Предисловие

Данное пособие соответствует начальной части курса лекций, посвященных основам дискретной математики, читаемых на вечернем факультете НИЯУ МИФИ. Пособие содержит базовую информацию по теории множеств и отношений. Для ряда положений приводятся доказательства, большая часть утверждений сознательно дана без доказательства в связи с тем, что, во-первых, эти доказательства не являются сложными, во-вторых, самостоятельный поиск доказательств является гораздо более полезным, чем их прочтение в пособиях.
Для лучшего понимания в конце параграфов приведены вопросы и упражнения. Значительная доля их требует только внимательного изучения текста или применения изложенных алгоритмов.
В конце пособия приводится список использованной литературы.

Множества.

Основные понятия теории

Определение множества

Во всякой теории существуют некоторый набор понятий. Эти понятия формально определяются, исходя из других понятий этой теории. Исключением являются первичные, базовые понятия, которые не могут быть определены подобным образом, поскольку ещё не были введены те понятия, которыми мы могли бы воспользоваться. Поэтому первые понятия теории определяются с использованием общепринятой лексики или же терминологии других дисциплин.
Поэтому, строго говоря, приведённое ниже определение множества не является формальным определением.
Множеством называется совокупность интуитивно различимых объектов, мыслимая как целое.
Рассмотрим подробнее данное определение.
Во-первых, множество определили как совокупность, т.е. порядок элементов в множестве значения не имеет. Во-вторых, объекты, составляющие множество, интуитивно различимы, значит, одинаковых элементов множество содержать не может, все элементы множества различны. В-третьих, совокупность рассматривается как целое, т.е. производится абстрагирование от свойств элементов, и изучаются свойства множества в целом.
Множество, состоящее из элементов a,b,c записывается как $\{a,b,c\}$.
Далее будем строчными латинскими буквами с индексами или без них обозначать элементы множеств, заглавными латинскими буквами с индексами или без них – множества.
Принадлежность элемента множеству обозначается знаком $\in$. Тогда факт, что элемент a принадлежит множеству A, обозначается как $a \in A$. Например, $a \in \{a,b,c\}$.
Если элемент не принадлежит множеству, это обозначается знаком $\notin$. Например, $d \notin \{a,b,c\}$.
Среди всех множеств выделяются два множества: пустое и универсальное.
Пустое множество – это множество, не содержащее элементов. Пустое множество обозначается $\varnothing$ (иногда пустое множество обозначается символом 0). Универсальное множество, или универсум – это множество, содержащее все возможные элементы.
Введение универсального множества приводит к некоторым проблемам, которые

обсуждаются далее. Универсальное множество обозначается символом U (иногда универсальное множество обозначается 1).

Способы задания множеств.

Множества могут быть заданы:

1. Перечислением элементов. Так обычно задаются конечные множества. Например, {a,b,c}, {2,3,4}.
2. С помощью ограничивающих свойств, например, запись $\{x \mid 0<x<1\}$ задаёт множество всех чисел, больших нуля и меньших, чем единица. Здесь и далее запись {x| «условие»} означает множество всех x, таких, для которых выполнено «условие
3. Порождающей процедурой, например, множество натуральных чисел может быть задано так:
   a. Число 0 – натуральное.
   b. Если n – натуральное число, то n+1 так же натуральное число.
   c. Других натуральных чисел нет.
4. Через известные множества. Например, $\{x \mid x \in A$ и $x \notin B\}$ задаёт множество, содержащее все те и только те элементы, которые одновременно принадлежат множеству A и не принадлежат множеству B.».
5. С помощью операций над множествами, этот способ рассматривается далее.

Отношения между множествами

Говорят, что множество A включено (вложено) в множество B, если любой элемент множества A является элементом множества B. Формально это записывается следующим образом:$A \subseteq B =_{df} \forall x[\, x \in A \Rightarrow x \in B]$.

Например, $\{a,b,c\} \subseteq \{a,b,c,d,f\}$, $\varnothing \subseteq \{a,f\}$.

Обозначение $=_{df}$ здесь и далее читается: определяется как. Связь $X \Rightarrow Y$ означает, что если выполнено условие X, то выполняется и условие Y.

Отношение включения является транзитивным. То есть, если выполнены отношения включения $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$, то выполняется и $A \subseteq C$.

В самом деле, возьмём произвольный элемент $x \in A$. Так как любой элемент, принадлежащий множеству A, принадлежит множеству B ($A \subseteq B$), то $x \in B$. Далее, поскольку x принадлежит множеству B, а любой элемент множества B принадлежит множеству C ($B \subseteq C$), то $x \in C$. Элемент x был выбран произвольно, получили, что любой элемент множества A принадлежит множеству C, это означает, что $A \subseteq C$.

Любое множество, включённое в множество A, называется подмножеством множества A. Для любого множества можно построить не менее одного подмножества, так как, например, $\varnothing \subseteq A$ для любого множества A.

Определим равенство множеств : $A=B =_{df} (A \subseteq B) \& (B \subseteq A)$. То есть множества считаем равными, если каждое из них является подмножеством другого.

Говорят, что подмножество B множества A называется собственным подмножеством множества A, если B является подмножеством множества A, и B не является подмножеством множества B.

Обозначение для собственных подмножеств: $A \subset B$ (строгое включение), а определение может быть записано следующим образом: $A \subset B =_{df} (A \subseteq B) \& (A \neq B)$.

Следует отметить, что иногда знаком $\subset$ обозначается любое включение множеств, а не только строгое.

Парадокс Рассела.

Определим множество как ординарное, если оно не является своим элементом, т.е. такие множества A, для которых $A \notin A$. Назовём множество экстраординарным в противном случае ($A \in A$). Понятно, что каждое множество может быть либо ординарным, либо экстраординарным, но не одновременно тем и другим.

Построим множество М – множество всех ординарных множеств. Оно должно быть или ординарным, или экстраординарным.
Пусть М – ординарное. Но М содержит все ординарные множества, следовательно, $M \in M$, поэтому М является экстраординарным.
Пусть М – экстраординарное. Тогда $M \in M$, но элементами множества М являются ординарные множества, значит, М ординарно.
Получили, что если множество М ординарно, оно должно быть экстраординарным, и если оно экстраординарно, то оно должно быть ординарным. Следовательно, оно не может быть ни ординарным, ни экстраординарным. Но оно должно быть или ординарным, или экстраординарным. Получено противоречие.
Разрешение этого противоречия состоит в запрещении строить множество, пока не построены все его элементы.
В этом случае построение множеств выглядит следующим образом:
1. Из некоторого набора элементов строим множества первой ступени.
2. Из исходных элементов и множеств первой ступени строим множества второй ступени.
3. Множества n-ой ступени строятся из элементов и множеств ступеней с 1-ой по (n-1)-ую.
Тогда построенная теория не будет содержать противоречий, подобных парадоксу Рассела, однако все теоремы о свойствах множеств и операций над ними надо будет доказывать для каждой ступени отдельно. Поэтому, не обращая внимания на возможность возникновения противоречий, мы будем работать с теорией множеств без разделения множеств на ступени, считая, что с объектами вида "множество всех множеств, не обладающих заданным свойством" нам не придётся часто сталкиваться.

Операции над множествами

Основные операции над множествами:
Объединение множеств определяется следующим образом $A \cup B =_{df} \{x | x \in A \vee x \in B\}$.
Объединение множеств содержит все элементы, принадлежащие хотя бы одному из этих множеств. Операция объединения множеств является аддитивной операцией.
Например, $\{a,b,c\} \cup \{c,d,f\} = \{a,b,c,d,f\}$.
На рис.1 с помощью кругов Эйлера представлено объединение множеств (выделено серым цветом). Здесь каждое множество представляется в виде круга, все круги на диаграммах изображаются пересекающимися.

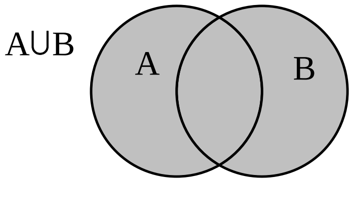


Рис. 1 Объединение множеств A∪B

Пересечение множеств определяется следующим образом $A \cap B =_{df} \{x | x \in A \& x \in B\}$.
Пересечение двух множеств содержит все те, и только те элементы, которые принадлежат одновременно двум этим множествам. Операция пересечения множеств является мультипликативной операцией.
Например, $\{a,b,c\} \cap \{c,d,f\} = \{ c \}$. На рис.2 представлено пересечение множеств A и B, оно выделено серым цветом.

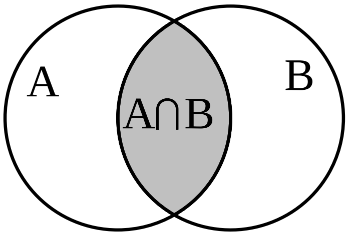


Рис. 2 Пересечение множеств A∩B

Дополнение множества A – множество всех элементов, не принадлежащих множеству A. $\bar{A} =_{df} \{x|\ x\notin A\}$.

Для построения дополнения, в практических случаях, не совсем ясно, какие именно элементы должны быть включены в дополнение. Например, пусть A={a,b,c}. Как в этом случае определить $\bar{A}$?

Поэтому часто заранее определяют универсум, и тогда определение дополнения множества A выглядит так: $\bar{A} =_{df} \{x|\ x\notin A \,\&\, x\in U\}$. Тогда, если U={a,b,c,d,e,f,g,h}, $\bar{A}$ ={d,e,f,g,h}.

На рис. 3 серым цветом выделено дополнение множества A. Прямоугольником обозначено универсальное множество U.

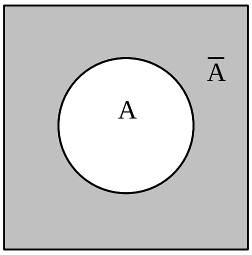


Рис. 3 Дополнение множества

Объединение, пересечение и дополнение являются основными операциями над множествами. Остальные операции над множествами могут быть выражены через основные операции. Наибольшим приоритетом среди этих операций обладает дополнение, более слабая операция – пересечения, объединение является самой слабой операцией. Введённые приоритеты позволяют в ряде случаев опускать скобки.

Например, множество $(A\cap B) \cup (C\cap D)$ может быть записано как $A\cap B \cup C\cap D$.

Формула для множества $A \cup C\cap D$ может быть записана как $A \cup (C\cap D)$.

Дополнительные операции

Разностью множеств A и B (обозначается A\B) называется множество, содержащее все элементы множества A, не принадлежащие множеству B.

$A\setminus B =_{df} \{x|\ x\in A \,\&\, x\notin B\}$.

Например, если A={a,b,c}, B={c,d,f}, то A\B={a,b}.

Очевидно, что разность множеств A и B можно выразить через основные операции следующим образом: $A\setminus B = A\cap\bar{B}$. Разность множеств A\B представлена на рис.4 (разность выделена серым цветом).

Симметрической разностью множеств A и B (обозначается $\dot{-}$) называется множество, содержащее все элементы, принадлежащие ровно одному из этих двух множеств.

$A \dot{-} B =_{df} \{x|\ x\in A \,\&\, x\notin B \vee x\in B \,\&\, x\notin A\}$.

Несложно показать, что $A \dot{-} B = (A\setminus B) \cup (B\setminus A)$.

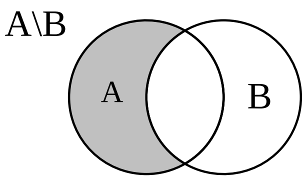


Рис. 4 Разность множеств A\B

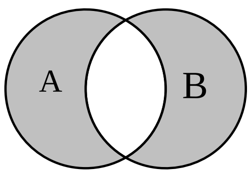


Рис. 5 Симметрическая разность множеств

На рис. 5 представлен симметрическая разность множеств A и B, она выделена серым цветом.

Вопросы и упражнения

1. Какие множества задаются перечислением элементов?
2. Пусть множество A ={1,2,3,4,5,6}, C={1,4,6}. Определить множество B такое, что C=A\B. Единственно ли решение этой задачи?
3. Существует ли такое множество A, что для любого множества B справедливо $A \subseteq B$?
4. Существует ли такое множество A, что для любого множества B справедливо $B \subseteq A$?
5. Для каких множеств A всегда существует множество B, такое, что $B \subseteq A$?
6. Какие из утверждений верны для любых A, B и C?
    a. Если $A \in B$, и $B \in C$, то $A \in C$.
    b. Если $A \subseteq B$, и $B \in C$, то $A \in C$.
    c. Если $A \in B$, и $B \subseteq C$, то $A \in C$.
    d. Если $A \neq B$, $B \neq C$, то $A \neq C$.
7. Любое ли множество имеет собственные подмножества?
8. Пусть известно, что множество $A \subseteq A \cap B$. Каково соотношение между множествами A и B?
9. В каком случае $A \cup B = B \cap A$?

Алгебра множеств

Законы алгебры множеств можно рассматривать как набор формул, определяющих эту алгебру, и тогда нет необходимости придавать формулам некоторую семантику (в этом случае, придавая операциям некоторую семантику, надо проверять соответствие семантики формулам), или же считать изначально заданной семантику операций над множествами, и на основании этой семантики доказывать законы. Здесь используется второй подход. В законах алгебры знаком равенства соединены эквивалентные формулы.

Доказательство законов может проводиться с помощью кругов Эйлера или диаграмм Венна, или словесно.

Законы алгебры множеств

1. Закон идемпотентности.

$A \cup A = A \cap A = A$

2. Закон коммутативности

$A \cup B = B \cup A \qquad A \cap B = B \cap A$

3. Закон ассоциативности

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \qquad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

4. Закон дистрибутивности

$A \cup B \cap C = (A \cup B) \cap (A \cup C) \qquad A \cap (B \cup C) = A \cap B \cup A \cap C$

5. Закон поглощения

$A \cup A \cap B = A \qquad A \cap (A \cup B) = A$

6. Закон полупоглощения, или Блейка-Порецкого

$A \cup \overline{A} \cap B = A \cup B \qquad A \cap (\overline{A} \cup B) = A \cap B$

7. Закон Де-Моргана

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

8. Закон склеивания

$(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup B) = B \qquad A \cap B \cup \overline{A} \cap B = B$

9. Закон двойного дополнения

$\overline{\overline{A}} = A$

10. Действия с константами

$\overline{A} \cap A = \varnothing$ $\overline{A} \cup A = U$

$\varnothing \cap A = \varnothing$ $\varnothing \cup A = A$

$A \cap U = A$ $A \cup U = U$

$\overline{\varnothing} = U$ $\overline{U} = \varnothing$

Свойства разности:

1. $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$
2. $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$
3. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$
4. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
5. $(A \setminus B) \setminus C \neq A \setminus (B \setminus C)$

Применение законов позволяет работать с записями множеств как с формулами, опираясь на законы алгебры, не заботясь о семантике. В этом случае в соответствии с законами любая формула может быть заменена на равную (эквивалентную), то есть с использованием эквивалентных преобразований. Например, если надо проверить равенство $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$, то можно взять левую часть равенства и по законам алгебры множеств получить правую часть:

$(A \cup B) \setminus C = (A \cup B) \cap \overline{C}$ (по определению разности)

$(A \cup B) \cap \overline{C} = A \cap \overline{C} \cup B \cap \overline{C}$ (по закону дистрибутивности)

$A \cap \overline{C} \cup B \cap \overline{C} = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$ (по определению разности), что и требовалось доказать.

Круги Эйлера и диаграммы Венна

Часто говорят о диаграммах Эйлера-Венна, считая это одинаковыми представлениями. На самом деле существуют различия в этих представлениях, и при решении задач различного типа бывает удобно пользоваться одним или же другим представлением.

В обоих представлениях множества изображаются в виде пересекающихся кругов. При этом на представленной диаграмме все круги в общем случае должны иметь общие области. Поэтому описываемый аппарат удобен в случае, если изображаются не более 3-х множеств.

Разница в этих графических представлениях состоит в следующем: при представлении с помощью кругов Эйлера отношения между множествами сразу изображаются явно, на диаграммах Венна все множества сначала изображаются для общего взаимоположения, а не существующие части заштриховываются. Так, на кругах Эйлера отношение включения множеств ($A \subseteq B$) представлено на рис.6,а, а представление в виде диаграммы Венна того же отношения представлено на рис. 6,б. На кругах Эйлера отношение включения изображается как вложение одного круга в другой, на диаграмме Венна отсутствующая часть заштриховываются.

Представление на кругах Эйлера является более наглядным, однако для построения правильного изображения соотношения между всеми рассматриваемыми множествами надо знать заранее, в то время как при использовании диаграмм Венна требуемое соотношение может быть получено в ходе решения задачи.

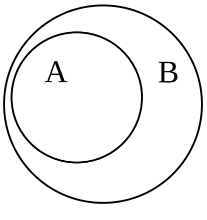


Рис.6, а

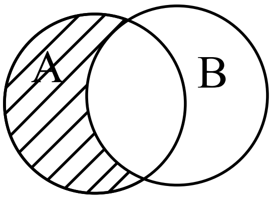


Рис.6,б

На рис. 7 (а, б) представлено отношение $A\cup B\subseteq C$, с помощью кругов Эйлера (7а) и диаграмм Венна (7б), соответственно.

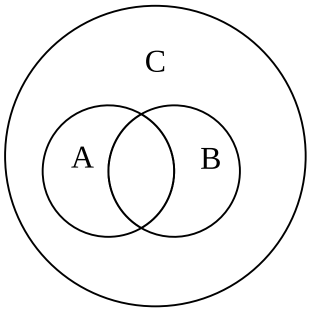


Рис.7, а

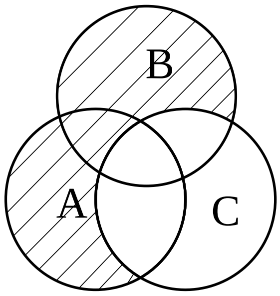


Рис. 7, б

Связь между отношениями и операциями над множествами.

Следует отметить два важнейших соотношения между операциями над множествами и отношениями между ними, при записи соотношения считаем, что операции над множествами имеют более высокий приоритет, чем отношения между множествами и логические операции.

1. $A\cap B \subseteq A \subseteq A\cup B$
2. $(A\subseteq B) \Leftrightarrow (A\setminus B=\varnothing) \Leftrightarrow (A\cup B=B) \Leftrightarrow (A\cap B=A) \Leftrightarrow (\bar{A}\cup B=U)$

Другие взаимозависимости даются в следующих формулах (в формулах опущен знак пересечения между множествами, $A\cap B$ обозначается AB, как это часто делается в математике, знак мультипликативной операции опускается).

1. $A\subseteq B \Rightarrow AC\subseteq B$
2. $A\subseteq B \Rightarrow A\subseteq B\cup C$
3. $A\subseteq BC \Rightarrow (A\subseteq B)\&(A\subseteq C)$
4. $A\cup C\subseteq B \Rightarrow (A\subseteq B)\&(C\subseteq B)$
5. $A\subseteq B \Rightarrow AC\subseteq BC$
6. $A\subseteq B \Rightarrow A\cup C\subseteq B\cup C$

Все перечисленные соотношения могут быть доказаны.

Вопросы и упражнения

1. Пусть множество $M=(A\cup B\cap C)\setminus(D \cap C\cup E)$. Расставить скобки с учётом приоритетов операций.
2. Верно ли, что $A \dot{-} (B\cap A)=A\setminus B$?
3. Могут ли равенства, описывающие свойства разности, быть доказаны с помощью законов алгебры множеств?
4. В каких случаях для представления множеств удобнее использовать диаграммы Венна?
5. Существуют ли обратные операции для операций дополнения и пересечения?
6. Являются ли законы алгебры множеств независимыми?
7. Можно ли доказывать законы теории множеств с использованием диаграмм?

Стандартные формы представления множеств (нормальные формы Кантора)

В стандартных формах представления множеств

1. Используются только основные связки (объединение, пересечение и дополнение).
2. Порядок использования связок фиксирован.
3. Знаки дополнения могут стоять только над элементарными множествами.

Существуют два вида нормальных форм: аддитивная и мультипликативная.
В аддитивной форме внешней связкой является объединение, далее может идти пересечение, знак дополнения может ставиться только над элементарными множествами.
Например, пусть множество F задано следующим образом:
$$F = A\backslash(C \cup D \cap A)$$
Приведём данное представление множества к аддитивной форме:
$$F = A\backslash(C \cup D \cap B) = A \cap \overline{C \cup D \cap B} = A \cap \overline{C} \cap (\overline{D} \cup \overline{B}) = A \cap \overline{C} \cap \overline{D} \cup A \cap \overline{C} \cap \overline{B}$$
Полученная формула является аддитивной нормальной формой Кантора представления множества F. Любая запись представления множества с помощью операций над множествами может быть приведена к аддитивной нормальной форме применением определения операций через основные операции и законов алгебры множеств.
В мультипликативной нормальной форме внешней связкой является пересечение, далее может следовать объединение, а знак дополнения может стоять только над элементарными множествами. Из аддитивной нормальной формы можно получить мультипликативную, и наоборот.
Например, построим мультипликативную форму для множества F.
$$F = A \cap \overline{C} \cap \overline{D} \cup A \cap \overline{C} \cap \overline{B} = A \cap \overline{C} \cap (\overline{D} \cup \overline{B})$$
Однако недостатком нормальных форм является то, что одно и то же множество может всё ещё быть представлено не единственным образом.
Например, множество F может быть представлено в мультипликативной форме ещё и так:
$$F = A \cup \overline{C} \cap (\overline{D} \cup \overline{B}) = (A \cup C) \cap \overline{C} \cap (\overline{D} \cup \overline{B})$$
Поэтому выделяются представления, в которых каждое множество может быть представлено единственным образом. Это совершенные нормальные формы Кантора.
Существуют две совершенные нормальные формы Кантора – аддитивная и мультипликативная.

Совершенная аддитивная нормальная форма

Совершенная аддитивная нормальная форма Кантора (САНФ) – объединение пересечений, и в каждом пересечении участвуют все элементарные множества или в прямом виде, или в виде дополнения. Такие пересечения, в которых присутствуют все элементарные множества в прямом виде или со знаками дополнения, называются конституентами единицы. Таким образом, САНФ множества – объединение конституент единицы. Формальная запись аддитивной нормальной формы, где элементарными множествами являются M_i, $i \in [1,n]$
$$\bigcup_j \bigcap_{i=1}^{n} M_i^{\sigma_{ij}}, \sigma_{ij} \in \{0,1\}$$
В записи нормальных форм используются обозначения: $M^0 = \overline{M}$, $M^1 = M$.

Обозначим множество A – M_1, B – M_2, C – M_3, D – M_4. Опустим, как это принято, в записи знаки пересечения и построим совершенную аддитивную нормальную форму множества F.
$$F = M_1\overline{M_3}\,\overline{M_4} \cup M_1\overline{M_2}\,\overline{M_3} = M_1\overline{M_3}\,\overline{M_4}(\overline{M_2} \cup M_2) \cup M_1\overline{M_2}\,\overline{M_3}(\overline{M_4} \cup M_4) =$$
$$M_1\overline{M_2}\,\overline{M_3}\,\overline{M_4} \cup M_1M_2\overline{M_3}\,\overline{M_4} \cup M_1\overline{M_2}\,\overline{M_3}\,\overline{M_4} \cup M_1\overline{M_2}\,\overline{M_3}M_4 =$$
$$M_1\overline{M_2}\,\overline{M_3}\,\overline{M_4} \cup M_1M_2\overline{M_3}\,\overline{M_4} \cup M_1\overline{M_2}\,\overline{M_3}M_4 =$$
$$M_1^1M_2^0M_3^0M_4^0 \cup M_1^1M_2^1M_3^0M_4^0 \cup M_1^1M_2^0M_3^0M_4^1$$
Если порядок множеств в САНФ задан, то для задания множества достаточно указать степени элементарных множеств. Каждая из конституент единицы обозначается

буквой *p* с индексом, соответствующим степеням входящих в неё элементарных множеств.

Множество *F* может быть записано $F=p_{1000}\cup p_{1100}\cup p_{1001}$, или, в десятичной записи, $F=p_8\cup p_{12}\cup p_9$. Если известно количество элементарных множеств, то по номерам конституент можно восстановить САНФ.

Каждая конституента единицы представляет собой область пространства, заданного n элементарными множествами, при этом n считается размерностью соответствующего пространства.

Например, на рис. 8, а-в представлены конституенты, соответственно, для случаев пространства, состоящего из одного, двух и трёх множеств.

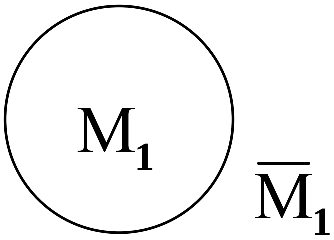


Рис.8,а

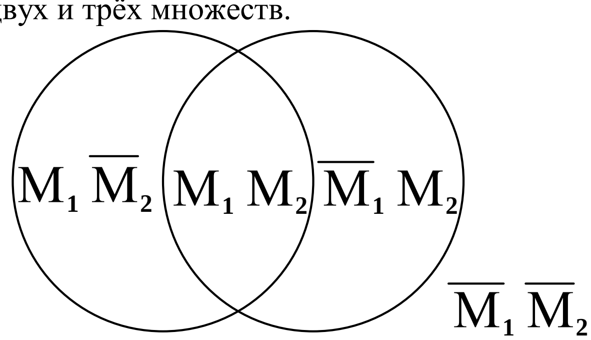


Рис.8,б

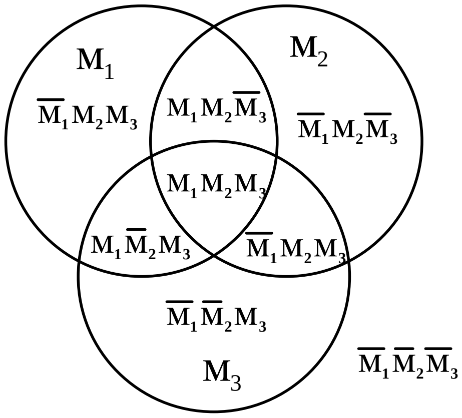


Рис. 8, в

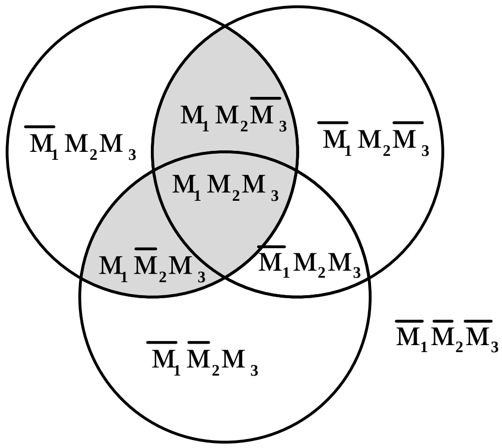


Рис.9

На рис. 9 представлено множество $M_1\cap(M_2\cup M_3)$, множество выделено серым цветом.

Теорема. Два множества равны тогда и только тогда, когда совпадают их совершенные нормальные формы.

Совпадение рассматривается с точностью до перестановки конституент и сомножителей в произведениях.

Свойства конституент единицы:

1. Объединение всех конституент единицы образует универсальное множество. В самом деле, каждая конституента образует часть пространства, всего конституент при n элементарных множествах 2^n. Все 2^n конституент покрывают всё пространство.
2. Пересечение двух различных конституент единицы пусто. Рассмотрим пересечение двух различные конституент единицы.

$$M_1^{i_1}M_2^{i_2}...M_k^{i_k}...M_n^{i_n} \cap M_1^{j_1}M_2^{j_2}...M_k^{j_k}...M_n^{j_n} = M_1^{i_1}M_2^{i_2}......M_n^{i_n}(M_k^{i_k} \cap M_k^{j_k})M_1^{j_1}M_2^{j_2}......M_n^{j_n} = \varnothing$$

Хотя бы у одного из элементарных множеств в конституентах степени различны, например, у вхождений множества M_k ($\{i_k,j_k\}=\{0,1\}$). В пересечении можно поставить эти множества рядом (по законам ассоциативности и коммутативности), пересечение этих множеств (M_k^0, M_k^1)пусто, а значит, пусто и пересечение конституент.

Совершенная мультипликативная нормальная форма

Аналогично аддитивной нормальной форме определяется совершенная мультипликативная нормальная форма (СМНФ). Она является пересечением объединений, в каждое объединение входят все элементарные множества в прямом виде или в виде дополнения.

Формальное представление для совершенной мультипликативной нормальной формы

$\bigcap_{j}\bigcup_{i=1}^{n} M_i^{\sigma_{ij}}, \sigma_{ij} \in \{0,1\}$. Как и ранее, используются обозначения: $M^0=\overline{M}$, $M^1=M$.

Построим СМНФ для множества G в пространстве из трех множеств (M_1, M_2, M_3):

$$
\begin{aligned}
G &= M_1\overline{M_2} \cup \overline{M_1}\,\overline{M_3} = (M_1 \cup \overline{M_1}\,\overline{M_3})(\overline{M_2} \cup \overline{M_1}\,\overline{M_3}) = \\
&= (M_1 \cup \overline{M_1})(M_1 \cup \overline{M_3})(\overline{M_2} \cup \overline{M_3})(\overline{M_2} \cup \overline{M_1}) = \\
&= (M_1 \cup \overline{M_3} \cup M_2\overline{M_2})(\overline{M_2} \cup \overline{M_3} \cup M_1\overline{M_1})(\overline{M_2} \cup \overline{M_1} \cup M_3\overline{M_3}) = \\
&= (M_1 \cup \overline{M_3} \cup M_2)(M_1 \cup \overline{M_3} \cup \overline{M_2})(\overline{M_2} \cup \overline{M_3} \cup M_1) \cap \\
&\cap (\overline{M_2} \cup \overline{M_3} \cup \overline{M_1})(\overline{M_2} \cup \overline{M_1} \cup M_3)(\overline{M_2} \cup \overline{M_1} \cup \overline{M_3}) = \\
&= (M_1 \cup M_2 \cup \overline{M_3})(M_1 \cup \overline{M_2} \cup \overline{M_3})(M_1 \cup \overline{M_2} \cup \overline{M_3}) \cap \\
&\cap (\overline{M_1} \cup M_2 \cup \overline{M_3})(\overline{M_1} \cup \overline{M_2} \cup M_3)(\overline{M_1} \cup \overline{M_2} \cup \overline{M_3}) = \\
&= (M_1 \cup M_2 \cup \overline{M_3})(M_1 \cup \overline{M_2} \cup \overline{M_3})(\overline{M_1} \cup \overline{M_2} \cup \overline{M_3})(\overline{M_1} \cup \overline{M_2} \cup M_3) = \\
&= q_{001} \cap q_{011} \cap q_{111} \cap q_{110} = q_1 \cap q_3 \cap q_7 \cap q_6
\end{aligned}
$$

Конституенты СМНФ называются конституентами нуля. Конституенты нуля обозначаются символом ***q***. В двоичном индексе у символа ***q*** пишется 1 для множества со знаком дополнения, и 0 для множества без знака дополнения.

Свойства конституент нуля:

1. Пересечение всех конституент нуля – пустое множество.
2. Объединение двух различных конституент нуля – универсальное множество.

Представление множеств на гиперкубах

Гиперкуб размерности n - граф, имеющий 2^n вершин, каждая из которых помечена двоичным числом с n разрядами (все числа различны), вершины соединяются, если они различаются ровно в 1 разряде. Каждое число представляет одну конституенту единицы, i-ая цифра в числе означает степень i-ого множества в конституенте.

На рис. 10, а-г, представлены гиперкубы размерности 1, 2, 3 и 4, соответственно.

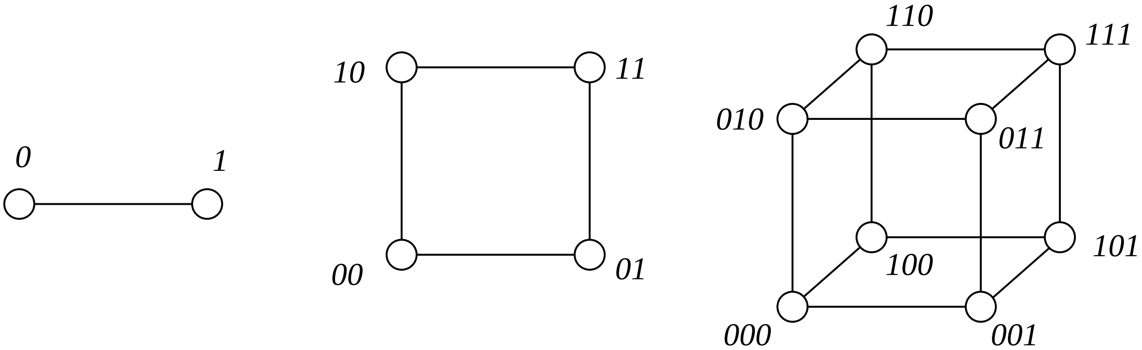


Рис.10,а Рис.10,б Рис.10, в

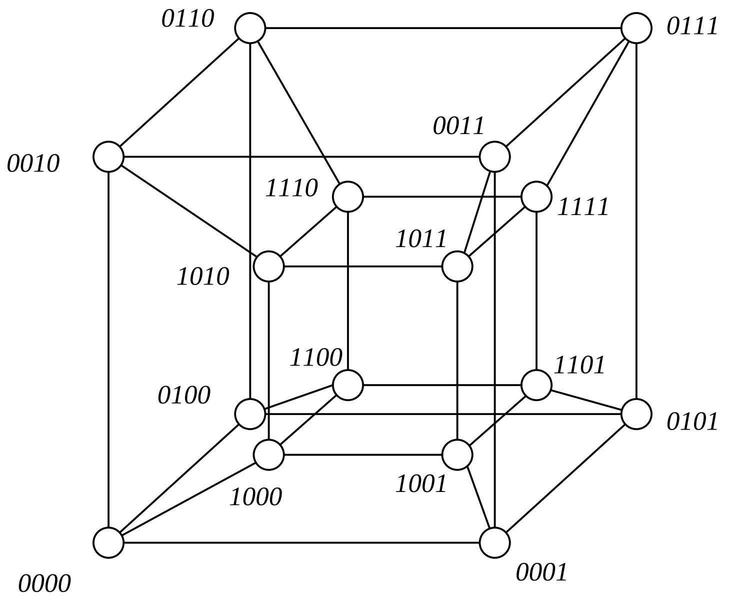


Рис. 10,г

На гиперкубе, как и на кругах Эйлера, можно представлять множества. Для этого вершины, соответствующие представленным в множестве конституентам, закрашиваются. На рис. 11 представлено на гиперкубе размерности 3 представлено множество $M_1 \cap (M_2 \cup M_3)$, ранее изображённое на рис. 9 на кругах Эйлера.

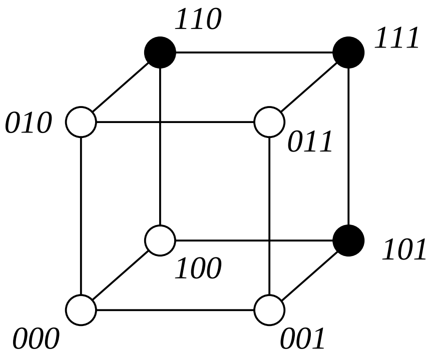


Рис.11.

Вопросы и упражнения

1. Пусть множество $M=(A \cup B \cap C) \setminus (D \cap C \cup E)$. Привести представление множества к аддитивной форме.
2. Любое ли представление множества может быть приведено к аддитивной форме?
3. Обладает ли однозначностью представление множества на гиперкубе?
4. Сколько вершин имеет гиперкуб размерности 5? Какова степень вершин этого гиперкуба?
5. Как связаны между собой представление множества на гиперкубе с совершенной аддитивной нормальной формой представления этого множества?
6. Как связано число конституент единицы с числом конституент нуля для одного и того же множества?
7. Пусть множество М имеет 5 конституент единицы. Каково число конституент нуля этого множества, если размерность пространства 4?

8. Каково максимальное количество конституент может быть в совершенной аддитивной нормальной форме множества, не являющегося универсальным, если размерность пространства (число элементарных множеств) равно 4?
9. Пусть множество M задано набором конституент единицы $\{p_3,p_7,p_9\}$. Какова размерность пространства, на котором задано множество M? Однозначно ли задано множество?

Минимизация представления множеств в алгебре Кантора

Покрытия двоичных таблиц

Построение покрытий двоичных таблиц позволяет решить ряд задач, описываемых в терминах дискретной математики, а так же используется в некоторых алгоритмах как их составная часть.

Двоичная таблица – матрица, каждый элемент которой равен 0 или 1.

Может рассматриваться покрытие столбцов строками или строк столбцами. Соответственно, для каждого вида покрытия будут свои определения. Далее рассматриваются покрытия столбцов строками. Определения для покрытия строк столбцами легко получить из определений покрытия столбцов строками.

Множество строк называется покрытием множества столбцов двоичной таблицы, если в этом множестве строк на пересечении с каждым столбцом есть хотя бы одна единица, минимальное в том смысле, что ни для какого его подмножества это свойство не выполняется (минимальность по включению).

Например, для таблицы 1 (нули в таблице обычно не изображаются) существуют ровно два покрытия.

Табл.1

	1	2	3	4	5	6
a	1		1	1		
b				1	1	1
c		1			1	1
d	1		1			

{a,c}, {b, c, d} - покрытия

Множество строк {a, b} не является покрытием, т.к. в этом множестве нет единицы во втором столбце, множество {a,b,c} так же не является покрытием, так как оно не минимально по включению (можно исключить строку b, и свойство сохранится).

Покрытие таблицы называется минимальным, если оно содержит минимально возможное число строк. Для таблицы 1 это покрытие {a,c}.

Обязательной строкой покрытия называется строка, среди единиц которой есть единица, являющаяся единственной в своём столбце. Для таблицы 1 это строка c.

Множество обязательных строк образует ядро покрытия.

Если в таблицы есть ядро, то для построения таблицы записывается ядро, затем в таблице вычёркиваются строки ядра и те столбцы, которые содержат единицы в этих строках. Затем ищется покрытие оставшейся таблицы.

	1	2	3	4	5	6
a	1		1	1		
b				1	1	1
c		1			1	1
d	1		1			

В таблице серым цветом выделены вычеркнутые строки и столбцы, соответствующие ядру c. Далее ищется покрытие для столбцов 1, 3, 4. Это строка a или две строки b и d. В итоге получаем два покрытия, указанные у таблицы 1.

В общем случае покрытие ищется методом Петрика.

Алгоритм определения покрытия методом Петрика:

1. Для каждого столбца записывается формула как объединение названий строк, содержащих единицу в этом столбце.

2. Строится общая формула, как пересечение формул, полученных по всем столбцам.
3. Полученная формула приводится к аддитивной форме, и вычёркиваются поглощаемые элементы.

В полученной таким образом формуле каждое пересечение соответствует покрытию (поскольку вычеркнуты поглощаемые элементы, оно минимально по включению), а минимальное по числу элементов пересечение – минимальному покрытию.

Рассмотрим нахождение покрытия для таблицы 1.

Формулы для столбцов (перечислены по порядку): $(a\cup d)$; c; $(a\cup d)$; $(a\cup b)$;$(b\cup c)$;$(b\cup c)$.

Общая формула: $(a\cup d) \cap c\cap (a\cup d) \cap (a\cup b) \cap (b\cup c) \cap (b\cup c)$, знаки пересечения в формуле оставлены для наглядности.

Приведём формулу к аддитивной форме: $(a\cup d) \cap c\cap (a\cup d) \cap (a\cup b) \cap (b\cup c) \cap (b\cup c)= (a\cup d) \cap c\cap (a\cup b) \cap (b\cup c) = (a\cup d) \cap c\cap (a\cup b) =(a\cup d\cap b) \cap c =a\cap c\cup b\cap c\cap d$

Таким образом, получено два пересечения: $a\cap c$ и $b\cap c\cap d$. Пересечению $a\cap c$ соответствует покрытие {a,c}, пересечению $b\cap c\cap d$ - покрытие{b, c, d}.

Алгоритм минимизации полностью определённых множеств.

Рассматривается процедура уменьшения сложности представления множеств в алгебре Кантора.

Сложностью представления множества называется число вхождений в это представление элементарных множеств и элементарных множеств со знаками дополнения. Например, сложность представления множества $Q= M_1\cap(M_2\cup M_3)$ равна 3. Сложность формулы F обозначается L(F) .

Минимальной нормальной формой Кантора для некоторого множества M называется нормальная форма Кантора множества M, имеющая наименьшую сложность.

Интервалом множества M называется множество конституент множества M, образующее гиперкуб некоторой размерности. Например, интервалом множества Q будет множество его конституент $\{M_1M_2\overline{M_3}, M_1M_2M_3\}$ образующее гиперкуб размерности 1. Соответственно, одна конституента образует гиперкуб размерности 0.

Очевидно, что мощность интервала (число входящих в него конституент) равно 2^i, где i – размерность соответствующего данному интервалу гиперкуба.

Интервал I_α называется максимальным интервалом I_{max}, если не найдётся отличного от него интервала I_β, такого, что $I_\alpha \subseteq I_\beta$.

У множества Q два максимальных интервала : $\{M_1\overline{M_2}M_3, M_1M_2M_3\}$ и $\{M_1M_2\overline{M_3}, M_1M_2M_3\}$.

Пересечение, соответствующее максимальному интервалу множества M, называется простой импликантой этого множества.

Например, максимальному интервалу $\{M_1M_2\overline{M_3}, M_1M_2M_3\}$ соответствует простая импликанта M_1M_2.

Объединение простых импликант множества M называется сокращённой нормальной формой Кантора (сокращённой НФК) множества M.

Например, сокращённая НФК множества Q - $M_1M_2\cup M_1M_3$.

Количество первичных термов (т.е. элементарных множеств или элементарных множеств со знаком дополнения), образующих простую импликанту, называется рангом простой импликанты, а элементарное пересечение – рангом соответствующего интервала.

Тупиковая НФК множества М – такая НФК, которая при вычёркивании хотя бы одного первичного терма не определяет М.

Лемма 1. Минимальная НФК множества М является тупиковой.

Лемма 2. Тупиковая НФК состоит из простых импликант этого множества М.

Док-во:

Если хотя бы одно пересечение не является максимальным, то это пересечение можно заменить простой импликантой вычёркиванием соответствующих первичных термов, не выходя из класса эквивалентности, значит, форма была не тупиковая.

Теорема. Тупиковая НФК содержится в сокращённой.

Алгоритм минимизации сложности представления множеств применяется для множеств, заданных совершенной аддитивной нормальной формой. Результатом применения алгоритма является аддитивная нормальная форма представления множества, имеющая минимальную сложность.

Алгоритм может быть применён и к совершенным мультипликативным формам, но для этого в него должны быть внесены соответствующие изменения, эти вопросы здесь не рассматриваются.

1. Выделение максимальных интервалов множества М.

При выделении максимальных интервалов множество интервалов делится на ярусы по числу единиц в записи интервала.

Два интервала склеиваются, если они различаются ровно в одной позиции, причём в записи одного интервала в этой позиции стоит 0, в записи другого – 1. В получившемся интервале в этой позиции ставится прочерк, остальные символы сохраняются.

В склеивании могут принять участие интервалы только соседних ярусов.

В сокращённую НФК входят все интервалы наивысшего ранга и интервалы низших рангов, не принявшие участия в склеивании.

2. Построение таблицы Квайна. По строкам в таблице приводятся найденные простые импликанты, по столбцам – исходные интервалы. На пересечении строки и столбца ставится 1, если максимальный интервал включает в себя исходный, и 0 или ничего не ставится в противном случае.

3. Нахождение покрытия таблицы Квайна (столбцов строками).

4. Запись тупиковых НФК – каждому покрытию таблицы соответствует тупиковая НФК. В тупиковую нормальную форму включаются формулы для всех строк, образующих покрытие.

5. Нахождение минимальной НФК. Минимальная НФК – тупиковая с наименьшей сложностью.

Пример. Пусть интервалы исходного множества заданы степенями элементарных множеств, входящих в интервал. Прочерк в i –ой позиции интервала соответствует отсутствию i –го элементарного множества в записи интервала.

0001	00-1	(1и2)	-0-1	(8и11)
0011	-001	(1и3)	-0-1	(9и10)
1001	-011	(1и4)		
1010	10-1	(2и7)		
0110	1-10	(3и7)		
1110	101-	(4и6)		
1011	-110	(5и7)		

Серым цветом выделены интервалы, принявшие участия в склеивании (они не входят в строки таблицы Квайна). В скобках справа от интервалов указаны интервалы, от склеивания которых они произошли.

Таблица Квайна:

		0001	0011	1001	1010	0110	1110	1011
a	-0-1	1	1	1				1
b	1-10				1		1	
c	101-				1			1
d	-110					1	1	

В таблице Квайна серым цветом выделены обязательные строки (a и d) и покрываемые ими столбцы. Таким образом, таблица имеет два покрытия:{a,b,d}, {a,c,d}. Покрытиям соответствуют тупиковые формы.

abd: $\overline{M_2}M_4 \cup M_1M_3\overline{M_4} \cup M_2M_3\overline{M_4}$, L=8.

acd: $\overline{M_2}M_4 \cup M_1\overline{M_2}M_3 \cup M_2M_3\overline{M_4}$, L=8.

В данном случае они имеют одинаковую сложность, следовательно, каждая из них является минимальной.

Им соответствуют скобочные структуры:

$\overline{M_2}M_4 \cup M_1M_3\overline{M_4} \cup M_2M_3\overline{M_4} = \overline{M_2}M_4 \cup M_3\overline{M_4}(M_1 \cup M_2)$, L=6

$\overline{M_2}M_4 \cup M_1\overline{M_2}M_3 \cup M_2M_3\overline{M_4} = \overline{M_2}M_4 \cup M_3(M_1\overline{M_2} \cup M_2\overline{M_4})$, L=7

Минимизация не полностью определённых множеств.

Множество не полностью определено, если известны области, которые принадлежат множеству, и области, не принадлежащие множеству. Остальные области пространства могут быть как включены в множество, так и не включены в него. В зависимости от того, какие из областей включаются в множество, оно может быть доопределено различным образом. При минимизации множества доопределение проводится таким образом, чтобы сложность представления множества была минимально возможной.

В результате минимизации получаются различные представления множества, при этом в отличие от минимизации полностью определённых множеств, полученные представления могут соответствовать различным множествам.

Интервалы, принадлежащие множеству M, называются единичными интервалами. Интервалы, не принадлежащие множеству M, называются нулевыми интервалами.

Минимизация не полностью определённых множеств проводится по тому же алгоритму, что и минимизация полностью определённых множеств, отличие только в способе нахождения максимальных интервалов, поэтому сразу рассматривается пример применения алгоритма.

В качестве примера рассматривается множество A, определенное следующим образом:

$$A:\ \begin{cases} \overline{M_1}\,\overline{M_3}\,M_4, \overline{M_1}\,M_2M_4, M_1M_2\overline{M_3}, \overline{M_1}\,M_2\overline{M_4} \in A \\ M_1\overline{M_2}\,M_4, M_1M_2M_3, \overline{M_1}\,\overline{M_2}\,\overline{M_4} \notin A \end{cases}$$

1. Нахождение максимальных интервалов.

Для нахождения максимальных интервалов множества составляются таблицы различий. Для каждого из единичных интервалов составляется своя таблица. Пусть n - размерность исходного пространства (в примере с множеством A размерность равна 4). $|V_0|$ - число нулевых интервалов. Таблица различий – двумерная таблица размерности $n \times |V_0|$.

Каждой строке таблицы соответствует один разряд единичного интервала, столбцу – нулевой интервал. В случае отсутствия в записи интервала какого-нибудь из исходных множеств в соответствующей позиции ставится прочерк. На пересечении i-ой строки с j-ым столбцом ставится результат сложения по модулю 2 i-ых разрядов единичного и j–го нулевого интервала, доопределенного для операции с прочерком.

Для каждой из таблиц различия составляются покрытия. Эти покрытия определяют максимальные интервалы для минимального представления множества.

Таблица для сложения по модулю 2($\oplus$):

$\oplus$	0	1	-
0	0	1	0
1	1	0	0
-	0	0	0

Таблица различий для первого единичного интервала:

	1 0 - 1	1 1 1 -	0 0 - 0
0	1	1	0
-	0	0	0
0	0	1	0
1	0	0	1

Покрытие для таблицы – первая и четвёртая строки, соответствующий интервал 0 - -1

Таблицы различий для остальных трёх единичных интервалов объединены далее:

	1 0 - 1	1 1 1 -	0 0 - 0
0	1	1	0
1	1	0	1
-	0	0	0
1	0	0	1
1	0	0	1
1	1	0	1
0	0	1	0
-	0	0	0
0	1	1	0
1	1	0	1
-	0	0	0
0	1	0	0

Два покрытия – первая и вторая, первая и четвёртая строки, соответствующие интервалы: 01- -, 0- - 1

Покрытие – вторая и третья строки, соответствующий интервал: -10-

Покрытие – первая и вторая строки, соответствующий интервал: 01- -

2. В таблице Квайна, или в таблице вхождений, по строкам указываются найденные максимальные интервалы, а по столбцам – исходные единичные интервалы. На пересечении строки и столбца ставится 1, если максимальный интервал включает в себя исходный, и ставится 0 или ничего не ставится в противном случае. Максимальный интервал включает в себя исходный, если исходный совпадает с максимальным или получен из него заменой некоторых прочерков на нули или единицы.

Соответствующая таблица Квайна для примера:

	0-01	01-1	110-	01-0
0 - -1	1	1		
01- -		1		1

-10-			1	

3. В полученной таблице все строки являются обязательными, таким образом, покрытие состоит из трёх строк.
4. Тупиковая форма в данном случае одна, следовательно, она является минимальной.

Соответствующая множеству А минимальная форма представления множества:

$\overline{M_1}M_4 \cup \overline{M_1}M_2 \cup M_2\overline{M_3}$ со сложностью L=6.

Или, соответствующая этому представлению скобочная структура:

$\overline{M_1}M_4 \cup \overline{M_1}M_2 \cup M_2\overline{M_3} = \overline{M_1}(M_4 \cup M_2) \cup M_2\overline{M_3}$, сложность её, L=5.

Вопросы и упражнения

1. Любая ли двоичная таблица имеет покрытие столбцов строками?
2. Сколько ядер может иметь покрытие двоичной таблицы?
3. Какое максимальное число покрытий столбцов строками может иметь двоичная таблица с 3-мя строками? С 5 строками?
4. Может ли таблица Квайна не иметь покрытий? Ответ обоснуйте.
5. Всегда ли тупиковая нормальная форма множества является минимальной?
6. Каково максимальное число ярусов для пространства из 4-х множеств?
7. Могут ли принять участие в склеивании интервалы не соседних ярусов?
8. Почему все минимальные представления полностью определённого множества эквивалентны?
9. Чем может быть обусловлено существование не единственной минимальной формы не полностью определённых множеств?

Отношения

Отношения n–арные и бинарные

Существуют различные подходы к определению понятия отношения. Здесь применяется подход, использующий понятие декартова произведения множеств.

Декартово произведение множеств и его свойства

Прямым (декартовым) произведением множеств A_1, A_2,…A_n называется множество всех последовательностей длины n (кортежей), в которой i-ый элемент принадлежит i-ому множеству:

$A_1\times A_2\times\ldots\times A_n =_{Df} \{\langle a_1,a_2,\ldots a_n\rangle, a_i\in A_i, i\in[1,n]\}$.

Например, пусть $A_1=\{a,b\}$, $A_2=\{b,c\}$, $A_3=(1,2\}$.

Тогда $A_1\times A_2\times A_3=\{\langle a,b,1\rangle,\langle a,b,2\rangle,\langle a,c,1\rangle,\langle a,c,2\rangle,\langle b,b,1\rangle,\langle b,b,2\rangle,\langle b,c,1\rangle,\langle b,c,2\rangle\}$.

Свойства декартова произведения:

1. Ассоциативность. Декартово произведение множеств ассоциативно.

$A\times(B\times C)=(A\times B)\times C=A\times B\times C$

Отметим, что не во всех теориях декартово произведение рассматривается как ассоциативное. В тех случаях, когда следует отличать $\langle a,\langle b,c\rangle\rangle$ от $\langle\langle a,b\rangle,c\rangle$, декартово произведение рассматривается как не обладающее свойством ассоциативности.

2. Коммутативностью декартово произведение в общем случае не обладает, т.е. $A\times B\neq B\times A$.
3. Декартово произведение дистрибутивно относительно объединения, т.е.

$(A\cup B)\times C= (A\times C)\cup(B\times C)$

$C\times (A\cup B)= (C\times A)\cup(C\times B)$

4. Декартово произведение дистрибутивно относительно пересечения, т.е.

$(A\cap B)\times C= (A\times C) \cap (B\times C)$

$C\times (A\cap B)= (C\times A) \cap (C\times B)$

5. Для любого множества A, $A\times\varnothing=\varnothing$.

Если $A_1=A_2=\ldots=A_n$, то $\underbrace{A\times A\times\ldots A}_{n\text{ сомножителей}}$ называется прямой степенью A и обозначается A^n.

Отношения

Любое подмножество R декартова произведения множеств $A_1, A_2,\ldots A_n$ называется n-арным отношением на $A_1, A_2,\ldots A_n$. Формально $R\subseteq A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$.

Например, для множеств $A_1=\{a,b\}$, $A_2=\{b,c\}$, $A_3=(1,2\}$.

Можно определить $R=\{\langle a,b,1\rangle, \langle a,c,2\rangle,\langle b,b,1\rangle,\langle b,c,1\rangle,\langle b,c,2\rangle\}$.

Или, например, пусть A_1- множество преподавателей, A_2 – множество учебных групп, A_3 – множество учебных дисциплин. Тогда на декартовом произведении этих множеств можно определить отношение "преподаватель ведёт занятия в группе по данной дисциплине". Отношения такого типа широко используются в банках данных, да и само название "реляционные банки данных" произошло от английского слова "relation", означающего "связь, отношение".

Если $R\subseteq A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$, а в декартовом произведении $A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$ выполняется равенство $A_1=A_2=\ldots=A_n$, то говорят об n-арном отношении на множестве A.

Чаще всего речь идёт о бинарных отношениях, т.к. любое отношение может быть сведено к множеству бинарных отношений.

Пусть бинарное отношение определено между элементами множеств A и B, $R\subseteq A\times B$.

Если между парой элементов множеств A и B, $x\in A$, $y\in B$, выполняется отношение R, используются следующие обозначения: x R y, R(x,y), $\langle x,y\rangle\in R$. По аналогии с множествами, пару $\langle x,y\rangle$ принадлежащую отношению R, будем называть элементом отношения.

Областью определения бинарного отношения R называется $\delta_R=\{x\mid \exists y, \langle x,y\rangle\in R\}$.

Например, пусть отношение R_1 определено на декартовом произведении множества A (преподавателей) на B(множество групп) и означает "преподаватель ведёт занятия в группе в осеннем семестре", тогда область определения этого отношения – все преподаватели, которые ведут какие-либо занятия в осеннем семестре. Отметим, что область определения отношения $R\subseteq A\times B$ не обязательно совпадает с множеством A.

Областью изменения отношения R называется $\rho_R=\{x\mid \exists y, \langle y,x\rangle\in R\}$.

Для того же отношения R_1 областью изменения будет множество групп, в которых преподавателями проводятся какие-либо занятия в осеннем семестре.

Пусть дано отношение $R_2\subseteq A\times B$, где $A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{1,3,7\}$,

$R_2=\{\langle a,1\rangle,\langle a,3\rangle,\langle b,1\rangle,\langle d,3\rangle\}$. Тогда $\delta_{R_1}=\{a,b,d\}$, $\rho_{R_1}=\{1,3\}$. Область определения (и область изменения) в данном случае не совпадает с множеством, для которого определяется отношение.

Часто рассматриваются бинарные отношения между элементами одного множества, т.е. отношения $R\subseteq A\times A$. Например, если рассмотреть отношение R(x,y): "x выше ростом, чем y", то область определения отношения – множество лиц, для которых найдётся кто-то ниже, область изменения – множество лиц, для которых найдётся кто-то выше.

Способы представления бинарных отношений

Используются три способа представления бинарных отношений.

1. Перечисление множества пар (кортежей), входящих в отношение. Так, например, задано отношение R_2 выше. Однако перечисление пар таким образом требует использования дополнительных символов – угловых (иногда круглых) скобок и запятых. Часто пары, входящие в отношение, перечисляют сверху вниз:

$$R_2 = \left\{ \begin{matrix} a\,1 \\ a\,3 \\ b\,1 \\ d\,3 \end{matrix} \right\}$$

Элементы, встречающиеся в первом столбце такого представления, задают область определения отношения, элементы второго столбца – область изменения.

2. Матричный способ задания отношений. Для $R \subseteq A\times B$ строится матрица, по строкам – элементы множества A, по столбцам – B, и элемент матрицы

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } \langle a_i\ b_j \rangle \in R \\ 0, \text{ если } \langle a_i\ b_j \rangle \notin R \end{cases}$$

При матричном задании отношения элементы, входящие в область определения, имеют 1 в своей строке, а элементы, входящие в область изменения – в своём столбце.

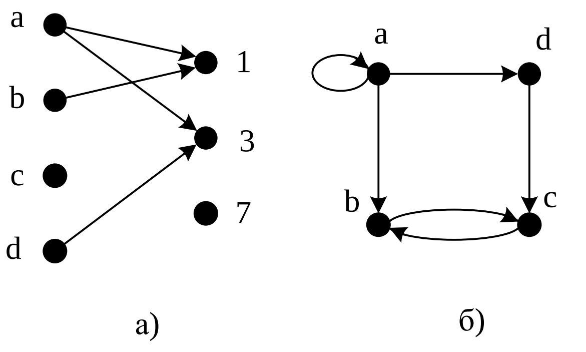
Например, матрица для отношения R_2:

$$\begin{array}{c|ccc|} & 1 & 3 & 7 \\ a & 1 & 1 & 0 \\ b & 1 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

4. Графический способ задания отношений. Для $R \subseteq A\times B$ при $A \neq B$ множество вершин соответствует множеству $A \cup B$, и если пара $\langle a,b \rangle \in R$, то строится дуга с началом в a и концом в b. На рисунке 12,а представлен граф для отношения R_2.

Графический способ представления отношений чаще используется для $R \subseteq A\times A$. В этом случае вершины графа сопоставляются элементам множества A, и если пара $\langle a_i,a_j \rangle \in R$, то строится дуга с началом в a_i и концом в a_j, при $i= j$ строится соответствующая петля. Например, на $A=\{a,b,c,d\}$ задано отношение R_3. Далее оно представлено перечислением множества пар, матрицей и графом (рис. 12,б).

$$R_3: \left\{ \begin{matrix} a & a \\ a & b \\ a & d \\ b & c \\ c & b \\ d & c \end{matrix} \right\} \qquad R_3: \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$



а) б)

Рис. 12 Графы для отношений R_2(а) и R_3 (б).

Образом множества X относительно отношения R называется множество

$R(X)=_{Df}\{y \mid \exists x \in X, \langle x,y \rangle \in R\}$.

Например, если рассматриваемое ранее отношение R_1 определено как "преподаватель ведёт занятия в группе в осеннем семестре", множество X – множество преподавателей некоторой кафедры, то $R_1(X)$ – множество групп, в которых в осеннем семестре ведут занятия преподаватели этой кафедры.

Функции и отображения

Отношение f называется функцией из A в B (из A на B), если $\delta_f=A$, $\rho_f\subseteq B$ ($\rho_f=B$) и для всех x, y_1, y_2 из условий $<x,y_1>\in R$ и $<x,y_2>\in R$ следует $y_1=y_2$. Функция f из A в B обозначается $f: A\rightarrow B$.

Если отношение f является функцией, то пишем y=f(x) вместо $<x,y>\in f$ и называем y значением функции f при аргументе x.

Например, пусть A={a,b,c}, B_1= {1,2,3}, B_2= {1,2}.

$R_7 = \begin{Bmatrix} a1 \\ b1 \\ c2 \end{Bmatrix}$ R_7 является функцией из A в B_1 и функцией из A на B_2.

Соответственно, если $f: A^n\rightarrow B$, то f - n-местная функция.

Множество всех функций из A в B обозначается B^A.

Функция называется 1-1 функцией, если для любых x_1, x_2, y из того, что $y=f(x_1)$ и $y=f(x_2)$ следует $x_1=x_2$. R_7 не является 1-1 функцией, так как f(a) =f(b).

Рассмотрим отношение $g\subseteq A\times C$, A={a,b,c}, C= {d,e,i,j}: $g = \begin{Bmatrix} a\,d \\ b\,e \\ c\,j \end{Bmatrix}$ g является 1-1 функцией.

Среди всех функций $f: A\rightarrow A$ выделяется функция $i_A: A\rightarrow A$, $i_A(x)=x$. i_A – тождественная функция, она каждому элементу множества A ставит в соответствие этот же самый элемент. Функция i_A является 1-1 функцией. Матрица i_A содержит единицы по главной диагонали, на остальных местах - 0.

Говорят, что $f: A\rightarrow B$ осуществляет взаимно-однозначное соответствие, если $\delta_f=A$, $\rho_f=B$ и f – 1-1 функция.

Очевидно, что i_A осуществляет взаимно-однозначное соответствие. Если рассматривать функцию g как $A\rightarrow B$, A={a,b,c}, B= {d,e,i }, то для этих множеств g так же является взаимно-однозначным соответствием.

Вопросы и упражнения

1. Как можно обосновать свойства декартова произведения множеств?
2. Каким образом n-арное отношение может быть представлено в виде набора бинарных отношений?
3. Как установить область определения отношения при матричном способе задания отношения?
4. Как установить область изменения отношения при графическом способе задания отношения?
5. Сколько различных n-арных отношений можно построить на множестве A={a, b}?
6. Пусть в множестве A n элементов, в множестве B – m элементов. Отношение $R\subseteq A\times B$ содержит n+1 элемент. Может ли отношение R быть функцией?
7. Пусть отношение R на множестве A из n элементов является функцией из A в A. Число элементов отношения равно n. Является ли отношение 1-1 функцией?
8. Пусть в множестве A n элементов. Какое условие является необходимым для множества B, чтобы между множествами A и B существовало взаимно-однозначное соответствие?

Операции над отношениями

Множественные операции.

Операции объединения и пересечения для отношений определяются так же, как и для множеств. Считается, что $R_1 \subseteq A\times B$ и $R_2 \subseteq A\times B$.

Объединение отношений: $R_1 \cup R_2 =_{Df} \{\langle x,y\rangle \mid \langle x,y\rangle \in R_1 \vee \langle x,y\rangle \in R_2\}$. То есть, объединению бинарных отношений принадлежат все пары, принадлежащие хотя бы одному из исходных отношений. Понятно, что операция объединения применима не только к бинарным отношениям.

Пересечение бинарных отношений: $R_1 \cap R_2 =_{Df} \{\langle x,y\rangle \mid \langle x,y\rangle \in R_1 \& \langle x,y\rangle \in R_2\}$. Пересечению отношений принадлежат все пары, принадлежащие одновременно обоим отношениям.

Например, пусть $R_4 \subseteq A\times A$ и $R_5 \subseteq A\times A$, $A=\{a,b,c,d\}$,

$$R_4 = \left\{\begin{matrix} a\ b \\ a\ c \\ c\ b \\ c\ d \\ a\ d \end{matrix}\right\} \qquad R_5 = \left\{\begin{matrix} a\ b \\ b\ c \\ c\ c \\ c\ d \\ a\ d \end{matrix}\right\}$$

Тогда их объединение и пересечение:

$$R_4 \cup R_5 = \left\{\begin{matrix} a\ b \\ a\ c \\ c\ b \\ c\ d \\ a\ d \\ b\ c \\ c\ c \end{matrix}\right\} \qquad R_4 \cap R_5 = \left\{\begin{matrix} a\ b \\ c\ d \\ a\ d \end{matrix}\right\}$$

Дополнение отношения $R \subseteq A\times B$ определяется следующим образом:

$\overline{R} =_{Df} (A\times B)\backslash R$.

Например, пусть $R_6 \subseteq A\times A$, $A=\{a,b,c\}$,

$$R_6 = \left\{\begin{matrix} a\ b \\ a\ c \\ c\ b \\ b\ a \end{matrix}\right\}$$

Тогда

$$\overline{R}_6 = \left\{\begin{matrix} a\ a \\ b\ b \\ b\ c \\ c\ a \\ c\ c \end{matrix}\right\}$$

Матрица дополнения отношения получается из матрицы исходного отношения одновременной заменой нулей на единицы, а единиц на нули. Граф дополнения отношения строится как дополнение графа исходного отношения (т.е. множество вершин графа совпадает с множеством вершин исходного графа, а дуги - все возможные дуги, которых не было в исходном графе).

$$R_6: \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad \overline{R_6}: \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Поскольку определения операций объединения, пересечения и дополнения отношений тождественны определению соответствующих операций над множествами, для этих операций над отношениями выполняются все законы алгебры множеств. Это обусловлено тем, что отношения так же являются множествами, только, для случая бинарных отношений, множествами пар.

В частности, $\overline{\overline{R}} = R$.

Специальные операции

Над отношениями так же определены специфические операции.
Обратным отношением для отношения R называется отношение R^{-1}
$R^{-1} =_{Df} \{<x,y> | <y, x> \in R_1\}$.
Так,

$$R_6^{-1} = \begin{Bmatrix} a\ b \\ c\ a \\ b\ c \\ b\ a \end{Bmatrix}$$

Матрица для обратного отношения получается транспонированием матрицы исходного отношения, а граф для обратного отношения получается из графа исходного отношения, если все дуги графа перенаправить в противоположную сторону.
Произведением отношений $R_1 \subseteq A \times B$ и $R_2 \subseteq B \times C$ называется отношение $R_1 \circ R_2 \subseteq A \times C$,
$R_1 \circ R_2 =_{Df} \{<x,y> | \exists z <x, z> \in R_1 \& <z,y> \in R_2\}$.
Например, для приведённых выше R_4 и R_5, построено $R_4 \circ R_5$.

$$R_4 = \begin{Bmatrix} a\ b \\ a\ c \\ c\ b \\ c\ d \\ a\ d \end{Bmatrix} \qquad R_5 = \begin{Bmatrix} a\ b \\ b\ c \\ c\ c \\ c\ d \\ a\ d \end{Bmatrix} \qquad R_4 \circ R_5 = \begin{Bmatrix} a\ c \\ ad \\ c\ c \end{Bmatrix}$$

Свойства операций над отношениями.

Здесь перечисляются те свойства, которые связаны с операциями построения обратного отношения и произведения отношений.

1. $(R^{-1})^{-1} = R$
2. $(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$
3. $(R_1 \cap R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cap R_2^{-1}$
4. $\overline{R^{-1}} = \left(\overline{R}\right)^{-1}$
5. $(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$
6. $(R_1 \cup R_2) \circ R_3 = R_1 \circ R_3 \cup R_2 \circ R_3$
7. $R_1 \circ (R_2 \cup R_3) = R_1 \circ R_2 \cup R_1 \circ R_3$
8. $(R_1 \cap R_2) \circ R_3 \subseteq R_1 \circ R_3 \cap R_2 \circ R_3$
9. $R_1 \circ (R_2 \cap R_3) \subseteq R_1 \circ R_2 \cap R_1 \circ R_3$
10. $(R_1 \circ R_2)^{-1} = R_2^{-1} \circ R_1^{-1}$
11. Если $R_1 \subseteq R_2$, то
    1. $R_1^{-1} \subseteq R_2^{-1}$
    2. $\overline{R_2} \subseteq \overline{R_1}$
    3. $R_1 \circ R_3 \subseteq R_2 \circ R_3$
    4. $R_3 \circ R_1 \subseteq R_3 \circ R_2$
12. Если $R \subseteq A \times A$, то $R \circ i_A = R$.

Вопросы и упражнения

1. Бинарные отношения R_1 и R_2 определены на одном и том же множестве A. Пусть отношение R_1 содержит 5 элементов, R_2 – 9 элементов. Сколько элементов в отношении $R_1 \cup R_2$?
2. Необходимо ли знать область, на которой определено отношение, для построения дополнения? Обратного отношения?
3. Пусть отношение R определено на множестве A={a, b, c, d} и содержит 7 элементов. Сколько элементов в дополнении отношения? В обратном отношении?
4. Для любых ли отношений R_1, R_2, R_3 выполняется равенство $R_1 \cup (R_2 \cap R_3) = (R_1 \cup R_2) \cap (R_1 \cup R_3)$?
5. В каком случае $R_1 \circ (R_2 \cap R_3) = R_1 \circ R_2 \cap R_1 \circ R_3$?
6. При каких условиях при $R_1 \subseteq R_2$ выполняется $R_3 \circ R_1 = R_3 \circ R_2$?

Свойства отношений. Специальные бинарные отношения.

В данном разделе рассматриваются бинарные отношения, определённые на A×A (т.е. $R \subseteq A \times A$).

Рефлексивность.

Отношение R называется рефлексивным, если для любого элемента x, принадлежащего множеству A, $\langle x,x \rangle \in R$. (Формальная запись $\forall x \in A\ \langle x,x \rangle \in R$).

Например, пусть $R_8 \subseteq A \times A$, $R_9 \subseteq A \times A$, $R_{10} \subseteq A \times A$, A={a,b,c},

$$R_8 = \left\{ \begin{array}{l} a\ b \\ b\ c \\ c\ b \\ b\ a \end{array} \right\} \qquad R_9 = \left\{ \begin{array}{l} a\ b \\ a\ c \\ c\ b \\ b\ a \\ b\ b \\ c\ c \end{array} \right\} \qquad R_{10} = \left\{ \begin{array}{l} a\ b \\ a\ a \\ b\ a \\ b\ b \\ c\ c \end{array} \right\}$$

Отношения R_8, R_9 не являются рефлексивными (в R_8 нет пар вида $\langle x,x \rangle$, в R_9 нет пары $\langle a,a \rangle$), отношение R_{10} является рефлексивным.

Если рефлексивное отношение представлено графом, то в каждой вершине графа есть петля. Если отношение представлено матрицей, то все элементы на главной диагонали – единицы.

Рефлексивность отношения $R \subseteq A \times A$ может быть представлена как $i_A \subseteq R$ или $i_A \cup R = R$.

Рефлексивным замыканием отношения R называется наименьшее рефлексивное отношение, включающее в себя R. Обозначение рефлексивного замыкания: R^r. Способ построения R^r : $R^r = i_A \cup R$. Очевидно, что для рефлексивного отношения $R^r = R$.

$$R_9^r = \left\{ \begin{array}{l} a\ b \\ a\ c \\ c\ b \\ b\ a \\ b\ b \\ c\ c \\ a\ a \end{array} \right\}$$

Отношение R называется иррефлексивным, если $\forall x \in A\ \langle x,x \rangle \notin R$. Иррефлексивность отношения $R \subseteq A \times A$ может быть представлена как $i_A \cap R = \varnothing$.

В матрице иррефлексивного отношения все элементы на главной диагонали нулевые. Если же отношение представлено графом, то в графе нет петель.

Иррефлексивным является отношение R_8, отношения R_9 и R_{10} иррефлексивными не являются.

Рефлексивность и иррефлексивность, очевидно, являются взаимоисключающими свойствами, однако отношение может быть не рефлексивным и не иррефлексивным, как, например, отношение R_9.
Важно отметить, что для проверки рефлексивности необходимо знать область, на которой определено отношение. Так, поскольку $R_{10} \subseteq A \times A$, $A=\{a,b,c\}$, оно является рефлексивным ($\forall x \in A$ $\langle x,x \rangle \in R_9$). Однако, если определить $A=\{a,b,c, d\}$, то R_{10} окажется нерефлексивным $\langle d, d \rangle \notin R_{10}$. Иррефлексивным же R_9 в любом случае не является, в то время как R_8 иррефлексивно так же независимо от определения множества A.
Симметричность
Отношение R называется симметричным, если $\forall x,y$ ($\langle x,y \rangle \in R \Rightarrow \langle y,x \rangle \in R$).
Например, симметричными являются отношения R_8 и R_{10}. Отношение R_9 симметричным не является.
Симметричность отношения R может быть выражена формулами $R^{-1} = R$ и $R \cup R^{-1} = R$.
Если отношение R является симметричным, то его матрица симметрична относительно главной диагонали, а в графе для каждой дуги из x в y существует дуга из y в x.
Пустое отношение по определению является симметричным.
Симметричным замыканием отношения R (обозначается R^s) называется наименьшее симметричное отношение, включающее в себя R. Симметричное замыкание отношения строится по формуле: $R^s = R \cup R^{-1}$.
Например, симметричное замыкание отношения R_9 - R_9^s.

$$R_9^s = \left\{\begin{matrix} a\ b \\ a\ c \\ c\ b \\ b\ a \\ b\ b \\ c\ c \\ c\ a \\ b\ c \end{matrix}\right\}$$

Отношение R называется антисимметричным, если $\forall x,y$ ($\langle x,y \rangle \in R \,\&\, \langle y,x \rangle \in R \Rightarrow x=y$).
Формула для проверки антисимметричности отношения R: $R \cap R^{-1} \subseteq i_A$.
Антисимметричность отношения в матрице отражается отсутствием симметрично расположенных относительно главной диагонали единиц везде, кроме самой главной диагонали (которая может содержать как нули, так и единицы). Граф для антисимметричного отношения не содержит симметричных дуг (петли в графе могут быть).
Антисимметричными являются отношения R_4 и R_5.

$$R_4 = \left\{\begin{matrix} a\ b \\ a\ c \\ c\ b \\ c\ d \\ a\ d \end{matrix}\right\} \qquad R_5 = \left\{\begin{matrix} a\ b \\ b\ c \\ c\ c \\ c\ d \\ a\ d \end{matrix}\right\}$$

Свойства антисимметричности и симметричности не являются несовместимыми. Любое отношение $R \subseteq i_A$, является одновременно симметричным и антисимметричным.
Отношение R называется асимметричным, если $\forall x,y$ $\langle x,y \rangle \in R \Rightarrow \langle y,x \rangle \notin R$. Формула для проверки асимметричности $R \cap R^{-1} = \varnothing$.
Матрица асимметричного отношения содержит нули на главной диагонали, и для каждой единицы матрицы симметрично ей относительно главной диагонали находится нуль. Граф асимметричного отношения не содержит петель и симметричных дуг.
Пример асимметричного отношения – R_{11}.

$$R_{11}=\left\{\begin{matrix} a\ b \\ a\ c \\ b\ c \\ d\ a \\ d\ b \\ c\ d \end{matrix}\right\}$$

Транзитивность

Отношение R называется транзитивным, если $\forall x,y,z$ ($<x,y>\in R$ $\&<y,z>\in R \Rightarrow <x,z>\in R$).
Свойство транзитивности можно записать как $R\circ R\subseteq R$. Проверка свойства транзитивности может быть проведена по этой же формуле.
Непосредственно по матричному представлению отношения транзитивность не видна (можно построить произведение $R\circ R$, а затем проверить включение $R\circ R\subseteq R$), в графе транзитивность отображается как наличие замыкающей дуги для всех пар последовательных дуг.

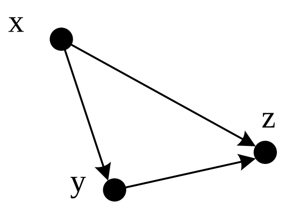


Рис. 13 Пример наличия транзитивной дуги

Т.е. если есть дуга из вершины x в вершину y и дуга из вершины y в вершину z, то должна быть и дуга из вершины x в вершину z. Например, отношение R_{12} является транзитивным.

$$R_{12}=\left\{\begin{matrix} a\ b \\ a\ c \\ c\ b \\ d\ b \\ a\ d \end{matrix}\right\}$$

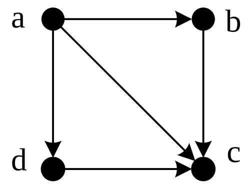


Рис.14 Граф отношения R_{12}

Транзитивным замыканием отношения R (R^T) называется наименьшее транзитивное отношение, включающее в себя R. Построить транзитивное замыкание отношения можно по формуле $R^T= R\cup R\circ R\cup R\circ R \circ R \cup R\circ R\circ R \circ R\cup\ldots$
Произведения строятся до тех пор, пока не очередное произведение не окажется подмножеством уже построенного отношения. Максимальное число сомножителей в произведении равно числу элементов множества A.
Например, построим $R_{13}{}^T$

$$R_{13}=\left\{\begin{matrix} a\ b \\ c\ a \\ c\ b \\ b\ d \\ a\ d \end{matrix}\right\}$$

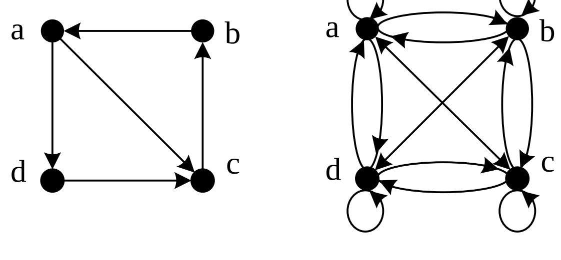


Рис.15 Графы для R_{13} и $R_{13}{}^T$

В этом случае $R_{13}^{T} = A \times A$. Транзитивное замыкание для R_5 приведено на рис.16.

$$R_5 = \left\{ \begin{array}{l} a\ b \\ b\ c \\ c\ c \\ c\ d \\ a\ d \end{array} \right\}$$

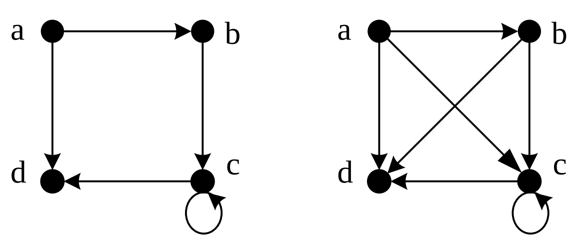


Рис.16 Графы для R_5 иR_5^{T}

Отношение R называется интранзитивным, если $\forall x,y,z$ ($\langle x,y \rangle \in R$ $\& \langle y,z \rangle \in R \& (x \neq y) \& (y \neq z) \& (x \neq z) \Rightarrow \langle x,z \rangle \notin R$). Это определение может быть записано как $\forall x,y,z$ ($\langle x,y \rangle \in R$ $\& \langle y,z \rangle \in R$ $\& \langle x,z \rangle \in R \Rightarrow (x=y) \vee (y=z) \vee (x=z)$).
Свойство интранзитивности может быть записано как $(R \setminus i_A) \circ (R \setminus i_A) \subseteq i_A$.
Отношение R_8 является интранзитивным.
Свойства транзитивности и интранзитивности не являются взаимоисключающими. Так, Например, отношение R_{14} является одновременно транзитивным и интранзитивным.

$$R_8 = \left\{ \begin{array}{l} a\ b \\ b\ c \\ c\ b \\ b\ a \end{array} \right\} \qquad R_{14} = \left\{ \begin{array}{l} a\ b \\ b\ a \\ a\ a \\ b\ b \end{array} \right\}$$

Связь операций над отношениями со свойствами отношений.

Пусть R_1 и R_2 определены на одном и том же множестве A.

1. Если R_1 и R_2 рефлексивны, то рефлексивны и $R_1 \cap R_2$, $R_1 \cup R_2$, $R_1 \circ R_2$,R_1^{-1} .
Докажем свойство для $R_1 \cap R_2$.Т.к. R_1 и R_2 рефлексивны, то $R_1 = R_1 \cup i_A$, $R_2 = R_2 \cup i_A$, значит, $R_1 \cap R_2 = (R_1 \cup i_A) \cap (R_2 \cup i_A) = R_1 \cap R_2 \cup R_1 \cap i_A \cup R_2 \cap i_A \cup i_A \cap i_A = R_1 \cap R_2 \cup i_A$.
Следовательно, $i_A \subseteq R_1 \cap R_2$, что и означает, что отношение $R_1 \cap R_2$ – рефлексивно.
2. Если R_1 и R_2 иррефлексивны, то иррефлексивны и $R_1 \cap R_2$, $R_1 \cup R_2$, ,R_1^{-1}.
Докажем для $R_1 \cup R_2$. Т.к. R_1 и R_2 иррефлексивны, то $R_1 \cap i_A = \varnothing$ и $R_2 \cap i_A = \varnothing$. Тогда $(R_1 \cup R_2) \cap i_A = R_1 \cap i_A \cup R_2 \cap i_A = \varnothing \cup \varnothing = \varnothing$, что означает, что $R_1 \cup R_2$ – иррефлексивно.
Отношение $R_1 \circ R_2$ для иррефлексивных отношений R_1 и R_2 может не быть иррефлексивным. Например, пусть

$$R_A = \left\{ \begin{array}{l} a\ b \\ b\ c \end{array} \right\} \quad R_B = \left\{ \begin{array}{l} b\ a \\ b\ c \end{array} \right\} \quad \text{Тогда } R_A \circ R_B = \left\{ \begin{array}{l} a\ a \\ a\ c \end{array} \right\}$$

В данном случае произведение двух иррефлексивных отношений оказалось не иррефлексивным.
3. Для любого отношения R отношение $R \circ R^{-1}$ является симметричным.
Отношение R – симметрично тогда и только тогда, когда $R = R^{-1}$. Рассмотрим обратное отношение для $R \circ R^{-1}$: $(R \circ R^{-1})^{-1} = (R^{-1})^{-1} \circ R^{-1} = R \circ R^{-1}$, следовательно, $R \circ R^{-1}$ – симметрично.
4. Если R_1 и R_2 симметричны, то симметрично и $R_1 \cap R_2$, $R_1 \cup R_2$, R_1^{-1} .
Свойства легко доказываются на основании свойств операций над отношениями.
5. Произведение симметричных отношений R_1 и R_2 симметрично тогда и только тогда, когда $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$.

Доказательство. а) Пусть $R_1 \circ R_2$ симметрично. Это означает, что $R_1 \circ R_2 = (R_1 \circ R_2)^{-1}$. Но симметричны и R_1 и R_2 : $R_1=R_1^{-1}, R_2=R_2^{-1}$. Тогда $(R_1 \circ R_2)= (R_1 \circ R_2)^{-1}= R_2^{-1}\circ R_1^{-1}= R_2\circ R_1$.

б) Пусть $R_1\circ R_2= R_2\circ R_1$. R_1 и R_2 симметричны: $R_1=R_1^{-1}, R_2=R_2^{-1}$. Построим $(R_1 \circ R_2)^{-1}$. $(R_1 \circ R_2)^{-1}=R_2^{-1} \circ R_1^{-1}= R_2\circ R_1$, но, из $R_1\circ R_2= R_2\circ R_1$ получаем, что $(R_1 \circ R_2)^{-1}= R_1\circ R_2$, что и означает, что $R_1\circ R_2$ – симметрично.

6. Если R_1 и R_2 антисимметричны, то антисимметрично и $R_1 \cap R_2$, R_1^{-1} . Если R_1 и R_2 антисимметричны, то $R_1\cup R_2$ антисимметрично тогда и только тогда, когда $R_1 \cap R_2^{-1}\subseteq i_A$.

Докажем последнее утверждение. Если R_1 и R_2 антисимметричны, значит, $R_1\cap R_1^{-1}\subseteq i_A$, $R_2\cap R_2^{-1}\subseteq i_A$.

а) Пусть $R_1\cup R_2$ антисимметрично. Тогда $(R_1\cup R_2) \cap(R_1\cup R_2)^{-1}\subseteq i_A$, но $(R_1\cup R_2) \cap(R_1\cup R_2)^{-1}=R_1\cap R_1^{-1} \cup R_2\cap R_1^{-1} \cup R_1\cap R_2^{-1} \cup R_2\cap R_2^{-1} \subseteq i_A$. Значит, $R_1 \cap R_2^{-1} \subseteq i_A$.

б) Пусть $R_1 \cap R_2^{-1}\subseteq i_A$. Но $(R_1\cup R_2) \cap(R_1\cup R_2)^{-1}=R_1\cap R_1^{-1} \cup R_2\cap R_1^{-1} \cup R_1\cap R_2^{-1} \cup R_2\cap R_2^{-1}$.

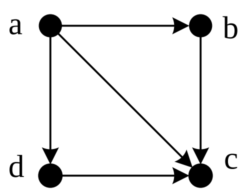
$R_1\cap R_1^{-1}\subseteq i_A$, $R_2\cap R_2^{-1}\subseteq i_A$, $R_1 \cap R_2^{-1}\subseteq i_A$. Значит, $(R_1 \cap R_2^{-1})^{-1}\subseteq i_A$. Но $(R_1 \cap R_2^{-1})^{-1}= R_1^{-1} \cap R_2= R_2 \cap R_1^{-1}$. Откуда $R_2 \cap R_1^{-1}\subseteq i_A$.

Значит, $(R_1\cup R_2) \cap(R_1\cup R_2)^{-1}\subseteq i_A$, что и означает антисимметричность $R_1\cup R_2$.

7. Если R_1 и R_2 транзитивны, то транзитивны и $R_1 \cap R_2$, R_1^{-1}. Докажем транзитивность пересечения транзитивных отношений. Возьмём произвольные x,y,z , такие, что $\langle x,y\rangle \in R_1 \cap R_2$ и $\langle y,z\rangle \in R_1 \cap R_2$. Поэтому $\langle x,y\rangle \in R_1$ и $\langle y,z\rangle \in R_1$, но R_1 транзитивно, поэтому $\langle x,z\rangle \in R_1$. Так же $\langle x,y\rangle \in R_2$ и $\langle y,z\rangle \in R_2$ но R_2 транзитивно, поэтому $\langle x,z\rangle \in R_2$. Поскольку $\langle x,z\rangle \in R_1$ и $\langle x,z\rangle \in R_2$, получаем $\langle x, z\rangle \in R_1 \cap R_2$. Так как элементы x,y,z взяты произвольно, получаем, что отношение $R_1 \cap R_2$ транзитивно.

$R_1\cup R_2$ может не быть транзитивным для транзитивных отношений R_1 и R_2 . Например,

$$R_{12}=\left\{\begin{array}{l} a\ b\\ a\ c\\ c\ b\\ d\ b\\ a\ d\end{array}\right\}$$



$$R_{15}=\left\{\begin{array}{l} b\ a\\ c\ a\\ b\ c\end{array}\right\}$$

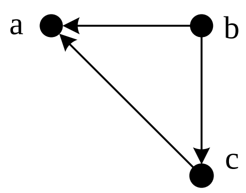


Рис.17 Граф для R_{12}

Рис.18 Граф для R_{15}

Объединение этих транзитивных отношений в данном случае транзитивным отношением не является.

Вопросы и упражнения

1. Пусть иррефлексивное отношение R определено на множестве A из n элементов. Какое максимальное число элементов содержит отношение R?
2. Какая форма представления отношений наиболее удобна для проверки транзитивности отношения?
3. Какие свойства отношений являются взаимоисключающими? Совместимыми?
4. Может ли бинарное антисимметричное отношение состоять из нечётного числа элементов?
5. Является ли антисимметричным асимметричное отношение?
6. Можно ли условие антисимметричности отношения записать как $R \cup R^{-1}= R^{-1}$?
7. Всегда ли симметричное отношение содержит чётное число пар?
8. В каком случае транзитивное замыкание отношения совпадает с отношением?
9. Построить объединение отношений R_{12} и R_{15} и показать, что условие транзитивности действительно нарушено.
10. Какое минимальное число элементов содержит рефлексивное антисимметричное отношение на множестве A мощностью n?

Специальные бинарные отношения

Рефлексивное и симметричное отношение называется отношением толерантности. Примером отношения толерантности является, например, отношение «объект А недалеко расположен от объекта В», отношение приближённого равенства чисел.

Пример отношения толерантности на множестве A={a,b,c,d} приводится на рис.19.

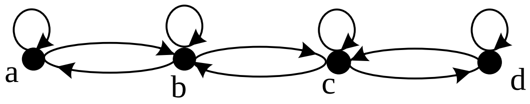


Рис. 19.

Отношение эквивалентности

Рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение на множестве А называется эквивалентностью на А.

Классом эквивалентности, или смежным классом, элемента x называется множество $[x]_R=x/R=\{y/\langle x,y\rangle\in R\}$(отношение эквивалентности R считаем заданным).

Множество классов эквивалентности множества А называется фактор-множеством множества А по отношению R и обозначается A/R.

Например, если $R(x,y)=\{\langle x,y\rangle$ / x учится в одной группе с y}, то A/R множество групп (предполагается, что каждый учится ровно в одной группе).

Если рассмотреть отношение R_{16}, то для него $A/R_{16}=\{\{a,b,c\},\{d\}\}$.

$$R_{16}=\left\{\begin{matrix} a\ b \\ a\ c \\ c\ b \\ b\ a \\ b\ b \\ c\ c \\ c\ a \\ b\ c \\ a\ a \\ d\ d \end{matrix}\right\}$$

Теорема:

Любое отношение эквивалентности на множестве А делит всё множество на непересекающиеся подмножества (классы). И наоборот, любое разбиение множества на непересекающиеся подмножества задаёт отношение эквивалентности.

1. Пусть на множестве А задано отношение эквивалентности R. Покажем, что заданное отношение эквивалентности R задаёт разбиение всего множества A ($\langle x,y\rangle\in R \Leftrightarrow x,y\in K_i$) на непересекающиеся классы.
   1.1. Каждый элемент включён в какой-нибудь класс, поскольку отношение рефлексивно.
   1.2. Классы не пересекаются.

   Рассмотрим класс эквивалентности элемента x – множество всех y, таких, что $\langle x,y\rangle\in R$. Докажем, что для любых x_1 и x_2 эти множества не пересекаются или совпадают. Пусть они пересекаются. Тогда найдётся элемент z, такой, что $\langle x_1,z\rangle\in R$ и $\langle x_2,z\rangle\in R$. Поскольку отношение R – симметрично, получим $\langle z,x_2\rangle\in R$. Но отношение R транзитивно, поэтому из $\langle x_1,z\rangle\in R$ и $\langle z,x_2\rangle\in R$ следует $\langle x_1,x_2\rangle\in R$. Поэтому x_1 и x_2 принадлежат одному и тому же классу, следовательно, классы совпадают. Это противоречит предположению, что классы могут пересекаться.
2. Пусть множество А разбито на классы. Покажем, что заданное отношение $x,y\in K_i\Leftrightarrow \langle x,y\rangle\in R$ является отношением эквивалентности.

2.1. Поскольку на классы разбито всё множество, то каждый элемент x принадлежит какому-нибудь одному классу, следовательно, отношение рефлексивно.

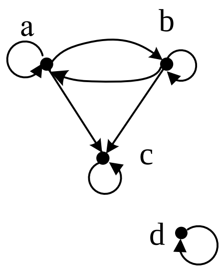
2.2. Симметричность. Пусть$<x,y>\in R$. Тогда $x,y\in K_i$, $x \in K_i, y\in K_i$, поскольку это один и тот же класс, то $x,y\in K_i$, значит, $< y, x>\in R$ и отношение является симметричным.

2.3. Транзитивность. Пусть $<x,y> \in R$ и $<y,z>\in R$, покажем, что $<x,z> \in R$. Поскольку $<x,y> \in R$, то $\exists K_i$ такой, что $x,y\in K_i$. Поскольку $<x,z> \in R$, то $\exists K_j$, такой, что $x,z\in K_j$. Таким образом, $x \in K_i$ и $x \in K_j$. Но классы не пересекаются, значит, $K_j=K_i$. Получили: $x, z\in K_i$. Поэтому $<x,z> \in R$.

Таим образом, отношение R является рефлексивным, симметричным и транзитивным, значит, R –отношение эквивалентности.

Частично упорядоченные множества

Бинарное отношение R называется предпорядком, если оно рефлексивно и транзитивно.



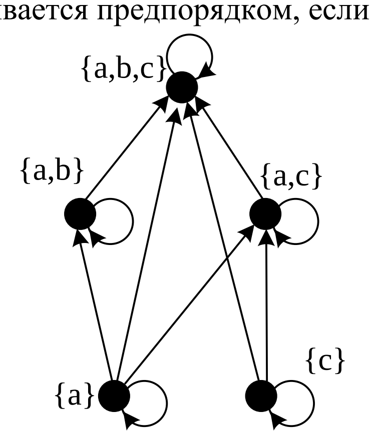


Рис.20 Граф для R_{17} Рис. 21 Граф для R_{18}

Отношение R_{17}, представленное на рисунке 20, является предпорядком. Требования антисимметричности к отношению предпорядка не предъявляется.

Так же предпорядком является отношение включения на множествах. Например, рассмотрим множества: {a},{c},{a,c},{a,b},{a,b,c}. Отношение включения для этих множеств R_{18} представлено на рис. 21.

Рефлексивное, антисимметричное и транзитивное отношение называется отношением частичного порядка. Иррефлексивное, транзитивное и асимметричное отношение называется отношением строго частичного порядка (например, отношение $<$ для множества действительных чисел). На рис.21 и 21 представлены отношения частичного порядка R_{18} и R_{19}, соответственно.

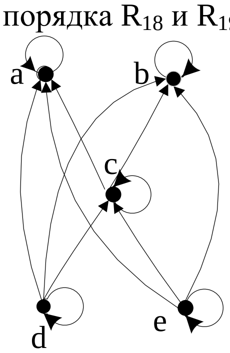
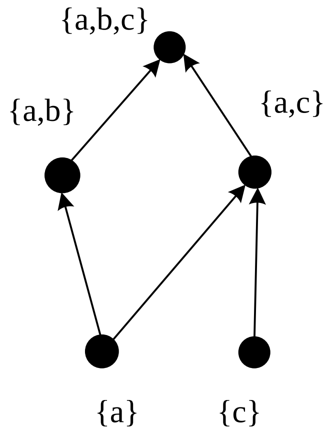


Рис.22 Граф для R_{19}

Частичный порядок часто обозначается $\le$. Порядок $\le^{-1}$ называется двойственным к порядку $\le$ и обозначается $\ge$. Легко показать, что $\ge$ так же является отношением частичного порядка, т.е. рефлексивным, антисимметричным и транзитивным.

Если $x\le y$ и $x \ne y$, то пишут $x<y$.

При представлении отношения частичного порядка часто опускают петли и транзитивные дуги. Такое представление частично упорядоченных множеств называется диаграммой Хассе. На рис. 23 и 24 представлены диаграммы Хассе для отношений R_{18} и R_{19}, соответственно. Диаграммы Хассе использовались, начиная с 19 века, для изображения отношения родства.



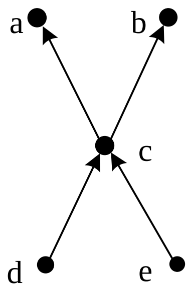


Рис.23 Диаграмма Хассе для R_{18} Рис.24 Диаграмма Хассе для R_{19}

Частичный порядок $\leq$ на множестве A называется линейным, если любые два элемента множества A сравнимы по $\leq$.

Например, порядок для множества A={a,c,d} заданный отношением R_{19} является линейным.

Множество с заданным на нём частичным (линейным) порядком называется частично (линейно) упорядоченным.

Множество некоторых множеств всегда частично упорядочено отношением включения, которое является рефлексивным, транзитивным и антисимметричным. Множество комплексных чисел так же можно частично упорядочить: $(a,b) \leq (c,d) \Leftrightarrow (a \leq c) \& (b \leq d)$.

Подмножество B частично упорядоченного множества A называется цепью в A, если оно линейно упорядочено отношением $\leq \cap B^2$.

Так, для R_{19} можно построить ряд цепей, например, {c},{a,c},{a,c,d}.

Элемент a частично упорядоченного множества A называется максимальным (минимальным), если для любого $x \in A$ из того, что $x \geq a$ ($x \leq a$) следует, что $x=a$. То есть, элемент множества называется максимальным (минимальным), если в множестве нет большего (меньшего) элемента.

Для множества {{a},{c},{a,c},{a,b},{a,b,c}} с порядком R_{18} минимальные элементы {a}и{c}, максимальный – {a,b,c}. Для множества {a,b,c,d,e}с частичным порядком R_{19} минимальные элементы d и e, максимальные a и b.

Элемент a частично упорядоченного множества A называется наибольшим (наименьшим), если для любого элемента $x \in A$ $x \leq a$ ($x \geq a$).

Для множества {{a},{c},{a,c},{a,b},{a,b,c}} с порядком R_{18} наибольший элемент – {a,b,c}, наименьшего элемента нет. Для множества {a,b,c,d,e}с частичным порядком R_{19} нет ни наибольшего, ни наименьшего элемента.

Любой наименьший элемент является минимальным, а любой наибольший – максимальным, но не наоборот.

Теорема. Любое упорядоченное множество содержит не более одного наибольшего (наименьшего) элемента.

Предположим, что частично упорядоченное множество A содержит 2 наибольших элемента a и b, $a \neq b$. Т.к. элемент a наибольший, то $a \geq b$. Элемент b так же наибольший, значит $b \geq a$. Поскольку $a \geq b$ и $b \geq a$, значит $a=b$, и множество A содержит единственный наибольший элемент.

Линейный порядок на множестве A называется полным, если любое непустое подмножество множества A имеет наименьший элемент. В этом случае множество A – вполне упорядочено.
Например, множество рациональных чисел $0<x<1$ не имеет наименьшего элемента, поэтому не является вполне упорядоченным, в то время как множество натуральных чисел является вполне упорядоченным.
Верхней (нижней) гранью подмножества B частично упорядоченного множества A называется любой элемент a множества A, такой, что для любого $b\in B$, $b\le a$($b\ge a$). Верхнюю грань подмножества B иногда называют мажорантой, а нижнюю – минорантой.
Точной верхней (нижней) гранью подмножества B частично упорядоченного множества A называется наименьшая верхняя (наибольшая нижняя) грань. Точная верхняя (нижняя) грань подмножества B обозначается sup B(inf B).
Очевидно, что если точная верхняя (нижняя) грань подмножества B принадлежит B, то это наибольший (наименьший) элемент.

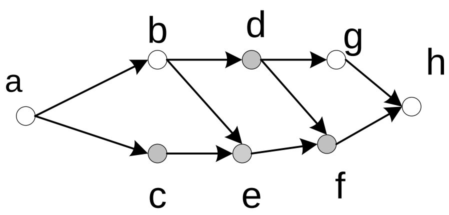


Рис.25 Диаграмма Хассе для A_1

Рассмотрим частично упорядоченное множество $A_1=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$, с отношением частичного порядка, диаграмма Хассе которого представлена на рис. 25. Пусть подмножество $B=\{c,d,e,f\}$(вершины выделены серым цветом). Тогда нижняя грань подмножества B – a, верхние грани - f и h, sup B= f, inf B=a, минимальные элементы c и d, максимальный - f, наименьшего элемента нет, наибольший элемент - f.

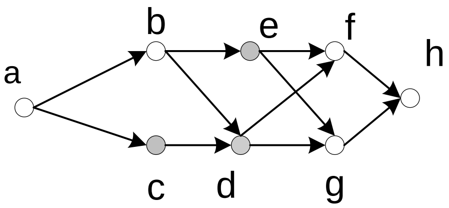


Рис.26 Диаграмма Хассе для A_2

Рассмотрим частично упорядоченное множество $A_2=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$, с отношением частичного порядка, диаграмма Хассе которого представлена на рис. 26. Пусть подмножество $B=\{c,d,e\}$(вершины выделены серым цветом). Тогда нижняя грань подмножества B – a, верхние грани - f ,g и h, supB=a, infB=$\varnothing$, минимальные элементы c и e, максимальные - d и e, наименьшего элемента нет, наибольшего элемента тоже нет.
Частично упорядоченное множество называется решёткой, или структурой, если для любых двух элементов x, y существует точная верхняя грань ($x\cup y$) и точная нижняя грань ($x\cap y$). Наибольший элемент решётки (если он существует) обозначается 1, наименьший – 0.
Например, множество A_1 (представленное на рис.25) решёткой является, а A_2 (представленное на рис. 26) – нет.
Если A и B – частично упорядоченные множества, f – функция из A в B, то f называется монотонным отображением, если для любых x_1, $x_2\in A$ из того, что $x_1\le x_2$ следует, что $f(x_1)\le f(x_2)$.
Монотонным отображением является, например, tg(x) на интервале $(-\pi/2, +\pi/2)$.
Получается монотонное отображение $(-\pi/2, +\pi/2)\rightarrow(-\infty, +\infty)$.

Монотонным отображением является и функция, представленная на рис.27 (величины, откладываемые по осям, в данном случае значения не имеют). Иллюстрация подчёркивает, что в монотонном отображении используется отношение $\leq$, т.е. допускаются равные значения функции.

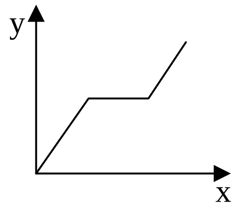


Рис.27

Если f – взаимно-однозначное соответствие между множествами A и B, и f и f^{-1} – монотонные отображения, то f называется изоморфизмом частично-упорядоченных множеств, а множества A и B – изоморфными.

Например, множество A={∅, {a}, {b}, {a,b}} с отношением частичного порядка $\subseteq$, и множество B={<0,0>, <0,1>, <1,0>, <1,1>} с отношением $\leq$, определяемым $(a,b) \leq (c,d) \Leftrightarrow (a\leq c)\&(b\leq d)$ являются изоморфными.

Вопросы и упражнения

1. Может ли отношение эквивалентности быть антисимметричным?
2. Однозначно ли восстанавливается отношение эквивалентности по множеству классов, на которое это отношение делит исходное множество?
3. Всегда ли в частично упорядоченном множестве можно выделить цепь?
4. В каком случае частично упорядоченное множество не содержит наименьшего элемента?
5. В каком случае минимальный элемент является наименьшим?
6. Может ли максимальный элемент частично упорядоченного множества быть минимальным?
7. Всегда ли линейно упорядоченное множество содержит наименьший элемент?
8. Почему если точная верхняя грань подмножества B принадлежит B, то это наибольший элемент?
9. Какое отношение существует между точной верхней гранью подмножества B частично упорядоченного множества и максимальным элементом множества B?
10. Может ли точная нижняя грань множества быть его максимальным элементом?

Кардинальные числа

Определение кардинального числа множества

Все целые числа делятся на ординальные, или порядковые, и кардинальные, или количественные.

Кардинальные числа вводятся через отношение равномощности.

Два множества назовём равномощными, если между элементами этих множеств можно установить взаимно однозначное соответствие.

Например, множество A={a,b,c,d} равномощно множеству B={<0,0>, <0,1>, <1,0>, <1,1>}. Можно построить 24 различных взаимно однозначных соответствия между этими множествами, но в данном случае важно, что существует хотя бы одно.

Обозначение равномощности множеств A и B: A~B.

Свойства отношения равномощности:

1. Отношение равномощности является рефлексивным, A~A. Взаимно однозначное соответствие в этом случае – i_A.

2. Отношение равномощности симметрично: $A \sim B \Leftrightarrow B \sim A$. Пусть f – взаимно однозначное соответствие между A и B, тогда f^{-1} – взаимно однозначное соответствие между B и A.
3. Отношение равномощности транзитивно. $A \sim B$ & $B \sim C \Rightarrow A \sim C$. В самом деле, пусть f – взаимно однозначное соответствие между A и B, g – взаимно однозначное соответствие между B и C, тогда g(f) – взаимно однозначное соответствие между A и C.

Таким образом, отношение равномощности является отношением эквивалентности. Оно делит все множества на непересекающиеся подмножества (классы) равномощных множеств.

Теорема Кантора-Бернштейна:

Ещё одно свойство отношения равномощности даёт теорема Кантора-Бернштейна:
Теорема: Если множество A равномощно некоторому подмножеству множества B, а множество B равномощно некоторому подмножеству множества A, то множества A и B равномощны.
Доказательство:
Пусть A равномощно подмножеству B_1 множества B, соответствие q. B равномощно подмножеству A_1 множества A, соответствие g. Соответствие g устанавливает взаимно однозначное соответствие между B_1 и A_2. Для доказательства равномощности A и B достаточно доказать существование взаимно однозначного соответствия между A и A_1.

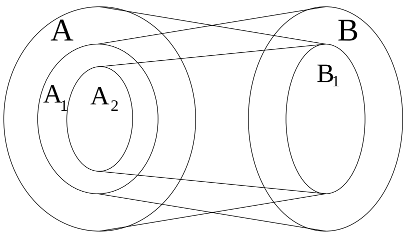
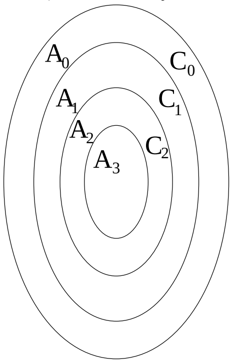


Рис.28

Обозначим множество A – A_0.
Пусть $f(x)=g(q(x))$. Тогда f осуществляет взаимно однозначное соответствие между $A_0 \rightarrow A_2$ (элементу x ставится в соответствие элемент $f(x) \in A_2$), а так же $A_1 \rightarrow A_3$.



Получаем убывающую последовательность множеств: $A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset A_4 \ldots$
Взаимно однозначное соответствие $f : A_0 \rightarrow A_2$, $A_1 \rightarrow A_3$, …, $A_i \rightarrow A_{i+2}$. $A_{2n}=f^n(A_0)$. $A_{2n+1}=f^n(A_1)$. Пересечение всех этих множеств может быть не пусто.
Мы разбили всё множество на непересекающиеся слои $C_i=A_i \backslash A_{i+1}$ и сердцевину $C=\bigcap_i A_i$.

Слои с номерами одинаковой чётности равномощны, т.к. f осуществляет взаимно однозначное соответствие $C_0 \rightarrow C_2 \rightarrow C_4 \ldots$ и $C_1 \rightarrow C_3 \rightarrow C_5 \ldots$
Построим h – взаимно однозначное соответствие между A_0 и A_1:
$\forall x \in A_0$ $h(x)=f(x)$ при $x \in C_{2k}$ и $h(x)=x$ при $x \in C_{2k+1}$ и при $x \in C$. Тогда получаем взаимно однозначное соответствие между A_0 и A_1.

$A_0 = \quad C_0 + \quad C_1 + \quad C_2 + \quad C_3 + \quad C_4 + \ldots \quad C$

$A_1 = \quad C_1 + \quad C_2 + \quad C_3 + \quad C_4 + \quad C_5 + \ldots \quad C$

Теорема доказана.
Кардинальное число множества – то, что объединяет множества одинаковой мощности. Это не множество, а класс (они не пересекаются). Или: кардинальное число множества – множество всех равномощных множеств – множество второй ступени.
Рассматривается экстенсиональный подход: у каждого понятия есть интенция (содержание) и экстенсия (объём). Здесь множества рассматриваются с точки зрения объёма. Равномощные множества рассматриваем как эквивалентные.
Обозначение для мощности множества A - $|A|$.

Арифметика кардинальных чисел.

Отношения между кардинальными числами
Кардинальные числа множеств равны тогда и только тогда, когда множества равномощны.
$|A|=|B| =_{Df} A\sim B$
Кардинальные числа множеств обычно обозначаются греческими буквами (α,β, γ…) с индексами или без них.
$|A|\leq|B| =_{Df} \exists C((C\subseteq B)\&(C\sim B))$ – множество A равномощно подмножеству множества B.
$|A|<|B| =_{Df} (|A|\leq|B|) \& (|A|\neq|B|)$
Свойства равенства кардинальных чисел:

1. Равенство кардинальных чисел рефлексивно. $\forall\alpha$ ($\alpha=\alpha$). Пусть $\alpha=|A|$. По свойству отношения равномощности $A\sim A$, поэтому $|A|=|A|$, т.е. $\alpha=\alpha$.
2. Симметрично. Пусть $\alpha=\beta$, существует множество A, $|A|=\alpha$, и множество B, $|B|=\beta$. Из равенства кардинальных чисел $A\sim B$, отношение равномощности симметрично, поэтому $B\sim A$, $|B|=|A|$, следовательно $\beta=\alpha$.
3. Транзитивно. Известно, что $\alpha=\beta$, $\beta=\gamma$. Пусть $\alpha=|A|$, $\beta=|B|$, $\gamma=|C|$. Из равенства $\alpha=\beta$ получаем $A\sim B$, из равенства $\beta=\gamma$ получаем $B\sim C$. Отношение равномощности транзитивно, поэтому $A\sim C$, и значит, $\alpha=\gamma$.
   Таким образом, отношение равенства кардинальных чисел является отношением эквивалентности, следовательно, разбивает всё множество кардинальных чисел на непересекающиеся классы.

Кардинальные числа сравнимы (это доказывать не будем). Т.е. для любых кардинальных чисел α и β выполняется $\alpha\leq\beta$ или $\beta\leq\alpha$. Таким образом, на множестве кардинальных чисел существует отношение линейного порядка.
Операции над кардинальными числами:
Сумма кардинальных чисел. Если $A\cap B=\varnothing$, то $|A|+|B|=|A\cup B|$.
Произведение кардинальных чисел: $|A|\cdot|B| =_{Df} |A\times B|$
Возведение в степень: $|A|^{|B|} =_{Df} |A^B|$, где $A^B=\{f(x)|\, x\in B, f(x)\in A\}$.
Законы для операций над кардинальными числами.

1. Сложение кардинальных чисел коммутативно.

$\alpha+\beta=\beta+\alpha$

2. Сложение кардинальных чисел ассоциативно.

$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$

3. $0+\alpha=\alpha$.
4. Умножение кардинальных чисел коммутативно:

$\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha$

5. Умножение кардинальных чисел ассоциативно:
$(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)$
6. $\alpha^{\beta+\gamma}=\alpha^{\beta}\cdot\alpha^{\gamma}$
7. $(\alpha\beta)^{\gamma}=\alpha^{\gamma}\cdot\beta^{\gamma}$
8. $(\alpha^{\beta})^{\gamma}=\alpha^{\beta\cdot\gamma}$

Шкала кардинальных чисел

Определим $0=_{Df}|\varnothing|$

Тогда для любого кардинального числа α: $0\leq\alpha$. Поскольку для любого множества A $\varnothing\subseteq A$, получаем $0\leq\alpha$.

Единичное множество – множество, все элементы которого тождественны. Принцип неразличимых Лейбница – всё, что можно сказать об одном из объектов, можно сказать о другом.

Все единичные множества равномощны.

Мощность единичного множества назовём числом 1.

Единица является нейтральным элементом умножения, для любого кардинального числа α справедливо $\alpha\cdot 1=\alpha$. Это легко показать из определения операции умножения кардинальных чисел.

Поскольку есть 0, 1 и операции сложения, умножения и возведения в степень, то можем получить все натуральные числа. Значит, все натуральные числа являются кардинальными. Но не наоборот.

Трансфинитные кардинальные числа

Трансфинитные («за конечные») кардинальные числа соответствуют мощности бесконечных множеств.

Конечные множества отличимы от бесконечных тем, что множество равномощно своему собственному подмножеству (т.е. целое эквивалентно своей правильной части). Одна из формулировок этого - парадокс Галилея.

Парадокс Галилея. Квадратных чисел столько же, сколько натуральных.

Рассмотрим квадраты натуральных чисел: 0, 1, 4, 9, 16, 25, 49,… Их столько же, сколько натуральных чисел, т.к. между множеством натуральных чисел и множеством их квадратов можно установить взаимно однозначное соответствие. В то же время расстояние между квадратами натуральных чисел может быть сколь угодно большим, т.к. $(n+1)^2-n^2=2n+1$.

Ещё один парадокс, связанный с трансфинитными кардинальными числами - парадокс Тристами Шенди.

Парадокс Тристама Шенди (героя романа Лоренса Стерна). Тристам захотел описать свою жизнь. На описание одного своего дня ему потребовался год. Если же жизнь его предположить бесконечной, то он мог бы описать свою жизнь, т.к. можно было бы установить взаимно однозначное соответствие между днями его жизни и годами, когда они будут описаны.

Множества, равномощные своему собственному подмножеству – бесконечные. Не все они равномощны.

Мощность множества натуральных чисел обозначается $\aleph_0$ (Обозначение введено Кантором, $\aleph$ - алеф, первая буква древнееврейского алфавита, индекс 0 обозначает, что это самое маленькое трансфинитное кардинальное число, что далее будет показано).

Ещё одна форма парадокса , связанного с $\aleph_0$ – гостиница Гильберта. Представим гостиницу, в которой столько же номеров, сколько натуральных чисел. Пусть все номера в гостинице заняты. Приезжает ещё n гостей. Их можно поселить в гостиницу, переселив каждого из уже живущих в номере i в номер i+n, а в первые n номеров – вновь прибывших.

Пусть приехало ещё $\aleph_0$ гостей. Тогда переселим каждого гостя из номера i в номер 2 i. Таким образом, освободятся все нечётные номера и можно поселить всех приехавших гостей.

Для любого натурального числа n справедливо $n < \aleph_0$, что легко показать, основываясь на определении отношения <.

Трансфинитное кардинальное число $\aleph_0$ является наименьшим из трансфинитных кардинальных чисел.

Пусть T – бесконечное множество. Докажем, что $|T| \geq \aleph_0$.

Поскольку множество бесконечно, в нем существуют некоторые элементы, выделим там произвольный элемент a_0.

Построим множество $T_0=T\setminus\{a_0\}$. Получившееся множество так же бесконечно (иначе иначе исходное множество было бы конечно). Выделяем в этом множестве элемент a_1, построим множество $T_1=T_0\setminus\{a_1\}$, оно так же бесконечно… далее построение продолжается $T_i=T_{i-1}\setminus\{a_i\}$.

В результате построим множество $\{ a_0, a_1,\ldots, a_i,\ldots\}\subseteq T$. Построенное множество равномощно множеству натуральных чисел, следовательно, его мощность - $\aleph_0$. Обозначим $|T|=\alpha$, тогда $\alpha\geq\aleph_0$.

Множества, равномощные множеству натуральных чисел, называют счетно-бесконечными, или просто счётными.

Счётными являются и множества целых и рациональных чисел. Рациональные числа можно пересчитать с помощью диагонального процесса. Каждое рациональное число можно представить как частное m/n, где m,n - натуральные числа. Построим таблицу, в ячейках которой будут рациональные числа:

n \ m	1	2	3	…
1	1/1	2/1	3/1	…
2	1/2	2/2	3/2	…
3	1/3	2/3	3/3	…
…	…	…	…	…

Все эти числа можно пересчитать, используя показанный обход таблицы. Таким образом перечислим все клетки таблицы, но их не меньше, чем рациональных чисел (т.к. числа повторяются, вообще говоря, бесконечное число раз, например, 1/2=2/4=3/6 …). Получили, что рациональных чисел не больше, чем натуральных. Но и не меньше, т.к. все натуральные числа являются рациональными. Следовательно, рациональных чисел $\aleph_0$.

Арифметика с $\aleph_0$:

$\aleph_0+n=\aleph_0$

$\aleph_0\cdot n=\aleph_0$

$\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0$

$\aleph_0\cdot\aleph_0=\aleph_0$

Все равенства могут быть доказаны, например, целых чисел столько же, сколько и натуральных, т.к. мы их можем пересчитать: {0, 1,-1,2,-2,…}

Теорема Кантора.

Для множества всех подмножеств множества A используется обозначение P(A).

Мощность множества всех подмножеств множества A $|P(A)|=2^{|A|}$.

Теорема Кантора. Никакое множество не равномощно множеству своих подмножеств.

Доказательство от противного. Пусть установлено взаимно однозначное соответствие φ между множеством и множеством его подмножеств: $X \to P(X)$. Рассмотрим такие элементы $x \in X$, для которых справедливо $x \notin \varphi(x)$.

Пусть $Z=\{x \mid x \notin \varphi(x)\}$. $Z \neq \varnothing$, т.к. пустому множеству сопоставлен некоторый элемент множества X. Докажем, что Z не соответствует никакому элементу множества X.

Пусть $Z=\varphi(a)$ для некоторого $a \in X$. Тогда должно выполняться $a \in Z$ или $a \notin Z$

1. $a \in Z$. Но множество Z состоит из элементов, которым сопоставлены подмножества, не содержащие эти элементы, поэтому $a \notin \varphi(a)$. Однако $\varphi(a)=Z$, следовательно, $a \notin Z$. Противоречие.
2. $a \notin Z$. Но $Z=\varphi(a)$, поэтому $a \notin \varphi(a)$. По построению множества Z (Z содержит все такие элементы x, для которых $x \notin \varphi(x)$) получаем $a \in Z$. Противоречие.

В обоих случаях получено противоречие. Следовательно, множество Z не соответствует никакому элементу X, и не существует взаимно однозначного соответствия между множеством и множеством всех его подмножеств.

Но $|P(X)| \geq |X|$, т.к. существует взаимно однозначное соответствие между элементами множества и его одноэлементными подмножествами.

Получено, что $|P(X)| \geq |X|$ и $|P(X)| \neq |X|$, значит $|P(X)| > |X|$.

Парадокс Кантора.

Пусть C – множество всех множеств. Т.к. оно универсально, то $P(C) \subseteq C$. Но, по определению сравнения кардинальных чисел, отсюда следует, что $|P(C)| \leq |C|$.

Но, по теореме Кантора $|C| < |P(C)|$. Противоречие.

Теорема Кантора позволяет построить бесконечную шкалу кардинальных чисел.

Сначала все натуральные числа, начиная с 0, затем $\aleph_0, 2^{\aleph_0}, 2^{2^{\aleph_0}}, \ldots$

Мощность множества действительных чисел - $2^{\aleph_0}$.

Действительных чисел не меньше, чем на отрезке [0,1]. Каждое из них можно представить бесконечной двоичной дробью $0,a_1 \ldots a_n \ldots$ (некоторые числа повторяются дважды, т.к. $0,a_1 \ldots a_n 1 = 0,a_1 \ldots a_n 0(1)$, поскольку $\frac{1}{2^k}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^k}\cdot\frac{1/2}{1-1/2} = \frac{1}{2^k}$).

Поэтому всего действительных чисел на этом отрезке - $2^{\aleph_0}$.

Их нельзя пересчитать.

Предположим, что пересчитали. Пусть получена последовательность чисел:

$0,a_1^1a_2^1a_3^1a_4^1a_5^1\ldots$

$0,a_1^2a_2^2a_3^2a_4^2a_5^2\ldots$

$\ldots$

$0,a_1^na_2^na_3^na_4^na_5^n\ldots$

$\ldots$

Построим число $0,\overline{a_1^1}\,\overline{a_2^2}\,\overline{a_3^3}\,\overline{a_4^4}\,\overline{a_5^5}\ldots$, где $\bar{0}=1, \bar{1}=0$. Это число новое, оно отличается от всех построенных чисел (отличается от i-го числа по меньшей мере в i-ом разряде).

Предположили, что пересчитали все числа, но получили новое число, значит, действительные числа нельзя пересчитать.

Итак, действительных чисел не меньше, чем $2^{\aleph_0}$, т.к. столько действительных чисел на отрезке [0,1]. Но и не больше, т.к. число таких отрезков $\aleph_0$, всего действительных чисел $\aleph_0 \times 2^{\aleph_0} \leq 2^{\aleph_0} \times 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0+\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$

Комплексных чисел столько же, сколько действительных (из предшествующего равенства). Точек на плоскости столько же, сколько их на одной прямой, и столько же, сколько в любом n-мерном пространстве (при конечном n).
Большее число – число подмножеств действительных чисел, или же функций действительных аргументов.

Вопросы и упражнения

1. Продемонстрировать выполнение теоремы Кантора для пустого и единичного множеств.
2. Пусть частично упорядоченные множества A и B изоморфны. Следует ли из этого, что A~B?
3. Пусть $A \subseteq B$. Следует ли из этого, что $|A| < |B|$?
4. Пусть $|A| < |B|$. Следует ли из этого, что $A \subseteq B$?
5. Пусть A~B. Следует ли из этого, что $A \setminus B = \varnothing$?
6. Всегда ли $(\alpha\beta)^{\gamma} > \alpha^{\gamma}$?
7. Какова мощность множества рациональных функций (функций, аргументы и значения которых являются рациональными числами)?
8. Приведите примеры множеств, имеющих мощности $\aleph_0, 2^{\aleph_0}, 2^{2^{\aleph_0}}$.

Литература

1. Н. К. Верещагин, А. Шень Начала теории множеств. МЦНМО, 2012
2. И.А. Лавров, Л.Л. Максимова. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. М.: Физматлит., 2006
3. В.А. Горбатов,А.В. Горбатов, М.В. Горбатова Дискретная математика, АСТ, 2014.
4. О.П. Кузнецов, Г.М. Адельсон-Вельский Дискретная математика для инженера М.: ЁЁ-Медиа, 2012
5. С.В. Яблонский. Введение в дискретную математику. М.: Высшая школа, 2010