ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Федеральное государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Г. М. Чечин

Учебно-методическое пособие

Методы численного интегрирования

по предмету «Численные методы и математическое моделирование»
для студентов 2-го курса физического факультета

г. Ростов-на-Дону
2007 г.

1 Общие методы вывода квадратурных формул

1.1 Метод аналитической замены

Рассмотрим задачу о вычислении определенного интеграла $I = \int\limits_a^b y(x)dx$. Будем считать отрезок [a;b] достаточно малым, а функцию $y(x)$ достаточно гладкой для того, чтобы ее можно было на этом отрезке с приемлемой степенью точности заменить интерполяционным полиномом n-й степени

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k. \tag{1}$$

После такой замены исходный интеграл принимает вид:

$$I = \sum_{k=0}^{n} a_k \int\limits_a^b x^k dx, \tag{2}$$

т.е. он представляет собой линейную комбинацию интегралов $\int\limits_a^b x^k dx$, которые вычисляются аналитически. Разным подинтегральным функциям $y(x)$ будут отвечать разные a_k $(k = 0, 1, ..., n)$ в линейной комбинации (2), которые являются коэффициентами полинома $P_n(x)$.

Такой метод вывода квадратурных формул обычно называют методом *аналитической замены*. Несмотря на принципиальную простоту, его реализация на практике может оказаться достаточно громоздкой процедурой. Убедиться в этом можно на примере решения следующей задачи.

Задача 1.

Вывести формулу Симпсона для вычисления интеграла путем замены подынтегральной функции $y(x)$ интерполяционным полиномом второго порядка в форме Лагранжа или в форме Ньютона.

1.2 Метод моментов

Существует значительно более простой и более изящный метод вывода квадратурных формул, получивший название «метод моментов». Этот метод позволяет обойти этап построения интерполяционного полинома в явной форме.

Будем использовать в методе аналитической замены интерполяционный полином Лагранжа

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j L_j(x), \tag{3}$$

где

$$L_j(x) = \frac{\prod\limits_{i=0}^{n}{}^{*} \ (x - x_i)}{\prod\limits_{i=0}^{n}{}^{*} \ (x_j - x_i)}. \tag{4}$$

Здесь $L_j(x)$ $(j = 0, 1, \ldots, n)$ суть «элементарные полиномы Лагранжа», x_j $(j = 0, 1, \ldots, n)$ являются узлами интерполяции, а $y_j = y(x_j)$ суть значения подитегральной функции $y(x)$ в этих узлах. Звездочка около знака произведения в формуле (4) означает исключение случая $i = j$.

Поскольку y_j в формуле (3) не зависят от переменной интегрирования x, имеем

$$\int\limits_a^b y(x)dx \approx \sum_{j=0}^{n} y_j \int\limits_a^b L_j(x)dx = \sum_{j=0}^{n} y_j C_j. \tag{5}$$

Здесь

$$C_j = \int\limits_a^b L_j(x)dx \tag{6}$$

являются некоторыми постоянными, которые *не зависят* от вида подынтегральной функции $y(x)$: они зависят только от распределения узлов интерполяции на отрезке интегрирования [a;b] (см. формулу 4).

Таким образом, нашей целью является вывод квадратурной формулы вида

$$\int\limits_a^b y(x)dx = \sum_{j=0}^{n} C_j y_j. \tag{7}$$

Здесь и далее вместо знака приближенного равенства ($\approx$) мы будем использовать обычный знак равенства, как это принято делать при изложении численного анализа -все его формулы являются приближенными.

Постоянные $C_j (j = 0, 1, \ldots, n)$ в формуле (7) являются неизвестными, подлежащими определению, в силу чего основанный на ней метод вывода квадратурных формул часто называют *методом неопределенных коэффициентов*.

Формула (7) должна быть *универсальной* в том смысле, что она будет использоваться для вычисления интеграла от *любой* функции $y(x)$ на отрезке [a;b] - лишь бы эту функцию можно было с заданной степенью точности заменить интерполяционным полиномом n-й степени. (Оценкой точности получаемых таким образом квадратурных формул мы займемся в следующем разделе данного пособия).

Поскольку функция $y(x)$ в формуле (7) может быть *произвольной*, то и аппроксимирующий ее интерполяционный полином может оказаться *любым* полиномом $P_n(x)$, причем выводимая нами формула (7) должна быть точной, каким бы ни был этот полином, поскольку интегралы (6) для определения коэффициентов C_j вычисляются точно. В результате можно утверждать, что формула (7) должна быть точной и тогда, когда вместо $P_n(x)$ используются последовательные степени аргумента x, которые, очевидно, являются частными случаями полинома $P_n(x)$. Иными словами, равенство (7) должно выполняться точно при замене подынтегральной функции $y(x)$

на

$$x^0, x^1, x^2, \ldots, x^n. \tag{8}$$

Заменяя $y(x)$ в формуле (7) на каждую такую степень, мы получим некоторое линейное алгебраическое уравнение относительно неизвестных коэффициентов C_j. В результате всех проведенных замен (8), мы придем к системе *линейных алгебраических уравнений*, которую обычно можно достаточно просто решить.

Таким образом, мы найдем явный вид квадратурной формулы (7), обходя этап построения интерполяционного полинома. В этом и заключается основная идея метода моментов.

Проиллюстрируем его на примере вывода квадратурной формулы Симпсона. Поскольку в этой формуле подынтегральная функция заменяется полиномом второй степени[1], для построения которого необходимо три узла интерполяции, перепишем формулу (7) в виде:

$$\int\limits_{-1}^{1} y(x)dx = C_{-1}y(-1) + C_0 y(0) + C_1 y(1). \tag{9}$$

Для ясности, здесь номера коэффициентов C_j соответствуют значениям узлов интегрирования (отрицательный индекс при коэффициенте C_{-1} не должен смущать, как и нумерация этажей здания, которые находятся ниже уровня земли!).

Заменяя теперь $y(x)$ в левой и правой частях формулы (9) на $x^0 \equiv 1$ (функция равна единице независимо от значения своего аргумента), получим уравнение

$$2 = C_{-1} + C_0 + C_1. \tag{10}$$

Полагая $y(x) = x^1$ (функция равна своему аргументу), получим

$$0 = -C_{-1} + C_1. \tag{11}$$

Наконец, полагая $y(x) = x^2$ (функция равна квадрату своего аргумента), найдем

$$\frac{2}{3} = C_{-1} + C_1. \tag{12}$$

Мы получили систему трех линейных алгебраических уравнений (10 - 12), решение которой не представляет труда. Действительно, из уравнения (11) находим $C_{-1} = C_1$, и далее, из уравнения (12) получим $C_{-1} = C_1 = \frac{1}{3}$. Наконец из уравнения (10) находим $C_0 = \frac{4}{3}$.

В результате искомая квадратурная формула Симпсона (9) принимает вид

$$\int\limits_{-1}^{1} y(x)dx = \frac{1}{3}\left[y(-1) + 4y(0) + y(1)\right]. \tag{13}$$

Для проверки правдоподобности этой формулы заметим, что интеграл от функции $y(x) \equiv 1$ численно равен площади прямоугольника с основанием два (длина

[1] Именно поэтому формулу Симпсона часто называют формулой парабол.

интервала интегрирования) на высоту, равную единице. Иными словами, $\int\limits_{-1}^{1} 1dx = 2$. Очевидно, тот же самый результат получится и по формуле (13).

В связи с заменами (8), возникает естественный вопрос: «А что будет, если продолжить заменять подынтегральную функцию $y(x)$ на более высокие степени ее аргумента x ?».

Полагая в формуле (9) $y(x) = x^3$ и $y(x) = x^4$, получим уравнения:

$$0 = -C_{-1} + C_1, \tag{14}$$

$$\frac{2}{5} = C_{-1} + C_1. \tag{15}$$

Уравнение (14) совпадает с уравнением (11) и, следовательно, удовлетворяется при уже найденных значениях коэффициентов формулы (9):

$$C_{-1} = C_1 = \frac{1}{3},\ C_0 = \frac{4}{3}. \tag{16}$$

Это значит, что выведенная нами формула Симпсона (9) является точной не только для полиномов второй степени, но и для любого полинома третьей степени! Действительно, если формула является точной для $y(x) = x^0, x^1, x^2, x^3$, то она будет таковой и для любой их линейной комбинации, то есть для произвольного полинома третьей степени.

С другой стороны, уравнение (15) *противоречит* уравнению (12): одна и та же сумма $C_{-1} + C_1$ не может быть одновременно равной $\frac{2}{3}$ и $\frac{2}{5}$. Отсюда следует, что начиная с полиномов четвертой степени формула Симпсона (13) дает некоторую погрешность, величину которой мы оценим ниже при рассмотрении метода рядов Тейлора для вывода квадратурных формул.

Заметим, что если использовать формулу Симпсона как составную (см. раздел ?) для вычисления интеграла на большом интервале, мы заменяем подынтегральную функцию $y(x)$ на последовательных микроинтервалах разными полиномами второго порядка (на каждом из них используется своя парабола для аппроксимации графика $y(x)$). В этом случае необходимо формулу Симпсона применять для вычисления интегралов вида:

$$I = \int\limits_{x_n-h}^{x_n+h} y(x)dx. \tag{17}$$

Естественно, что значения этих интегралов зависят от величины шага интегрирования h. Эту зависимость можно легко установить преобразуя указанный интеграл к интервалу [-1;1] с помощью соответствующей замены переменных или вновь применяя метод моментов для вывода формулы Симпсона непосредственно для интегралов (17). Соответствующий результат принимает вид:

$$\int\limits_{x_n-h}^{x_n+h} y(x)dx = \frac{h}{3}\left[y(x_{n-1}) + 4y(x_n) + y(x_{n+1})\right]. \tag{18}$$

Пропорциональность правой части этой формулы первой степени шага интегрирования h легко понять, если применить ее к вычислению интеграла от постоянной функции $y(x) \equiv 1$, как это мы уже делали раньше. Действительно, интеграл в правой части формулы (18) численно равен площади прямоугольника с основанием $2h$ и единичной высотой. Правая часть формулы (18) дает тот же самый результат.

1.3 Метод рядов Тейлора

Альтернативным по отношению к методу моментов, но более громоздким, является метод рядов Тейлора, который также используется для вывода различных квадратурных формул. Его преимущество заключается в том, что он позволяет естественным образом оценить погрешность получаемых с его помощью формул интегрирования.

Суть метода состоит в том, что подынтегральная функция $y(x)$ в искомой формуле (7) заменяется рядом Тейлора, после чего приравниваются коэффициенты при одинаковых производных в левой и правой частях этой формулы. Ниже будет показано, что в результате такого приравнивания мы приходим к *той же самой* системе линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов C_j в формуле (7), что и в методе моментов. Указанная идентичность уравнений указывает на эквивалентность этих двух методов. Строгое обоснование этого факта см. после задачи 3.

Рассмотрим снова вывод формулы Симпсона (9), но на этот раз с помощью метода рядов Тейлора. Разложим функцию $y(x)$ в обеих частях формулы (9) в ряд Тейлора в окрестности некоторой (любой!) точки на интервале интегрирования. В качестве последней в нашем случае наиболее удобно выбрать точку $x = 0$ (а в случае вывода формулы (18) - точку $x = x_n$)[2].

Тогда ряд Тейлора принимает вид:

$$y(x) = y(0) + \frac{x}{1!}y'(0) + \frac{x^2}{2!}y''(0) + \frac{x^3}{3!}y'''(0) + \frac{x^4}{4!}y^{IV}(0) + \cdots. \tag{19}$$

Подставим это выражение для $y(x)$ в левую и правую части формулы (9). Если бы эта формула была точной, то левая и правая ее части были бы равны друг другу: *лев*(9) = *прав*(9). Но поскольку формула (9) является приближенной, разница *лев*(9) − *прав*(9) представляет собой не что иное, как погрешность рассматриваемой формулы, обозначаемую нами как *погр*(9): *погр*(9) = *лев*(9) − *прав*(9).

При подстановке ряда Тейлора (19) под знак интеграла формулы (9), все его члены с нечетными степенями x дают нулевые вклады, поскольку

$$\int_{-1}^{1} x^{2k+1}dx = \left.\frac{x^{2k+2}}{2k+2}\right|_{-1}^{1} = 0. \tag{20}$$

С другой стороны,

[2]Заметим, что ряд Тейлора в случае разложения в окрестности точки равной нулю часто называют радом Маклорена.

$$\int\limits_{-1}^{1} x^{2k} dx = \left. \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \right|_{-1}^{1} = \frac{2}{2k+1}. \tag{21}$$

В результате имеем

$$\textit{лев}(9) = 2y(0) + \frac{2}{3}\frac{y''(0)}{2!} + \frac{2}{5}\frac{y^{IV}(0)}{4!} + \cdots \tag{22}$$

$$\begin{gathered} \textit{прав}(9) = C_1 \left[y(0) + \tfrac{y'(0)}{1!} + \tfrac{y''(0)}{2!} + \tfrac{y'''(0)}{3!} + \tfrac{y^{IV}(0)}{4!} + \cdots \right] + \\ + C_0 y(0) + C_{-1} \left[y(0) - \tfrac{y'(0)}{1!} + \tfrac{y''(0)}{2!} - \tfrac{y'''(0)}{3!} + \tfrac{y^{IV}(0)}{4!} + \cdots \right]. \end{gathered} \tag{23}$$

Таким образом,

$$\begin{gathered} \textit{погр}(9) = \textit{лев}(9) - \textit{прав}(9) = y(0)\left[2 - C_{-1} - C_0 - C_1\right] + \tfrac{y'(0)}{1!}\left[0 + C_{-1} - C_1\right] + \\ + \tfrac{y''(0)}{2!}\left[\tfrac{2}{3} - C_{-1} - C_1\right] + \tfrac{y'''(0)}{3!}[0 + C_{-1} - C_1] + \cdots. \end{gathered} \tag{24}$$

Приравнивая теперь нулю коэффициенты при младших производных функции $y(x)$ в формуле (24), получим уже знакомую нам по применению метода моментов систему уравнений:

$$2 = C_{-1} + C_0 + C_1, \tag{25}$$

$$0 = -C_{-1} + C_1, \tag{26}$$

$$\frac{2}{3} = C_{-1} + C_1, \tag{27}$$

в результате решения которой находим коэффициенты формулы (9): $C_{-1} = C_1 = \frac{1}{3}$, $C_0 = \frac{4}{3}$.

Далее, в силу этих значений C_j коэффициент при $y'''(0)$ в формуле (24) также обращается в нуль, в то время как коэффициент при $y^{IV}(0)$ оказывается уже отличным от нуля. Таким образом, мы имеем $\textit{погр}(9) = \textit{лев}(9) - \textit{прав}(9) = \frac{y^{IV}(0)}{4!}\left[\frac{2}{5} - \frac{2}{3}\right] + \cdots =$ $= -\frac{y^{IV}(0)}{90} + \cdots$.

Определяемая этой формулой погрешность $\textit{погр}(9)$ представлена в виде *бесконечного ряда* (во всех его членах стоят производные от функции $y(x)$, вычисленные в точке разложения $x = 0$). Однако, если использовать в предыдущих выкладках не ряд Тейлора, а *формулу Тейлора* с остаточным членом $\frac{x^4}{4!}y^{IV}(\theta)$, где θ - некоторая точка вблизи $x = 0$, то погрешность можно записать в виде *конечной* формулы: $\textit{погр}(9) = \textit{лев}(9) - \textit{прав}(9) = -\frac{1}{90}y^{IV}(\theta)$.

Если же использовать указанный выше подход для вычисления интеграла (17) на микроинтервале $[x_{n-h}; x_{n+h}]$ длинной $2h$, то формулу Симпсона с учетом ее погрешности можно записать в виде

$$\int\limits_{x_n-h}^{x_n+h} y(x)dx = \frac{h}{3}\left[y(x_{n-1}) + 4y(x_n) + y(x_{n+1})\right] - \frac{h^5 y^{IV}(\theta)}{90}, \tag{28}$$

где $\theta \in [x_n - h, x_n + h]$.

Наличие в выражении для погрешности формулы (28) множителя h^5 при четвертой производной подынтегральной функции объясняется следующим образом. В каждом члене ряда Тейлора (19) степень переменной x и порядок производной совпадают друг с другом. Однако, после подстановки этого ряда под знак интеграла и интегрирования каждого его члена степень x оказывается на единицу больше порядка соответствующей производной. Именно по этой причине в локальных погрешностях квадратурных формул степень шага h всегда превышает на единицу порядок входящей в нее производной.

Задача 2.

Методом рядов Тейлора найти явный вид погрешности формулы трапеций $\int\limits_{x_n}^{x_{n+h}} y(x)dx = \frac{h}{2}\left[y(x_n) + y(x_{n+1})\right] +$ *погр.*

Задача 3.

Из последовательности формул Ньютона - Котеса найти квадратурную формулу более высокой точности по сравнению с формулой Симпсона, которая получается при использовании интерполяционного полинома четвертой (а не второй!) степени. Для этой цели, очевидно, необходимо использовать 5 узлов интегрирования:

$$\int\limits_{x_n-2h}^{x_n+2h} y(x)dx = ay(x_n - 2h) + by(x_n - h) + cy(x_n) + dy(x_n + h) + ey(x_n + 2h). \tag{29}$$

Найти неизвестные коэффициенты a, b, c, d, e, входящие в эту формулу и явный вид ее погрешности.

Заметим в заключение, что метод рядов Тейлора полностью эквивалентен методу моментов, в силу чего совпадение систем уравнений (25 - 27) и (10 - 12) отнюдь не случайно. Эта эквивалентность становится очевидной, если учесть, что искомая квадратурная формула (7) должна быть точной для любого интерполяционного полинома n-й степени $P_n(x)$, заменяющего подынтегральную функцию $y(x)$, в силу чего и для случаев $y(x) = x^k$ $(k = 0, 1, \cdots, n)$. Но с другой стороны, разложение для такой функции $y(x)$ в ряд Тейлора содержит только один отличный от нуля член:

$$\begin{aligned} y(x) &= y(0) + x\tfrac{y'(0)}{1!} + x^2\tfrac{y''(0)}{2!} + \cdots + \\ &+ x^{k-1}\tfrac{y^{(k-1)}(0)}{(k-1)!} + x^k\tfrac{y^{(k)}(0)}{k!} + x^{k+1}\tfrac{y^{(k+1)}(0)}{(k+1)!} + \cdots = \tfrac{x^k}{k!}y^{(k)}(0), \end{aligned} \tag{30}$$

поскольку $y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ \cdots,\ y^{(k-1)}(0) = 0,\ y^k(0) = k!,\ y^{(k+1)}(0) = 0, \cdots$.

В результате оказывается, что приравнивание коэффициентов при одинаковых производных слева и справа в формуле (7) для $k = 0, 1, \cdots, n$ эквивалентно тому, что мы последовательно заменяем подынтегральную функцию $y(x)$ на различные степени ее аргумента, то есть полагаем $y(x) = x^0, x^1, x^2, \ldots, x^n$, в чем и заключается метод моментов.

Задача 4.

Доказать эквивалентность всех трех рассмотренных выше общих методов вывода квадратурных формул: метода аналитической замены, метода моментов и метода рядов Тейлора. (Например, доказать, что из метода моментов следует метод аналитической замены и наоборот).

Методы, рассмотренные в данном разделе пособия, являются *общими* в том смысле, что их можно применять для вывода любых квадратурных формул. Эта идея будет проиллюстрирована нами в последующих разделах.

Подчеркнем в заключении, что указанные методы служат не для интегрирования, а для вывода квадратурных формул, то есть тех формул, которые непосредственно используются для численного интегрирования («Не путать паровозы и заводы, которые эти паровозы делают!»).

2 Примеры вывода квадратурных формул

2.1 Метод Филона

При вычислении коэффициентов разложения периодической функции $f(x)$ в ряд Фурье приходится вычислять интегралы вида

$$I_1 = \int\limits_0^T f(x)sin(\omega x)dx, \ I_2 = \int\limits_0^T f(x)cos(\omega x)dx, \tag{31}$$

где T - есть период этой функции: $f(x+T) \equiv f(x)$.

Поскольку в такой ряд входят синусы и косинусы, соответствующие бесконечному набору частот $\omega = \omega_0, 2\omega_0, 3\omega_0, \cdots$, кратных основной частоте $\omega_0 = \frac{2\cdot\pi}{T}$, ясно, что для «далеких» членов ряда $\omega \gg 1$. В этом случае при вычислении интегралов (31) возникают определенные вычислительные трудности, на преодоление которых и нацелен метод Филона.

При не слишком больших значениях ω интегралы (31) можно вычислять с помощью уже обсуждавшихся формул Ньютона-Котеса (очень часто для этого используется формула Симпсона). Однако, при $\omega \gg 1$ тригонометрические функции в интегралах (31) являются *быстро осциллирующими*, а следовательно, таковыми будут и полные подынтегральные функции $y_1(x) = f(x)sin(\omega x)$ и $y_2(x) = f(x)cos(\omega x)$ даже в тех случаях, когда сама разлагаемая в ряд Фурье функция является достаточно плавной.

С другой стороны, для достижения заданной степени точности в случае быстро осциллирующих подынтегральных функций обычно приходится выбирать достаточно маленький шаг интегрирования. Действительно, в предыдущих разделах пособия на каждом микроинтервале подынтегральную функцию мы заменяли интерполяционным полиномом небольшой степени (по крайне мере, на каждом полупериоде функций $sin(\omega x)$ и $cos(\omega x)$ приходится брать хотя бы 4 - 5 узлов интерполяции, чтобы такой полином достаточно хорошо аппроксимировал эти тригонометрические функции). В результате, при вычислении интегралов (31) для случая $\omega \gg 1$ описанными ранее «традиционными» методами необходимо выбирать весьма маленький шаг интегрирования «в угоду» быстро осциллирующим тригонометрическим функциям, что существенным образом увеличивает необходимое время счета.

Указанная трудность в методе Филона преодолевается следующим образом. Поскольку функцию $f(x)$ мы считаем достаточно плавной, в интеграле I_1 интерполяционным полиномом $P_n(x)$ можно заменить не всю подынтегральную функцию $y_1(x) = f(x)sin(\omega x)$, а лишь ее *плавную часть* $f(x)$. В результате, интеграл I_1 представится в виде линейной комбинации [3] (n+1)-го интеграла вида $\int\limits_0^T x^k sin(\omega x)dx,\ k = 0, 1, 2, \cdots n$, которые вычисляются *аналитически*, например, с помощью метода интегрирования по частям. (Совершенно аналогично поступаем и с вычислением интеграла I_2). В этом заключается основная идея метода Филона.

Задача 5.

Вывести формулу Филона для нахождения интеграла

$$\int\limits_{-1}^{1} f(x)sin(\omega x)dx, \tag{32}$$

используя два узла интегрирования: $x_0 = -1, x_1 = 1$. (Очевидно, такая формула будет аналогом обычной формулы трапеции, поскольку функция $f(x)$ заменяется полиномом 1-й степени).

Для вычисления того же интеграла (32) легко получить и формулу Филона, которая является аналогом формулы Симпсона. Будем в такой формуле использовать три узла интегрирования, что соответствует аппроксимации функции $f(x)$ полиномом второй степени:

$$\int\limits_{-1}^{1} f(x)sin(\omega x)dx = a_{-1}f(-1) + a_0 f(0) + a_1 f(1). \tag{33}$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов a_{-1}, a_0, a_1 (они будут зависить от частоты ω !) с помощью метода моментов получим следующие уравнения:

$$\begin{array}{l} f(x) = x^0 \equiv 1 : 0 = a_{-1} + a_0 + a_1, \\ f(x) = x^1 : \gamma_1 = -a_{-1} + a_1, \\ f(x) = x^2 : 0 = a_{-1} + a_1, \end{array} \tag{34}$$

где $\gamma_1 = \int\limits_{-1}^{1} sin(\omega x)dx$.

[3] Коэффициентами этой линейной комбинации являются коэффициенты интерполяционного полинома $P_n(x)$.

Правые части уравнений (34) полностью совпадают с теми, с которыми мы имели дело при выводе методом моментов обычной формулы Симпсона (см. формулы (10 - 12)), в то время как левые их части имеют уже другие значения.

Решая систему уравнений (34) имеем $a_0 = 0,\ a_{-1} = -a_1,\ a_1 = \frac{\gamma_1}{2}$, где $\gamma_1 = \int\limits_{-1}^{1} x sin(\omega x)dx = \frac{2}{\omega} sin(\omega)$.

Преимуществом формулы Филона для вычисления интегралов (31) в случае $\omega \gg 1$ является то, что мы можем при выборе шага интегрирования ориентироваться не на быстро осциллирующие функции $sin(\omega x)$, $cos(\omega x)$, а лишь на плавную функцию $f(x)$, что позволяет использовать существенно большие значения шага, а это резко сокращает объм вычислительной работы при нахождении далеких членов разложения функции $f(x)$ в ряд Фурье.

2.2 Вычисление некоторых несобственных интегралов второго рода

Напомним, что несобственными интегралами второго рода называются интегралы, у которых подынтегральная функция в одной или нескольких точках на интервале интегрирования обращается в $+\infty$ или $-\infty$. Интегралы этого типа могут сходиться или расходиться, в зависимости от того, с какой скоростью подынтегральная функция $y(x)$ стремится к бесконечности в окрестности этих особых точек. Например, оба интеграла $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2}$ и $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ являются несобственными, поскольку их подынтегральные функции стремятся к бесконечности при $x \to 0$. Первый из этих интегралов расходится, поскольку

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2} = \frac{x^{-1}}{-1}\bigg|_0^1 = \frac{-1}{x}\bigg|_0^1 = -1 + \infty = \infty, \tag{35}$$

а второй сходится, поскольку

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{x^{1/2}}{1/2}\bigg|_0^1 = 2\sqrt{x}\Big|_0^1 = 2. \tag{36}$$

Такое различие в поведении указанных интегралов связано с тем, что подынтегральная функция $y_1(x) = \frac{1}{x^2}$ стремится к бесконечности при $x \to 0$ гораздо быстрее по сравнению с функцией $y_2(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

В силу вышесказанного, перед попыткой непосредственного вычисления интеграла, у которого подынтегральная функция имеет особые точки, необходимо проанализировать скорость ее поведения вблизи каждой из них: возможно этот интеграл расходится и, следовательно, попытка применения к нему численных методов бессмысленна. Более того, в результате такой попытки, мы, как правило, получим *конечное* значение интеграла, несмотря на то, что на самом деле он является расходящимся. Действительно, вероятность попасть на особую точку подынтегральной функции при «бездумном» выборе шага интегрирования практически равна нулю.

В качестве первого примера вычисления несобственных интегралов второго рода, мы рассмотрим интеграл вида

$$I = \int\limits_0^1 f(x)\ln(x)dx, \tag{37}$$

где $f(x)$ - некоторая плавная функция, не имеющая особенностей.
Поскольку при $x \to 0$ функция $\ln(x) \to -\infty$, вся подынтегральная функция в точке $x = 0$ имеет особенность и мы, таким образом, имеем дело с несобственным интегралом второго рода.

Учитывая вышесказанное, исследуем прежде всего интеграл (37) на предмет его сходимости, для чего следующим образом разобьем его на два других интеграла:

$$I = \int\limits_0^\varepsilon f(x)\ln(x)dx + \int\limits_\varepsilon^1 f(x)\ln(x)dx. \tag{38}$$

Первый из этих интегралов берется по *микроинтервалу* $[0, \varepsilon]$ *около особой точки* $x = 0$ и именно он и определяет судьбу сходимости всего интеграла I. Действительно, на отрезке интегрирования второго интеграла $[\varepsilon, 1]$ по предположению о свойствах функции $f(x)$, других особых точек подынтегральной функции нет и, следовательно, он заведомо является некоторым *конечным* числом. В отличие от него интеграл на интервале $(0, \varepsilon]$ может оказаться равным или конечному числу (и тогда полный интеграл I сходится), или бесконечно большому по модулю числу, что ведет к расходимости интеграла I.

Итак, рассмотрим «судьбоносный» интеграл

$$I_1 = \int\limits_0^\varepsilon f(x)\ln(x)dx. \tag{39}$$

Воспользовавшись тем, что $f(x)$ является достаточно плавной функцией, мы можем на данном микроинтервале с достаточно хорошей степенью точности разложить эту функцию в ряд Тейлора и ограничиться лишь несколькими первыми его членами:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots. \tag{40}$$

В результате подстановки такого разложения в интеграл I_1 последний будет представлять собой линейную комбинацию интегралов вида

$$\int\limits_0^\varepsilon x^k \ln(x)dx,\ k = 0, 1, 2, \cdots, n. \tag{41}$$

Методом интегрирования по частям можно убедиться в том, что все эти интегралы сходятся, а значит, сходится и весь интеграл I_1. Наиболее «опасным» по своему влиянию на судьбу сходимости интеграла I_1, очевидно, является

$$\int\limits_0^\varepsilon x^0 \ln(x)dx = \int\limits_0^\varepsilon \ln(x)dx, \tag{42}$$

поскольку функция $\ln(x)$ стремится к $-\infty$ быстрее функций $x^k \ln(x)$ при $k > 0$ (сравните, например, значения функций $y_0(x) = \ln(x)$ и $y_1(x) = x\ln(x)$ на последовательности их аргументов $x = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, \cdots !$).

С другой стороны,

$$\int\limits_0^{\varepsilon} \ln(x)dx = \left.(x\ln(x) - x)\right|_0^{\varepsilon}. \quad (43)$$

Первое слагаемое в этой формуле на нижнем пределе представляет собой неопределенность типа $0 \cdot (-\infty)$, которую легко раскрыть с помощью правила Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}(x\ln(x)) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(x)}{(1/x)} = \lim_{x\to 0}\frac{(1/x)}{(-1/x^2)} = 0. \quad (44)$$

Таким образом, I_1 является *конечным* числом, из чего следует сходимость исходного интеграла $I = \int\limits_0^1 f(x)\ln(x)dx$.

Зная, что функция $f(x)$, не имеет особых точек на интервале интегрирования $[0, 1]$ и является достаточно плавной, можно воспользоваться той же самой идеей, на которой основан метод Филона. Именно, в отличие от квадратурных формул Ньютона - Котеса, при выводе которых интерполяционным полиномом заменялась *вся* подынтегральная функция[4], мы будем теперь интерполировать лишь «хорошую» функцию $f(x)$. Тогда интеграл I сведется к линейной комбинации нескольких интегралов. Все они вычисляются *аналитически* с помощью метода интегрирования по частям и, более того, для них можно найти простую общую формулу:

$$\int\limits_0^1 x^k \ln(x)dx = -\frac{1}{(k+1)^2}. \quad (45)$$

Эта формула справедлива при условии $k \neq -1$, что у нас заведомо выполнено, поскольку $k = 0, 1, 2, \cdots$.

Как и в случае метода Филона вышесказанное означает, что для вычисления интегралов типа (37) можно построить квадратурные формулы различной степени точности, используя интерполяционные полиномы разного порядка.

Задача 6.

Вывести квадратурную формулу, использующую четыре узла интегрирования:

$$\int\limits_0^1 f(x)\ln(x)dx = af(0) + bf(\frac{1}{3}) + cf(\frac{2}{3}) + df(1). \quad (46)$$

Указание. Для вывода этой формулы можно использовать метод моментов, то есть полагая последовательно $f(x) = x^0, x^1, x^2, x^3$, получить систему четырех линейных алгебраических уравнений относительно четырех неизвестных коэффициентов

[4]Функцию $y(x) = f(x)ln(x)$ на данном интервале интегрирования нельзя заменить полиномом, поскольку $|y(0)| \to \infty$, а никакой полином не может иметь таких значений!

a, b, c, d.

Теперь можно объяснить название «метод моментов» для рассматриваемого нами метода вывода квадратурных формул (в этом названии слово «момент» никакого отношения ко времени не имеет: мы говорим о моменте инерции в физике, а моментах разного порядка функции распределения в теории вероятности и т.д.). Интегралы, рассмотренные нами в разделах 1.4 и 1.5 являются частными случаями интегралов вида

$$\int_a^b f(x)K(x)dx. \tag{47}$$

Здесь подынтегральная функция представлена в форме произведения двух функций $-f(x)$, которая является достаточно плавной и не имеет каких-либо особенностей и которую мы будем считать «хорошей», и функции $K(x)$, *называемой* ядром. Последняя в некотором смысле является «плохой»: в разделе 1.4 мы имели функцию $K(x) = sin(\omega x)$, $\omega \gg 1$, которая была «плохой», поскольку являлась быстроосциллирующей, а в разделе 1.5 - функция $K(x) = \ln(x)$, была «плохой», поскольку имела особую точку на интервале интегрирования. В обоих рассмотренных случаях всю подынтегральную функцию $f(x)K(x)$ нельзя было представить в виде интерполяционного полинома из-за плохого поведения множителя $K(x)$, но зато это можно было сделать для «хорошей» функции $f(x)$. В результате вычисление интеграла (47) сводится к вычислению интегралов вида

$$\int_a^b x^m K(x)dx, \quad m = 0, 1, 2, \cdots, \tag{48}$$

называемых *моментами* ядра $K(x)$. Каждый из интегралов (48) сам по себе представляет вычислительные трудности, если его попытаться находить с помощью численных методов. Но этого делать не требуется, поскольку для рассматриваемых нами ядер $K(x) = \sin(\omega x)$ и $K(x) = \ln(x)$ все моменты (48) вычисляются *аналитически*.

Разумеется указанную идею можно использовать и в ряде других случаев для численного нахождения интегралов вида (47), но успех ее реализации сводится к возможности *аналитического* вычисления нескольких первых моментов (48) ядра $K(x)$. Если это удается осуществить, то готовую квадратурную формулу легко построить методом моментов (см. раздел 1.2) или альтернативным ему методом рядов Тейлора (см. 1.3).

2.3 Метод интегрирования Гаусса с плавающими узлами

Во всех рассмотренных до сих пор случаях узлы интегрирования (т.е. узлы интерполяционного полинома для подынтегральной функции) мы задавали сами и искали, таким образом, квадратурные формулы с *фиксированными* узлами

$$\int_a^b y(x)dx = \sum_{j=0}^{n} C_j y(x_j). \tag{49}$$

Идея метода интегрирования Гаусса сводится к тому, чтобы заранее не фиксировать узлы интегрирования, а предоставить выбор этих узлов самому методу вывода формул интегрирования. Таким образом, в формуле (49) мы будем считать теперь неизвестными не только коэффициенты C_j, но и узлы интегрирования $x_j (j = 0, 1, \cdots, n)$. В этом смысле говорят о квадратурных формулах с плавающими (т.е. заранее не фиксированными) узлами интегрирования.

Рассмотрим реализацию этой идеи на примере вывода квадратурной формулы вида

$$\int_{-1}^{1} y(x)dx = C_1 y(x_1) + C_2 y(x_2), \tag{50}$$

которая, очевидно, является аналогом обычной формулы трапеции – интегрирование идет по *двум* (пока что неизвестным!) узлам x_1 и x_2.

Применим метод моментов для вывода формулы (50). Поскольку в этой формуле четыре неизвестных величины – C_1, C_2, x_1, x_2, заменяем подынтегральную функцию $y(x)$ на четыре последовательные степени ее аргумента: x^0, x^1, x^2, x^3, в результате чего приходим к четырем уравнениям относительно четырех вышеуказанных переменных:

$$y(x) = x^0 = 1(\textit{функция равна постоянной величине}) : 2 = C_1 + C_2, \tag{51}$$

$$y(x) = x^1(\textit{функция равна своему аргументу}) : 0 = C_1 x_1 + C_2 x_2, \tag{52}$$

$$y(x) = x^2(\textit{функция равна квадрату своего аргумента}) : \frac{2}{3} = C_1 x_1^2 + C_2 x_2^2, \tag{53}$$

$$y(x) = x^3(\textit{функция равна кубу своего аргумента}) : 0 = C_1 x_1^3 + C_2 x_2^3 \tag{54}$$

В отличие от рассмотренным нами ранее случаев, уравнения (51) - (54) являются *нелинейными* алгебраическими уравнениями. Заметим, что в отличие от методов решения систем линейных алгебраических уравнений *нет* универсальных методов решения систем нелинейных уравнений. Однако, система (51) - (54) имеет весьма специфическую структуру, что позволяет достаточно просто найти ее решение.

Рассмотрим сначала уравнения (52) и (54), которым отвечают нулевые левые части. Из уравнения (52) имеем

$$C_2 x_2 = -C_1 x_1. \tag{55}$$

Подстановка этого выражения в уравнение (54) дает:

$$0 = C_1 x_1^3 - (C_1 x_1) x_2^2. \tag{56}$$

Полученное уравнение можно сократить на величину C_1x_1, которая заведомо не равна нулю. Действительно, если предположить противное, то есть считать $C_1x_1 = 0$, то из (55) следует, $C_2x_2 = 0$, что вступает в противоречие с уравнением (53).

После указанного сокращения уравнение (56) принимает вид $x_1^2 = x_2^2$, откуда вытекают два возможных варианта соотношения между узлами интегрирования: $x_1 = x_2$ или $x_1 = -x_2$. Первый из этих вариантов необходимо сразу отбросить. Действительно, если $x_1 = x_2$, то оба узла интегрирования в формуле (50) оказываются одинаковыми и, таким образом, мы получим квадратурную формулу, которая использует не два, а лишь один узел интегрирования, что противоречит исходному требованию нахождения квадратурной формулы с *двумя* (разными!) узлами интегрирования.

Таким образом, остается лишь второй вариант:

$$x_1 = -x_2. \tag{57}$$

С учетом этого соотношения формулы (51) - (54) можно переписать следующим образом:

$$2 = C_1 + C_2, \tag{58}$$

$$0 = (C_1 - C_2)x_1, \tag{59}$$

$$\frac{2}{3} = (C_1 + C_2)x_1^2, \tag{60}$$

$$0 = (C_1 - C_2)x_1^3. \tag{61}$$

Теперь из уравнений (58) и (60) получим $\frac{2}{3} = 2 \cdot x_1^2$, из чего следует $x_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Тогда в силу уравнения (57) $x_2 = \mp\frac{1}{\sqrt{3}}$, что приводит к двум вариантам решения $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ или $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Поскольку нумерация узлов интегрирования совершенно произвольна, оба этих варианта идентичны, и мы выберем первый из них:

$$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}},\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}. \tag{62}$$

Далее, из уравнения (61) имеем $C_1 = C_2$, что совместно с уравнением (58) приводит к равенству единице обоих коэффициентов в формуле (50):

$$C_1 = C_2 = 1. \tag{63}$$

Соотношения (62) и (63) дают полное решение поставленной задачи - искомая квадратурная формула (50) имеет вид:

$$\int_{-1}^{1} y(x)dx = y\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + y\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right). \qquad (64)$$

Из общих соображений ясно, что формула (64) должна быть на два порядка более точной (по шагу интегрирования h) по сравнению со своим аналогом для случая фиксированных узлов, то есть по сравнению с обычной формулой трапеции.

Действительно, если использовать для вывода формулы (64) метод рядов Тейлора, то для получения четырех уравнений (относительно четырех неизвестных C_1, C_2, x_1, x_2) требуется приравнивание нулю коэффициентов при четырех младших производных, то есть при $y(0), y'(0), y''(0), y'''(0)$. Таким образом, погрешность формулы (64) может начинаться, по крайне мере, с четвертой производной подынтегральной функции. С другой стороны, мы уже знаем (см. раздел 1.3), что степень шага интегрирования в выражении для погрешности любой квадратурной формулы на единицу больше порядка входящей в нее производной. Следовательно, погрешность формулы (64) не более $0(h^5 y^{IV})$.

Задача 7.
Найти явный вид погрешности квадратурной формулы (64).

Таким образом, квадратурные формулы Гаусса с плавающими узлами являются существенно более точными по сравнению со своими аналогами с фиксированными (выбранными нами заранее) узлами. Так, в нашем случае, только за счет рационального выбора двух узлов интегрирования по формуле (62) удается как минимум на два порядка повысить точности квадратурной формулы. Заметим, что догадаться сразу до такого выбора узлов интегрирования невозможно!

Разумеется можно найти и более точные квадратурные формулы Гаусса, использующее большее число узлов интегрирования (попробуйте осуществить эту программу самостоятельно). В справочной литературе по численному анализу имеются готовые таблицы для коэффициентов и узлов интегрирования соответствующих формул разного порядка. Для того, чтобы ими воспользоваться, предварительно необходимо привести искомый интеграл к стандартному интервалу $[-1; 1]$, что всегда легко сделать с помощью соответствующей замены переменных.

Разумеется, формулы Гаусса можно использовать и как *составные* формулы, разбивая общий интервал интегрирования на ряд подынтервалов, для каждого из которых применяются некоторые квадратуры с плавающими узлами.

Из всего вышесказанного очевидно, что формулы Гаусса наиболее целесообразно использовать в тех случаях, когда вычисление подынтегральной функции $y(x)$ в каждой точке интервала интегрирования «обходится достаточно дорого». Такая ситуация возникает в том случае, если функция $y(x)$ определяется достаточно сложным выражением, требующим относительно большого объема вычислительной работы. Другим примером может служить случай, когда интегрирование проводится по набору экспериментальных данных, которые получаются в результате дорогостоящих экспериментов. В такой ситуации целесообразно заранее определить множество тех узлов, в которых будет находиться интегрируемая функция $y(x)$, поскольку желательно использовать минимальное количество измерений для нахождения интегралов с заданной степенью точности.

2.4 Гауссовы квадратуры в некоторых специальных случаях

Квадратурные формулы Гаусса можно эффективно использовать для вычисления ряда *несобственных* интегралов специфической структуры. Например, при решении некоторых задач квантовой механики возникает необходимость вычисления несобственных интегралов первого рода (по определению, это интегралы, у которых по крайне мере один из пределов интегрирования равен $\pm\infty$):

$$\int_0^\infty f(x)e^{-x}dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-x^2}dx. \tag{65}$$

Формулы интегрирования с плавающими узлами для вычисления этих интегралов называются соответственно формулами Гаусса - Лагерра и Гаусса - Эрмита. Такие названия связаны с тем, что узлы интегрирования в этих формулах Гаусса являются, как оказывается, узлами ортогональных полиномов, называемых полиномами Лагерра и Эрмита.

Задание.
Познакомьтесь с видом этих полиномов и их свойствами, используя, например, справочник [1] или пакет математических вычислений Maple (при работе с этими полиномами необходимо подключить библиотеку orthopoly).

Среди наиболее распространенных ортогональных полиномов отметим также полиномы Чебышёва. Их корни могут служить в качестве узлов интегрирования в так называемых формулах Гаусса - Чебышёва, которые используются при вычислении несобственных интегралов второго рода вида $\int\limits_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$ (подынтегральная функция имеет особые точки на обоих пределах интегрирования). В случае вычисления интегралов этого типа можно написать общие аналитические выражения для коэффициентов (C_j) и узлов (x_j) формул Гаусса в случае произвольного числа узлов n:

$$C_j = \frac{\pi}{n}, \quad x_j = \cos(\frac{2j-1}{2n}\pi), \ j = 0, 1, 2, \cdots, n. \tag{66}$$

Эти узлы интегрирования являются нулями ортогонального полинома Чебышёва n-го порядка. Заметим, что все коэффициенты C_j в формулах Гаусса - Чебышёва одинаковые [5].

2.5 Формулы Эйлера-Маклорена

В предыдущих разделах настоящего методического пособия мы выражали интеграл в виде определенной линейной комбинации значений подынтегральной функции в

[5] Формулы интегрирования, у которых все коэффициенты C_j являются постоянными величинами, называются квадратурами Чебышёва. С помощью метода моментов можно вывести соответствующие формулы интегрирования небольшого порядка

некотором наборе точек, называемых узлами интегрирования. В формулах Эйлера-Маклорена используются не только значения подынтегральной функции, но и некоторое число ее *производных на концах интервала интегрирования.*

В качестве примера рассмотрим вывод квадратурной формулы вида

$$\int\limits_0^1 y(x)dx = ay(0) + by(1) + cy'(0) + dy'(1). \qquad (67)$$

Наиболее просто использовать для такого вывода метод моментов. Учитывая что $\int\limits_0^1 x^k dx = \frac{1}{k+1}$, заменяем подынтегральную функцию $y(x)$ последовательными степенями ее аргумента x, в результате чего получим некоторую систему линейных алгебраических уравнений:

$$y(x) = x^0 = 1: \; 1 = a + b \text{ (\textit{в этом случае} } y'(x) = 0), \qquad (68)$$

$$y(x) = x^1: \; \frac{1}{2} = a \cdot 0 + b + c + d \text{ (\textit{поскольку сейчас} } y'(x) = 1 \text{)}, \qquad (69)$$

$$y(x) = x^2: \; \frac{1}{3} = a \cdot 0 + b + 2d \text{ (\textit{с учетом того, что} } y'(x) = 2x \text{)}, \qquad (70)$$

$$y(x) = x^3: \; \frac{1}{4} = a \cdot 0 + b + 3d \text{ (\textit{поскольку} } y''(x) = 3x), \qquad (71)$$

Вычитая из последнего уравнения предыдущее, получим $d = -\frac{1}{12}$. Далее, находим $b = \frac{1}{2}, a = \frac{1}{2}, c = \frac{1}{12}$.

Таким образом, мы приходим к следующей квадратурной формуле:

$$\int\limits_0^1 y(x)dx = \frac{1}{2}\left[y(0) + y(1)\right] + \frac{1}{12}\left[y'(0) - y'(1)\right]. \qquad (72)$$

Формула (72) дает некоторое уточнение формулы трапеции за счет вклада от производных на концах интервала интегрирования.

Задача 8.
Используя метод рядов Тейлора найти погрешность этой формулы интегрирования.

Задача 9.
Вывести квадратурную формулу Эйлера-Маклорена более высокого порядка точности и ее погрешность

$$\int\limits_0^1 y(x)dx = \frac{1}{2}\left[y(0) + y(1)\right] - \frac{1}{12}\left[y'(1) - y'(0)\right] + \frac{1}{720}\left[y'''(1) - y'''(0)\right]. \qquad (73)$$

При использовании формулы Эйлера-Маклорена как *составной*, необходимо находить интегралы $\int\limits_{x_0}^{x_0+h} y(x)dx$. В результате в формулах типа (72), (73) при слагаемых с производными m-го порядка появляются дополнительные множители h^{m+1}. Например, формула (73) принимает вид

$$\int\limits_{x_0}^{x_0+h} y(x)dx = \tfrac{h}{2}\left[y(x_0) + y(x_0+h)\right] - \tfrac{h^2}{12}\left[y'(x_0+h) - y'(x_0)\right] + \\ + \tfrac{h^4}{720}\left[y'''(x_0+h) - y'''(x_0)\right]. \tag{74}$$

Легко убедиться в том, что если использовать формулу (74) как составную, на интервале от x_0 до $x_n = x_0 + n \cdot h$, слагаемые с производными в *промежуточных* точках интервала интегрирования $x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2 \cdot h, \cdots, x_{n-1} = x_0 \cdot (n-1) \cdot h$ *взаимно уничтожаются*. В результате, в окончательной квадратурной формуле остаются лишь вклады с производными подынтегральной функции на концах интервала интегрирования $[x_0, x_0 + nh]$.

$$\int\limits_{x_0}^{x_0+nh} y(x)dx = h\left[\tfrac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_{n-1} + \tfrac{1}{2}y_n\right] - \\ - \tfrac{h^2}{12}\left[y'_n - y'_0\right] + \tfrac{h^4}{720}\left[y'''_n - y'''_0\right]. \tag{75}$$

В этой формуле, как обычно, $y_k = y(x_k)$.

Таким образом, формулы Эйлера-Маклорена дают поправки разных порядков по величине шага интегрирования h к обычной формуле трапеции (применение последней дает лишь вклад, пропорциональный степени h).

В силу специфической структуры формулы (75), ее часто используют не для вычисления интегралов, а для *суммирования рядов*. Действительно, из (75) при $h = 1$ имеем

$$y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_n = \int\limits_0^n y(x)dx + \frac{1}{2}\left[y_n + y_0\right] + \frac{1}{12}\left[y'_n - y'_0\right] - \frac{1}{720}\left[y'''_n - y'''_0\right] + \cdots. \tag{76}$$

Можно привести любопытный пример удачного применения полученной формулы при решении физической задачи: Л.Д. Ландау получил свою знаменитую формулу для диамагнитной восприимчивости электронного газа именно с помощью формулы Эйлера-Маклорена.

Рекомендуемая литература

1. Н.Н. Калиткин. "Численные методы". — 1978.

2. Л.И. Турчак. "Основы численных методов". — 1987.

3. Р.В.Хемминг. "Численные методы". — 1968.

4. И.С. Березин, Н.П. Жидков. "Методы вычислений". — Т.1 —1962, т.2 — 1966.

5. Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер. «Машинные методы математических вычислений». — 1980.

6. С.С. Михалкович, А.В. Олифер, АМ Столяр. "Численные методы". Вып. 3,4,5. — 2001.

7. Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. "Численные методы". — 1987.

8. А.А. Самарский, А.В. Гулин. "Численные методы". — 1989.

9. Е.В. Волков. "Численные методы". — 1987.

10. Г. Корн и Т. Корн. Справочник по математике (для научных работников и инженеров)//изд. — М : «Наука», 1974.