

Тақырыбы: **Функциялар. Функцияның анықталу облысы мен мәндерінің жиыны. Функция графигі. Функциялардың берілу тәсілдері. Монотонды (бір сарынды) функциялар. Шенелген және шенелменген функциялар. Жұп, тақ, периодты функциялар. Элементар функциялар. Кері функция. Күрделі функция. Параметрлі түрде берілген функция.**

Жоспары:

1. Функция анықтамасы.
2. Функцияның анықталу облысы.
3. Функцияның мәндерінің жиыны.
4. Функция графигі.
5. Функциялардың берілу тәсілдері.
6. Монотонды функциялар.
7. Шенелген және шенелменген функциялар.
8. Жұп, тақ, периодты функциялар.
9. Элементар функциялар.
10. Кері функция.
11. Күрделі функция.
12. Параметрлі түрде берілген функция.

Анықтама. Егер қарастырылып отырған айнымалы шама x -тің әрбір мәніне белгілі заң немесе ереже бойынша айнымалы шама y -тің анықталған бір-ақ мәні сәйкес келіп отырса, айнымалы шама y айнымалы шама x -тің *функциясы* деп аталады. Мұндағы x – *тәуелсіз айнымалы* немесе *аргумент*, ал y – *тәуелді айнымалы* немесе *функция* деп аталады.

Анықтама. Егер тәуелсіз айнымалы x -тің әрбір мәніне белгілі заң немесе ереже бойынша тәуелді айнымалы y -тің бірнеше мәндері сәйкес келетін болса, ондай айнымалы y - *көп мәнді функция* деп аталады.

Функция берілген деп саналады, егер:

біріншіден, аргументтің қарастырылатын мәндерінің жиыны көрсетілген болса;

екіншіден, аргумент x -тің берілген мәні бойынша функция y -тің сәйкес мәнін табуға мүмкіндік беретін сәйкестік заң көрсетілген болса.

Функцияның белгіленуі: $y = f(x), y = \varphi(x), y = \psi(x), y = F(x)$. Оқылуы: *игрек* *икстен* *эфке* *тең*, *игрек* *икстен* *фиге* *тең*.

Мұндағы f, φ, ψ, F - аргумент x -тің берілген мәні бойынша y -тің сәйкес мәні қалай табылатынын көрсететін заңды немесе ережені бейнелейді.

Функция ұғымы бүкіл математика үшін өте маңызы зор ұғым, сондықтан да, ол ұғым математикалық дамудың ең негізгі объектісі болып саналады.

Анықтама. Функция анықталған немесе ақырлы нақты мәндер қабылдайтын тәуелсіз айнымалының барлық мәндерінің жиыны сол функцияның **анықталу облысы** немесе функцияның **бар болу** облысы деп аталады, ал функцияның барлық мәндерінің жиыны функция **мәндерінің жиыны** деп аталады.

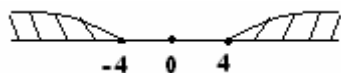
Мысалы: 1). $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-9}} + \frac{1}{\sqrt{x^2-16}}$. анықталу облысын табу керек.

Шешуі. Қарастырылып отырған $f(x)$ функциясының мәндері аргумент x -тің мәндері мына екі теңсіздікті бір кезде қанағаттандырғанда ғана нақты сандар бола алады.

$$x^2 - 9 > 0 \quad x^2 - 16 > 0$$

$$|x| > 3 \quad |x| > 4$$

Функцияның анықталу облысы $|x| > 4$ теңсіздігін қанағаттандыратын x -тің барлық мәндерінің жиыны болады, яғни $(-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$



2) $\varphi(x) = \sqrt{x^2 - 8x + 15}$: $D(\varphi(x)) = ?$

$$x^2 - 8x + 15 \geq 0. \quad (x-3)(x-5) \geq 0.$$

$$x \geq 3 \quad \text{және} \quad x \geq 5$$

3) $\varphi(x) = \ln \frac{1-x}{x^2-x-6}$ $D-?$ $\frac{1-x}{x^2-x-6} > 0.$

а) $1-x > 0 \quad x^2-x-6 > 0$

б) $1-x < 0 \quad x^2-x-6 < 0$

$1-x > 0 \quad (x+2)(x-3) > 0$

$1-x < 0 \quad (x+2)(x-3) < 0$

$-x > -1 \quad x < -2 \quad x > 3.$

$x > 1 \quad -2 < x < 3 \quad (1; 3)$

$x < 1 \quad (-\infty; -2)$

Жауабы: $(-\infty; -2) \cup (1; 3)$

4) $g(x) = \ln(1-2\cos x)$ $D(g) = ? \quad 1-2\cos x > 0, \quad \cos x < \frac{1}{2},$

$x = \frac{\pi}{3}, \quad x = \frac{5\pi}{3}$ те $\cos x = \frac{1}{2}$; сонымен, $\frac{\pi}{3} + 2\pi R < x < \frac{5\pi}{3} + 2\pi R, \quad R=0, \pm 1, 2, \dots$

5) $h(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x}$ $D(h) = ?.$

$$-1 \leq \frac{2x}{1+x} \leq 1, \quad \frac{2x}{1+x} \leq 1, \quad \frac{2x}{1+x} \geq -1,$$

$$2x \leq 1+x \quad 2x \geq -1-x, \quad 2x+x > -1, \quad 3x \geq -1, \quad x \geq -\frac{1}{3}$$

$$x \leq 1 \quad \text{Ж: } \left[-\frac{1}{3}; 1\right]$$

6) $F(x) = \arccos \frac{1}{\sin x}$ $-1 \leq \frac{1}{\sin x} \leq 1$, $-1 \leq \sin x \leq 1$, ендеше $-1 < \frac{1}{\sin x} < 1$ - орындалмайды.

$$\frac{1}{\sin x} = -1 \quad \frac{1}{\sin x} = 1 \quad x = \frac{\pi}{2}(2r-1).$$

Функцияның графигі.

(a , в) аралығында анықталған $y=f(x)$ функциясы берілген делік. Ол дегеніміз (a , в) аралығындағы x-тің әрбір мәніне y-тің анықталған бір-ақ мәні сәйкес келеді.

Жазықтықтағы тік бұрышты координаталар системасын аламыз. N нүктесі (a , в) аралығындағы абсциссасы x – ке тең нүкте болсын. Абсциссалар өсіне N нүктесі арқылы өтетін перпендикуляр тұрғызайық. Сонда абсциссасы x-ке тең, оған сәйкес координатасы $f(x)$ -ке тең болатын M нүктесі тұрғызылған перпендикулярдың бойынша орналасады және ондай нүкте жалғыз болады. Сонымен $ON=x$, $NM=y=f(x)$.

NM кесіндісінің M нүктесін x-тің берілген мәніне сәйкес келетін $f(x)$ - тің мәнінің геометриялық кескіні деп санаймыз. Осылайша берілген функцияның геометриялық кескінін сала аламыз. Ол кескін аргументтің қабылдайтын барлық мәндеріне сәйкес функцияның барлық мәндерін кескіндейтін нүктелердің геометриялық орны болады.

Қозғалмалы M нүктесі жасаған бұл геометриялық орын $f(x)$ функциясының графигі деп аталады.

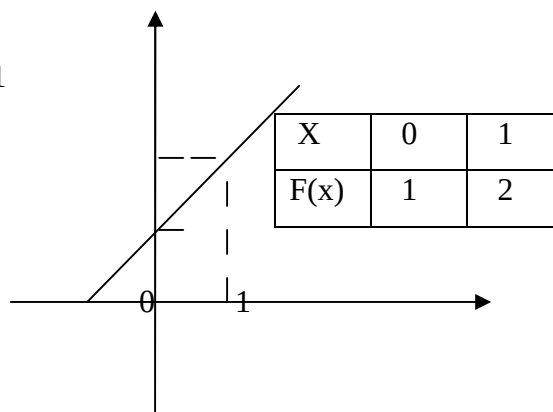
Сонымен, абсциссалары – аргументтік мәндері, координаталары – функцияның мәндері болатын жазықтықтағы нүктелердің жиыны функцияның графигі деп аталады.

Функцияның графиктері қисық сызықтар немесе түзулер болады.

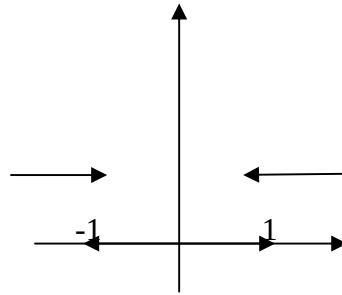
Функцияның графигін салу үшін, ол функцияның аргументінің бірнеше мәндерін алып, оған сәйкес функцияның мәндерін тауып таблица құру керек.

X-тің мәндері	x_1	x_2		x_n
Y-тің мәндері.	$y_1 = f(x_1)$	$y_2 = f(x_2)$		$y_n = f(x_n)$

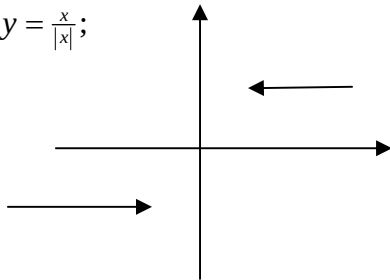
Мысалы: 1) $f(x)=x+1$



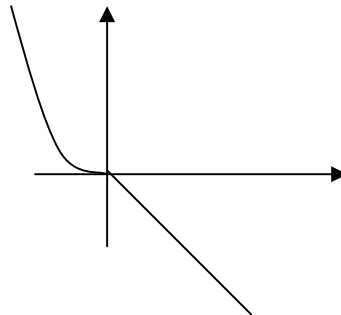
$$2) y = \begin{cases} 1, & |x| > 1 \\ -1, & |x| < 1 \\ 0, & x = \pm 1 \end{cases}$$



$$3) y = \frac{x}{|x|};$$



$$4) y = \begin{cases} -x & x \geq 0 \\ x^2 & x \leq 0 \end{cases}$$



I. Функцияның берілу тәсілдері.

1. Аналитикалық тәсілмен берілу.

Сандарға және айнымалы шамаларға белгілі бір тәртіп бойынша қолданылатын математикалық амалдардың жиынын аналитикалық өрнек деп түсінеміз.

Функцияның негізгі берілу түрі формуламен, яғни аналитикалық түрде.

Мысалы:

$$1) y = \begin{cases} 1, & x - \text{рационал сан болса} \\ 0, & x - \text{иррационал сан болса} \end{cases}$$

$$D(-9.3) = 1, \quad D\left(\frac{4}{7}\right) = 1, \quad D(\sqrt{5}) = 0, \quad D(-\sqrt{3}) = 0, \quad D(e) = 0$$

2) Функция сигнум x (signum – таңба) мына түрде беріледі:

$$\text{sign } x = 1, \text{ егер } x > 0$$

$$\text{Sign } x = -1, \text{ егер } x < 0$$

$$\text{Sign } x = 0, \text{ егер } x = 0$$

$$\text{Sign } \left(\frac{3}{2}\right) = 1, \quad \text{sign}(10^{13}) = 1, \quad \text{sign}(\sqrt{11}) = 1$$

$$\text{sign}(-\sqrt{17}) = -1, \quad \text{sign}(-\pi) = -1$$

II. Функцияның таблицамен берілуі.

Функцияны оның мәндерінің таблицасы арқылы берілуі функцияның таблицалық түрде берілуі деп аталады.

III. Функцияның графикпен берілуі.

IV. Функцияның сөзбен берілу тәсілі.

Бір сарынды немесе үзік бір сарынды функциялар.

Функцияны зерттеу дегеніміз: аргументтің өзгеруіне байланысты функцияның өзгеру ағымын сипаттау. Функциялық өзгерістердің бірі функцияның өсуі және кемуі.

Анықтама: (a, b) аралығындағы аргументтің кез келген мәндері x_1 мен x_2 үшін $x_2 > x_1$ теңсіздігі орындалуымен бірге $f(x_2) \geq f(x_1)$ теңсіздігі де орындалса, $f(x)$ функциясы (a, b) аралығында бір сарынды өспелі функция деп аталады.

Анықтама: Егер (a, b) аралығындағы аргумент x -тің кез келген екі мәні x_1 мен x_2 үшін $x_2 > x_1$ теңсіздігі орындалуымен бірге $f(x_2) > f(x_1)$ арақатысы орындалса, $f(x)$ функциясы (a, b) аралығында кемімейтін функция деп аталады.

Анықтама: Егер (a, b) аралығындағы аргумент x -тің кез келген екі мәні x_1 мен x_2 үшін $x_2 > x_1$ теңсіздігі орындалуымен бірге $f(x_2) \leq f(x_1)$ теңсіздігі орындалса, яғни $f(x)$ функциясы бір сарынды кемімелі функция деп аталады.

Анықтама: Егер $f(x)$ функциясы (a, b) аралығында беріліп, $x_2 > x_1$ теңсіздігі орындалуымен бірге $f(x_2) < f(x_1)$ арақатысы орындалса, $f(x)$ функциясы (a, b) аралығында өспейтін функция деп аталады.

Осы берілген төрт түрлі функцияны біріктіріп, берілген (a, b) аралығындағы бір сарынды функция деп атайды.

Егер (a, b) аралығында анықталған, бірақ бүкіл аралық бойында бір сарынды болмайтын $f(x)$ функциясы (a, b) аралығының бөлік (x_i, x_{i+1}) аралықтарында бір сарынды болып келсе, ол функция үзік бір сарынды функция деп аталады.

Мысалдар. $f(x) = 1 - x^2$, $\varphi(x) = kx + b$ Функцияның өспелі, кемімелі аралықтарын тап.

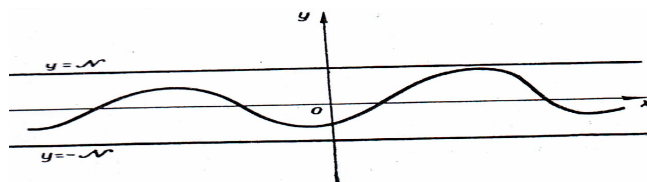
Шенелген және шенелмеген функциялар.

Анықтама. $f(x)$ функциясының анықталу облысы E жиынында болатын аргументі x -тің барлық мәндері үшін $|f(x)| < N$ теңсіздігін қанағаттандыратын оң сан N табылса, $f(x)$ өзінің анықталу облысында **шенелген функция** деп аталады.

Функцияның шенелу облыстары сегмент, интервал, тағы сондайлар болады.

Егер $f(x)$ функциясы $(-\infty, +\infty)$ интервалында шенелген болса, ол функцияны бүкіл түзудің бойында шенелген дейді.

Шенелген функцияның графигі x -тер осіне параллель $y=N$ және $y=-N$ түзулерінің арасында жатады.



Ескерту. Шенелген функция үшін дәл теңсіздік $|f(x)| < N$ орындалуы шарт. Егер функция үшін $|f(x)| \leq M$ арақатысы орындалса да, $f(x)$ шенелген функция болады, өйткені бұл жағдайда $N = M+1$ деп алуға болады.

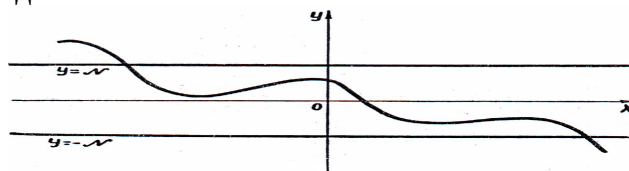
Анықтама. Егер E жиындағы x -тің барлық мәндері үшін $|f(x)| < N$ теңсіздігі орындалатындай ешбір N болмаса, $f(x)$ функциясы E жиынында **шенелмеген функция** деп аталады.

Басқаша айтқанда: егер E жиынындағы аргументтің мәндерінің бірі — x_1 үшін

$$|f(x_1)| > N$$

теңсіздігі орындалса, $f(x)$ функциясы E облысында. шенелмеген функция деп аталады.

Демек, шенелмеген функцияның графигі бүтіндей ішінде жататын ешбір $-N < y < N$ алқабы болмайды



Ескертетін бір нәрсе мынау: бір аралықта шенелмеген функция екінші бір аралықта шенелген функция болуы мүмкін. Мысалы: функция $y = x^4$. Бұл $(-\infty; +\infty)$ интервалында шенелмеген, өйткені N — қандай үлкен сан болса да, $|x| > \sqrt[4]{N}$ болғанда $|y| = x^4 > N$ болады. Ал бұл функция кез келген ақырлы (a, b) аралығында шенелген функция.

Анықтама. Егер аргумент мәндерінің жиынындағы x -тің барлық мәндері үшін бір сан P табылып, $f(x) < P$ теңсіздігі орындалатын болса, $y = f(x)$ сол облыста жоғарыдан шенелген функция деп аталады.

Анықтама. Егер бір Q саны табылып, аргумент мәндерінің жиынындағы x -тің барлық мәндері үшін $f(x) > Q$ теңсіздігі орындалса, $y = f(x)$ сол облыста төменнен шенелген функция деп аталады.

Теорема. $y = f(x)$ функциясы аргумент мәндерінің жиыны E -де шенелген болуы үшін ол функция сол облыста жоғарыдан да, төменнен де шенелген болуы қажетті және жеткілікті.

Қажеттігін дәлелдеу. $f(x)$ функциясы E облысында шенелген болсын. Сонда $f(x)$ -тің жоғарыдан да, төменнен де шенелген функция болатындығын дәлелдеуіміз керек.

Шынында: $f(x)$ —шенелген функция деп ұйғаруымыз бойынша

$$|f(x)| < N \quad (1)$$

теңсіздігін қанағаттандыратын $N > 0$ саны табылады. (1) теңсіздікті былай да жазуға болады:

$$-N < f(x) < N.$$

Бұдан $f(x)$ -тің жоғарыдан N санымен, төменнен $-N$ санымен шенелгендігін көреміз.

Сонымен теореманың қажетті шарты дәлелденді.

Жеткіліктілігін дәлелдеу. $f(x)$ жоғарыдан да, төменнен де шенелген делік. $f(x)$ -тің E жиынында шенелген функция болатынын дәлелдеуіміз керек.

Шынында: $f(x)$ жоғарыдан да, төменнен де шенелген болғандықтан, P және Q сандары табылып,

$$Q < f(x) < P \quad (2)$$

теңсіздігі орындалады.

N санын төмендегі теңсіздіктерді қанағаттандыратындай етіп алалық:

$$N > |P| \quad \text{және} \quad N > |Q|, \quad \text{яғни:}$$

$$-N < Q \quad \text{және} \quad P < +N.$$

Сонда (2) теңсіздік былай жазылады:

$$-N < f(x) < N \quad \text{немесе} \quad |f(x)| < N$$

Сонымен теорема толық дәлелденді.

Мысал: $y = \operatorname{cosec}^2 x$. Бұл функция шенелмеген функция. Бірақ аргументтің кез келген мәні үшін:

$$\operatorname{cosec}^2 x \geq 0 > -\frac{3}{4}.$$

Демек, бұл функция төменнен шенелген.

Мысалдар:

1) $y = 5^x$ функциясы берілсін. Оның шенелгенін не шенелмегенін зерттеу керек.

Ш е ш у. Берілген функция $(-\infty, +\infty)$ интервалында анықталған. $(-\infty, 0]$ жарты интервалында аргумент x -тің барлық мәндері үшін $0 < 5^x \leq 1$ теңсіздігі орындалады да, $[0, +\infty)$ жарты сегментіндегі аргументтің барлық мәндері үшін $1 \leq 5^x < +\infty$ теңсіздігі орындалады. Демек, бұл функция бүкіл сан түзуінде төменнен ноль санымен шенелген.

2) Дирихле функциясы берілсін:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{егер } x - \text{рационал сан болса} \\ 0, & \text{егер } x - \text{иррационал сан болса} \end{cases}$$

Мұның шенелген-шенелмегендігін зерттеу керек.

Шешу. x -тің кез келген мәні үшін $0 \leq D(x) \leq 1$.

Демек, $D(x)$ —бүкіл сан түзуінің бойында шенелген функция.

3) Функция $E(x)$ (немесе $[x]$) x -тің барлық мәндері үшін $-\infty < E(x) < +\infty$ теңсіздігін қанағаттандырады. Демек, $E(x)$ шенелмеген.

4) Сигнум x функциясы шенелген, өйткені:

$$|\operatorname{sign} x| \leq 1$$

Жұп және тақ функциялар

Анықтама. Егер M жиынының құрамына кез келген x санымен бірге оған симметриялық $-x$ саны да кірсе, ол M жиыны симметриялық жиын деп аталады.

Симметриялық жиындарға мысалдар: барлық бүтін сандар жиыны, $[-5, +5]$ сегментіндегі барлық сандардың жиыны, $(-b, +b)$ интервалындағы барлық сандардың жиыны.

Анықтама. Егер $f(x)$ симметриялық облыста берілсе және сол облыстағы аргумент x -тің, кез келген мәні үшін

$$f(-x) = f(x) \quad (1)$$

теңдігі орындалса, $f(x)$ сол симметриялық облыста **жұп функция** деп аталады.

Басқаша айтқанда: егер аргументтің мәні x -ті $-x$ - ке ауыстырғанда $f(x)$ -тің мәні өзгермейтін болса, $f(x)$ -**ті жұп функция** деп атайды.

М ы с а л ы: $y = \sec x$; $y = x^{2n}$ (n — натурал сан), $y = 2x^4 - 5x^2 - 3$;

$y = 2 - \sin^2 x$; $y = |x|$ функциялары $(-\infty, +\infty)$ интервалында жұп функциялар.

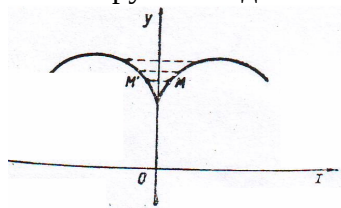
Енді $f(x) = \ln(1-x) + \ln(1+x)$ функциясы өзінің анықталу облысында жұп функция екенін көрсетелік.

Шынында, берілген $f(x)$ функциясы $(-1, +1)$ интервалында анықталған.

$$F(-x) = \ln[1-(-x)] + \ln[1+(-x)] = \ln(1+x) + \ln(1-x) = f(x).$$

Демек, $f(-x)=f(x)$ болады, яғни берілген функция $(-1, +1)$ интервалында жұп функция.

Жұп функцияның графигі ординаталар осіне симметриялық түрде орналасатындығын $f(-x)=f(x)$ теңдігінен көруге болады.



Анықтама. Егер $f(x)$ симметриялық облыста беріліп, облыстағы аргумент x -тің кез келген мәні үшін

$$f(-x) = -f(x). \quad (2)$$

теңдігі орындалса, яғни аргументтің таңбасы кері таңбаға ауысқанда функцияның да таңбасы кері таңбаға ауысса, $f(x)$ сол облыста **тақ функция** деп аталады.

Мысалы: $y=x^3$; $y=7x^5 - 2x^3 + x$; $y=\operatorname{cosec} x$; $y=x^{2n-1}$

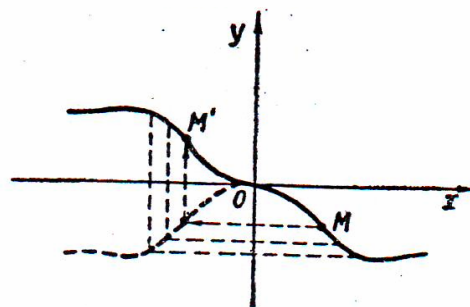
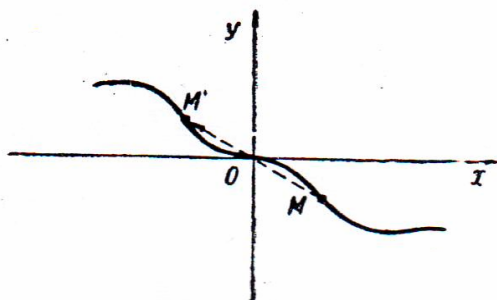
(n — натурал сан); $y = \sqrt[5]{x}$; $y = |x| x$; $y = \operatorname{ctgx}$ функциялары тақ функциялар.

Енді $g(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$ өзінің анықталу облысында тақ функция екенін көрсетелік.

Шынында: бұл функцияның анықталу облысы $(-1, +1)$ интервалы. Ал

$$\begin{aligned} g(-x) &= \ln \frac{1 + (-x)}{1 - (-x)} = \ln \frac{1 - x}{1 + x} = \ln(1-x) - \ln(1+x) = \\ &= -[\ln(1+x) - \ln(1-x)] = -\ln \frac{1 + x}{1 - x} = -g(x), \end{aligned}$$

яғни $g(-x) = -g(x)$. Демек, берілген функция $g(x)$ $(-1, +1)$ интервалында тақ функция болады. Тақ функцияның графигі координаталар системасының бас нүктесіне симметриялық түрде орналасады.



Сөйтіп, егер тақ функция $x=0$ нүктесінде анықталған болса, функцияның ол нүктедегі мәні нольге тең. Бұдан $x = 0$ нүктесінде анықталған тақ функцияның графигі міндетті түрде координаталар системасының бас нүктесі арқылы өтетіндігіне көзіміз жетеді.

Теорема 1. $f(x)$ функциясы симметриялық E облысының барлық нүктелерінде нольге тең болу үшін, ол функцияның сол облыста әрі жұп, әрі тақ функция болуы қажетті және жеткілікті.

Теорема 2. Бір симметриялық облыста берілген екі жұп (не екі тақ) функциялардың қосындысы да, айырымы да сол облыста жұп (не тақ) функция болады.

Салдар. Бірнеше қосылғыштардан тұратын бір симметриялық облыста берілген жұп (не тақ) функциялардың қосындысы да сол симметриялық облыста жұп (не тақ) функция болады.

Теорема 3. Бір симметриялық облыста анықталған екі жұп не екі тақ функцияның көбейтіндісі де сол облыста жұп функция болады.

Теорема 4. Бір симметриялық облыста берілген жұп функция мен тақ функцияның көбейтіндісі сол облыста тақ функция болады.

Периодты функциялар

Анықтама. Егер $f(x)$ функциясының анықталу облысындағы аргумент x -тің әрбір мәні үшін $f(x+L)=f(x)$ (1) теңдігі орындалатын нольге тең емес L саны табылатын болса, $f(x)$ — периодты функция, L саны — $f(x)$ -тің периоды деп аталады.

Егер (1) теңдікті $x + l$ нүктесі үшін қолдансақ, $f[(x+l)+l]=f(x+l)=f(x)$, немесе $f(x+2l)=f(x)$ болар еді. Бұл процесті соза берсек, мына теңдіктер орындалар еді:

$$f(x+3l)=f(x).$$

$$f(x+4l)=f(x),$$

$$\dots\dots\dots$$

$$f(x+nl)=f(x)$$

$$\dots\dots\dots,$$

Сонымен, егер периодты $f(x)$ функциясының анықталу облысында x болса, $x + nl$ сандары да (n — кез келген натурал сан) $f(x)$ -тің анықталу облысында болады және nl сандары $f(x)$ -тің периодтары болады. Периоды L -ге тең функция $f(x)$ үшін $f(x) = f[(x-L) + L]$ теңдігі де орындалатын болғандықтан, $(-L)$ саны да $f(x)$ -тің периоды болады. Сондай-ақ жоғарыдағыша байымдап тек $-l$ саны ғана емес, $-2l, -3l, \dots, -nl$ сандарының да $f(x)$ үшін периодтар болатындығын байқау қиын емес.

Сөйтіп, егер $f(x)$ — периодты функция болып, оның периоды l болса, kl (бұндағы k —кез келген нольге тең емес бүтін сан, $k=\pm 1, \pm 2 \dots; \pm nl$) сандары да $f(x)$ -тің периодтары болатыны айқындалады.

Демек, егер $f(x)$ $(-\infty, +\infty)$ интервалында периодты функция болса, ол функцияның міндетті түрде оң периоды болуға тиіс, өйткені l және $-l$ сандарының бірі оң сан болатыны анық. Сондықтан да $(-\infty, +\infty)$ интервалындағы периодты функцияның оң периодтары сансыз көп. Оң периодтарының жиынында ең кіші ω саны болуы мүмкін. Бұл санды ең кіші период немесе негізгі период деп атаймыз.

Периодты функцияларға мысалдар келтірейік.

1) Тригонометриялық функциялар:

$$\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x.$$

$\sin x$ пен $\cos x$ -тің ең кіші (немесе негізгі) периоды 2π , ал $\operatorname{tg} x$ пен $\operatorname{ctg} x$ -тің периоды π .

2) $f(x)=x-E(x)$ функциясы $(-\infty, +\infty)$ интервалында — периодты функция және оның негізгі периоды 1.

Шынында:

$$f(x+1)=x+1-E(x+1)=x+1-[E(x)+1]=x-E(x)=f(x), \quad \text{яғни} \quad f(x+1)=f(x).$$

Элементар функциялар

Бір аргументті функциялардың ішінде элементарлық функциялар деп аталатындары әдейі бір топқа бөлінеді. Олардын, бұлай аталуының себебі: олар басқа элементарлық емес функциялардан тарихта бұрын шыққан, жан-жақты зерттелген, құрылысы біркелкі қарапайым болып келеді, және жиі қолданылады. «Эле-м е н т» — латын сөзі. Оны «с т и х и я», «б а с т а п қ ы з а т» деп аударуға болады. Сонда «элементарлық» — б а с т а п қ ы, қарапайым, негізгі деген сөздердің мағынасын береді.

Элементарлық емес функцияларды көбінесе арнаулы функциялар деп атап жүр. Бұл функциялар математика ғылымының дамуындағы соңғы дәуірлерде құбылыстардың математикалық жақтарын зерттеу мәселелері элементарлық функциялардың мүмкіншіліктері шеңберіне симаумен байланысты пайда болды.

Элементарлық функцияларға төмендегі функциялар жатады:

1. Дәрежелік функция $f(x)=x^a$ (a - кез келген нақты сан);

2. Көрсеткіштік функция $\varphi(x) = a^x$ ($a>0$);

3. Логарифмдік функция $\varphi(x) = \log_a x$ ($a>0$);

4. Тригонометриялық функциялар $\sin x$, $\cos x$, **$\operatorname{tg} x$** , $\operatorname{ctg} x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$;

5. Кері тригонометриялық функциялар $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$, $\operatorname{arcsec} x$, $\operatorname{arccosec} x$

Ескерте кететін бір нәрсе мынау: элементарлық функцияларға алты алгебралық амалды (қосу, азайту, көбейту, бөлу, бүтін оң дәрежеге шұғару және түбірлеу) қолдануға болады.

Барлық элементарлық функцияларды екі типке бөлуге болады:

1. Алгебралық функциялар.

2. Трансценденттік функциялар.

Элементарлық алгебралық функциялар мынадай кластарға бөлінеді:

1. Рационалдық функциялар.

а) Бүтін рационалдық функциялар.

б) Бөлшек рационалдық функциялар.

2. Иррационалдық функциялар.

Анықтама. Егер $f(x)$ функциясы дәреже көрсеткіші теріс емес бүтін сан болатын және коэффициенттері нақты сандар ғана болып келетін айнымалы x – тің дәрежелерінің қосындысы $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ түріне келтірілетін болса, $f(x)$ - бүтін рационалдық функция деп аталады.

Анықтама. Егер $f(x)$ функциясы екі бүтін рационалдық функцияның қатынасы түріне келтірілетін болса, ол бөлшек рационалдық деп аталады.

Демек, бөлшек рационалдық функцияның жалпы түрі мынадай болатын болды:

$$\varphi(x) = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_{m-1} x + b_m}$$

Бұдан $b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_{m-1} x + b_m \neq 0$.

Бөлшек рационалдық функцияларға мысалдар: $\frac{x^2 - x + 2}{3x - 15}, \frac{x^3 - 1}{2x^2 + x + 1}.$

Егер рационалдық функцияларға түбірлеу амалын колдансақ, *иррационалдық* функция пайда болады; оған мына төмендегі мысалдарды келтіре кетейік:

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3 - 1}{2x^2 + x + 1}}, \quad \varphi(x) = \sqrt{x^5 - 13x^2 - \frac{1}{2}}, \quad \phi(x) = \left(\sqrt[3]{\frac{-x^4 + x^2 - 5}{3x^4 - x^3 + 7x + 1}} \right)^2$$

$$h(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt[7]{x^5 - 2}}{x^3 + 3\sqrt{x - \sqrt{x^2 - 1}}}$$

Анықтама. Егер $y=f(x)$ функциясы

$$P_0(x)y^n + P_1(x)y^{n-1} + \dots + P_{n-1}(x)y + P_n(x) = 0$$

теңдеуінен анықталатын болса (мұнда: $P_0(x), P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x)$ — бүтін рационалдық функциялар, n — натурал сан, сонымен бірге $P_n(x) \neq 0$), оны *алгебралық функция* деп атаймыз.

Алгебралық функцияға мысалдар: $y^3 - 2x = 0,$

$$(x^2 + 4)y^5 - (x^4 + 1)y^3 - x^2y - (x^5 + 3x^4 - x + 3) = 0,$$

$$y^4 - (x^2 - 3)y^3 + (x + 1)y^2 - 2y + 27 = 0.$$

Алгебралық емес кез келген басқа функция *трансценденттік* функция деп аталады.

«Трансценденттік» деген сөз латын тіліндегі «*transcendens (transcendentis)*» деген сөзден шыққан. Оның мағынасы: «шек-тен аса адымдаушы», «шектен шығушы».

Дәрежелік функция

Анықтама. Негізі — айнымалы, дәреже көрсеткіші — теріс емес бүтін сан болатын функцияны теріс емес бүтін көрсеткішті дәрежелік функция деп атайды. Демек, мұндай функцияның жалпы түрі мынау болады:

$$y=f(x)=x^n \quad (1)$$

(мұндағы n — теріс емес бүтін сан).

n - натурал сан болса, (1) функцияның анықталу облысы бүкіл сандар осі болады да, ал егер n - теріс емес бүтін сан болған жағдайда функцияның анықталу облысы $(-\infty, 0), (0, +\infty)$ интервалдарынан тұрады.

Егер $n > 1$ болса, (1) функцияны өзара тең n көбейткіштердің кебейтіндісі деп түсіну керек, яғни $x^n = x * x * \dots * x$ - n рет

Бұл сияқты функциялар үшін мына теңдіктер орындалатыны айқын

$$(x^m)^n = x^{mn} \quad (2)$$

Анықтама. Егер шама $x \neq 0$ болса, шартты түрде $x^0 = 1$ деп есептейміз.

Егер $x = 0$ десек, 0° шамасының ешбір сандық мәні болмайды (анықталмағандықтың бір түрі).

Анықтама. Егер $x \neq 0$ және n — оң бүтін сан болса,

$$f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n} \quad (3)$$

болады деп есептейтін боламыз.

(3) түріндегі бүтін теріс көрсеткішті функцияның анықталу облысына нольден басқа нақты сандардың барлығы кіреді, яғни анықталу облысы $(-\infty, 0)$ мен $(0, +\infty)$ интервалдарынан тұрады.

(2) дәрежелік функция $(-\infty, 0)$ және $(0, +\infty)$ аралықтарында үзіліссіз, оған дәлел: дәрежелік функция $y=1$ мен $y=x^n$ екі үзіліссіз функцияларының қатынасы арқылы өрнектеледі.

$x = 0$ нүктесі (2) функцияның екінші түріндегі үзіліс нүктесі болады, өйткені:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} = \infty$$

Бөлшек рационалдық функцияны элементарлы (жәй) бөлшектерге жіктеу

Әуелі алдын ала берілуі қажет болып отырған бірнеше ескертпелерге тоқталайық.

1. Егер бүтін рационалдық функция

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n \quad (a \neq 0) \quad (1)$$

түрінде берілсе, $f(c)=0$ шартын қанағаттандыратын c саны берілген функцияның түбірі деп аталады. c — нақты сан да, комплекс сан да болуы мүмкін. Бұл жағдайда $f(x)$ функциясы $x-c$ -ға калдықсыз бөлінеді.

2. Кез келген $f(x) = 0$ алгебралық теңдеуінің комплекс сандар өрісіндегі түбірінің саны осы теңдеудің дәрежесіне тең. Егер (1) функцияның бірнеше түбірі c санына тең болса, ондай түбірді еселі түбір деп атайды.

3. **Теорема.** c саны $f(x)$ -тің a еселі түбірі болуы үшін мына шарт орындалуы қажет және жеткілікті:

$$f(c) = 0, f'(c) = 0, f''(c) = 0, \dots, f^{(a-1)}(c) = 0, f^{(a)}(c) \neq 0. \quad (2)$$

4. Коэффициенттері нақты сан болатын (1) бүтін рационалдық функцияның кез келген комплекс түбірлері екі-екеден түйіндес болады, яғни, егер комплекс сан $b+di$ (1) функцияның γ еселі түбірі болса, оған түйіндес комплекс сан $(b-di)$ -де (1) функцияның сондай γ еселі түбірі болады.

5. Дәреже көрсеткіші $n > 1$ кез келген (1) түріндегі коэффициенттері нақты сан болып келген бүтін рационалдық функция сызықтық және квадрат көбейткіштердің көбейтінділеріне жіктеледі, яғни

$$f(x) = a_0 (x-c)^\alpha (x-b)^\beta \dots (x-d)^\nu (x^2 + px + q)^\lambda (x^2 + rx + s)^\mu \dots (x^2 + lx + m)^\nu$$

болады. Бұл формулада:

$c, b, d, p, q, r, s, l, m, \dots$ — нақты сандар, $\alpha, \beta, \gamma, \nu, \mu, \lambda, \dots$ — натурал сандар және

$\alpha + \beta + \dots + \nu + \lambda + \mu + \dots + \nu = n$, квадрат дәрежелі $x^2 + px + q$,
 $x^2 + rx + s, \dots, x^2 + lx + m$ үшмүшеліктерінің нақты түбірлері жоқ, демек,

$$\frac{p^2}{4} - q < 0, \quad \frac{r^2}{4} - s < 0, \quad \frac{l^2}{4} - m < 0.$$

Анықтама. Бөлшек рационалдық функциялардың мына төрт түрі:

$$\text{I. } \frac{A}{x-a},$$

$$\text{II. } \frac{A}{(x-a)^k}, \quad (k=2,3,4,\dots)$$

$$\text{III. } \frac{Mx+N}{x^2+px+q}$$

$$\text{IV. } \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m} \quad (m=2,3,4,\dots);$$

элементарлық (жай) бөлшектер деп аталады. Бұнда: a, A, N, M, p, q — нақты сандар және $\frac{p^2}{4} - q < 0$.

Бізге коэффициенттері нақты сандар бөлшек-рационалдық функция

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m} \quad (4)$$

берілсін ($a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$).

Егер $n \geq m$ болса, (4) — бұрыс рационалдық бөлшек, $n < m$ болса, (4) — дұрыс рационалдық, бөлшек деп аталады.

Әрбір бұрыс рационалдық бөлшектің құрамынан бүтін бөлігін бөліп шығарсақ, дұрыс бөлшек қалады. Сол себепті біз (4)-ті дұрыс бөлшек деп түсінеміз. Сонымен қатар $b_0 = 1$ деп ұйғаруға болады, өйткені егер $b_0 = 1$ болса, (4) бөлшектің алымы мен бөлімін осы b_0 -ге бөліп жіберсек, бөліміндегі көпмүшеліктің аға мүшесінің коэффициенті 1-ге тең болар еді. Сөйтіп, бізге дұрыс рационалдық функция (4) берілген және $b_0 = 1$ болсын.

Алдын ала берілген 5-ескертпеге сәйкес:

$$g(x) = (x-c_1)^{\alpha_1} (x-c_2)^{\alpha_2} \dots (x-c_s)^{\alpha_s} (x^2 + p_1 x + q_1)^{\lambda_1} \dots (x^2 + p_t x + q_t)^{\lambda_t} \quad (5)$$

Бұнда: $c_1, c_2, \dots, c_s$ сандары $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ — еселі нақты түбірлер, $\frac{p_1^2}{4} - q_1 < 0, \dots, \dots, \frac{p_t^2}{4} - q_t$

< 0 және $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_s + 2\lambda_1 + \dots + 2\lambda_t = m$

Теорема. Егер дұрыс бөлшек рационалдық функция (4) берілсе және бүтін рационалдық функция $g(x)$ (5) түрге келтірілетін болса, (4) бөлшек былайша элементарлық (жай) бөлшектердің қосындысына жіктеледі:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} = & \frac{A_1}{x-c_1} + \frac{A_2}{(x-c_1)^2} + \dots + \frac{A_{\alpha_1}}{(x-c_1)^{\alpha_1}} + \frac{B_1}{x-c_2} + \frac{B_2}{(x-c_2)^2} + \dots + \frac{B_{\alpha_2}}{(x-c_2)^{\alpha_2}} + \dots + \frac{D_1}{x-c_s} + \\ & + \frac{D_2}{(x-c_s)^2} + \dots + \frac{D_{\alpha_s}}{(x-c_s)^{\alpha_s}} + \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + p_1 x + q_1} + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2 + p_1 x + q_1)^2} + \dots + \frac{M_{\lambda_1} x + N_{\lambda_1}}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{\lambda_1}} + \dots + \\ & + \frac{R_1 x + S_1}{x^2 + p_t x + q_t} + \frac{R_2 x + S_2}{(x^2 + p_t x + q_t)^2} + \dots + \frac{R_{\lambda_t} x + S_{\lambda_t}}{(x^2 + p_t x + q_t)^{\lambda_t}} \end{aligned} \quad (6)$$

Мұндағы $A_1, \dots, A_{\alpha_1}, \dots, B_1, \dots, B_{\alpha_2}, \dots, D_1, \dots, D_{\alpha_s}, \dots, M_1, N_1, M_{\lambda_1}, N_{\lambda_1}, \dots, R_{\lambda_t}, S_{\lambda_t}$ нақты сандар.

Дәлелдеу. (5)-тен $g(x) = (x-c_1)^{\alpha_1} g_1(x)$ теңдігі шығады. Мұндағы $g_1(x)$ функциясы $(x-c_1)$ -ге бөлінбейді, сондықтан $g_1(c_1) \neq 0$.

Ендеше $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{(x-c_1)^{\alpha_1}} + \frac{f_1(x)}{(x-c_1)^{\alpha_1-1} g_1(x)} \quad (7)$ теңдігінің орындалатынын және

$\frac{f_1(x)}{(x-c_1)^{\alpha_1-1}g_1(x)}$ -дұрыс бөлшек екенін дәлелдейік.

(7) теңдігінің оң жағын ортақ бөлімге келтірсек мына теңдікті аламыз

$$f(x) = Ag_1(x) + (x-c_1)f_1(x) \quad \text{немесе} \quad f(x) - Ag_1(x) = (x-c_1)f_1(x) \quad (8)$$

(8) теңдіктің оң жағы $(x-c_1)$ -ге бөлінеді, ал оң жағы $(x-c_1)$ -ге бөлінуі үшін

$$f(c_1) - Ag_1(c_1) = 0. \quad \text{Бұдан} \quad A = \frac{f(c_1)}{g_1(c_1)} \quad (9). \quad \text{Яғни (8) теңдік дұрыс және (7) теңдік те}$$

орындалады. Демек $\frac{f_1(x)}{(x-c_1)^{\alpha_1-1}g_1(x)}$ дұрыс бөлшек. (5)-теңдікті

$g(x) = (x^2 + p_1x + q_1)^{\lambda_1} g_2(x)$ түрінде де жазуға болады. Мұндағы $g_2(x)$ функциясы $(x^2 + p_1x + q_1)$ -ге бөлінбейді. Сонда

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{Mx + N}{(x^2 + p_1x + q_1)^{\lambda_1}} + \frac{f_2(x)}{(x^2 + p_1x + q_1)^{\lambda_1-1}g_2(x)} \quad (10)$$

теңдігін қарағаттандыратын, сонымен бірге $\frac{f_2(x)}{(x^2 + p_1x + q_1)^{\lambda_1-1}g_2(x)}$ -дұрыс бөлшек екенін

көрсетеміз. (10) теңдік

$$f(x) = (Mx + N)g_2(x) + (x^2 + p_1x + q_1)f_2(x) \quad \text{немесе}$$

$$f(x) - (Mx + N)g_2(x) = (x^2 + p_1x + q_1)f_2(x) \quad (11) \quad \text{теңдігімен мәндес.}$$

$(x^2 + p_1x + q_1)$ үшмүшелігінің нақты түбірі жоқ болғандықтан, түйіндес комплекс сандар $\beta = a + bi$ мен $\bar{\beta} = a - bi$, $b \neq 0$ ғана оның түбірлері болады

$$(x^2 + p_1x + q_1) = (x - \beta)(x - \bar{\beta}).$$

(11) теңдіктің сол жағы $(x^2 + p_1x + q_1)$ -ге бөлінуі үшін $\beta, \bar{\beta}$ сандары $f(x) - (Mx + N)g_2(x)$ функциясының түбірлері болуы тиіс. Яғни $f(\beta) - (M\beta + N)g_2(\beta) = 0$, $f(\bar{\beta}) - (M\bar{\beta} + N)g_2(\bar{\beta}) = 0$, $g_2(\bar{\beta}) \neq 0$, $g_2(\beta) \neq 0$.

Олай болса, $M\beta + N = \frac{f(\beta)}{g_2(\beta)}$ немесе $M(a + bi) + N = \frac{f(a + bi)}{g_2(a + bi)} = r + li$ болады. Бұл

теңдікте $Ma + N = r$, $Mb = l$. Сондықтан: $M = \frac{1}{b}$, $N = r - Ma = r - \frac{al}{b}$ болады.

Сонымен, M және N сандарының осылайша анықталған мәндерінде ғана (11) теңдігінің сол жағы $(x^2 + p_1x + q_1)$ -ге қалдықсыз бөлінеді. Яғни (10), (11) теңдіктері орындалады.

Мұнан кейін (6) теңдігін дәлелдеуге болады.

Шындығында $g(x)$ функциясының жіктелуіне сызықтық көбейткіш $x - c_1$ дәрежесі бірге тең болса, яғни $\alpha_1 = 1$, онда (7) теңдікке сәйкес дұрыс рационалдық бөлшек $\frac{f(x)}{g(x)}$ -тің

құрамынан $\frac{A}{x - c_1}$ қосылғышын бөліп шығаруға болады. Егер $g(x)$ -нің құрамындағы

$x - c_1$ -нің дәрежесі $\alpha_1 \geq 2$ болса, (7) теңдікке сәйкес $\frac{A_{\alpha_1}}{(x - c_1)^{\alpha_1}}$

Қосылғышын бөліп шығарамыз. Сонан қалған бөлшектен $\frac{A_{\alpha_1-1}}{(x-c_1)^{\alpha_1-1}}$ қосылғышын бөліп шығарамыз. Осылайша $\frac{f(x)}{g(x)}$ бөлшегінен $\frac{A_1}{x-c_1} + \frac{A_2}{(x-c_1)^2} + \dots + \frac{A_{\alpha_1}}{(x-c_1)^{\alpha_1}}$ қосындысы бөлініп шығады. Осы әдісті пайдаланып $(x-c_2)^{\alpha_2}, \dots, (x-c_s)^{\alpha_s}$ көбейткіштерінен қосылғыштарды бөліп шығарамыз.

$g(x)$ функциясының құрамына кіретін квадрат үшмүшелік $x^2 + p_1x + q_1$ -дің дәреже көрсеткіші бірге тең, яғни $\lambda_1 = 1$ болса, $\frac{f(x)}{g(x)}$ бөлшегінен $\frac{M_1x + N_1}{x^2 + p_1x + q_1}$ қосылғышын, ал

егер $\lambda_1 \geq 2$ болса, онан $\frac{M_2x + N_2}{(x^2 + p_1x + q_1)^{\lambda_1}}$ қосылғышын, сонан кейін қалған бөлшектен

$\frac{M_2x + N_2}{(x^2 + p_1x + q_1)^{\lambda_1-1}}$ қосылғышын бөліп шығаруға болады.

Осы әдісті $g(x)$ функциясының құрамындағы көбейткіштер

$(x^2 + p_1x + q_1)^{\lambda_2}, \dots, (x^2 + p_1x + q_1)^{\lambda_i}$ квадрат үшмүшеліктерге де қолданамыз.

Осы әдісті анықталмаған коэффициенттер әдісі деп атайды.

Мысал . $\frac{x^2}{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}$ рационал бөлшегі берілген. Оны элементар бөлшектер қосындысына жіктеу керек.

$$x^3 + 4x^2 + 5x + 2 = (x+1)^2(x+2)$$

$$\frac{x^2}{x^3 + 4x^2 + 5x + 2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+2} = \frac{A(x+1)(x+2) + B(x+2) + C(x+1)^2}{(x+1)^2(x+2)}$$

$$x^2 = A(x+1)(x+2) + B(x+2) + C(x+1)^2$$

Енді x – тің бірдей дәрежелерінің жанындағы коэффициенттерді салыстырамыз:

$$x^2 \mid 1 = A + C$$

$$x \mid 0 = 3A + B + 2C$$

$$x^0 \mid 0 = 2A + 2B + C$$

Осыдан $B = 1, C = 4, A = -3$

$$\text{Сонымен, } \frac{x^2}{x^3 + 4x^2 + 5x + 2} = \frac{-3}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{4}{x+2}.$$

Кері функциялар

(a, b) аралығында анықталған $y = f(x)$ функциясын қарастырайық. Аргумент x , (a, b) аралығында үздіксіз өзгергенде, айнымалы y -тің мәндері (c, d) аралығын құратын болсын.

Егер айнымалы y -тің (c, d) аралығынан алынған әрбір мәніне айнымалы x -тің бір немесе бірнеше мәндері сәйкес келсе, онда біз x -ті айнымалы y -тің бірімәнді немесе көпмәнді функциясы деп айтамыз және былай белгілейміз: $x = \varphi(y)$. Осы $x = \varphi(y)$ функцияны $y = f(x)$ функцияға кері функция деп атайды. Кері функция $x = \varphi(y)$ (c, d) аралығында анықталған. $y = f(x)$ функцияны және оған кері $x = \varphi(y)$ функцияны бір қисық кескіндейді.

Мәселен, $y = x^2$ функцияны қарайтын болсақ, бұл функцияның анықталу облысы $(-\infty; +\infty)$. Егер айнымалы x осы $(-\infty; +\infty)$ интервалда өзгерсе, айнымалы y -тің сәйкес мәндері $(0; +\infty)$ аралығын құрады. Олай болса берілген функцияға кері функция $x = \pm\sqrt{y}$, $(0; +\infty)$ аралығында анықталады.

Күрделі функциялар

(c, d) аралығында анықталған $y = f(u)$ функциясын қарастырайық. Бұл функцияның аргументі u екінші бір айнымалы x -тің функциясы болсын. $u = \varphi(x)$ және осы кейінгі функция (a, b) аралығында анықталсын. Айнымалы y бірден u -ға тәуелді, осы u арқылы айнымалы x -ке тәуелді. Мұндай айнымалы y -ті айнымалы x -тің күрделі функциясы деп атайды және мұны былай белгілейді: $y = f[\varphi(x)]$.

Күрделі функцияның берілу заңында амалдар былай жүргізіледі: ең алдымен x -тің (a, b) аралығында берілген мәніне айнымалы u -дың сәйкес мәнін φ таңбасымен сипатталатын ереже бойынша (c, d) аралығынан табамыз, бұдан кейін u -дың осы мәніне айнымалы y -тің сәйкес мәнін f таңбасымен сипатталатын ереже бойынша табамыз.

Айнымалы x -тің (a, b) аралығындағы әрбір мәні үшін мына символдың $f[\varphi(x)]$ тиянақты мағынасы болуы керек. Егер $u = \varphi(x)$ функцияның мәні $f(u)$ функцияның анықталу облысына жатпаса, онда мына $f[\varphi(x)]$ символдың мағынасы болмайды. Мәселен, $y = \arcsin u$, ал $u = x^2 + 2$ болса, онда мына өрнектің $y = \arcsin(x^2 + 2)$ ешбір мағынасы жоқ, себебі арксинустың аргументі u тек мына $[-1; 1]$ сегментте қана өзгереді, ал $x^2 + 2$ функцияның мәндері бірден артық.

Параметрлік түрде берілген функциялар

(α, β) аралығында берілген төмендегі екі функцияны қарастырайық:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t). \quad (1)$$

Егер бірінші функцияның бірімәнді кері функциясы бар болса, яғни $t = p(x)$, онда t -ның осы өрнегін екінші функцияға апарып қойсақ: $y = \psi[p(x)]$.

Сонымен (1) теңдеулер жүйесі y -ті x -тің мынадай $y = f(x) = \psi[p(x)]$ сәйкестік заңмен берілген функциясы етіп анықтайтын болды.

Осы $y = f(x)$ функцияның (1) теңдеулер жүйесі арқылы берілуін оның параметрлік түрде берілуі деп атайды. Аргумент t -ні параметр дейді.

Егер x пен y -ті XOY жазықтығында жатқан бір M нүктесінің декарттық координаталары деп қарастырсақ, онда параметр t -ның әрбір мәніне жазықтықтың бір нүктесі сәйкес келеді. Осы M нүктесін аргумент t -ның бейнесі немесе образы деп атайды, t -ның мәнін M нүктесінің прообраздары дейді.

Сонымен аргумент t -ның мәндерінің жиыны жазықтықтағы $M[\varphi(t), \psi(t)]$ нүктелер жиынымен бейнеленеді. Мәселен мына $x = a \cos t$, $y = a \sin t$ жүйені қарастырайық.

$(0, \pi)$ интервалында $\cos t$ біркелкі, сондықтан қарастырылып отырған жүйе y -ті x -тің функциясы етіп анықтайды. Берілген теңдеулердің екі жақтарын квадраттайық та қосайық, сонда $x^2 + y^2 = a^2$, бұл арадан $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $-a \leq x \leq a$.

Демек, сегмент $[0, \pi]$ шеңбердің жоғарғы жартысын бейнелейді. Қарастырылып отырған $x = a \cos t$, $y = a \sin t$ теңдеулерді шеңбердің параметрлік теңдеулері дейді.