}.$ б) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} tg\,\frac{\pi}{n}.$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{(2n-1)!}.$

3. Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{n^2(1+n)}.$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{5n-4}{n^2+3}.$

4. Найти область сходимости ряда:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{5^n \cdot \sqrt[3]{n^3+4}}.$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (n+1)^n (x+1)^n.$

5. Вычислить приближенно с точностью $\varepsilon = 0,001$ интеграл: $\int\limits_0^{0,5} e^{-\frac{3x^2}{25}} dx.$

Вариант 21

1. Проверить выполнение необходимого признака сходимости ряда:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^4 \cdot \left(1-\cos\frac{1}{n^2}\right).$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+2n+1}{6n^3+2n^2+4n+5}.$

2. Исследовать ряды на сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n^2+1)\,\mathrm{arctg}^2 n}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-7}{n^7+5n}.$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4n-3}{\sqrt{n \cdot 2^n}}.$

3. Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5n+1}{4^n}.$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{5n+2}{n^2+3n-1}.$

4. Найти область сходимости ряда:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+3)^n}{3^n \cdot (3n-2)}.$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{(n+3)!}.$

5. Вычислить приближенно с точностью $\varepsilon = 0,001$ интеграл: $\int\limits_0^{0,3} \frac{1-e^{-5x}}{x} dx.$

Вариант 22

1. Проверить выполнение необходимого признака сходимости ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n^2} \cdot \left(arctgn - \frac{\pi}{2} \right).$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2+3}{n^2+n-1}.$

2. Исследовать ряды на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n^2} \sin\left(\frac{3}{n}\right).$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+3}{n\sqrt{n}+2n-1}.$ в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+11}{5^{2n}}.$

3. Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{3n^3+1}.$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4n-3}{(3n+1)(n+3)}.$

4. Найти область сходимости ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{7^n \cdot \sqrt{4n^2+1}}.$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} (n+2)!(x+7)^n.$

5. Вычислить приближенно с точностью $\varepsilon = 0{,}001$ интеграл:

$$\int_0^{0,3} \frac{\ln\left(1+\frac{x}{3}\right)}{x} dx.$$

Вариант 23

1. Проверить выполнение необходимого признака сходимости ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n} \cdot arcctg \sqrt[3]{n}.$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n^3}}.$

2. Исследовать ряды на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2} \cos\left(\frac{2}{n}\right).$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2-1}{(n+2)^2 (n+3)^2}.$ в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}.$

3. Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{7^n}{n!}.$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n tg \frac{1}{\sqrt{n}}.$

4. Найти область сходимости ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+7)^n}{6^n \cdot (8n-2)}.$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} (n-1)!(x-1)^n.$

5. Вычислить приближенно с точностью $\varepsilon = 0{,}001$ интеграл: $\int_0^1 \sin \frac{x^2}{4} dx.$

Вариант 24

1. Проверить выполнение необходимого признака сходимости ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\left(e^{n^{-2}}-1\right).$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n\sqrt{n}-1}{2n+\sqrt{n^3}}.$

2. Исследовать ряды на сходимость:

а) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{10}{n^2\sin^2\frac{\pi}{n}}.$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n+9}{3+2n^2\sqrt{n}}.$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{3n+2}.$

3. Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3n+5}{n^3+4}.$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{n\cdot 3^n}}{3n+1}.$

4. Найти область сходимости ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{4^n\cdot\sqrt[4]{16n^4-3}}.$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+7)^n}{(2n+1)!}.$

5. Вычислить приближенно с точностью $\varepsilon=0,001$ интеграл: $\int_0^{0,4}\cos\frac{25x^2}{4}dx.$

Вариант 25

1. Проверить выполнение необходимого признака сходимости ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}n^2\cdot\arcsin\left(\frac{1}{n^2}\right).$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lg n}{7^n}.$

2. Исследовать ряды на сходимость:

а) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\sqrt[7]{\ln^4 n}}.$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n+1}{3+n^2+4n^3}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n\cdot 7^n}}.$

3. Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{7n+1}{9^n}.$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{7n-3}{\sqrt{n^3+2}}.$

4. Найти область сходимости ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-4)^n}{12^n\cdot\sqrt{9n^2-5}}.$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-7)^n}{n^n}.$

5. Вычислить приближенно с точностью $\varepsilon=0,001$ интеграл: $\int_0^{0,4}e^{-\frac{3x^2}{4}}dx.$

Вариант 26

1. Проверить выполнение необходимого признака сходимости ряда:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot arctg\,\frac{1}{n}.$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n^7}}.$

2. Исследовать ряды на сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{arctg^6(3n+2)}{1+(3n+2)^2}.$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{5n^4+2n^3+7n^2}.$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(2n+3)!}.$

3. Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin^2 \frac{1}{n}.$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n^2+2}{\sqrt{9n^4+7n}}.$

4. Найти область сходимости ряда:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{3^n \cdot \sqrt[3]{n^3+1}}.$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!(x-7)^n.$

5. Вычислить приближенно с точностью $\varepsilon = 0,001$ интеграл: $\int\limits_0^{0,2} \frac{1-e^{-\frac{x}{4}}}{x}dx.$

Вариант 27

1. Проверить выполнение необходимого признака сходимости ряда:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n} \cdot \left(arctgn - \frac{\pi}{2}\right).$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n\sqrt{n}+17}{5\sqrt{n^3}+3n}.$

2. Исследовать ряды на сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{41}{n^2 \cdot \cos^2 \frac{1}{n}}.$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{\sqrt{7n^3-n}}.$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n+7n^2}{2^n}.$

3. Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}.$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n^2-2}{n^3+4}.$

4. Найти область сходимости ряда:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^n}{7^n \cdot (2n+5)}.$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+6)^n}{(n+6)!}.$

5. Вычислить приближенно с точностью $\varepsilon = 0,001$ интеграл: $\int\limits_0^{0,1} \frac{\ln\left(1+\frac{x}{4}\right)}{x}dx.$

Вариант 28

1. Проверить выполнение необходимого признака сходимости ряда:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[3]{n}\cdot\arcsin^2\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right).$ б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n^4}{\ln^2\sqrt{n}}.$

2. Исследовать ряды на сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{arcctg^3 3n}{9n^2+1}.$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+8}{\sqrt{6n^5+3n}}.$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+5}{e^{7n}}.$

3. Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость:

а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{n^3}e^{-2n^{-2}}.$ б) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}(-1)^{n+1}tg\frac{\pi}{n}.$

4. Найти область сходимости ряда:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{8^n\cdot\sqrt{n}}.$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-11)^n}{n^{n+1}}.$

5. Вычислить приближенно с точностью $\varepsilon=0,001$ интеграл: $\int\limits_0^{0,4}e^{-\frac{2x^2}{5}}dx.$

Вариант 29

1. Проверить выполнение необходимого признака сходимости ряда:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)\cdot\left(e^{\frac{1}{n+1}}-1\right).$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+3n-1}{6n^4-5}$

2. Исследовать ряды на сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^2(3n+2)}{3n+2}.$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+5}{n^7+6n^3-1}.$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{e^n}.$

3. Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{\pi}{n^3}.$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{5n-2}{3n+n\sqrt{n}}.$

4. Найти область сходимости ряда:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x+6)^n}{7^n\cdot(3n+2)}.$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+3)!(x+12)^n.$

5. Вычислить приближенно с точностью $\varepsilon=0,001$ интеграл: $\int\limits_0^{0,1}\frac{1-e^{-4x}}{x}dx.$

Вариант 30

1. Проверить выполнение необходимого признака сходимости ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\cdot\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n^{11}}}{\ln n}$

2. Исследовать ряды на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2\sin^2\frac{1}{n}}.$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\sqrt[7]{n^5}-3}{\sqrt{2n^3+1}}.$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n}}{5n+3}.$

3. Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}ne^{-n^2}.$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{5\sqrt{n^3}+3}.$

4. Найти область сходимости ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+9)^n\cdot n}{11^n\cdot\left(6n^2-1\right)}.$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{(3n+1)!}.$

5. Вычислить приближенно с точностью $\varepsilon=0,001$ интеграл:

$$\int_0^{0,4}\frac{\ln\left(1+\frac{2x}{7}\right)}{x}dx.$$

Учебное издание

РУДАКОВСКАЯ Елена Георгиевна
ОСИПЧИК Валерия Владимировна
АВЕРИНА Ольга Валентиновна
БУРУХИНА Татьяна Федоровна
ИНШАКОВА Ксения Александровна
МЕЛАДЗЕ Марина Абрамовна
НАПЕДЕНИНА Екатерина Юрьевна
НАПЕДЕНИН Юрий Тимофеевич
ОРЛОВА Валерия Львовна
РИГЕР Татьяна Викторовна
ШАЙКИН Александр Николаевич

СБОРНИК ЗАДАНИЙ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

ТОМ I

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ И НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ.
ЭЛЕМЕНТЫ АЛГЕБРЫ.
ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ.
РЯДЫ**

Редактор Е. В. Копасова

Подписано в печать 20.06.2019 г. Формат 60х84 1/16.
Усл. печ. л. 13,1. Уч.-изд. л. 13,5. Тираж 500 экз. Заказ

Российский химико-технологический университет имени Д. И. Менделеева
Издательский центр
Адрес университета и издательского центра:
125047, Москва, Миусская пл., 9