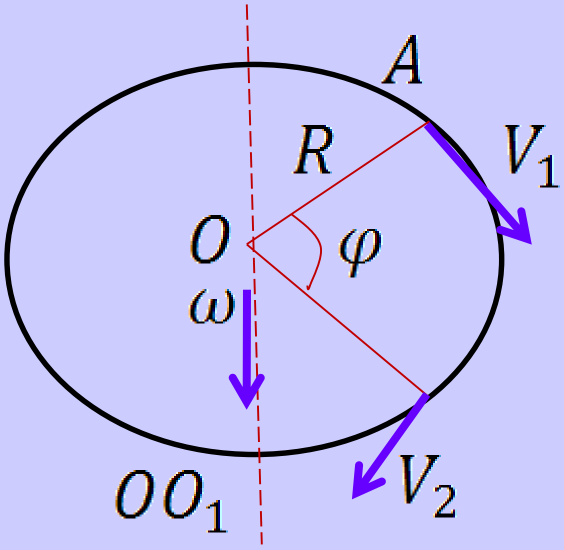
Кинематика вращательного движения



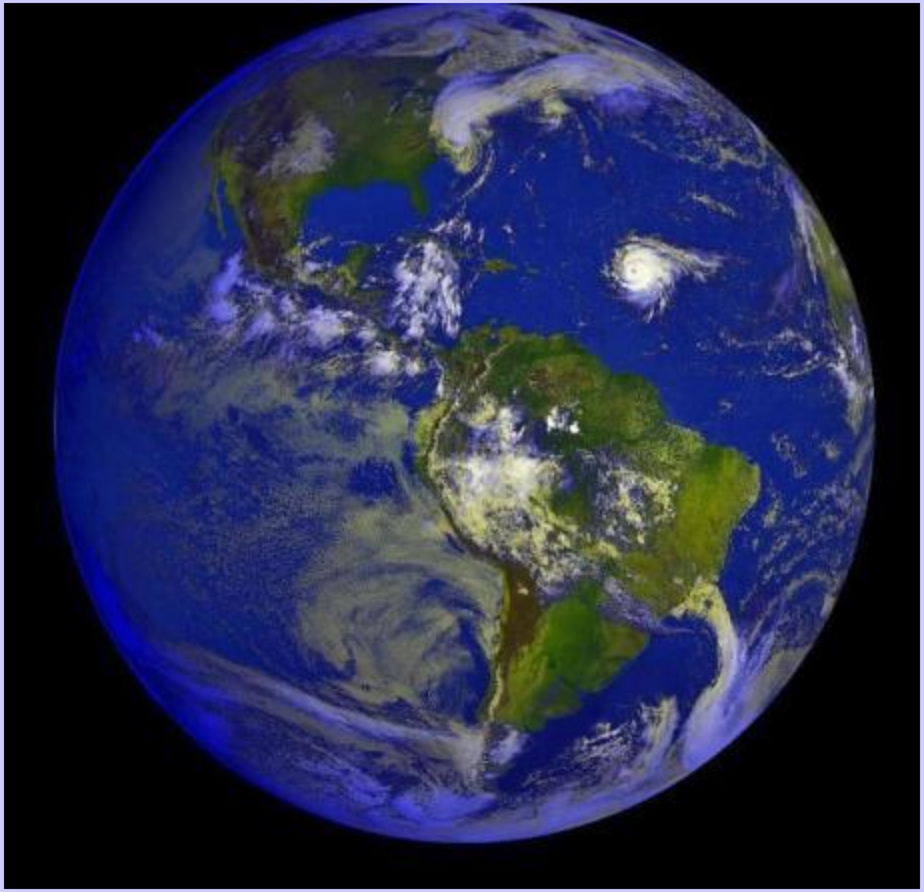
Лекция 1.3.

Вращательное движение. Угловая скорость.

Угловое ускорение.

Введение

- Вращательным движением твёрдого тела или системы тел называется такое движение, при котором все точки движутся по окружностям, центры которых лежат на одной прямой, называемой осью вращения, а плоскости окружностей перпендикулярны оси вращения.
- Ось вращения может располагаться внутри тела и за его пределами и в зависимости от выбора системы отсчёта может быть как подвижной, так и неподвижной.
- Теорема вращения Эйлера утверждает, что любое вращение трёхмерного пространства имеет ось.



Характеристики вращательного движения

Период- время, за которое совершается один полный оборот.

Единицы измерения : Секунды (с)

Обозначение : T

Формула : $T = \dfrac{t}{N} = \dfrac{1}{\nu} = \dfrac{2\pi}{\omega}$

Частота- Число оборотов за единицу времени.

Обозначение : ν

Единицы измерения : Герцы (Гц)

Формула : $\nu = \dfrac{N}{t}$

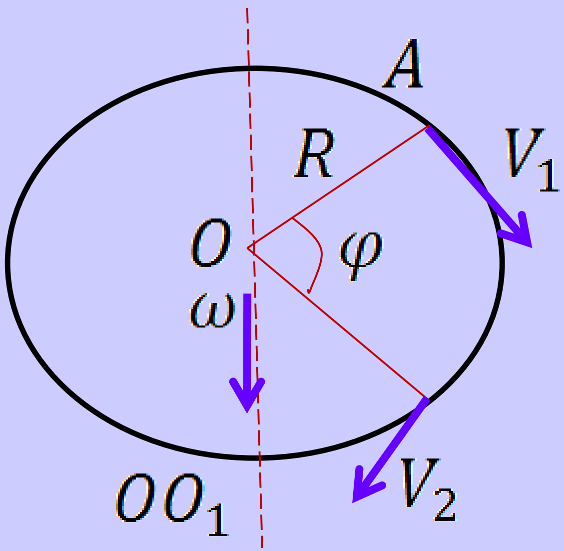
Циклической (круговой) частотой - число полных оборотов, которые совершаются за 2π единиц времени.

Обозначение : ω

Единицы измерения : c^{-1}

Формула : $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \mathbf{2\pi\nu}$

При <u>вращательном движении</u> - все точки, принадлежащие твердому телу, описывают окружности относительно оси вращения.



Угол поворота φ

В системе СИ измеряется в радианах
φ = [1 рад]

$$\boxed{\varphi = 2\pi N}$$

Кинематическое уравнение вращательного движения

$$\varphi = \varphi(t)$$

Кинематическое уравнение равномерного вращения

$$\varphi = \omega t$$

Путь, пройденный точкой по дуге окружности

$$S = \varphi \cdot R$$

Вращательное движение характеризуется двумя величинами:

- <u>Линейная скорость</u> **V**
- <u>Угловая скорость</u> **ω**

<u>Угловой скоростью</u> ***ω - называется отношение угла поворота радиуса R (угловой путь) к промежутку времени, за который этот поворот произошел.***

В случае равномерного движения:

$$<\bar{\omega}>=\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

Где $\Delta\varphi$ – угол поворота, [рад]; $<\bar{\omega}>$ – средняя скорость[рад/с];

Δt – время, [с].

В случае неравномерного движения мгновенная угловая скорость будет иметь вид:

$$\bar{\omega}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}=\frac{d\varphi}{dt} \qquad [\text{рад/с}]$$

Угловая скорость – ***первая производная угла поворота по времени.***

При неравномерном вращательном движении вводим понятие углового ускорения.

Среднее угловое ускорение – ***отношение изменения угловой скорости к промежутку времени, за который это изменение произошло***

$$< \bar{\varepsilon} >= \frac{\Delta\bar{\omega}}{\Delta t}$$

Мгновенное ускорение – ***предел среднего углового ускорения при $\Delta t \to 0$***

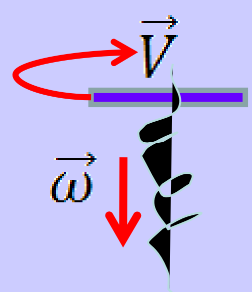
$$\bar{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} \quad [\text{рад/с}^2]$$

<u>Угловое ускорение</u> – ***это первая производная скорости по времени и вторая производная углового пути по времени.***

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\left(d\,\frac{d\varphi}{dt}\right)}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

Направление углового ускорения совпадает с вектором угловой скорости при равноускоренном движении и противоположно при равнозамедленном. Направление угловой скорости определяется ***<u>правилом буравчика</u>***:

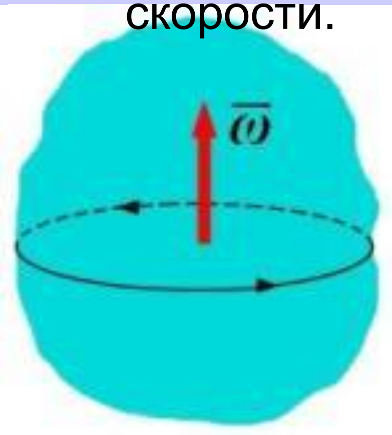
Вектор угловой скорости направлен в сторону поступательного движения буравчика, рукоятка которого вращается в направлении линейной скорости.



Направление векторов

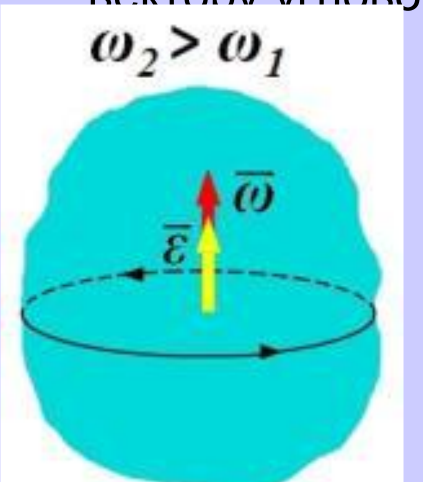
Направление угловой скорости

- Определяется правилом правого винта: если винт вращать в направлении вращения тела, то направление поступательного движения винта совпадёт с направлением угловой скорости.



Направление углового ускорения

- При ускоренном вращении векторы угловой скорости и углового ускорения совпадают по направлению. При замедленном вращении вектор углового ускорения направлен противоположно вектору угловой скорости.



Обозначим: $\Delta\varphi = 2\pi$, $dt = T$ – *период* – ***время, в течение которого совершается один полный оборот***, получим:

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu}$$

где ν =**1/T** – угловая частота [Гц]; **T** – период, [с].

$$\boxed{\omega = 2\pi\nu}$$

угловая скорость, выраженная через частоту

Линейная скорость при вращательном движении

$$V = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

Если материальная точка совершает полный оборот, то $\Delta S = 2\pi R$

$V = 2\pi R\nu$	$V = \dfrac{2\pi R}{T}$

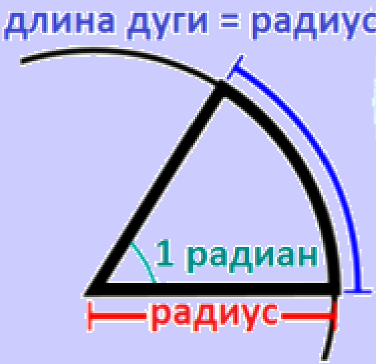
линейная скорость, выраженная через частоту

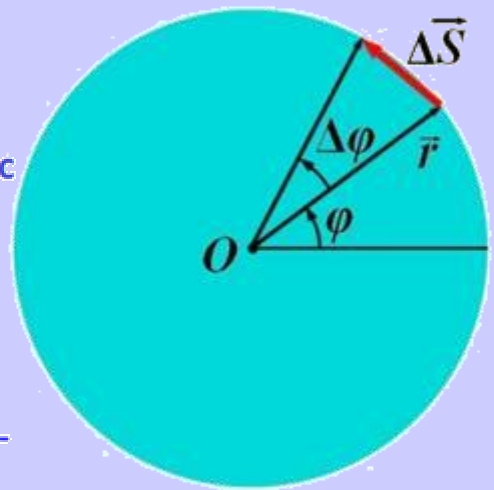
Линейная скорость, выраженная через период

Аналогия движений

Поступательное движение	Вращательное движение
Перемещение $\Delta\vec{s},\ [\Delta s] = \text{м}$	Угловое перемещение $\Delta\varphi,\ [\Delta\varphi] = \text{рад}$
Скорость $\vec{\upsilon} = \dfrac{\Delta\vec{s}}{\Delta t},\ [\upsilon] = \dfrac{\text{м}}{\text{с}}$	Угловая скорость $\omega = \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t},\ [\omega] = \dfrac{\text{рад}}{\text{с}}$
Ускорение $\vec{a} = \dfrac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t},\ [a] = \dfrac{\text{м}}{\text{с}^2}$	Угловое ускорение $\vec{\varepsilon} = \dfrac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t},\ [\varepsilon] = \dfrac{\text{рад}}{\text{с}^2}$

Прямая задача кинематики: по заданному как функция времени углу поворота $\varphi = f(t)$ найти угловые скорость и ускорение.
Обратная задача: по заданному как функция времени угловому ускорению $\varepsilon = f(t)$ и начальным условиям ω_0 и φ_0 найти кинематический закон вращения.





Связь между линейными и угловыми величинами

Линейные | **Угловые**

$$S, \bar{S}, \bar{V}, \bar{a} \qquad \varphi, \overline{\omega}, \bar{\varepsilon}$$

$$V = V_0 + at \qquad \omega = \omega_0 + \varepsilon t$$

$$S = V_0 t + \frac{at^2}{2} \qquad \varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$$

$$V = \frac{dS}{dt} = \frac{dr}{dt} \qquad \omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

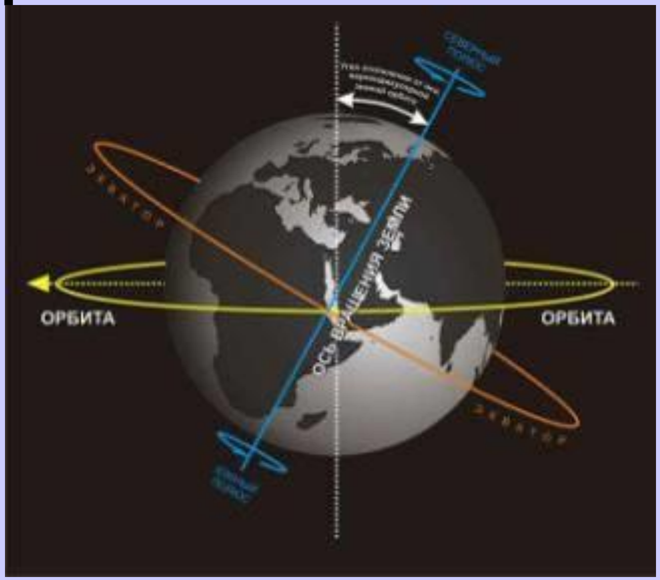
$$a = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2 S}{dt^2} \qquad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

При равномерном движении по окружности

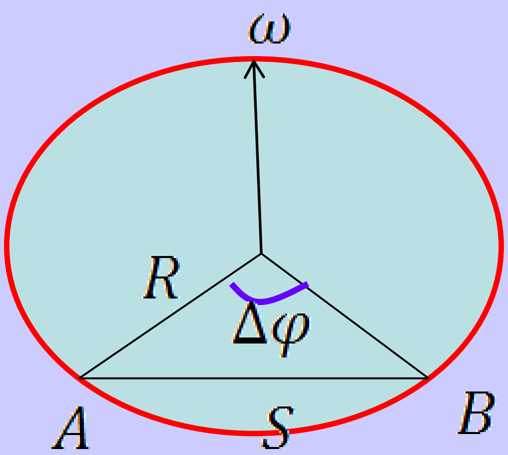
$$AB = S \Longrightarrow S = R \cdot \varphi, dS = Rd\varphi$$

Формулы кинематики вращательного движения

Поступательное	Вращательное
Равномерное	
$a = 0$	$\varepsilon = 0$
$\upsilon = \text{const}$	$\omega = \text{const}$
$s = \upsilon t$	$\varphi = \omega t$
Равнопеременное	
$a = \dfrac{\upsilon - \upsilon_0}{t} = \text{const}$	$\varepsilon = \dfrac{\omega - \omega_0}{t} = \text{const}$
$\upsilon = \upsilon_0 + a_\tau t$	$\omega = \omega_0 + \varepsilon t$
$s = \upsilon_0 t + \dfrac{a_\tau t^2}{2}$	$\varphi = \omega_0 t + \dfrac{\varepsilon t^2}{2}$
$\upsilon^2 - \upsilon_0^{\ 2} = 2 a_\tau s$	$\omega^2 - \omega_0^{\ 2} = 2\varepsilon\varphi$
Неравномерное	
$s = f(t)$	$\varphi = f(t)$
$\upsilon = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{ds}{dt} = s'(t)$	$\omega = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \dfrac{d\varphi}{dt} = \varphi'(t)$
$a = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \upsilon}{\Delta t} = \dfrac{d\upsilon}{dt} = \upsilon'(t)$	$\varepsilon = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \omega}{\Delta t} = \dfrac{d\omega}{dt} = \omega'(t)$



Пусть точка движется по окружности радиусом R и в момент времени t=0 находится в точке А. Положение точки через промежуток времени Δt можно задать углом, $\Delta\varphi$ который называется -*углом поворота* и определить по формуле:



$$\Delta\varphi = \frac{AB}{R}$$

При равномерном движении по

$$AB = S, \Longrightarrow S = R \cdot \varphi$$

Возьмем 1-ю производную по времени

$$\frac{dS}{dt} = R\frac{d\varphi}{dt}\ ; \quad \frac{dS}{dt} = V; \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega$$

$$V = \omega R$$

Связь между линейной и угловой скоростью.

$$a = \frac{dV}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = \frac{R d\omega}{dt} = R \cdot \varepsilon$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$$

ускорение

нормальное

тангенциальное

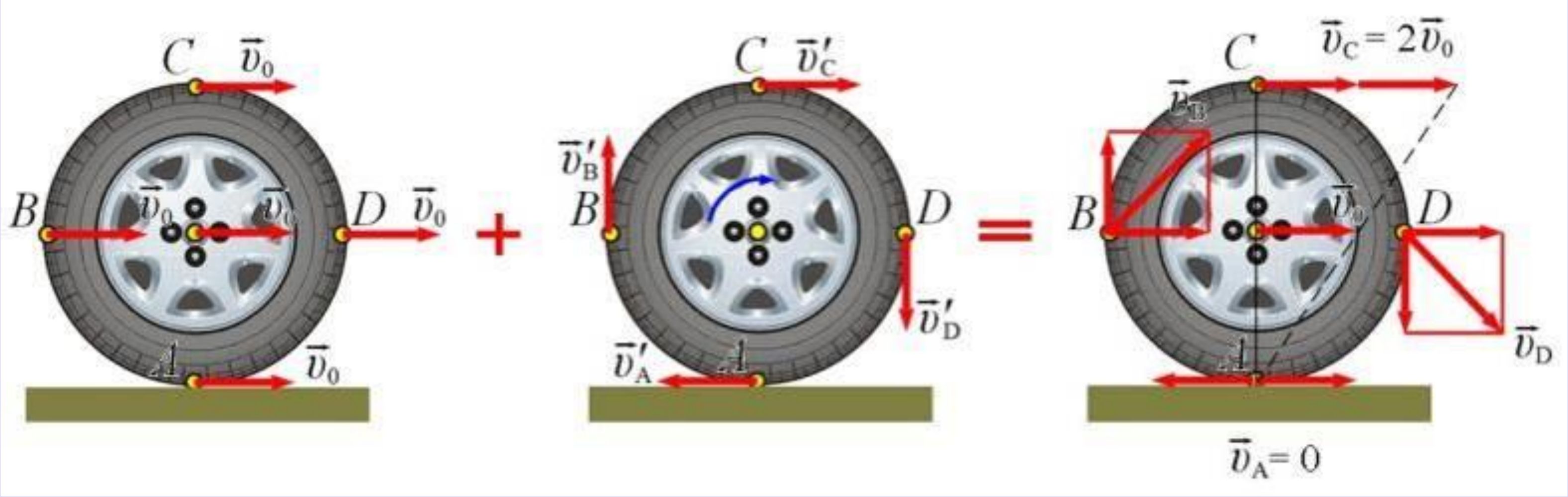
$$a_n = \omega^2 R$$

$$a_\tau = \varepsilon R$$

Произвольные движения твёрдого тела

поступательное + **вращательное** = **сложное движение**

Пример: плоскопараллельное движение колеса без проскальзывания по горизонтальной поверхности. Качение колеса можно представить как сумму двух движений: поступательного движения со скоростью центра масс тела и вращения относительно оси, проходящей через центр масс.



Методом последовательной съёмки запечатлена кинематика движения Дворцового моста в Санкт-Петербурге. Выдержка 6 секунд. Какую информацию о движении моста можно извлечь из фотографии? Проанализируйте кинематику его движения.

Вопросы для