Министерство общего и профессионального образования РФ
Удмуртский государственный университет

Н.Н. Непейвода

Прикладная логика

Учебное пособие

Рекомендовано Государственным Комитетом Российской Федерации по высшему образованию в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальностям “Математика”, “Прикладная математика”, “Лингвистика”, “Философия” и “Психология”.

Ижевск
Издательство Удмуртского университета
1997

УДК
ББК

Непейвода Н.Н. Прикладная логика. Учебное пособие. Ижевск, Изд-во Удм. ун-та, 1997, 385 стр.

Данное пособие является элементарным введением в язык современной математики и методы современной математической логики. Его можно использовать совместно с обучающими программами высокого уровня.

Рекомендуется для студентов и аспирантов специальностей — математика, прикладная математика, структурная прикладная лингвистика, философия, когнитивная психология.

ISBN 5-7029-0074-X

Оглавление

Введение

Я — школяр в этом лучшем из лучших миров,
Труд мой тяжек: учитель уж больно суров!
До седин я у жизни хожу в подмастерьях,
Все еще не зачислен в разряд мастеров ...

(О. Хайям. [20, стр. 25])

In.1 Что такое современная логика?

Наука отличается от ремесла соотношением формального, зафиксированного в письменных документах, и неформального, передаваемого лишь непосредственно от учителя к ученику, знания. Если основные знания ремесленника являются часто не выраженными в словах, *невербализованными*, умениями, навыками, то наука требует фиксации полученных результатов в словесной, вербальной форме. Конечно, знание, передаваемое лишь от учителя к ученику и часто неявно, играет важную роль и в науке. Это — эстетические и оценочные критерии, по которым оцениваются новые результаты и качество работ, и, самое главное, обычаи, гласящие, чем прилично и чем неприлично заниматься ученому, причисляющему себя к данной отрасли науки.

Скажем, астроному прилично заниматься интерпретацией результатов астрономических наблюдений с точки зрения механики либо физики, но ему неприлично исследовать влияние небесных тел на судьбу. Если он использует историческую хронику (например, так делают для выявления комет, вспышек новых звезд и для уточнения уравнения движения Луны), ему неприлично сомневаться в достоверности основных принципов традиционной истории: историки знают данный вопрос лучше него и наверняка все много раз проверяли.[1]

---

[1]Проверяли ли они на самом деле — другой вопрос. Критический анализ исторических трудов выявляет, в частности, что многие работы по хронологии ссылаются в конечном итоге на одну и ту же работу Жана Скалигера, где была принята масса про-

Математику неприлично заниматься тем, что не допускает точной формулировки, и самому формулировать утверждения, которые могут быть поняты двояко. Ему неприлично выдавать правдоподобное утверждение за доказанное, он имеет право утверждать лишь то, для чего он имеет полное доказательство. Ему нельзя утаивать открытое им доказательство, он обязан предоставить его на максимально широкое обсуждение, для проверки всеми заинтересованными лицами. Если кто-то нашел ошибку в его доказательстве, он не имеет права настаивать на своем, а обязан поблагодарить за помощь и публично объявить о своей ошибке и пересмотреть доказательство либо формулировку теоремы. Если кто-то нашел опровергающий пример для доказанного им утверждения, он даже не имеет права требовать, чтобы нашли еще и ошибку в его доказательстве, текст, объявленный доказательством, уже никого не интересует[2] ...

Далее, если каноны ремесла не требуют иного обоснования, кроме традиции, и имеют тенденцию превращаться в обязательные стандарты, нарушение которых карается, каноны науки должны быть обоснованы и могут быть пересмотрены. Более того, если в ремесле ценится прежде всего воспроизведение данных образцов, то в науке и искусстве необходимо сделать нечто новое или, по крайней мере, дать новый взгляд на старое. В искусстве, хотя каноны и невербализованы и не требуют

извольных допущений. Первым обратил внимание на недостоверность традиционной хронологии Исаак Ньютон, за что его сразу же обвинили в том, что он стал к старости выживать из ума (в то же самое время он блестяще провел реформу английского монетного двора, что отнюдь не является признаком безумия; нам бы столь безумных министров!) В наше время эту традицию (называемую *гиперкритицизмом*) продолжает, в частности, академик А.Т. Фоменко [28]. Читая труды гиперкритиков, можно заметить, насколько тупое сопротивление со стороны специалистов всякой критике того, что считается незыблемыми устоями науки, озлобляет и заставляет зарываться. Как правило, гиперкритики кончают тем, что начинают брать под сомнение все и вырабатывают фантастическую концепцию ничуть не лучше критикуемой. Всегда сохраняйте чувство меры! Беда России в том, что в ней слова „оппортунист" и „либерал" всегда были презрительными, а „консерватор" понимался как тупой защитник существующих властей.

[2] Эти достаточно точные и строгие критерии показывают, почему именно в среде математиков устойчивей всего сохраняется понятие научной этики и чести ученого. А без этих понятий любая наука мертва. В последнее время в связи с внедрением в науку квазиконкурентной системы грантов и культа успеха вместо культа Истины пошел целый шлейф скандалов в связи с разоблачением множества фальсификаций данных и опытов в естественных науках. Впрочем, понятия этики и чести начали стремительно исчезать из науки сразу после того, как она стала средством создания орудий массового убийства. Но научная этика, даже сохраненная в полном объеме, отнюдь не исчерпывает человеческой; безупречно честный в науке человек может быть подонком в жизни.

обоснования, так же как и в ремесле, требуется их нарушение (чего не требуется в науке), и вкус художника определяется тем, насколько он чувствует допустимую меру их нарушения (а вот это справедливо и для новых направлений в науке). Так что наука органически занимает место между искусством и ремеслом, отличаясь от них требованием обоснованности канонов.

Если рассмотреть соотношение ремесла, искусства и науки с другой стороны, со стороны используемого языка, то отличие науки в том, что она не останавливается на стадиях ощущений, образов и представлений, как ремесло либо искусство, но требует развития понятий и терминов. *Понятие* — это языковая единица, имеющая достаточно четко определенный смысл; *термин* — слово, смысл которого фиксирован. Понятие остается живым, его смысл меняется более или менее динамически, сохраняя вместе с тем значительную устойчивость, термин — это монумент понятия.[3] Точные науки (прежде всего математика) отличаются тем, что могут работать лишь с терминами, да и то не со всеми.

Логика — наука, изучающая с формальной точки зрения понятия, методы их определения и преобразования, суждения о них и структуры доказательных рассуждений. Ее создание сделало возможным развитие европейской науки, а ее переход на стадию математической логики оказал большое влияние на всю европейскую научную мысль.

Логика как наука имеет уникальную историю. Она была создана на заре европейской цивилизации, в классической Греции, практически одним человеком — Аристотелем. В те времена впервые высказывания и рассуждения стали проверяться не на соответствие авторитету, а на убедительность для равных тебе граждан. Естественно, что в обстановке переоценки ценностей появилась орда софистов и демагогов, нагло надувавших не только народ, но и достаточно образованных людей тонкой подменой понятий, некорректными переходами в благопристойно выглядящих рассуждениях, и т. п. Например, приведем следующее в высшей мере “логичное”рассуждение.

$$\frac{\begin{array}{c}\textsf{Европейцы владели большей частью мира.}\\ \textsf{Удмурты - европейцы.}\end{array}}{\textsf{Значит, удмурты владели большей частью мира.}} \qquad (1)$$

Это потребовало противоядия, создания *канона* доказательных рассуждений, создания, как выразился Кант, “цензуры мысли”. Аристотель дал инструмент в столь совершенной форме, что более двух тысяч лет его оставалось лишь комментировать и шлифовать. Он воспользовался

[3] Данной метафорой автор обязан О. М. Аншакову.

высшими достижениями тогдашней научной мысли, в частности, широко применяя буквенные обозначения для переменных, незадолго перед тем изобретенные математиками.

Аристотелева логика часто называется *философской* либо *формальной*. Она стала неотъемлемым компонентом образования европейских философов, юристов, теологов, т.е. людей, длительное время составлявших подавляющую и самую влиятельную часть образованного слоя общества.

Можно считать, что отношение к логике явилось одним из межевых камней между западной и восточной культурами. Аверроэс (Ибн-Рушд, мавританский ученый XII века, традиционные даты жизни 1126–1198) поставил вопрос:

$$\text{“Подчиняется ли Бог законам логики?”} \tag{2}$$

Христиане разных толков, иудеи и мусульмане восприняли этот вопрос серьезно[4] и ответили на него по-разному. Католики решили, что, конечно же, подчиняется, поскольку Он — благая сила и соблюдает те законы, которые Сам установил. Мусульмане столь же ясно и недвусмысленно заявили, что требовать, чтобы Аллах чему-то подчинялся, — оскорбление Аллаха. Православные и иудеи заняли промежуточную позицию.

Но для применения в самой математике логика Аристотеля оставалась недостаточно сильной. Математикам не хватало аристотелевских силлогизмов типа[5]

---

[4]Заметим, что уже сама по себе постановка такого вопроса подчеркивает исключительную роль логики. Скажем, вопрос:

$$\text{“Подчиняется ли Бог законам физики?”} \tag{3}$$

очевидно глуп. Тем не менее многие физики и люди, привыкшие считать физику основой научного взгляда на мир, втайне чувствуют себя уязвленными некорректностью предыдущего вопроса и изо всей силы стремятся создать физическую теорию творения (см., напр., [22] как глубокое исследование с данной целью и [24] как работу, открыто высвечивающую цели данного направления.)

[5]Это рассуждение с логической точки зрения не менее корректно, чем знаменитый силлогизм, столько веков ошибочно создававший логике репутацию науки, занимающейся лишь тривиальностями:

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Все люди смертны.}\\ \text{Сократ – человек.}\end{array}}{\text{Следовательно, Сократ смертен}} \tag{4}$$

Формальная наука отличается тем, что она проверяет прежде всего форму и поэтому может рассуждать про глокую куздру из знаменитого предложения академика Щербы: “*Глокая куздра штеко бydланула бокра и кудрячит бокренка*”столь же уверенно, как про сивую кобылу.

$$\frac{\begin{array}{c}\textsf{Все змеи крылатые.}\\ \textsf{Автор данной книги — змея.}\end{array}}{\textsf{Следовательно, автор данной книги имеет крылья}} \tag{5}$$

Традиционную логику стали подвергать критике с трех сторон с начала Нового Времени. Естествоиспытатели пытались изобрести новую, индуктивную, логику, позволяющую выводить общие законы из ряда частных случаев. Евреи развивали логику толкований (называемую сейчас *герменевтикой*), позволяющую по множеству перечисленных в канонических книгах правил и исключений выводить следствие для нового конкретного случая.[6]

Пирс в XIX веке заметил, что выводы герменевтики являются частным случаем необходимых для практики выводов частных случаев из других частных. Логику такого вывода он назвал *абдуктивной логикой*.[7]

На самом деле герменевтика включает не только абдукцию, но и еще по крайней мере два важнейших компонента: истолкование метафор и перетолкование взаимно противоречивых норм, чтобы исключить противоречия в конкретном случае.

Математики заметили, что логика могла бы стать математической наукой, но таковой еще не являлась.[8]

Предвестники нового этапа появились в работах Лейбница, когда традиционная задача математики — заменить вычисления рассуждениями

---

[6]Слово 'герменевтика' произошло от имени Гермеса Трисмегиста, не то бога, не то жреца бога Гермеса, которому приписывался тайный трактат по магии и алхимии. Мало того, что этот трактат не подлежал передаче непосвященным, он и написан был таким темным и уклончивым языком, что истолковать хоть что-нибудь из него было почти невозможно. Вот поэтому искусство толкования и назвали его именем.

[7]Несколько замечаний о терминологии. Три сакраментальных термина современной логики — индукция, дедукция и абдукция — происходят от одного и того же латинского корня с разными приставками и обозначают, в исходном смысле, соответственно:

1. Получение общего закона по множеству частных случаев.
2. Получение из общего утверждения другого общего либо частного.
3. Получение нового частного случая из множества частных случаев.

[8]Естествоиспытатели, евреи и математики, конечно же, не члены деления в смысле традиционной логики. Один и тот же человек может входить во все эти группы, и более того, иногда вхождение в пересечение групп помогало первопроходцам. Например, германский еврей-математик Г. Кантор создал теорию множеств, вдохновленный, в значительной степени, проблемой истолкования многих положений Талмуда и Каббалы, касающихся таких бесконечных сущностей, как Бог и Высшие Силы.

— была инвертирована и превратилась в задачу математической логики — заменить рассуждения вычислениями. Аппарат для этого начал возникать в трудах логиков XIX века, прежде всего английской школы — де Моргана, Буля, и американского логика Пирса ... А развитие по-настоящему пошло лишь в XX веке, когда математика доросла до того, чтобы применять свои методы для анализа своей собственной структуры, и, таким образом, первой из наук перешла со стадии экстенсивного роста на стадию рефлексии[9]. Появилась новая наука — математическая логика, унаследовавшая задачи философской логики, но использовавшая для их решения математический аппарат. Как сформулировал А.А. Марков: “Математическая логика — логика по предмету, математика по методу.”

Конечно же, хотя замена средств и усилила мощь методов, она привела и к ограничениям. Если традиционная логика прекрасно приспособлена для работы с не до конца уточненными понятиями, математическая может иметь дело лишь с терминами, укладывающимися в рамки (хотя и неизмеримо расширенного прежде всего ее собственными усилиями) математического языка. Это уже точная наука со всеми ее достоинствами[10] и недостатками.[11]

---

[9] *Рефлексия* — самоанализ, в науке — применение методов данной науки к ней самой. Традиционное изложение традиционной логики, в частности, не выдерживает проверки рефлексией.

[10] Как правило, достоинства точной науки следующие:

1. Выписываются те предположения, при которых делаются выводы (например, что субъективная привлекательность суммы денег прямо пропорциональна количеству денег).

2. Понятия превращены в термины, так что не может возникнуть никаких двусмысленностей при истолковании (например, интеллектуальность понимается как способность решать задачи из заданного тестового набора).

3. Можно проверить, действительно ли сделанный вывод строго следует из принятой модели или же автор выдвигает лишь правдоподобную гипотезу.

4. Резко облегчается переход к структурам, приспособленным для интерпретации на компьютере.

[11] Ее недостатки следующие:

1. Помимо выписанных предположений, очень многие, и зачастую самые критичные для рассматриваемой ситуации, прячутся в общий применяемый аппарат. Эти неявные предположения, как правило, не осознают даже специалисты. Например, когда в XX веке наконец-то занялись вопросом, что же можно измерять действительными числами, выросла целая теория измерений, пользуясь которой можно, в частности, практически всегда отвергнуть предположение, сделанное в соответствующем пункте достоинств.

2. Поскольку термин — монумент понятия, он полностью теряет гибкость и за-

Первым широко прозвучавшим рефлексивным результатом математической логики была серия теорем Гёделя, появившихся в 1930–1931 гг. До этих теорем было общепринято[12] считать, что математика может быть полностью уточнена таким образом, чтобы *в принципе* любое истинное математическое утверждение могло быть доказано, и конечно же, такое уточнение является непротиворечивым. Таким образом, предполагалось, что математическая теория должна быть полной и непротиворечивой. Естественно, не исключалось, что существующая теория неполна, но ставилась задача ее пополнения. Гёдель доказал, что полна и непротиворечива лишь чистая логика. Любая достаточно сильная конкретная теория неполна, в ней есть утверждение, которое нельзя ни доказать, ни опровергнуть средствами этой теории. Более того, непротиворечивость никакой математической теории, включающей понятие (по крайней мере) натуральных чисел, не может быть доказана внутри этой теории.[13]

На самом деле рефлексивные результаты появились лет на 20 раньше, но шведского логика Лёвенгейма, доказавшего, что ни одна математическая теория не может, в частности, однозначно определить множество натуральных либо действительных чисел, постигла судьба многих пер-

---

частую в конкретной ситуации он начинает означать вовсе не то, что имелось в виду первоначально. Например, способность решать задачи из тестового набора может не иметь никакого отношения к способности гибкого реагирования на изменяющуюся реальную ситуацию.

3. Поскольку строгое доказательство может содержать много шагов и вовлекать многие утверждения, которые, как стыдливо говорят ученые, “выполнены в реальной ситуации лишь приближенно”, в ходе такого обоснования соответствие реальности может потеряться, так что строго доказанный результат требует содержательной перепроверки при применениях.

4. Поскольку теоретические структуры для тонких моделей слишком сложны, переход к компьютерному моделированию стимулирует применение грубых моделей, которые (в частности в физике) начали подменять собою реальность.

Эти списки не исчерпывающие, но каждое достоинство неуклонно сопровождается соответствующим недостатком.

[12]Слово ‘общепринято’ означает мнение подавляющего большинства специалистов; с этим уточнением общепринятое мнение практически всегда правильно, если вопрос элементарен, но отнюдь не всегда правильно, если вопрос требует многостороннего рассмотрения. Если же общепринятым мнением считать мнение большинства людей, то даже первая часть предыдущего утверждения не имеет места.

[13]Впрочем, если бы голубая мечта логиков и математиков начала XX века — обосновать математику средствами самой математики — осуществилась бы, то математика превратилась бы из науки в учение, ничем не отличающееся от марксизма-ленинизма: “Учение всесильно, потому что оно верно.”Ученый не может глаголить истины, он должен проверять то, что претендует на статус истины.

вооткрывателей: он угодил в психлечебницу, оставшись непонятым, а его результаты вспомнили тогда, когда сообщество до них дозрело.

Слабые возражения о том, что теоремы Гёделя не имеют никакого отношения к утверждениям, реально используемым математиками, позволили самодовольной математической точке зрения цепляться за видимость обоснованности еще тридцать лет, а затем пошел косяк результатов, устанавливавших, что не могут быть решены многие проблемы, волновавшие математиков. Последняя группа результатов о неразрешимости показала, что даже обоснование правильности компьютерной программы подпадает под те же ограничения, причем обосновывать ее тем сложнее, чем эффективней она написана.

Надо сказать, что рефлексивные возможности формализованной логики сделали ее мощным инструментом для решения некоторых *неформальных* задач. В частности, при приложениях математики все время приходится подбирать математическую модель для рассматриваемого явления. Подбор модели начинается с подбора соответствующей теории, определяющей базовые структуры данных и операции в модели. Например, если мы в качестве базовой теории возьмем математический анализ, то у нас появятся действительные числа вместе со всеми операциями; если возьмем графы, у нас появятся пути, циклы, топологические преобразования графов и т. п. Далее в выбранной теории дается представление исследуемых понятий. Например, принимается решение считать плотность материала действительным числом, а не функцией от точки пространства, считать зависимость одной характеристики от другой непрерывной, либо просто записываются графы в случае более привычного для нынешней информатики способа описания. Пишутся уравнения, связывающие характеристики элементов, либо другие соотношения между представлениями понятий, и на этом построение модели завершается, чтобы сразу же начаться снова, потому что, как правило, модель оказывается неадекватной.[14] Так что подбор формализации столь же важен для задачи, как выбор супруга для человека, и часто делается столь же безответственно, что превращает работу в мазохистское самоистязание либо в шарлатанство высшего класса, прикрытое весьма умными терминами, но начисто забывшее о реальной цели, для которой все делалось. Именно здесь очень полезен логический анализ, позволяющий быстро вскрывать глубинные корни недостатков в формализации и выявлять неадекватность патентованных и широко рекламируемых средств.

---

[14]Слово *адекватный* является практически синонимом слова *подходящий*, но мы предпочитаем данный, более "ученый"термин русскому слову потому, что адекватность модели порою настолько далека от здравого смысла, что лучше уж избежать всякой ссылки на обыденное сознание, содержащейся в слове 'подходящий'.

In.2 Методологические принципы, на которых основано данное изложение

Автор осознает, что данное пособие написано не в стиле, привычном для русской научной литературы, что оно также не подходит ни под стиль научно-популярных работ, ни под становящийся в последнее время модным общепринятый американский стиль легкого, зато профанирующего,[15] изложения. Тяжелый выбор — идти практически непроторенным путем[16] — был сделан сознательно. Логика отличается от других наук фундаментальностью рассматриваемых проблем, а математическая логика — сочетанием весьма сложного аппарата с сохранением философской глубины и с полностью неординарным взглядом на математический мир. Видимо, современная логика — лишь зачаток первой из наук нового поколения, призванных сочетать аналитичность научного метода с синтетическим восприятием гуманитарного взгляда. Цивилизация, даже высшие слои которой несут в себе по крайней мере две практически невзаимодействующие культуры, обречена.

Автор начнет с того, что он абсолютно не разделяет системы взглядов "религии прогресса",[17] *de facto* сделавшейся основой современного науч-

---

[15]В древней Греции *профан* — человек, не посвященный в некоторые таинства. В таком смысле нехристь — профан для христиан. Профанация — в Греции так называлось преступление, связанное с раскрытием священных тайн непосвященным, а в наше время так называют представление сложных вопросов в форме, где опускаются "излишние" тонкости в целях увеличения объема продаж соответствующей книги путем создания у невежд иллюзии, что они все понимают. Профанация ведет к взрывообразному расширению слоя полуобразованных людей, которые являются страшнейшим злом: у них нет сомнений в том, что они все знают, они зачастую принимают за знания самые дикие предрассудки либо перемешивают их с предрассудками, и если они что-то, как считают, поняли, они готовы свернуть шею любому, кто понимает данный вопрос иначе.

> За свои убеждения люди порою шли на костер, но гораздо охотнее посылали на костер других.
> (Станислав Ежи Лец)

[16]Здесь примерами могли служить лишь, пожалуй, лучшие образцы элитной американской популярной литературы, прежде всего книги Р. Смальяна. Так что вопрос не в том, где брать образец для подражания, а в том, как его выбирать.

[17]Известно, что религия занимает важное место в системе человеческих взглядов, служа основой морали и мировоззрения. Она дает общую позицию в отношении Человека и Мира, Добра и Зла. Когда религия ослабевает или разрушается, появляются псевдорелигии и тоталитарные секты, пытающиеся решить главнейшие вопросы самыми простыми средствами. Некоторые из таких систем взглядов, например стоицизм и "религия прогресса", менее примитивны и тоталитарны, хотя и носят на себе

ного мировоззрения. Каждое достижение человечества требует жертв. Познавая, мы заодно забываем, уничтожаем старые знания и умения, которые через один этап, возможно, оказались бы вновь весьма ценны. Умножая наше знание, мы еще в бо́льшей степени умножаем незнание. Это — первая и важная причина, по которой не годится ни традиционный научный стиль, ни другие, перечисленные выше: все они ориентированы на выпячивание успехов и замалчивание трудностей и недостатков,[18] на декларирование прогресса, а мы хотели бы создать условия для него, а не объявить его декларативно.

Вторая причина уже звучит по-разному для научного и популярных стилей. Большим достоинством научного стиля, особенно до тех пор, пока он не оказался под разлагающим влиянием современной системы грантов, требующей популярного объяснения сложных вещей профанам либо просто равнодушным и незаинтересованным лицам,[19] является нежелание отступать перед техническими сложностями. Многие действительно фундаментальные вещи нельзя понять, если не затратить серьезного

печать того же первородного греха — самопереоценки человеческих возможностей и недооценки Мирового Порядка.

В частности, религией прогресса называют никогда полностью не формулировавшуюся явно систему взглядов, берущую начало в мировоззрении французского Просвещения XVIII в. и воспринятую естествоиспытателями в XIX в., а математиками, философами, гуманитариями и обыденным сознанием — в XX веке. В этой системе взглядов на роль высочайшего Добра претендует идол Прогресса. Считается, что научное мировоззрение и научные критерии истинности единственно правильны, что наука приносит благо, а выявившиеся отрицательные последствия — результаты ошибок и извращений. См., в частности, труды В. И. Вернадского [10], П. Тейяр де Шардена [27], И. Пригожина [22].

Заметим, что религия прогресса не обязательно сопровождается материализмом и атеизмом, хотя весьма часто и хорошо сочетается с ними. В частности, П. Тейяр де Шарден был убежденным католиком, хотя Ватикан и осудил его взгляды как подозрительные с точки зрения ереси.

[18]Заметим здесь скрытое противоречие. Как известно, ориентация на успех любой ценой и на замалчивание поражений ведет вовсе не к прогрессу, а к застою. Так что мировоззрение, декларирующее поклонение прогрессу, на самом деле делает многое для того, чтобы его затормозить. Такие скрытые (*концептуальные*) противоречия являются непременным элементом любой квазирелигии. Настоящая религия отважно смотрит им в глаза и пытается, в силу человеческих возможностей, преодолеть, а там, где пока что не удается, хотя бы поставить предупредительные флажки. Одним из таких предупредительных флажков является обострение концептуального противоречия и перевод его в то, что на обычном уровне интерпретации становится прямым противоречием. Так, например, поступили христиане, постулировав триединство Бога. Так же должно поступать и любое другое настоящее мировоззрение, в том числе и наука. Пока она так не поступает, все претензии науки на Истину остаются беспочвенными и вредными.

[19]Что даже хуже, чем научные противники.

труда. Как говорил еще Евклид, в науке нет царского пути. Точнее, он порою появляется, но намного позднее того, как открытие сделано, и тогда, когда “золотая пора” его применений уже на самом деле позади. Вот нежелание прокладывать эти царские пути — причина, по которой не хочется следовать научному стилю, а слишком большое желание их проложить и, соответственно, игнорирование того, что пока что находится в буреломах и болотах переднего фронта настоящей науки — причина того, что и к другому берегу (к профанаторам) не примыкаем. Итак, мы стремимся искать удобные пути и даже намечать те места, где они, может быть, будут проложены, но не замыкаемся на удобствах.

Более того, я надеюсь, что в данной книге читатели смогут увидеть несколько примеров того, как, перебредая через болота и продравшись сквозь чащи, мы вновь выходим на открытое место, где можно насладиться красотой невиданных конструкций, оказывающихся к тому же и полезными.

Поскольку считается, что задача науки — поиск истины, то обучение, как правило, строится так, как будто Истина уже найдена. Не принято, чтобы преподаватель сомневался, а тем более высказывал свои сомнения письменно. Учить, дескать, надо тому, что бесспорно. Но *бесспорно только бесполезное.* Слишком многие общепризнанные истины напоминают Неуловимого Джо из анекдота.[20] Как только их кто-то начинает ловить, в них образуется большая дыра. Например, упрямство оказывается признаком слабости характера, а не его силы. Профессиональные военные оказываются более слабыми офицерами в сражениях против партизан, чем вчерашние выпускники лучших вузов, привыкшие сами искать решения в нестандартных ситуациях. Повышение налогов оказывается самым прямым путем к разорению государства ввиду уменьшения поступающих сумм и т. п.

В данной книге *не предполагается, что автор изрекает истины.* Если сам автор знает слабые места излагаемых концепций, он сам их и приводит, если же он их пока не знает, то в случае, если концепция красива и полезна, он совершенно уверен, что и неисправимые слабости у нее есть. *Наши достоинства являются продолжением наших недостатков.*[21]

---

[20]Зашел приезжий в ковбойский бар. Вдруг к бару подъезжает ковбой на лошади, начинает стрелять в воздух и ругаться, затем выпил, расплатился и уехал.

— Кто это?

— Неуловимый Джо.

— А его действительно никто не может поймать?

— Действительно. На коего черта это кому-то нужно?

[21]И конечно же, результатом больших усилий, направленных на то, чтобы исполь-

Далее, в математическом тексте практически всегда стремятся к замкнутости изложения, и поэтому вводятся все используемые понятия. При этом авторы вынуждены принимать явно неправильное предположение, что читатели математики не знают (но тогда они, прежде всего, не смогли бы понять математическое изложение, к которому требуется привыкать достаточно долго). Мы стремимся не ввести, а определить[22] почти все существенные используемые понятия, в том числе и общеизвестные, с той целью, чтобы исключить недоразумения, возникающие из-за того, что некоторые тонкости в данных понятиях разные математики и разные учебники трактуют по-своему. Но мы не стесняемся использовать понятия, которые должны быть известны из школьного курса математики, до того, как они формально определены. В частности, так происходит с функциями, отношениями, последовательностями, математической индукцией.

Прикладная логика как искусство приложения (прежде всего) математической логики требует владения и аналитическим, и синтетическим методами. Нужно воспринять ситуацию целиком, выбрать наиболее подходящий для поставленной цели формализм, максимально использовать его аналитические возможности и вновь синтетически оценить, насколько полезны и насколько тревожны полученные результаты. В частности, формализмами являются и применяемые логики. Поэтому нужно подбирать лучшую для нашей задачи логику, а не пользоваться без оглядки общепринятой классической системой, либо, еще хуже, Прологом.[23] За последние десятилетия неклассические логики исследованы настолько основательно, что по удобству техники и богатству идей уже не уступают классической логике. Поэтому претензии классической логики на практически монопольное положение резко отвергаются. Более того, способ изложения классической логики, избранный в данной книге, можно охарактеризовать как «классическая логика с точки зрения неклассической». При таком взгляде яснее становятся причины, по которым классическая логика играет и будет играть важнейшую роль в совокупности логик, и основания, необходимые для того, чтобы применять, либо, со-

---

зовать стороны, считающиеся слабостью, как силу.

[22]Определение понимается здесь не столько в математическом смысле, как формальное сведение очередного понятия к введенным ранее, а в общечеловеческом и общелогическом: как нахождение достаточно точной и, прежде всего, достаточно ясной характеризации.

[23]Пролог — язык программирования, рекламируемый как язык логического программирования. На самом деле от логики в нем остались лишь неправильно интерпретированные обрывки внешней формы; позднее мы рассмотрим данный язык подробнее. Вообще, широко рекламируемое и модное средство, как правило, делает вовсе не то, что обещается, либо далеко не с тем качеством. См., например, гербалайф.

ответственно, не применять классическую логику.

Вообще математическое мировоззрение, которого придерживается автор, можно охарактеризовать как умеренный скептический платонизм. Мы не стремимся его ни скрывать, ни навязывать читателю. В частности, то, что обосновывается ссылкой на данное мировоззрение, всегда помечается словами типа «по мнению автора».[24] Если автору известно какое-то другое обоснованное мнение, являющееся альтернативой авторскому, оно приводится тут же.

Сущность авторского мировоззрения можно охарактеризовать следующим образом. Нам симпатична концепция Платона, что системы, возникающие в реальном мире, являются реализациями общих Идей. Сами эти Идеи недоступны человеку, поскольку они бесконечно совершенны, а человек несовершенен и ограничен, но математика дает возможность некоторого приближения к ним. Конечно же, эти приближения также несовершенны, но они гораздо более гармоничны внутри себя, чем т. н. реальный мир, почему и вскрывают самые глубинные свойства этого и других возможных миров. В этом причина непостижимой эффективности математики в приложениях. Но несовершенство человека проявляется в том, что Идеи могут быть реализованы в математике разными способами, противоречащими друг другу, это касается и тех фундаментальнейших Идей, которые лежат в основе логики.[25]

Наиболее часто используемой альтернативной точкой зрения является умеренно оптимистический и умеренно материалистический системный взгляд на мир. Система базируется на фундаментальных структурах и не может существовать без порядка, обеспечиваемого этими структурами. Математика позволяет нам сделать шаг к выявлению фундаментального порядка, на котором базируется Вселенная. Но поскольку человек является несравненно более простой структурой, чем Мир, а никакая система не может познать даже саму себя, не говоря уже о более сложных системах, то человек не может полностью выявить данные структуры и вынужден ограничиваться приближениями. Поэтому математика весьма эффективна, но математические выводы нуждаются в перепроверке. По этой же причине математика не может быть полностью унифицирована,

---

[24] Если этих слов не стоит, то, как уже было сказано, не предполагается, что автор изрек независимую от него истину. В частности, все оценочные высказывания по необходимости субъективны и поэтому никогда не помечаются такими словами.

[25] В данном пункте автор резко и принципиально расходится с т. н. “математическим платонизмом”, предполагающим, что математика вводит нас в сам мир Абсолютных Идей, что математические понятия реально существуют в Высшем Мире. Мы считаем данное воззрение профанацией платоновского взгляда и самопереоценкой человека и его научного мышления.

так как для разных целей нужны разные приближения. Автор относится с уважением к данной точке зрения, хотя и отошел от нее.

Узколобые неумеренно оптимистичные либо неумеренно пессимистичные точки зрения уважением автора не пользуются. Первым критерием здесь является утверждение некоторым "учением" собственной истинности, которое, как выяснила современная логика, является симптомом либо крайней примитивности, либо внутренней противоречивости данной точки зрения. Самый страшный человек — тот, кто уверен, что он познал Истину. На втором месте — циник, считающий, что истины нет вообще.

Стоит помнить и о некоторых принципиальных различиях теоретической и прикладной математики. Чистая математика представляет собой уникальный агрегат из квазирелигии и спорта. Вера в существование математических понятий является квазирелигией, а способ оценки результатов скорее спортивный (на первом месте — новизна, на втором — оценка трудности достижения по следующим критериям:

1. Выше всего ценится решение задачи, давно поставленной знаменитым ученым и остававшейся без ответа.

2. Далее, ответ на вопрос, поставленный авторитетом.

3. Далее, усиление либо переформулировка результата, доказанного авторитетом, лучше всего, одобренная авторитетами.

4. И на последнем месте — задача, формулировку которой дал сам молодой математик; чаще всего такая работа признается лишь после положительной оценки авторитета).

В прикладной математике задача приходит из жизни, но в таком виде, что она не соответствует ни имеющемуся математическому аппарату, ни (чаще всего) тому, что хотел бы от нас тот, кто ее сформулировал. Поэтому прикладник *вынужден* ставить задачу себе в значительной степени сам. Именно по данной причине чистые и прикладные математики часто не понимают друг друга, хотя основываются на одной и той же науке.

Многие из творцов современной логики кончили трагически. Кое-кто говорил автору, что не стоит акцентировать внимание на печальных фактах. Здесь стоит посмотреть в лицо явлению, о котором не принято говорить. У братьев Стругацких есть повесть[26] "За миллиард лет до конца

[26]Пожалуй, одно из наиболее слабых с литературной точки зрения их произведений: привыкнув фантазировать, трудно излагать правду ...

света.” Ее идея состоит в том, что некая почти стихийная страшная сила начинает активно противодействовать ученым, приблизившимся к краю того знания, которое в принципе может изменить (либо, еще более вероятно, разрушить) наш мир. Действительно, приближаясь к Идеям и пытаясь перевести на язык других людей то, что узнал, в некоторый момент начинаешь чувствовать противодействие. Поскольку современная логика затрагивает наиболее фундаментальные вопросы организации Разума и Знания и поскольку ее достижения резко подняли людей над тем уровнем идей, которые считались максимально абстрактными (и максимально глубокими) раньше, ее творцы неизбежно попадали под контрудары. Пожалуй, лишь Гёдель сумел противостоять им, и поэтому закономерно, что работой последних лет его жизни было логическое доказательство существования Бога, и столь же закономерно, что публиковать свое доказательство он не стал.

Автору говорили, что его примечания кое-что напоминают. Да, пожалуй, стоит сослаться на двух классиков русской мысли: великого теоретика Козьму Пруткова и великого прикладника Христофора Бонифатьевича Врунгеля[27], некоторым особенностям изречений которых автор по мере сил старался подражать.

In.3 Как работать с данной книгой?

Начнем с общих педагогических принципов, на которых основана данная книга.

Задачей преподавания математических дисциплин[28] является введение ученика в мир фундаментальных идей данной науки и показ тех Идей, которые лежат за научными формулировками. Логика является той наукой, где путь к Идеям наиболее близок (вспомните вопрос Аверроэса). Поэтому именно в ней данную цель можно ставить наиболее явно. Конечно же, эта цель не отменяет цели овладения навыками и методами, разработанными данной наукой, и суммой наиболее важных сведений, установленных в ней, но в данном контексте это овладение является, прежде всего, средством (правда, нет ничего плохого в том, если оно становится конечным пунктом для большинства учащихся, если они хотя бы увидят на примере других, что есть и более высокие ступени знания и понимания.)

[27]Прежде всего его “Толковый морской словарь для бестолковых сухопутных читателей.”

[28]Да и других наук высшего уровня.

Автор уверен, что к Идеям ведет бесконечно много дорог, и высшая задача учителя — помочь ученику выбрать ту из них, которая ему больше всего подходит. Таким образом, сама идея наставления на путь истинный автору чужда. То, что являлось истинным путем для учителя, вполне может заводить в тупик его ученика. То, что хорошо для одних студентов, плохо для других. Но, конечно же, эти дороги содержат много общего. Пройти к вершинам можно, лишь овладевая по дороге техникой подъема, и поэтому необходимо уделять большое внимание отработке технических навыков. Большое количество задач, собранных в данном пособии, дает возможность индивидуализировать техническую тренировку.

Накопление большого количества тренировочных задач позволяет изменить качество курса еще в одном отношении. Каждый научный цикл базируется на некоторой дисциплине, которая, как считается, наиболее ярко высвечивает основные идеи данной науки и позволяет ввести в ее мир. Такой дисциплиной в математическом цикле в большинстве университетов мира и повсюду в России является математический анализ. Он действительно вводит в курс математических идей, сформировавшихся к середине XIX века. С тех пор математика принципиально обогатилась и изменила свое мировоззрение. Поэтому ныне анализ является не единственной возможной базой для математического цикла. В последние годы в Удмуртском университете на новой специальности ‘информационные системы’ предпринят эксперимент, когда во главу математического цикла поставлена логика. Данный курс составлен таким образом, чтобы он мог быть головным в математическом цикле для студентов специальностей типа информационные системы, программирование, философия, структурная лингвистика, когнитивная психология. Но для такого головного курса недостаточно лишь материала данной книги. Современная прикладная логика содержит следующие разделы:

1. Логический анализ естественных языков.
2. Логическая семантика и формальный синтаксис.
3. Теория доказательств.
4. Представление знаний в интеллектуальных системах.
5. Теория алгоритмов и автоматов.
6. Автоматическое доказательство теорем.
7. Конструктивные логики и логическое программирование.
8. Сложность вычислений.
9. Логика функций и логика программ.
10. Теория возможных миров, контекстов и установок.
11. Индуктивные выводы, формирование понятий и распознавание образов.

12. Неточные, немонотонные, нечеткие выводы.
13. Теория типов данных.
14. Теория взаимодействующих процессов.
15. Теория рефлексивных рассуждений.
16. Теория неформализуемых понятий.

В данном пособии затронут (да и то неравномерно) материал первых семи , девятого и последнего разделов. Полное изложение всего перечисленного материала с такой же степенью методической проработанности и подробности требовало бы по меньшей мере четырехтомника и колоссального труда по накоплению массивов задач и подбору методов изложения материала, представленного до сих пор в основном в статьях и монографиях.

Стоит сказать об отношении к ошибкам. Человеку свойственно ошибаться. Не ошибается он, лишь пока ничего не делает. В современной теории творческого мышления обосновано, что в процессе решения трудных творческих задач неизбежен проход через ошибки. Поэтому одна из самых вредных особенностей традиционного подхода к обучению — рассмотрение ошибки как криминала.[29] На занятиях первое, к чему приходится приучать первокурсников, — не стесняться ошибок. Более того, отличить глубокое понимание от формального запоминания гораздо легче, когда имеешь дело с ошибками: качество ошибок просто несравнимо. Поэтому многие упражнения ориентированы на выработку навыков исправления неточностей в доказательствах и формулировках без отвержения частично неправильных построений полностью.

С этим же связано то, что мы не любим ставить задачи в форме “Доказать, что ... ”Готовая истина не способствует развитию творческого мышления. Далее, при таких формулировках возникает громадный соблазн действовать по принципу: “Вы скажите нам, что нужно доказать, а мы уж докажем.”[30] Тем не менее порою приходится формулировать и задачи на доказательство.

ПРЕДУПРЕЖДЕНИЕ

Для борьбы с указанной выше болезнью несколько задач на доказательство являются задачами-ловушками. Это необходимо для приучения учащихся к дисциплине ума: проверяй доказываемое![31]

---

[29]Впрочем, если мы стремимся наставлять на Единственно Истинный Путь, ничего другого не остается.

[30]Формулировка данного принципа принадлежит студентам Высшего Юридического колледжа УдГУ.

[31]В данном случае мы следуем традиции, идущей еще от Архимеда, неоднократно

Не все части данного пособия одинаково фундаментальны. В частности, могут быть опущены некоторые параграфы из первой части (ее последней главы.) Глава, посвященная нестандартному анализу, полностью независима от последующего материала и также может быть опущена. Возможны и многие другие варианты компоновки курса в зависимости от вкусов и уровня подготовки преподавателя.[32] Скажем, хотя глава о семантических таблицах является центральной во второй части, в ней можно опустить последний параграф, посвященный устранению сечений. Минимальный вариант изучения второй части — главы, посвященные синтаксису и семантическим таблицам. К ним могут независимо добавляться главы, посвященные естественному выводу, теории определений, теореме Гёделя, нестандартному анализу.

Если преподаватель имеет возможность провести хотя бы несколько занятий в дисплейном классе Macintosh либо IBM PC и обучающие программы высокого уровня Tarski's World, Hyperproof, Deductio или Semtab, то это стоит сделать. Кое-где в тексте есть прямые указания на то, как можно воспользоваться данными программами для практических занятий.

И в заключение автор должен поблагодарить свою жену Людмилу, неоднократно читавшую рукопись в процессе создания и немало способствовавшую улучшению изложения; дочь Тоню и В. В. Пупышева, выловивших кучу опечаток; рецензентов и профессора А.П. Бельтюкова, сделавших ряд ценных замечаний. Некоторые примечания А.П. Бельтюкова вошли в текст книги, они помечены буквами (АПБ).

In.4 Введение ко второму изданию

Неклассические логики получили большие и важные применения в последние десятилетия. Это связано с несколькими принципиальными моментами.

Классическая логика является весьма мощным средством *описания* и *дедукции*. Но она, конечно же, имеет ограничения, явные и неявные предположения, заложенные в ее основу. Явные предположения (типа того, что логическими значениями являются лишь **0** и **1**), легко и нарушаются явно. Неявные же (самое важное из них то, что она описывает состояние

прерывавшейся, но неизменно возобновлявшейся при первом же отступлении догматизма.

[32]Опыт преподавания отнюдь не лучшим студентам в Удмуртском университете убедил, что этот материал может быть донесен до студентов весьма среднего уровня, так что уровень подготовки студентов здесь второстепенный фактор.

вполне определенной совокупности понятий в некоторый момент и для достижения фиксированной цели,) как всегда, гораздо важнее и гораздо труднее преодолеваются.

В неклассических логиках особенно четко прослеживается беда современной прикладной науки, основанной в большинстве случаев на плоском одноуровневом мышлении: соблазн воспользоваться ‘царскими путями’[33]: соблазнительным возможностями прямого приложения мощных теоретических результатов, изредка открывающимися в ходе развития науки.

Лучшие военные прекрасно понимают, что прямое наступление — самый лучший способ зря растратить силы и, увлекшись видимостью побед, проиграть кампанию.

У-цзы заметил [16, гл. 1, ч. 3]:

> Мало таких, кто овладел Поднебесной частыми победами, но много таких, кто от таких побед погибал.

Мы основываемся на точке зрения, что наш Мир имеет единую Мировую Идею, заложенную в его начале.[34]

Мировая Идея умнее и изощреннее самого гениального полководца, и она, конечно же, активно завлекает тех, кто стремится примитивными средствами достичь ее, в соблазнительные ловушки. Поэтому нужно развивать самые разнообразные средства, и, более того, средства анализа средств, с тем, чтобы гибко выбирать наиболее подходящий инструмент *в данной ситуации для даной цели.*

Далее, избежать лобового столкновения можно несколькими путями. Во-первых, можно перепрыгнуть через трудности, воспользовавшись иде-

---

[33]По легенде, Евклид ответил на вопрос одного из Птолемеев:
— Нельзя ли полегче научиться геометрии?— словами:
— В геометрии нет царских путей!

[34]Во избежание недоразумений заметим следующее.

1. Понятие Мировой Идеи не зависит от понятия Бога. Она следует из системности наблюдаемого строения Вселенной и логичности происходящего в ней. Так что в данном случае мы не опираемся на гипотезу, что Мир сотворен.

2. (Для креационистов и деистов) Отождествление Мировой Идеи с Богом — недопустимое упрощение. Это — Слово, которым Бог сотворил Мир. Оно, конечно, уже не является Высшей Сущностью, но оно неизмеримо выше по природе своей всех других сущностей тварного мира.

3. (Для агностиков и умеренных атеистов) Отождествление Мировой Идеи и Мира — также недопустимое упрощение. Мир — постепенно развившаяся *реализация* данной Идеи. А, как правило, реализация беднее исходной спецификации и уж, во всяком случае, искажает ее.

альными понятиями высокого уровня и затем конкретизировав их в новой обстановке. Во-вторых, можно обойти заминированные места, рассмотрев другие аспекты проблемы и уже от них вернувшись к нашей непосредственной цели.

И то, и другое решение требует многоуровневого подхода и к выбору средств, и к оценке результатов, искусства перевода как между различными формализмами, так и между формализмами и естественным языком.

Введение в такое использование современных логических средств — цель данного пособия.

Часть I

Язык математики

Глава 1

Необходимость точного языка в математике

1.1 Как и почему появился язык математической логики?

Математика изучает объекты, свойства которых точно сформулированы.

Это описание поля деятельности современной математики не претендует на полноту. Оно, скорее, достаточно широко и отбрасывает лишь те случаи, когда говорить о применении математики еще рано.[1] В частности, оно включает и традиционные разделы, такие как геометрия и алгебра, и новые, такие как математическая лингвистика либо теория генетического кода.

Хотя само описание говорит о точных формулировках, в нем требуют разъяснения в первую очередь последние слова: «*точно сформулированы*». Очевидно, что их уточнение влечет за собой уточнение и других понятий, в частности '*объекта*' и '*свойства*'. Какие формулировки можно считать точными, мы будем стремиться разобраться дальше.

Очевидно, что не все то, что сказано на естественном языке, точно. Иногда эта неточность лежит на поверхности, как, например, в фразах:

[1]Тем не менее и там вовсю пытаются применять математическую символику, используя, как остроумно выразился Леви-Стросс, «формулы как узор, украшающий текст.» В частности, таковы многие современные работы по культурологии, философии и т. п. Критерий распознавания такого наукообразия прост: понятия не уточняются. Далее, часто квалифицированный математик легко находит противоречия в узорах, вставленных в текст. Но порою узоры внутренне непротиворечивы и просто не имеют отношения к окружающему их тексту: это — высшая ступень надувательства.

“Хочется чего-то, а чего — неясно”или “Оно, конечно, ежели что как … А ежели что не так?”Иногда смысл фразы явно зависит от контекста, например: “Сейчас я намылю ему шею”. Богатство любого естественного языка неразрывно связано с его многозначностью. Зависимость от контекста не всегда отрицательный фактор, лишь бы в любой данной ситуации предложение уточнялось однозначно.

Но, например, полное и достаточно безобидное на вид предложение

$$\text{«Он встретил ее на поляне с цветами»} \tag{1.1}$$

имеет три различных истолкования. Вот от такой неоднозначности хотелось бы раз и навсегда застраховаться в математике. Поэтому математики с самого начала стремились формулировать доказательства и теоремы на как можно более четком, хотя и бедном, диалекте естественного языка. Хотя словарный запас этого диалекта постоянно расширяется, основные формы предложений, связки, союзы остаются практически теми же, что были выработаны еще в античные времена. Следует заметить, что способы выражения, допустимые в математике, нигде не описывались явно, ими овладевали на примерах, в процессе обучения и чтения классических трудов, в первую очередь «Элементов»Евклида.

Долгое время считалось, что ‘математический диалект’ состоит из строго сформулированных предложений, да и сейчас он верно служит математикам, почти никогда их не подводя. В геометрии и до сих пор его достаточно. Но уже в средние века развитие алгебры привело к тому, что формулировки теорем зачастую становились все длиннее, необозримее и неудобнее. Соответственно, выкладки становились все более и более трудными. В самом деле, даже для того чтобы просто понять фразу

«Квадрат первого, сложенный с квадратом второго и с удвоенным произведением первого на второе, есть квадрат первого, сложенного со вторым», (1.2)

требуется значительное усилие. Таким образом, математическая строгость и удобство начали противоречить друг другу.

Выход был найден, когда заметили, что использованная в (1.2) часть математического языка может быть сведена к нескольким условным знакам, и сейчас (1.2) записывается кратко и ясно:

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2. \tag{1.3}$$

Это стало первым этапом уточнения математического языка: был создан символизм арифметических выражений, их равенств и неравенств.

К XVIII в. математические формулы записывались почти в том же виде, что и сейчас.

Однако более сложные математические утверждения по-прежнему записывались на обычном языке с вкраплениями формул. И чем дальше развивалась математика, чем больше понятий входило в ее словарь, тем ближе придвигались к ее границам парадоксы, связанные с неоднозначностью и недоопределенностью предложений естественного языка. Рассмотрим один из самых ярких и элементарных примеров.

Как известно, некоторые фразы служат определениями натуральных чисел, например:

«Десять в степени десять в степени десять». (1.4)

«Наименьшее простое число, большее миллиона». (1.5)

В русском языке 33 буквы, и предложений, состоящих не более чем из ста букв, конечное число (грубо говоря, не более 33^{100}). Натуральных чисел же бесконечно много. Значит, среди них должны быть такие, которые нельзя назвать фразой, состоящей менее чем из ста букв. Но тогда есть и наименьшее такое число. Его можно определить как

«Наименьшее натуральное число, которое нельзя определить предложением русского языка, содержащим менее ста букв». (1.6)

Это предложение содержит 96 букв. Следовательно, определение (1.6) противоречит самому себе. (Парадокс Берри. 1906 г.)

Казалось бы, рассуждение из парадокса Берри явно нематематическое. Однако уже в те времена подобные конструкции встречались в теории множеств, а сейчас рассуждения такого рода обычны в разделах математической логики и теории алгоритмов, исследующих сложность описания математических объектов. В частности, подобная идея лежит в основе знаменитой теоремы Гёделя[2] о неполноте любой достаточно сильной формальной теории.

Если парадокс Берри возник на границе между математикой и естественным языком, то парадокс Рассела возник внутри самой математики

[2]Эта теорема является одной из целей нашего курса

— в теории множеств.

> Пусть z — множество тех множеств, которые не являются собственными элементами. То есть, $x \in z$ тогда и только тогда, когда неверно, что $x \in x$. Символически
>
> $$z = \{x \mid x \notin x\}. \tag{1.7}$$
>
> Подставляя z вместо x в определение z, получаем, что $z \in z$ тогда и только тогда, когда $z \notin z$.

Появление первых парадоксов ошеломило математический мир и послужило поводом, чтобы предпринять систематическое построение современной логики. А причиной ее появления было то, что математический диалект естественного языка опять-таки, как и в средние века, перестал удовлетворять требованиям компактности и удобства при записи формулировок теорем, и в особенности при манипуляциях с этими формулировками. Например, вот одно из элементарных определений математического анализа:

> Функция f, определенная на множестве M, непрерывна на M, если для каждого x из M и для любого, сколь угодно малого положительного ε найдется такое положительное δ, зависящее от ε, что, когда x_1 лежит в M и отличается от x меньше, чем на δ, $f(x_1)$ отличается от $f(x)$ меньше, чем на ε. (1.8)

Построить, скажем, отрицание понятия непрерывности, содержательно вдаваясь в смысл фразы (1.8), не менее трудно, чем преобразовывать алгебраические тождества, записанные в виде (1.2). А на современном символизме "f непрерывно на M"записывается компактно и изящно:

$$\forall x \in M\, \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x_1 \in M (|x - x_1| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_1)| < \varepsilon). \tag{1.9}$$

Язык математической логики, ставший символическим языком современной математики, возник в тот момент, когда неудобство математического языка для нужд математики было окончательно осознано. Так же, как и символизм алгебраических выражений, новый символизм прояснил механическую природу многих преобразований, позволил дать простые алгоритмы их осуществления и тем самым освободил головы математиков для более важных дел.

Вместе с тем впервые появилась возможность строго ответить на вопрос, а что значит "точно сформулированное высказывание"? Это высказывание, которое может быть однозначно переведено на символический язык математики.

Формализация математики привела к более ясному осознанию природы самой математики, к триумфальному применению ее к нечисловым и непространственным объектам, таким как, например, гены, естественные и искусственные языки, программы для ЭВМ и т.д. Вместе с тем стало ясно и то, когда мы не должны применять математику. До тех пор, пока наши знания о некоторой конкретной области *не могут быть переведены на формальный математический язык единообразным методом*, мы еще не осознали исходные понятия и их свойства настолько, чтобы применять математические методы, и "математизация"превращается в род шаманства, призванного придать наукообразие тексту. А как только мы сможем точно сформулировать свойства ясно выделенных нами исходных понятий, мы сможем и применять математику для извлечения следствий из этих свойств.

Итак, первой проблемой, которую поставила жизнь перед математической логикой, была следующая.

Основная задача языка математики

Дать точное и удобное определение математического суждения, то есть дать такой язык, на который мы могли бы перевести математические утверждения, который допускал бы сравнительно легкий перевод на обычный язык, записи на котором были бы компактны и удобны в обращении. (1.10)

Первая часть нашего пособия посвящена показу используемого в современной математике решения этой проблемы. Мы стремимся осветить с единой точки зрения фундаментальные математические понятия, познакомить с формальным языком и дать навыки владения этим языком.

В сущности, в первой части почти не затрагивается материал собственно математической логики как науки, в нем выдерживается лишь логический подход к изучаемым понятиям. Сама математическая логика начинается со второй задачи, неразрывно связанной с основной задачей языка математики.

Основная задача логической семантики[3]

Дать четкое и однозначное истолкование суждений формального языка, одновременно как можно более простое и как можно более близкое к естественному математическому пониманию. (1.11)

---

[3]Семантика — наука, изучающая смысл предложений естественного либо формального языка.

Конечно же, мы вынуждены касаться отдельных аспектов этой задачи уже в первой части, но лишь в простейших случаях.

Подытожим:

Труднее всего поддается уточнению само понятие точности.

Математическая логика — наука, изучающая саму математику математическими средствами.

Математическая логика изучает формальную структуру рассуждений математическими средствами.

Формальная проверка зачастую сильнее содержательной.

Формальный язык позволяет значительно эффективнее преобразовывать выражения, чем содержательный.

Когда сложность утверждений данной науки превосходит определенный предел, начинается процесс ее формализации.

Формальный язык должен полностью исключать неоднозначности.

Смысл предложений формального языка должен быть строго и до конца определен.

Не всякое использование формального языка ведет к уточнению.

Упражнения к §1.1

1.1.1. (Л.С. Выготский) Сколько различных смыслов имеет предложение

Предложение рабочих бригад вызвало осуждение товарища Иванова?

1.1.2. (Х.Б. Карри) Докажите, что из существования множества всех таких множеств x, что если x является своим элементом, то выполнено A, следует, что A истинно.

1.1.3. Какое из предложений (1.4), (1.5) неоднозначно? Как его переформулировать, чтобы оно стало однозначным?

1.2 Зачем изучать формальный язык математики?

Ну допустим, мне удалось убедить Вас, что для математики необходимо создавать точный формальный язык. Но остается второй вопрос: а так ли необходимо его изучать, если Вы не собираетесь быть специалистом именно в области математической логики. Ведь столько лет без него обходились, почему бы не обойтись и Вам?

Первый из возможных ответов на данный вопрос состоит в том, что незнание мощных и простых методов преобразований математических предложений, предоставляемых языком математической логики, все равно что незнание основ алгебры. Просто грех не пользоваться точными и едиными правилами там, где они уже проработаны, и каждый раз изобретать заново велосипед Артамонова[4].

Второй ответ требует апелляции к опыту современных формальных языков, прежде всего языков программирования.

В нынешние времена люди все равно вынуждены изучать искусственные, формальные языки. В частности, имея дело с вычислительной машиной, Вы не обойдетесь без знакомства (хотя бы шапочного) по крайней мере с 2–3 искусственными языками. А уж если Вы собираетесь быть математиком-прикладником, для которых в первую очередь предназначено данное пособие, то без глубокого знания алгоритмических языков сейчас не обойтись. Но лишь ими ограничиться нельзя, если Вы стремитесь подняться выше чисто ремесленного уровня.

Язык математической логики — исторически первый точно определенный формальный язык. Он появился в конце XIX века в трудах итальянского математика Пеано и его учеников, современная форма придана ему Расселом и Гильбертом в начале XX века, и их создание доказало свою жизнеспособность и устойчивость. Во множестве формальных языков программирования, математической лингвистики и искусственного интеллекта, сменяющихся каждые десять лет, он является своего рода скалой среди айсбергов. В нем в гораздо более последовательной и красивой форме проведены многие концепции, а позднее перенятые в языках программирования и искусственного интеллекта. Так что знать его целесообразно хотя бы для того, чтобы видеть, что к чему в этом бурлящем море неустойчивых частных формальных языков.

Третий ответ связан со спецификой самой работы прикладного математика либо системного аналиста.

[4]Артамонов — мастер-самоучка, в царствование Николая I приехавший с Урала в Питер на самодельном велосипеде.

В прикладной математике исследователь должен все время заниматься переводами с содержательного языка на математический, с математического языка на язык численных методов и алгоритмов, с языка алгоритмов на конкретный язык программирования и обратно. Такая многоязыковость неизбежна: она вызвана необходимостью находить точные и реализуемые решения задач, возникающих на практике. Например, услышав о проблеме, связанной с тем, что нагрев сырья в печи недостаточно равномерен, исследователь должен сообразить, что передача тепла описывается параболическими дифференциальными уравнениями в частных производных,[5] что в данном случае граничные условия имеют такой-то вид, а тогда задача нахождения решений этих уравнений некорректна, что для устранения некорректности можно воспользоваться такими-то моделями и численными методами, что для того чтобы смоделировать всю систему на машине, нужно привлечь такие-то программные средства, что для того чтобы специалисты поняли результаты моделирования, их нужно вывести в такой-то форме, и самое печальное, что нужно быть готовым к тому, что построенная модель окажется никуда не годной и ее придется переделывать, поскольку, например, характер нагрева в данном случае известен неточно, а при математическом решении задачи мы вынуждены сделать такие-то предположения, которые совсем не обязательно адекватны реальной ситуации. И это еще простейший случай.

Язык математической логики предоставляет великолепный случай потренироваться в таких переводах, и сам используется как мощное, но на сей раз не до конца формальное средство для перевода между далеко отстоящими друг от друга языками. Выразить утверждение на нем часто означает понять, что же нужно заложить в математическую либо программную модель, а перевести на него какие-то математические либо программные условия и затем прочитать на естественном языке — что же было упущено в самой основе формальной модели.

Более того, язык математической логики (или *язык логики предикатов*, как его часто называют) используется либо прямо, либо как основа и в других логических системах. Поэтому в данной книге этот язык на-

---

[5] Если уважаемый читатель не знает, что это такое, не расстраивайтесь: это должен знать специалист, и даже многие известные автору блестящие математики-прикладники этого не знают. Другое дело, что нужно развивать свою внутреннюю “базу знаний” и включать в нее и то, что сам не знаешь как следует. Тут нужно лишь понимать, к какой области это относится, к какому специалисту нужно обратиться, если Вы столкнетесь с данным понятием, и как, хотя бы самым грубым образом, перепроверить предложенное специалистом решение. Ведь никто не может знать всего, а нынче никто не может знать всего даже в одной отдельно взятой отрасли.

зывается просто логическим языком.

Дополнение.
Об истории возникновения логического языка

В середине XIX века в математике самым передовым и бурно развивающимся разделом была абстрактная алгебра. Впервые математики стали изучать не те структуры, которые, как казалось, были даны свыше: числа и геометрические фигуры, а любые структуры, в которых можно найти порядок и меру.[6] Были созданы новые числовые системы, новые геометрии, и возникло большое желание перенести алгебраические методы на другие области. Это с успехом проделала английская школа, родоначальником которой можно считать де Моргана, а наибольшую известность получил Дж. Буль. Они заметили, что простейшие операции над множествами (правда, тогда еще не было понятия множества в математике, но в традиционной логике всегда оперировали с понятием "Класса объектов, обладающих данным свойством" и изучались операции, аналогичные объединению, пересечению и дополнению) подчиняются законам коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности. Естественно, они провели аналогию между объединением и сложением, пересечением и умножением, пустым классом и нулем, самым большим классом (универсом) и единицей ... Нашлась и операция, очень похожая на вычитание, а вот аналогию делению никак не удавалось подобрать, и из-за этого английские алгебраисты-логики чувствовали себя несколько ущербно: что же за алгебра без деления! Весь остаток XIX века все квалифицированные математики, занимавшиеся алгеброй классов, пытались изобрести для них деление, но так ничего путного и не придумали. Зато появилась алгебра булевских значений **0** и **1**, которую сам Буль рассматривал как какую-то патологию, хотя и приводил в качестве примера.

К концу XIX века сразу несколько выдающихся математиков занялись теорией многоместных отношений, и эта теория естественно превратилась в математический язык логики предикатов, который у нас рассматривается. Одни из них, пожалуй, самые образованные и глубокие, записывали все как алгебру отношений и упустили случай перевода на новый язык других математических понятий. Впрочем, сами они на первый план выносили в значительной степени ту же псевдопроблему, связанную с удобными на первых порах, но в дальнейшем все больше и больше приводившими к путанице, обозначениями логических операций

---

[6] Еще в XVII веке выдающийся французский мыслитель Рене Декарт, хорошо знавший и математику (хотя основным своим делом он считал философию и богословие; в частности, ему в значительной степени западный мир обязан обузданием ордена иезуитов и дискредитацией гибельного для любой страны и любой системы принципа: цель оправдывает средства) дал определение математики как "Наука о порядке и мере." Как говорится, здесь ни прибавить, ни убавить ...

как сложения и умножения: определить деление. Другие, одновременно в Германии (Г. Фреге) и Италии (Пеано с учениками) попытались записывать именно математические высказывания.

Фреге подошел к созданию нового языка как ученый, и причем основательный ученый немецкого стиля времен его расцвета. Он построил теорию, впервые в математике формализовывавшую незадолго до этого введенное в математический обиход понятие бесконечного множества и всю систему теории множеств. Оказалось, что все известные математические понятия выражаются через понятие множества и отношение принадлежности "x является элементом множества X." Это был первый случай, когда всю математику свели к одному исходному понятию и к одной исходной операции: образования множества элементов, обладающих данным свойством.

Позднее (уже в XX веке) выяснилось, что есть еще три исходных понятия, к которым можно свести всю математику.

— Понятие *функции* вместе с операциями:

1. *определения* по выражению $t(x)$ функции $\lambda x.\, t(x)$, вычисляющей его значения;
2. *применения функции к аргументу* $f(x)$.[7]

— Понятие *имени* вместе с операцией именования понятия и отношением 'имя N именует объект x'.

- Понятие *системы*, которое делает осмысленным, в частности, отношение 'часть-целое'. Фундаментальное отношение здесь — отношение *связи*.

Второе из представлений используется в λ-исчислении, оно стало одним из главных инструментов, в частности, в современной математической теории программирования, последним из них пока что повезло меньше: логики знают о нем, но толком его еще использовать не смогли.[8]

[7]Чтобы подчеркнуть двойственность функции и аргумента в данном выражении, сейчас в логике часто пишут просто $(f\,x)$. Такое представление функции с аргументами как единого списка стало одной из основ широко применяемого для моделирования систем со сложной логикой языка ЛИСП.

[8]Интересно, что судьба первооткрывателей трех исходных понятий была трагична. Фреге получил умственное расстройство (после периода признания и успеха), когда выяснилось, что созданная им теория содержит противоречия (когда появился парадокс Рассела). Шейнфинкеля (российского математика, создавшего λ-исчисление), наоборот, не признали на Родине и не выпустили за рубеж, где его сравнительно быстро признали. А у нас его заморили голодом в сумасшедшем доме ... (Документов,

Перед Пеано и его учениками стояла другая задача. В то время Италия быстро развивалась, и требовались новые учебники для вузов. Традиция практически не давила, поскольку итальянских учебников хорошего уровня в области математики долго (после XVII века) просто не было, образованные люди пользовались французскими и немецкими. Именно как педагог и подошел Пеано[9] к созданию символического языка, и неудивительно, что его система обозначений оказалась самой удачной. Впоследствии ее лишь подправляли.

В частности, в те времена математики очень не любили нагромождений скобок (сейчас вычислительные машины к этому уже приучили). Старшее поколение еще помнит, как внимательно следили учителя, чтобы скобки первого уровня были круглыми, второго — квадратными, а третьего — фигурными. Пеано избежал психологической опасности, заменяя скобки точками у логических связок: чем сильнее связывает связка, тем меньше у нее точек, и, соответственно, чем она главнее, тем их больше. Он решительно отказался от обозначений операций ‘и’ и ‘или’ как умножения и сложения: раз это — другие операции, и значки для них должны быть другими; нечего путать числа и высказывания! И после этого проблема ввести деление логических значений как-то сама собой отпала.

Пеано ввел кванторы всеобщности $\forall x$ и существования $\exists x$,[10] да и само слово ‘квантор’. Впрочем, кванторы ввел и Г. Фреге, но его обозначения для кванторов были крайне неудобны, так же как и его обозначения для логических формул: он их рисовал в виде двумерного дерева.

Дж. Уайтхед и его ученик Б. Рассел в Англии повторили и углубили труд Фреге на новом уровне, проследив, чтобы все известные источники противоречий были изгнаны. При этом они воспользовались языком, изобретенным Пеано, и ввели данный язык в употребление во всем мире.

подтверждающих такой конец Шейнфинкеля, найти не удалось. Если они и были, то сгинули во время блокады Ленинграда. Но петербургские логики единогласно говорят, что дело было именно так.) Поляки Хвистек и Лесьневский, создатели теории именования, погибли во время второй мировой войны.

[9]Конечно же, бывший в то же время выдающимся и широко образованным математиком, внимательно следившим за новейшими веяниями. В математике навсегда останется, в частности, кривая Пеано, полностью заполняющая единичный квадрат.

[10]Так что они происходят не от английских слов, а от тех латинских, от которых эти английские слова сами произошли ...

Глава 2

Простейшие высказывания

2.1 Что такое высказывание?

Высказывание — утверждение об объектах, имеющее однозначный, точно определенный смысл.

Это определение, конечно же, не математическое. С чисто математической точки зрения понятия высказывания и объекта являются исходными, но содержательно мы все равно должны описать, что же такое высказывание. Ведь и исходные понятия мы должны понимать.

Примерами высказываний служат, в частности, следующие утверждения:

$$2 \times 2 = 4 \tag{2.1}$$

$$2 \times 2 = 5 \tag{2.2}$$

$$\sin \pi = 0 \tag{2.3}$$

Волга впадает в Каспийское море. (2.4)

Волга впадает в Балтийское море. (2.5)

Кама впадает в Каспийское море. (2.6)

Для всякого натурального числа найдется превосходящее его простое число. (2.7)

13 января 1995 г. в 11.35 на перекрестке улиц Пушкинской и Советской автомобилем №CUR2171RUS был сбит гр. Иванов Иван Иванович. (2.8)

13 января 1995 г. в 11.35 на перекрестке улиц Пушкинской и Советской автомобилем "Тойота," принадлежащим гр. Хасбулатову, находившемуся в состоянии опьянения средней степени, был сбит гр. Иванов Иван Иванович, который получил тяжкие телесные повреждения. (2.9)

Не только Иванов, но и Петров прогулял сегодняшнюю лекцию. (2.10)

По словам Сталина, Троцкий был врагом СССР. (2.11)

Большинство членов собрания проголосовало за первый вариант решения. (2.12)

Все волки – млекопитающие. (2.13)

Простых чисел бесконечно много. (2.14)

Геракл убил немейского льва. (2.15)

У русалок зеленые волосы. (2.16)

У нынешнего российского императора красный нос. (2.17)

Рим расположен на реке Тибр, основан, согласно Титу Ливию, Ромулом, и находится под особым покровительством Юпитера. (2.18)

Некоторые высказывания являются истинными, некоторые — ложными. Например, (2.1), (2.3), (2.7), безусловно, истинные высказывания, (2.2), (2.5) — безусловно ложные.

Истинность либо ложность высказывания не всегда легко установить. Например, высказывание (2.7) требует доказательства и называется теоремой Евклида. Как ни странно, могут возникнуть сомнения даже по поводу высказывания (2.4), которое традиционно относится к числу трюизмов, общеизвестных истин. В самом деле, по принятому в географии определению, при слиянии двух рек притоком считается та, которая несет меньше воды, а годовой сток Волги при слиянии с Камой почти в два раза меньше. Так что, возможно, правильней было бы считать истинным высказывание (2.6). Нигде так долго, прочно и безнаказанно не могут существовать ошибки, как среди трюизмов. Порой даже кажется, что общепринятая истина всегда ошибочна.

Зачастую высказывания говорят не о единичном факте, а о целом множестве утверждений, например, (2.13,2.14,2.12). Такие высказывания часто называют *общими*.

Далее, порою вопрос об истинности или ложности высказываний переносится из нашего мира в какой-то другой, т.н. 'возможный' мир[1]. Напри-

[1]Даже саму математику можно рассматривать как возможный мир, поскольку ее

мер, все признают истинным утверждение о Геракле, но ведь на самом деле неизвестно, был ли он и что делал ... Просто для нас некоторые возможные миры, например Библии, сказок, греческих мифов, имеют почти такую же реальность, как и настоящий.[2] [3]

Иногда высказывание относится не столько к сообщаемому акту, сколько к его оценке. Например, утверждение (2.11) не зависит от "реальной" истинности данного факта, но может быть строго доказано либо опровергнуто анализом исторических документов, касающихся того, что говорил и делал Сталин.

А в сложном высказывании могут быть перемешаны и реальность, и возможные миры, и оценки; см. например, (2.18).

В естественном языке можно сделать следующие замечания о высказываниях.

Атомарными, элементарными высказываниями естественно считать такие, которые сообщают единичный факт. Атомарные высказывания могут быть достаточно сложными с точки зрения грамматики, например (2.8), а сложные — достаточно простыми, например (2.13). Сложные высказывания образуются из атомарных применением трех видов операций.

- *Логические связки* применяются к высказываниям и в результате дают новое высказывание. Например, это "не только ... , но и ... ," или просто конструкция сложносочиненного предложения, как в (2.18).

- *Модальности* применяются к высказываниям и изменяют наше *отношение* к ним. Например, модальностью является "По словам Сталина ... "

- *Кванторные конструкции* применяются к совокупности однородных (отличающихся лишь значениями некоторых параметров) вы-

понятия имеют к "действительности" весьма косвенное отношение. А уж физика вообще занимается невозможными явлениями, поскольку, в частности, ни одной инерциальной системы координат, в которой выполнены три закона Ньютона, в природе нет и быть не может.

[2]А вообще, что такое "настоящий" мир? Реален ли он? Если глубоко разобраться, то ответы могут быть самыми различными. В частности, Платон и буддисты уверены, что этот мир нереален, а реален некий "идеальный" мир, бледным слепком с которого является наш. Те, кто испытывал состояние творческого озарения, зачастую склонны согласиться с ними.

[3] (АПБ) Традиционно *настоящий* мир считается реальным *по определению*. На мой взгляд, стоит отличать *истинный* мир от реального (и оба их отличать от миров наваждений).

сказываний либо выражений и дают единое высказывание либо выражение, не зависящие от упомянутых выше параметров. Например, таковы "Большинство ... ," "Все ... " Порою кванторные конструкции подразумеваются, как, например, в (2.16).

К несчастью, во многих естественных языках (особенно в русском) модальности, оценки связаны почти с каждым словом. Например, говоря: "И A, и B", мы подчеркиваем равноправие двух утверждений, а "не только A, но и B" — наоборот, предпочтительность одного из них.

Помимо высказываний, в естественном языке имеется множество предложений такой же грамматической структуры, которые тем не менее принципиально не могут иметь четкой и однозначной интерпретации. Их мы назовем *квазивысказываниями.*

Например, квазивысказываниями являются утверждения о субъективных чувствах, скажем, "Саша любит Машу." Беда даже не в том, что понятие любви неточно. Оно, прежде всего, *неформализуемо*, то есть каждая его формализация немедленно вызывает к жизни контрпримеры[4]. Далее, оно принципиально непроверяемо, поскольку относится к внутреннему миру человека и понимается разными людьми совершенно неодинаково.

Тем не менее методы логики, и даже математической логики, разработанные для высказываний, интенсивно применяются (прежде всего в современных философии и "искусственном интеллекте"[5]) к квазивысказываниям. Да и мы будем интенсивно пользоваться квазивысказываниями в наших примерах и упражнениях.[6] Возникает вопрос, почему же

---

[4]Изобретение таких контрпримеров в исторические моменты, когда возникает практически общепринятое уточнение понятия любви, является одним из излюбленных занятий литераторов и поэтов. Впрочем, т.н. "творческая интеллигенция" во всем мире очень любит разрушать устоявшиеся системы взглядов, совершенно не задумываясь о последствиях, почему И.А. Крылов и поместил в аду писателя в худшие условия, чем разбойника.

[5]Это чисто американское вульгарно-рекламное название стало практически термином для обозначения целой отрасли в современной информатике. В дальнейшем мы часто пользуемся принятым для него сокращением ИИ.

[6]Есть еще одна область, где никак не удается обойтись без квазивысказываний. Оценочные утверждения почти всегда на самом деле квазивысказывания. Например, говорят, что данный результат сильный, ценный, красивый ... Оценочные высказывания являются таковыми лишь тогда, когда фиксированы легко проверяемые критерии оценки. Но в таком случае встречающиеся в них понятия превращаются в термины, а смысл получившегося строгого высказывания может оказаться бесконечно далек от того, что имелось в виду при содержательной формулировке (например, оценка интеллектуальности человека по коэффициенту интеллекта IQ, измеряемому стандартной системой тестов).

мы, прекрасно осознавая неприменимость, вообще говоря, традиционной математической логики к этому классу предложений, применяем ее? На это есть две причины.

Во-первых, если как следует разобраться, *практически любое применение строго доказанного математического результата на практике есть выход за те границы, в которых он был доказан.* Скажем, применяя действительные числа, мы опираемся на предположение о непрерывности измеряемой величины, а до сих пор неясно, непрерывно ли наше пространство. В таких случаях стыдливо говорят, что точные методы математики применяются на практике приближенно.

Опыт такого "приближенного" применения показал, что на самом деле наиболее устойчивыми при выходе за рамки своих обоснований являются *преобразования*, в особенности эквивалентные, математических выражений. В логике мы сможем даже строго обосновать, что многие из развиваемых в общепринятой, *классической*, логике преобразований высказываний применяются далеко за ее пределами. Поэтому мы имеем серьезные основания ожидать, что корректно проведенное преобразование квазивысказываний не подведет нас.

Во-вторых, квазивысказывания через посредство модальностей завязаны в неразрывный узел с высказываниями. Например, "Саша заявил, что он любит Машу" — уже высказывание, а "Мне кажется, что Волга впадает в Каспийское море" — квазивысказывание.

Упражнения к §2.1

Выделите высказывания и квазивысказывания.

2.1.1. У меня одна рука.

2.1.2. У меня расстройство желудка.

2.1.3. У меня повышенное давление.

2.1.4. У меня болит спина.

2.1.5. У меня нет денег.

В нижеприведенных предложениях выделите логические связки, модальности и кванторы.

По данной причине необходимо четко понимать, что встречающиеся в данной книге *оценочные утверждения — квазивысказывания, и они не требуют дополнительных комментариев по поводу субъективности* (такие комментарии могут быть даже вредны, поскольку создают иллюзию объективности большинства оценок.)

2.1.6. (ШБ1) Каждая программа содержит ошибку.

2.1.7. (ШБ2) Если программа не содержит ошибок, то неверен примененный метод.[7][8]

2.1.8. По словам преподавателя, у студента Канторовича в каждой программе не менее десяти ошибок.

2.1.9. Завтра взойдет Солнце, если только не будет светопреставления.

2.1.10. Как мне сообщила Маша, наш профессор собирается завалить на экзамене не менее половины группы.

2.1.11. Большинство избирателей проголосовало за Уткина.

2.1.12. Мне кажется, что Иванов думает, что я намерен подложить ему свинью.

2.1.13. Мне передали, что Иванов думает, что я намерен подложить ему свинью.

2.1.14. Почему высказывание (2.9) уже сложное, в отличие от (2.8)?

2.2 Математическая интерпретация высказываний

Мы не будем здесь вдаваться в содержательное обсуждение того, что есть истина и что есть ложь. В математике достаточно принять, что есть исходные, неопределяемые понятия **истина** и **ложь**, которые могут быть значениями высказываний.

Истинностными (или *логическими*) значениями называются такие математические объекты, которые могут быть значениями высказываний.

[7] Эти два утверждения известны в русском программистском фольклоре как 1-я и 2-я аксиомы Шуры-Буры (М. Р. Шура-Бура — профессор МГУ и один из основоположников русской программистской культуры). Третья звучит следующим образом:

> (ШБ3) Если программа на самом деле полностью и абсолютно правильна, она никому не нужна.

[8](АПБ) М.Р. Шура-Бура, как он сам подтвердил, никогда не употреблял эти три высказывания вместе, пока не услышал их от автора настоящей книги. Более того, он заявил, что третье высказывание на самом деле — принадлежащее автору следствие из первых двух его утверждений.

Истину будем обозначать $\top$, ложь — $\bot$.

Истина и **ложь** являются единственными общепризнанными истинностными значениями. Как только пытаются предложить другие значения, как, например, “**неизвестность**”, так сразу натыкаются на возражения типа, что степеней неизвестности много и, значит, она сама по себе не является логическим значением.[9]

Поэтому, продолжая процесс выявления и уточнения используемых нами в языке математики понятий, т. е. процесс математической формализации этого языка, мы естественно приходим к гипотезе:

> **Соглашение 1.** Единственными логическими значениями являются **истина** и **ложь**, обозначающиеся **1** и **0** либо $\top$ и $\bot$, соответственно.

Несмотря на всю рискованность, на первый взгляд, соглашения 1, оно следует *математической практике*: проверка математического высказывания состоит в выяснении того, истинно оно или ложно.

Базируясь, в частности, на этом примере, можно высказать несколько общих мыслей о формализации. Рискованность — черта, присущая любой хорошей формализации. Формализуя, неизбежно обедняют исследуемый объект, отвлекаются от многих его черт для того, чтобы успешнее работать с оставшимися. При этом мы должны все время помнить о стоящей *задаче*. Аналогично, художник, рисуя карикатуру на человека, подчеркивает черты, соответствующие его сущности и поставленной цели. Если он забывает о сущности, увлекаясь целью, карикатура превращается в пасквиль, а если о цели, она становится безобидным дружеским шаржем. Формализация должна быть талантливой карикатурой на действительность, а не ее фотографией. Лишь тогда она помогает кое-что понять.

Продолжая ту же линию, целесообразно принять еще одно соглашение.

> **Соглашение 2.** Логическое значение сложного утверждения зависит лишь от логических значений его компонент, а не от его смысла.

---

[9] Это не означает, что невозможно представить через логические значения логическую систему, включающую неизвестность. Но тогда мы подменяем само понятие неизвестности, а поскольку подменять его можно многими способами, делая акцент на разных сторонах незнания либо ошибки, таких систем оказывается много, и многие из них разумны, так что часто выбор предпочтительной нелегок ...

Подобные гипотезы являются характерной чертой математизации, при которой общепринято отвлечение от качественных различий в рассматриваемых объектах, чтобы яснее выделить количественные. Уже понятие натурального числа получается абстрагированием от различий между такими вещами, как два пирожка, два окурка или два студента.

2.3 Предметы и универс. Термы

Любое математическое утверждение в конечном счете говорит о *предметах* (объектах). В приведенных выше примерах (2.1) – (2.9) объектами являются, в частности, 2, $2 \cdot 2$, Волга, Каспийское море, натуральные числа. Каждая математическая теория имеет свою *предметную область*, или *универс* — совокупность всех предметов, которые она изучает.

Универсом теории чисел является множество натуральных чисел, а ее объектами — сами натуральные числа. (2.19)

Математическая теория не обязательно имеет один универс. В некоторых случаях теории бывают многосортными, объекты делятся на *типы*, или *сорта*, и для каждого сорта задается свой универс. В современном программировании, а также в языках искусственного интеллекта и представления знаний именно этот случай (многосортность) является наиболее распространенным.

В геометрии изучаются геометрические фигуры. При формализации их естественно разделить на сорта точек, линий, плоскостей, треугольников и т.п. и для каждого сорта завести свой универс. (2.20)

В математическом анализе естественно с самого начала выделить два сорта объектов: действительные числа и их функции — и, соответственно, два универса: универс чисел и универс функций. (2.21)

Для иллюстраций мы часто будем использовать “теорию”, в которой объектами являются живые существа, а универсом — вся их совокупность, и “теорию”, в которой объектами являются люди, а универсом — человечество.

Простейшие из выражений, обозначающих предметы, — *константы*, т.е. имена конкретных предметов. Например, константами служат числа

(2, −5, 17, π, 1.44 и т.д.). Константами могут служить и собственные либо вводимые нами имена, например ‘Ваня’. Считается, что для каждой константы однозначно задан предмет, который она обозначает. Таким образом, в математической модели необходимо строго следить за тем, чтобы любое собственное имя обозначало свой предмет, в отличие от обычной жизни, где имена могут быть неоднозначны. Поэтому в любой науке, а в математике в особенности, стремятся к систематизации обозначений, хотя бы в рамках одной работы[10]. Далее, для каждой константы четко указывается сорт, которому она принадлежит. Аналогией этого могут служить описания переменных в языках программирования.

Столь же просты с виду и переменные, например x, y ... Но для переменной неизвестен предмет, который она обозначает, в принципе она может обозначать какой угодно предмет из нашего универса. Например, если наш универс — люди, то x может обозначать в данный момент любого конкретного человека. Чтобы наши рассуждения не стали ошибочными, нужно следить, чтобы однажды выбранное значение x далее внутри данного рассуждения не изменялось, как говорят, оно должно быть *фиксированным*.

Если у нас есть несколько сортов объектов, то переменные для объектов разных сортов должны четко различаться. Например, можно принять, что i, j, k, l, m, n — переменные, значениями которых служат целые числа, x, y, z — переменные, значениями которых служат действительные числа. Для того чтобы у нас был неограниченный запас имен переменных, часто пользуются индексами, например z_5.

Более сложные выражения образуются применением символов операций к более простым. Операция, соответствующая символу, применяется к предметам и в результате дает тоже предмет. Например, символу $+$ сопоставляется операция над числами, дающая по двум числам их сумму. Если заданы обычные арифметические операции, то $((x-17)\cdot z)$ и $x^2+2xy+y^2$ — выражения (во втором из них знак умножения $\cdot$ опускается, а операция возведения в степень обозначается, как и обычно в математике, тем, что показатель степени поднимается над строкой). Такой разнобой в обозначении операций неудобен для точных определений. Для единообразия n-местную операцию f, примененную к выражениям $t_1,\ldots,t_n$, будем обозначать $f(t_1,\ldots,t_n)$, такую форму записи называ-

[10] В общем случае согласованности добиться не удается даже для самых элементарных понятий. Каждая научная школа держится за свою терминологию, часто даже крепче, чем за свои взгляды. Поэтому мы вынуждены все время упоминать синонимы, которыми данное понятие обозначается в других работах. Иногда эти синонимы путаются между собой: например, то, что одни математики называют “функционал”, другие называют “оператором” и наоборот.

ют *функциональной*. Общепринятые символы операций, такие как $+$, $/$, обычно записываются между своими операндами, так что $x + y$ можно рассматривать как переформулировку функциональной записи $+(x, y)$.

Точно так же для каждой операции четко указывается, какого типа каждый ее аргумент и ее результат. Например, в операции

$$\sqrt[n]{x}$$

n — натуральное число, x — действительное, и значение ее также действительное число.

Выражение, обозначающее предмет, называется *термом*.

Операции называются еще *функциональными символами*, или просто *функциями*.

Упражнения к §2.3

2.3.1. Перепишите в функциональной форме выражения

1. $x + y$;
2. $x^2 + 2xy + y^2$;
3. $\sqrt{2 \sin x}$;
4. $(x + y)/(2 + z)$.

2.3.2. Перепишите в обычном виде выражения, записанные в функциональной форме

1. $\cos(\sqrt{}(+(\times(x, x), \times(y, y))))$;
2. $\times(+(x, \times(y, z)), +(u, v))$;
3. $/(\times(x, y), \times(x, z))$;
4. $/(\times(2, 2), 100)$.

2.4 Предикаты и элементарные формулы

Чтобы образовать высказывание из предметов, нужно соединить их отношением. *n-местное отношение* — операция, сопоставляющая n предметам высказывание. Например, ____ = ____ — двуместное отношение, сопоставляющее двум числам x и y высказывание $x = y$, в частности, 2 и 2 — истинное высказывание $2 = 2$, а 2 и 5 — ложное $2 = 5$. “____ положительное число” либо “быть положительным числом” - — одноместное отношение, сопоставляющее числу 5 истинное утверждение “5

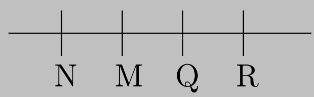


Рис. 2.1: Четыре точки

— положительное число". "____ лежит между ____ и ____" — трехместное отношение, сопоставляющее изображенным на рис. 2.1 трем точкам M, N, Q истинное утверждение "M лежит между N и Q", а K, N, Q — ложное высказывание "K лежит между N и Q".

В "теории человеческих отношений" Саша — объект, а "Саша мне нравится" — высказывание. "Любить" — двуместное отношение, сопоставляющее паре (Ромео, Джульетта) истинное высказывание, а паре (Демон, Тамара) — ложное и т. д. (2.22)

В математике чаще всего встречаются одноместные и двуместные отношения. Двуместные отношения обычно записываются между своими аргументами, например, $4 < 7$, $x^2 + 2x + 1 > 0$ и т.д. Одноместные отношения в математике часто записываются при помощи символа $\in$ и символа для множества объектов, обладающих данным свойством.

Утверждение "π — действительное число" записывается $\pi \in \mathbf{R}$, где $\mathbf{R}$ обозначение для множества действительных чисел. (2.23)

В логике для единообразия мы пользуемся записью

$$P(t_1, \ldots, t_n),$$

чтобы обозначить высказывание, образованное применением n-местного отношения P к предметам $t_1, \ldots, t_n$. Символ P, изображающий отношение, называется *предикатом*. "Предикат" и "отношение" соотносятся как имя и предмет, им обозначаемый. Но в математике эти два понятия употребляются почти как синонимы. В логических материалах мы будем пользоваться строгим термином "предикат", а в конкретных приложениях, когда это вошло в математическую традицию, использовать и слово "отношение" (например, говорить об отношении '$>$' в формуле $a > b$).

В такой записи $2 = 4$ выглядит следующим образом:

$$= (2, 4).$$

Элементарные формулы имеют вид $P(t_1, \ldots, t_n)$, где — n-местный предикат, $t_1, \ldots, t_n$ — термы. В обычной математике элементарные формулы называются просто *формулами*.

Как и для символов операций, в отношении четко указывается сорт каждого аргумента.

Все более сложные формулы строятся из элементарных. Задавая язык конкретной математической теории, непосредственно определяют именно элементарные формулы и их смысл.

Для того, чтобы задать элементарные формулы, необходимо определить предикаты, используемые в нашей теории, и ее термы. А чтобы задать термы, нужно определить сорта объектов, константы и операции. В совокупности предикаты, сорта, константы, операции составляют *словарь* (или *сигнатуру*) теории.

Задав словарь теории, необходимо *проинтерпретировать* все понятия, перечисленные в нем. При этом константам сопоставляются конкретные объекты, задаются правила вычисления значений функций, сопоставленных операциям, и правила, по которым определяются логические значения предикатов. После интерпретации элементарные формулы, не содержащие переменных, оказываются либо истинны, либо ложны, а формулы, содержащие переменные, становятся истинными либо ложными после задания (фиксации) значений переменных.

Пример 2.4.1. В элементарной теории действительных чисел имеется единственный сорт объектов, интерпретируемый как множество действительных чисел $\mathbf{R}$, двуместные отношения $=$ и $>$, константы 0 и 1, операции $+$, $\times$, $/$, $-$. Перечисленные символы составляют словарь этой теории. В строгой формальной записи никакими другими функциями, отношениями, константами пользоваться нельзя. Но так работать невозможно, и в логике выработаны многочисленные способы вводить определения новых объектов и отношений таким способом, чтобы *в принципе* все выкладки и рассуждения, их использующие, можно было чисто механически расшифровать через исходные понятия.

2.5 Некоторые обозначения

Для часто встречающихся множеств мы пользуемся следующими обозначениями.

$\mathbf{N}$ — множество всех натуральных чисел, включая 0.
$\mathbf{N}^+$ — множество всех натуральных чисел, кроме 0.
$\mathbf{Z}$ — множество целых чисел.

Q — множество рациональных чисел.
R — множество действительных чисел.
C — множество комплексных чисел.
V — множество точек пространства.
L — множество прямых.
P — множество плоскостей.

Употребляются также общепринятые символы отношений, такие как $<$, $\geqslant$, $=$, $\perp$ и т.д. Кроме того, для геометрических объектов введем следующие символы отношений:

- $x \in \alpha$ – точка x лежит на прямой α;
- $\alpha \in p$ – прямая α лежит на плоскости p;
- $\alpha \times \beta$ – прямые α и β пересекаются;
- $p \times q$ – плоскости p и q пересекаются.

Операцию нахождения остатка от деления натуральных чисел x и y обозначим $x \bmod y$, а результат деления x на y нацело (с отбрасыванием остатка): $x \div y$.

Если для рассматриваемого отношения нет общепринятого символа, допустимо временно вводить свой. К примеру, если для отношения "лежать между" введен символ , то для точек, изображенных на рис. 2.1, $H(Q, M, K)$ истинно, $H(N, M, K)$ — ложно. Если C — символ для двуместного отношения "быть соседями", то $\mathsf{C}(\mathsf{Петр}, \mathsf{Матвей})$ можно прочитать и самим.

Суммируем.

Высказывания принимают логические значения.

Единственными общепризнанными логическими значениями являются **истина** и **ложь**.

Каждая теория имеет свой *универс*, т.е. множество рассматриваемых предметов. Если универсов несколько, они называются *сортами* либо *типами*.

Высказывания о предметах образуются при помощи *отношений*, или *предикатов*.

Выражения, обозначающие предметы, называются *термами*.

Термы строятся из переменных и констант при помощи операций, или *функциональных символов*, которые применяются к предметам и в результате дают предмет.

Отношения (предикаты) применяются к термам и в результате дают высказывание (элементарную формулу).

Упражнения к §2.5

2.5.1. Выделите предметы и отношения в следующих высказываниях, попытайтесь записать их символически.

1. Кондрат поехал в Ленинград.
2. Маша любит кашу.
3. Маша любит Сашу.
4. Иванушка — дурачок.
5. Мне скучно.
6. Иванов, Петров, Васильев и Сидоров играют в домино.
7. Иванов, Петров, Васильев и Сидоров слушают лекцию.
8. Среднее арифметическое x и y больше их среднего геометрического.
9. 5 не является решением уравнения $x^2 - 3x + 2 = 0$.
10. 1 является решением уравнения $x^2 - 3x + 2 = 0$.

2.5.2. Из приведенных ниже высказываний некоторые истинны, некоторые ложны, а некоторые являются чушью, т.е. неправильно записаны. Укажите и те, и другие, и третьи.

1. $x^2 - 2x = 0$
2. $1 \in (x^2 - 2x + 1 = 0)$
3. $x^2 + 1 = 0$
4. $x = y = 0$
5. $x^2 + 1 > 0$
6. $5^2 - 2 \cdot 5 + 1 = 0$
7. $x + y = xy$
8. $x + 2 > x > x - 2$
9. $1^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 0$
10. $AB \times AC$
11. $AB \times AC \times AD$

Указания

(2.5.1.7) В чем разница между этим утверждением и предыдущим?

(2.5.1.1) У нас объектами являются живые существа. Может ли Ленинград быть объектом?

(2.5.2.4) Аргументами отношения могут быть лишь предметы, так что это — чушь, хотя и понятная. В самом деле, если считать, что первый знак = связывает x и y, то второй связывает предмет 0 и логическое значение, если же второй связывает два предмета, то некорректно использование первого. Люди часто и бессистемно используют подобные сокращения, и это зачастую оправдано (например, при конспектировании лекции), но уже в языках программирования такие вольности недопустимы.[11]

(2.5.2.1) Известно ли нам значение x?

[11](АПБ) $x = y = z$ — сокращение не менее законное, чем запись $x = y$ вместо $(x = y)$. Более того, есть языки программирования (например КОБОЛ, QME), где могут быть записи вида $x < y \,\&\, 0$ с совершенно строгими правилами интерпретации (но не обязательно интуитивно естественными).

Глава 3

Запись высказываний. Логические формулы

Теперь мы должны строго определить выражения, с помощью которых записываются высказывания в нашем формальном языке. Эти выражения называются *логическими формулами*, или просто *формулами*. Обычные математические формулы являются простейшим случаем логических (т. н. *элементарные формулы*).

С чисто формальной точки зрения предикаты (отношения) можно рассматривать как функции, сопоставляющие своим аргументам истинностные значения, т. е. функции, принимающие всего два значения: **истина** и **ложь**.

Функция, сопоставленная предикату $<$, перерабатывает пару чисел x, y в $\top$, если $x < y$, и в $\bot$, если $x \geqslant y$. (3.1)

Таким образом, приняв соглашения 1 и 2, мы должны, чтобы быть последовательными, принять и следующую гипотезу:

> **Соглашение 3.** Как только задана интерпретация и фиксированы значения всех встречающихся в элементарной формуле переменных, становится известно и логическое значение элементарной формулы.

В принципе, по соглашению 2, мы тогда можем определить истинностные значения и всех более сложных формул, так как значения их элементарных частей уже заданы. Но для этого нужно знать, какими способами более сложные формулы строятся из более простых.

Чтобы образовать новые формулы из имеющихся, используются логические связки. Логические связки применяются к высказываниям и в результате дают высказывание. Рассмотрим общепринятые логические связки.

Далее A, B — высказывания, записанные на человеческом языке, A, B – их переводы на формальный язык.

3.1 Связка “и”

Союзу “и” сопоставляется логическая связка &. Символ & называется конъюнкция. Эта связка применяется при переводе на формальный язык утверждений вида “A и B”, “A, но и B также”, “A вместе с B”, “A, несмотря на B”, “не только A, но и B”, “Как A, так и B”, “A, хотя и B” и т.п. Все они переводятся одинаково: $A \mathbin{\&} B$. Разные слова здесь выражают разное отношение к факту, но не меняют самого факта. Соответственно, переводя $A \mathbin{\&} B$ на естественный язык, нужно выбирать подходящий, наиболее выразительный вариант.

Если Р(x) означает “x – разбойник”, Д(x) — “x — добрый”, РГ — константа для объекта “Робин Гуд”, то Р(РГ) & Д(РГ) естественно перевести, например, так: “Робин Гуд был добрым, хотя и разбойником”, или “Робин Гуд был разбойником, несмотря на то, что был добрым”. (3.2)

Утверждение $A \mathbin{\&} B$ истинно в том и только том случае, когда истинно как A, так и B, и ложно во всех остальных случаях.

Заметим, что уже для этой простейшей связки ее математический смысл не всегда совпадает с содержательным. В самом деле, математически $A \mathbin{\&} B$ и $B \mathbin{\&} A$ означают одно и то же, а содержательно, скажем, высказывания

Маша вышла замуж, и у нее родился ребенок; (3.3)

У Маши родился ребенок, и она вышла замуж (3.4)

понимаются несколько по-разному (пример Клини).

3.2 Связка “или”

“A или B” символически записывается $A \vee B$. Знак $\vee$ называется *дизъюнкцией.* Эта же связка применяется при переводе утверждений “A или

В или оба вместе”, и “либо А, либо В”, “А и/или В” и т.п. $A \vee B$ считается истинным, если хотя бы одно из двух составляющих утверждений истинно, и ложным лишь тогда, когда они оба ложны.

В естественном языке “или” порою используется как разделительная связка: “то или другое, но не оба вместе”. Поэтому для хозяев был неожиданным ответ Ходжи Насреддина на вопрос: “Что желаете поесть: плова или бешбармака?” — “А разве у вас всего один котел?” Но чаще две возможности А и В просто несовместимы, и оба смысла совпадают. Но если в $A \vee B$ утверждения А и В несовместимы, то их называют *альтернативами*.

Пример 3.2.1. Для двух неравных чисел a и b есть две альтернативы: или $a < b$, или $a > b$.

Если же в математике приходится иногда явно пользоваться “разделительным или”, оно обозначается $\oplus$ (эту операцию обычно избегают из-за неудобства некоторых преобразований с $\oplus$; в частности, истинность $A \oplus B \oplus C$ означает вовсе не истинность одного и только одного из высказываний А, В, С).

3.3 Связка “следует”

“Из А следует В” символически записывается: $A \Rightarrow B$. Знак $\Rightarrow$ называется *импликацией*. Другими вариантами содержательных утверждений, точно так же переводящихся, служат: “А достаточное условие для В”, “В необходимое условие для А”, “А, только если В”, “В, если А”, “В случае А выполнено и В”, “А есть В”.

Правила вычисления истинностного значения $A \Rightarrow B$ нуждаются в комментариях. Они опираются на содержательный смысл связки $\Rightarrow$: из А можно сделать вывод (вывести следствие) В, и на наши гипотезы.

Рассмотрим верное утверждение: «Если n делится на 6, то n делится и на 3». Будем теперь подставлять вместо n конкретные значения. Получим, в частности, следующие три утверждения:

Если 6 делится на 6, то 6 делится на 3 (3.5)

Если 5 делится на 6, то 5 делится на 3 (3.6)

Если 3 делится на 6, то 3 делится на 3 (3.7)

Все эти утверждения также обязаны быть истинны. Но, пользуясь соглашением 2 и заменяя утверждения о делимости на 6 на их конкретные логические значения, получаем, что тогда должно быть

$$(\mathbf{1} \Rightarrow \mathbf{1}) = \mathbf{1} \tag{3.8}$$

$$(\mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{0}) = \mathbf{0} \tag{3.9}$$

$$(\mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{1}) = \mathbf{1} \tag{3.10}$$

Другими словами, должны быть истинны утверждения

Из истины следует истина (3.11)

Из лжи следует ложь (3.12)

Из лжи следует истина (3.13)

Истинность (3.5), (3.6), (3.7) мы должны принять, если мы желаем обеспечить возможность подстановки в доказанные теоремы конкретных значений переменных. А, по соглашению 2, тогда нам приходится принять и (3.11), (3.12), (3.13).

Утверждение (3.7) и соответствующее ему (3.13) кажутся несколько парадоксальными. Но мы знаем, что из ложных предположений можно иногда содержательным рассуждением получить истинные следствия. Например, из ложного предположения "существуют русалки" следует истинное "купаться ночью в одиночку в незнакомом месте опасно". Принципиально неправильная система мира Птолемея, в которой центром Вселенной служит Земля, очень точно описывает видимые движения планет. Соглашение 2 опять-таки заставляет нас распространить эту истинность на все мыслимые в математике случаи.

Правда, при этом приходится признать формально истинными и предложения типа

Если Волга впадает в Балтийское море, то Ижевск находится в тропиках. (3.14)

Но при любой математической формализации происходит абстрагирование и некоторые содержательно бессмысленные предложения переходят в разряд формально истинных либо формально ложных.[1]

---

[1]Не бойтесь, гораздо больше содержательно осмысленных предложений переходит при этом в разряд формально бессмысленных.

3.4 Связка “тогда и только тогда”

«A тогда и только тогда, когда B» символически записывается $A \Leftrightarrow B$. Знак $\Leftrightarrow$ называется *эквивалентностью.* Той же связкой переводятся предложения “A эквивалентно B”, “A необходимое и достаточное условие для B”, “Если A, то и B, и наоборот”, и т.п. Ритуальное выражение “тогда и только тогда, когда” мы в дальнейшем будем сокращать ттт. $A \Leftrightarrow B$ истинно ттт истинностные значения A и B совпадают, и ложно ттт их истинностные значения различны. $A \Leftrightarrow B$ выражается через $\Rightarrow$ и &:

$$(A \Rightarrow B) \,\&\, (B \Rightarrow A). \tag{3.15}$$

Если знаком $\stackrel{\Delta}{=}$ обозначено “есть по определению”, то можно записать

$$(A \Leftrightarrow B) \stackrel{\Delta}{=} (A \Rightarrow B) \,\&\, (B \Rightarrow A). \tag{3.16}$$

3.5 Связка “не”

Утверждение “не A” символически записывается $\neg A$. Знак $\neg$ называется *отрицанием.* Эта же связка используется при переводе выражений “A неверно”, “A ложно”, “A не может быть”, и т.п. $\neg A$ истинно, когда ложно A, и ложно, когда истинно A.

Связки &, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\neg$ называются *связками исчисления высказываний* или *пропозициональными связками.*

3.6 Таблицы истинности

Способы вычисления истинностных значений высказываний $(A \,\&\, B)$, $(A \vee B)$, $(A \Rightarrow B)$, $(A \Leftrightarrow B)$, $\neg A$ можно резюмировать следующими таблицами:

A	B	$A \,\&\, B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$

A	$\neg A$
$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$

3.7 “Для всех”

Утверждение “для всех x верно $A(x)$” символически записывается $\forall x\, A(x)$. Символ $\forall$ называется *квантором всеобщности.* Эта же связка используется при переводе утверждений "A верно при любом значении x", "для произвольного x имеет место $A(x)$", "каково бы не было x, $A(x)$", и т.п.

Утверждение $\forall x\, A(x)$ истинно <u>ттт</u> $A(c)$ истинно, какой бы конкретный предмет c из универса нашей теории мы ни подставляли вместо x. Другими словами, $\forall x\, A(x)$ истинно <u>ттт</u> $A(x)$ истинно при любом фиксированном значении x. Утверждение $\forall x\, A(x)$ ложно <u>ттт</u> имеется хоть один предмет c из нашего универса (другими словами, хотя бы одно конкретное значение x), такой, что $A(c)$ ложно.

Заметим, что таблицы истинности для связок исчисления высказываний можно применять чисто механически и, в частности, вычислять логические значения формул на машине, а определение истинностного значения формулы $\forall x\, A(x)$ не всегда сводится к простому вычислению. Например, при данных конкретных натуральных x, y, z, n утверждение

$$(x+1)^{n+3} + (y+1)^{n+3} \neq (z+1)^{n+3} \tag{3.17}$$

можно проверить простым вычислением, а проблема, верно или неверно на множестве $\mathbf{N}$ утверждение

$$\forall x\, \forall y\, \forall z\, \forall n((x+1)^{n+3} + (y+1)^{n+3} \neq (z+1)^{n+3}), \tag{3.18}$$

стоит уже более 300 лет, и не видно способа ее решить окончательно.[2] Эта проблема известна под названием великой теоремы Ферма. На обычном математическом языке она формулируется следующим образом.

> Доказать, что уравнение
>
> $$x^n + y^n = z^n \tag{3.19}$$
>
> при $n > 2$ не имеет решений в положительных целых числах.

Принципиальная трудность и в великой теореме Ферма, и в других математических проблемах та, что рассматриваемое множество объектов (здесь натуральные числа) бесконечно, и проверить его все нет даже принципиальной возможности. А математическое доказательство позволяет нам единым образом обозреть все это бесконечное множество и получить точный ответ.

[2]Недавно появилось доказательство этой теоремы, но оно настолько сложно, что окончательного признания еще не получило. А найти ошибку в сложном и длинном рассуждении во много раз труднее, чем написать его.

3.8 “Существует”

Утверждение “существует такое x, что A(x)” записывается на языке математики как $\exists x\, A(x)$. Знак $\exists$ называется квантором существования. Эта же связка применяется при переводе утверждений “$A(x)$ верно при некоторых x”, “A(x) иногда верно”, “Есть такое x, при котором A(x)”, “можно найти такое x, при котором A(x)” и т.п.

Высказывание $\exists x\, A(x)$ истинно, если в нашем универсе найдется хотя бы одно значение c, при котором $A(c)$ истинно. $\exists x\, A(x)$ ложно, если при любом значении c ложно $A(c)$.

Нахождение истинностного значения $\exists x\, A(x)$ также может составлять проблему. Например, натуральное число n называется *совершенным*, если сумма его делителей (исключая само n) равна n. 6 — совершенное число, т.к. $6 = 1 + 2 + 3$, 28 - также совершенное число, т. к. $28 = 1+2+4+7+14$. Ясно, что при данном n проверка условия “n — совершенное число” чисто механический процесс, ее можно поручить машине. Но проблема “существует ли нечетное совершенное число?” стоит уже более 2000 лет, и не видно способа ее решить.

Заметим, что утверждение $\exists x\, A(x)$ *не отрицает* того, что $\forall x\, A(x)$. В жизни же порою словом “некоторые” подчеркивают смысл “не все.”

Пример 3.8.1. (Пример Клини). Политик, произнося “Некоторые политики — мошенники”, имеет в виду “Неверно, будто все политики — мошенники, но некоторые — мошенники”, и делает упор на первой части этого высказывания.

Итак, кванторы $\forall$ и $\exists$ всегда употребляются вместе с переменной и заставляют ее пробегать весь универс.

3.9 Ограниченные кванторы

В математике и в жизни сплошь и рядом мы заинтересованы в том, чтобы заставить переменную пробегать не весь универс, а лишь некоторую его часть. Мы говорим: “Все четные числа — составные”, “Некоторые молодые люди — студенты” и т.п. Наш символизм не мог бы быть хоть сколько-нибудь практичен, если бы он не включал удобных способов записи таких суждений.

Первый приходящий в голову способ — писать выражения типа $\forall r\, C(r)$, где r означает переменную для четных чисел, или же $\forall r \in \mathsf{Ч}\,\mathsf{C}(r)$. Введение т.н. “подчиненных” переменных (пробегающих части универса) или т. н. “ограниченных” кванторов (вида $\forall x \in X$) возможно, но при формализации всегда нужно следовать принципу “бритвы Оккама”: “Не умножайте сущностей без необходимости". Поэтому новые понятия, которые кажутся полезными, необходимо прежде всего попытаться сконструировать из старых.

Такое "конструктивное" определение новых понятий имеет еще одно преимущество: в "граничных" случаях, противоречащих интуиции и здравому смыслу, их формальный смысл будет точно определен, и нам не придется задумываться о том, как же его доопределить, чтобы не впасть в ненужные трудности либо даже в прямые противоречия.

Рассмотрим внимательнее утверждение "Все коровы любят сено." Если универс нашей теории — множество всех живых существ, то напрашиваются два варианта перевода этого утверждения:

$$\forall x(\mathsf{K}(x)\ \&\ \mathsf{ЛС}(x)); \tag{3.20}$$

$$\forall x(\mathsf{K}(x) \Rightarrow \mathsf{ЛС}(x)). \tag{3.21}$$

Здесь K означает "______ корова", а $\mathsf{ЛС}$ — "______ любит сено".

Из варианта (3.20) следует, что всякое живое существо, в том числе и автор, и даже уважаемый читатель, является коровой и любит сено, что, мягко говоря, несколько преувеличено. Вариант же (3.21) кажется более многообещающим: коль скоро нам дана корова, она любит сено.

Проверим (3.21) тщательнее. Случай, соответствующий "здравому смыслу" — подстановка вместо x коровы Машки — ничего не дает. Если M — эта корова, то $\mathsf{K}(\mathsf{M})$ истинно, $\mathsf{ЛС}(\mathsf{M})$ тоже истинно, и $\mathsf{K}(\mathsf{M}) \Rightarrow \mathsf{ЛС}(\mathsf{M})$, $\mathsf{K}(\mathsf{M})\ \&\ \mathsf{ЛС}(\mathsf{M})$ истинны. Итак, "разумный" случай не дает нам возможности отличить правильный вариант перевода на формальный язык от неправильного. Рассмотрим теперь случаи безумные. Пусть $\mathsf{Ч}$ — уважаемый читатель. Он (она), безусловно, коровой не является и сена не любит. Значит, $\mathsf{K}(\mathsf{Ч})$ и $\mathsf{ЛС}(\mathsf{Ч})$ ложны, и значение $\mathsf{K}(\mathsf{Ч}) \Rightarrow \mathsf{ЛС}(\mathsf{Ч})$ есть $\bot \Rightarrow \bot$, т.е. **истина**. Теперь вместо коровы возьмем коня. Он сено любит, но коровой не является, и, подставляя соответствующие логические значения, получаем $\bot \Rightarrow \top$, т. е. опять-таки истину. Похоже на то, что, если все коровы любят сено, то (3.21) истинно.

В самом деле, единственный способ опровергнуть (3.21) — задать такое c, при котором $\mathsf{K}(c) \Rightarrow \mathsf{ЛС}(c)$ было бы ложно, т. е. $\mathsf{K}(c)$ было бы истинно, а $\mathsf{ЛС}(c)$ — ложно. Другими словами, чтобы опровергнуть (3.21), необходимо указать корову, которая сено не любит.

Аналогично, для утверждения "некоторые молодые люди — студенты" есть две бросающиеся в глаза возможности перевода (M означает "______ молодой человек", C — "______ студент"):

$$\exists x(\mathsf{M}(x)\ \&\ \mathsf{C}(x)); \tag{3.22}$$

$$\exists x(\mathsf{M}(x) \Rightarrow \mathsf{C}(x)). \tag{3.23}$$

$(A \mathbin{\&} B)$	$(A \wedge B)$	$A \cdot B$			$A \ \underline{\mathrm{and}}\ B$
$(A \vee B)$		$A + B$	AB		$A \ \underline{\mathrm{or}}\ B$
$(A \Rightarrow B)$	$(A \supset B)$	$A \Rightarrow B$			$A \ \underline{\mathrm{impl}}\ B$
$(A \Leftrightarrow B)$	$A \equiv B$	$(A \leftrightarrow B)$	$A = B$	$A \sim B$	$A \ \underline{\mathrm{eq}}\ B$
$\neg A$		$-A$	$\overline{A}$	$\sim A$	$\underline{\mathrm{not}}\, A$
$\forall x\, A(x)$	$(x)A$	$\Pi_x A$	$\bigwedge_x A$	$(\underline{\mathrm{A}}\, x)A$	
$\exists x\, A(x)$	$(Ex)A$	$\Sigma_x A$	$\bigvee_x A$		$(\underline{\mathrm{E}}\, x)A$

Таблица 3.1: Различные обозначения логических связок

Рассуждениями, подобными тем, которые приводились для $\forall$, можно установить, что (3.23) неправильно.

Итак,

$$\text{“Все A есть B” переводится } \forall x(A(x) \Rightarrow B(x)). \tag{3.24}$$

$$\text{“Некоторые A есть B” переводится } \exists x(A(x) \mathbin{\&} B(x)). \tag{3.25}$$

Подытожим

Формулы — выражения, обозначающие высказывания.

Сложные формулы строятся из более простых при помощи *логических связок*.

Логические связки применяются к высказыванию и в результате дают высказывание.

Логические связки делятся на связки исчисления высказываний (или пропозициональные), которые задаются таблицами истинности, и кванторы, которые заставляют переменную пробежать весь универс.

Квантор $\forall$ сочетается со связкой $\Rightarrow$, а квантор $\exists$ со связкой &.

Для логических связок, к несчастью, еще не выработались общепринятые обозначения. Мы постарались выбрать наиболее выразительные и распространенные. Другие системы обозначений можно резюмировать таблицей (3.1)

Упражнения к §3.9

Упражнения, позаимствованные у Л. Кэррола “История с узелками”, помечены [K].

Перевести на формальный язык.

3.9.1. [K] Ни одному лысому не нужна расческа.

3.9.2. [K] Все мои тетки не справедливы.

3.9.3. [K] Ни один кошмарный сон не приятен.

3.9.4. [K] Все битвы сопровождаются страшным шумом.

3.9.5. Не все двоечники ленивы.

3.9.6. [K] Все, кто упорно работает, добивается успеха.

3.9.7. [K] Ни один бездельник не станет знаменитостью.

3.9.8. [K] Некоторые художники не бездельники.

3.9.9. [K] Некоторые бездельники не художники.

3.9.10. [K] Некоторые подушки мягкие.

3.9.11. [K] Тот, кто может укрощать крокодилов, заслуживает уважения.

3.9.12. [K] Ни одна лягушка не имеет поэтической внешности.

3.9.13. [K] Ни одна тачка не комфортабельна.

3.9.14. [K] Всякий орел умеет летать.

3.9.15. [K] Некоторые свиньи не умеют летать.

3.9.16. [K] Некоторые свиньи — не орлы.

3.9.17. [K] Ни один судья не справедлив.

3.9.18. [K] Ни один ребенок не любит прилежно заниматься.

3.9.19. [K] Все шутки для того и предназначены, чтобы смешить людей.

3.9.20. [K] Ни один парламентский акт не шутка.

3.9.21. [K] Пауки ткут паутину.

3.9.22. [K] Все лекарства имеют отвратительный вкус.

3.9.23. [K] Ни у одной ящерицы нет волос.

3.9.24. [K] Все свиньи прожорливы.

3.9.25. [K] Все, что сделано из золота, драгоценно.

3.9.26. [К] Некоторые секретари — птицы.

3.9.27. [К] Все секретари заняты полезным делом.

3.9.28. [К] Ничто разумное не ставит меня в тупик.

3.9.29. [К] Логика часто ставит меня в тупик.

3.9.30. [К] Некоторые цыплята — не кошки.

3.9.31. Точки A, B, C являются вершинами равнобедренного треугольника.

3.9.32. Иванов, Петров, Васильев и Сидоров могут вытащить эту машину из ямы, если они трезвы и видят бутылку.

3.9.33. Иванов, Петров, Васильев и Сидоров не могут решать квадратные уравнения, даже если они трезвы, но видят бутылку.

3.9.34. Не все числа, синус которых больше $1/2$, больше $\pi/6$.

3.9.35. Квадратные корни из некоторых рациональных чисел иррациональны.

3.9.36. Синус и косинус равны друг другу тогда и только тогда, когда равны тангенс и котангенс.

3.9.37. [К] Когда кто-то поет больше часа, он надоедает.

3.9.38. Все девочки боятся лягушек и мышей.

3.9.39. Кошки бывают только белые и серые.

3.9.40. [К] Все ораторы либо честолюбивы, либо скучны.

3.9.41. Нет действительных чисел, больших $10^{10^{10}}$.

3.9.42. Число делится на 25 в том и только том случае, когда оно делится на 50 либо дает при делении на 50 остаток 25.

3.9.43. Все комплексные числа действительны или становятся действительными после умножения на i.

3.9.44. Не все студенты отличники или спортсмены.

3.9.45. Для того чтобы выполнялось равенство $x = \sqrt{x^2}$, необходимо и достаточно, чтобы x было положительным действительным числом.

3.9.46. Не все, что рассказывал барон К.Ф.И. фон Мюнхгаузен, ложь.

3.9.47. Некоторые людоеды — плохие люди.

3.9.48. Некоторые финансисты — мошенники, но не все.

3.9.49. Прапорщики любят порядок, и не только они.

3.9.50. Милиционеры замешаны в преступлениях, но не все.

3.9.51. Некоторые замки не отпираются, но запираются.

3.9.52. Если будешь хорошо учиться, поступишь в вуз, а иначе провалишься.

3.9.53. Ничего не вижу, ничего не слышу, ничего не знаю.

3.9.54. Молодо — зелено.

3.9.55. Взялся за гуж — не говори, что не дюж.

3.9.56. Чтобы не быть собакой, достаточно быть кошкой.

3.9.57. Чтобы не быть человеком, необходимо быть свиньей.

3.9.58. Некоторые кошки поют по ночам.

3.9.59. Все компакты совершенно нормальны.

3.9.60. Некоторые мюмзики не куздры.

3.9.61. Три точки A, B, C лежат на одной окружности.

3.9.62. Три точки A, B, C не лежат на одной прямой.

3.9.63. Числа a и b имеют одинаковый знак.

3.9.64. Одно из чисел a, b равно 0.

3.9.65. Числа a и b имеют разные знаки.

3.9.66. Ромео и Джульетта любят друг друга.

3.9.67. Гамлет и Клавдий ненавидят друг друга.

3.9.68. Мери любила Печорина, но не взаимно.

3.9.69. Чтобы прийти на свадьбу, необходимо приглашение жениха или невесты.

3.9.70. Некоторые лентяи не оптимисты, но жизнелюбы.

3.9.71. Все замки отпираются и запираются.

3.9.72. Никто из нашего класса не поехал в Москву и Париж.

3.9.73. Все мои одноклассники поехали в Москву и Париж.

3.9.74. Некоторые числа четные.

3.9.75. Некоторые лекции невозможно понять.

3.9.76. Всякому в Москве не перекланяешься.

3.9.77. (Задача семиклассников).[3] Ученик написал утверждение

$$\forall x(\mathsf{От}(x) \Leftrightarrow \mathsf{Дв}(x)),$$

где универсом является множество учеников класса, $\mathsf{От}(x)$ означает "x — отличник", $\mathsf{Дв}(x)$ — "x — двоечник". Может ли оно быть истинно?

---

[3]Формулировка данной задачи принадлежит ученикам 7-го класса ижевской школы № 29.

Глава 4

Методы перевода с естественного языка на математический и обратно

В принципе все это пособие посвящено соотношениям между математическим и "человеческим" языком, но в данном параграфе мы специально останавливаемся на элементарных методах перевода более сложных, чем в предыдущих параграфах, утверждений. Начнем с раздела, в котором более подробно рассмотрена внутренняя структура формул.

4.1 Кванторы. Области действия. Свободные и связанные переменные.

Мы познакомились с двумя кванторами — $\forall$ и $\exists$. В математике кванторные операции над выражениями, содержащими переменные, встречаются сплошь и рядом. Например, известная операция суммы

$$\sum_{i=1}^{n} a_i$$

связывает переменную i, заставляя ее пробежать все натуральные числа от 1 до n, и также может считаться квантором. Вообще, в математической формализации квантор — это операция, применяющаяся к выражению (называемому *подкванторным*), содержащему переменные (называемые *переменными данного квантора*), и дающая в результате выражение, от этих переменных не зависящее, смысл которого описывается через совокупность значений подкванторного выражения на области изменения переменных квантора.

Помимо $\forall$, $\exists$, операций суммы и произведения, стоит упомянуть следующие часто встречающиеся в языке математики кванторы:

1. квантор образования множества ($A(x)$ — логическая формула):
$$\{x \mid A(x)\}.$$
Он строит по $A(x)$ множество всех x, обладающих данным свойством;

2. квантор функциональности ($t(x)$ — терм):
$$\lambda x\, t(x) \text{ либо } x \mapsto t(x).$$
Строит по выражению функцию, вычисляющую значения этого выражения. Этот квантор особенно часто встречается в информатике; в программировании ему соответствует описание процедуры (t — тело процедуры, x — ее параметр);

3. квантор "тот самый" ($A(x)$ — логическая формула):
$$\iota x\, A(x).$$
$A(x)$ должна принимать значение **истина** для единственного x. Именно это x является значением выражения $\iota x\, A(x)$.

4.2 "Многоэтажные" кванторы. Дополнительные ограничения.

Рассмотрим утверждение: "Все здоровые осы злы". Здесь говорится, что если данный нам объект x оса и притом здоровая, то x зол. Следовательно, формальная запись этого утверждения имеет вид
$$\forall x((\mathsf{O}(x) \mathbin{\&} \mathsf{Зд}(x)) \Rightarrow \mathsf{Зол}(x)). \tag{4.1}$$

Для удобства записи и чтения формальных выражений принято считать, что связки $\Rightarrow$ и $\Leftrightarrow$ связывают слабее, чем & и $\vee$, и утверждение (4.1) можно переписать в форме
$$\forall x(\mathsf{O}(x) \mathbin{\&} \mathsf{Зд}(x) \Rightarrow \mathsf{Зол}(x)). \tag{4.2}$$

Аналогично, утверждение “Некоторые старательные ученики — отличники” можно записать в виде

$$\exists x(\mathsf{С}(x)\ \&\ \mathsf{У}(x)\ \&\ \mathsf{О}(x)). \tag{4.3}$$

Итак, если на значения переменной накладываются сразу несколько ограничений, то все они перечисляются через &, а затем надстраивается ограниченный квантор по обычным правилам.

По этой методике утверждение (4.1) нужно записывать в следующем порядке:

$$\begin{gathered}\Rightarrow\\ \mathsf{О}(x)\ \&\ \mathsf{Зд}(x) \Rightarrow;\\ \mathsf{О}(x)\ \&\ \mathsf{Зд}(x) \Rightarrow \mathsf{Зол}(x);\\ \forall x\,(\mathsf{О}(x)\ \&\ \mathsf{Зд}(x) \Rightarrow \mathsf{Зол}(x))\,.\end{gathered} \tag{4.4}$$

Итак, логическую формулу, являющуюся переводом предложения естественного языка, чаще всего естественно писать изнутри, начиная с середины, а не спереди, как мы пишем обычные предложения. Впрочем, если вы уже видите перед мысленным взором всю формулу целиком, записать ее на бумаге можно в любом порядке. Но если это не так, то начинать с начала — пожалуй, худший из возможных способов действий (с конца и то лучше).

Теперь рассмотрим утверждение: “Некоторые парни и девушки дружат друг с другом”. Оно имеет две эквивалентные формы, обе они допустимы:

$$\exists x(\mathsf{П}(x)\ \&\ \exists y(\mathsf{Д}(y)\ \&\ \mathsf{Др}(x,y)\ \&\ \mathsf{Др}(y,x))); \tag{4.5}$$

$$\exists x\,\exists y(\mathsf{П}(x)\ \&\ \mathsf{Д}(y)\ \&\ \mathsf{Др}(x,y)\ \&\ \mathsf{Др}(y,x)). \tag{4.6}$$

Хоть эти две формы и эквивалентны, но (4.6), пожалуй, несколько выразительнее и яснее подчеркивает равноправие парней и девушек в данном высказывании.

Сокращение для утверждений типа (4.6):

$$\exists x,y\,(\mathsf{П}(x)\ \&\ \mathsf{Д}(y)\ \&\ \mathsf{Др}(x,y)\ \&\ \mathsf{Др}(y,x))\,, \tag{4.7}$$

т.е. несколько однородных кванторов соединяются в один.

Аналогично, утверждение “произведение двух отрицательных чисел положительно” может быть записано в виде

$$\forall x,y(x<0\ \&\ y<0 \Rightarrow x\cdot y>0). \tag{4.8}$$

Форма

$$\forall x\,(x < 0 \Rightarrow \forall y\,(y < 0 \Rightarrow x \cdot y > 0))\,,$$

очевидно, гораздо более искусственна.

Перевод утверждения “для всякого натурального числа есть большее” можно записать следующим образом:

$$\forall x\,(x \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists y\,(y \in \mathbb{N}\ \&\ y > x))\,. \tag{4.9}$$

Заметим, что это утверждение удобнее писать, начиная с внутреннего квантора, т.е. сначала записать, что значит, что для x есть большее его натуральное число, а затем уже расшифровать, что значит “для всякого x”.

В (4.9) квантор $\forall$ был явно назван и в человеческой формулировке, а в (4.8) нам пришлось его восстанавливать, исходя из смысла утверждения. В общем случае, при переводе содержательного утверждения на формальный язык ни одна переменная, которая не была названа явно в исходной формулировке, не должна оставаться не связанной квантором. Иначе неизбежны грубые ошибки.

При переводе утверждений с вложенными кванторами необходимо тщательнейшим образом следить за порядком кванторов и их областью действия. Например, если утверждение (4.9), конечно же, истинно, то утверждение

$$\exists y\,(y \in \mathbb{N}\ \&\ \forall x(x \in \mathbb{N} \Rightarrow y > x)) \tag{4.10}$$

ложно. В самом деле, прочтем его. Читать также начинают изнутри. Внутри у нас говорится, что всякое натуральное число x меньше y. Ну, а как же само y? Оно же не может быть меньше самого себя! Значит, внутреннее утверждение ложно. А снаружи стоит квантор, говорящий, что существует такое натуральное число … Этого быть не может.

Итак, все утверждение (4.10) в целом выражает утверждение естественного языка “Существует наибольшее натуральное число”, которое ложно.

Из этого примера виден и способ чтения формальных выражений. Мы начинаем с внутренних кванторов, и, прочитав утверждение “начерно”, в уродливых для естественного языка формах типа “для всех x, таких, что … , существует y, такое, что … ”, стремимся переформулировать полученное предложение более кратко и более красиво, более выразительно. При этом по возможности изгоняется упоминание о тех переменных, которые в формальном выражении были связаны. Упоминание же о тех переменных, которые были свободны, по которым кванторов навешено не было, обязательно остается.

Например, выражение

$$\exists z\,(z \in \mathbb{R} \ \&\ x < z \ \&\ z < y) \tag{4.11}$$

можно прочитать как “Существует действительное число z, такое, что x меньше z, а z меньше y”, и переформулировать начисто: “Между x и y есть действительное число”.

Теперь об области действия кванторов. В традиционной математической логике, т.н. *классической*, допустимо эквивалентное преобразование (4.9) в

$$\forall x\, \exists y\,(x \in \mathbb{N} \Rightarrow y \in \mathbb{N} \ \&\ y > x)\,, \tag{4.12}$$

но такую переформулировку мы решительно не рекомендуем. Во-первых, она, несомненно, менее выразительна и в более сложных случаях даже прямо провоцирует на ошибки; во-вторых, она уже не имеет места при переходе ко многим неклассическим логикам, которые сейчас приобретают все большее и большее значение.

И, наконец, рассмотрим утверждение: “Все волки и зайцы серы”. Для него прямо ошибочен перевод

$$\forall x\,(\mathsf{В}(x)\ \&\ \mathsf{З}(x) \Rightarrow \mathsf{С}(x))\,, \tag{4.13}$$

(покажите мне хотя бы одно животное, которое было бы одновременно и волком, и зайцем), невыразителен, хотя и формально правилен перевод

$$\forall x, y(\mathsf{В}(x)\ \&\ \mathsf{З}(y) \Rightarrow \mathsf{С}(x)\ \&\ \mathsf{С}(y)) \tag{4.14}$$

и лучше всего перевод

$$\forall x\,(\mathsf{В}(x) \Rightarrow \mathsf{С}(x))\ \&\ \forall x\,(\mathsf{З}(x) \Rightarrow \mathsf{С}(x))\,, \tag{4.15}$$

где каждый квантор относится лишь к тем утверждениям, которые он связывает.

Подытожим:

> Если предложение достаточно сложное, его перевод на формальный язык лучше всего писать изнутри, начиная с самой главной части данного предложения.
>
> Порядок кванторов часто имеет решающее значение.
>
> Не стесняйтесь гнаться за выразительностью: это окупается.

При переводе на формальный язык нужно по мере возможности уменьшать области действия кванторов, чтобы каждый из них не включал в свою область утверждений, не говорящих о связываемой переменной.

При чтении сложной формулы начинайте изнутри. Если затруднительно сразу понять ее смысл, сначала прочитайте ее начерно, а затем начисто, изгоняя явное упоминание кванторов и связанных переменных.

Свободные переменные должны входить в окончательную словесную формулировку утверждения.

Упражнения к §4.2

Записать на формальном языке.

4.2.1. Все моряки боятся пиратов.

4.2.2. Все жулики боятся милиционеров.

4.2.3. Маленькие девочки боятся зубных врачей.

4.2.4. Некоторые зубные врачи боятся маленьких девочек.

4.2.5. Зайцы не всегда глупее лис.

4.2.6. Некоторые индейцы были храбрее белых.

4.2.7. Некоторые школьники — отличники или спортсмены.

4.2.8. Все первокурсники и второкурсники пришли на лекцию.

4.2.9. Некоторые комплексные числа, отличные от 0 и являющиеся значениями функции f, не положительны и не отрицательны.

4.2.10. Логарифмы всех положительных рациональных чисел иррациональны.

4.2.11. Квадратные корни из некоторых рациональных положительных чисел иррациональны.

4.2.12. При некоторых отрицательных x $f(x)$ принимает рациональные значения.

4.2.13. Не все решения уравнения $\sin 5x = 0$ иррациональны.

4.2.14. Все решения уравнения $x^2 = -1$ иррациональны.

4.2.15. Некоторые решения уравнения $x^2 = -1$ комплексны.

4.2.16. Все решения уравнения $x^2 + ax + b = 0$ действительны и лежат в $]0, 1[$.

4.2.17. Для делимости целого числа на 8 необходима делимость на 4.

4.2.18. Так как 60 делится на 2, 3, 4, 5, 6, то 60 делится на любое натуральное число.

4.2.19. Так как 60 делится на 2 и на 3, то 60 делится на некоторые числа, отличные от 60.

4.2.20. Для любого натурального числа существует большее, делящееся на n.

4.2.21. Для любого натурального числа существует большее, делящееся на 3.

4.2.22. Есть минимальное действительное число, при котором $x + \sin x$ равно 0.

4.2.23. Нет минимального целого числа, делящегося на 6.

4.2.24. Две прямые параллельны тогда и только тогда, когда они одновременно пересекают третью либо не пересекают ее.

4.2.25. Волки и люди боятся друг друга.

4.2.26. Некоторые прямые параллельны.

4.2.27. Некоторые парни и девушки влюблены друг в друга.

4.2.28. Все прямые параллельны или пересекаются.

4.2.29. У уравнения $\sin x = 0$ есть сколько угодно большие решения.

4.2.30. 101 — простое число.

4.2.31. Есть сколько угодно большие простые числа.

4.2.32. У уравнения $x \sin \frac{1}{x} = 0$ есть сколько угодно малые по абсолютной величине решения.

4.2.33. Если бы все боялись друг друга, то ни один человек не был бы счастлив.

4.2.34. Все лягушки, увидев аиста, прыгают и квакают.

4.2.35. Собаки всегда умнее кошек.

4.2.36. Если три прямые попарно пересекаются, то у них есть общая точка.

4.2.37. Числа x, y, z различны тогда и только тогда, когда $(x-y)(y-z)(x-z) \neq 0$.

4.2.38. $f(x)$ отрицательна во всех точках множества M и нигде больше.

4.2.39. Все честные ученые уважают друг друга.

4.2.40. Некоторые злые люди обижают добрых.

4.2.41. Минимальное значение $f(x)$ больше максимального значения $g(x)$.

4.2.42. Если Ромео и Джульетта не любят друг друга, то никто никого не любит взаимно.

4.2.43. x делится на y.

4.2.44. n – простое число.

4.2.45. a – максимальный элемент множества A.

4.2.46. a – верхняя грань множества A.

4.2.47. a – нижняя грань значений функции f на A.

4.2.48. n есть сумма четырех квадратов натуральных чисел.

4.2.49. n и m – простые числа-близнецы.

4.2.50. Прямые a, b, c пересекаются в одной точке.

4.2.51. a – точка, в которой функция f принимает минимальное значение на M.

4.2.52. 1 – минимальное значение f на M.

4.2.53. Функция f ограничена на M сверху и снизу.

4.2.54. Существует наименьшее действительное решение уравнения

$$\sin x + x = 0.$$

4.2.55. У уравнения

$$\sin x + ax + b = 0$$

при данных a, b есть ровно один корень.

4.2.56. У уравнения

$$\sin x + ax + b = 0$$

при данных a, b есть по крайней мере два корня.

4.2.57. Доисторические ящеры при встречах уступали дорогу друг другу.

4.2.58. Все философы занимались тем, что критиковали других философов.

4.2.59. Все волки, кроме бешеных, боятся людей.

4.2.60. Функция f может быть равна нулю только в точке a.

Перевести с формального языка на человеческий.

4.2.61. $\forall x, y\, (x \in \mathbb{Q} \,\&\, y \in \mathbb{Q} \Rightarrow x^y \in \mathbb{Q} \vee y^x \in \mathbb{Q})$.

4.2.62. $\exists x, y\, (x \in \mathbb{Z} \,\&\, y \in \mathbb{Z} \,\&\, x^3 + y^3 = a^3)$.

4.2.63. $\forall x, l\, (x \in \mathbb{P} \,\&\, l \in \mathbb{L} \Rightarrow x \| l \vee x \times l)$.

4.2.64. $\forall x\, (x \in \mathbb{Q} \,\&\, \lg x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x \geq 1 \,\&\, x/10 \in \mathbb{N})$.

4.2.65. $\forall \alpha, \beta, \gamma (\alpha \in \mathbb{L} \,\&\, \beta \in \mathbb{L} \,\&\, \gamma \in \mathbb{L} \,\&\, \alpha \times \beta \,\&\, \alpha \times \gamma \Rightarrow \beta \times \gamma)$.

4.2.66. $\exists p\, (p \in \mathbb{P} \,\&\, \alpha \in \mathbb{P} \,\&\, \beta \in \mathbb{P} \,\&\, \gamma \in \mathbb{P})$ ($\alpha, \beta, \gamma-$ прямые).

4.2.67. $\forall x, y (x > 1 \,\&\, y > 1 \,\&\, x = y^2 \Rightarrow x > y)$.

4.2.68. $\exists x, y\, (x \in \mathbb{R} \,\&\, y \in \mathbb{R} \,\&\, x = y^2 \,\&\, x < y)$.

4.2.69. $\exists x, y\, (x \in \mathbb{P} \,\&\, y \in \mathbb{P} \,\&\, \neg\, x \| y \,\&\, \neg\, x \times y)$.

4.2.70. $\forall x, y (x \in \mathbb{P} \,\&\, y \in \mathbb{P} \Rightarrow x \| y \vee x \times y)$.

4.2.71. $\exists n\,(n \in \mathbf{N}\ \&\ x \cdot n = y)$.

4.2.72. $\exists n\,(n \in \mathbf{N}\ \&\ x \cdot n + a = y)\ \&\ a \le y\ \&\ a \in \mathbf{N}$.

4.2.73. $\exists n\,(n \in \mathbf{N}\ \&\ x \cdot n + a = y)$.

4.2.74. $\forall x (x \in M \Rightarrow f(x) \ge f(a))\ \&\ a \in M$.

4.2.75. $\forall x (x \in M \Rightarrow f(x) \ge a)$.

4.2.76. $\forall x (x \in M \Rightarrow f(x) \ge a)\ \&\ \exists x\,(x \in M\ \&\ f(x) = a)$.

4.2.77. $\exists x\,(x \in \mathbb{R}\ \&\ \sin x + x = 0\ \&\ \forall y (y \in \mathbb{R}\ \&\ y < x \Rightarrow \sin y + y \ne 0))$.

4.2.78. $\exists x\,(\sin x + ax + b = 0\ \&\ \forall y\,(y \ne x \Rightarrow \sin y + ay + b \ne 0))$.

4.2.79. $\exists x\,\exists y\,(\sin x + ax + b = 0\ \&\ \sin y + ay + b = 0\ \&\ x \ne y)$.

4.2.80. $\forall y\,\big(y > 0 \Rightarrow \exists x\,\big(|x| < y\ \&\ x \ne 0\ \&\ \sin \frac{1}{x} = 0\big)\big)$.

4.2.81. $\forall x (x \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists y\,(y \in \mathbb{R}\ \&\ \sin y = 0\ \&\ y > x))$.

4.2.82. $\forall x, y, z (x \ne y\ \&\ y \ne z\ \&\ x \ne z \Rightarrow (x - y) \cdot (y - z) \cdot (x - z) \ne 0)$.

4.2.83. $\forall x\,(x \in M \Rightarrow f(x) < 0)\ \&\ \forall x (x \notin M \Rightarrow f(x) \ge 0)$.

4.2.84. $\exists x\,(x \in \mathbb{N}\ \&\ 2 \cdot x = 60)\ \&\ \exists x\,(x \in \mathbb{N}\ \&\ 3 \cdot x = 60)\ \&$
$\exists x\,(x \in \mathbb{N}\ \&\ 4 \cdot x = 60)\ \&\ \exists x\,(x \in \mathbb{N}\ \&\ 5 \cdot x = 60)\ \&$
$\exists x\,(x \in \mathbb{N}\ \&\ 6 \cdot x = 60)$
$\Rightarrow \forall x\,(x \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists y\,(y \in \mathbb{N}\ \&\ x \cdot y = 60))$.

4.2.85. $\exists x\,(x \in \mathbb{N}\ \&\ 2 \cdot x = 60)\ \&\ \exists x\,(x \in \mathbb{N}\ \&\ 3 \cdot x = 60) \Rightarrow$
$\exists x\,(x \in \mathbb{N}\ \&\ x \ne 60\ \&\ \exists y\,(y \in \mathbb{N}\ \&\ x \cdot y = 60))$.

4.2.86. $\forall a, b (a \in \mathbb{L}\ \&\ b \in \mathbb{L} \Rightarrow (a \| b \Leftrightarrow \forall c (c \in \mathbb{L} \Rightarrow (c \times a \Leftrightarrow c \times b))))$.

4.2.87. $\forall a\,\Big(a \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists b\,\Big(b \in \mathbb{Q}\ \&\ a = \sqrt{b}\Big)\Big)$.

4.2.88. $\forall a, b, c (a \in \mathbb{L}\ \&\ b \in \mathbb{L}\ \&\ c \in \mathbb{L}\ \&\ a \times b\ \&\ b \times c \Rightarrow a \times c)$.

4.2.89. $\exists x, y\,(\text{Ст}(x)\ \&\ \text{П}(y)\ \&\ \text{У}(x, y)\ \&\ \text{У}(y, x))$.

Ст(x) — быть студентом, П(x) — быть преподавателем, У(x, y) — уважать.

4.2.90. $\neg\forall x(\mathsf{Ст}(x) \Rightarrow \mathsf{O}(x) \vee \mathsf{Сп}(x))$.

$\mathsf{Ст}(x)$ — быть студентом, $\mathsf{O}(x)$ — быть отличником, $\mathsf{Сп}(x)$ — быть спортсменом.

4.2.91. $\exists x\,(\mathsf{C}(x)\ \&\ \mathsf{Ст}(x)\ \&\ \mathsf{От}(x))\ \&\ \exists x\,(\mathsf{C}(x)\ \&\ \mathsf{Ст}(x)\ \&\ \neg\,\mathsf{От}(x))$.

C — быть студентом, $\mathsf{Ст}$ — быть старательным, $\mathsf{От}$ — быть отличником.

4.2.92. $\forall x(\mathsf{П}(x) \vee \mathsf{K}(x) \Rightarrow \mathsf{C}(x))$.

$\mathsf{П}$ — быть пионером, K — быть комсомольцем, C — работать на субботнике.

4.2.93. $\exists x\,(\mathsf{Ч}(x)\ \&\ \forall y(\mathsf{T}(y) \Rightarrow \mathsf{X}(y,x)))$.

T — быть тигром, $\mathsf{Ч}$ — быть человеком, X — x храбрее y.

4.2.94. $\forall x(\mathsf{O}(x) \Rightarrow \forall y(\mathsf{T}(y) \Rightarrow \mathsf{Б}(x,y)))$.

T — быть тигром, O — быть обезьяной, $\mathsf{Б}$ — бояться.

4.2.95. $\forall x,y(\mathsf{T}(x)\ \&\ \mathsf{Ч}(y) \Rightarrow \mathsf{Б}(x,y)\ \&\ \mathsf{Б}(y,x))$.

T — быть тигром, $\mathsf{Ч}$ — быть человеком, $\mathsf{Б}$ — бояться.

4.2.96. $\forall x,y(\mathsf{A}(x)\ \&\ \mathsf{A}(y)\ \&\ \mathsf{B}(x,y) \Rightarrow \mathsf{П}(x,y) \vee \mathsf{П}(y,x))$.

A — быть акулой, B — встречаться, $\mathsf{П}$ — пожирать.

4.2.97. $\forall x,y(\mathsf{З}(x)\ \&\ \mathsf{З}(y)\ \&\ \mathsf{B}(x,y) \Rightarrow \mathsf{C}(x,y)\ \&\ \mathsf{C}(y,x))$.

$\mathsf{З}$ — быть змеей, B — встречаться, C — x съедает y.

4.2.98. $\forall x,y(\mathsf{X}(x) \Rightarrow \exists y\,(\mathsf{X}(y)\ \&\ \mathsf{B}(x,y)\ \&\ \mathsf{B}(y,x))$. X — быть ханом, B — враждовать.

4.3 ‘Если на клетке слона увидишь надпись “Буйвол”, не верь глазам своим’ (Козьма Прутков)

Этот раздел озаглавлен цитатой из классика, поскольку такая невероятная вещь сплошь и рядом происходит при переводе с естественного языка на формальный.

Возьмем предложение

$$\textsf{Все убывающие и возрастающие функции монотонны.} \tag{4.16}$$

Пытаясь записать его на формальном языке, например, в виде

$$\forall f(\mathsf{У}(f)\ \&\ \mathsf{B}(f) \Rightarrow \mathsf{M}(f)),$$

где $\mathsf{У}$ — предикат, означающий, что функция убывающая, B — что она возрастающая, M — что она монотонна, мы получаем чушь. А именно получается, что мы утверждаем монотонность лишь тех функций, которые одновременно и убывающие, и возрастающие, чего просто быть не может. Эта ошибка еще более коварна потому, что получившаяся формула формально истинна, и опровергнуть на примере неверную формулировку не удается.

Верная формулировка такова:

$$\forall f(\forall x, y(x \geqslant y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y)) \vee \forall x, y(x \geqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)) \Rightarrow \mathsf{M}(f)). \tag{4.17}$$

Итак, в естественном языке мы говорили “и”, а переводить должны “или”!

В естественном языке, как уже говорилось, практически все слова многозначны. Смысл слова зачастую невозможно понять, вырвав его из контекста, рассмотрев его вне предложения, в которое оно входит. Поэтому даже при переводе с одного естественного языка на другой нельзя пытаться сначала найти в словаре значения всех слов, а потом построить предложение, нужно прежде всего понять смысл переводимого предложения, его структуру, а затем уже подобрать подходящую структуру на другом языке и заполнить неизвестные слова значениями, найденными в словаре.

В частности, выражение “A и B”, особенно при перечислении однородных членов, часто означает совокупность, куда включаются и объекты из A и объекты из B (объединение множеств A и B). Естественно, что на строгом формальном языке условие принадлежности к этой совокупности должно выражаться через $A \cup B$.

В случае (4.17) и аналогичных у нас, правда, есть отговорка, что мы можем записать их в виде

$$\forall x(\mathsf{B}(x) \Rightarrow \mathsf{M}(x))\ \&\ \forall x(\mathsf{У}(x) \Rightarrow \mathsf{M}(x)), \tag{4.18}$$

где $\vee$ уже не входит, и две части соединены союзом &. Но заметим, что в (4.18) мы существеннейшим образом перестроили структуру переводимого предложения: практически мы заменили простое предложение (4.17) на сложносочиненное “все убывающие функции монотонны, и все возрастающие тоже”. А вот “и”, стоящее между составными частями сложносочиненного предложения, практически всегда переводится на формальный язык &.

Заметим, что в случае, например, предложения “Все делегаты конференции — профсоюзные и коммунистические активисты” предыдущая отговорка уже не подходит. Единственно возможный перевод имеет форму:

$$\forall x(\mathsf{Дк}(x) \Rightarrow \mathsf{Па}(x) \vee \mathsf{Ка}(x)).$$

Рассмотрим теперь предложение: “Все доисторические ящеры пожирали друг друга”. Тут так и напрашивается перевод

$$\forall x, y(\mathsf{Я}(x) \mathbin{\&} \mathsf{Я}(y) \Rightarrow \mathsf{П}(x, y) \mathbin{\&} \mathsf{П}(y, x)),$$

после анализа которого возникает кошмарная картина восставших одновременно из могил ящеров, сгрудившихся вместе и медленно поедавших друг друга, начиная с хвостов (чтобы успеть откусить по кусочку ото всех, пока они пожирают его) ... Конечно же, правильный перевод

$$\forall x\,(\mathsf{Я}(x) \Rightarrow \exists y\,(\mathsf{Я}(y) \mathbin{\&} (\mathsf{П}(x, y) \vee \mathsf{П}(y, x)))) \,. \tag{4.19}$$

Итак, говорилось “все”, а переводить надо “существует”, говорилось “друг друга”, что как будто подразумевает “&”, а писать нужно ”$\vee$”.

Заметим, что сделанная нами переформулировка основывается на анализе содержания предложения про ящеров, а не его формы. Предложения той же формы могут переводиться и по-другому. Например, предложение.

$$\textsf{В нашей группе все уважают друг друга} \tag{4.20}$$

переводится

$$\forall x, y(\mathsf{Н}(x) \mathbin{\&} \mathsf{Н}(y) \Rightarrow \mathsf{У}(x, y) \mathbin{\&} \mathsf{У}(y, x)) \tag{4.21}$$

или, эквивалентно, т.к. x и y — произвольные и могут поменяться местами и сами, без дополнительного упоминания:

$$\forall x, y(\mathsf{Н}(x) \mathbin{\&} \mathsf{Н}(y) \Rightarrow \mathsf{У}(x, y)), \tag{4.22}$$

а предложение

$$\textsf{Все племена кочевников воевали друг с другом} \tag{4.23}$$

переводится

$$(\forall x\,(\mathsf{ПК}(x) \Rightarrow \exists y\,(\mathsf{ПК}(y) \ \&\ \mathsf{B}(x,y) \ \&\ \mathsf{B}(y,x)))\,, \tag{4.24}$$

где $\forall$ уже заменено на $\exists$, т.к., во-первых, не все они физически могли добраться друг до друга, чтобы повоевать, и во-вторых, они вполне могли в союзе с одним из соседей воевать против другого. Здесь уже опускать $\mathsf{B}(y,x)$ не стоит.

В упражнениях есть еще несколько примеров высказываний такой же синтаксической формы, где правильный перевод нельзя написать без учета контекста.

Заметим, что в обыденной жизни слово “все” очень часто означает “некоторые”, “есть такие”. Например, совершив неблаговидный поступок и пытаясь оправдаться: “Все так делают”, мы явно имеем в виду не всех, а некоторых. И как последний штрих: русский язык настолько велик и могуч, что в отдельных случаях высказывания, имеющие вид ‘A’ и ‘$\neg\,\mathsf{A}$’, означают одно и то же. Например,

В получку Иванов получил шиш, а его жена — ни шиша. (4.25)

После выхода в свет первого издания студенты предложили автору дополнение, которое сформулировали в виде следующей побасенки:

> Профессор заявил студентам на лекции:
>
> — В естественном языке бывает так, что два или даже одно отрицание означают утвеждение, но уж два утверждения никогда не означают отрицание.
>
> Студенты промямлили:
>
> — Да, конечно ...

Подытожим:

Во многих предложениях корректный перевод на формальный язык невозможен без учета контекста, особенно без учета тех свойств входящих в предложение отношений, которые содержательно очевидны.

При учете контекста довольно часто необходимо заменить на другие связки слова ‘и’, ‘если’, ‘все’ (последнее особенно в том случае, когда оно означает квантор сразу по нескольким переменным).

Порою после учета контекста появляется возможность опустить некоторые предикаты в формальном переводе, поскольку соответствующие их свойства все равно должны быть явно сформулированы в корректной формализации, и лучше сделать это в общем виде (в частности, такую роль часто играет симметричность отношений).

Иногда замена модальности влияет и на выбор формального перевода, поскольку более мягко сформулированное утверждение в контексте может пониматься по-другому, чем более жесткое.

Упражнения к §4.3

Переведите утверждения:

4.3.1. Весна, и вы говорите: “Все парни и девушки сейчас влюблены друг в друга”. Что это означает?

4.3.2. Когда Ясон кинул в середину войска, выросшего из зубов дракона, камень, все воины передрались и перебили друг друга. Переведите утверждение об этом факте на формальный язык.

4.3.3. Ограниченная сверху и снизу на $[a, b]$ функция непрерывна на нем.

4.3.4. Функция f имеет разрыв 2-го рода в точке 0.

4.3.5. Функция, имеющая точку разрыва, не может быть непрерывной.

4.3.6. Монотонная на $[a, b]$ функция ограничена снизу на $[a, b]$.

4.3.7. Если последовательность ограничена, то она имеет предельную точку.

4.3.8. Чтобы установить рекорд, необходимо иметь способности, и прилежно тренироваться, и найти хорошего тренера.

4.3.9. Чтобы победить, нам необходимы и хорошие нападающие, и хорошие защитники, и хорошие вратари.

4.3.10. Если вчера Петров прогулял два занятия, то сегодня только одно.

4.3.11. Все члены Политбюро, избранного на XIV съезде ВКП(б), ненавидели друг друга.

4.3.12. Все философы критиковали друг друга.

4.3.13. Все рыцари сражались друг с другом на поединках.

4.3.14. Все начальники подсиживают друг друга.

4.3.15. Все мужчины — подонки, а мой муж — хороший человек.

4.3.16. Сдай экзамен на ‘отлично’, и поступишь в аспирантуру.

4.4 Равенство. Единственность и неединственность

Сплошь и рядом встречаются утверждения типа “Я люблю лишь тебя, одну на целом свете”. “Уравнение имеет единственное решение”, “У меня три настоящих друга”, “У задачи не менее четырех различных решений” и т.п.

Все утверждения подобного рода, где говорится не просто о существовании предметов, а об их количестве, требуют для перевода на формальный язык использования предиката равенства $=$.

Равенство играет в языке математики особую роль. Если в некоторой математической теории два объекта объявляются равными, то их свойства в данной теории неразличимы. Другими словами, если мы, как говорят в математике, отождествляем какие-либо объекты, мы одновременно *запрещаем себе использовать в наших строгих математических рассуждениях какие-либо свойства, различающие эти объекты.*

Например, поскольку треугольники, имеющие одни и те же вершины, отождествляются, мы не можем в геометрических доказательствах различать их тем, что у одного сначала была проведена сторона AB, а затем AC, а у другого — наоборот. Способ, которым они были начерчены, роли уже не играет. Следовательно, имеет место следующий основной закон равенства:

> Если A — произвольная формула языка нашей формальной теории, то
>
> $$\forall x, y\,(x = y \Rightarrow (A(x) \Rightarrow A(y)))\,. \tag{4.26}$$

Другими словами, свойства равных объектов эквивалентны. Несколько неточно выражаясь, равные объекты обладают одинаковыми свойствами. Г. Лейбниц превратил это свойство равенства в его содержательное определение:

> Два предмета равны, если они обладают одинаковыми свойствами.

Но эти два предмета не могут обладать всеми одинаковыми свойствами, поскольку уже в формулировке Лейбница они различаются. Поэтому на современном математическом языке формулировку Лейбница записывают в виде формулы, но не укладывающейся в наш стандартный язык логики:

$$\forall P(P(x) \Leftrightarrow P(y)) \Leftrightarrow x = y. \tag{4.27}$$

Здесь P — переменная по предикатам.[1]

Таким образом, в математическом утверждении можно заменить равные объекты друг на друга, и мы получим эквивалентное утверждение. Например, утверждение, говорящее о числе “4”, мы можем заменить на эквивалентное утверждение, говорящее о выражении “$2 + 2$”. Но в обычном языке не всегда так. Можно сказать, что “Вовочка не знал, что $2+2$ — это четыре”, но нельзя — “Вовочка не знал, что $2 + 2$ — это $2 + 2$”. Высказывания, выдерживающие замену равных, называются *экстенсиональными*. Иногда свойство экстенсиональности содержательно комментируют как зависимость высказывания лишь от объема входящих в него понятий, но не от их содержания. Соответственно, высказывания, меняющие значение для равных объектов, называются *интенсиональными*, зависящими от содержания.

Еще одно свойство равенства

$$\forall x(x = x), \tag{4.28}$$

т. е. каждый объект равен самому себе.

Из этих двух свойств равенства выводятся другие законы равенства, например,

$$\forall x, y, z\,(x = y \;\&\; y = z \Rightarrow x = z)\,; \tag{4.29}$$

$$\forall x, y\,(x = y \Rightarrow y = x)\,; \tag{4.30}$$

$$\forall x, y, z\,(x = y \;\&\; x = z \Rightarrow y = z)\,. \tag{4.31}$$

Докажем для образца (4.29): если первый предмет равен второму, а второй — третьему, то первый предмет равен третьему. В самом деле, пусть при конкретных произвольных x, y, z, выполнено $x = y$ и $y = z$. Тогда, по основному свойству равенства (4.26) в $x = y$ можно y заменить на z, и получим $x = z$, что и требовалось доказать.

[1] Это внешне безобидное расширение языка сразу же было предложено авторами языка логики, но уже один из них — Б. Рассел — заметил глубоко спрятанные сложности при рассмотрении кванторов по предикатам. А сейчас стало известно, что в языке с кванторами по предикатам легко сформулировать утверждение, истинность которого эквивалентна неразрешимой математической проблеме. Доказано также, что для такого расширения языка не может быть полной системы формальных доказательств, которая имеется в обычной логике и рассматривается далее в нашем пособии.

Исключительно важную роль в языке математики играет утверждение о единственности x, удовлетворяющего данному условию A (например, часто приходится доказывать, что решение задачи единственно).

На самом деле обычно подразумевается не только то, что решение задачи единственно, но и то, что она имеет решение, т. е. доказывается не только единственность, а существование и единственность объекта, удовлетворяющего свойству A. При аккуратных формулировках это необходимо оговаривать.

Единственность "в чистом виде" выражается следующим образом:

$$\forall x, y(A(x) \;\&\; A(y) \Rightarrow x = y). \tag{4.32}$$

Это утверждение воспроизводит сплошь и рядом встречающийся в математике метод доказательства единственности. Нужно доказать, что решение задачи единственно. "Рассуждаем от противного[2]. Пусть есть два различных x, y, являющихся решениями данной задачи. Тогда ... Итак, мы доказали, что $x = y$, и полученное противоречие доказывает теорему"[3].

Заметим, что утверждение "x, удовлетворяющее A, единственно", вообще говоря, *не предполагает, что оно существует*, что задача вообще имеет решение. Чисто формально, по таблицам истинности, (4.32) истинно и в том случае, когда x, удовлетворяющих A, вообще нет. Поэтому (4.32) точнее читать "есть не более одного x, удовлетворяющего $A(x)$".

То же высказывание можно выразить и многими другими формулами, часть которых приведена в упражнениях. Мы выбрали наиболее выразительную.

Соответственно, утверждение "Задача имеет единственное решение", "существует единственное x, такое, что $A(x)$" выражается в форме

$$\exists x\, A(x) \;\&\; \forall x, y\, (A(x) \;\&\; A(y) \Rightarrow x = y)\,. \tag{4.33}$$

Но (4.33) не самая выразительная запись утверждения о единственности. Гораздо выразительнее

$$\exists x\, \forall y (A(y) \Leftrightarrow x = y). \tag{4.34}$$

Итак, то, что существует единственное x, удовлетворяющее $A(x)$, означает, что условие $A(x)$ на самом деле сводится к равенству этому единственному x.

---

[2]Эта фраза, которую обычно здесь произносят, на самом деле лишняя, мы просто предполагаем условие утверждения о единственности.

[3]Эта фраза также лишняя, мы просто доказали заключение импликации.

Сказать, что точка x является центром окружности, описанной около треугольника ABC, то же, что сказать, что она совпадает с точкой Q, построенной при доказательстве теоремы о том, что вокруг любого треугольника можно описать окружность, и притом только одну.

А теперь наступает черед высказываний типа "существует n таких x, что $A(x)$", "существует не менее n таких x, что $A(x)$", "есть не более n таких x, что $B(x)$", где n заранее дано.

Общий способ получить утверждение "существует не более n таких x, что $A(x)$":

$$\exists x_1, \ldots, x_n \, (\forall y \, (A(y) \Leftrightarrow x_1 = y \vee \cdots \vee x_n = y)) \, . \tag{4.35}$$

Но здесь мы не утверждаем, что этих различных x ровно n: если x и y обозначены по-разному, то это отнюдь не означает, что они принимают различные значения: они имеют право принимать разные значения, но имеют право принять и одинаковые.

Итак, мы приходим к необходимости уметь формулировать различие, чего мы пока тщательно избегали в основном тексте.

Если $x = y$ означает равенство, неразличимость, совпадение предметов, то соответственно $\neg(x = y)$, обычно обозначаемое $x \neq y$ – их различие. Итак, сказать, что есть не менее двух различных решений задачи, очень просто:

$$\exists x, y \, (x \neq y \; \& \; A(x) \; \& \; A(y)) \, . \tag{4.36}$$

Так же просто сказать и то, что их ровно два:

$$\exists x, y \, (x \neq y \; \& \; \forall z (A(z) \Leftrightarrow z = x \vee z = y)) \, . \tag{4.37}$$

А для большего числа решений уже начинаются сложности. Сказать, в частности, что $x \neq y \; \& \; y \neq z$ — недостаточно. Ответьте сами, почему? Возникает следующее выражение, которое употребляется при точных формулировках вместо расплывчатого "$x_1, \ldots, x_n$ различны": "все $x_1, \ldots, x_n$ попарно различны", что переводится в виде длинной конъюнкции различий:

$$\begin{array}{rl} x_1 \neq x_2 \; \& \; x_1 \neq x_3 \; \& \; \ldots & \& \; x_1 \neq x_n \\ \& \; x_2 \neq x_3 \; \& \; \ldots & \& \; x_2 \neq x_n \\ \ldots & \\ & \& \; x_{n-1} \neq x_n \end{array} \tag{4.38}$$

А теперь мы уже готовы формулировать различные высказывания о количестве элементов, удовлетворяющих A, при условии, если это количество задано заранее.

Часто употребляются следующие сокращения.
“Существует единственное x, такое, что $A(x)$”: $\exists 1x\, A(x)$ $\qquad \exists! x A\,(x)$
“Существует ровно n таких x, что $A(x)$”: $\exists_n x\, A(x)$
“Существует не менее n таких x, что $A(x)$”: $\exists_{\geqslant n} x A(x)$
“Существует не более n таких x, что $A(x)$”: $\exists_{\leqslant n} x A(x)$

Подытожим:

Определение равенства, данное Лейбницем, применяется в двух направлениях: оно позволяет перенести свойства одного объекта на другой, если доказано их равенство; оно заставляет нас ограничивать математический язык таким образом, чтобы не допускать формулировку свойств, которые могут не сохраняться для равных объектов (*интенсиональных*).

В математический язык можно корректно вводить формулировку, говорящую, что имеется данное фиксированное число элементов, удовлетворяющих некоторому условию. Если это число не фиксировано, то утверждение может выйти за рамки чистого языка логики, но остается математическим.

Предикат $=$ имеет особый статус в логике.

Если $\exists 1x\, A(x)$, то ограниченные кванторы $\forall x(A(x) \Rightarrow B(x))$ и $\exists x(A(x)\ \&\ B(x))$ совпадают по значению.

Упражнения к §4.4

4.4.1. В нашем классе есть единственный отличник.

4.4.2. В нашем классе ровно три отличника.

4.4.3. Если два философа сидят за одним столом, то они обязательно начинают спорить.

4.4.4. Стоят три женщины у колодца и не разговаривают.

4.4.5. В нашем цехе никто, кроме Иванова, Петрова, Васильева и Сидорова, не умеет играть в домино.

4.4.6. У уравнения $x^5 - 5x^3 + 4x = 0$ нет решений, отличных от 0, ± 1, ± 2.

4.4.7. У уравнения $ax^2 + bx + c + \varepsilon \sin x = 0$ ровно два решения.

4.4.8. У уравнения $ax^2 + bx + c + \varepsilon \sin x = 0$ не более трех решений.

4.4.9. У уравнения $ax^2 + bx + c + \varepsilon \sin x = 0$ не менее трех решений.

Перевести на естественный язык.

4.4.10. $\exists x, y, z\, (\mathsf{З}(x)\ \&\ \mathsf{З}(y)\ \&\ \mathsf{З}(z)\ \&\ x \neq y\ \&\ y \neq z\ \&\ x \neq z) \Rightarrow \forall x\, \mathsf{З}(x)$.
$\mathsf{З}(x)$ — “x знает тайну”.

4.4.11. $\forall x (x \neq a\ \&\ x \neq b \Rightarrow f(x) \neq 0)$.

4.4.12. $\forall x (f(x) = 0 \Rightarrow x = a \vee x = b)$.

4.4.13. $\exists x, y\, \forall z (\mathsf{Д}(\mathsf{В}, z) \Rightarrow z = x \vee z = y)$.
$\mathsf{В}$ — Ваня, $\mathsf{Д}$ — дружит.

4.4.14. $\exists x, y\, (\mathsf{Д}(\mathsf{В}, x)\ \&\ \mathsf{Д}(\mathsf{В}, y)\ \&\ \forall z (z \neq x\ \&\ z \neq y \Rightarrow \neg\, \mathsf{Д}(\mathsf{В}, z)))$.
Обозначения те же, что и в 4.4.13.

4.4.15. $\forall x\, (\mathsf{Ч}(x) \Rightarrow \exists y\, (\mathsf{Ч}(y)\ \&\ \forall z\, (\mathsf{Л}(x, z)\ \&\ \mathsf{Л}(z, x) \Leftrightarrow y = z)))$.
$\mathsf{Ч}(x)$ — “x – человек”, $\mathsf{Л}$ — любить.

4.4.16. $\forall x, y, z (x \neq y \& y \neq z\ \&\ x \neq z \Rightarrow f(x) \neq 0 \vee f(y) \neq 0 \vee f(z) \neq 0)$.

4.4.17. $\forall x (\mathsf{Ч}(x) \Rightarrow \forall y (x \neq y \Rightarrow \neg\, \mathsf{Ч}(y)))$.
$\mathsf{Ч}$ — “быть чемпионом”.

4.4.18. $\exists x\, (\mathsf{Ч}(x)\ \&\ \forall y (\mathsf{Ч}(y) \Rightarrow y = x))$.
Обозначение то же, что в 4.4.17.

4.4.19. $\forall x\, \forall y\, \forall z (x \in X\ \&\ y \in X\ \&\ z \in X \Rightarrow x = y \vee y = z \vee x = z)$.

4.4.20. Можно ли использовать выражение (4.35) для перевода высказывания “Может быть не больше n таких x, что $A(x)$?” Если нет, то почему?

4.5 Таблицы истинности и формулировка отрицаний

Здесь мы коснемся двух инструментов, применяемых в современной математике и ее приложениях на много порядков чаще других методов математической логики. Это связано не столько с их полезностью и важностью, сколько с их простотой.

Как следует из Соглашения 3, если формула не содержит кванторов и переменных, то ее значение полностью определяется конечным набором значений элементарных формул, из которых она построена. Если таких строительных блоков n, то достаточно перебрать 2^n их значений[4], чтобы выяснить характер зависимости значения формулы от значений ее компонент. Систематический перебор всех вариантов значений элементарных блоков и вычисление для них значений формулы и дает *таблицу истинности*. Рассмотрим пример. Построим таблицу истинности для формулы

$$(A \Rightarrow B \vee C) \Rightarrow (A \Rightarrow B)\,.$$

A	B	C	$B \vee C$	$A \Rightarrow B \vee C$	$A \Rightarrow B$	Формула
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1

(4.39)

Здесь видно, что, перебрав восемь возможных приписываний значений переменным, мы отыскали то единственное, при котором формула ложна. Если бы такового не оказалось, то формула могла бы считаться *логически истинной*, и применяться практически не глядя на интерпретацию[5], а уж в обычной математике вообще безусловно. Поэтому в логике в особенности интересуются формулами, тождественно истинными при любой интерпретации, и дали им особое название[6] — *тавтологии*. То, что формула A является тавтологией, будем обозначать в данной главе $\models A$. Особое место среди тавтологий занимают *эквивалентности* — тавтологии вида $A \Leftrightarrow B$. Установленная эквивалентность дает возможность повсюду заменять выражения A и B друг на друга.[7]

Тавтологии и противоречия важны для логики потому, что они не зависят от конкретной формализации предметной области. Далее, применение тавтологий дает общие средства вывода следствий и преобразования формул. И, наконец, для проверки тавтологичности в классической логике имеется достаточно эффективный во многих содержательных слу-

[4] А почему 2^n? Докажите.

[5] Лишь бы была применима сама классическая логика.

[6] Правда, не очень почтительное.

[7] Данное свойство — свойство замены эквивалентных — будет подробнее рассмотрено далее.

чаях метод — семантические таблицы, которым посвящена следующая глава.[8]

Определение 4.5.1. Замкнутые формулы, не содержащие кванторов, называются *пропозициональными*; подъязык логики предикатов, состоящий из пропозициональных формул — *пропозициональным* языком или языком *логики высказываний*. *Оценивание* пропозициональной формулы — функция, сопоставляющая всем ее различным элементарным подформулам истину либо ложь. *Таблица истинности* — функция, сопоставляющая каждому возможному оцениванию значение формулы при этом оценивании.

Поскольку элементарных подформул у формулы конечное число и каждая из них может принимать лишь два значения, составление таблицы истинности — конечная процедура.

Предложение 4.5.1. *Пропозициональная формула является тавтологией тогда и только тогда, когда ее таблица истинности является функцией, тождественно равной* истине. *Она является противоречием, если таблица тождественно равна* лжи.

4.6 Простейшие преобразования классических формул

Уже простейшие тавтологии позволяют развить полезные преобразования формул классической логики и, соответственно, математики. Для их установления достаточно построить простейшую таблицу истинности в пропозициональном случае либо обратиться к определению истинности в предикатном. Перечислим их.

[8]Наличие метода проверки является необходимым условием практической применимости формализма.

$$A \vee \neg A \tag{4.40}$$

$$\neg\neg A \Leftrightarrow A \quad \text{(Закон двойного отрицания)} \tag{4.41}$$

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \mathbin{\&} \neg B) \quad \text{(Закон де Моргана)} \tag{4.42}$$

$$\neg(A \mathbin{\&} B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B) \quad \text{(Закон де Моргана)} \tag{4.43}$$

$$\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \mathbin{\&} \neg\, B) \tag{4.44}$$

$$\neg\,\forall x\, A(x) \Leftrightarrow \exists x\, \neg A(x) \tag{4.45}$$

$$\neg\,\exists x\, A(x) \Leftrightarrow \forall x\, \neg A(x) \tag{4.46}$$

$$\neg(A \mathbin{\&} B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow \neg B) \tag{4.47}$$

$$\neg(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow \neg B) \tag{4.48}$$

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A) \quad \text{(Закон контрапозиции)} \tag{4.49}$$

$$(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow (A \mathbin{\&} C \Leftrightarrow B \mathbin{\&} C) \tag{4.50}$$

$$(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow (A \vee C \Leftrightarrow B \vee C) \tag{4.51}$$

$$(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow (\neg A \Leftrightarrow \neg B) \tag{4.52}$$

$$(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow C) \Leftrightarrow (B \Rightarrow C)) \tag{4.53}$$

$$(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow ((C \Rightarrow A) \Leftrightarrow (B \Rightarrow A)) \tag{4.54}$$

$$\forall x(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow (\forall x\, A \Leftrightarrow \forall x\, B) \tag{4.55}$$

$$\forall x(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow (\exists x\, A \Leftrightarrow \exists x\, B) \tag{4.56}$$

$$A \mathbin{\&} B \Leftrightarrow B \mathbin{\&} A \tag{4.57}$$

$$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A \tag{4.58}$$

Эти тавтологии используются при обосновании двух важнейших преобразований формул: формулировке отрицаний и замене эквивалентных.

Алгоритм формулировки отрицаний. Под формулировкой отрицаний подразумевается эквивалентное преобразование формулы $\neg A$ таким образом, чтобы операция отрицания применялась лишь к элементарным формулам. Тавтологии 4.40–4.58 приводят к следующему алгоритму.

Базис рекурсии. Если мы пришли к элементарной формуле, оставляем перед ней отрицание и заканчиваем работу.

Шаг 1. Если A есть $(B \vee C)$, заменяем $\vee$ на & и формулируем отрицания B, C.

Шаг 2. Если A есть $(B \mathbin{\&} C)$ $\{(B \Rightarrow C)\}$, заменяем & либо $\Rightarrow$ друг на друга, формулируем отрицание заключения C, оставляя посылку B без изменения.

Шаг 3. Если A есть $\neg B$, отбрасываем оба отрицания и оставляем B без изменения.

Шаг 4. Если A есть $\forall x\, B$ $\{\exists x\, B\}$, то заменяем кванторы друг на друга и формулируем отрицание B.

Итак, при формулировке отрицаний достаточно большие части формул, происшедшие из посылок импликаций либо переходящие в них, остаются неизменными. Конечно же, для соблюдения математического стиля целесообразно порой заменять и элементарные формулы, например, взаимно превращая $<$ и $\geq$. Но более важно другое замечание, исходящее из известной неоднозначности переводов между содержательным и формальным языком. Изучая тавтологии, на которых мы базируемся, можно отметить, что по крайней мере для конъюнкции & имеются два различных варианта переводов.[9] Поэтому у нас имеется другой вариант формулировки отрицания &: заменить конъюнкцию на дизъюнкцию и сформулировать отрицания обеих частей. В частности, для предложения “Все ораторы честолюбивы и скучны”, переводящегося

$$\forall x\,(\mathsf{Оратор}(x) \Rightarrow \mathsf{Честолюбив}(x)\ \&\ \mathsf{Скучен}(x))\,,$$

лучше вариант формулировки отрицания с $\vee$.

Формулировка отрицания иногда является также шагом проверки переводов на формальный язык и выбора из них более приемлемого. Например, многие студенты замечают, что в утверждении про ящеров (4.19) отношение пожирания на самом деле антисимметрично и можно заменить $\vee$ на $\oplus$:

$$\forall x\,(\mathsf{Я}(x) \Rightarrow \exists y\,(\mathsf{Я}(y)\ \&\ (\mathsf{П}(x,y) \oplus \mathsf{П}(y,x))))\,. \tag{4.59}$$

В нашем конкретном мире это утверждение практически совпадает по истинностному значению с исходным, но вот насчет их отрицаний см. упражнение 4.6.5.

Рассмотрение предложения (4.23) и его перевода (4.24) приводит к еще одному интересному наблюдению. При переходе к содержательному выражению

$$\text{Не все племена кочевников воевали друг с другом} \tag{4.60}$$

контекст изменяется и его перевод не является отрицанием (4.24). Это просто

$$(\ \exists x, y\,(\mathsf{ПК}(x)\ \&\ \mathsf{ПК}(y)\ \&\ \neg\,\mathsf{В}(x,y)\ \&\ \neg\,\mathsf{В}(y,x))\,. \tag{4.61}$$

[9] В классической логике они эквивалентны, и выбор между ними прежде всего вопрос вкуса. Но, как и обычно, стилистическое различие в классической логике переходит в семантическое в неклассических.

Когда мы перешли к формализации, нужно строжайше следить за единством контекста (классическая логика предполагает его постоянство и, более того, является той логикой, которую мы *практически вынуждены* использовать в случае формализации знаний в постоянном контексте.) Поэтому после перевода формального предложения на обычный язык полученную формулировку целесообразно отредактировать с учетом возможных изменений контекста. Преимущество, которое мы получаем, проводя дополнительные преобразования, огромно по сравнению с некоторыми неудобствами: вылавливаются все те места, где в содержательном рассуждении контекст потихоньку подменяется.

Еще одним важным приложением наших тавтологий является свойство замены эквивалентных. Подробнее оно будет разобрано в следующей части, а сейчас его можно охарактеризовать как разрешение использовать в любом месте вместо логического выражения другое, эквивалентное ему.

И наконец, приведем важное эквивалентное[10] преобразование импликаций. Очевидно, что $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$ — разные утверждения. А если включить сюда еще и импликации между отрицаниями? Тавтология 4.49 показывает, что $\neg B \Rightarrow \neg A$ то же самое, что и $A \Rightarrow B$.

Упражнения к §4.6

4.6.1. Для всех упражнений на перевод с естественного на формальный и обратно, которые Вы решали и будете решать, запишите отрицание соответствующих формул.

4.6.2. Проверьте на таблицах истинности, тавтологии ли следующие формулы:

1. $(A \Rightarrow B) \vee (A \Rightarrow C) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B \vee C)$;
2. $((A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow C) \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow C))$;
3. $((A \Leftrightarrow B) \mathbin{\&} (C \Leftrightarrow D)) \Leftrightarrow ((A \Leftrightarrow C) \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow D))$.

4.6.3. Запишите все возможные импликации между A, B и их отрицаниями и установите, какие из них эквивалентны друг другу.

4.6.4. Постройте таблицу истинности для формул $\neg(A \oplus B)$ и $\neg(A \Leftrightarrow B)$ и дайте правила формулировки отрицаний для $\oplus$ и $\Leftrightarrow$.

[10] В традиционной классической логике. В неклассических оно почти всегда исчезает.

4.6.5. Дайте формулировки отрицаний для (4.19) и (4.59) и на их основе выберите одну из формулировок.[11]

4.6.6. Запишите содержательное предложение, соответствующее отрицанию формулы (4.24).

[11] В данном случае мы сталкиваемся еще с одним принципом успешной формализации: не говорите лишнего. Если утверждения уже стали истинными в ситуациях, имеющихся в виду, сначала попытайтесь поработать с ними, и добавляйте новые лишь при необходимости.

Глава 5

Базовые математические понятия

Данная глава посвящена введению в использование базисных понятий современной математики, несколько выходящих за рамки чистого языка логики: множеств, отношений, функций. Она содержит также краткое введение в язык диаграмм и стрелок, столь же органичный для функций, сколь органичен язык логики для высказываний.

5.1 Множества. Диаграммы Эйлера и Венна

В современной математике понятие множества является одним из центральных и окутанных наибольшим числом предрассудков. Множества являются прежде всего удобным средством превращать высказывания в объекты и, соответственно, операции над высказываниями в функции. При этом классическая логика переходит в булеву алгебру. Лучше всего охарактеризовать множество как “единое имя для совокупности всех объектов, обладающих данным свойством.” Но это предложение, конечно же, не может считаться определением.

Множество всех объектов, обладающих свойством $A(x)$, обозначается $\{x \mid A(x)\}$. Если $Y = \{x \mid A(x)\}$, то $A(x)$ называется *характеристическим свойством* множества Y, а Y — *сверткой* предиката A. По определению Y, выполнена следующая эквивалентность:

$$\forall y(y \in Y \Leftrightarrow A(y)).$$

Два множества считаются равными, если их характеристические свойства эквивалентны.[1] (Часто это выражают словами: “Множества равны, если они содержат одни и те же элементы.”) Множество X вложено в множество Y ($X \subset Y$, если характеристическое свойство Y следует из характеристического свойства X^2.[3] Поскольку

$$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)\ \&\ (B \Rightarrow A),$$

$X \subset Y$ и $Y \subset X$ тогда и только тогда, когда $X = Y$.

Простейшее из множеств, и чаще всего встречающееся в формулах — пустое множество $\emptyset$, вообще не содержащее элементов. Очевидно, что пустое множество задается тождественно ложным характеристическим свойством, и соответственно, все пустые множества равны. Поэтому считается, что множество квадратных кругов равно множеству удмуртов-негров. Но здесь, как и всегда, когда математика расходится со здравым смыслом[4], возникают некоторые тонкости.

Было бы естественно, чтобы тождественно истинное условие, например $x = x$, определяло “полное” множество. Но математики давно уже отказались считать, что существует единое такое полное множество для всех разделов математики, не говоря уже о ее применениях. Тут вступает в свои права контекст, и мы вспоминаем о том, что неотъемлемым элементом математической интерпретации является универс — множество всех рассматриваемых в данной теории предметов. Очевидно, что тожде-

---

[1] Как мы уже замечали, если математики уславливаются считать некоторые объекты равными, то тем самым они отказываются рассматривать какие-либо их свойства, нарушающие равенство. Таким образом, отождествив два множества, характеристические свойства которых эквивалентны, мы тем самым косвенно заявляем, что, во-первых, элементы во множествах совершенно равноправны, поскольку единственное свойство элемента, принимаемое во внимание при образовании множества — характеристическое; во-вторых, элементы не повторяются. Значит, при реализации, скажем, машинной структуры данных, соответствующей множествам, нужно как-то учесть эти свойства, а это порою не так-то просто. Например, задав множество просто как массив переменной длины из элементов, мы грубо нарушаем оба требования: элементы становятся упорядоченными согласно индексам, и в массиве могут попасться одинаковые члены.

[2] Порою значок $\subset$ используют лишь для т.н. *строгого вложения*, когда вдобавок $X \neq Y$, а наше вложение обозначают $\subseteq$. Но посмотрите, как уродливо выражается строгое вложение, и станет ясно, что лучше брать за исходное нестрогое вложение, что и ввел в математическую традицию Никола Бурбаки

[3] Никола Бурбаки — легендарный современный математик (легендарный как в смысле основательности его работ, так и в буквальном.) Его на самом деле никогда не существовало, под этим именем выпускала серию работ группа выдающихся математиков французской школы (не говорим французов, потому что в их числе был поляк).

[4] Но и когда она с ним согласуется, часто все не так просто ...

ственно истинное условие определяет универс, и тождественно истинные формулы, относящиеся к разным теориям, определяют разные универсы.

В математике рассматривается одна теория — *теория множеств*, которая длительное время претендовала на выразимость в ней всех математических понятий. В ней пытаются базироваться на одних лишь множествах, и тогда ее универс должен быть множеством всех множеств. Но выяснилось, что принятие существования множества всех множеств приводит к невозможности совместить некоторые построения, принятые в математике, в рамках одной теории. Так, например, одна из аксиом теории множеств: если X — множество, то для любого условия A $\{x \mid x \in X \;\&\; A(x)\}$ — также множество. Приняв существование множества всех множеств, мы при помощи данной аксиомы выделяем из него расселовское множество из примера 1.7, которое приводит к парадоксу. Оно определяется как

$$\{x \mid x \in U \;\&\; x \notin x\}$$

(как обычно, U — универс.)

Математики вышли из данного положения, как всегда, с честью, но не без потерь и хитростей: было просто принято, что множества всех множеств нет, и универс теории множеств сам множеством не является.[5] Примененный метод лечения полностью соответствует тому, как действуют представители других наук в случае появления противоречий в *парадигме*.

> Парадигма — совокупность взглядов и понятий, которые считаются принадлежащими данной науке.

Она автоматически отбрасывает те взгляды, которые ей противоречат, как ненаучные, а те понятия, которые в нее не входят, как тоже ненаучные либо не принадлежащие данной специальности и потому неинтересные. Парадигмой пользуются, пока она совсем не износится, и зачастую она уже трещит по всем швам, а на нее упорно ставят заплатки. Одним из видов таких заплаток является убийство факта, противоречащего парадигме, путем вывода данного понятия за ее пределы либо переформулировки соответствующего термина таким образом, чтобы он устранял выявленный недостаток. Другой способ — постулирование данного факта как нового принципа.[6] Так, геологи длительное время отбрасывали

[5]Впрочем, американский логик Куайн предложил вариант теории множеств, в котором прекрасно уживаются с множеством всех множеств, но, как и следовало ожидать, эта теория множеств показалась несколько странноватой в других отношениях и не была воспринята математиками.

[6]Не важно, что он, как правило, не согласуется с другими! На много шагов вперед неприятные вещи никто продумывать не любит.

как противоречащую парадигме теорию движения материков, предпочитая каждый конкретный факт либо игнорировать, либо объяснять по отдельности. Математики по крайней мере потрудились свести спасенные после заплаток принципы теории множеств в достаточно стройную систему.

Множество, состоящее из конечного числа элементов $a_1, \ \dots \ , a_n$, принято обозначать $\{a_1, \ \dots \ , a_n\}$. Его определение через характеристическое свойство

$$\{a_1, \ \dots \ , a_n\} = \{x \mid x = a_1 \vee \ \cdots \ \vee x = a_n\}\,. \tag{5.1}$$

Исходя из тождества 5.1, можно видеть, в частности, что

$$\{a,b\} = \{b,a\}, \quad \{a,a\} = \{a\}.$$

Стоит отметить еще одну тонкость. Нужно строго различать x и $\{x\}$. Первое выражение обозначает сам элемент, а второе — множество, заключающее этот один элемент. Разница между ними примерно такая же, как между шимпанзе и шимпанзе, посаженным в клетку в зоопарке: $\{x\}$ скорее похоже на такую клетку, чем на ее обитателя.[7]

Операциям конъюнкции и дизъюнкции над формулами соответствуют операции пересечения $\cap$ и объединения $\cup$ множеств:

$$X \cup Y \stackrel{\triangle}{=} \{x \mid x \in X \vee y \in Y\} \qquad X \cap Y \stackrel{\triangle}{=} \{x \mid x \in X \;\&\; y \in Y\}\,,$$

а операцию, соответствующую отрицанию, как правило, вводят лишь тогда, когда фиксирован универс U. Дополнение $\bar{X}$ множества X — это множество элементов U, не входящих в X.[8]

Говорят, что два множества не пересекаются, если их пересечение — пустое множество:

$$X \cap Y = \emptyset.$$

[7]Конечно же, множество X в некотором смысле изоморфно (т. е. имеется взаимнооднозначное отображение, сохраняющее все основные структуры) множеству

$$\{\{x\} \mid x \in X\}\,.$$

Но насколько такой изоморфизм может быть коварным, видно из того, что в теории множеств Куайна (где существует универс) его часто нет. Так что одно найдешь, другое потеряешь …

[8]Таким образом, в теории множеств дополнений у множеств нет; но о них, тем не менее, говорят, имея в виду дополнение до фиксированного подразумеваемого множества, например, некоторого множества действительных чисел до всего $\mathbf{R}$.

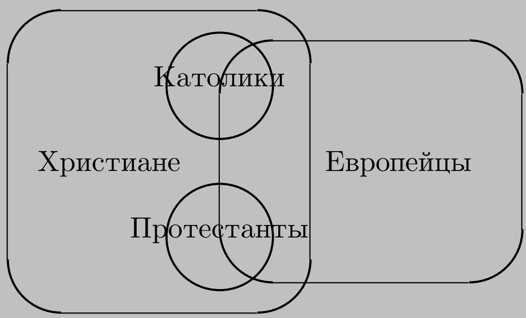


Рис. 5.1: Диаграмма Эйлера

Объединение, пересечение и дополнение обычно называются *булевыми операциями*, составленные из множеств с их помощью выражения — *булевыми выражениями*, значение такого выражения — *булевой комбинацией* входящих в него множеств, а равенства двух булевых выражений — *булевыми тождествами* (например, $X \cup X = X$). Через булевы операции определяются еще две полезные операции над множествами — разность $X \setminus Y = (X \cap -Y)$ и симметрическая разность $X \triangle Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$. Булевы тождества позволяют продемонстрировать достаточно уникальный пример превращения иллюстраций в строгие доказательства. Он интересен еще и как пример представления данных: таблица истинности превращается в совершенно непохожую внешне, но изоморфную ей структуру.

В XVIII веке Л. Эйлер использовал для иллюстрации взаимосвязей между понятиями чертежи, которые были названы позднее "круги Эйлера" (точнее, как мы и будем называть их, "диаграммы Эйлера"). Например, соотношение между понятиями "протестант, католик, христианин, европеец" показывает следующая диаграмма 5.1.

Здесь не имеет значения относительный размер кругов либо других замкнутых областей, но лишь их взаимное расположение. Безусловно, такие диаграммы могут играть в логике лишь ту же роль, что чертежи в геометрии: они иллюстрируют, помогают представить и доказать, но сами ничего не доказывают. Учитывая, что по сути своей логика не является математической наукой и поэтому имеет дело с понятиями, а не с терминами, часто диаграммы Эйлера являются оптимальным средством. Но для математических понятий и булевых операций из них можно вывести другой вид диаграмм, когда чертеж становится строгим доказательством.[9]

[9]Этот вид диаграмм предложил и детально разработал Дж. Венн, поэтому они называются по его имени.

Следующие две диаграммы показывают, что тождество не выполнено. Объединение областей, помеченных $*$, соответствует левой и правой частям тождества, соответственно

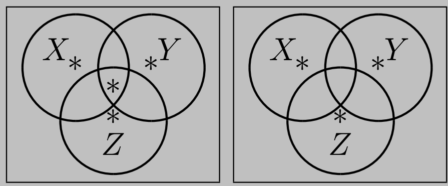


Рис. 5.2: Правильная диаграмма Венна

Самая внутренняя область пропала, и кажется, что рассматриваемое тождество выполнено.

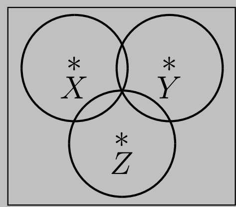


Рис. 5.3: Неправильная диаграмма Венна

Начнем с примера. Рассмотрим тождество $X \bigtriangleup (Y \bigtriangleup Z) = (X \cup Y \cup Z) \setminus ((X \cap Y) \cup (X \cap Z) \cup (Y \cap Z))$. Левой и правой его частям можно сопоставить следующие чертежи (см. рис. 5.2).

Квадрат изображает универс, круги — наши множества. Из их рассмотрения видно, что выражение в левой части совпадает с выражением в правой. Более того, интуитивно очевидно, что данный чертеж на самом деле доказывает тождество для всех возможных множеств.

Если же нарисовать диаграмму чуть-чуть неаккуратно, некоторые области могут пропасть и проверка, соответственно, оказывается излишне оптимистичной (см. рис. 5.3).

Для того чтобы установить точный критерий удовлетворительности чертежа, рассмотрим соотношение между булевым тождеством и логической формулой. Каждому булеву выражению над множествами сопоставляется логическая формула, в которой X заменяется на $c \in X$, $\cap$ на &, $\cup$ на $\vee$, $-$ на $\neg$. Два множества равны, когда соответствующие им формулы эквивалентны. А для проверки эквивалентности нужно построить таблицу истинности. В этой таблице вычисляются значения формул, соответствующих двум частям равенства, при всех возможных комбинациях значений элементарных подформул. Проанализируем, чему соответствует такая комбинация на языке теории множеств. Если есть система множеств X_i, то задание значений формул $c \in X_i$ соответствует указанию для всех X_i, чему именно, множеству либо его дополнению, принадлежит c. Это приводит к следующим определениям.

Определение 5.1.1. *Составляющие* системы множеств $\{X_1, \ldots, X_n\}$ задаются следующим индуктивным определением.

Базис. Составляющие $\{X_1\}$ суть само X_1 и его дополнение.

Шаг. Если S — составляющая $\{X_1, \ldots, X_{n-1}\}$, то $S \cap X_n$ и $S \cap \bar{X}_n$ — составляющие $\{X_1, \ldots, X_n\}$.

Система множеств *независима*, если все ее составляющие непусты.

Теорема 5.1 (Венн). *Если булево равенство выполнено для некоторой независимой системы множеств, то оно выполнено для любой системы множеств.*

Доказательство. Прежде всего отметим, что любая составляющая S системы $\{X_1, \ldots, X_n\}$ однозначно определяет значения всех формул вида $c \in X_i$. Это легко устанавливается по индукции. Отсюда следует, что две составляющие либо совпадают, либо не пересекаются. Далее, если Y — булева комбинация $\{X_1, \ldots, X_n\}$, S — составляющая этой системы, то S либо подмножество Y, либо не пересекается с Y. Это вытекает из того, что значение характеристического свойства Y полностью определяется значениями всех $c \in X_i$. И наконец, составляющая независимой системы является подмножеством Y тогда и только тогда, когда соответствующее значение в таблице истинности формулы, определяющей Y, есть 1. Значит, в независимой системе любая булева комбинация однозначно разлагается на составляющие (т.е. представляется как объединение составляющих) и это разложение сохраняется и для других систем множеств (конечно, для зависимых систем могут появиться и другие разложения). Поэтому если в независимой системе две булевы комбинации имеют одни и те же составляющие, они будут иметь одинаковые значения и в любой другой системе.

Итак, булево равенство достаточно проверить на одной, но хорошо подобранной системе множеств. Следовательно, правильно нарисованная диаграмма Венна полностью обосновывает тождество.

Диаграммы Венна подводят нас к следующему фундаментальному вопросу. В них нет предложений, нет правил вывода, не видно умозаключений. Так что же такое доказательство с математической точки зрения? Ответом на это может быть следующая характеризация:

> Доказательство — конструкция, синтаксическая правильность которой гарантирует семантическую. (5.2)

Не известно ни одного случая, когда такое описание отказало бы.[10] И за-

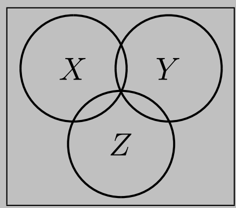
[10] С точки зрения любой науки, кроме математики, это не просто характеристика, а полноправное определение. Но в математике само понятие определения превращено в термин и, соответственно, несколько подменено (см. главу 12).

одно данная формулировка показывает, насколько далеко нынешним программам до доказательств: в программе синтаксическая правильность ничего не гарантирует.

В заключение отметим, что множество *всех* подмножеств данного множества X называется его *множеством-степенью* и обозначается 2^X либо $\mathcal{P}\,X$.

Упражнения к §5.1

5.1.1. Независима ли следующая система множеств:



5.1.2. Мы научились проверять на диаграммах булевы равенства. А как с булевыми вложениями (утверждениями формы $\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}$, где $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ — булевы выражения)?

5.1.3. Построить независимые системы из четырех и пяти множеств.

5.1.4. (Для тех, кто хорошо знает геометрию.) Доказать, что нет независимой системы, изображенной четырьмя окружностями на плоскости.

5.1.5. (Для тех, кто очень хорошо знает геометрию.)

1. Сколько независимых множеств может быть изображено шарами в n-мерном пространстве?
2. Докажите, что нет независимой системы пяти выпуклых множеств на плоскости.
3. Сколько независимых множеств может быть изображено выпуклыми областями в n-мерном пространстве?

5.1.6. Проверить булевы тождества:

1. $A \cup B \cup C = (A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A)$;
2. $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$;
3. $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$;
4. $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus B$;
5. $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \setminus C)$;

6. $\overline{(A \cap B \cap C)} = (A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C)$;
7. $(A \triangle (B \triangle C)) = (A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B) \setminus (A \cap C) \setminus (B \cap C)$;
8. $(A \triangle B) \cup (B \triangle C) \cup (C \triangle A) = (A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C)$;
9. $(A \setminus B) \cup (B \setminus C) = (A \setminus C) \cup (C \setminus B)$;
10. $(A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A) = (A \cup (B \cup C))$;
11. $(\bar{A} \triangle \bar{B}) \cup (\bar{B} \triangle \bar{C}) \cup (\bar{C} \triangle \bar{A}) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \cap (B \cup C)$;
12. $((A \setminus B) \setminus C) \cup ((B \setminus C) \setminus A) \cup ((C \setminus A) \setminus B) = (A \cup B \cup C) \setminus ((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C))$;
13. $(A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus D) \cup (D \setminus A) = (A \cup B \cup C \cup D) \setminus (A \cap B \cap C \cap D)$;
14. $(A \triangle B) \triangle (C \triangle D) = (A \triangle D) \triangle (C \triangle B)$;
15. $(A \setminus B \setminus C) \cup (B \setminus C \setminus D) \cup (C \setminus D \setminus A) \cup (D \setminus A \setminus B) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (A \cap D) \cup (B \cap C) \cup (B \cap D) \cup (C \cap D)$;
16. $((A \cup B) \triangle (A \cup C)) \triangle (B \cup C) = (A \cap B) \triangle ((A \cap C) \triangle (B \cap C))$;
17. $(A \cap B) \triangle ((A \cap C) \triangle (B \cap C)) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$;
18. $((A \cup B) \triangle (A \cup C)) \triangle (B \cup C) = (A \cup B \cup C) \triangle (A \cap B \cap C)$;

5.1.7. Построить диаграмму Эйлера для следующей совокупности понятий:

$$\{\text{горожане, селяне, рабочие, пенсионеры, безработные}\}.$$

5.1.8. Постройте диаграмму Эйлера для понятий, встречающихся в перечисленных ниже предложениях, в предположении, что все высказанные утверждения истинны. Универс — участники олимпиад по физике, математике и программированию.

Ни один парень не стал призером всех трех олимпиад.

Ни одна девушка не стала призером не менее чем двух олимпиад.

Никто из симпатичных участников не вошел в число призеров ни по математике, ни по программированию.

5.1.9. Аналогично для следующих предложений.

Поэты — хорошие люди.

Все хорошие люди — поэты либо отшельники.

Ни поэты, ни отшельники не могут быть палачами.

Палач — художник тогда и только тогда, когда он — китаец.

Китайцы — хорошие палачи.

Китайские отшельники — поэты.

5.1.10. (Порецкий) Относительно девиц, бывших на некоем бале, известны следующие 14 утверждений:

1. Каждая из девиц была или благовоспитанна, или весела, или молода, или красива;
2. все нетанцующие девицы были некрасивы, каждая из танцующих была или молода, или красива, или благовоспитанна;
3. когда пожилые девицы образовали отдельный кружок, о каждой из оставшихся можно было сказать, что она или красива, или весела, или благовоспитанна;
4. если выделить всех девиц немолодых и некрасивых, то останутся лишь благовоспитанные и веселые девицы;
5. если же выделить всех девиц невеселых, то останутся благовоспитанные, молодые и красивые;
6. таких девиц, которые, будучи молоды и веселы, не обладали бы вдобавок ни красотой, ни благовоспитанностью, на балу не было;
7. между молодыми девицами не было таких, которые, обладая красотой и веселостью, были бы не благовоспитанны;
8. каждая благовоспитанная девица была или молода, или весела, или красива;
9. все девицы, соединявшие красоту с благовоспитанностью, были одни веселы, другие молоды;
10. каждой невеселой девице недоставало или молодости, или красоты, или благовоспитанности;
11. все те веселые девицы, которые, не отличаясь молодостью, обладали благовоспитанностью, были красивы;
12. немолодые девицы были одни не благовоспитанны, другие не веселы, третьи не красивы;
13. между некрасивыми девицами не было таких, которые с благовоспитанностью соединяли бы молодость и веселость;
14. и, наконец, когда уехали все неблаговоспитанные, невеселые, немолодые и некрасивые девицы, на балу девиц более не осталось.

Возможно ли такое? Если возможно, постройте диаграмму Эйлера для девиц бала и выведите из нее отношения между различными их категориями.

5.1.11. Разработайте способ проверки условных тождеств следующего вида:

$$\text{если } X = Y, \text{ то } U = V$$

на диаграммах, подобных диаграммам Эйлера и Венна.

5.2 Кортежи, n-ки, наборы, прямые произведения, прямые суммы

Если бы роль множеств исчерпывалась тем, что они превращают логические операции в математические, это понятие не играло бы столь важную роль в современной математике. Понятия переводят в объекты затем, чтобы использовать их для получения новых объектов. Таким образом, множества служат материалом для построения других множеств.

Первая из операций над множествами, выходящая за рамки булевой алгебры, соединяет понятие множества с понятием *кортежа*, столь же важным для приложений и в обыденной жизни, и в программировании. В программировании и искусственном интеллекте кортежи часто путают с множествами.[11]

Определение 5.2.1. *Кортеж* — конечная последовательность объектов, называемых его ***членами***. Кортеж с членами $a_1, \ldots, a_n$, расположенными в данном порядке, обозначается $[a_1, \ldots, a_n]$. В математической логике принято нумеровать члены кортежа, начиная с нулевого, а в большинстве приложений — начиная с первого[12].

Таким образом, в отличие от множеств, кортеж может содержать и повторяющиеся члены, здесь важны не только сами элементы, но и порядок, в котором они расположены. Итак,

$$[a, b] \neq [b, a], \quad [a, a] \neq [a].$$

Как и в других случаях (в частности, для множеств), принято рассматривать и пустой кортеж, не содержащий членов. Он обозначается

[11] Что служит неисчерпаемым источником ошибок, в том числе и тонких. Особенно коварны такие ошибки в инструментальных системах, когда одно понятие подменяется другим в самом начале, из-за чего возникает множество несообразностей.

[12] Так что не поленитесь выяснить это, если Вам говорят о кортежах!

просто []. Кортеж из одного элемента обозначается $[x]$ и строго различается от самого x. Для кортежей определены следующие стандартные функции: *длина* кортежа x $lh(x)$ — число членов в кортеже. Функция выделения i-той компоненты: $(x)_i$, где $i \leq lh(x)$.[13] Операция *соединения* (либо *конкатенации*) двух кортежей:

$$[a_1, \ \ldots, \ a_n] * [b_1, \ \ldots, \ b_k] = [a_1, \ \ldots, \ a_n, b_1, \ \ldots, \ b_k].$$

Стоит выделить как фундаментальную еще одну операцию, которая отличается от предыдущей по типам данных: присоединение объекта к кортежу. Обычно для нее используют заимствованный из языка ЛИСП идентификатор APPEND:

$$\mathsf{APPEND}([a_1, \ \ldots, \ a_n], a) = [a_1, \ \ldots, \ a_n, a]. \tag{5.3}$$

Множество всех кортежей из элементов множества U обозначается U^∞. В литературе оно часто обозначается также U^*.[14]

Пример 5.2.1. Строки в языках программирования могут рассматриваться как машинное представление кортежа из символов. Как и всегда, при машинном представлении математического понятия накладываются ресурсные ограничения; например, что длина строки не больше 255 символов.

Другое, более адекватное представление кортежа — линейные списки. Они могут быть заданы следующими описаниями языка Паскаль (data — некоторый ранее определенный тип данных):

```
type t=record
        element: data;
        next: ^t
end;
```

Рассмотрим более сложное построение. Кортежи могут строиться из других кортежей и т.п. Такое представление интенсивно используется, в частности, в языке ЛИСП. Хочется иметь универс, включающий все кортежи кортежей ... Чтобы аккуратно его определить, прибегают к следующей конструкции.

Пусть $U_0 = U$. Тогда для всякого i определим $U_{i+1} = U_i \cup U_i^\infty$. Таким образом, U_1 будет множеством всех элементов и кортежей, построенных из элементов, к U_2, соответственно, добавятся кортежи кортежей и элементов и т.д. Теперь определим

$$U^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} U_i \tag{5.4}$$

---

[13] Если счет членов начинают с нуля, то неравенство становится строгим.

[14] Мы используем данное обозначение для более общего множества; см. ниже.

Частный случай кортежей — n-ки, кортежи с фиксированным числом членов. Они обозначаются $(a_1, \ldots, a_n)$. Простейший случай n-ок — пары (a, b). Для n-ок обычно о конкатенации не говорят, применяют лишь проекции.

Операция образования множества всех n-ок из совокупности множеств $X_1, \ldots, X_n$ гораздо более элементарна и фундаментальна, чем операция взятия множества всех кортежей. Она носит название *декартова (прямого) произведения* множеств.

Определение 5.2.2. Прямое произведение n множеств $X_1, \ldots, X_n$ — множество $X_1 \times \cdots \times X_n$ всех n-ок $x_1, \ldots, x_n$, таких, что $x_1 \in X_1, \ldots, x_n \in X_n$.

Стоит указать еще одну условность, отличающую n-ки от кортежей. Очевидно, что $[a, b, c]$, $[[a, b], c]$ и $[a, [b, c]]$ — разные кортежи. Но декартовы произведения $A \times B \times C$, $(A \times B) \times C$, $A \times (B \times C)$, как правило, отождествляются. Итак, на прямое произведение множеств смотрят обычно скорее как на алгебраическую операцию, чем как на то, что задано определением 5.2.2.[15]

Есть еще одна условность. Если принимается ассоциативность прямого произведения и одновременно принимается, что элементарной операцией является построение пары (a, b), то тройка (a, b, c) представляется как $((a, b), c)$, четверка (a, b, c, d) — как $(((a, b), c), d)$ и т. д. Как говорят, *скобки группируются влево.*[16] Если множество $R \subset X_1 \times \cdots \times X_n$ (т. е. его элементы — n-ки), то на R переносятся операции взятия проекции по любому компоненту i от 1 до n.

$$\mathrm{pr}_i\, R = \left\{ x \;\middle|\; \begin{array}{l} x \in X_i \;\& \\ \exists x_1 \ldots \exists x_{i-1}\, \exists x_{i+1} \ldots \exists x_n \\ \qquad (x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in R \end{array} \right\} \tag{5.5}$$

Таким образом, проекция отношения состоит из всех объектов, стоящих на i-том месте в n-ках из данного отношения.

Важный и выделяемый отдельно случай декартова произведения — когда все его компоненты одинаковы. Прямое произведение n сомножителей U называется *декартовой степенью* и обозначается U^n. U^1 отождествляется с U, так что n-ка (x), состоящая из одного элемента, ото-

[15] Да, и математики порою грешат "двоемыслием": пишется одно, имеется в виду другое. А на самом деле корректное определение декартова произведения в том смысле, как это нужно в математике, было дано лишь на языке теории категорий, появившемся в 60-х гг. нашего века. См. параграф 5.7.

[16] Объяснение, почему такой способ чуть-чуть предпочтительнее, дается в комбинаторной логике.

ждествляется с самим x.[17]

n-ки (и даже пары) позволяют выразить еще одну операцию над множествами, полезную, в частности, при интерпретации структур программирования. Это — *прямая сумма.* Всем бы хорошо объединение множеств, да в том случае, если нужно сохранить информацию, от какого из компонент объединения произошло значение, оно годится лишь для непересекающихся множеств. Поэтому еще с начала нашего века начала проскальзывать операция *непересекающегося объединения*, когда два множества сначала искусственным образом делали различными, а уже затем объединяли.

Определение 5.2.3. Прямая сумма n множеств $X_1, \ldots, X_n$ — множество $X_1 \oplus \cdots \oplus X_n$ всех пар (i, x), таких, что $x \in X_i$.

Другими словами,

$$X_1 \oplus \cdots \oplus X_n = \{(i, x) \mid 1 \leq i \leq n \;\&\; x \in X_i\}. \tag{5.6}$$

Итак, вместе с каждым элементом прямой суммы хранится номер компонента, от которого он произошел. Это дает возможность определять отображения прямой суммы путем разбора случаев, какое из X_i соответствует данному компоненту, и применения отображения для соответствующего X_i, и обратно, определять по любому отображению прямой суммы, что же оно делает на каждом из X_i. Если для прямого произведения определены проекции, то для прямой суммы — *стандартные вложения* in_i каждого из ее членов в данную сумму. Если подмножества прямого произведения можно спроектировать по каждому компоненту, то подмножества прямой суммы можно разбить на непересекающееся объединение подмножеств компонент.

Далее, если задано отображение каждого из X_i, то можно определить отображение прямого произведения, просто применяя частные отображения ко всем компонентам элемента и собирая получившиеся результаты в n-ку. И наоборот, если задано отображение, результатами которого служат элементы прямого произведения, то, применив проекции, можно получить n отображений из того же множества определения в каждое из X_i. А имея n таких отображений, можно задать отображение в прямую сумму.

[17]Сам Декарт сформулировал первые примеры произведения, представив плоскость как декартово произведение двух прямых, а пространство — трех. Более общих понятий у него не было, хотя он представлял изобретенный им метод координат как средство решать все задачи. Так что скорее имя Декарта надо было бы присвоить не почтенному математическому понятию, а целой науке — искусственному интеллекту, воспринявшему метод Декарта в том отношении, что каждое новое представление данных рекламируется как универсальный метод решать все задачи.

В программировании концепция прямого произведения породила структуру данных `запись` (`record` в Паскале.) Прямая сумма породила записи с вариантами. А запись с вариантами порождает соответствующий ей оператор выбора `case`, разбирающий случаи в соответствии с возможными вариантами и, таким образом, соединяющий несколько вариантов действий в один оператор.

Прямые суммы также считаются ассоциативными.

Другие операции над множествами описаны, например, в книге [18].

Напомним еще одно из базовых понятий прикладной математики, практически игнорируемое в теоретической. Это — *набор* (или *мультимножество*). Набор отличается от множества тем, что в нем могут присутствовать несколько экземпляров одного и того же элемента, а от кортежа тем, что в нем несуществен порядок элементов. Два набора равны, если любой элемент входит в них в одинаковом числе экземпляров. Естественно, что порядок элементов в наборе не имеет значения. Набор обозначается $\lfloor a_1, \ \ldots \ , a_n \rfloor$, но эта запись не столь общеупотребительна, как для множеств и кортежей. Порою набор будет обозначаться просто $a_1, \ \ldots \ , a_n$, если это явно оговорено в контексте.[18]

Операция объединения распадается для наборов на две: аналог теоретико-множественного объединения, когда число экземпляров элемента в объединенном наборе равно максимуму их числа в исходных наборах, и *соединения* $\oplus$, когда число экземпляров равно сумме чисел в исходных наборах. Очевидно, что соединение X с X уже не есть X. Для наборов

$$\lfloor a, b \rfloor = \lfloor b, a \rfloor, \quad \lfloor a, a \rfloor \neq \lfloor a \rfloor.$$

И, наконец, промежуточным между множеством, кортежем и набором служит понятие именованного множества. В нем каждый элемент имеет собственное имя, и нет двух элементов с одинаковыми именами.

Упражнения к §5.2

5.2.1. Пусть S — трехместное отношение между студентами, университетами, в которых они учатся, и городами, где эти университеты находятся. Как Вы выразите его проекцию по третьему компоненту?

5.2.2. Докажите, что имеется взаимно-однозначное отображение $A \times B \times C$ на $A \times (B \times C)$, сохраняющее pr_1 и переводящее $\mathrm{pr}_2(x)$ в $\mathrm{pr}_1(\mathrm{pr}_2(x))$, а $\mathrm{pr}_3(x)$ в $\mathrm{pr}_2(\mathrm{pr}_2(x))$.

---

[18] Во всяком случае, кортежи и множества так не обозначаются.

5.2.3. Сравнив определение декартовой степени и множества всех кортежей, объясните, почему множество всех кортежей получило обозначение U^∞.

5.2.4. Для кортежей и множеств одноэлементные структуры строго отличаются от самих объектов; для n-ок они отождествляются с объектами. А как для наборов? Обоснуйте свое мнение.

5.2.5. Можно ли выразить через наши фундаментальные операции над кортежами операцию $\lambda x\,.[x]$, переводящую каждое x в соответствующий одноэлементный кортеж.

5.2.6. Часто в математических определениях используют понятие "неупорядоченной пары." Компоненты неупорядоченной пары не различаются по месту, так что $(a, b) = (b, a)$. Определите это понятие через одно из имеющихся у нас.

5.2.7. Определите именованные множества через множества пар.

5.2.8. Верно ли для кортежей $a * b = b * a$? Если да, докажите, если нет, приведите опровергающий пример.[19]

5.2.9. Верно ли для наборов $A \oplus B = B \oplus A$?

5.2.10. Определите операцию пересечения наборов.

5.2.11. Что могло бы играть роль универса для наборов и как определить дополнение?

5.2.12. Пусть задано отображение $A \times B$ в C. Всегда ли из него можно получить пару отображений: из A в C и из B в C?

5.2.13. Верно ли, что $\mathrm{pr}_1(X \cup Y) = \mathrm{pr}_1 X \cup \mathrm{pr}_1 Y$?

5.2.14. Верно ли, что $\mathrm{pr}_1(X \cap Y) = \mathrm{pr}_1 X \cap \mathrm{pr}_1 Y$?[20]

5.2.15. Студент Интеллектуалов определил неупорядоченное произведение n множеств $X_1, \ldots, X_n$ как множество всех n-членных наборов,

[19] Как говорилось во Введении, мы часто ставим задачи в форме "Верно ли?" Такая постановка предполагает не меньшую, чем здесь, строгость и обоснованность ответа: мы математики!

[20] Осторожнее! При ответе на одну из двух последних задач ошибся знаменитый французский математик А. Пуанкаре.

имеющих по одному члену из каждого множества. Что Вы можете сказать по поводу данного определения?[21]

5.2.16. Аргументируйте, можно ли принимать коммутативность прямого произведения или прямой суммы?

5.3 Отношения

Среди прямых произведений особенно важную роль играют произведения двух множеств, и соответственно, среди n-ок — пары.

Определение 5.3.1. Подмножество R прямого произведения $X \times Y$ называется *отношением (соответствием) между* X и Y. $R \subset X \times X$ называется *отношением (соответствием) на* X.

Два термина, приведенных в данном определении, соответствуют двум взглядам на множество пар. В случае, когда мы говорим про отношение, нас интересуют взаимосвязи между $x \in X$ и $y \in Y$. Если мы говорим про соответствие, то в некотором смысле мы рассматриваем R как описание возможностей преобразовать x в y.

Третий взгляд на множество пар полезен при построении диаграмм, подобных диаграммам Эйлера и Венна. Здесь каждый из сомножителей изображается отрезком, их прямое произведение — прямоугольником, а отношение — подмножеством квадрата. Такое изображение часто называют *графиком* отношения.

Пример 5.3.1. Картинка на рис. 5.4 показывает график отношения “$x - y$ — целое число” на множестве $[0, 5]$.

Определение 5.3.2. *Образ* элемента x при соответствии R — множество всех таких y, что $(x, y) \in R$.

Прообраз элемента y при соответствии R — множество всех таких x, что $(x, y) \in R$. Образ x при соответствии R обычно обозначается через $R\langle x\rangle$

Образ (прообраз) множества $X_1 \subset X$ ($Y_1 \subset Y$) — объединение образов (прообразов) его элементов. Образ X при соответствии R также обычно обозначается через $R\langle X\rangle$. Как говорят, конкретный смысл операции здесь устанавливается по контексту.[22]

---

[21] Даже если Вы считаете, что опровергли данное определение или поставили его под серьезное сомнение, приведите условия, при которых оно оказывается правильным.

[22] Ситуация, когда один и тот же знак операции применяется к выражениям разных типов и по существу означает разные вещи, на самом деле обычна в математике. Например, знак $+$ применяется для сложения и натуральных, и целых, и рациональных

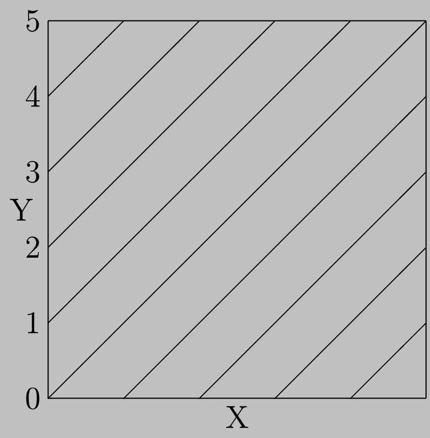


Рис. 5.4: $x - y$ — целое число

R определено на x, если образ x непуст.

R не определено на x, если образ x пуст.

Рассмотрим операции над отношениями. Конечно же, поскольку отношения являются множествами, над ними можно производить обычные булевы операции, поскольку они — подмножества прямого произведения, можно находить их проекции. Но есть и специфические для бинарных отношений операции.

Первая из них — нахождение обратного отношения. Она сопоставляет отношению R между A и B отношение R^{-1} (часто обозначаемое также $\breve{R}$) между B и A, определяемое следующим образом:

$$R^{-1} = \{(y, x) | x \in A \,\&\, y \in B \,\&\, (x, y) \in R\}. \tag{5.7}$$

Например, для изображенного на рис. 5.4 отношения обратным является оно само, для отношения $<$ — отношение $>$ и т. п.

Интересны два подкласса отношений между X и X (обычно называемых отношениями *на* X).

чисел, и действительных, и комплексных, и матриц, и еще математик знает, чего. В программировании дела обстоят точно так же. Такое ‘сверхиспользование’ символа называется *перегрузкой*. С примером, как корректно решать проблемы перегрузки, мы познакомимся далее. Но не надейтесь, что все, использующие перегрузку, заботятся о ее корректности. Чаще всего все ограничивается благими пожеланиями, даже если об этой проблеме задумываются (например, в языке Ada, созданном по заказу Министерства Обороны США, по поводу перегрузки было высказано требование, чтобы алгебраические свойства операций, обозначающихся одним и тем же значком, совпадали и на одинаковых аргументах они давали одинаковые результаты, но никаких средств проверки этого условия дано не было.)

Определение 5.3.3. *Симметричным* называется такое R, что $R^{-1} = R$. *Антисимметричным* — такое R, что $R^{-1} \cap R = \emptyset$.

Понятия симметричности и антисимметричности выражаются на языке логики:

$$\forall x \, \forall y((x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R),$$

$$\forall x \, \forall y((x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \notin R).$$

Важным частными отношением на X является *диагональ*, или *единичное соответствие,* или *тождественное отображение*[23]:

$$\mathrm{id}_X = \{(x, x) | x \in X\} = \{(x, y) | x = y\}.$$

Эта диагональ является графиком функции $\lambda x.x$, перерабатывающей каждое x само в себя.

Определение 5.3.4. *Рефлексивным* называется отношение, содержащее диагональ. *Антирефлексивным* называется отношение, не пересекающееся с диагональю.

Понятия рефлексивности и антирефлексивности также выразимы на логическом языке:

$$\forall x (x, x) \in R,$$

$$\forall x (x, x) \notin R.$$

Определение 5.3.5. Композиция отношений $R \subset X \times Y$, $S \subset Y \times Z$ — отношение $R \circ S \subset X \times Z$, такое, что

$$R \circ S = \{(x, z) | x \in X \;\&\; z \in Z \;\&\; \exists y (y \in Y \;\&\; (x, y) \in R \;\&\; (y, z) \in S)\}.$$

Итак, при композиции мы связываем x и z посредством такого y, что y соответствует x согласно R, и y соответствует z согласно S. Очевидно, что если отношения имеют вид

$$\begin{aligned} R &= \{(x, y) | x \in X \;\&\; y \in Y \;\&\; y = f(x)\}, \\ S &= \{(x, y) | x \in Y \;\&\; y \in Z \;\&\; y = g(x)\}, \end{aligned} \tag{5.8}$$

[23] Обилие имен у математического объекта, как правило, означает, что он полезен для самых разных целей.

то их композиция представляется как

$$R \circ S = \{(x, y) \mid x \in X \ \& \ y \in Z \ \& \ y = g(f(x))\}. \tag{5.9}$$

Приведем некоторые важные алгебраические свойства композиции отношений.

$$R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T \quad \text{(ассоциативность)} \tag{5.10}$$

$$R \circ \mathrm{id}_Y = R \quad \mathrm{id}_X \circ R = R \quad \mathrm{id} \text{ — единица} \tag{5.11}$$

$$(R \circ S)^{-1} = (S^{-1} \circ R^{-1}) \quad \text{обратный к композиции} \tag{5.12}$$

Но вот $R \circ R^{-1} = \mathrm{id}_X$ выполнено отнюдь не всегда.

И последние из “джентльменского набора” классов отношений — транзитивные и антитранзитивные отношения. Чисто формально легко написать определяющие их логические условия, но и в данном случае лучше связать эти понятия с операцией композиции над отношениями на X.

Определение 5.3.6. Квадрат отношения $R \subset X \times X$ — отношение $R^2 = R \circ R$. Соответственно определяется[24] R^n:

$$R^n = \underbrace{R \circ \cdots \circ R}_{n \text{ раз}}$$

Отношение называется *транзитивным*, если $R^2 \subset R$. Отношение *антитранзитивно*, если $R^2 \cap R = \emptyset$. Понятия транзитивности и антитранзитивности имеют выражение на логическом языке. Мы приведем его для транзитивности, а для антитранзитивности выразите сами.

$$\forall x \, \forall y \, \forall z((x, y) \in R \ \& \ (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R). \tag{5.13}$$

С транзитивностью связано важное понятие — *транзитивное замыкание* отношения.[25] Дадим два определения транзитивного замыкания и

[24] Не путайте данную степень с декартовой! Забавнее всего, что поскольку отношения также множества, можно рассматривать и декартову степень R, но в связи с тем, что в чистой математике она практически никогда не нужна, математики допускают т.н. “вольность речи,” а вот безумные программисты иногда вынуждены использовать структуры данных, соответствующие декартову произведению отношений.

[25] Схема, примененная при определении транзитивного замыкания — на самом деле общая схема, используемая при превращении структур, не обладающих замкнутостью относительно некоторой операции, в структуры, замкнутые относительно нее. Так, например, двоично-рациональные числа (числа вида $\frac{n}{2^m}$) получаются замыканием целых чисел относительно операции деления на 2; комплексные числа — замыканием действительных относительно операции нахождения корней любого алгебраического уравнения вида

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \ \cdots \ + a_0 = 0.$$

докажем их эквивалентность.

Определение 5.3.7. 1. X — наименьшее множество, обладающее свойством A, если $A(X)$ и

$$\forall Y(A(Y) \Rightarrow Y \subset X).$$

2. Транзитивное замыкание отношения $R \subset X \times X$ — наименьшее отношение $R^\infty \subset X \times X$, такое, что R^∞ содержит все элементы из R и R^∞ транзитивно.

3. Транзитивное замыкание отношения $R \subset X \times X$ —

$$R^\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$$

4. Транзитивное замыкание отношения $R \subset X \times X$ — пересечение всех транзитивных отношений, включающих R:

$$\bigcap_{\substack{R \subseteq X, \\ X \text{ транзитивно}}} X \tag{5.14}$$

Докажем, что три определения R^∞ эквивалентны. В самом деле, $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ содержит R и транзитивно, поскольку если $(x,y) \in R^n$, $(y,z) \in R^m$, то $(x,z) \in R^{n+m}$. Любое транзитивное отношение, содержащее R, должно содержать и все R^n (это легко доказывается по индукции). Значит, $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ — наименьшее транзитивное отношение, содержащее R, что и требовалось доказать. И, наконец, пересечение семейства транзитивных отношений само транзитивно, а семейство из (5.14) включает, в частности, и минимальное из транзитивных расширений R.[26]

[26]Обратите внимание!! В третьем пункте мы определили транзитивное замыкание R через класс, содержащий само это транзитивное замыкание. Более того, если из этого класса транзитивное замыкание выбросить, порою пересечение оставшихся множеств уже будет побольше. Так что в последнем случае R^∞ определялось само через себя! Такая ситуация издревле рассматривалась как логическая ошибка “Порочный круг в определении”. Тем не менее в математике подобные определения широко используются; мы, правда, их стараемся избегать. Практически всегда их можно заменить более конструктивными определениями типа использованных во втором пункте, но здесь порою натуральных чисел не хватает для нумерации шагов построения.

Если отношение транзитивно и антирефлексивно, оно называется *отношением (частичного) порядка* и обозначается символом $<$ либо похожими на него (например, $\succ$). Если отношение транзитивно и рефлексивно, то оно называется *отношением предпорядка* и обозначается символом, похожим на $\leqslant$ (например, $\succcurlyeq$). Частичный порядок называется *линейным*, если выполнено условие

$$\forall x\, \forall y (x \succ y \vee x = y \vee y \succ x).$$

Множество с заданным на нем отношением частичного порядка называется *частично упорядоченным множеством (чум).*[27] Множество с отношением предпорядка — *пум.* Множество с отношением линейного порядка — *линейно упорядоченное множество (лум).*

Предпорядок называется *строгим предпорядком* (или *нестрогим порядком*), если выполнено

$$\forall x\, \forall y (x \succcurlyeq y \,\&\, y \succcurlyeq x \Rightarrow x = y).$$

Пример 5.3.2. Отношение "быть начальником" является отношением частичного порядка на множестве чиновников.[28]

Отношение "Быть старше по званию" — отношение частичного порядка на множестве военных. Отношение "Не быть старше по званию" — отношение предпорядка на этом же множестве.[29]

Для изображения частично-упорядоченных множеств имеется графический аппарат, известный под названием *диаграммы Гессе.* Пример диаграммы Гессе см. на рис. 5.5. На этой диаграмме, как видите, изображаются не все пары из отношения порядка. Элемент y больше элемента x, если есть путь, составленный из идущих вверх дуг диаграммы, ведущий из x в y. Поэтому, в частности, нет нужды проводить дугу, например, от 0 к 1.

Введем несколько важных понятий, касающихся упорядоченных множеств.

---

[27]Симпатичное русское сокращение *чум* введено новосибирской школой. Московская математическая школа его не признает, видимо потому, что в Европе ни чумов, ни чумы нет.

[28]Хотя фактически частенько чиновники занимают позицию "Начальник моего начальника — не мой начальник," и соответственно, приказания Президента не исполняются чаще, чем повеления непосредственного шефа, но формально такое поведение противоречит законам и инструкциям.

[29]То, что здесь старшинство "перепутано" — младшие по званию считаются больше старших — частный случай того математического факта, что R — отношение порядка $\underline{\text{ттт}}$ R^{-1} — отношение порядка. Этот порядок называется *обратным* к R.

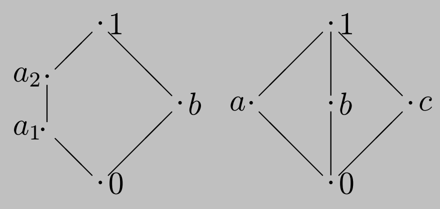


Рис. 5.5: Диаграммы Гессе двух важных пятиэлементных множеств

Определение 5.3.8. Элемент x_0 чума $\mathcal{X}$ называется *наибольшим*, если

$$\forall y (y \in \mathcal{X} \;\&\; y \neq x_0 \Rightarrow x_0 \succ y).$$

Таким образом, он больше всех остальных. *Максимальный* элемент не меньше никакого другого.

$$\forall y (y \in \mathcal{X} \Rightarrow \neg y \succ x_0).$$

Соответственно определяются *минимальный* и *наименьший* элементы. Элемент a называется *верхней гранью* множества $Y \subseteq \mathcal{X}$ (обозначается $\sup Y$ либо $\bigcup Y$), если

$$\begin{gathered}\forall x (x \in Y \Rightarrow x \prec a \vee x = a) \;\& \\ \forall x (x \in \mathcal{X} \;\&\; x \prec a \Rightarrow \exists y (y \in Y \;\&\; x \prec y \;\&\; (y \prec a \vee y = a))).\end{gathered}$$

Соответственно определяется нижняя грань ($\inf Y$, $\bigcap Y$). Верхняя (нижняя) грань двух элементов обозначается $a \cup b$ ($a \cap b$). Чум, в котором у каждых двух элементов имеется верхняя и нижняя грань, существуют наибольший и наименьший элементы, называется *структура*. Структура называется *полной*, если верхние и нижние грани существуют у любого подмножества элементов.

Определение 5.3.9. Пусть $\mathcal{X}$ — чум. Тогда на множестве $\mathcal{X}^\infty$ кортежей элементов из $\mathcal{X}$ можно ввести отношение частичного порядка, называемое *лексикографическим упорядочением*.

$$[x_0, \ldots, x_n] \succ [y_0, \ldots, y_k] \triangleq \exists i (\forall j (j < i \Rightarrow x_j = y_j) \;\&\; x_i \succ y_i).$$

Например, лексикографическое упорядочение кортежей букв используется при построении словарей.

Упражнения к §5.3

5.3.1. В книге Н. Бурбаки "Теория множеств," в которой понятие пары наряду с понятием множества и принадлежности рассматривается как исходное, для пар задана следующая аксиома (переписанная в наших обозначениях):

$$\forall x \forall y \forall u \forall v((x, y) = (u, v) \Rightarrow x = u \,\&\, y = v).$$

Почему не задана как аксиома и обратная импликация?

Покажите, что для выполнения аксиомы Н. Бурбаки достаточно определить пару (x, y) как двухэлементное множество $\{x, \{x, y\}\}$.

Объясните, можно ли определять пару, скажем, так:

$$(x, y) \stackrel{\triangle}{=} \{\{x, 0\}, \{y, 1\}\}.$$

5.3.2. Почему в формулах 5.8, 5.9 повсюду используются одни и те же переменные x, y, хотя множеств целых три: X, Y, Z?

5.3.3. Проверьте следующие тождества:

1. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$
2. $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

Если некоторые из них не всегда выполнены, в какую из сторон имеет место вложение?

5.3.4. Верно ли, что

1. $(R_1 \cup R_2) \circ S = (R_1 \circ S) \cup (R_2 \circ S)$
2. $(R_1 \cap R_2) \circ S = (R_1 \circ S) \cap (R_2 \circ S)$

5.3.5. Когда $(x, x) \in R \circ R^{-1}$? Выведите из Вашего условия, когда $\mathrm{id}_X \subseteq R \circ R^{-1}$?

5.3.6. Каковы обратные отношения к следующим отношениям:

1. Быть отцом.
2. Быть мужем.
3. Быть начальником.
4. $y = a \cdot x$.

5. Быть братом.
6. Быть братом или сестрой.
7. Любить.
8. Ненавидеть.
9. Воевать.

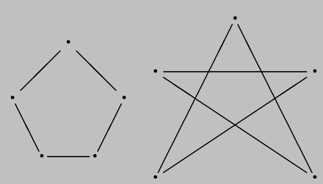
5.3.7. Построить композиции следующих отношений (‘Быть A’ означает ‘x является A для y’. Математические формулы рассматриваются на множестве действительных чисел):

а)	Быть родителем	Быть отцом
б)	Быть родителем	Быть сестрой
в)	Быть соседом	Быть другом
г)	Быть другом	Быть соседом
д)	Быть мужем	Быть отцом
е)	$x > y$	$y > x$
ж)	$x^2 = y$	$y^2 = x$
з)	$x = e^y$	$x = \sin y$

5.3.8. Отношение порядка, для которого выполнено $R \circ R = R$, называют *плотным*. Почему? Переведите данное условие на логический язык.

5.3.9. Докажите, что для любого отношения предпорядка $R \circ R = R$.

5.3.10. Студентка Примерная нарисовала две красивых диаграммы Гессе:



Какую ошибку содержат эти диаграммы и какую из них можно упростить после исправления ошибки любым способом?

5.3.11. Студент Лыцаренко защитил студентку Примерную, заявив, что это — диаграммы для предупорядоченных множеств. Насколько обоснована его защита?

5.3.12. Определение 5.3.9 содержит неточность. Найдите ее и исправьте.

5.3.13. Не ошибся ли автор в определении максимального элемента, опустив условие $y \neq x_0$? А как для предупорядоченных множеств?

5.3.14. Переведите на формальный язык следующее определение:

> Отношение называется *согласованным*, если два объекта, относящиеся к одному и тому же третьему объекту, относятся между собой.
>
> Не могли бы Вы переформулировать данное предложение на содержательном языке так, чтобы оно, не изменив математического смысла, стало бы легче понимаемым?

5.4 Функции

Уже на картинке 5.4 хорошо видно, почему отношения называют соответствиями. Порою так и напрашивается интерпретация их как частичных многозначных отображений.[30] Зато когда говорят о функциях, то здесь имеется содержательное уточнение, которое всегда работает в математике.

> Функция — правило, позволяющее по каждому элементу области определения однозначно получить элемент области значений.

Итак, каждая функция имеет область определения $\mathrm{Dom}\, f$, над которой она работает, и область значений $\mathrm{Val}\, f$, в которой должны содержаться полученные результаты. Надо заметить, что отнюдь не всегда функция может выдавать в качестве результата все элементы области значений. Ниже мы разберем это подробнее.

Соответствие представляет *график* полноправной функции только в том случае, если каждому x из X соответствует единственное y из Y. Например, таково соответствие

$$\{(x, y) \mid x \in \mathbf{R} \,\&\, y \in \mathbf{R} \,\&\, x = y + 1\}.$$

Поэтому соответствия, для которых $\forall x \in X\, \exists 1\, y \in Y (x, y) \in R$, называют *функциональными*. Часто функциональные соответствия отождествляются с функциями, но такое отождествление не всегда правомерно даже в классической математике (в частности, в областях, базирующихся на теории категорий). Другое дело, что любое соответствие формы $R = \{(x, y) | y = f(x)\}$ является функциональным, и в математике очень

[30] Не обольщайтесь этим. Неопределенность и многозначность — глубокие и коварные вещи. Отнюдь не всегда простейшее математическое уточнение понятия частичной многозначной функции как отношения работает. Так что если кто-то говорит о частичных многозначных функциях, уточняйте, что он имеет в виду.

стараются, чтобы по любому функциональному соответствию можно было определить функцию.[31] Если же мы интересуемся вычислимостью либо определимостью, то на первый план решительно выходит первая составляющая понятия функции — наличие правила.

Определение 5.4.1. Функция f представляется в теории множеств как тройка

$$\langle X, Y, R \rangle ,$$

где $R \subset X \times Y$ — функциональное соответствие. X называется *областью определения* f, Y — ее *областью значений*. Область определения обозначается $\mathrm{Dom}\, f$, а область значений — $\mathrm{Val}\, f$.

Прошу обратить внимание на различие области значений и образа функции. $f \langle X \rangle \subset Y$, но равенства обычно нет.

Композиция функций в последнее время в математике определяется в соответствии с композицией отношений:

$$(f \circ g)(x) = g(f(x)),$$

а чтобы при композиции функции не переставлялись, и применение функций во многих местах (в частности, в работах по алгебре) стали писать "наоборот": xf.[32]

Определение 5.4.2. (Важные классы функций)

1. *Инъекция* (однозначное отображение) — такая функция f, что

$$\forall x \in X\, \forall y \in X (f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y).$$

2. *Сюръекция* (отображение на) —

$$\forall y \in Y\, \exists x \in X\, f(x) = y.$$

3. *Биекция* (взаимно-однозначное отображение) — функция, у которой существует обратная, т. е. функция, графиком которой служит отношение, обратное к графику f.

[31] Иногда ради этого даже логику изменяют; в главе, посвященной конструктивным логикам, мы с этим немного разберемся.

[32] Неразбериха с порядком функций при композиции длилась несколько десятилетий. "Прямая" школа считала в точности наоборот: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, и до сих пор во многих работах по математическому анализу и дифференциальным уравнениям придерживаются такого определения. В принципе, здесь что в лоб, что по лбу, но не запутывайтесь!

Таким образом, для сюръекций $f\langle \mathrm{Dom}\, f\rangle = \mathrm{Val}\, f$. Для инъекций множество $f^{-1}\langle y\rangle$ всегда не более чем одноэлементно (здесь f^{-1} — отношение, обратное к f, оно не обязательно является функцией, и поэтому использовано обозначение образа, принятое для соответствий). Еще две важных характеризации инъекций и сюръекций на языке композиций заслуживают отдельного рассмотрения и доказательства.

Предложение 5.4.1. (Композиции с инъекциями и сюръекциями)

1. *Композиция двух инъекций — инъекция.*

2. *Композиция двух сюръекций — сюръекция.*

3. *$f : X \to Y$ инъекция тогда и только тогда, когда для любых двух отображений g_1, g_2 из Z в X*

$$g_1 \circ f = g_2 \circ f \Leftrightarrow g_1 = g_2.$$

4. *$f : X \to Y$ сюръекция тогда и только тогда, когда для любых двух отображений g_1, g_2 из Y в Z*

$$f \circ g_1 = f \circ g_2 \Leftrightarrow g_1 = g_2.$$

5. *$f : X \to Y$ инъекция тогда и только тогда, когда существует функция $g : Y \to X$ (называемая* накрытием, *ассоциированным с f), такая, что*

$$\forall x(x \in X \Rightarrow g(f(x)) = x).$$

(Другими словами, $f \circ g = \mathrm{id}_X$.)

6. *$f : X \to Y$ сюръекция тогда и только тогда, когда существует функция $g : Y \to X$ (называемая* ретракцией, *ассоциированной с f), такая, что*

$$\forall x(x \in Y \Rightarrow f(g(x)) = x).$$

(Другими словами, $g \circ f = \mathrm{id}_Y$.)

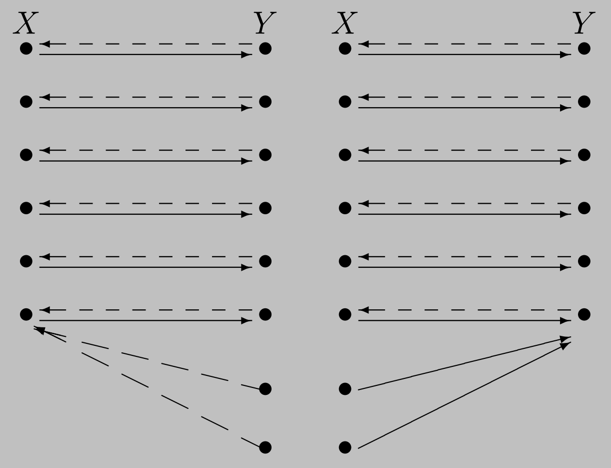


Рис. 5.6: Инъекция и накрытие, сюръекция и ретракция

Доказательство. Пункты 1, 2 и 4 остаются в качестве упражнений читателю.

Доказательство пункта 3. Пусть f — инъекция из X в Y. Пусть $g_1 \circ f = g_2 \circ f$. Тогда для произвольного x $f(g_1(x)) = f(g_2(x))$. Но по инъективности f, отсюда следует $g_1(x) = g_2(x)$. Поскольку вывод сделан для произвольного x, $g_1 = g_2$, что и требовалось установить. Теперь обратно. Пусть для всех g_1, g_2, таких, что $g_1 \circ f = g_2 \circ f$, выполнено равенство $g_1 = g_2$. Возьмем произвольные x_1, x_2. Пусть $f(x_1) = f(x_2)$. Теперь возьмем одноэлементное множество $Z = \{z_0\}$ и построим два отображения из Z в X, такие, что $g_1(z_0) = x_1$, $g_2(z_0) = x_2$. Поскольку $f(g_1(z_0)) = f(g_2(z_0))$, а других значений аргумента нет, $g_1 \circ f = g_2 \circ f$. Значит, в частности, $g_1(z_0) = g_2(z_0)$, и $x_1 = x_2$.[33]

Доказательство пункта 5. Пусть у f есть ассоциированное с ним накрытие g. Покажем, что тогда f — инъекция. В самом деле, возьмем произвольные x_1, x_2, такие, что $f(x_1) = f(x_2)$. Тогда $g(f(x_1)) = x_1 = g(f(x_2)) = x_2$. Теперь в обратную сторону. Пусть f — инъекция. Построим накрытие g следующим образом: если $y \in f\,\langle \mathrm{Dom}\, f\rangle$, то имеется единственное x, такое, что $f(x) = y$. Оно и будет значением функции g. Если же $y \notin f\,\langle \mathrm{Dom}\, f\rangle$, то такого x вообще нет, и можно задать значение

[33]Прошу Вас обратить внимание, что в этом доказательстве нет рассуждений от противного. Поэтому данное свойство инъекций весьма устойчиво при смене логики.

g равным произвольно выбранному элементу x_0.[34]

Доказательство пункта 6. Поскольку f — сюръекция, для каждого $y \in \mathrm{Val}\, f$ множество $R^{-1}\langle y\rangle$ непусто. Сопоставим каждому y какой-либо из элементов $R^{-1}\langle y\rangle$. Полученная функция и будет искомой ретракцией.[35]

Обратная импликация очевидна, поскольку, чтобы вернуться к аргументу, нужно его порою выдавать в качестве значения, что и является определением сюръекции. □

Предложение 5.4.2. *Функция является биекцией тогда и только тогда, когда она является и инъекцией, и сюръекцией.*

Доказательство. Пусть отношение R — график функции f. Рассмотрим отношение R^{-1}. Поскольку f — сюръекция, для каждого $x \in Y$ существует $y \in X$, $(x, y) \in R^{-1}$. Поскольку f — инъекция, из $(x, y_1) \in R^{-1}$, $(x, y_2) \in R^{-1}$ следует $y_1 = y_2$. Таким образом, R^{-1} — функциональное отношение.

□

Обратная функция, если она существует, обозначается f^{-1}.

Предложение 5.4.3. $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_{\mathrm{Dom}\, f}$, $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_{\mathrm{Val}\, f}$.

[34] Здесь есть тонкость! Прямое и обратное рассуждения принципиально различаются по логическому статусу. Если прямое рассуждение весьма устойчиво, то обратное содержит внешне безобидный шаг, требующий анализа бесконечно большого объема информации: проверка, принадлежит ли y $f\langle \mathrm{Dom}\, f\rangle$. Поэтому вторая часть данной эквивалентности легко рушится при замене логики и даже просто при отходе от теории множеств в качестве основания математики.

[35] А здесь ситуация еще хуже. Подумайте, а *как* мы выберем по элементу из каждого $R^{-1}\langle y\rangle$? То, что такой выбор можно осуществить, на самом деле эквивалентно одной из аксиом современной теории множеств, причем аксиоме, чаще всего берущейся под сомнение: аксиоме выбора. Она гласит, что по любому всюду определенному соответствию можно построить вложенное в него функциональное. Из нее следуют многие приятные теоремы традиционной математики и некоторые неприятные, например, теорема Куратовского о том, что яблоко можно разрезать на четыре части таким образом, что из них можно сложить два таких же яблока. В науке всегда так: сильный принцип, полезный в одних отношениях, вреден и сбивает с толку в других областях. *Ни один полезный научный результат не универсален*, потому что наука — отрасль человеческого знания, а человек несовершенен, и поэтому его знания также с необходимостью несовершенны. Так что если кто-то уверяет Вас, что его метод всегда хорош, то это либо жулик, либо человек, слишком увлекшийся своей идеей, настолько, что она уже находится у него на стадии перехода из ценной в сверхценную (‘ценная’ здесь — обычная неформальная оценка, ‘сверхценная’ — термин из психиатрии, применяемый, когда человек зацикливается на одной идее и не видит больше ничего вокруг). Надо сказать, что нынешняя система организации науки, внедрившая в нее рекламу, которая всегда была противопоказана науке, поощряет такое жульничество, будьте осторожнее и осмотрительнее!

Доказательство оставляется в качестве упражнения.

Определение 5.4.3. Множества X и Y называются *равномощными*, если имеется биекция X на Y. Мощность множества X не больше мощности множества Y ($X \leqslant Y$), если имеется инъекция из X в Y. Множество Y покрывает множество X ($X \succcurlyeq Y$), если имеется сюръекция X на Y.

Теорема 5.2. (Кантор, Шредер, Бернштейн) *Если $X \leqslant Y$ и $Y \leqslant X$, то X и Y равномощны.*

Доказательство. Пусть $X \leqslant Y$ и $Y \leqslant X$. Тогда имеются две инъекции: $f : X \to Y$, $g : Y \to X$. Если хоть одна из них является сюръекцией, то эквивалентность установлена. Если ни одна из них не является сюръекцией, то множество $X \setminus g\langle Y\rangle$ непусто. Возьмем произвольный элемент x_0 этого множества. Возьмем отношение

$$R \stackrel{\triangle}{=} \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in X \; \& \; x_2 \in X \; \& \; x_2 = g(f(x_1))\}.$$

Рассмотрим его транзитивное замыкание R^∞. Образ x_0 при этом замыкании либо конечен, либо бесконечен. Рассмотрим эти два случая.

Пусть образ $R^\infty\langle x_0\rangle$ конечен. Тогда он состоит из конечного множества элементов

$$x_0, x_1 \stackrel{\triangle}{=} g(f(x_0)), x_2 \stackrel{\triangle}{=} g(f(x_1)), \;\ldots,\; x_n \stackrel{\triangle}{=} x_{n-1}.$$

$g(f(x_n)) = x_i$ для некоторого $i < n$. Но поскольку $f \circ g$ — инъекция, $i = 0$. В самом деле, если $i \neq 0$, то $i = j+1$, но тогда $x_{j+1} = g(f(x_j)) = g(f(x_n))$, где $x_j \neq x_n$, чего не может быть. Но по предположению $x_0 \in X \setminus g\langle Y\rangle$, и соответственно, нет такого y, что $x_0 = g(y)$.

Значит, остается лишь случай, когда образ x_0 бесконечен. Все элементы этого образа, очевидно, лежат в $g\langle Y\rangle$. Докажем теперь, что образы разных $x \in X \setminus g\langle Y\rangle$ при соответствии R^∞ не пересекаются. Рассуждение аналогично тому, с помощью которого мы опровергали конечность $R^\infty\langle x_0\rangle$. Возьмем произвольные $x, y \in X \setminus g\langle Y\rangle$. Если их образы пересекаются, то некоторые из x_n равны некоторым из y_m. Возьмем наименьшее такое n. Если оно не 0, то $x_{n-1} \neq y_{m-1}$, но $g(f(x_{n-1})) = g(f(y_{m-1}))$.

Теперь построим, пользуясь выше установленным разбиением X, биекцию Y на X. Для этого видоизменим функцию g. Положим

$$g_1(y) = \begin{cases} g(y) & \neg\,\exists x(g(y) \in R^\infty\langle x\rangle \; \& \; x \in X \setminus g\langle Y\rangle) \\ x_{n-1} & \exists x\,\exists n(x \in X \setminus g\langle Y\rangle \; \& \; g(y) \in R^\infty\langle x\rangle \; \& \; g(y) = x_n) \end{cases}$$

Итак, все последовательности x_n сдвигаются на один элемент, и в результате g_1, оставаясь инъекцией, становится и сюръекцией. $\square$

Понятие равномощности дает возможность расклассифицировать множества по отобразимости друг на друга[36]

Прежде всего конечные множества равномощны тогда и только тогда, когда у них одинаковое количество элементов. Это можно было бы "доказать," но уже с конца XIX века известно, что на самом деле лишь понятие равномощности дает возможность корректно определить конечное множество в теории множеств.

Определение 5.4.4. Множество X называется *конечным*, если оно равномощно множеству

$$\{x \mid x \in \mathbb{N} \mathbin{\&} x < n\}$$

для некоторого $n \in \mathbb{N}$.

Количество элементов в конечном множестве будем обозначать $\mathfrak{N}\, X$.

В упражнениях разбираются другие попытки определить конечные множества.

Соответственно, бесконечному множеству чаще всего дают в математике негативное определение: бесконечное множество — множество, не являющееся конечным. Нетривиальное определение бесконечного множества дал Рассел:

Определение 5.4.5. Бесконечное множество — такое множество X, что существует взаимно-однозначное отображение X на какое-либо подмножество $Y \subset X \mathbin{\&} Y \neq X$.

Таким образом, бесконечное множество равномощно своему подмножеству.[37] Безусловно, математик обязан обосновать, что любое множество либо конечно, либо бесконечно. Самый простой, и одновременно выявляющий некоторые скрытые трудности, путь к этому — через конкретный вид бесконечных множеств: счетные множества.

---

[36]Обычно в книгах по математике пишут, что по числу элементов. Это верно лишь для конечных множеств. Для бесконечных, скорее, это классификация по сложности представления. Далее мы познакомимся подробнее с тем, почему общепринятые представления не верны и в данном случае.

[37]Видимо, первым обратил на это внимание кардинал Николай Кузанский , выдающийся схоласт XV века. Он применил это для обоснования того, что триединство Бога не является логическим противоречием, поскольку Бог — бесконечная сущность (одно из очень немногих корректных применений математики в богословии). Галилей, видимо, независимо заметил, что множество натуральных чисел взаимно-однозначно отображается, в частности, на множество четных чисел, и опубликовал это в математическом тексте. Отсюда Галилей сделал вывод, что нельзя говорить о множестве всех натуральных чисел, поскольку иначе нарушается фундаментальная аксиома Евклида: "Целое больше части." В дальнейшем математики просто отказались от этой аксиомы, заметив, что ее нельзя выразить на математическом языке.

Определение 5.4.6. Счетное множество — множество, равномощное множеству натуральных чисел $\mathbb{N}$.

Предложение 5.4.4. *Если множество содержит счетное подмножество, то оно бесконечно.*

Доказательство. Пусть имеется биекция f множества натуральных чисел на $Y \subset X$. Тогда построим следующее взаимно однозначное отображение φ X на $X \setminus f(0)$. Если $x \notin Y$, то положим $\varphi(x) = x$. Если $x \in Y$, $x \neq f(0)$, то существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $x = f(n+1)$. Тогда положим $\varphi(x) = f(n)$. □

Предложение 5.4.5. *Всякое бесконечное множество содержит счетное подмножество.*

Доказательство. Пусть имеется биекция f множества X на $Y \subset X$, $Y \neq X$. Тогда возьмем какое-либо $x_0 \in X \setminus Y$. $f(x_0) \neq x_0$, обозначим его x_1. Далее, подобно тому, как делалось в теореме Кантора-Бернштейна, положим $x_{n+1} = f(x_n)$, и так же, как в упомянутой теореме, можно показать, что все x_i различны. Множество

$$\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$$

и есть искомое счетное подмножество X. □

Предложение 5.4.6. *Если множество не является конечным, то оно содержит счетное подмножество.*

Доказательство. Рассмотрим следующее отношение между конечными подмножествами X:

$$\mathcal{E} \stackrel{\triangle}{=} \{(Y, Z) \mid Y \subset X \ \& \ Z \subset X \ \& \ Y \subset Z \ \& \ \mathfrak{N}Y + 1 = \mathfrak{N}Z\}.$$

Итак, данное отношение связывает между собою конечные множества, второе из которых содержит один дополнительный элемент вдобавок к элементам первого. Очевидно, что $\mathcal{E}$ не определено на Y тогда и только тогда, когда $Y = X$. Но поскольку по условию X не является конечным, $\mathcal{E}$ всегда определено.

Поэтому начнем с некоторого одноэлементного множества $V_0 \subset X$, и для каждого V_i выберем[38] V_{i+1} как произвольный элемент $\mathcal{E}\langle V_i \rangle$. Очевид-

[38] Здесь опять применяется аксиома выбора; но на самом деле здесь используется более слабая ее форма, вызывающая меньше сомнений, и самое главное, совместимая с аксиомой детерминированности, также естественной, но противоречащей аксиоме выбора. Тех, кто интересуется данным вопросом, можно отослать, например, к книге [15]. См.также § 10.5.1.

но, что $V_i \subset V_j$ при $i < j$, и объединение возрастающей последовательности

$$V \triangleq \bigcup_{i=0}^{\infty} V_i$$

и есть искомое счетное подмножество X. $\square$

Итак, мы показали, что действительно, каждое множество либо конечно, либо бесконечно и что счетные множества являются в некотором смысле минимальными среди бесконечных. Но счетных множеств не так уж мало.

Пример 5.4.1. Множество рациональных чисел счетно. В самом деле, любое рациональное число представимо несократимой дробью n/m, где $m > 0$. Дробей с суммой числителя и знаменателя k — конечное число, поэтому их можно расположить в порядке возрастания n, за ними все дроби с суммой числителя и знаменателя $n + 1$ и так далее.

На самом деле мы дали общий способ, как показать счетность любого множества, элементы которого представимы конечной последовательностью из конечного числа символов.

Мощность множества натуральных чисел часто обозначается $\aleph_0$ ($\aleph$ — первая буква еврейского алфавита, произносящаяся 'алеф'). Простейший пример бесконечного множества, не являющегося счетным, следующий:

Теорема 5.3. *Множество действительных чисел несчетно.*

Доказательство. Пусть имеется некоторое отображение (последовательность) a_n множества $\mathbb{N}$ в действительные числа из отрезка $[0, 1]$. Построим по ней представленное в троичной системе число b, не входящее в данную последовательность, и, более того, такое, что от данного a_n оно отличается уже первыми $n + 1$ членами троичного разложения. a_0 не принадлежит по крайней мере одному из трех отрезков $[0, 1/3]$, $[1/3, 2/3]$, $[2/3, 1]$. Выберем первую после запятой троичную цифру так, чтобы b не попало в тот же отрезок, что и a_0. Далее, пусть, например, первой цифрой оказался 1. Тогда a_1 не принадлежит по крайней мере одному из трех отрезков (а возможно, и ни одному из них, если оно не попадает в $[1/3, 2/3]$) $[1/3, 4/9]$, $[4/9, 5/9]$, $[5/9, 2/3]$. Выберем вторую троичную цифру таким образом, чтобы a_1 разошлось с b. Так же продолжаем и далее. Итак, никакая последовательность не может перечислить всех действительных чисел. $\square$

Обратим Ваше внимание на одну тонкость в приведенном доказательстве. Может показаться, что мы брали троичное, а не двоичное разложение с той целью, чтобы избавиться от хлопот с числом 1/2. Конечно, часто математики поступают именно так, делая гораздо труднее реализуемый алгоритм лишь потому, чтобы не рассматривать отдельно несколько исключительных случаев. Но здесь причина другая. Мы постарались, чтобы данное доказательство было *абсолютным*, сохраняющим силу не только в традиционной математике, но и в ее известных модификациях. Мы, в частности, нигде не предполагали, что действительные числа точно известны, и проследили, чтобы для каждого использованного в рассуждении отношения между ними можно было указать, с какой точностью его достаточно проверить.

Про множества, равномощные множеству действительных чисел, говорят, что они имеют мощность континуума, эта мощность обозначается $\mathfrak{c}$.

Пример 5.4.2. Любое конечномерное пространство $\mathbb{R}^n$ имеет мощность континуума.

В самом деле, воспользуемся определением действительных чисел через двоичные разложения и построим инъекцию из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$ следующим образом $(x)_i$ в данной формуле — i-тый знак числа x:

$$(\varphi((x_1, \ldots,\ x_n)))_{n*i+k} = (x_{k+1})_n \tag{5.15}$$

Итак, двоичные знаки получившегося числа соединяют двоичные знаки всех аргументов, и, очевидно, каждое из x_i однозначно восстанавливается по значению $\varphi((x_1, \ldots,\ x_n))$. Инъекция $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}^n$ очевидна.

По теореме Кантора-Шредера-Бернштейна, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^n$ равномощны.

Вопрос, существуют ли множества мощности, промежуточной между счетной и континуумом, не разрешим в принятой аксиоматике теории множеств. Предположение, что таких множеств нет, носит название *континуум-гипотезы*.

Теорема 5.4. (Теорема Кантора) *Множество всех подмножеств множества X, обозначаемое $\mathfrak{P}\,X$, имеет мощность б´ольшую чем X.*

Доказательство. Очевидно, что имеется инъекция X в $\mathfrak{P}\,X$. Докажем, что обратной инъекции нет.

Приведем предположение, что f — такая инъекция, к абсурду. Для этого построим множество

$$K \stackrel{\triangle}{=} \{x \mid x \in X \;\&\; x \notin f^{-1}\langle x\rangle\,.$$

Тогда $f(K) \in K \Leftrightarrow \neg\, f(K) \in K$. □

Из теоремы Кантора следует парадокс Кантора, показывающий, что множества всех множеств не существует.

> **(Парадокс Кантора)** Множество всех множеств U содержит любое другое множество как подмножество, и значит, если V — некоторое множество, то имеется инъекция V в U. Но тогда имеется и инъекция $\mathfrak{P}U$ в U, что противоречит теореме Кантора.

Таким образом, не всякое выразимое на языке логики свойство множеств определяет множество (на самом деле проще всего здесь пример из парадокса Рассела: несуществование $\{x \mid x \notin x\}$). В современной математике принято совокупности множеств и других математических объектов, удовлетворяющих данному свойству, называть *классами*.[39] Классы не могут быть элементами других классов, и тем более множеств. Таким образом, классы рассматриваются скорее как сокращения, а не как объекты. Доказано, что добавление классов к обычной теории множеств ничего существенно не меняет.

Есть интересный критерий, позволяющий свести вопрос, является ли данная совокупность множеством, к этому же вопросу для уже известных множеств. Область значений любой функции, определенной на множестве, сама является множеством. Если избавиться от функции, то критерий примет следующий вид:

> Аксиома подстановки. Если X — множество, и $\forall x(x \in X \Rightarrow \exists 1y\, A(x,y))$, то
> $$\{y \mid \exists x(x \in X \;\&\; A(x,y))\}$$
> также множество.

Контрапозицией аксиомы подстановки получаем, что, если X — класс, φ — инъективное отображение X в Y, то Y — также класс.

Данный критерий называется аксиомой по той причине, что, отчаявшись найти внешние критерии того, какие формулы могут определять множество, математики начала XX века решили просто постулировать возможность построения тех множеств, которые широко вошли в математическую практику и не приводят к известным парадоксам. Так возникла аксиоматическая теория множеств. В том ее варианте, который

[39] В традиционной логике понятие класса означало совокупность объектов, удовлетворяющих данному свойству. Г. Кантор, создатель теории множеств, ввел новое понятие потому, что стал рассматривать и сами множества как элементы множеств.

принимается абсолютным большинством математиков, постулируются следующие аксиомы (помимо аксиомы подстановки):[40]

1. Пустое множество:

$$\exists X\,\forall x\, x \notin X$$

2. Двухэлементное множество:

$$\forall x, y\,\exists X\,\forall z (z \in X \Leftrightarrow z = x \vee z = y)$$

3. Объединение множества множеств:

$$\forall X\,\exists Y\,\forall y (y \in Y \Leftrightarrow \exists x (x \in X \,\&\, y \in x)$$

(это множество обозначается просто $\bigcup X$.)

4. Множество всех подмножеств:

$$\forall X\,\exists Y\,\forall Z (Z \in Y \Leftrightarrow \forall x (x \in Z \Rightarrow x \in X))$$

5. Аксиома бесконечности:
Существует множество, у которого есть инъекция самого в себя.

$$\exists X\,\exists f \left(\begin{array}{ll} f : X \to X & \& \\ \forall x, y (x \in X \,\&\, y \in X \,\&\, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y) & \& \\ \exists y (y \in X \,\&\, \forall x (x \in X \Rightarrow f(x) \neq y)) & \end{array} \right)$$

6. Аксиома выбора:

$$\forall X \left(\begin{array}{ll} \forall Y (Y \in X \Rightarrow \exists y\, y \in Y) & \Rightarrow \\ \exists f (f : X \to \bigcup X \,\&\, \forall Y (Y \in X \Rightarrow f(Y) \in Y) & \end{array} \right)$$

7. Аксиома объемности:

$$\forall X, Y (\forall z (z \in X \Leftrightarrow z \in Y) \Rightarrow X = Y)$$

Если множества имеют одни и те же элементы, они равны.

[40]В данных аксиомах мы для ясности формулировок свободно пользуемся переменными для функций, поскольку уже знаем, как определять функции через множества.

8. Аксиома регулярности:

$$\forall X\, \exists x\, (x \in X \,\&\, \neg\, \exists y(y \in x \,\&\, y \in X))$$

Суть ее в том, чтобы запретить ситуации вида $x \in x$. Эта аксиома служит примером технических улучшений, необходимых в каждой новой теории для ее логического замыкания.

Аксиомы теории множеств, как выяснилось, не слишком удобны для представления некоторых структур, возникающих в современных областях математики, в частности, в теории категорий. Но они по крайней мере дают некоторый общий фундамент, позволяющий точно понимать, что означает то или иное утверждение классической математики.[41] И, что еще важнее, они дали возможность строго поставить вопрос о неразрешимости некоторых проблем традиционной математики.

Функции, аргументом которых служат натуральные числа, обычно называют *последовательностями* и обозначают несколько по-другому: саму функцию $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, конкретное значение a_i. В данной книге мы, следуя логической традиции, несколько расширяем понятие последовательности.

Определение 5.4.7. *Конечной последовательностью* называется отображение множества $\{i \mid i \in \mathbb{N} \,\&\, i \geqslant 1 \,\&\, i \leqslant k\}$. k — ее длина.
Бесконечной последовательностью называется отображение множества $\mathbb{N}$ либо $\mathbb{N} \setminus 0$.
Конечная последовательность $b : \{i \mid i \in \mathbb{N} \,\&\, i \geqslant 1 \,\&\, i \leqslant k\} \to X$ является началом конечной последовательности $a : \{i \mid i \in \mathbb{N} \,\&\, i \geqslant 1 \,\&\, i \leqslant l\} \to X$, если $l \geqslant k$ и $\forall i(1 \leqslant i \,\&\, i \leqslant k \Rightarrow a(i) = b(i))$.
Конечная последовательность $b : \{i \mid i \in \mathbb{N} \,\&\, i \geqslant 1 \,\&\, i \leqslant k\} \to X$ является началом бесконечной последовательности $a : \mathbb{N} \setminus 0 \to X$, если $\forall i(1 \leqslant i \,\&\, i \leqslant k \Rightarrow a(i) = b(i))$.
Последовательность — это конечная либо бесконечная последовательность.

Отношение вхождения для кортежей обобщается на последовательности следующим образом:

Определение 5.4.8. Последовательность α содержит конечную последовательность β длины k, если существует такое n, что

$$\forall i(1 \leqslant i \,\&\, i \leqslant k \Rightarrow \alpha(i + n) = \beta(i)).$$

---

[41] Как Вы чувствуете из этой оговорки, появилась и неклассическая математика, но объем произведенного в классической настолько больше, что многие и не подозревают о существовании существенно других интерпретаций. Примерно так же сейчас в России многие, говоря ‘компьютер’, понимают IBM PC.

И, наконец, обратим внимание на несколько другое обозначение функций, появившееся по аналогии с последовательностями и употребляемое в том случае, если область определения фиксирована и нас интересуют в первую очередь значения функции, а не взаимосвязь между аргументами и значениями. Это — запись функции как *семейства* значений:

$$(a_i)_{i \in I}.$$

Аргумент называется в данном случае *индексом*, результат — i-тым членом семейства. Чаще всего как семейства представляют функции, значениями которых служат объекты высших типов: множества либо другие функции.

Семейства, в частности, полезны для обобщения операций на бесконечное число аргументов, если это возможно. Например, в теории множеств обобщаются на любое семейство аргументов операции объединения, пересечения, прямой суммы, прямого произведения.

Определение 5.4.9.

1. $\bigcup\limits_{i \in I} X_i \triangleq \{x \mid \exists i (i \in I \;\&\; x \in X_i)\}$.
2. $\bigcap\limits_{i \in I} X_i \triangleq \{x \mid \forall i (i \in I \Rightarrow x \in X_i)\}$.
3. $\bigoplus\limits_{i \in I} X_i \triangleq \{(i, x) \mid i \in I \;\&\; x \in X_i\}$.
4. $\prod\limits_{i \in I} X_i \triangleq \{f \mid f : I \to \bigcup i \in X_i \;\&\; \forall i (i \in I \Rightarrow f(i) \in X_i)\}$.

Будьте осторожнее с обобщением операций на бесконечное семейство операндов! Часто они просто не обобщаются, как, например, алгебраические операции над действительными числами, либо теряют при обобщении полезные свойства.

Упражнения к §5.4

5.4.1. Когда тройка $X \clubsuit Y \triangleq \langle X, Y, X \times Y \rangle$ является функцией? Когда данная функция является инъекцией? Сюръекцией? Биекцией?

5.4.2. Имеются ли функции из $\emptyset$ в непустые множества? Какие? А наоборот?

5.4.3. Почему доказательство теоремы Кантора-Бернштейна не может быть использовано для составления программы, преобразующей две инъекции в биекцию, даже для счетных множеств?

5.4.4. Дайте доказательство теоремы Кантора-Бернштейна для конечных множеств, подходящее для построения с его помощью преобразователя программ: процедуры, трансформирующей две данные функции-инъекции в одну — биекцию.[42]

5.4.5. Какое из равенств выполнено, а для невыполненного укажите, есть ли вложение в одну из сторон?

$$f\langle X\rangle \cup f\langle Y\rangle = f\langle X\cup Y\rangle\,, \qquad f\langle X\rangle \cap f\langle Y\rangle = f\langle X\cap Y\rangle\,.$$

5.4.6. Является ли любая ретракция сюръекцией? А накрытие — инъекцией?

5.4.7. Верно ли, что $X \succcurlyeq Y$ и $Y \succcurlyeq X$ влечет, что X и Y равномощны?

5.4.8. Каковы взаимоотношения между $X \leqslant Y$ и $Y \succcurlyeq X$?

5.4.9. Докажите, что, если X — счетно, то и множество всех кортежей X^∞ также счетно.

5.4.10. Студент Гениалькис предложил определить конечное множество как множество, представимое в виде $\{x_1, \ \ldots, \ x_n\}$. Что Вы скажете по этому поводу?

5.4.11. При обсуждении предыдущего определения студент Интеллектуалов выдвинул свое:

> Класс конечных множеств — транзитивное замыкание класса, содержащего $\emptyset$ и все множества вида $\{x\}$ (чтобы снять все замечания, он определил их как множества, удовлетворяющие следующему условию:
>
> $$\exists x(x \in X \ \& \ \forall y(y \in X \Rightarrow x = y))\ )$$
>
> относительно операции объединения двух множеств.

Что Вы скажете по поводу этого определения?

5.4.12. Студент Рессель заявил, что на самом деле лучшее определение конечных множеств следующее:

[42] Будьте внимательнее! Разве вы еще не поняли, что автор — ехидна?

Конечное множество — множество X, неравномощное никакому

$$Y \subset X \,\&\, Y \neq X.$$

А Вы что здесь скажете?

5.4.13. Студентка Программистская заявила, что все предыдущие определения никуда не годятся, поскольку ссылаются на множество всех множеств, которого нет. Она предложила определить конечные множества так, как делают все нормальные программисты — по индукции.

1. $\emptyset$ — конечное множество.
2. Если a — объект, то $\{a\}$ — конечное множество.
3. Если X и Y — конечные множества, то $X \cup Y$ — конечное множество.

А что Вы здесь скажете?

5.4.14. Определите верхнюю и нижнюю границу мощности множества всех последовательностей действительных чисел $\mathbb{R}^n$.

5.4.15. Покажите, что нет сюръекции X на $\mathfrak{P}\, X$.

5.4.16. Определите, а что же такое подпоследовательность бесконечной последовательности?

5.5 Фактор-множества

В предыдущем параграфе у нас частенько фигурировало слово “мощность”. Но мы стыдливо умалчивали, что это такое. На самом деле хорошего математического определения мощности множества просто нет, наиболее прозрачной была попытка Кантора определить мощность как множество всех равномощных друг другу множеств, но из-за парадокса Кантора и несуществования универса таких множеств просто не существует (за исключением мощности пустого множества). Кантор в своем определении следовал сложившейся к концу XIX века математической традиции, когда уже был хорошо разработан способ перевода отношений эквивалентности в отношения равенства через посредство фактор-множества.

Условия, накладываемые на отношение эквивалентности, на самом деле минимальный вариант выразимых на логическом языке свойств равенства. А именно:

Определение 5.5.1. Отношением эквивалентности называется рефлексивное, транзитивное и симметричное отношение.[43]

Таким образом, класс эквивалентности элемента x есть $R\langle x\rangle$. Отношение эквивалентности R обладает, в частности, следующими важными свойствами:

Предложение 5.5.1. *1.* $\forall x\,\forall y(R\langle x\rangle = R\langle y\rangle \vee R\langle x\rangle \cap R\langle y\rangle = \emptyset)$.

2. $\forall x(x \in \operatorname{Dom} R \Rightarrow x \in R\langle x\rangle)$.

3. $\forall x\,\forall y(x \in \operatorname{Dom} R \;\&\; y \in \operatorname{Dom} R \Rightarrow (R\langle x\rangle = R\langle y\rangle \Leftrightarrow (x,y) \in R))$.

Доказательство. Пункт 3. Если образы равны, то по рефлексивности, $y \in R\langle y\rangle$, но $R\langle x\rangle = R\langle y\rangle$, значит, $(x,y) \in R$. Если, наоборот, $(x,y) \in R$, то из $(y,z) \in R$ по транзитивности следует $(x,z) \in R$, а из $(x,z) \in R$ по симметричности и транзитивности следует $(y,z) \in R$.

Пункт 1. Пусть имеется такое z, что $(x,z) \in R \;\&\; (y,z) \in R$. Тогда, по симметричности, $(x,z) \in R \;\&\; (z,y) \in R$. По транзитивности $(x,y) \in R$, и по пункту 3 образы равны. Значит, если они пересекаются, то они совпадают.[44]

Последние пункты очевидны. □

Итак, отношение эквивалентности разбивает свою область определения на непересекающиеся *классы эквивалентности.*

Определение 5.5.2. 1. *Класс эквивалентности* элемента x — его образ $R\langle x\rangle$, то есть

$$\{y \mid (x,y) \in R\}.$$

2. *Фактор-множество* — множество классов эквивалентности всех элементов множества X по отношению эквивалентности $\equiv$.

---

[43] Поскольку все эти понятия применяются у нас лишь к отношениям на некотором множестве X, отсюда следует, что отношение эквивалентности является подмножеством некоторого X^2.

[44] То, что последующий пункт доказан раньше предыдущего и использован в доказательстве предыдущего, сознательная "небрежность." Важно накрепко запомнить, что порядок пунктов в теореме не играет с логической точки зрения никакой роли, поскольку конъюнкция коммутативна. Зато в доказательстве порядок играет важнейшую роль, поскольку не допускается ссылка на то, что еще не обосновано.

3. Если f — функция из множества X с заданным на нем отношением эквивалентности R_1 в множество Y с заданным на нем отношением эквивалентности R_2, то f называется *согласованной с эквивалентностью*, если

$$\forall x\, \forall y (x \in X \;\&\; y \in X \;\&\; (x, y) \in R_1 \Rightarrow (f(x), f(y)) \in R_2).$$

   Таким образом, функция согласована с эквивалентностью, если она по эквивалентным аргументам выдает эквивалентные значения.

4. Отношение эквивалентности R_1 на множестве X *сильнее* отношения эквивалентности R_2 на том же множестве, если $R_1 \subset R_2$.

Класс эквивалентности x относительно R обозначается $\hat{x}_R$ и еще чаще просто $\hat{x}$, поскольку обычно одновременно рассматривается лишь одно отношение эквивалентности.

Предложение 5.5.2. *1. Отношение равенства — сильнейшее из отношений эквивалентности.*

2. Отношение $R = X^2$ — слабейшее из отношений эквивалентности.

3. Предикат $P(x)$ согласован с эквивалентностью <u>*ттт*</u>

$$\forall x\, \forall y ((x, y) \in R \Rightarrow (P(x) \Leftrightarrow P(y))).$$

Очевидно.

Отношение эквивалентности часто записывают как бинарную операцию, похожую по внешнему виду на равенство, пользуясь для этого значками типа $\sim$, $\simeq$, $\cong$, $\equiv$, $\asymp$. Полного единообразия здесь быть и не должно, поскольку на одной и той же структуре часто рассматриваются несколько отношений эквивалентности. Если отношение эквивалентности обозначается бинарной операцией $\doteq$, то фактор-множество X по отношению $\doteq$ обозначается $X/\doteq$. Класс эквивалентности элемента a по рассматриваемому в данный момент отношению эквивалентности часто обозначается $\hat{a}$.

Если функция согласована с отношением эквивалентности R ($\doteq$), то можно определить функцию из фактор-множества с теми же значениями:

$$f/\doteq(\hat{x}) \stackrel{\triangle}{=} f(x). \tag{5.16}$$

Обратим Ваше внимание на одну тонкость. Мы определили фактор-функцию, не прибегая к несколько неаккуратной конструкции, часто используемой в данном случае: не выбирая произвольного элемента из $\hat{x}$, так что ее определение ни от каких сомнительных принципов теории множеств не зависит. Но, конечно же, отношение, заданное в 5.16, является функциональным лишь тогда, когда f согласована с эквивалентностью.

Пример 5.5.1. Фактор-множество X по отношению равенства — множество всех $\{\{x\} \mid x \in X\}$. Таким образом, здесь мы просто рассаживаем все элементы по отдельным клеткам, превращая множество в зоопарк.

Пример 5.5.2. Фактор-множество X по отношению X^2 состоит из одного всеобъемлющего класса эквивалентности $\{X\}$. Здесь вместо зоопарка получается загон для всего стада элементов X.

Пример 5.5.3. Кольцо вычетов по модулю n может быть представлено как фактор-множество множества целых чисел по отношению

$$\exists z\, |x - y| = n * z.$$

Все арифметические операции на кольце получаются при этом из арифметических операций на целых числах простой факторизацией.

Если X — алгебра с какими-то операциями, то переходить к фактор-алгебре можно лишь тогда, когда операции по всем аргументам согласованы с эквивалентностью.

Фактор-множества теснейшим образом связаны с функциями. А именно, любая функция задает отношение эквивалентности:

$$\{(x, y) \mid x \in \mathrm{Dom}\, f \,\&\, y \in \mathrm{Dom}\, f \,\&\, f(x) = f(y)\}\,.$$

С другой стороны, $\lambda x.\, \hat{x}$ является функцией, определяющей данное отношение эквивалентности. Множества, на которых функция сохраняет одно и то же значение, часто называются *множествами уровня* данной функции. Таким образом, любое отношение эквивалентности представляется как совокупность множеств уровня некоторой функции. Отношение эквивалентности, генерируемое функцией f, обозначается $\stackrel{f}{=}$, а фактор-множество по $\stackrel{f}{=}$ — просто X/f.

Пользуясь отношениями эквивалентности, легко установить следующий фундаментальный результат:

Предложение 5.5.3. *Любая функция может быть представлена как композиция сюръекции и инъекции.*

Доказательство. Возьмем $\mathrm{Dom}\, f/f$. $\lambda x.\, \hat{x}$ является сюръекцией на это множество, а $f/\stackrel{f}{=}$ — инъекцией из этого множества в $\mathrm{Val}\, f$. □

Еще одно фундаментальное представление фактор-множеств и отношений эквивалентности основывается на понятии разбиения множества.

Определение 5.5.3. Семейство множеств $(X_i)_{i \in I}$ называют *разбиением* множества X, если:

1. $\bigcup\limits_{i \in I} X_i = X$.
2. $\forall i \forall j\, (i \in I \;\&\; j \in I \;\&\; i \neq j \Rightarrow X_i \cap X_j = \emptyset)$.
3. Ни одно из X_i не пусто.

Итак, в совокупности множества из разбиения покрывают все X, и между собой они попарно не пересекаются.

Предложение 5.5.4. *Любое разбиение задает отношение эквивалентности и наоборот.*

Упражнения к §5.5

5.5.1. Являются ли отношениями эквивалентности объединение и пересечение двух отношений эквивалентности?

5.5.2. Постройте фактор-множество $\mathbf{R}$ по отношению эквивалентности, задаваемому функцией, находящей дробную часть числа.

5.5.3. Являются ли отношениями эквивалентности отношения

1. Иметь одну и ту же мать.
2. Иметь одну и ту же сестру.
3. Различаться на рациональное число (на множестве действительных чисел).
4. Различаться по модулю не более чем на 1.
5. Быть равномощными (для множеств).
6. Существует изоморфизм G_1 на G_2 (для групп).
7. Существует гомоморфизм G_1 в G_2 (для групп).

5.5.4. Какое из отношений эквивалентности более сильное?

1. Получить одинаковые оценки на вступительном экзамене по математике.
2. Иметь одну и ту же сумму баллов на вступительных экзаменах.
3. Решить одни и те же задачи на вступительном экзамене по математике.

5.5.5. По возможности не проводя вычислений, определите, каковы отношения порядка между следующими числами:

1. Число отношений эквивалентности на n-элементном множестве X.
2. Число разбиений натурального числа n на сумму натуральных положительных чисел.
3. Число отношений эквивалентности на n-элементном множестве X, с точностью до изоморфизма.
4. Число разбиений n-элементного множества X на подмножества.
5. Число представлений n в виде суммы положительных целых чисел, расположенных в порядке неубывания.
6. Число таких наборов натуральных положительных чисел Y, что
$$\sum_{i \in Y} i = n.$$
7. Число таких множеств натуральных положительных чисел Y, что
$$\sum_{i \in Y} i = n.$$

5.6 Графы

То, что рассказывается в данном параграфе, может рассматриваться как пример представления сложных структур.

Графы появились как наглядное представление для системы объектов и связывающих их отношений, но быстро переросли это конкретное назначение.

Определение 5.6.1. *Граф* G — четверка $\langle V, R, \mathrm{begin}, \mathrm{end}\rangle$, где V — множество вершин графа G, R — множество его ребер, begin, end — функции из V в R. $\mathrm{begin}\, r$ называется *началом* ребра $r \in R$, $\mathrm{end}\, r$ — его *концом*.

Принятая в математике форма определения

$$\text{“П есть кортеж } \langle A, B, C, D\rangle\text{”}$$

означает на самом деле отказ в данный момент от содержательного раскрытия определения и замену его перечислением понятий, используемых в дальнейшем. Смысл такого "определения" раскрывается в последующих определениях.[45] Но при этом необходимо помнить, что любой математический термин нагружен основательным множеством смыслов, слишком многие из которых обычно лишь подразумеваются. Например, когда говорится "множество", неявно предполагается, что порядок его элементов безразличен, что среди его элементов нет повторяющихся, и т.п.

Итак, в графе есть вершины и ребра. Для каждого ребра есть начало и конец. Обычно на чертежах вершины обозначаются точками, а ребра — стрелками. Введем терминологию, касающуюся вершин и ребер.

Определение 5.6.2. *Петля* — ребро, у которого начало и конец совпадают. Ребро r *выходит из* вершины v, если $\operatorname{begin} r = v$. Ребро r *входит в* вершину v, если $\operatorname{end} r = v$. *Путь* — последовательность ребер, в которой начало каждого последующего ребра совпадает с концом предыдущего. *Ко-путь* — последовательность ребер, в которой конец каждого последующего ребра совпадает с началом предыдущего.[46] *Связь* — последовательность путей и ко-путей, такая, что начало каждого следующего ее члена освпадает с концом предыдущего. *Цикл* —конечный путь, такой, что его начало и конец совпадают. Кортеж конечного пути — кортеж его ребер, взятых в том же порядке. Путь (ко-путь) *максимален*, если он конечен и его нельзя продолжить. *Кратные ребра* — ребра с одними и теми же началом и концом. *Начальная вершина* — вершина, в которую не входит ни одно ребро. *Конечная вершина* — вершина, из которой не выходит ни одного ребра. *Изолированная вершина* — вершина, являющаяся одновременно начальной и конечной. Граф *связен*, если между каждыми двум его вершинами есть связь.

Проиллюстрируем введенные понятия на примерах с рис. 5.7

Пример 5.6.1. В графе 1 нет петель и кратных ребер. В графе 2 есть и те и другие. В графе 3 все пути, за исключением одного, конечны.

Граф называется *деревом*, если у него имеется такая вершина v_0 — *корень* дерева, что из v_0 в любую другую вершину v ведет ровно один путь.

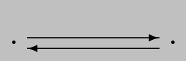
Предложение 5.6.1. *Граф G является деревом тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

1. *В графе есть ровно одна начальная вершина.*

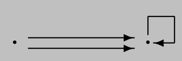
---

[45] Именно так!

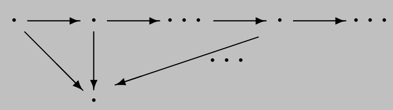
[46] Таким образом, ко-путь — путь, взятый "наоборот."



Граф 1



Граф 2



Граф 3

Рис. 5.7: Графы

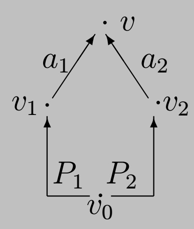
2. В любую другую вершину входит ровно одно ребро.

3. В графе нет бесконечных ко-путей.

Доказательство. **Только тогда.** Пусть G — дерево. Докажем все условия.

1) Таких вершин не может быть две, поскольку тогда ни в одну из них нет пути из корня, а корень один. Если же их нет вообще, то в корень входит ребро a, и значит, есть вершина w, из которой можно попасть в корень.

2) Если есть вершина, в которую ведут два ребра,



Рассмотрим пути $P_1 * [a_1]$ и $P_2 * [a_2]$. Оба они ведут в v из корня. А это противоречит свойствам дерева.

3) Докажем его приведением к абсурду. Пусть в графе есть бесконечный ко-путь a_0, a_1, … a_n, … , проходящий через вершины w_0, … w_n … Тогда, поскольку корень — начальная вершина, он на этом пути не лежит. Есть путь из корня в a_0. Поскольку этот путь содержит конечное число вершин, то не все вершины из ко-пути входят в него. Значит, он имеет вид

$$P_1 = \langle b_0, \ \dots \ b_i = a_j, \dots \ a_0 \rangle \, .$$

Здесь все начала ребер b_k не лежат на бесконечном ко-пути. А вот конец b_i лежит на этом ко-пути, и концом его является w_{j+1}.

Возьмем теперь w_{j+2}. Имеется путь P_2, ведущий из корня в w_{j+2}. Тогда путь $P_2 * [a_{j+1}, a_j, a_{j-1}, \dots, a_0]$ ведет из корня в w_0. Но он содержит вершину w_{j+2}, которой не было на исходном пути. Таким образом, из корня получаются два пути в одну точку, что противоречит определению дерева.

Тогда. Пусть все условия выполнены. Единственная вершина. в которую ничего не входит, сделаем корнем. Теперь докажем, что есть путь из корня в любую вершину. Доказательство ведем от противного. Пусть a_0 — вершина, в которую нет пути из корня. В нее входит ребро, начало этого ребра назовем a_{-1}. Из a_{-1} есть путь длины 1 в a_0. Сделаем условие

$$\text{Из } a_{-n} \text{ есть путь длины } n \text{ в } a_0 \tag{5.17}$$

инвариантом математической индукции.[47]

Пусть построено a_{-n}. Тогда в него нет пути из корня, поскольку этот путь дополнялся бы до пути в a_0. $a_{-(n+1)}$ построим как начало единственного ребра, входящего в a_{-n}.

Таким образом, по вершине, в которую нет пути, мы строим бесконечный ко-путь, что противоречит третьему условию □

Представление данных с помощью деревьев обладает многими положительными особенностями, но порою несколько неэффективно, если до некоторых объектов можно добраться несколькими способами. Поэтому ищутся структуры, сохраняющие большинство достоинств деревьев, но позволяющие не дублировать одну и ту же информацию. Наиболее распространенной из них является *сеть*.

Определение 5.6.3. *Связь* — последовательность вершин, такая, что для a_n и a_{n+1} есть ребро, их связывающее (т. е. либо из a_n в a_{n+1},либо из a_{n+1} в a_n).[48] Граф *связен*, если для любых двух вершин есть связь. *Сеть* — связный ориентированный граф без циклов.

Сеть отличается от дерева тем, что в одну вершину может входить несколько ребер, т. е. однажды полученный объект может использоваться многократно.

С понятием графа связано несчитанное множество недоразумений и недоговоренностей. Прежде всего так и тянет “упростить” понятие графа, например, следующим образом:

Определение 5.6.4. (Графы в значительной части элементарных книг по математике) Граф — пара $\langle V, R\rangle$, где $R \subset (V \times V) \setminus \mathrm{id}_V$.

Если мы принимаем определение 5.6.4, то графы уже не могут содержать ни петель, ни нескольких дуг с одинаковым началом и концом. Поэтому приходится вводить новые понятия: квазиграф — граф с петлями, псевдограф — граф, в котором могут быть кратные ребра из a в b. Ну что же, нам не привыкать, что в элементарной математике “для упрощения” многие понятия излишне сужаются и тем самым запутываются.

Далее, в большинстве книг по математической теории графов за исходное принимается следующее определение:

Определение 5.6.5. (Неориентированный) граф — пара V, R, где каждый из элементов R — двухэлементный набор вершин из V.

---

[47]Хотя формально в данной книге индукция еще не определена, но Вы, конечно, ею пользовались.

[48]Из данного определения следует. что и последовательность нулевой длины — связь.

Определение 5.6.5 определяет существенно другую структуру. Раз у нас ребра становятся наборами, то начало и конец ребра более не различаются, и поэтому такие графы называются *неориентированными*. Те, кто принимают в качестве исходного понятия неориентированные графы, называют наши графы ориентированными, либо сокращенно *орграфы*. В неориентированных графах даже терминология часто меняется: вершина называется точкой, ребро — дугой.

Чаще всего в структурах данных графы ценны не сами по себе, а как вместилища для другой информации. В этом случае значащая информация размещается в вершинах графа, а иногда и на его ребрах. Математически это формулируется следующим образом:

Определение 5.6.6. *Оснащенный граф* — тройка $\langle G, \varphi, \psi \rangle$, где G — граф, φ — функция, областью которой служит множество его вершин, ψ — функция, областью которой служит множество его ребер. Если v — ребро графа G, то $\varphi(v)$ называется *оснащением* вершины v либо информацией, приписанной данной вершине. Соответственно и для ребер.

При представлении данных в программах выработалась уже почти стандартная структура данных для графа с оснащенными вершинами:

```
type vertex=
 record
  content: datatype;
  arcs: array[namearcs] of ^vertex;
 end;
```

В данном случае тип дуги явно не вводится, дуги являются ссылками на вершины, в которые они ведут.

Упражнения к §5.6

5.6.1. Есть ли бесконечные пути в графе 2 на рис. 5.7?

5.6.2. В книгах можно часто встретить определение:

> Путь — последовательность вершин, такая, что a_n и a_{n+1} соединены ребром.

Для каких классов графов данное определение корректно? Для каких — нет?

5.6.3. В теории графов дерево часто определяется как связный граф без циклов. Почему это так?

5.6.4. Плоским называется граф, который может быть изображен на плоскости таким образом, что вершины изображаются точками, ребра — непрерывными кривыми из начала в конец, причем различные ребра не пересекаются. Является ли пятиконечная звезда плоским графом?[49]

5.6.5. Верно ли, что добавление любого конечного числа кратных ребер к плоскому графу оставляет его плоским?

5.7 Диаграммы

Здесь мы познакомимся с еще одним диалектом языка современной математики — началами языка коммутативных диаграмм, широко применяемых ныне повсюду, где пользуются теорией категорий. Начнем, как и обычно, с примера.

Попытаемся дать характеризацию прямых произведений и прямых сумм, не прибегая к теоретико-множественному языку, лишь через их отображения. На стр. 83 мы содержательно описали, как скомбинировать из n отображений в члены произведения одно отображение в $X_1 \times \cdots \times X_n$ и как построить отображение из произведения в другое произведение на базе отображений компонент. Запишем эти свойства при помощи коммутативных диаграмм (см. рис. 5.8.)

Сплошная стрелка на диаграмме означает заданное отображение. Пунктирная стрелка — отображение, *однозначно* строящееся по заданным. Из алгебры (именно на стыке алгебры с топологией впервые стали интенсивно использоваться подобные диаграммы) пришел ныне общепринятый термин: *коммутативная диаграмма*, означающий, что если рассматривать диаграмму как граф и брать композиции отображений по разным путям, ведущим из вершины v_1 в вершину v_2, то полученные отображения будут одинаковы. Ныне в математических работах принято, что если явно не оговорено противное, все приведенные диаграммы коммутативны.

[49]При проверке данного и других подобных утверждений можно ссылаться как на очевидный на один из трудно доказываемых результатов математического анализа, опускаемый практически во всех учебниках: теорему Жордана.

Теорема 5.5. (Жордан) *Замкнутая кривая делит плоскость на два открытых множества (две области).*

Следствием ее является то, что любая кривая, начинающаяся в одной из двух областей, на которые кривая φ делит плоскость, а заканчивающаяся в другой, пересекает φ.

$$\begin{tikzcd}
& A & \\
C \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, dashed, "{(f,g)}"] \arrow[dr, "g"'] & & A\times B \arrow[ul, "\mathrm{pr}_1"'] \arrow[dl, "\mathrm{pr}_2"]\\
& B &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] & C \\
A\times B \arrow[u, "\mathrm{pr}_1"'] \arrow[d, "\mathrm{pr}_2"] \arrow[r, dashed, "f\times g"] & C\times D \arrow[u, "\mathrm{pr}_1"'] \arrow[d, "\mathrm{pr}_2"] \\
B \arrow[r, "g"] & D
\end{tikzcd}$$

Рис. 5.8: Диаграммы для прямого произведения

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "\mathrm{in}_1"] & \\
C & & A\oplus B \arrow[ll, dashed, "f\cup g"'] \\
& B \arrow[ul, "g"] \arrow[ur, "\mathrm{in}_2"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "\mathrm{in}_1"] & C \arrow[l, "f"'] \arrow[d, "\mathrm{in}_1"] \\
A\oplus B & C\oplus D \arrow[l, dashed, "f\oplus g"'] \\
B \arrow[u, "\mathrm{in}_2"'] & D \arrow[l, "g"'] \arrow[u, "\mathrm{in}_2"']
\end{tikzcd}$$

Рис. 5.9: Диаграммы для прямой суммы

А теперь построим (см. рис. 5.9) такие же диаграммы для прямой суммы.

Сравнивая диаграммы рис. 5.8 и рис. 5.9, видим, что в сущности они отличаются лишь направлением стрелок. Значит, понятия прямого произведения и прямой суммы подобны друг другу. Такое подобие называется в теории категорий *двойственностью*.[50]

Дадим минимальную совокупность требований, достаточных, чтобы рассматривать стрелки и коммутативные диаграммы. Эта совокупность составляет аксиоматику *теории категорий*. Она зачастую называется еще теорией стрелок, а порою ее называли абстрактной чепухой.

Определение 5.7.1. Категория — пара классов: класс объектов Ob и класс морфизмов Mor, на которых заданы следующие операции:

1. Унарные операции $\mathrm{Dom}\, f$ и $\mathrm{Codom}\, f$, сопоставляющие каждому мор-

[50] Впрочем, слово "двойственность" используется во многих разделах математики для обозначения однородных явлений: сохранения истинности математических теорем при взаимной замене некоторых понятий. Например, в логике двойственны $\top$, &, $\forall$ и $\perp$, $\vee$, $\exists$. В проективной геометрии двойственны прямые и точки. Исторически именно в проективной геометрии впервые было осознано понятие двойственности.

физму два объекта, называемые его областью значений и областью определения, либо началом и концом, соответственно, либо областью и кообластью. Через $\mathrm{Mor}(a, b)$ обозначается множество морфизмов с началом в a и концом в b(морфизмов из a в b). То, что f является морфизмом из a в b, обозначается $f : a \to b$.

2. Унарная операция e, сопоставляющая каждому объекту a единичный морфизм e_a из a в a.

3. Тернарная операция $\circ(a, b, c)$, сопоставляющая каждой тройке объектов *операцию композиции*, дающую по паре морфизмов $f : a \to b$ и $g : b \to c$ их композицию $f \circ(a, b, c)\ g : a \to c$

и выполнены следующие алгебраические тождества:[51]

1. $e_a \circ g = g \quad f \circ e_a = f$ для всех $f : b \to a$, $g : a \to b$.

2. $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$.

Итак, предполагается лишь ассоциативность композиции и существование единичного морфизма.

Теперь строго зададим понятие коммутативной диаграммы.

Определение 5.7.2. *Коммутативная диаграмма* — оснащенный граф, вершинам которого приписаны объекты категории, а ребрам — морфизмы из начала ребра в его конец, удовлетворяющий следующему условию:
на каждом пути из вершины v_1 в вершину v_2 композиции морфизмов этого пути равны.

Отметим несколько умолчаний, встречающихся в теории категорий. Во-первых, пунктирные стрелки не включены в строгое определение. Это тесно связано с тем, что в диаграмме с пунктирными стрелками (а порою и на других диаграммах) имеется *неявная расстановка кванторов*. Некоторые объекты и морфизмы считаются данными, некоторые — определяющимися через данные, а другие — произвольными. Например, в диаграмме 5.8 даны два объекта a, b, $a \times b$ и проекции определяются через них, объект c и его морфизмы — произвольные, и, наконец, пунктирная стрелка однозначно определяется через все остальное.

[51]При обозначении композиции тройки объектов, по которым она определена, однозначно устанавливаются из контекста и поэтому почти всегда опускаются: пишем просто $f \circ g$.

Пример 5.7.1. Зададим аксиоматику единичных морфизмов, да и само понятие композиции вместе с его ассоциативностью, при помощи коммутативных диаграмм.

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dotted] & b \arrow[d, "g"] \arrow[dl, dotted] \\
d & c \arrow[l, "h"]
\end{tikzcd}$$

А кстати, почему здесь нет прямой стрелки от a к d?

Стрелки категории отнюдь не обязательно являются функциями.

Пример 5.7.2. Возьмем произвольное частично-упорядоченное множество $\mathcal{X}$. Оно может рассматриваться как категория, в которой объектами служат элементы множества $\mathcal{X}$, множество морфизмов из a в b непусто, лишь если $a \leq b$, и в этом случае состоит из единственного морфизма, называемого морфизмом порядка.

Пример 5.7.3. *Полугруппа* — алгебраическая структура с одной ассоциативной операцией умножения $\circ$, такой, что существует единица:

$$e \circ x = x \circ e = x.$$

Любая полугруппа становится категорией, в которой единственный объект — сама эта полугруппа, а морфизмы — ее элементы.

Одним из новых выразительных средств, предоставленных теорий категорий, явилось то, что коммутативные диаграммы сами часто могут рассматриваться как новые объекты или морфизмы.

Пример 5.7.4. (Навеян идеями [14].) Пусть мы построили математическую модель для некоторого класса объектов $\mathcal{X}$ (например, множества действительных чисел) и определили вычислимые операции над этими объектами.[52] Пусть элементы некоторых других пространств $\mathcal{Y}_1$ и $\mathcal{Y}_2$ (скажем, множества состояний двух систем) естественно кодируются знакомыми нам объектами (но вполне возможно, такие кодирования неоднозначны: например, 24.30 и 00.30 кодируют одно и то же время). Мы даже не предполагаем, что две функции кодирования $\nu_1 : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}_1$, $\nu_1 : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}_1$ согласованы.

[52] Примечание для математиков. Это не обязательно означает, что мы определили все вычислимые операции. Мы могли ограничиться теми, которые нам нужны в данный момент. Единственные, но вполне естественные здесь, ограничения — что тождественное отображение вычислимо и что композиция двух вычислимых отображений вычислима; а это как раз и есть аксиомы теории категорий.

Тогда мы можем не возиться заново с переопределением вычислимости для отображений из $\mathcal{Y}_i$ в $\mathcal{Y}_j$ и определить их как *коммутативные квадраты* вида

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{Y}_1 \cdot \arrow[r, "f"] & \cdot\, \mathcal{Y}_2 \\
\mathcal{X} \cdot \arrow[u, "\nu_1"] \arrow[r, "\varphi"] & \cdot\, \mathcal{X} \arrow[u, "\nu_2"']
\end{tikzcd}$$

Приведенная конструкция является частным случаем весьма общей: категории морфизмов данной категории. Объектами категории морфизмов считаются морфизмы исходной категории C. Морфизмом f в g называется коммутативная диаграмма исходной категории:

$$\begin{tikzcd}
b_1 \cdot \arrow[r, "\varphi_2"] & \cdot\, b_2 \\
a_2 \cdot \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\varphi_1"] & \cdot\, a_1 \arrow[u, "g"']
\end{tikzcd}$$

Композиция морфизмов определяется следующим образом:

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "\varphi_2"] & d \arrow[r, "\psi_2"] & j \\
a \arrow[u, "f"'] \arrow[r, "\varphi_1"] & c \arrow[u, "g"'] \arrow[r, "\psi_1"] & i \arrow[u, "h"']
\end{tikzcd}$$

Еще одна серия важных понятий, которые помогла осознать теория категорий, связана с особыми объектами категорий. В категории может быть *начальный* объект, из которого есть единственный морфизм в любой другой объект. Двойственным к нему понятием является *конечный* объект, в который есть единственный морфизм из любого объекта. Если объект является одновременно начальным и конечным, он называется *нулевым*.

Пример 5.7.5. Рассмотрим некоторые начальные и конечные объекты.

1. В теории множеств пустое множество — начальный объект, а любое одноэлементное — конечный.

2. Под эквациональной системой либо (простейшей) алгебраической системой понимается структура, являющаяся моделью системы аксиом-

равенств, например, как в теории групп:

$$\begin{aligned} x \circ (y \circ z) &= (x \circ y) \circ z && (5.18)\\ x \circ x^{-1} &= e && (5.19)\\ x \circ e &= x && (5.20)\\ e \circ x &= x && (5.21)\end{aligned}$$

> В такой системе аксиом подразумевается, что все свободные переменные связаны кванторами всеобщности. Эквациональные системы, удовлетворяющие данной системе аксиом, образуют категорию (например, категория групп, категория полугрупп ...) Морфизмами такой категории служат отображения, коммутирующие с операциями:
>
> $$\varphi(x \circ y) = \varphi(x) \circ \varphi(y) \text{ и т.д.}$$
>
> В любой такой категории есть нулевой объект: система из одного элемента. На ней все равенства тривиально выполняются, а неравенств у нас быть не может.

Уже из этого примера видно, что начальный и конечный объекты — достаточно грубые интерпретации. В современной информатике эквациональные системы часто используются в несколько обобщенном виде — в виде систем условных равенств либо хорновских импликаций вида

$$t_1 = u_1 \,\&\, \cdots \,\&\, t_n = u_n \Rightarrow r = s \tag{5.22}$$

либо

$$P_1 \,\&\, \cdots P_n \Rightarrow Q, \tag{5.23}$$

где P_i, Q — предикаты. Рассматриваются модели таких алгебраических систем, объектами которых являются замкнутые термы, составленные в данной сигнатуре из имеющихся констант при помощи явно заданных в аксиомах операций (сколемовские модели). На термах нужно определить равенство, а его можно задать по-разному. Практически стандартным способом определения равенства стало правило:

> Если элементарное утверждение не дано и не следует из данных, то оно считается ложным. Следовательно, все термы, для которых нельзя доказать равенство, считаются различными.[53]

[53]Это правило имеет в современном 'логическом программировании' название 'Принцип замкнутости мира'.

В категории сколемовских моделей алгебраической системы из условных равенств этому свойству удовлетворяет *инициальная модель*, из которой имеется единственный эпиморфизм на любую другую сколемовскую модель. Обобщая определение, получаем: инициальный объект — объект, для которого имеется эпиморфизм на любой другой объект.

Подытожим:

Теория категорий стимулирует формулировку свойств математических объектов через их отображения, сохраняющие структуру.

Само это понятие отображения в теории категорий обобщается и называется *морфизм*.

Главным элементом языка теории категорий являются коммутативные диаграммы, в которых морфизмы, получающиеся на любых двух путях из одного объекта в другой, совпадают.

Пунктирная стрелка в коммутативной диаграмме означает морфизм, однозначно восстанавливаемый по данной диаграмме.

Все приведенные выше соглашения о диаграммах неабсолютны, но их нарушение оговаривается явно, так что читайте тексты внимательнее!

Сами коммутативные диаграммы могут быть сделаны объектами новых категорий, в частности, так определяются категории морфизмов. Через такие конструкции теория категорий дает возможность задать весьма абстрактные объекты высших порядков.

Теория категорий является, в частности, языком, на котором выражено большинство наиболее тонких и важных результатов современной теории типов данных.

В отличие от теории множеств, доказательство в теории категорий дает построение объектов, существование которых утверждается.

Упражнения к §5.7

5.7.1. Студент Цхалтубенко предложил следующее определение категории:

> Категория — класс морфизмов, на котором задана частичная бинарная операция композиции $\circ$, удовлетворяющая следующим требованиям:

1. Если определено $f \circ (g \circ h)$, то определено и $(f \circ g) \circ h$ и их значения совпадают, и наоборот.
2. Для любого морфизма f существуют такие единичные морфизмы e_1, e_2, что $e_1 \circ f = f$, $f \circ e_2 = f$.

Проанализируйте данное определение и скажите, эквивалентно ли оно исходному. Если оно неэквивалентно, то как его исправить?

5.7.2. Студент Талантов заявил, что объекты можно вообще изгнать из определения категории, отождествив их с единичными морфизмами. Уточните идею Талантова и дайте соответствующее ей определение категории.

5.7.3. Каким свойством обладает любой морфизм из начального объекта? А в конечный?

5.7.4. Дайте характеризацию на категорном языке функций, множества значений которых совпадают.

5.7.5. То же для функций, таких, что задаваемые ими отношения эквивалентности совпадают (т.е. $f(x) = f(y) \Leftrightarrow g(x) = g(y)$).

5.7.6. Возможно ли, чтобы прямое произведение a и b было изоморфно их прямой сумме? Если это возможно, двиньтесь дальше: может ли для всех объектов некоторой категории прямое отображение совпадать с прямой суммой?

5.7.7. Пусть $\mathcal{L}$ — категория, порожденная частично-упорядоченным множеством L. В каком случае два объекта a, b имеют прямое произведение и как это прямое произведение определить на языке частичного порядка?

5.7.8. То же для прямой суммы.

5.7.9. Рассмотрим категорию всех подмножеств конечного множества X, отображениями в которой служат обычные функции. В каком случае два подмножества имеют прямое произведение либо прямую сумму?

5.7.10. Рассмотрим категорию частично-определенных теоретико-множественных функций (т. е. однозначных отношений.) Нигде не определенные функции обладают интересными свойствами. Сформулируйте эти свойства.

5.8 Слова

В математической логике часто приходится следить за тем, чтобы объекты были построены конечным образом из конечного числа исходных понятий. Известно (хотя на самом деле и нетривиально; в частности, в теории алгоритмов с этим придется повозиться), что для представления таких объектов достаточно слов в конечном алфавите.[54]

Определение 5.8.1. *Слово* — конечная последовательность букв алфавита.[55] Операция приписывания слова B к концу слова A называется *соединением* или *конкатенацией* и обозначается просто AB. Слово A есть *начало (конец)* слова B, если B представимо в виде AC (соответственно, CA). Собственное начало (конец) — начало (конец), не являющееся пустым словом или всем B. Слово A *входит* в слово B, если B представимо в виде CAD, т.е. если A — начало конца B. В этом случае A называется *подсловом* B. Длина слова — количество входящих в него букв.

Заметим, что одно и то же слово может много раз входить в другое. Например, 'ба' трижды входит в 'баобаба'. Для точности употребляют понятие (отмеченное) *вхождение* A в B, представляемое как слово формы $\mathsf{C} \star \mathsf{A} \star \mathsf{D}$ в алфавите, расширенном новым символом $\star$.

Стандартным способом представления последовательностей, составленных из потенциально бесконечного набора исходных примитивов, является сопоставление каждому примитиву слова (в языках программирования называемого *идентификатором*) и разделение этих слов новым символом, например пробелом. Мы будем придерживаться такого представления. В этом случае начала, концы и подслова не могут разбивать на части примитивы, и длиной слова будет считаться количество входящих в него примитивов. Последовательность слов вида Ξ, разделенных символом $\star$, есть слово вида $\xi_1 \star \xi_2 \star \cdots \star \xi_n$ либо пустое слово.

В заалгебраизированных изложениях (в частности, математиков французской школы) слова часто называются термами в свободной алгебре с единственной ассоциативной операцией конкатенации, или просто элементами конечнопорожденного свободного моноида.

Для избежания недоразумений (в особенности для необычно выглядящих слов) мы порою будем заключать рассматриваемое слово в одинарные кавычки, например, 'Ст-т Чудаков! & (Со'.

---

[54] Теоретически достаточно и натуральных чисел, но здесь кодирование получается менее прямым, что часто неудобно. А удобством при представлении данных пренебрегать нельзя.

[55] Пустое слово, не содержащее букв вообще, также считается словом и обозначается Λ.

Для дальнейшего потребуется однозначное и достаточно простое кодирование слов алфавита натуральными числами. Если алфавит состоит из n букв, то естественно сопоставить буквам цифры **1**, ... , **n** соответственно, и закодировать слова как числа в системе с основанием $n+1$. На многочисленные удобства такого кодирования указал Р. Смальян, мы его будем называть просто *позиционным* .

Упражнения к §5.8

5.8.1. Покажите, что множество слов в данном алфавите естественно изоморфно множеству кортежей из букв этого алфавита.

5.8.2. Докажите, что множество систем слов естественно изоморфно множеству кортежей из кортежей.

Часть II

Классическая логика

Глава 6

Индукция и определения

6.1 О разных видах индукции

Все вы знакомы с методом *математической индукции*, применяемым к утверждениям, содержащим свободную переменную по натуральным числам. Приведем пример доказательства по индукции.

Пример 6.1.1. Докажем, что сумма трех последовательных кубов натуральных чисел делится на 9.

Базис. $1^3 + 2^3 + 3^3 = 36$ и делится на 9.

Шаг. Чтобы произвести шаг, нужно *предположить* доказываемое утверждение для n и затем *доказать* его для $n+1$. Пусть $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ делится на 9. Тогда

$$\begin{aligned}&(n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3 = \\ &(n+1)^3 + (n+2)^3 + n^3 + 9n^2 + 27n + 27 = \\ &(n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3) + (9n^2 + 27n + 27).\end{aligned}$$

Но все слагаемые в последней скобке делятся на 9, а первая скобка делится на 9 по предположению, значит, и исходная сумма делится на 9. Таким образом, мы установили, что делимость суммы, начинающейся с n, влечет делимость суммы, начинающейся с $n + 1$.

Следовательно, утверждение доказано для всех n.

Итак, в математической индукции имеется *базис* — утверждение, что свойство выполнено для самого маленького из рассматриваемых чисел, и *шаг* — обоснование перехода от числа n к числу $n+1$. На языке логики метод математической индукции представляется следующей формулой:

$$\mathsf{A}(0) \,\&\, \forall n\, (\mathsf{A}(n) \Rightarrow \mathsf{A}(n+1)) \Rightarrow \forall n\, \mathsf{A}(n). \tag{6.1}$$

Пример 6.1.2. Докажем, что n плоскостей, проходящих через одну точку, никакие три из которых не проходят через одну прямую, делят пространство на $A_n = n(n-1)+2$ частей.

Базис. A_1=2.

Шаг. Пусть утверждение доказано для n. Докажем его для $n+1$.

Пусть P_{n+1} — $n+1$-я плоскость. Каждая область разбиения представляет собой многогранный угол, вершиной которого является общая точка всех плоскостей p. Число частей при разбиении $n+1$ плоскостью равно (здесь мы применяем предположение индукции)

$$A_n + \text{Число многогранных углов, разбиваемых на две части } P_{n+1}.$$

Поскольку сечение каждого из таких двугранных углов плоскостью P_{n+1} является плоским углом с вершиной в p, число разбиваемых двугранных углов не может быть больше $2n$, а поскольку никакие три плоскости не пересекаются по прямой, их не может быть меньше $2n$. Таким образом,

$$A_{n+1} = A_n + 2n = (n+1)n + 2.$$

Пример 6.1.3. Пусть на плоскости имеется точечный прожектор, освещающий сектор внутри угла $\alpha < 180°$. Пусть заданы n непересекающихся отрезков (которые могут смыкаться концами). Докажем, что тогда выполнено одно и только одно из трех:

1. Прожектор не освещает ни одной точки ни одного отрезка.
2. Прожектор освещает конец хотя бы одного из отрезков
3. Имеется отрезок a_i, часть которого, пересекающаяся с сектором, полностью освещена, и полностью затеняющий все остальные, пересекающиеся с сектором освещения.

Как всегда при решении задачи, заданной в физических терминах, математик должен прежде всего подумать о том, как перевести все понятия на математический язык. Итак, у нас есть точка O, в которой расположен прожектор. Первое предположение, неявно спрятанное в физической задаче, следующее: ни один из отрезков не проходит через точку O. Далее, что означает, что точка A освещена либо затенена?

> Точка A освещена, если отрезок OA находится внутри освещенного сектора и не пересекается ни с одним из отрезков a_i, кроме, возможно, самой точки A.
>
> Точка A затенена отрезком a_i, если внутри отрезка OA встречается точка из a_i.

Базис индукции. Если у нас всего один отрезок AB, то он либо пересекается, либо не пересекается с освещенным сектором. Если он не пересекается, то выполнена первая возможность. Если же он пересекается, то либо хотя бы один из его концов лежит в освещенном секторе, либо же оба они лежат вне его. В первом случае соответствующий конец A освещен (либо же, если отрезок тянется вдоль луча OA, и B лежит на этом луче до A, то освещен B). Во втором возьмем произвольную точку C отрезка, лежащую внутри освещенного сектора. Отрезок не может лежать вдоль OC, так как его концы не освещены, значит, точка C освещена.

Шаг индукции. Пусть для любой системы из n отрезков имеет место один из рассмотренных случаев. Рассмотрим систему из $n+1$ отрезка. Удалим из нее последний отрезок. Рассмотрим три возможных случая для получившейся системы.

Если ни один из отрезков $a_1, \ \ldots, \ a_n$ не освещен, то ни один из них не пересекается с сектором освещения, и все рассматривается точно так же, как в базисе индукции, в соответствии с положением последнего отрезка.

Если некоторые из концов отрезков были освещены, то рассмотрим, затеняет ли их отрезок a_{n+1}. Если все освещенные концы им затеняются, то остается рассмотреть два подслучая:

1. Хотя бы один из концов a_{n+1} лежит в секторе освещения. Тогда хотя бы один из его концов будет освещен, и выполнен второй случай.

2. Оба конца этого отрезка лежат вне сектора освещения. Тогда он затеняет все остальные отрезки, а его пересекающаяся с сектором освещения часть полностью освещена.

В программировании математическая индукция соответствует циклам типа пересчета (for i:=0 to k do языка Паскаль).

Применение математической индукции, конечно же, содержит много тонкостей. Приведем несколько софизмов, доказываемых при помощи неправильного применения индукции.

Пример 6.1.4. Докажем, что все лошади одного цвета. Действуем по индукции. Параметр индукции — число n лошадей в их множестве.
Базис. $n = 1$. Одна лошадь, естественно, одного цвета. Точнее, все лошади, принадлежащие одноэлементному множеству лошадей, одного цвета.
Шаг. Пусть доказано для n. Докажем для $n+1$. Возьмем произвольное множество Л из $n+1$ лошади. Удалим из него некоторую лошадь $л_0$. По предположению индукции, $Л_0 = Л \setminus \{л_0\}$ состоит из лошадей одного цвета. Теперь удалим из $Л_0$ некоторую лошадь $л_1$ и добавим туда $л_0$. Полученное множество $Л_1$ также состоит из лошадей одного цвета, значит, $л_0$ того же

цвета, что и остальные лошади из $Л_1$, а они являются элементами $Л_0$ и того же цвета, что и $л_1$. Что и требовалось доказать.

Пример 6.1.5. Докажем, что все ученые — лысые.

Документально засвидетельствовано, что у некоторых академиков на голове не осталось ни одного волоса. Тогда они, естественно, лысые.

Но если лысому человеку добавить один волос, то он останется лысым. Значит, по индукции получаем, что ученые с любым количеством волос на голове лысые.

Ошибки найдите сами.

Принцип математической индукции допускает несколько переформулировок, которые в традиционной математике эквивалентны исходному принципу.

Первая из них — *возвратная индукция*. Здесь переход происходит не от одного значения к следующему, а от всех предыдущих значений к последующему, шаг индукции переводит не от $A(n)$ к $A(n+1)$, а от $\forall x < n\, A(x)$ к $A(n)$. Как ни парадоксально, при таком переходе не требуется базиса индукции. В самом деле, поскольку условие $x < 0$ тождественно ложно, то поскольку из лжи следует все, что угодно, имеем

$$\forall x(x < 0 \Rightarrow A(x)),$$

а отсюда по шагу индукции имеем $A(0)$.

Соответственно, формулировка принципа возвратной индукции следующая:

$$\forall x\,(\forall y(y < x \Rightarrow A(y)) \Rightarrow A(x)) \Rightarrow \forall x\, A(x).$$

Докажем при помощи возвратной индукции следующее предложение.

Пример 6.1.6. Сумма внутренних углов любого плоского n-угольника без самопересечений равна $\pi \cdot (n-2)$.

Для треугольника это доказывается в элементарной математике, а многоугольников с числом углов меньше 3 нет. Таким образом, утверждение индукции доказано для всех $n \leqslant 3$.[1]

Пусть имеется многоугольник с числом сторон $n > 3$, и для всех $k < n$ утверждение индукции уже доказано. Возьмем в многоугольнике любые три смежные вершины A,B, C. Из вершины B либо виден один из других углов

[1] Хотя мы только что обращали внимание на то, что *формально* возвратная индукция базиса не требует, фактически подобие базиса появляется практически в каждом таком доказательстве, поскольку случаи для наименьших возможных n обычно приходится рассматривать отдельно.

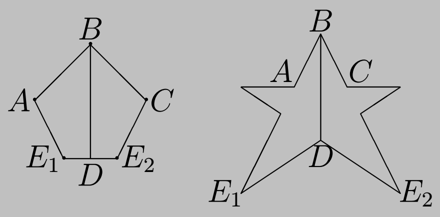


Рис. 6.1: Предложение о внутренних углах многоугольника

D[2], либо не виден ни один, и тогда все лучи, лежащие в угле ABC первой пересекают одну и ту же сторону многоугольника.

В последнем из случаев могу быть еще два подслучая, симметричных друг другу. Если на продолжении одной из сторон BA, BC первой встречается некоторая вершина D, либо никакой вершины не встречается. Тогда могут быть два случая (см. 6.1).

1. Луч первой пересекает одну из сторон многоугольника. Тогда многоугольник разбивается лучом на два многоугольника. В каждом из них появляется одна новая вершина D, но пары вершин $\{A, E_1\}$, $\{B, E_2\}$ лежат в разных многоугольниках, так что каждый из них содержит меньшее число вершин, чем исходный. Пусть один из них содержит m_1 вершин, а второй — m_2. Тогда $m_1+m_2 = n+2$ (поскольку вершина B теперь принадлежит обоим многоугольникам, а D вообще новая и также принадлежит им обоим). Соответственно, вычисляя по индукции сумму внутренних углов нашего многоугольника, получаем:

$$\pi \cdot (m_1 - 2) + \pi \cdot (m_2 - 2) = \pi \cdot (n + 2 - 4) = \pi \cdot (n - 2).$$

2. Луч прежде всего входит в вершину многоугольника. Опять-таки многоугольник разбивается на два многоугольника. В каждом из них присутствуют две вершины исходного многоугольника B и D, а все остальные вершины распределены между ними. Каждый из получившихся многоугольников содержит меньше вершин, чем исходные, поскольку в нем не присутствует хотя бы одна из вершин A, C.

Еще одна переформулировка метода математической индукции была известна еще древним грекам, хотя явно сформулировали ее лишь в XVII веке. Это — *метод бесконечного спуска.*

[2]Виден — означает, что отрезок BD целиком лежит внутри *открытого* многоугольника

> Если для каждого натурального числа, удовлетворяющего свойству $A(n)$, найдется меньшее, удовлетворяющее этому же свойству, то чисел n, для которых выполнено $A(n)$, вообще нет. Или формально:

$$\forall n\,(A(n) \Rightarrow \exists m(m < n \,\&\, A(m))) \Rightarrow \forall n\,\neg A(n). \tag{6.2}$$

Метод бесконечного спуска получается просто контрапозицией шага из возвратной индукции по $\neg A(n)$, а попробуйте Вы усмотреть это из их содержательных формулировок!

Рассмотрим теперь пример применения метода бесконечного спуска.

Пример 6.1.7. Докажем, что абсурдно предположение, что у каждого человека мать являлась человеком. В самом деле, за все время существования Земли на ней жило конечное число людей. Пусть у каждого человека мать — человек. Упорядочим людей по моментам рождения. Список всех бывших людей в порядке времени рождения назовем Книгой Судеб.[3] Мать рождается раньше своих детей, и поэтому в Книге Судеб она стоит раньше. Таким образом, для каждого человека найдется стоящий раньше него в Книге Судеб. По принципу бесконечного спуска, получаем, что людей вообще нет и не было, что абсурдно.[4] Полученное противоречие доказывает утверждение.

Еще одно следствие из возвратной индукции, эквивалентное ей[5]: принцип наименьшего числа.

Предложение 6.1.1. *Во всяком непустом множестве натуральных чисел найдется наименьший элемент.*

Доказательство. Принцип наименьшего числа является контрапозицией принципа бесконечного спуска. □

Если у нас выполнен принцип наименьшего числа, то поскольку это наименьшее число одно и только одно в каждом непустом множестве, появляется новая кванторная операция: *квантор минимизации* $\mu x\, x \in X$ либо, поскольку подмножество определяется свойством, $\mu x\, A(x)$. Такое выражение означает наименьшее число, обладающее данным свойством.

И наконец, рассмотрим еще одну переформулировку возвратной индукции, также эквивалентную ей:[6] принцип убывающей последовательности.

---

[3] Книга Судеб — легендарная книга, в которую Аллах записал еще до сотворения Земли судьбу каждого человека.

[4] Правда, Диоген искал хотя бы одного человека в Афинах днем с огнем ...

[5] Но только в классической математике!

[6] И не только в классической математике!

Предложение 6.1.2. *Всякая убывающая последовательность натуральных чисел конечна.*

Доказательство. Если бы она была бесконечна, это противоречило бы принципу бесконечного спуска. Теперь выведем принцип бесконечного спуска из конечности убывающих последовательностей. Если бы для каждого n_i, удовлетворяющего свойству $A(n_i)$, нашлось бы меньшее его n_{i+1}, удовлетворяющее этому же свойству, то получившаяся последовательность была бы бесконечной убывающей, чего не может быть. Таким образом, от противного обоснован метод бесконечного спуска. □

Упражнения к §6.1

6.1.1. Вернемся к ситуации из примера 6.1.3 и несколько видоизменим ее.

1. Что изменится, если $180° \leqslant \alpha < 360°$?
2. Что изменится, если разрешить счетное число отрезков?

6.1.2. Рассмотрим следующее индуктивное рассуждение.

> Пусть даны n джентльменов (натуральных, хорошо воспитанных, а не одесских) и k бутербродов. Докажем, что все джентльмены скорее останутся голодными, чем притронутся к бутербродам.
>
> *Базис индукции*. Пусть бутерброд всегда один. тогда приведенное утверждение очевидно, поскольку следует из благовоспитанности джентльменов, которые прежде всего думают о том, как не причинить неудобств другому джентльмену, что произошло бы, если бы джентльмен съел бутерброд и тем самым лишьл бы других такой возможности.
>
> *Шаг индукции*. Пусть предложение доказано для n бутербродов. Добавим еще один. Тогда, если какой-то джентльмен съест бутерброд, то он сведет ситуацию к предыдущей, в которой, как уже было жоказано, ни один джентльмен не притронется к бутерброду. так что настоящий джентльмен на такой шаг не пойдет.
>
> В чем здесь софизм?

6.2 Об индуктивных определениях

Индуктивное определение имеет следующую общую форму:

(Базис индукции) Выражения вида A есть B.

(Шаг индукции) Если мы имеем выражения $\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_n$ типа B, то C, построенное из них, также есть выражение типа B.

С каждым индуктивным определением связан *принцип индукции по построению объекта типа* B.

(**Базис индукции**) Каждый объект вида A обладает свойством θ.

(**Шаг индукции**) Если $\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_n$ обладают свойством θ, то и C им обладает.

(**Заключение индукции**) Тогда любой объект типа B обладает свойством θ.

Этот принцип является логическим выражением следующего неявного пункта, присутствующего в любом индуктивном определении: никаких других объектов типа B, кроме полученных применением правил его определения, нет. Иными словами, множество объектов типа B — минимальное из тех, которые включают базисные объекты и замкнуты относительно шага индукции. В простых определениях эту минимальность можно выразить следующим образом: объект должен получаться из базисных конечным числом применений шагов определения. Но в современной теории часто приходится рассматривать определения, включающие шаги, опирающиеся на бесконечное множество ранее построенных объектов. Тут индукция остается единственным корректным и инвариантным способом выражения минимальности.[7]

Стоит отметить, что логическая индукция по построению вовсе не требует однозначности представления объекта в форме, соответствующей одному из пунктов его определения. Но для задания функций индукцией по построению такая однозначность необходима.

Теперь рассмотрим другие возможности, связанные с индуктивными определениями. Часто несколько понятий вводятся совместным индуктивным определением, в котором в каждом шаге могут участвовать уже построенные понятия разных типов. Для того чтобы превратить раздельные определения формулы и терма в совместное, достаточно ввести пункт типа: если $A(x)$ — формула, то $\varepsilon x\, A(x)$ — терм.[8] В совместных определениях индукцию и рекурсию по построению приходится вести одновременно для всех понятий. Далее, в математических теориях широко применяются определения, в шагах которых могут быть ссылки на бес-

[7] В теории множеств часто определяют множество объектов типа B при помощи следующей процедуры: возьмем пересечение всех множеств объектов, включающих базис определения и замкнутых относительно его шага. Но такое определение, с одной стороны, включает в себя скрытый порочный круг (B определяется в том числе и через само B); с другой стороны, оно не сохраняется при переходе к неклассической логике.

[8] Эти термы были введены Д. Гильбертом. Их семантика — выбрать такое x, что $A(x)$, если такое x существует; в противном случае взять некоторое стандартное значение.

$$\forall x\,(A(x) \Rightarrow \exists y\ \ (B(y)\ \&\ D\,(x, y, \varphi(x, y))))$$

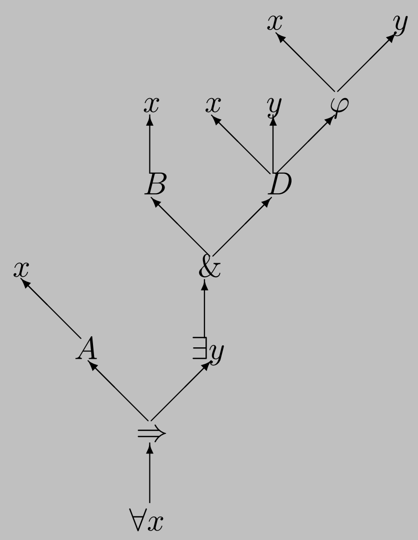


Рис. 6.2: Формула и соответствующее ей дерево

конечное множество ранее построенных понятий. Они также допустимы, но, конечно, уже не могут быть *прямо* перенесены на представление данных в программах.

Часто отмечается возможность представления логических формул в виде дерева. На самом деле в такой же структуре представляются любые индуктивно определенные понятия. Но называть структуру данных, соответствующую индуктивным определениям, просто деревом несколько неточно. Как известно, дерево — это ориентированный граф, в котором имеется корень и в любую другую вершину ведет ровно один путь из корня. Таким образом, по определению графа, ребра, выходящие из любой вершины дерева, равноправны. Структура же, соответствующая индуктивному понятию, является *нагруженным* деревом, вершинам которого сопоставлены слова, а ребра помечены согласно роли их назначения в структуре понятия. Например, на 6.2 даны формула и соответствующее нагруженное дерево.

Рассмотрение деревьев, соответствующих построению индуктивных объектов, позволяет вывести мощную и не очень зависящую от изменений взгляда на математику характеризацию минимальности класса объектов, задаваемых индуктивным определением. *Дерево с конечными путями* — такое, в котором нет ни одного бесконечного пути, и значит, каждый путь, который не может быть продолжен, заканчивается в листе.

Теорема 6.1. *Каждому примеру индуктивно определенного понятия сопоставляется нагруженное дерево с конечными путями.*

Доказательство. Рассуждаем индукцией по построению. Понятиям, построенным согласно базисам определения, сопоставляются деревья из одной вершины. Если всем A_i, участвующим в определении B, сопоставлены деревья T_i, то B сопоставляется дерево, корнем которого является построение самого B, ветви, выходящие из корня, помечены номерами i, и за i-той дугой следует дерево T_i. Любой путь, выходящий из B, проходит через какую-то i-тую ветвь и продолжается как путь в T_i, который конечен по предположению индукции.

Итак, индукцией по определению мы установили соответствие понятий и деревьев с конечными путями. И обратно, деревья с конечными путями являются одним из мощных средств определять структуры данных, по которым можно вести индукцию. Общую формулировку индукции для таких деревьев впервые установил голландский математик Брауэр (L.E.J. Brouwer) в 1928 г. средствами неклассической математики, а затем она была доказана и традиционными средствами, правда, доказательство совершенно другое и с точки зрения использования как основы для алгоритма никуда не годное.[9] Через $a \ll b$ обозначим отношение "b непосредственно следует за a", т.е. дуга ведет из a в b; через $\mathsf{L}(a)$ – предикат "быть листом".

Теорема 6.2. (**Теорема Брауэра, bar-индукция**) *Если* T *– дерево с конечными путями и выполнены базис и шаг индукции:*

$$\forall x\,(\mathsf{L}(x) \Rightarrow \mathsf{A}(x))$$

$$\forall x\,(x \in \mathsf{T}\ \&\ \forall y\,(x \ll y \Rightarrow A(y)) \Rightarrow A(x))\,,$$

то $\forall x\,(x \in \mathsf{T} \Rightarrow A(x))$.

Доказательство. Действуем от противного. Предположим, что есть такое $a_0 \in \mathsf{T}$, что $\neg A(a_0)$. По шагу индукции, тогда существует a_1, такое, что $a_0 \ll a_1$ и $\neg A(a_1)$. a_1 не может быть листом, поскольку для листьев A верно по базису индукции; значит, для него в свою очередь можно найти a_2, $a_1 \ll a_2$ и $\neg\mathsf{A}(a_2)$. Продолжая таким образом, получаем бесконечный путь в T, чего быть не может.

[9]Но ниже приведено именно классическое доказательство; для неклассического у нас пока что не хватит ни знаний, ни техники.

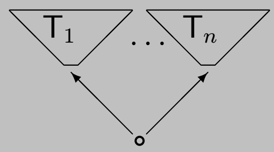


Рис. 6.3: Структура веера

Важным частным случаем деревьев с конечными путями являются *веера*. Дерево имеет конечное ветвление, если из каждой вершины выходит конечное число дуг. *Веер* — дерево с конечными путями и конечным ветвлением. Следствием bar-индукции является следующий результат, история которого также необычна. Он сначала был доказан Брауэром в нетрадиционной математике, существенно неклассическими методами, а затем передоказан классическими методами Кёнигом.

Лемма 6.2.1 (Теорема о веерах). *Любой веер конечен.*

Доказательство. Если веер состоит из одного элемента, он конечен. В противном случае веер представляется как на рисунке 6.3, где $\mathsf{T}_1, \ldots, \mathsf{T}_n$ — веера. По предположению индукции, все они конечны, и значит, общее число элементов в веере конечно.

Все вышесказанное не отменяет того, что индуктивное определение — достаточно опасный и тонкий прием. В частности, легко впасть в парадокс лжеца, индуктивно определив $A(x)$ через $\neg A(x)$. Поэтому *настоятельно не рекомендуется использовать отрицания в индуктивных определениях* и нужно следить за отсутствием порочных кругов, когда ответ, является ли E корректным выражением, зависит от самого себя.

Упражнения к §6.2

Корректны ли следующие индуктивные определения и, если они формально некорректны, как их исправить, если корректны формально, что они определяют и хороши ли они содержательно?

6.2.1. Пусть 2 – хорошее число; 3 – плохое число. Если n – хорошее, то $n+5$ – хорошее; если n - плохое, то $n+7$ – плохое.

6.2.2. Пусть 0 – нужное число; если $n+1$ и $n-1$ – нужные числа, то n – нужное число.

6.2.3. Элементарные формулы атомарны; если $\neg A$ – атомарная формула, то и A – атомарна.

6.2.4. Пусть 0 - хорошее число; если n - хорошее, то $n+1$ не является хорошим числом; если n – не хорошее число, то $n+1$ – хорошее.

6.2.5. Один английский математик XIX в. в связи с широко обсуждавшейся в то время проблемой вымирания знатных родов утверждал, что он построил модель развития человечества, в которой оно существует вечно, но потомки по мужской линии любого мужчины через конечное время исчезнут. Возможна ли такая модель? А как по женской линии?

6.3 Трансфинитная индукция и ординалы

6.3.1 Построение начального отрезка ординалов

Заметим, что индукция по индуктивному определению напоминает возвратную индукцию. Еще до того, как были осознаны индуктивные определения, было замечено, что возвратная индукция — гораздо более общий принцип, чем математическая, и переносится на многие другие множества.

Пример 6.3.1. Пополним множество натуральных чисел бесконечным числом ω, которое больше всех обычных чисел. На множестве $\mathbf{N}\cup\{\omega\}$ выполнен принцип возвратной индукции, и соответственно, принцип бесконечного спуска и принцип наименьшего числа.

В самом деле, для $n<\omega$ принцип возвратной индукции выполнен, поскольку они — натуральные числа. Значит, если выполнен шаг возвратной индукции, то выполнено $\forall n(n<\omega\Rightarrow A(n))$. Но тогда по шагу индукции выполнено и $A(\omega)$.

Первым предложил распространить принцип возвратной индукции на более широкое множество чисел германский математик Г. Кантор в третьей четверти XIX века. Он назвал пополнение натуральных чисел, при котором сохраняется возвратная индукция, — *трансфинитными* (сверхконечными) или *ординальными* (порядковыми) числами[10], а принцип индукции для них — *трансфинитной индукцией.* Таким образом, трансфинитная индукция — обычная возвратная индукция, но для трансфинитных чисел. Имеет смысл, как это часто делается в математике, превратить важнейшее для нас свойство в определение.

Определение 6.3.1. Вполне упорядоченное множество — линейно упорядоченное множество, для которого выполнен принцип возвратной индукции. Фундированное (частично вполне упорядоченное) множество — чум с возвратной индукцией.

[10]Часто называют их просто трансфинитами или ординалами. В настоящее время более популярно название ординалы или ординальные числа, а вот индукцию по-прежнему называют трансфинитной.

Начальный отрезок трансфинитных чисел есть смысл построить явно, поскольку он будет в дальнейшем использоваться при доказательствах индукцией.

Прежде всего, если добавить непосредственно следующее за ω ординал $\omega+1$, то получившееся множество чисел по-прежнему будет вполне упорядочено. Аналогично, если добавить конечное число ординалов до $\omega+n$ с естественным упорядочением. А за всеми $\omega+n$ естественно поставить ординал $2\cdot\omega$. Итак, начальный отрезок ординалов имеет следующую структуру:

$$0,1,\ldots,n,\ldots\ \omega,\omega+1,\ldots,\omega+n,\ \ldots\ 2\cdot\omega.$$

Но за $2\cdot\omega$ можно продолжать в том же духе, получая:

$$2\cdot\omega,2\cdot\omega+1,\ldots,2\cdot\omega+n,\ \ldots\ 3\cdot\omega.$$

Обобщая по всем натуральным числам, получаем следующий ряд:

$$0,1,\ldots,k,\ \ldots\ \omega,\omega+1,\ldots,\omega+k,\ \ldots\ 2\cdot\omega,\quad\ldots\quad n\cdot\omega\quad\ldots.$$

Но вслед за всеми этими ординалами вида $n\cdot\omega+k$ естественно поставить еще больший и назвать его ω^2. А за ω^2 выстраивается ряд, изоморфный предыдущему:

$$\begin{array}{l}\omega^2,\omega^2+1,\ldots,\omega^2+k,\ \ldots\ \omega^2+\omega,\omega^2+\omega+1,\ldots,\omega^2+\omega+k,\ \ldots\\ \omega^2+2\cdot\omega,\quad\ldots\quad\omega^2+n\cdot\omega\quad\ldots\quad 2\cdot\omega^2.\end{array}$$

А за всеми $k\cdot\omega^2+l\cdot\omega+n$ стоит ω^3.

Опять-таки продолжая по всем натуральным числам, получаем всевозможные ординалы вида

$$k_n\cdot\omega^n+k_{n-1}\cdot\omega^{n-1}+\cdots+k_1\omega+k_0.$$

За ними идет ординал, обозначаемый ω^ω. А за ним опять-таки цепочка его “сумм” со всеми предыдущими ординалами:

$$\omega^\omega+k_n\cdot\omega^n+k_{n-1}\cdot\omega^{n-1}+\cdots+k_1\omega+k_0.$$

Соответственно, так мы приходим к $2\cdot\omega^\omega$, и далее к $n\cdot\omega^\omega$. Если считать, что законы сложения степеней сохраняются (а уж мы постараемся их сохранить), то дальше идет $\omega^{\omega+1}$. Таким образом приходим к ординалам вида

$$\begin{array}{l}l_m\cdot\omega^{\omega+m}+l_{m-1}\cdot\omega^{\omega+(m-1)}+\cdots+l_1\omega^\omega+\\ k_n\cdot\omega^n+k_{n-1}\cdot\omega^{n-1}+\cdots+k_1\cdot\omega+k_0.\end{array}$$

А за ними идет ординал, который естественно обозначить $\omega^{2\cdot\omega}$. Продолжая данный процесс, мы приходим к ординалам вида

$$\omega^{\omega^{\cdots^{\omega}}}\ n \text{ раз.}$$

А за всеми этими башнями стоит ординал, который Г. Кантор назвал ε_0 и определил как наименьшее решение уравнения $\omega^\alpha = \alpha$. Слава Богу, в данном курсе нам не будут нужны явные выражения для ординалов, значительно больших, чем ε_0.

Теперь рассмотрим одно применение ординалов. Докажем, что любая программа вида

```
for i := 1 to k do begin
  S; for j := 1 to S1 do S2;
end;
```

заканчивается, если исполнения всех упомянутых в ней операторов S, $S1$, $S2$ заканчиваются и они не изменяют значений переменных цикла.

Пусть s — значение $S1$ к моменту начала нынешнего исполнения внутреннего цикла. Построим следующую функцию:

$$\varphi(i, j) = (k - i) \cdot \omega + (s - j). \tag{6.3}$$

На каждом шаге любого цикла эта функция уменьшается, и по вполне упорядоченности множества ординалов, за конечное число шагов она дойдет до 0, и программа закончится.

Заметим, что такой способ доказательства весьма экономен в мышлении. Нам не нужно оценивать результат каждого исполнения $S1$, зато мы сразу получаем все возможности, которые могут сорвать выполнение программы. Правда, мы не находим никакой явной оценки времени работы программы, но это не всегда нужно.

Проиллюстрированный выше метод называется в теории алгоритмов и теоретической информатике *методом сигнализирующих функций.* Чтобы доказать конечность некоторого процесса вычисления, строят функцию со значениями в фундированном множестве, убывающую на каждом шагу процесса. Для построения сигнализирующих функций часто удобнее всего использовать ординалы. При анализе практических программ хватает ординалов до ε_0.

6.3.2 Свойства вполне упорядоченных множеств

Исходя из переформулировок возвратной индукции, видим, что каждое непустое подмножество вполне упорядоченного множества имеет наименьший элемент и что каждая убывающая последовательность элементов конечна. Наименьший элемент вполне упорядоченного множества X

обозначается 0_X или просто 0, если X однозначно определяется из контекста. Далее, если некоторое подмножество X_0 вполне упорядоченного множества X ограничено сверху, то оно имеет точную верхнюю грань, а множество его строгих верхних границ — наименьший элемент, являющийся наименьшим элементом, превосходящим все элементы X_0. Этот элемент обозначим $\limsup X_0$ и назовем верхним пределом X_0. Например, ω — верхний предел множества натуральных чисел.

Предложение 6.3.1. *Если X и Y — два вполне упорядоченных множества, то выполнена одна и только одна из альтернатив:*

a) *Существует монотонно возрастающая инъекция X на начальный отрезок Y.*

b) *Существует монотонно возрастающая инъекция Y на начальный отрезок X.*

c) *X и Y изоморфны.*

Доказательство. Одновременно определим трансфинитной индукцией две функции $f : X \to Y$, $g : Y \to X$. Если уже определено $f(\alpha)$ для всех $\alpha \prec \beta$, то

$$f(\beta) = \begin{cases} \mu\gamma\,(\neg\,\exists\alpha(\alpha \prec \beta \,\&\, f(\alpha) = \gamma)) & X \setminus f\,\langle\{\alpha \mid \alpha \prec \beta\}\rangle \neq \emptyset \\ \mu\gamma\,(\gamma \in Y) & X \setminus f\,\langle\{\alpha \mid \alpha \prec \beta\}\rangle = \emptyset \end{cases}$$

Аналогично определяем g.

Обозначим наименьший элемент всего множества X — 0_X, наименьший элемент Y — 0_Y. Обозначим через X_0 следующее подмножество X:

$$X_0 \stackrel{\triangle}{=} \{x \mid x = 0_X \vee f(x) \neq 0_X\}\,. \tag{6.4}$$

Аналогично определяем Y_0. По построению, если $\alpha \in X_0$, $f\,\langle\{\beta \mid \beta \prec \alpha\}\rangle$ — начальный отрезок Y. Симметрично для g. Таким образом, множества X_0, Y_0 являются начальными отрезками X и Y соответственно.

Докажем, что f и g являются изоморфизмами между X_0 и Y_0. В самом деле, на X_0 f является инъекцией. Аналогично для g и Y_0. Далее, трансфинитной индукцией установим, что

$$\forall\alpha(\alpha \in X_0 \Rightarrow g(f(\alpha)) = \alpha). \tag{6.5}$$

В самом деле, пусть эта импликация выполнена для всех $\beta \prec \alpha$. Тогда, если $\alpha \in X_0$, то

$$\{\beta \mid \beta \prec \alpha\} = \{g(f(\beta)) \mid \beta \prec \alpha\}.$$

Но $f(\alpha) = \limsup\{f(\beta) \mid \beta \prec \alpha\}$. Значит,

$$g(f(\alpha)) = \limsup\{g(f(\beta)) \mid \beta \prec \alpha\} = \limsup\{\beta \mid \beta \prec \alpha\} = \alpha.$$

Таким образом, доказан изоморфизм начальных отрезков X и Y.

Теперь покажем, что если X изоморфно начальному отрезку Y, то этот отрезок определяется однозначно. Итак, пусть имеются два изоморфизма f_1 и f_2 вполне упорядоченного множества X на начальные отрезки Y_1 и Y_2 соответственно. По трансфинитной индукции легко доказывается, что для всех $x \in X$ $f_1(x) = f_2(x)$, а из такого равенства следует искомая однозначность.

Итак, если X изоморфно собственному начальному отрезку Y, то оно уже не может быть изоморфно самому Y, и наша трилемма доказана.
Конец доказательства.

Предложение 6.3.2. *Между двумя изоморфными вполне упорядоченными множествами есть только один изоморфизм.*

Доказательство. Рассмотрим два изоморфизма X на Y: φ_1 и φ_2. По трансфинитной индукции докажем их тождество.

Пусть для всех $\beta \prec \alpha$ $\varphi_1(\beta) = \varphi_2(\beta)$. Тогда, поскольку эти функции — изоморфизмы,

$$\begin{aligned} \varphi_1(\alpha)) &= \limsup\{\varphi_1(\beta) \mid \beta \prec \alpha\} \\ &= \limsup\{\varphi_2(\beta) \mid \beta \prec \alpha\} \\ &= \varphi_2(\alpha). \end{aligned}$$

□

Дадим теперь некоторые способы строить одни вполне упорядоченные множества по другим. Пусть у нас есть семейство вполне упорядоченных множеств $(X_i)_{i\in I}$ и множество индексов I также вполне упорядочено. Тогда на их прямой сумме естественно вводится линейный порядок, содержательно описываемый следующим образом: X_i располагается после X_j, если $i \succ j$:

$$(i, \alpha) \prec (j, \beta) \Leftrightarrow i \prec j \vee (i = j \ \&\ \alpha \prec \beta).$$

Доказательство. Докажем, что введенный порядок полный. В самом деле, возьмем произвольное непустое подмножество прямой суммы $Y \subset \bigoplus_{i\in I} X_i$. Возьмем его проекцию на I. Она непуста, значит, в ней найдется наименьшее i_0, такое, что $\exists\alpha(i_0, \alpha) \in Y$. А теперь в X_{i_0} найдется наименьшее α_0, такое, что $(i_0, \alpha_0) \in Y$. По определению порядка, (i_0, α_0) — наименьший элемент Y. □

Функции, в которых область определения — некоторое стандартное вполне упорядоченное множество (ординал), называются *ординальными последовательностями*. Они сохраняют основные свойства обычных последовательностей, в частности, если множество значений упорядочено, то последовательности можно упорядочить лексикографически, поскольку для двух разных последовательностей существует первый элемент, на котором они различаются.

Определение 6.3.2. Ординальное произведение ординальной последовательности вполне упорядоченных множеств — множество ординальных последовательностей их элементов, в которых лишь конечное число членов отлично от нуля, упорядоченное следующим отношением (I — множество индексов последовательности):[11]

$$a \prec b \Leftrightarrow \exists\alpha(\alpha \in I \ \&\ a(\alpha) \prec b(\alpha) \ \&\ \forall\beta(\beta \in I \ \&\ \beta \succ \alpha \Rightarrow a(\beta) = b(\beta))). \tag{6.6}$$

Предложение 6.3.3. *Ординальное произведение произвольной ординальной последовательности вполне упорядоченных множеств вполне упорядочено.*

Доказательство. Прежде всего докажем, что введенный порядок линейный. Рассмотрим две не равных друг другу последовательности a и b. Поскольку в каждом конечном линейно упорядоченном множестве имеется наибольший элемент, имеется такое α, что при всех $\beta \succ \alpha$ $a(\beta) = a(\alpha) = 0$. Значит, множество

$$I_{ab} \stackrel{\triangle}{=} \{\alpha \in I \mid \forall\beta(\beta \succ \alpha \Rightarrow a(\beta) = b(\beta))\}$$

непусто и имеет наименьший элемент α_0. Но для α_0 $a(\alpha_0) \neq b(\alpha_0)$. Этот факт требует отдельного обоснования.

В самом деле, если α_0 таково, что

$$\forall\beta(\beta \in I \ \&\ \beta \prec \alpha_0 \Rightarrow a(\beta) = b(\beta)), \tag{6.7}$$

то значения обязаны различаться по предположению, поскольку и для всех меньших, и для всех бóльших индексов они равны. Если же условие 6.7 не выполнено, то найдется наибольшее $\alpha_1 \prec \alpha_0$, на котором они различаются, и для α_1 выполняется характеристическое свойство множества I_{ab}, что противоречит определению α_0. □

[11] Введенный порядок можно назвать антилексикографическим.

6.3.3 Представления ординалов. Действия над ординалами.

В теории множеств ординальные числа определяются как представители каждого класса изоморфных вполне упорядоченных множеств. Поскольку здесь целый класс, а не множество, приходится обходиться без аксиомы выбора и строить их явно. Здесь помогает аксиома фундированности. Из нее вытекает следующее утверждение:

Предложение 6.3.4. *Если множество X линейно упорядочено отношением*

$$\{(x, y) \mid x \in X \mathbin{\&} y \in X \mathbin{\&} x \in y\},$$

то оно вполне упорядочено им.

Доказательство. Пусть Y — непустое подмножество X. По аксиоме фундированности, в Y имеется элемент, не пересекающийся с самим Y. Значит, он минимален по отношению $\in$. Следовательно, каждое непустое подмножество X имеет наименьший элемент, что и требовалось доказать. □

Определение 6.3.3. Множество называется *транзитивным*, если $\in$ является на нем отношением порядка. *Ординал* — транзитивное линейно упорядоченное множество.

Считается, что ординал α меньше β ($\alpha \prec \beta$), если α изоморфен собственному начальному отрезку β.

Из сказанного выше видно, что данное определение ординала является всего-навсего определением одного из возможных представлений ординалов, а опыт вдобавок подсказывает, что такое представление — одно из наименее удобных для использования в приложениях, да и в областях математики, имеющих дело с вычислимостью. Оно отказывает и при малейших изменениях аксиоматической системы теории множеств. А вот сущности, которые стоят за ординалами, — классы изоморфных вполне упорядоченных множеств, которые часто называют типами вполне упорядочений, применимы гораздо шире, чем любое из их конкретных представлений.

Имея какое-то представление ординалов, можно доказывать результаты про них, а из этих результатов получать новые представления ординалов, может быть, не всех, но зато более применимые. Это — обычный путь разработки понятий для нужд прикладной математики.

Предложение 6.3.5. *1. Если два ординала изоморфны, они равны.*

2. *Любой ординал совпадает с множеством всех ме́ньших его ординалов.*

3. $\alpha \prec \beta \Leftrightarrow \alpha \subset \beta$.

4. *Объединение произвольного множества ординалов является ординалом.*

Доказательство. Первый пункт легко доказывается трансфинитной индукцией.

Докажем второй пункт. Любой элемент ординала является ординалом, и ме́ньшим его. В самом деле, он является, по транзитивности, множеством, линейно упорядоченным отношением $\in$. Далее, он определяет некоторый начальный отрезок данного ординала, и, соответственно, не изоморфен ему, но вкладывается в него. Теперь докажем, что любой начальный отрезок ординала, не совпадающий с ним, принадлежит ординалу. В самом деле, если X — начальный отрезок ординала α, и $X \neq \alpha$, то в ординале есть элемент $\beta_0 \in \alpha$, такой, что $\gamma \in \beta_1$ для всех $\gamma \in X$. Но тогда, поскольку $\beta_0 \neq X$, имеем такое $\beta_1 \in \beta_0$, которое обладает такими же свойствами, и т.д. Итак, мы получили бесконечную убывающую последовательность, что противоречит вполне упорядоченности. А ординалы, меньшие данного, по первому пункту совпадают с его начальными отрезками.

Следующий пункт вытекает из второго.

Последний пункт легко доказать самим. □

Определение 6.3.4. 1. Ординал α называется *предельным*, если нет наибольшего ординала β, такого, что $\beta \prec \alpha$; *непредельным*, если такой ординал есть.

2. Наименьший ординал β, такой, что $\alpha \prec \beta$, называется *следующим за* α и обозначается $\mathsf{S}\alpha$.[12] Наименьший ординал обозначается 0.[13] Ординал $\mathsf{S}0$ называется единицей и обозначается 1. Соответственно, для остальных натуральных чисел. Наименьший предельный ординал, бо́льший 0, обозначается ω.

3. Пределом возрастающей ординальной последовательности ординалов

$$\lim_{\beta\to\gamma} \alpha_\beta$$

[12]Таким образом, в теории множеств $\mathsf{S}\alpha = \alpha \cup \{\alpha\}$.

[13]Таким образом, ординальный 0 — это $\emptyset$.

называется наименьший ординал δ, такой, что

$$\forall\beta(\beta \prec \gamma \Rightarrow \alpha_\beta \prec \delta).$$

4. Суммой ординальной последовательности ординалов $(\alpha_i)_{i\in\beta}$ называется ординал, изоморфный ординальной сумме соответствующих вполне упорядоченных множеств. Сумма последовательности обозначается

$$\sum_{i\in\beta}\alpha_i$$

либо просто $\alpha_1 + \dots + \alpha_n$ для конечных последовательностей.

5. Произведением ординальной последовательности ординалов называется ординал, изоморфный ее ординальному произведению. Произведение обозначается

$$\prod_{i\in\beta}\alpha_i$$

либо просто $\alpha_1 \cdot \ \cdots \ \cdot \alpha_n$ для конечных последовательностей.

6. Степенью ординала α^β называется ординал

$$\prod_{i\in\beta}\alpha,$$

где все члены произведения одинаковые.

Рассмотрим некоторые свойства введенных операций.

Предложение 6.3.6. *1.* $\mathsf{S}\alpha = \alpha + 1$, $0 + \alpha = \alpha + 0 = \alpha$.

2. $0 \cdot \alpha = \alpha \cdot 0 = 0$, $1 \cdot \alpha = \alpha \cdot 1 = \alpha$.

3. Если $\alpha \succ \beta$, *то* $\gamma + \alpha \succ \gamma + \beta$.

4. Сумма ассоциативна, и, более того, бесконечно ассоциативна. А именно, если $(Y_j)_{j\in\gamma}$ *— такое разбиение* β *на непересекающиеся отрезки, что*

$$\forall\delta_1, \delta_2\left(\delta_2 \prec \gamma \,\&\, \delta_1 \prec \delta_2 \Rightarrow \forall\zeta_1, \zeta_2\left(\zeta_1 \in Y_{\delta_1} \,\&\, \zeta_2 \in Y_{\delta_2} \Rightarrow \zeta_1 \prec \zeta_2\right)\right),$$

то

$$\sum_{i\in\beta}\alpha_i = \sum_{j\in\gamma}\sum_{i\in Y_j}\alpha_i.$$

5. *Если* $\alpha \succ \beta$, *то* $\gamma \cdot \alpha \succ \gamma \cdot \beta$.

6. *Произведение бесконечно ассоциативно. А именно, если* $(Y_j)_{j \in \gamma}$ — *такое разбиение* β *на непересекающиеся отрезки, что*

$$\forall \delta_1, \delta_2 \left(\delta_2 \prec \gamma \ \& \ \delta_1 \prec \delta_2 \Rightarrow \forall \zeta_1, \zeta_2 \left(\zeta_1 \in Y_{\delta_1} \ \& \ \zeta_2 \in Y_{\delta_2} \Rightarrow \zeta_1 \prec \zeta_2\right)\right),$$

то

$$\prod_{i \in \beta} \alpha_i = \prod_{j \in \gamma} \prod_{i \in Y_j} \alpha_i.$$

7. $\alpha^0 = 1$, $\alpha^1 = \alpha$, $1^\alpha = 1$.

Доказательство. Самый нетривиальный пункт здесь — 4 и аналогичный ему для произведения. Рассмотрим структуру двойной суммы. Она состоит из элементов вида $(\delta, (\iota, \kappa))$, где $\delta \in \gamma$, $\iota \in Y_\delta$, $\kappa \in \alpha_\iota$. Но δ однозначно определяется через ι и не влияет на порядок элементов. Установленный изоморфизм доказывает равенство ординалов.

Для произведения мы имеем функцию, результатом которой также является функция, а именно, элементом произведения является функция, перерабатывающая каждое $j \in \gamma$ в функцию из Y_j в $\cup_{i \in Y_j} \alpha_i$. Но в конце концов данная функция может быть представлена как множество множеств троек того же вида, что и в предыдущем абзаце. В этом множестве множеств лишь конечное число троек с отличным от нуля третьим элементом, а первый элемент однозначно определяется вторым, так что опять имеет место изоморфизм с одинарным произведением.
Конец доказательства.

То, что операции над ординалами некоммутативны, легко увидеть на следующем примере. Если $\omega+1$ — следующий за ω ординал, который мы так и обозначаем, то $1-\omega = \omega$. В самом деле, если к натуральному ряду в начале присоединить еще один элемент, то полученное упорядоченное множество изоморфно натуральному ряду.

Предложение 6.3.7. *Функция сложения ординалов — единственная, удовлетворяющая следующим рекурсивным уравнениям:*[14]

$$\begin{cases} \alpha + 0 = \alpha; \\ \alpha + \mathsf{S}\,\beta = \mathsf{S}(\alpha + \beta); \\ \alpha + \lim \beta_\gamma = \lim(\alpha + \beta_\gamma), \end{cases} \tag{6.8}$$

где $(\beta_\gamma)_{\gamma \in \delta}$ — *возрастающая ординальная последовательность ординалов.*

[14] Уравнение (определение функции) называется *рекурсивным*, если оно прямо или косвенно выражает значения функции через другие значения той же функции.

Еще создатель теории ординалов Г. Кантор заметил, что каждое ординальное число однозначно разлагается по степеням ω, т.е. представляется в виде

$$\omega^{\alpha_1} \cdot n_1 + \cdots + \omega^{\alpha_k} \cdot n_k, \tag{6.9}$$

где $\alpha_1 \succ \alpha_2 \succ \cdots \succ \alpha_k$, $n_i > 0$. (Здесь учитывается, что $\omega^0 = 1$). Польский математик К. Куратовский заметил, что в качестве основания разложения может быть взят любой ординал > 1 (опять полная аналогия с натуральными числами и системами счисления), но, считая ω-ичную систему самой удобной, предложил переопределить действия над ординалами в соответствии с действиями над натуральными числами, записанными в позиционной системе счисления. Определим сложение и умножение по Куратовскому $\oplus$ и $\otimes$(см. [18]). Прежде всего разрешим нулевые коэффициенты и тогда можно считать, что у двух чисел последовательности степеней α_i совпадают (в случае необходимости добавляем члены $\omega^\alpha \cdot 0$).

$$\begin{aligned}(\omega^{\alpha_1} \cdot n_1 + \cdots + \omega^{\alpha_k} \cdot n_k) \oplus (\omega^{\alpha_1} \cdot m_1 + \cdots + \omega^{\alpha_k} \cdot m_k) &= \\ \omega^{\alpha_1} \cdot (n_1 + m_1) + \cdots + \omega^{\alpha_k} \cdot (n_k + m_k).\end{aligned} \tag{6.10}$$

$$\begin{aligned}(\omega^{\alpha_1} \cdot n_1 + \cdots + \omega^{\alpha_k} \cdot n_k) \otimes (\omega^{\alpha_1} \cdot m_1 + \cdots + \omega^{\alpha_k} \cdot m_k) &= \\ \textstyle\sum_k \omega^{\beta_k} \cdot \sum_{\alpha_i \oplus \alpha_j = \beta_k} (n_i \cdot m_j),\end{aligned} \tag{6.11}$$

где (β_k) — конечная, упорядоченная в порядке возрастания последовательность ординалов, представляемых в виде $\alpha_i \oplus \alpha_j$. Арифметика ординалов по Куратовскому обладает следующими свойствами:

Предложение 6.3.8. *1.* $\alpha \oplus \beta = \beta \oplus \alpha$, $\alpha \otimes \beta = \beta \otimes \alpha$.

2. Обе эти операции ассоциативны.

3. $(\alpha \oplus \beta) \otimes \gamma = \alpha \otimes \gamma \oplus \beta \otimes \gamma$.

4. $\alpha \oplus \beta \succcurlyeq \alpha + \beta$; $\alpha \otimes \beta \succcurlyeq \alpha \cdot \beta$.

5. $\alpha_1 \succ \alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 \oplus \beta \succ \alpha_2 \oplus \beta$.

6. $\alpha_1 \succ \alpha_2 \;\&\; \beta \succ 0 \Rightarrow \alpha_1 \otimes \beta \succ \alpha_2 \otimes \beta$.

Доказательство остается читателям.

Поскольку ординалы в основном применяются для оценок, а для оценок, как правило, удобство важнее точности, операции по Куратовскому все чаще вытесняют обычные операции над ординалами.

> Предупреждение. Возведение в ординальную степень по Куратовскому уже не определишь, поскольку базисные операции перестают быть непрерывными и к пределу не перейдешь.

Обратим внимание еще на одно важное свойство ординальных функций.

Определение 6.3.5. Функция из ординалов в ординалы f называется *непрерывной*, если она перестановочна с пределом последовательностей:

$$f(\lim_{\beta\to\gamma}\alpha_\beta) = \lim_{\beta\to\gamma} f(\alpha_\beta).$$

Теорема 6.3. (Теорема Веблена) *Для любой непрерывной возрастающей функции ординалов f найдется неподвижная точка, т.е. такое α_f, что*

$$f(\alpha_f) = \alpha_f.$$

Доказательство. Рассмотрим следующую возрастающую последовательность:

$$\alpha - 0 = 0, \alpha_1 = f(0), \alpha_2 = f(f(0)), \ldots, \alpha_{n+1} = f(\alpha_n)\ \ldots$$

Ее предел и является искомой неподвижной точкой, поскольку

$$f(\lim_{n\to\omega}\alpha_n) = \lim_{n\to\omega} f(\alpha_n) = \lim_{n\to\omega}\alpha_{n+1} = \lim_{n\to\omega}\alpha_n.$$

Конец доказательства.

Эта теорема явилась первой из множества теорем о неподвижной точке, составивших в нынешнее время основу математической теории функционального программирования. Но, конечно, когда Веблен доказывал ее в 1912 г., он и не мог подумать о таком ее использовании. Зато Веблен прекрасно понимал ее приложимость к построению больших ординалов, намного бóльших, чем ϵ_0, являющийся всего лишь наименьшей неподвижной точкой функции $\lambda\alpha.\omega^\alpha$.

6.3.4 Определение функций рекурсией по определению либо параметру

В приведенных выше рассмотрениях нам встречались примеры построения значений функций по трансфинитной индукции. Естественно, для построения значений можно применять и все остальные виды индукции.

Функция, определяемая по индукции, в алгебраическом смысле определяется сама через себя (см., например, уравнения для ординального сложения 6.8).

Вы скажете, зачем такие тонкости, ведь в языках программирования мы просто определяем функцию рекурсией саму через себя либо через другие функции. Да, в языке программирования так оно и записывается, но чтобы обосновать корректность такого определения,[15] приходится выявлять тот параметр либо то определение, по которому на самом деле идет рекурсия. Сейчас мы ограничимся тем, что приведем заведомо корректные способы индуктивного построения функций по параметрам-ординалам (т. н. трансфинитная рекурсия).

Пример 6.3.2. Система рекурсивных уравнений

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(x,0) & = & x \\ f(x,\mathsf{S}\,y) & = & \mathsf{S}\,f(x,y) \end{array}\right. \tag{6.12}$$

определяет сложение натуральных чисел. Для сложения ординалов эту систему нужно пополнить еще одним уравнением:

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(x,0) & = & x \\ f(x,\mathsf{S}\,y) & = & \mathsf{S}\,f(x,y) \\ f(x,\lim_{\gamma\to\delta}\alpha_\gamma) & = & \lim_{\gamma\to\delta} f(x,\alpha_\gamma) \end{array}\right. \tag{6.13}$$

Пример 6.3.3. Система рекурсивных уравнений

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(x,0) & = & 0 \\ f(x,\mathsf{S}\,y) & = & f(x,y)+x \end{array}\right. \tag{6.14}$$

определяет умножение натуральных чисел. Для умножения ординалов эту систему нужно пополнить еще одним уравнением:

$$f(x,\lim_{\gamma\to\delta}\alpha_\gamma) \;=\; \lim_{\gamma\to\delta} f(x,\alpha_\gamma). \tag{6.15}$$

Таким образом, вид трансфинитной рекурсии, соответствующий простой математической индукции, следующий:

Примитивная трансфинитная рекурсия

Базис. Задаем $f(0,\bar{x})$.

[15] Под корректностью здесь понимается не то, что транслятор не выдал ошибки, а правильная работа получившейся программы: она не зацикливается и не зависает, на приличных данных требует приличное количество ресурсов и времени и делает то, чего мы от нее хотели.

Шаг для непредельных ординалов. Определяем $f(\mathsf{S}\,\alpha, \bar{x})$ как $g(f(\alpha, \bar{x}), \alpha, \bar{x})$.

Шаг для предельных ординалов Определяем $f(\alpha, \bar{x})$ как

$$h\left(\lim_{\beta\to\alpha} f(\beta, \bar{x})\right).$$

Параметры $\bar{x}$, как видно из определения умножения, хотя и не участвуют в самой рекурсии, оставаясь фиксированными во всем определении, могут существенно использоваться при вычислении следующего значения f.

Упражнения к §6.3

6.3.1. Вычислите $\limsup \mathbf{N} \cup \{\omega\}$.

6.3.2. Проверьте недоказанные пункты из 6.3.6.

6.3.3. Верно ли, что $\alpha \cdot \beta = \sum_{i\in\beta} \alpha$?

6.3.4. Всегда ли существует $\lim_{\beta\to\gamma} \alpha_\beta$?

6.3.5. Вычислите $\omega \cdot 2$ и $2 \cdot \omega$.

6.3.6. Имеет ли место закон дистрибутивности:

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma.$$

6.3.7. Проверьте, выполнено ли $(\alpha + \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma$.[16]

6.3.8. Студент Талантов заявил, что оговорка насчет конечных кортежей совершенно излишняя и что множество

$$\prod_{i\in I} X_i$$

вполне упорядочено лексикографическим порядком, если I и все X_i вполне упорядочены. Что Вы ему ответите?

6.3.9. Можно ли перенести ‘антилексикографический’ порядок на все ординальные последовательности?

6.3.10. А всегда ли $\alpha^0{=}1$? А как насчет 0^α?

6.3.11. Докажите предложение Куратовского на стр. 154.

[16] Подсказка. Здесь и в предыдущем упражнении рассмотрите $(\omega + 1) \cdot (\omega + 1)$.

6.3.12. Можно ли обобщить операции по Куратовскому на ординальные последовательности операндов?

6.3.13. В одной работе как очевидное было упомянуть следующее тождество:

$$\alpha^2 = \alpha \otimes \alpha.$$

Проверьте эту 'очевидность'.

6.3.14. Являются ли сумма и произведение по Куратовскому непрерывными по какому-то из аргументов?

6.3.15. Дайте рекурсивное определение суммы по Куратовскому.

6.3.16. Какая функция удовлетворяет следующим рекурсивным уравнениям:

$$\begin{cases} f(\alpha, 0) & = & 1 \\ f(\alpha, \mathsf{S}\,\beta) & = & f(\alpha,\beta) \times \alpha \\ f(\alpha, \lim_{\delta\to\gamma}\beta_\delta & = & \lim_{\delta\to\gamma} f(\alpha,\beta_\delta) \end{cases} \tag{6.16}$$

6.3.17. Почему в определении сложения мы взяли произвольное δ, а не ограничились ω?

6.3.18. Выведите формулу для наименьшей неподвижной точки непрерывной возрастающей функции ординалов f, превосходящей β.

6.3.19. Для приведенных ниже пар ординалов вычислите $\alpha+\beta$, $\beta+\alpha$, $\alpha\oplus\beta$, $\alpha\cdot\beta$, $\beta\cdot\alpha$, $\alpha\otimes\beta$.

1)	ω	2
2)	ω	ω^2
3)	$\omega+1$	$\omega+2$
4)	$\omega^\omega+\omega+2$	$\omega^\omega+2\omega+1$
5)	$\omega^2+2\omega+1$	$\omega^3+5\omega+7$
6)	$\varepsilon_0+\omega^\omega+3$	$\omega^{\omega^\omega}+\omega^2+1$
7)	$2\omega^{\omega+1}+5\omega^3+7\omega+4$	$\omega^{\omega+2}+2\omega^\omega+3\omega^4+4\omega^3$

6.3.20. Вычислите $(\omega+1)^n$ при возведении в степень ко Кантору и по Куратовскому. Чему равно $(\omega+1)^\omega$?[17]

[17] А почему здесь мы не упомянули два варианта умножения?

Глава 7

Введение в синтаксис

7.1 Синтаксис логического языка

Синтаксис формального языка задает независимые от интерпретации определения объектов этого языка, изучает вопрос о структуре объектов, о распознавании объектов различных типов и их характеристик. Синтаксически правильно построенные объекты могут в дальнейшем интерпретироваться и преобразовываться в соответствии с интерпретацией языка.

Чтобы обосновать применяемый в дальнейшем метод изложения, обратимся к практике и теоретических изысканий, и их прикладного выражения — программирования.

Тот, кому приходится рецензировать достаточно много математических работ, знает, что чаще всего ошибочный переход в доказательстве кроется за словами: „Очевидно” либо “Данный случай разбирается аналогично предыдущему”. Ну, насчет “очевидности” все ясно[1], а вот с аналогичностью приходится долго разбираться.

Тот, кому приходится программировать достаточно сложные (с точки зрения логики построения) задачи, сталкивается с неприятностью: приходится писать множество почти одинаковых процедур для похожих друг на друга подзадач. Порою ситуация выглядит почти что издевательски: текст мог бы быть один и тот же, но изменяются типы данных и его приходится переписывать с другим заголовком процедуры и под другим именем.

Программист высочайшего класса, обладавший, вдобавок, в лучших

[1]На самом деле тут мы сталкиваемся с важным понятием *дыры* в доказательстве, которым нам придется заниматься далее. Но рецензенту здесь проще. Достаточно написать, скажем, “А мне неочевидно.”

русских традициях еще и фундаментальной математической подготовкой, Семен Фурман, явно сформулировал следующий технологический прием[2], который мы будем называть *обобщение без потерь*.

> Пиши процедуру в частном, хорошо продуманном случае, и тщательно, но без лишней оптимизации, а затем обобщай ее на столь общий случай, насколько возможно без потери эффективности.

Скажем, появление функционального анализа и топологии позволило обобщить без потерь множество частных теорем Коши в несколько общих утверждений. Появление теории категорий позволило превратить расплывчатое понятие алгебраической аналогии в точное и затем использовать его, в частности, в теории абстрактных типов данных, призванной решить ту практическую трудность, которая была обрисована выше.

Мы проведем такую операцию обобщения для языка классической логики, с тем чтобы, в частности, не говорить расплывчатые слова “аналогично” при переходе к построенным по такому же принципу языкам неклассических логик. При обобщении мы выделим следующие черты логического языка:

- Более сложные конструкции образуются из более простых четырьмя способами:
    - Применение одноместной (*унарной*) операции к выражению. Эта операция ставится перед выражением.
    - Применение двуместной операции к двум выражениям. Она ставится *между* выражениями, и получившееся выражение заключается в скобки.
    - Применение квантора, который включает подкванторное выражение и переменную, по которой он навешен. Этот пункт мы немедленно обобщим, чтобы включить и выражения вида

      $$\sum_{i=1}^{n+m}(i+a)^2 \text{ либо } \{x \in X \mid A(x)\}\,.$$

      Рассмотрим обобщенные кванторы следующей формы:

      $$\langle \mathbf{K}x \mid E_1, \dots, E_k \mid A_1, \dots, A_l \rangle\,,$$

[2] Формулировка была дана в личной беседе с автором; нам неизвестно, опубликовал ли он что-либо по данному поводу.

где $\langle\ \rangle$ обозначают некоторую пару скобок.

Выражения $E_1, \ldots, E_k$ называются *ограничениями* подкванторной переменной, а $A_1, \ldots, A_l$ — *подкванторными* выражениями. Содержательно область действия подкванторной переменной распространяется лишь на подкванторные выражения, ограничения остаются вне ее[3].

– Функциональные записи вида $\mathsf{F}(E_1, \ldots, E_n)$.

- Выражения строго разделяются по типам (скажем, термы обозначают предметы, формулы — высказывания). Каждая операция применяется к выражениям строго определенных типов и однозначно определено, какого типа выражение получается после ее применения.

- Исходные понятия не фиксированы; заданы лишь способы образования более сложных из исходных.

Сразу заметим, что пункт, касающийся строгого разделения по типам, сплошь и рядом нарушается в современных языках программирования. Скажем, операция + применяется и к целым, и к действительным, и к комплексным числам различной точности. Такая *перегрузка* операций вызвала к жизни целую теорию разрешения возникающих неоднозначностей, да и мы, грешные, воспользуемся перегрузкой в нескольких местах, явно ее оговорив.

Пожалуй, Вам самим понятно, насколько коварным средством является перегрузка, но иногда она просто стучится в двери, если имеется полное совпадение необходимых нам свойств операций над различными данными. Разница между использованием перегрузки в логике либо алгебре и в искусственном интеллекте либо программировании состоит в том, что “теоретики” точно обосновывают сохранение необходимых свойств, а “практики” все время нарываются на неприятности, либо просто не дав себе труда уяснить и проверить эти свойства, либо забыв, что в алгоритмическом языке перегрузка применяется уже не к математическим сущностям, а к их неточным реализациям.

Другая особенность языка логики, принципиально отличающая его от имеющихся языков программирования и искусственного интеллекта,

[3] Именно разница между ограничениями и подкванторными выражениями приводит к встречающимся в математическом анализе выражениям вида

$$\int_0^x f(x)\,dx.$$

да и от языка, скажем, математического анализа,— отсутствие фиксированного базиса понятий. Если в “конкретных” языках нижний уровень закреплен как фундамент, на котором можно постепенно вырастить нужные нам построения, то в математической логике есть построения и преобразования, которые можно “опустить” на любой подходящий нам фундамент, и соответственно, сразу получить целый город.

Таким образом, с синтаксической точки зрения язык классической логики можно охарактеризовать как *строго типизированный язык без нижнего уровня с функциональными, унарными и бинарными операциями и кванторами.*

Прежде всего, поскольку выражения у нас делятся на типы, нужно определить необходимые нам конструкции над типами. Эти конструкции были введены польскими логиками в 20-х годах под названием *синтаксических категорий.* Мы изложим их в форме, принятой в большинстве современных работ по теории алгоритмических и других формальных языков, по философии и математической лингвистике.

Пусть задано некоторое множество исходных типов $\mathbf{T}_0$.

Определение 7.1.1. (Иерархия функциональных типов) Множество типов $\mathbf{T}$ задается следующим индуктивным определением:

a) Исходные типы $\tau \in \mathbf{T}_0$ — типы.

b) Если $\tau_1, \dots, \tau_n, \tau$ — типы, то $(\tau_1, \dots, \tau_n \to \tau)$ — тоже тип.

c) Других типов в $\mathbf{T}$ нет.

Язык без нижнего уровня определяется относительно *словаря*, или *сигнатуры* рассматриваемого конкретного приложения (в случае логического языка — конкретной теории). Дадим наиболее общее понятие сигнатуры, базирующейся на иерархии типов $\mathbf{T}$. Для этого сначала определим, какие типы из иерархии для каких целей подходят.

Определение 7.1.2 (Классификация типов). .

a) Тип $(\tau_1, \dots, \tau_n \to \tau)$ называется типом функции, если все τ_i, τ — исходные типы.

b) Тип $(\tau_1, \dots, \tau_n \to \tau)$ называется типом функционала, если τ содержит $\to$.

c) Тип $(\tau_1, \dots, \tau_n \to \tau)$ называется высшим типом, если в нем больше одной $\to$.

d) Тип $(\tau_1 \to \tau)$ называется типом унарной операции.

e) Тип $(\tau_1, \tau_2 \to \tau)$ называется типом бинарной операции.

f) Тип $(\chi, \tau_1, \ldots, \tau_k, (\chi \to \pi_1), \ldots, (\chi \to \pi_l) \to \tau)$, где $l > 0$, называется типом квантора.

Как и следовало ожидать, здесь наиболее сложен пункт, касающийся кванторов. Но вспомним уже известные нам кванторы. Разве, скажем, $\forall x$ имеет дело с отдельными значениями $A(x)$? Как обычно расплывчато выражаются математики и философы[4], квантор имеет дело "со всей совокупностью значений выражения $A(x)$." Всю эту совокупность значений лучше всего выражает функция, перерабатывающая каждое значение x в значение $A(x)$. Соответственно, χ является здесь типом переменной x, каждое из π_j — типом соответствующего подкванторного выражения, зависящего от x. А вот типы ограничений берутся в "голом" виде, поскольку ограничения не подпадают под область действия переменной квантора.

Определение 7.1.3. (Обобщенная) сигнатура σ — множество символов $s \in \sigma$, каждому из которых сопоставлен один из признаков — константа, унарная операция, бинарная операция, квантор, и задана функция χ, сопоставляющая каждому $s \in \sigma$ тип $\tau \in \mathbf{T}$ таким образом, что операциям сопоставляются типы операций соответствующей арности, кванторам — типы кванторов.

Помимо сигнатуры, при определении языка с кванторами используют *переменные.* Чаще всего переменные бывают лишь по объектам исходных типов, да и то не по всем; если же у нас есть переменные и кванторы по типам, содержащим $\to$, то говорят, что определяемый язык *высшего порядка.* Переменные по различным типам не пересекаются. Для единообразия переменные типа τ обозначаются x^τ, y^τ, z^τ и т.д. Считается, что переменных каждого типа потенциально бесконечный запас. Как обычно, если у нас всего один тип, по которому разрешено иметь переменные, тип переменных опускается. Подмножество типов, по которым имеются переменные, обозначается $\mathbf{T}_v$.

Заметим одну тонкость в данном определении. Функциональные символы входят в число констант, они просто имеют тип функции. Могут быть и константы высших типов, они применяются в языке так же, как функциональные символы, но по крайней мере один из их аргументов либо же получаемое значение должны быть сложного типа. Приведем несколько примеров.

---

[4]Да и мы прибегли к подобному выражению при описании кванторных конструкций естественного языка

Пример 7.1.1. В теории групп исходные типы данных $\mathbf{o}$ — объекты, и $\mathbf{t}$ — истинностные значения. Сигнатура состоит из логических связок, логических кванторов, бинарных операций $=$, $\circ$ и унарной Inv, константы e. Их типы следующие.

$$\begin{array}{cc}
\chi(e) = \mathbf{o} & \chi(=) = (\mathbf{o}, \mathbf{o} \to \mathbf{t}) \\
\chi(\circ) = (\mathbf{o}, \mathbf{o} \to \mathbf{o}) & \chi(\mathrm{Inv}) = (\mathbf{o} \to \mathbf{o}) \\
\chi(\Rightarrow) = (\mathbf{t}, \mathbf{t} \to \mathbf{t}) & \chi(\&) = (\mathbf{t}, \mathbf{t} \to \mathbf{t}) \\
\chi(\vee) = (\mathbf{t}, \mathbf{t} \to \mathbf{t}) & \chi(\neg) = (\mathbf{t} \to \mathbf{t}) \\
\chi(\forall) = (\mathbf{o}, (\mathbf{o} \to \mathbf{t}) \to \mathbf{t}) & \chi(\exists) = (\mathbf{o}, (\mathbf{o} \to \mathbf{t}) \to \mathbf{t})
\end{array}$$

Переменные имеются лишь по типу $\mathbf{o}$.

Предикат $=$ стандартно интерпретируется как равенство, константа e как единица группы, $a \circ b$ как умножение, $\mathrm{Inv}\, a$ как обратный элемент к a.

Пример 7.1.2. Можно несколько видоизменить сигнатуру из предыдущего примера, добавив к e еще две константы: Mult и Inv и удалив операции $\circ$ и Inv. Тип Mult есть $(\mathbf{o}, \mathbf{o} \to \mathbf{o})$. Этот пример показывает возможность перехода между одноместными и двуместными функциями и операциями.

Пример 7.1.3. Фрагменты математического анализа можно описывать в языке со следующей сигнатурой:

Имеется три исходных типа: $\mathbf{r}$, $\mathbf{i}$, $\mathbf{t}$, интерпретируемые, соответственно, как действительные числа, целые числа и логические значения.

Логические связки остаются теми же самыми.

Для работы с действительными и целыми числами имеются следующие бинарные операции: $+, -, \cdot, /, \oplus, \ominus, \times, \div, =^r, >^r, =^i, >^i$ и унарные $\exp$, $\sin$, $\cos$, $\ln$, real, round.

Кроме того, зададим следующие константы: $e, \pi, 0, 1, \mathsf{0}, \mathsf{1}$.

Кванторы данной сигнатуры следующие: $\forall^r$, $\forall^i$, $\exists^r$, $\exists^i$, $\int$, $\sum$. Типы всех перечисленных выше операций, констант и кванторов следующие:

$$\begin{array}{cc}
\chi(e) = \chi(\pi) = \chi(1) = \chi(0) = \mathbf{r} & \chi(\mathsf{0}) = \chi(\mathsf{1}) = \mathbf{i} \\
\chi(+) = \chi(-) = (\mathbf{r}, \mathbf{r} \to \mathbf{r}) & \chi(\oplus) = \chi(\ominus) = (\mathbf{i}, \mathbf{i} \to \mathbf{i}) \\
\chi(\cdot) = \chi(/) = (\mathbf{r}, \mathbf{r} \to \mathbf{r}) & \chi(\times) = \chi(\div) = (\mathbf{i}, \mathbf{i} \to \mathbf{i}) \\
\chi(\mathrm{real}) = (\mathbf{i} \to \mathbf{r}) & \chi(\mathrm{round}) = (\mathbf{r} \to \mathbf{i}) \\
\chi(\forall^r) = (\mathbf{r}, (\mathbf{r} \to \mathbf{t}) \to \mathbf{t}) & \chi(\exists^r) = (\mathbf{r}, (\mathbf{r} \to \mathbf{t}) \to \mathbf{t}) \\
\chi(\forall^i) = (\mathbf{i}, (\mathbf{i} \to \mathbf{t}) \to \mathbf{t}) & \chi(\exists^i) = (\mathbf{i}, (\mathbf{i} \to \mathbf{t}) \to \mathbf{t}) \\
\chi(\int) = (\mathbf{r}, \mathbf{r}, \mathbf{r}, (\mathbf{r} \to \mathbf{r}) \to \mathbf{r}) & \chi(\sum) = (\mathbf{r}, \mathbf{i}, \mathbf{i}, (\mathbf{i} \to \mathbf{r}) \to \mathbf{r}) \\
\chi(=^r) = \chi(>^r) = (\mathbf{r}, \mathbf{r} \to \mathbf{t}) & \chi(=^i) = \chi(>^i) = (\mathbf{i}, \mathbf{i} \to \mathbf{t})
\end{array}$$

Здесь видно, что мы вынуждены вводить кванторы всеобщности и существования по отдельности для каждого типа объектов, по которым имеются переменные. Поскольку тип квантора однозначно определяется типом переменной, следующей непосредственно за ним, перегрузка кванторов легко разрешается и используется практически везде, в том числе и нами. Аналогично, перегрузка напрашивается и для общеупотребительных предикатов типа $=$ или $>$, и для операций типа $+$ или $-$. Но здесь ситуация намного сложнее, поскольку допущение перегрузки сразу приводит к соблазну перемешивать выражения разных типов.

Несколько иной тип перегрузки мог бы возникнуть при применении квантора суммирования к выражениям типа $\mathbf{i}$. Здесь подкванторная переменная в любом случае имеет тип $\mathbf{i}$, и разрешение двусмысленности зависит от типа подкванторного выражения. Это уже похуже, и на подобных примерах в теоретическом программировании выросла целая теория.

Анализируя определения и рассматривая примеры, можно сделать вывод, что мы не рассматриваем операции, кванторы и функции с переменным числом аргументов. Это соответствует и соглашениям большинства языков программирования, а там, где переменное число аргументов появляется, оно, как правило, влечет неприятности. Далее, мы не разрешаем произвольным образом пополнять теорию новыми константами, что также находится, в частности, в соответствии с традициями языков спецификаций и языка ПРОЛОГ. Конечно же, для расширения возможностей теорий и методов работы с ними мы обязаны предусмотреть средства расширения теорий, но это — отдельная и достаточно интересная тема, развившаяся в целую теорию в традиционной логике и приближающаяся к такому состоянию в математической. А чтобы квалифицированно применять теорию определений, мы обязаны уметь хорошо различать, что же можно выразить исходными средствами.

Предложение 7.1.1. *Любое выражение типизированного языка однозначно представляется в виде, соответствующем пп. 1) – 6) определения 7.1.5.*

Доказательство. Предложение опирается на следующие леммы о счете скобок.

Лемма 7.1.2. *В любом выражении число открывающих скобок равно числу закрывающих.*

Доказательство. Индукцией по построению. Переменные и константы скобок вообще не содержат. Если выражение A получено как $F(t_1, \ldots, t_n)$, то поскольку по предположению индукции, все t_i сбалансированы по скобкам, в нем также число открывающих равно числу закрывающих. Точно так же для всех пунктов определения выражений.

Конец доказательства.

Лемма 7.1.3. *В любом начале выражения открывающих скобок не меньше, чем закрывающих.*

Доказательство ведем индукцией по построению выражения.

Определим скобочный баланс слова как

$$\text{число открывающих скобок} - \text{число закрывающих.}$$

Переменные и константы скобок вообще не содержат. Если t получен как $f(t_1, \dots, t_n)$, то любое его начало имеет одно из следующих представлений. Оно либо есть 'f', либо имеет вид '$f($', либо '$f(\Xi,\ \Xi_i$', либо '$f(\Xi\ \Xi_i,$', либо есть сам t. Здесь Ξ есть последовательность выражений, разделенных запятыми, Ξ_i есть начало выражения. По предыдущей лемме, в выражении открывающих скобок столько же, сколько закрывающих. Значит, скобочный баланс Ξ есть 0. По предположению индукции, скобочный баланс $\Xi_i \geqslant 0$. Следовательно, скобочный баланс начала больше 0, если оно не является f либо не совпадает с самим t.

Точно так же подводится скобочный баланс для выражений остальных форм, но здесь сбалансированы могут быть также префиксы, составленные из знаков унарных операций и заканчивающиеся переменной либо константой.

Следствие. Начало выражения, содержащее скобку и сбалансированное по скобкам, совпадает с самим выражением.

Скобочным уровнем некоторого вхождения подвыражения в выражение называется число пар скобок, в область действия которых оно попадает. Таким образом, если выражение не имеет окружающих его скобок, то его уровень — 0, если имеет одну — 1, и т. д.

Лемма 7.1.4. *Лемма о разделителях на первом скобочном уровне.*

1. *Если на первом скобочном уровне встречается символ ',', то выражение является применением последовательности*[5] *унарных операций к функциональному либо к кванторному выражению.*

2. *Если на первом скобочном уровне встречается символ '|', то выражение является применением последовательности унарных операций к кванторному выражению.*

3. *На нулевом скобочном уровне ни запятая, ни | не встречаются.*

[5] Возможно, пустой.

Доказательство леммы. Все три пункта доказываются одновременной индукцией по построению выражения.

В константу либо переменную ни скобки, ни запятая, ни $|$ не входят. Значит, базис индукции состоит из импликаций с ложной посылкой и тривиально верен.

Если выражение E является функциональным, то запятые, входящие в него, либо оказываются разделителями E_i и E_{i+1}, либо входят в E_i. В первом случае они оказываются на первом скобочном уровне, во втором, по предположению индукции, они оказываются не менее чем на первом внутри E_i, а значит, не менее чем на втором внутри самого E. Символ $|$ обязан входить в одно из E_i, и таким образом, ни на нулевом, ни на первом скобочном уровне не появляется.

Если выражение E является применением бинарной операции, то оно имеет вид $(E_1 \oplus E_2)$. В нем, применяя предположение индукции, на первом скобочном уровне ни запятых, ни $|$ не встретится, поскольку тогда они были бы вынуждены входить на нулевом уровне в E_1 либо в E_2. А то, что их нет и на нулевом уровне, видно непосредственно.

Если E получается применением унарной операции, т.е. имеет вид $\odot E_1$, то все сводится к рассмотрению E_1, для которого все три пункта леммы выполнены по предположению индукции.

И наконец, если E — кванторное выражение, то рассмотрение проводится аналогично пункту для функционального.

Конец доказательства.

Теперь заметим, что любое выражение, более сложное, чем последовательность унарных операций, примененная к константе либо переменной, содержит скобки.

Докажем однозначность анализа выражений.

Пусть выражение построено применением бинарной операции $(A \oplus B)$. Тогда оно не может представляться, ни как функциональное, ни как применение унарной операции, ни как переменная либо константа, поскольку начинается со скобки. Остается исключить лишь случай применения квантора, что производится при помощи леммы о разделителях. Кванторное выражение содержит $|$ на первом скобочном уровне, а другие содержать его на этом уровне не могут.

Значит, оно может представляться лишь в виде $(C \star D)$, где $\star$ — бинарная операция. Если C совпадает с A, то это — то же самое представление. Если же оно не совпадает с A, то оно может быть либо началом A, либо включать в себя начало B. Если это начало A либо C содержит хотя бы одну скобку, то она не сбалансирована по скобкам и формулой не является. Таким образом, оба этих случая исключаются. Значит, остается случай рассмотреть начало, не содержащее скобок и сводящееся к последовательности унарных операций, возможно, заканчивающейся переменной либо константой. Это сразу же исключает случай, когда C содержит начало B, поскольку "по дороге" оно прихватит и бинарную операцию. Если эта последовательность не заканчивается переменной либо константой, то она не является выражением, поскольку ни одно выражение унарной операцией не заканчивается. Остается единственный возможный случай — C является началом A, заканчивающимся переменной либо константой, до нее включающим лишь знаки бинарных операций и не совпадающим с самим A. Следовательно, A заканчивается функциональным выражением, поскольку лишь функциональное выражение начинается с переменной либо константы. Но в функциональном выражении непосредственно за начальной переменной либо константой следует открывающая скобка, а за C должна следовать бинарная связка. И этот случай приведен к противоречию, и рассмотрение бинарных операций закончено.

Случаи унарных операций, функциональных выражений и кванторов рассматриваются проще. Большую роль играет здесь лемма о разделителях, исключающая все нежелательные разбиения функциональных и кванторных выражений.

Конец доказательства теоремы.

Анализ доказательства позволяет сделать вывод, что обозначения для переменных, констант и функций должны четко отличаться друг от друга.[6]

В работах по логике часто встречается другое, специализированное для логического языка с одним типом объектов определение сигнатуры, которое интересно для нас используемым в нем способом задания.

Определение 7.1.4. Сигнатурой σ называется тройка непересекающихся множеств $(\mathsf{P}, \mathsf{C}, \mathsf{F})$, где:

- P — непустое множество *предикатных символов*. Каждому предикатному символу (сокращенно *предикату*) $P \in \mathsf{P}$ сопоставляется его *арность* $a(P)$ – натуральное число, указывающее количество его аргументов.

- C — множество (возможно, пустое) *констант*.

- F — множество (возможно, пустое) *функциональных символов*, или

[6] Сделаем еще одно ехидное и важное замечание о приложениях математики. На практике теорема почти никогда не применяется в условиях, когда выполнена ее посылка, поскольку она просто не может быть *в точности* выполнена в реальном мире. Поэтому анализ доказательства необходим гораздо чаще, чем этого хотелось бы нам. Лишь он позволяет понять, когда же можно до некоторой степени полагаться на теорему вне области, где она была доказана.

функций. Каждой функции $f \in \mathsf{F}$ также сопоставляется ее арность $a(f)$.

Заметим, что логическое определение легко получается из общего специализацией[7] и опусканием фиксированных частей (например, определений логических связок и кванторов).

В искусственном интеллекте свободно вводятся подходящие сигнатуры для конкретных классов задач или даже отдельных задач. Например, для задачи, связанной с описанием родства, можно ввести предикаты Отец(a, b), Родственник(a, b). В таких формализациях константы соответствуют собственным именам.

В современной лингвистике вынуждены вводить весьма сложные типы данных уже для придания математического смысла таким, казалось бы, элементарным понятиям, как местоимения.

Теперь можно определить язык над обобщенной сигнатурой σ. Его выражения строятся из констант и переменных как *обобщенные термы*, обозначающие и предметы, и формулы, и многое другое. Они вводятся *индуктивными определениями*, задающими способы построения более сложных объектов через более простые. Синтаксис логического языка был первым местом, где осознанно использовался этот класс определений, ныне занимающий центральное место в формальных языках (в том числе в языках программирования и искусственного интеллекта).

Определение 7.1.5. Выражения типизированного языка с кванторами.

a) Константа c сигнатуры σ — выражение типа $\chi(c)$.

b) Переменная типа τ — выражение типа τ.

c) Если $E_1, \dots, E_n$ — выражения типов $\tau_1, \dots, \tau_n$ соответственно, E — выражение типа $(\tau_1, \dots, \tau_n \to \tau)$, то $E(E_1, \dots, E_n)$ — выражение типа τ.

d) Если A и B — выражения типов τ_1, τ_2, $\odot$ — бинарная операция сигнатуры σ, такая, что $\chi(\odot) = (\tau_1, \tau_2 \to \tau)$ то $(A \odot B)$ — выражение типа τ.

e) Если A — выражение типа τ_1, $\odot$ — унарная операция сигнатуры σ, такая, что $\chi(\odot) = (\tau_1 \to \tau)$ то $\odot A$ — выражение типа τ.

[7] Специализация — фиксация конкретных значений неизменных в данном контексте переменных, сокращение в соответствии с контекстом областей значений других переменных и проведение после этого упрощений.

f) Если $\mathbf{K}$ — квантор сигнатуры σ,

$$\chi(\mathbf{K}) = (\varpi, \tau_1, \dots, \tau_k, (\varpi \to \pi_1), \dots, (\varpi \to \pi_l) \to \tau),$$

x — переменная типа ϖ, D_1, ..., D_k, E_1, ..., E_l — выражения типов τ_1, ..., τ_k, π_1, ..., π_l, соответственно, то

$$\langle \mathbf{K}x \mid D_1, \dots, D_k \mid E_1, \dots, E_l \rangle$$

— выражение типа τ.

Чтобы данное индуктивное определение было корректным, необходимо доказать единственность анализа выражений, т. е. что каждое выражение представляется в одном и только в одном из перечисленных видов и что соответствующие операции и компоненты определяются однозначно. Здесь это достаточно тривиально, поскольку мы использовали скобки во всех сомнительных случаях. Тем не менее доказательство однозначности будет проведено в следующем параграфе как для того, чтобы показать технику индуктивных рассуждений, так и для того, чтобы выявить некоторые неявные, но практически важные предположения.

Пример 7.1.4. В языке теории групп имеются следующие выражения:

$$(\mathrm{Inv}\, a \circ \mathrm{Inv}\, b) \tag{7.1}$$

(оно имеет тип $\mathbf{o}$)

$$\langle \forall x \mid \langle \forall y \mid ((\mathrm{Inv}\, x \circ \mathrm{Inv}\, y) = \mathrm{Inv}(y \circ x))\rangle\rangle \tag{7.2}$$

(оно имеет тип $\mathbf{t}$). Как говорилось в части 1, в математической логике выражения предметного типа называются термами, а выражения логического типа — формулами. В стандартной теоретико-групповой и логической записи первое и второе выражения представляются как

$$a^{-1} \circ b^{-1} \tag{7.3}$$

и

$$\forall x \forall y \left(x^{-1} \circ y^{-1} = (y \circ x)^{-1}\right) \tag{7.4}$$

соответственно.

Пример 7.1.5. Рассмотрим теперь, как представляются в нашей форме выражения языка математического анализа.

$$\left\langle \begin{array}{l} \sum i^i \mid \mathrm{round}\, 1, \mathrm{round}\, x^r \mid \\ \qquad \langle \int x^r \mid 0, \mathrm{real}\, i^i \mid \exp\sin((1 + \mathrm{real}\, 1) \circ (\pi \circ x^r))\rangle \end{array} \right\rangle \tag{7.5}$$

$$\left\langle \forall^r x^r \mid \left((x^r >^r 0) \Rightarrow \left(\left\langle \int x^r \mid 1, x^r \mid 1/x^r \right\rangle = \ln x^r \right) \right) \right\rangle \tag{7.6}$$

или же в обычной форме представления

$$\sum_{i=1}^{\operatorname{round} x} \int\limits_0^i \exp \sin 2\pi x \, dx, \tag{7.7}$$

$$\forall x \left((x > 0) \Rightarrow \int\limits_1^x 1/x \, dx = \ln x \right). \tag{7.8}$$

Из данных примеров видно, к чему приводит строгое различение типов. Случайно взяв не ту константу 1, мы вынуждены явно преобразовать ее к другому типу. Далее, показывается один из способов, как действовать с величинами, не попавшими в сигнатуру. 2 было просто представлено как $(1 + 1)$.

Теперь рассмотрим еще один практически важный момент, вокруг которого в информатике к настоящему времени наросло немало теоретических работ. Мы заметили, что представление выражений в нашей форме заставляет писать много скобок. На практике порою пишут все скобки подряд[8], но гораздо чаще стараются побольше скобок опустить, конечно же, без ущерба для понимаемости выражения и, не дай Бог, без того, чтобы допустить двусмысленность.

Например, в логических формулах скобки опускаются согласно следующим соглашениям.

1. Внешние скобки в формуле могут быть опущены.

2. $\Rightarrow$ применяется после & и $\vee$.

3. Если подряд идет несколько одинаковых связок & либо $\vee$, то скобки внутри данного выражения могут опускаться.

Таким образом, в первую очередь формула либо подформула в скобках делится на посылку и заключение импликации. Взаимное старшинство

[8]Особенно “отличился” в данном отношении язык ЛИСП. Там программисты уже просто запоминают, сколько скобок (например, пять) нужно ставить в начале и в конце того или иного стандартного выражения.

$\&$ и $\vee$ не фиксируется; здесь скобки необходимо использовать. Следовательно, формула

$$A \mathbin{\&} B \Rightarrow C \vee D$$

читается “Из A и B следует C или D”, и наши сокращения согласуются также с грамматикой русского языка. Еще одно часто используемое сокращение — связка $\Leftrightarrow$. $(A \Leftrightarrow B)$ определяется как $(A \Rightarrow B) \mathbin{\&} (B \Rightarrow A)$ и читается “A и B эквивалентны”. $\Leftrightarrow$ связывает так же слабо, как $\Rightarrow$.

Итак, на данном примере мы видим, что некоторые бинарные операции считаются ‘сильнее’ других, но это отношение не является полным порядком: порою разные операции могут не сравниваться по силе и каждая из них требует скобок при сочетании с другой; далее, порою скобки опускаются внутри выражений с несколькими применениями одной и той же операции, скажем, $A \mathbin{\&} B \mathbin{\&} C \mathbin{\&} D$ является сокращением и для $((A \mathbin{\&} B) \mathbin{\&} (C \mathbin{\&} D))$, и для $(((A \mathbin{\&} B) \mathbin{\&} C) \mathbin{\&} D)$, и для других подобных выражений. Но, конечно же, никому не придет[9] в голову опускать скобки при сочетании нескольких $\Rightarrow$, поскольку эта операция неассоциативна. Итак, ассоциативность операции кажется необходимым условием для того, чтобы опускать скобки в последовательности операций.

Здесь язык логики раскрывает еще одну ловушку, в которую легко угодить. Так и подмывает сейчас заявить, что скобки могут опускаться в последовательности любых ассоциативных операций. Но рассмотрим пример операции эквивалентности $\Leftrightarrow$. Она в классической логике ассоциативна; в самом деле, постройте таблицу истинности для

$$((A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow C) \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow C))\,.$$

Но практически любой, увидев запись $A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow C$, подумает, что она выражает равенство значений всех трех формул A, B, C. А формула, скажем, $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow C$ истинна не во всех таких случаях и не только в таких, как можно убедиться, рассмотрев ее таблицу истинности. Итак, математики понимают под $A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow C$ нечто совсем другое, а именно, $(A \Leftrightarrow B) \mathbin{\&} (B \Leftrightarrow C)$. Бог им судья, но предусматривать такие несистематические “сокращения” мы просто не можем.

Итак, проанализировав практическое использование опускания скобок, мы приходим к любопытной структуре на бинарных операциях, промежуточной между строгим и нестрогим частичным порядком. Ее можно

[9](Пупышев В. В):
— А мне придет!
(Автор):
— Тогда сам виноват!

назвать *частично нестрогим порядком.* Это — транзитивное отношение, антирефлексивность которого опущена.

Определение 7.1.6 (Формулы). a) Если $P \in \mathsf{P}$ — n-арный предикат, $t_1, \dots, t_n$ — термы, то $P(t_1, \dots, t_n)$ — элементарная формула.

b) Если A и B — формулы, то $(A \,\&\, B)$, $(A \vee B)$, $(A \Rightarrow B)$ и $\neg A$ – формулы.

c) Если A – формула, x – переменная, то $\forall x A$ и $\exists x A$ – формулы.

Формула, входящая в другую формулу, называется ее *подформулой.* Аналогично, терм, входящий в другой терм, называется его *подтермом.*

Практическая работа

Обучение работе с программой “Мир Тарского”. Нахождение синтаксических ошибок, работа с простейшими высказываниями (предложения Абеляра, Аккермана, Аристотеля, Буля, Бернайса, Бозо, условные, де Моргана, Доджсона, Джона Рассела, Лестрейда, Людвига, Пирса, Уайтхеда, Шенфинкеля, Шерлока).

Упражнения к §7.1

7.1.1. Студент Чудаков использовал при формализации этнографического материала следующие предикаты: $\mathsf{удмурт}()$, $\mathsf{отец}()$, $\mathsf{жена}(,)$, $\mathsf{брат}()$, $\mathsf{вотяк}()$, $\mathsf{жрец}(,)$, $\mathsf{побратим}(,)$. Выскажите свои замечания.

7.1.2. Правильно ли сокращены формулы:

$$\forall x A(x) \,\&\, B(x) \vee C(x) \Rightarrow D(x),$$

$$\forall x \exists y\, (A(x) \Rightarrow B(x, f(y)) \Rightarrow C(y, g(x)))?$$

7.1.3. Что имел в виду студент, написавший:

$$\forall x\ (A(x)) : B(x)?$$

7.1.4. Покажите, что опустив скобки вокруг кванторных выражений, можно получить неоднозначное представление.

7.1.5. Покажите, что после опускания скобок кванторные выражения остаются однозначными, если любой квантор содержит не более одного ограничения.[10]

[10] Именно поэтому в логике предикатов обычно уже в исходном определении формулы опускают скобки вокруг кванторных выражений. То же делают в λ-исчислении.

7.1.6. Покажите, что ни одно типизированное выражение не может быть началом другого.[11]

7.2 Свободные и связанные переменные. Подстановка

Как известно, статус переменных изменяется после того, как они связываются квантором. В формуле $A(x)$ вместо x может быть подставлено конкретное значение, чего нельзя сделать в $\forall x\, A(x)$. Более того, одна и та же переменная может быть *свободна* для подстановок в некоторых местах выражения и *связана* кванторами (причем разными) в других. Поэтому статус приписывается не самой по себе переменной, а ее конкретному *вхождению* в выражение (т. е. тексту выражения, в котором выделен один из экземпляров переменной). В свою очередь, если она связана, то мы должны указать конкретное вхождение квантора, воздействовавшее на данный экземпляр переменной. Все эти тонкости отражаются следующим определением.

Определение 7.2.1 (Свободные и связанные вхождения).

1. Вхождение переменной в переменную (т.е. в саму себя) свободно.

2. Если переменная x входит свободно (связанно) в A либо B, $\odot$ – бинарный оператор, то соответствующее ее вхождение в $(A \odot B)$ также свободно (связано соответствующим квантором).

3. Если переменная y отлична от x, $\mathbf{K}$ – квантор, то ее вхождение в
$$\langle \mathbf{K}x\, A_1, \ldots, A_k | B_1(x), \ldots, B_n(x) \rangle$$
имеет тот же статус, что и ее вхождение в A_i, B_j.

4. Если x была связана в A_i, B_k, то она остается связанной тем же вхождением квантора в
$$\langle \mathbf{K}x\, A_1, \ldots, A_k | B_1(x), \ldots, B_n(x) \rangle\,.$$

5. Если x была свободна в $B_j(x)$, то она становится связанной самым внешним вхождением квантора в
$$\langle \mathbf{K}x\, A_1, \ldots, A_k | B_1(x), \ldots, B_n(x) \rangle\,.$$

[11]Здесь есть скрытая ловушка в выражениях, начинающихся с унарных операций. Найдите ее. Ее не обойти без привлечения иерархии типов.

6. Если x была свободна в $A_i(x)$, то она остается свободной и в

$$\langle \mathbf{K}x\, A_1, \ldots, A_k | B_1(x), \ldots, B_n(x) \rangle .$$

Определение 7.2.2 (Замкнутые выражения). Переменная x называется *свободной* в выражении A, если у нее есть хотя бы одно свободное вхождение в A. Выражение A *замкнуто* (является *постоянным*[12]), если у нее нет свободных переменных.

Только замкнутые выражения могут иметь при интерпретации точно определенное значение, независимое от значений входящих в них переменных.

При установлении семантики важное значение приобретает операция *подстановки*, позволяющая подставлять конкретные значения свободных переменных. Ее определение требует аккуратности, поскольку связанные переменные считаются локальными. Поэтому свободные переменные, входящие в выражение, подставляемое вместо переменной, не должны быть связаны каким-либо квантором, и связанные переменные, оказавшиеся одноименными со свободными переменными подставляемого выражения, должны быть переименованы во избежание *коллизии*.

Неприятное явление коллизии было обнаружено почти сразу после того, как в математике появились первые кванторы — символы суммирования, произведения и интегрирования. Например, при попытке прямой замены переменной y на $x + y$ в

$$\int_1^0 xy\, dx$$

получаем неверный результат

$$\int_1^0 x\,(x+y)\ dx$$

$$\text{(должно быть } \int_1^0 z\,(x+y)\ dz \text{).}$$

[12] В случае формул говорят *предложением*.

Определение 7.2.3. Подстановка терма t вместо свободных вхождений переменной x в выражение E.

$$\mathsf{Subst}(E, x, t)$$

i) Если E есть константа c, то $\mathsf{Subst}(c, x, t) = c$.

ii) Если E есть переменная $y \neq x$, то $\mathsf{Subst}(y, x, t) = y$.

iii) Если E есть переменная x, то $\mathsf{Subst}(x, x, t) = t$.

iv) Если E есть выражение $\mathsf{F}(t_1, \ldots, t_n)$, то

$$\mathsf{Subst}\left(\mathsf{F}\left(t_1, \ldots, t_n\right), x, t\right) = \mathsf{F}\left(\mathsf{Subst}\left(t_1, x, t\right), \ldots, \mathsf{Subst}\left(t_n, x, t\right)\right).$$

v) Если E есть $(B \odot C)$, где $\odot$ – бинарная связка, то

$$\mathsf{Subst}(E, x, t) = \left(\mathsf{Subst}(B, x, t) \odot \mathsf{Subst}(C, x, t)\right).$$

vi) Если E есть $\oplus B$, где $\oplus$ – унарная связка, то

$$\mathsf{Subst}(E, x, t) = \oplus\mathsf{Subst}(B, x, t).$$

vii) Если E есть

$$\langle \mathbf{K} y \mid D_1, \ldots, D_k \mid E_1, \ldots, E_l \rangle,$$

то рассматриваются следующие подслучаи:

a) $x \neq y$, и y не входит свободно в t. Тогда

$$\begin{aligned}\mathsf{Subst}\left(\langle \mathbf{K} y \mid D_1, \ldots, D_k \mid E_1, \ldots, E_l \rangle, x, t\right) = \\ \langle \mathbf{K} y \mid \mathsf{Subst}\left(D_1, x, t\right), \ldots, \mathsf{Subst}\left(D_k, x, t\right) \mid \\ \mathsf{Subst}\left(E_1, x, t\right), \ldots, \mathsf{Subst}\left(E_l, x, t\right)\rangle\end{aligned}$$

b) $x = y$.

$$\begin{aligned}\mathsf{Subst}\left(\langle \mathbf{K} x \mid D_1, \ldots, D_k \mid E_1, \ldots, E_l \rangle, x, t\right) = \\ \langle \mathbf{K} x \mid D_1, \ldots, D_k \mid E_1, \ldots, E_l \rangle\end{aligned}$$

c) $x \neq y$, и y входит свободно в t, (случай коллизии), то

$$\begin{gathered}\mathsf{Subst}\left(\langle \mathbf{K}x \mid D_1, \dots, D_k \mid E_1, \dots, E_l\rangle, x, t\right) = \\ \langle \mathbf{K}z \mid \mathsf{Subst}\left(D_1, x, t\right), \dots, \mathsf{Subst}\left(D_k, x, t\right) \mid \\ \mathsf{Subst}\left(\mathsf{Subst}\left(E_1, y, z\right), x, t\right), \dots, \mathsf{Subst}\left(\mathsf{Subst}\left(E_l, y, z\right) x, t\right)\rangle\end{gathered}$$

где z — переменная, отличная от x и не входящая в t.

Данное определение корректно, поскольку каждый раз мы ссылаемся на подстановку для выражений меньшей длины, чем исходная (хотя в пункте 7 и дважды). Оно не уточняет конкретного выбора переменной z в том же пункте, но это необязательно, поскольку связанная переменная должна пробежать весь универс. Более того, эта недоговоренность служит ключом к важному для приложений и самой логики понятию *конгруэнтности* выражений, отличающихся лишь заменой связанных переменных[13] (обозначается $A \cong B$).

Определение 7.2.4 (Конгруэнтность). a) $A \cong A$.

b) Если $A \cong B$, $C \cong D$, $\odot$ — бинарная связка, то $(A \odot C) \cong (B \odot D)$.

c) Если $A \cong B$, то $\oplus A \cong \oplus B$.

d) Если $A_i \cong B_i$, $E_i \cong D_i$ то

$$\langle \mathbf{K}x \mid A_1, \dots, A_k \mid E_1, \dots, E_l\rangle \cong \langle \mathbf{K}x \mid B_1, \dots, B_k \mid D_1, \dots, D_l\rangle .$$

e) Если y — переменная того же типа, что и x, то

$$\begin{gathered}\langle \mathbf{K}x \mid A_1, \dots, A_k \mid E_1, \dots, E_l\rangle \cong \\ \langle \mathbf{K}y \mid A_1, \dots, A_k \mid \mathsf{Subst}(E_1, x, y), \dots, \mathsf{Subst}(E_l, x, y)\rangle .\end{gathered}$$

f) Если $A \cong B$, то $B \cong A$.

g) Если $A \cong B$, $B \cong C$, то $A \cong C$.

Конгруэнтность введена таким образом, чтобы она являлась отношением эквивалентности, и в результате замены в E одного конгруэнтного подвыражения на другое у нас получалось выражение, конгруэнтное E. При определении семантики логических языков практически обязательным является требование, чтобы конгруэнтные формулы были эквивалентны.

И наконец, одновременная подстановка термов $t_1, \dots, t_n$ вместо $x_1, \dots, x_n$ в A обозначается

$$\mathsf{Subst}(A, (x_1, \dots, x_n), (t_1, \dots, t_n)).$$

[13]Точнее, приводимых к одному и тому же виду заменами связанных переменных.

Практическая работа

Работа с программой “Мир Тарского”. Нахождение ошибок в определении свободных и связанных переменных и работа с более сложными высказываниями (предложения Бернштейна, Бозо, Клини, Финслера, Шенфинкеля, Сколема). Преобразование предложений в конгруэнтную форму.

Упражнения к §7.2

7.2.1. Сколько переменных, имеющих различный смысл, в формуле

$$\forall x\,((A(x)\ \&\ \exists x\,B(f(x)) \vee (A(x)\ \&\ \exists x\,B(x)) \quad\Rightarrow \\ \forall x\,A(x)) \vee \forall x\,C(x) \vee \forall y\,B(x,y)?$$

7.2.2. Подберите формулу, конгруэнтную предыдущей, и имеющую максимальное число различных переменных.

7.2.3. Подставьте $x + y \cdot c$ в формулу из Упражнения 7.2.1 вместо x.

7.2.4. Произведите замену x на $x + y + z$, y на $x \cdot y$ в интеграле

$$\int\limits_{a-x}^{a+x} y \cdot \int\limits_{x}^{x+c} f(x,y)\,dx\,dy.$$

7.2.5. Произведите замену x на $x+y$, y на $x\cdot z$ и i на $\mathsf{round}(x)$ в выражении

$$\int\limits_{x}^{x+c} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \int\limits_{a-x}^{a+y} f(x,y,i)\,dx\,dy.$$

7.2.6. Покажите, что могут быть две конгруэнтные формулы, из которых ни одна не преобразуется в другую подстановками одних связанных переменных вместо других.

Глава 8

Семантика классической логики

Любой формальный язык должен иметь точно определенные *синтаксис* и *семантику*. С точки зрения математики:

> Семантика — отображение, сопоставляющее некоторым из синтаксически правильных объектов языка их значения при заданной интерпретации.

Таким образом, мы должны определить, во-первых, какие из синтаксических объектов являются интерпретируемыми, и, соответственно, какие служат лишь для удобства преобразований интерпретируемых объектов; во-вторых, что является интерпретацией и как "вычисляется"[1] значение объекта в интерпретации.

Семантика классической логики основывается на жестких эпистемологических допущениях:

1. Значение высказывания зависит лишь от значений его компонент, но не от их смысла.

2. Незнанием можно пренебречь либо рассматривать его как разновидность знания.

3. Свойства предметов неизменны, правила не имеют исключений.

4. Имеются лишь два логических значения — **истина** и **ложь**.

[1]Это сопоставление отнюдь не обязательно эффективно вычислимо; чаще всего значения существуют лишь с математической точки зрения, но вычислены быть не могут.

Удивительно то, насколько широка оказывается сфера применимости этих жестоких ограничений и насколько беспомощно выглядят попытки их умеренного ослабления, например, введением промежуточных истинностных значений.[2] Нижеследующие определения выражают перечисленные философские принципы. Для удобства **истину** мы часто будем обозначать **1** либо $\top$, а **ложь** — **0** либо $\perp$.

С семантикой языка высших порядков дело обстоит не так гладко, как с синтаксисом и с семантикой языка первого порядка. Тем не менее мы можем задать интерпретацию в “стандартном случае”, который на самом деле скрывает немало подводных камней и уже не столь универсален, как синтаксис языка конечных порядков.

8.1 Интерпретация языка конечных типов

Пусть $\mathcal{F}(A, B)$ — множество функций из A в B.

Определение 8.1.1. Интерпретация сигнатуры σ — функция ι, сопоставляющая каждому исходному типу τ множество значений $\mathsf{U}_\tau = \iota(\tau)$, каждому сложному типу $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n \to \pi)$ его универс

$$\mathsf{U}_\tau = \mathcal{F}\left(\mathsf{U}_{\tau_1} \times \cdots \times \mathsf{U}_{\tau_n}, \mathsf{U}_\pi\right),$$

каждой константе $c \in \mathsf{C}$ типа $\tau(c)$ ее значение из $\mathsf{U}_\tau(c)$, каждой операции и квантору — значение соответствующего типа.

Таким образом, в данной интерпретации задаются лишь значения исходных символов; значения сложных выражений вычисляются. Но для вычисления необходимо расширить сигнатуру σ, поскольку у нас просто может не найтись обозначений для элементов универса.

Определение 8.1.2. Сигнатура σ_U – сигнатура σ, в которой множество констант пополнено обозначениями для всех элементов всех U_τ, для всех $\tau \in$

[2]Вернее, тут стоит вспомнить дзэнское (точнее, чаньское) изречение:

> Когда я не думал о просветлении, горы были горами и реки были реками. Когда я стал на путь к просветлению, горы перестали бытьь горами, а реки перестали быть реками. Когда я достиг просветления, горы опять стали горами, а реки — реками.

Многие глубокие и сильные предположения при поверхностном некритическом (либо в худшем смысле схоластическом, когда критикуют, но лишь чужое) взгляде кажутся очевидными; если начинаешь разбираться, поражаешься их смелости; а при еще более глубоком анализе они встают на свое место и становятся совершенно естественными, но зато ты уже знаешь их возможные альтернативы.

T_v, т.е. типов, по которым имеются переменные. Константа, обозначающая элемент a, будет изображаться c_a, или просто a, если это не вызывает недоразумений.

Определение 8.1.3. Значение замкнутых выражений сигнатуры σ_U (обозначается $\zeta(A)$).[3]

1. $\zeta(c) = \iota(c)$ для $c \in C$.
2. $\zeta(c_a) = a$ для $a \in U$.
3. $\zeta(F(t_1, \dots, t_n)) = \zeta(F)(\zeta(t_1), \dots, \zeta(t_n))$.
4. $\zeta(A \oplus B)) = \iota(\oplus)(\zeta(A), \zeta(B))$.
5. $\zeta(\odot A) = \iota(\odot)(\zeta(A))$.
6. Пусть τ — тип x. Тогда

$$\begin{gathered}\zeta\left(\langle \mathbf{K}x \mid A_1, \dots, A_k \mid E_1, \dots, E_l\rangle\right) = \\ \zeta(\mathbf{K})\left(\zeta(A_1), \dots, \zeta(A_k), \lambda a \in \mathsf{U}_\tau\, \zeta\left(E_1(c_a)\right), \dots,\right. \\ \left.\lambda a \in \mathsf{U}_\tau\, \zeta\left(E_l(c_a)\right)\right),\end{gathered}$$

То, что A истинна в M, обозначается $\mathsf{M} \models A$, а то, что A ложна — $\mathsf{M} \dashv A$.

Предложение 8.1.1. *В интерпретации* M *любое замкнутое выражение* E *имеет значение.*

Доказательство. Индукцией по построению E.

Базис. Замкнутыми исходными выражениями могут быть лишь константы, которые имеют значения.

Функциональные выражения. Если $E_1, \dots, E_n$ имеют значения, то вычисляется и значение $F(E_1, \dots, E_n)$. Таким образом, любой замкнутый терм имеет значение.

Конец доказательства

Рассмотрим теперь конкретизацию общего определения интерпретации для сигнатур классической логики.

Определение 8.1.4. (Интерпретация логической сигнатуры σ)

Интерпретация сигнатуры σ – четверка $\mathsf{M} = (\mathsf{U}, \mathsf{C}, \mathsf{P}, \mathsf{F})$, где:

U — непустое множество (называемое *универсом*).

[3] В данном определении придется воспользоваться λ-квантором для образования функции, перерабатывающей выражение $E(x)$ со свободной переменной x в его значения при всевозможных x.

С — функция, сопоставляющая каждой константе $c \in$ С ее значение из U.

Р — функционал, сопоставляющий каждому предикату $P \in$ Р функцию из U^n в $\{\bot, \top\}$, где n – арность P.

F — функционал, сопоставляющий каждому функциональному символу $f \in$ F функцию $\mathsf{F}(f)$ из U^n в U, где n - арность f.

Определение истинности следует таблицам истинности для пропозициональных связок и стандартному пониманию истинности для кванторов. Но оно полезно в следующих отношениях.

i) Точно определяется, как переносится интерпретация символов на более сложные объекты.

ii) Устанавливается, что говорить об истинности или ложности можно лишь для замкнутых формул и лишь в заданной интерпретации.

iii) Можно оценить количество операций, необходимых для вычисления логического значения формулы. Вычисление бескванторной формулы производится за n шагов, где n – количество логических связок. Для бесконечного универса и формул, содержащих кванторы, прямое вычисление требует бесконечного времени, и необходимо искать средства косвенной оценки значений формул. Для конечного универса с n элементами и формул, включающих k этажей вложенных друг в друга кванторов, оценка числа действий есть n^k. Таким образом, даже при небольшом n вычисление сложных формул оказывается слишком трудоемким, а при большом n (соответствующем, например, числу элементов в средней практической базе данных — порядка миллиона) уже вычисление формулы, содержащей два квантора $\forall x\ \forall y$, может оказаться непомерно долгим.

Предложение 8.1.2. *В интерпретации* М *замкнутая формула A имеет значение* Истина *либо* Ложь.

Доказательство. Индукцией по построению формулы. При этом достаточно проверить для каждого пункта определения истинности, что разобранные в нем случаи исчерпывающие и взаимно исключающие. Например, для $\exists x\, A(x)$ либо при всех значениях x из U $A(x)$ ложно, либо для какого-то из них оно истинно.

Практическая работа

Работа с программой “Мир Тарского”. Работа со сложными высказываниями и их интерпретацией (предложения Вайнера, Монтегю, Поста, Рассела, Шредера, Цорна).

Упражнения к §8.1

На интерпретациях из двух предметов, варьируя значение R, проверьте, всегда ли истинны следующие формулы:

8.1.1. $\forall x\, \exists y\, R(x,y) \Rightarrow \forall y\, \exists x\, R(x,y)$

8.1.2. $\forall x\, \exists y\, R(x,y) \Rightarrow \exists x\, \forall y\, R(x,y)$

8.1.3. $\exists x\, \forall y\, R(x,y) \Rightarrow \forall x\, \exists y\, R(x,y)$

8.1.4. $\forall y\, R(y,y) \Rightarrow \forall x\, \exists y\, R(x,y)$

8.1.5. $\forall x\, \exists y\, R(x,y)\ \&\ \forall y\, \exists x\, R(x,y) \Rightarrow \forall x\, \exists y (R(x,y)\ \&\ R(y,x))$

8.1.6. Если универс — множество всех людей, $\mathsf{Мать}(x,y)$ означает, что x является матерью y, то верно ли утверждение $\forall y\, \exists x\, \mathsf{Мать}(x,y)$?

8.1.7. Приведите пример формулы в сигнатуре из одного предиката $R(,)$, которая не может быть истинна ни на какой интерпретации с конечным универсом, но истинна при некоторой интерпретации с бесконечным.

8.1.8. Пусть a_n — последовательность действительных чисел. Когда верна формула $\forall \varepsilon\, (\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n\, (n \in \mathbb{N} \& \, |a_n| < \varepsilon))$?

8.1.9. Пусть φ — функция из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$. Когда верна формула

$$\forall \xi\, \forall \psi\, \forall \zeta\, \forall \nu\, ((\varphi(\xi) - \varphi(\psi))\, (\varphi(\zeta) - \varphi(\nu))\, (\xi - \psi)\, (\zeta - \nu) \leqslant 0)?$$

8.1.10. Пусть универс — множество натуральных чисел, $>$, $+$ интерпретируются обычным образом. Для каких $A(x)$ истинна формула

$$\exists x\, \forall y\, (x > y \Rightarrow \neg A(x))?$$

8.1.11. Аналогично предыдущему для $\forall x\, (A(x) \Rightarrow \exists y\, (y > x\ \&\ A(y)))$?

8.1.12. Аналогично предыдущему для

$$A(0)\ \&\ \forall x\, (A(x) \Rightarrow A(x+1)) \Rightarrow \forall x\, A(x)?$$

8.1.13. Для $\forall x\, \exists y\, (A(y)\ \&\ y > x)\ \&\ \forall x\, (A(x+1) \Rightarrow A(x))$?

8.1.14. Для $\forall x\, (A(x) \Rightarrow \exists y\, (x > y\ \&\ A(y)))$?

8.1.15. Докажите, что $\mathsf{M} \models (A \Leftrightarrow B)$ тогда и только тогда, когда A и B имеют одинаковые значения.

8.2 Теория, модель, логическое следствие

Формализация задается не только синтаксисом и семантикой формального языка (эти компоненты как раз чаще всего берутся традиционными, из хорошо известного крайне ограниченного набора), но и множеством утверждений, которые считаются истинными. Именно эта формулировка базисных свойств, аксиом, описывающих некоторую предметную область, обычно рассматривается как математическое описание объектов. Таким образом, практически всегда нас интересуют не все интерпретации данной сигнатуры, а лишь те из них, на которых выполнены аксиомы.

Определение 8.2.1. Теория Th — множество замкнутых формул сигнатуры σ. Если $A \in \mathsf{Th}$, то A — *аксиома* Th. *Модель* Th — интерпретация, в которой истинны все ее аксиомы.

Пример 8.2.1. Теория отношения близости задается следующими аксиомами:

$$\forall x\, \forall y\, (R(x,y) \Rightarrow R(y,x))\,,$$

$$\forall x\, R(x,x).$$

Любое отношение, удовлетворяющее этим аксиомам (например, заданное формулой $|x-y| < \varepsilon$) является *отношением близости*, т. е. рефлексивным и симметричным, и наоборот, любое отношение близости удовлетворяет этим аксиомам. Заметим, что чаще всего, несмотря на все старания, достичь такой идеальной ситуации просто невозможно: теория либо будет описывать не все имевшиеся в виду системы объектов и отношений, либо не только подразумевавшиеся. В математике стремятся избежать хотя бы первой неприятности. Поэтому для некоторых теорий принято говорить еще и о *стандартных моделях*, являющихся моделями в смысле нашего определения, но не исчерпывающих класса всех моделей.[4]

[4]Математические логики не были бы сами собой, если бы не извлекли из такой неприятности и новые положительные возможности. Мы показываем некоторые из них в гл. 10.

Определение 8.2.2 (Теоремы). Формула A является *теоремой* (или *следствием*) теории Th, если A истинна во всех моделях Th. B — следствие A, если B — теорема $\{A\}$. Отношение "A является теоремой Th" обозначается $\mathsf{Th} \vdash A$. $\vdash$ называется *отношением логического следования*.

Таким образом, истинность аксиом необходимо влечет истинность теорем. B — следствие A, если B истинно во всех моделях, в которых истинно A. Так, например, $\forall x\, A(x,x)$ - следствие $\forall x\, \forall y\, A(x,y)$.

Предложение 8.2.1. *(Свойства отношения $\vdash$).*

a) (Рефлексивность) $\{A\} \vdash A$.

b) (Транзитивность) *Если для всех* $B \in \mathsf{Th}_1$ $\mathsf{Th} \vdash B$, *и* $\mathsf{Th}_1 \vdash A$, *то* $\mathsf{Th} \vdash A$.

c) (Монотонность) *Если* $\mathsf{Th} \vdash A$, *то* $\mathsf{Th} \cup \mathsf{Th}_1 \vdash A$.

d) (Теорема дедукции) *Если* $\mathsf{Th} \cup \{A\} \vdash B$, *то* $\mathsf{Th} \vdash A \Rightarrow B$.

Доказательство. Рефлексивность очевидна.

Транзитивность. Пусть M — модель Th. Если из Th следуют все аксиомы Th_1, то любая из них истинна в M. Значит, M является и моделью Th_1. Следовательно, $\mathsf{M} \models A$. Таким образом, A истинна в произвольной модели Th и является теоремой Th.

Монотонность. Поскольку любая модель $\mathsf{Th} \cup \mathsf{Th}_1$ является моделью Th, теорема Th является и теоремой $\mathsf{Th} \cup \mathsf{Th}_1$.

Теорема дедукции. Пусть $\mathsf{Th} \cup \{A\} \vdash B$. Пусть M — произвольная модель Th. Тогда в ней либо истинна, либо ложна A. Разберем оба случая.

$\mathsf{M} \models A$. Тогда M является моделью $\mathsf{Th} \cup \{A\}$. Следовательно, в ней истинно B. А поскольку $(\top \Rightarrow \top) = \top$, в M истинна $A \Rightarrow B$.

$\mathsf{M} \dashv A$. Тогда, поскольку из лжи следует все, что угодно, $\mathsf{M} \models A \Rightarrow B$. □

Перечисленные в предложении 8.2.1 важнейшие свойства отношения следования были впервые систематизированы Тарским в 1930 г. Они выполнены не только для классической логики, но и для других традиционных логических систем. В самом деле, при доказательстве всех свойств, за исключением теоремы дедукции, мы даже не использовали классического определения истины. Достаточно лишь, чтобы теорема принимала значение истина во всех моделях теории и чтобы от добавления новых формул истинность не разрушалась (для монотонности). Поэтому Тарский счел возможным постулировать рефлексивность, транзитивность и монотонность как общие свойства отношения следования. Теорема дедукции не включалась в стандартную аксиоматику следования, но рассматривалась (и рассматривается) как крайне желательное свойство, нарушение которого без фундаментальных причин служит показателем ущербности формализма.

В связи с необходимостью формализации сложных и нетрадиционных знаний в последнее время стали рассматриваться логики, нарушающие аксиоматику Тарского.

В частности, если наши ресурсы ограничены, то не всегда удается сохранить транзитивность (для получения аксиом Th_1 может потребоваться столько “сил”, что на вывод B их уже не хватит).

Несколько другая ситуация с монотонностью. В жизни часто случается, что новое знание перечеркивает старое. Например, зная, что Маня вышла замуж за Ваню, мы заключаем, что она замужняя женщина, а узнав, что Ваня умер, мы заключаем, что она — не замужняя, а вдова.[5] Для учета изменения фактов и выводов по умолчанию в искусственном интеллекте стали развиваться логики немонотонного вывода[6].

И наконец, если наши действия необратимы (для этого достаточно, чтобы в рассмотрение было введено время), то не всегда целесообразно сохранять рефлексивность следования.

Вернемся к классической логике. Как видно, все, что следует из теории с пустым множеством аксиом, истинно в любой интерпретации и следует из любой теории данной сигнатуры. И наоборот, если теория вообще не имеет моделей, то из нее следует все, что угодно. Эти два важных частных случая отражаются следующим определением.

Определение 8.2.3. (Логика предикатов, тавтологии, противоречия).

Логика предикатов сигнатуры σ — теория с пустым множеством аксиом.

Тавтология — теорема логики.

Противоречивая теория — теория, не имеющая моделей.

Противоречие — такая формула A, что $\{A\}$ противоречива.

Формулы A и B *логически эквивалентны*, если $A \Leftrightarrow B$ — тавтология.

Итак, противоречие ложно в любой интерпретации. В противоречивой теории в любой интерпретации ложна хотя бы одна из аксиом. Эквивалентные формулы имеют одинаковые значения в любой интерпрета-

---

[5] Эту ситуацию отразил польский логик и искусственный интеллектуал Ежи Павлак. Попав в снежную бурю во время восхождения на гору как раз посредине скалы, он произнес стихотворение:

Biedna pani Pawłakowa
Weczor — źona, utrom — wdowa!

[6] Впрочем, первым их создал бразильский философ Ньютон да Коста для формализации рассуждений, базирующихся на противоречивых посылках.

ции.

Отметим несколько часто используемых отношения между интерпретациями.

Определение 8.2.4. Если $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ — интерпретации одной и той же сигнатуры, универсы $\mathfrak{M}$ являются подмножествами соответствующих универсов $\mathfrak{N}$, интерпретации констант совпадают, а интерпретации функций и предикатов в $\mathfrak{M}$ являются сужениями соответствующих интерпретаций в $\mathfrak{N}$, то $\mathfrak{M}$ — *подинтерпретация* (соответственно, *подмодель*) $\mathfrak{N}$, а $\mathfrak{N}$ — *расширение* (*надинтерпретация*, *надмодель*) $\mathfrak{M}$. В этом случае пишут $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$.

Если все множества сигнатуры σ вложены в соответствующие множества из σ_1, то σ называется *сужением* (*подсигнатурой*, *обеднением*) σ_1, а σ_1 — *расширением* (*обогащением*, *надсигнатурой*) σ. Обозначается $\sigma \subset \sigma_1$.

Интерпретация $\mathfrak{M}$ сигнатуры σ является сужением (обеднением) интерпретации $\mathfrak{N}$ сигнатуры σ_1, такой, что $\sigma \subset \sigma_1$, если для всех понятий из σ интерпретации в $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ совпадают. В этом случае $\mathfrak{N}$ называется *обогащением* $\mathfrak{M}$.

Суммируем

Семантика чаще всего определяет функцию, задающую значения формул в интерпретации.

Интерпретация называется моделью теории Th, если в ней истинны все аксиомы Th.

Семантика задает отношение семантического следования между теорией и формулой: формула следует из теории, если она истинна во всех ее моделях.

Основные свойства следования — рефлексивность, монотонность, транзитивность и теорема дедукции. Все они иногда нарушаются в современных неклассических системах, но для их нарушения нужны серьезные основания.

Чтобы применять классическую логику, необходимо быть уверенным, как минимум, в том, что имеющиеся ресурсы достаточно велики либо расходуемые достаточно малы, чтобы пренебречь их ограниченностью; что новое знание не может перечеркнуть старое, что мы можем пренебречь временем либо, по крайней мере, его необратимостью.

Практическая работа

Работа с программой “Мир Тарского”. Работа со сложными высказываниями и их интерпретацией, составление многокванторных высказываний и миров, их опровергающих либо подтверждающих.

Упражнения к §8.2

8.2.1. Студентка Примерная задала теорию со следующей единственной аксиомой: $\exists x\,(A(x) \Rightarrow B(x))$. Опишите модели этой теории. Следует ли из нее $\exists x\,A(x) \vee \exists x\,B(x)$?

8.2.2. Следует ли из теории $\{\forall x\,\exists y\,A(x,y)\}$ формула

$$\exists y\,\forall x\,A(x,y)?$$

8.2.3. Следует ли из теории $\{\neg\forall x\,\exists y A(x,y), \forall x\,A(x,x)\}$ формула

$$\exists x\,\forall y\,A(x,y)?$$

8.2.4. Если множество констант есть $\{0,1,\dots,n,\dots\}$ для всех натуральных чисел, то следует ли из теории $\{A(0),A(1),\dots,A(n),\dots\}$ формула $\forall x A(x)$?

8.2.5. Рассмотрим теорию $\mathbf{Q}$ сигнатуры $\langle 0, S(), +(,), *(,), =(,)\rangle$, где 0 — константа, $S,+,*$ — функции, равенство — предикат, с аксиомами:

$$\begin{array}{cc}
\forall x\,\forall y\,(S(x)=S(y) \Rightarrow x=y)\,; & \forall x\,\forall y\,(x+S(y)=S(x+y))\,; \\
\forall x\,\neg S(x)=0; & \forall x\,(x*0=0)\,; \\
\forall x\,(\neg x=0 \Rightarrow \exists y\,(x=S(y)))\,; & \forall x\,\forall y\,(x*S(y)=x*y+x)\,; \\
\forall x\,(x+0=x)\,. &
\end{array}$$

a) Показать, что множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ с обычными $0,+,*$ и $S(x)=x+1$ является моделью $\mathbf{Q}$.

b) Показать, что $\mathbb{N}$ является подмоделью любой модели $\mathbf{Q}$.

c) Построить модель $\mathbf{Q}$ с универсом $\mathbb{N}\cup\{\omega\}$, $\omega\notin\mathbb{N}$.

d) Аналогично предыдущему с добавлением двух элементов.

e) Аналогично с добавлением бесконечного числа элементов.

f) Докажите, что $\forall x\,\neg(x=S(x))$ не является теоремой $\mathbf{Q}$.

g) Аналогично для $\forall x\,\forall y\,(x+y=y+x)$.

8.2.6. Рассмотрим теорию $\mathfrak{OS}$ со следующими аксиомами.

$$\forall x,y,z(x\circ(y\circ z)=(x\circ y)\circ z),\quad \forall x,y,z,u(x\circ y=z\Rightarrow y\circ z\neq x),$$
$$\forall x,y(x<y\Leftrightarrow \exists z\,x\circ z=y).$$

Непротиворечива ли данная теория?

8.2.7. Покажите, что всякая модель $\mathfrak{OS}$ является обогащением модели теории частичного порядка. Почему данное упражнение практически независимо от предшествующего (точнее, почему нет условия «Если теория $\mathfrak{OS}$ непротиворечива, то ... »)?

8.2.8. Могут ли быть у теории $\mathfrak{OS}$ конечные модели, если могут, то какие? От какого из предыдущих упражнений зависит данное?

8.3 Теорема о замене эквивалентных

Теорема 8.1. Теорема о замене эквивалентных. *Пусть A, B — формулы, имеющие одни и те же свободные переменные $x_1, \ldots, x_n$, и*

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n (A(x_1, \ldots, x_n) \Leftrightarrow B(x_1, \ldots, x_n))$$

— теорема Th. *Пусть $C\{A\}$ — формула с выделенным вхождением подформулы A; $C\{B\}$ — результат замены в ней этого вхождения A на B. Пусть $y_1, \ldots, y_k$ — список всех свободных переменных $C\{A\}$. Тогда $\forall y_1 \ldots \forall y_k (C\{A\} \Leftrightarrow C\{B\})$ является теоремой* Th.

Доказательство. Индукцией по построению C.

Базис индукции. Если C элементарна, то $C\{A\}$ есть A, $C\{B\}$ есть B, свободные переменные $C\{A\}$ — это $x_1, \ldots, x_n$; следовательно,

$$\forall y_1 \ldots \forall y_k (C\{A\} \Leftrightarrow C\{B\})$$

есть сама

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \left(A\left(x_1, \ldots, x_n\right) \Leftrightarrow B\left(x_1, \ldots, x_n\right)\right)).$$

Пусть теорема доказана для компонент C. Если A совпадает с самой C, то поступаем как в базисе индукции. Если же нет, то разбираем случаи, соответствующие построению C. Пусть C есть $(C_1 \mathbin{\&} C_2)$. Тогда A входит либо в C_1, либо в C_2. В первом случае пользуемся тавтологией 4.50, во втором — аналогичной ей с перестановкой членов конъюнкции. Все остальные пункты определения рассматриваются подобно же. □

Доказанная теорема может показаться слишком тривиальной, но рассмотрение неклассических логик показывает, как легко ее можно нарушить. Другое дело, что наличие свойства замены эквивалентных является весьма желательным для любой логики, а если уж его нет, надо подумать, чем его заменить. Например, можно ввести понятие “сильного отрицания”, когда предикат задается парой непересекающихся множеств

— множества истинности и множества опровержимости. В этом случае эквивалентность формул не означает их взаимозаменяемости, поскольку при совпадении множеств истинности множества опровержимости могут различаться, но тогда можно доказать взаимозаменяемость таких формул A, B, что

$$(A \Leftrightarrow B) \;\&\; (\sim A \Leftrightarrow \sim B),$$

где $\sim$ — операция взятия опровержения формулы. Такие формулы естественно назвать сильно эквивалентными. Итак, если нарушается свойство замены эквивалентных, ищите, какую сильную эквивалентность нужно ввести для его спасения.

Упражнения к §8.3

8.3.1. Покажите, что формула

$$\begin{array}{l}\forall x\,(A(x) \Rightarrow \exists z(B(z)\&C(x,z))) \vee \\ \exists x\,(A(x)\&\forall z(B(z) \Rightarrow \neg\, C(x,z)))\end{array}$$

является тавтологией.

8.4 Булевы алгебры и алгебраическая семантика.

Систему булевых операций можно охарактеризовать аксиоматически.

Определение 8.4.1. *Булева алгебра* — множество B с бинарными операциями $\cup\cap$ и унарной $-$, удовлетворяющими следующим аксиомам.

$$\begin{array}{cc}
A \cup B = B \cup A; & A \cap B = B \cap A; \\
A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C; & A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C; \\
(A \cap B) \cup B = B; & (A \cup B) \cap B = B; \\
A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C); & A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C); \\
(A \cap -A) \cup B = B; & (A \cup -A) \cap B = B.
\end{array}$$

Мы стремились не к формальной минимальности системы аксиом, а к их удобству. Очевидно, что аксиомам булевой алгебры удовлетворяет система всех подмножеств некоторого множества и более того, любая алгебра множеств, т.е. система множеств, замкнутая относительно обычных операций объединения, пересечения и дополнения. Если определены пересечения и объединения произвольного (в том числе и бесконечного) множества элементов, то булева алгебра называется *полной*.

Теорема 8.2. (Теорема Стоуна о представлении) *Любая булева алгебра изоморфна некоторой алгебре множеств.*

В курсе математической логики эта теорема доказываться не будет. Для нас важнее другое соотношение, установленное польскими логиками Линденбаумом и Тарским.

Рассмотрим отношение $\mathsf{Th} \vdash A \Leftrightarrow B$. Оно транзитивно, рефлексивно, симметрично и, согласно теореме о замене эквивалентных, согласуется с логическими операциями. Таким образом, можно определить *алгебру Линденбаума-Тарского* теории Th как фактор-множество множества замкнутых формул сигнатуры σ по отношению $Th \vdash A \Leftrightarrow B$. Пресечению соответствует в ней &, объединению — $\vee$, дополнению — отрицание. Отметим, что конструкция алгебры Линденбаума-Тарского переносится и на неклассические логики, лишь бы сохранялась теорема о замене эквивалентных.

Очевидно, что алгебра Линденбаума-Тарского классической теории является булевой. И обратно, любая булева алгебра может быть использована, чтобы интерпретировать классические теории.

Определение 8.4.2. Булевозначная модель сигнатуры σ — пятерка

$$(U, B, C, P, F),$$

где B — полная булева алгебра, универс, константы и функции — как в двузначной модели, предикаты интерпретируются как функции из U^n в булеву алгебру истинностных значений B. Определение значений формул аналогично определению истинности, соответствие операциям как в алгебре Линденбаума-Тарского, квантору всеобщности соответствует бесконечное пересечение, квантору существования — бесконечное объединение.

Преимущество булевозначных моделей в том, что они дают возможность строить *точные* модели теорий, в которых формула истинна тогда и только тогда, когда она является теоремой. Двузначных точных моделей не удается построить даже для теории $\{A \Rightarrow B, B \Rightarrow C\}$. Заодно булевозначные модели развеивают предрассудок, что классическая логика предполагает наличие всего двух значений истинности. Хорошее и глубокое изложение взаимосвязи булевых алгебр с логикой можно найти в книге [23].

Подытожим:

Классическая логика не обязательно требует двузначности интерпретаций. Достаточно, чтобы множество истинностных значений образовывало булеву алгебру.

Наоборот, если множество истинностных значений — булева алгебра, то логика данной интерпретации — классическая либо ее расширение дополнительными связками.

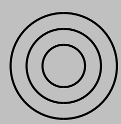
Любая логика (не только классическая), в которой есть свойство замены эквивалентных, задает для каждой теории свою алгебру логических значений — алгебру Линденбаума-Тарского, алгебру эквивалентных формул.

Для того, чтобы строить точную модель, в которой формула истинна тогда и только тогда, когда следует из аксиом, необходимо переходить к булевым алгебрам. Для этой цели двузначных моделей недостаточно.

Упражнения к §8.4

8.4.1. Построить булеву алгебру с четырьмя элементами.

8.4.2. Студент Интеллектуалов построил булеву алгебру с четырьмя элементами следующим образом: он взял диаграмму Эйлера



и сказал, что изображенные на ней три множества плюс пустое составляют такую алгебру. Сравните его решение с Вашим.

8.4.3. Доказать, что отношение $X \cup Y = X$ (обозначается $Y \leqslant X$) является отношением порядка в булевой алгебре.

8.4.4. Доказать, что в булевой алгебре имеется наибольший элемент $\mathsf{1}$ и наименьший элемент $\mathsf{0}$.

8.4.5. Доказать, что в алгебре Линденбаума-Тарского единица соответствует классу всех теорем, ноль — классу всех противоречий.

8.4.6. Доказать, что $(A \Rightarrow B)$ тогда и только тогда, когда $B \geqslant A$ в алгебре Линденбаума-Тарского.

8.4.7. Доказать, что $X \cap Y$ является точной нижней гранью X и Y относительно определенного нами порядка.

8.4.8. Показать, что нет булевых алгебр с тремя элементами.

8.4.9. Построить точную модель для теории

$$\{A \Rightarrow B, A \Rightarrow C \vee D, B \Rightarrow H\&K\}.$$

8.4.10. Пусть A — алгебра, удовлетворяющая следующим аксиомам:

$$A \cap B = -A \cup -B; \qquad A \cup B = B \cup A;$$
$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C; \quad (A \cap B) \cup (A \cap -B) = A.$$

Тогда A — булева алгебра.

8.4.11. Чтобы непустое подмножество булевой алгебры было ее подалгеброй, достаточно его замкнутости относительно $\cap$ и $-$.

8.4.12. Постройте булевозначную модель, в которой для некоторых A, B $A \vee B$ истинно, но ни одна из этих формул истинной не является.

8.4.13. Сколько как минимум элеметов должна иметь будева алгебра логических значений для точной модели теории $\{A \Rightarrow B, B \Rightarrow C\}$?

8.4.14. Можно ли для всех пропозициональных теорий в данной сигнатуре подобрать единую булеву алгебру, которая может служить алгеброй логических значений для их точных моделей? В каких случаях эту булеву алгебру можно взять конечной?

8.4.15. Во время математического боя студент Гениалькис, обосновывая свое решение, заявил, что поскольку булева алгебра $\mathcal{B}$ конечна, она полна. Ссылки на книгу, откуда он взял эту теорему, он не дал. Будете ли Вы опротестовывать его доказательство на основании данного утверждения?

8.5 Языки высших порядков

Рассмотрим еще один вид языков, занимающих промежуточное положение между чистой логикой и теорией множеств. Обычно их тоже считают логическими языками.

Разберемся в разнице между конкретной теорией и логикой. Почему теорию множеств безоговорочно считают конкретной, а вот язык предикатов — логическим? Для этого рассмотрим множество интерпретаций, в которых истинны теоремы теории множеств и множество интерпретаций, в которых истинны логические теоремы. Логические теоремы — тавтологии, и поэтому истинны в любых интерпретациях. Теоремы теории множеств истинны лишь в ее моделях. Очевидно, что класс всех интерпретаций намного шире и намного проще определен, чем класс моделей теории множеств.

Но проницательный читатель может заявить: а ведь формулируя определение интерпретации, мы также принимали целый ряд предположений! Приведем два наиболее явственных: логических значений лишь два, универс непуст ... А сколько еще неявных предположений пролезло с использованными математическими терминами? Ну ладно, насчет теории множеств я еще могу согласиться, что это — слишком конкретная теория, но чем хуже, например, отношение порядка, чем отношение равенства? Почему теория частичного порядка считается математической, а не логической?

Как часто бывает, кое в чем проницательный читатель прав. В вопросе стоит разобраться с другой стороны. Чем же помешает отношение порядка? Рассмотрим простую теорему, явившуюся одним из первых строго установленных свойств классической логики. Определим *предикатор* как выражение вида $\varpi x_1, \ldots, x_n\, A(x_1, \ldots, x_n)$, где $A(x_1, \ldots, x_n)$ — формула. Здесь ϖ рассматривается как квантор, связывающий переменные $x_1, \ldots, x_n$. Предикатор служит синтаксическим объектом для подстановки вместо предикатов. Теперь можно определить подстановку предикатора вместо предиката аналогично тому, как мы делали для термов и переменных. Заменяются лишь базисные шаги.

$$\mathsf{Subst}\,(P(t_1, \ldots, t_n), P, \varpi x_1, \ldots, x_n) \stackrel{\triangle}{=} \mathsf{Subst}\,(A, (x_1, \ldots, x_n), (t_1, \ldots, t_n))\,.$$

Как и для термов, подстановку часто сокращенно обозначают

$$A\{P \mid \varpi\, B\}.$$

Следующее свойство выполнено лишь для тавтологий и практически всегда нарушается в конкретных теориях. Оно является в некотором смысле характеристическим свойством логики вообще, в отличие от частных теорий; гранью, отделяющей логические теории от прикладных. Логические теории рассчитаны на весьма общий класс интерпретаций. Прикладные имеют в виду конкретный класс моделей со специфичной интерпретацией предикатов и функций.[7]

Теорема 8.3. Теорема о подстановке вместо предикатов. *Если C является тавтологией классической логики, P — n-арный предикат,*

$$\varpi x_1, \ldots, x_n\, A(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_m)$$

[7]В этом смысле самые абстрактные из математических теорий, например, теория множеств и теория категорий, называются в логике прикладными.

— n-местный предикатор со свободными переменными $x_{n+1}, \dots, x_m$*, то тавтологией является и формула* $C\{P|\varpi A\}$

Доказательство. Рассмотрим два случая. Пусть сначала P не входит в A. Поскольку P не входит в $C\{P|\varpi A\}$, по любой интерпретации этой формулы строится интерпретация самой C, в которой она имеет то же значение, определяя $P(t_1, \dots, t_n)$ через значение $A(t_1, \dots, t_n)$. А по предположению C — тавтология. Значит, результат замены истинен во всех интерпретациях.

Пусть теперь P входит в подставляемый предикатор. Тогда любое вхождение P в $C\{P|\varpi A\}$ является результатом одной из замен, и по любой интерпретации M формулы $C\{P|\varpi A\}$ строим другую интерпретацию M_1 для C, такую, что

$$\zeta_M(C\{P|\varpi A\}) = \zeta_{M_1}(C) = \top.$$

Для этого заменяем значение P на соответствующее значение A. □

Теперь рассмотрим расширение языка логики предикатов, в котором сохраняется теорема о подстановке вместо предикатов. Разрешим всевозможные конечные типы, построенные из исходных типов **o** и **t** (объекты и логические значения), и выдающие результатом логические значения. Таким образом, теперь аргументами предикатов могут быть предикаты. Разрешим переменные по каждому типу и обычные кванторы всеобщности и существования по каждому типу. Итак, теперь у нас могут быть переменные по логическим значениям, переменные по одноместным обычным предикатам, переменные по предикатам, первым аргументом которых служит двуместный предикат, вторым — логическое значение, третьим — объект и т. д., и т. п ... Но поскольку язык строго типизирован, переменные для каждого типа объектов свои, и для каждого аргументного места предиката точно указывается тип соответствующего аргумента. Полученную систему назовем *общим логическим языком конечных типов.*

Определенная нами интерпретация языков конечных типов естественно переносится на данный язык и составляет семантику для него. Теперь хотелось бы дать синтаксический метод проверки логического следования, но доказано, что полной формализации не может быть уже для языка второго порядка, включающего лишь переменные по предикатам, аргументами которых являются объекты. Более того, если теорема полноты показала, что понятие общезначимости в классической логике предикатов определяется полностью и однозначно, то здесь появляется глубоко скрытая, зато неустранимая, неоднозначность. Уже в логике второго порядка появляются формулы, общезначимость которых зависит от неразрешимых проблем современной математики и теории множеств. Подробнее мы вернемся к этому после накопления соответствующего аппарата, а пока что необходимо сделать предупреждения.

Имеется один общий принцип, общезначимость которого не вызывает сомнений: принцип свертки.

$$\exists X^{(\pi 1,\ldots,\pi n\to t)}\,\forall x_1^{\pi 1},\ldots,x_n^{\pi n}\,(X(x_1,\ldots,x_n)\Leftrightarrow A(x_1,\ldots,x_n))\,,$$

где A — произвольная формула, не содержащая X свободно.[8]

Опираясь на принцип свертки, можно обосновывать многие полезные свойства понятий высших порядков. Например, устанавливается существование булевых операций над предикатами любых типов. Ниже рассмотрена формула, выражающая существование объединения множеств объектов. Здесь мы иллюстрируем еще один часто применяемый способ различения переменных разных типов: переменные для предикатов изображаются большими буквами, а их местность — скобками с соответствующим числом аргументных мест. Таким образом, все большие буквы здесь типа $\mathbf{o}\in\mathbf{t}$, где $\mathbf{o}$ — тип объектов.

$$\forall P(), Q()\,\exists R()\,\forall x(P(x)\vee Q(x)\Leftrightarrow R(x)). \tag{8.1}$$

Суммируем:

Общее свойство логик — отсутствие конкретных понятий. Формально оно выражается правилом подстановки.

Для языка высших порядков семантика уже определяется не столь однозначно.

Под логикой высших порядков традиционно понимают типизированный язык с принципом свертки.

Упражнения к §8.5

8.5.1. Студент Гениалькис заявил, что никакие предикаторы не нужны, поскольку у нас есть квантор свертки, и лучше подставлять просто множества. Можете ли Вы ему возразить?

---

[8] Данное маленькое ограничение, не сковывая свободы, избавляет от громадной опасности произвольных рекурсивных определений, в частности, без него мы могли бы определить предикат, эквивалентный собственному отрицанию.

Глава 9

Семантические таблицы для классической логики

9.1 От таблиц истинности к семантическим таблицам

Рассмотрим построение таблицы истинности пропозициональной формулы $(A \Rightarrow B \vee C) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ (см табл. 9.1). Анализируя таблицу, можно отметить, что большинство информации в ней избыточно. Таблица может быть значительно сокращена, пользуясь следующими правилами: для истинности дизъюнкции достаточно истинности одного из членов; для ложности конъюнкции достаточна ложность одного из членов; истина следует из всего, что угодно; из лжи следует все, что угодно. Сокращенная таблица истинности показана на табл. 9.2.

При таком сокращении самым тонким местом является проверка того, что ни один случай не упущен. Можно создавать много способов со-

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{B} \vee \mathcal{C}$	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \vee \mathcal{C}$	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$	Формула
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1

Таблица 9.1: Полная таблица истинности

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{B} \vee \mathcal{C}$	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \vee \mathcal{C}$	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$	Формула
0	—	—	—	1	1	1
1	1	—	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	1
1	0	1	1	1	0	0

Таблица 9.2: Сокращенная таблица истинности

кращения таблиц истинности, но в некотором смысле все это будет изобретением велосипеда, поскольку, базируясь на правилах сокращения, голландский логик Бет (E.W. Beth) создал в 50-х годах формализм, гарантирующий полноту разбора и выполняющий все прямые сокращения. Он основан на необходимых и достаточных условиях истинности и ложности формул. Начнем с примера для той же формулы.

Ищем все возможные случаи, когда формула ложна. Если таковых не найдется, то она истинна. Наша формула представляет собой импликацию, импликация ложна, если ее посылка истинна, а заключение ложно. Получаем следующее преобразование.

$$\begin{array}{c} \dashv (A \Rightarrow B \vee C) \Rightarrow (A \Rightarrow B) \\ \models A \Rightarrow B \vee C \\ \dashv (A \Rightarrow B) \end{array} \tag{9.1}$$

После применения аналогичного преобразования к третьей формуле получаем

$$\begin{array}{c} \dashv (A \Rightarrow B \vee C) \Rightarrow (A \Rightarrow B) \\ \models A \Rightarrow B \vee C \\ \dashv (A \Rightarrow B) \\ \models A \\ \dashv B \end{array} \tag{9.2}$$

Теперь приходится рассматривать условия истинности импликации. Бет оптимально подобрал два случая, исчерпывающих все возможности, когда импликация истинна: необходимо и достаточно, чтобы A было ложно либо B истинно. То, что мы разбираем два независимых случая, отражается разбиением таблицы на подтаблицы, в которых общее лишь то, что было получено до разделения. После разбиения импликации аналогично разобьется и дизъюнкция.

$$\begin{array}{c}
\Dashv (A \Rightarrow B \vee C) \Rightarrow (A \Rightarrow B)\\
\models A \Rightarrow B \vee C\\
\Dashv (A \Rightarrow B)\\
\models A\\
\Dashv B\\
\hline
\begin{array}{c|c}
\underline{\underline{\Dashv A}} & \begin{array}{c} \models B \vee C \\ \hline \begin{array}{c|c} \underline{\underline{\models B}} & \models C \end{array} \end{array}
\end{array}
\end{array} \tag{9.3}$$

Здесь в двух из трех образовавшихся подтаблиц встретились противоречия; такие подтаблицы называются закрытыми и отмечаются двойной чертой. Оставшаяся подтаблица выдала тот единственный набор значений, при котором формула ложна: A истинно, B ложно и C истинно. Итак, мы получаем следующий метод проверки истинности формулы либо построения контрпримера. Предполагаем, что формула ложна. Строим семантическую таблицу и, если все ее подтаблицы закрылись, приводим предположение о ложности формулы к абсурду и делаем вывод, что она истинна. Иначе незакрытая подтаблица дает контрпример.

9.2 Правила разбиения формул в семантических таблицах

Просуммируем правила разбиения для связок логики высказываний.

$$\begin{array}{cc}
\dfrac{\models \mathcal{A} \& \mathcal{B}}{\models \mathcal{A} \quad \models \mathcal{B}} & \dfrac{\Dashv \mathcal{A} \& \mathcal{B}}{\Dashv \mathcal{A} \mid \Dashv \mathcal{B}}\\
\dfrac{\models \mathcal{A} \vee \mathcal{B}}{\models \mathcal{A} \mid \models \mathcal{B}} & \dfrac{\Dashv \mathcal{A} \vee \mathcal{B}}{\Dashv \mathcal{A} \quad \Dashv \mathcal{B}}\\
\dfrac{\models \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}}{\Dashv \mathcal{A} \mid \models \mathcal{B}} & \dfrac{\Dashv \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}}{\models \mathcal{A} \quad \Dashv \mathcal{B}}\\
\dfrac{\models \neg \mathcal{A}}{\Dashv \mathcal{A}} & \dfrac{\Dashv \neg \mathcal{A}}{\models \mathcal{A}}
\end{array}$$

Если в правиле нижняя часть не разделена, результирующие формулы остаются в той же подтаблице, в противном случае они распределяются по двум новым подтаблицам, которые далее развиваются независимо. Значит, подтаблицы семантической таблицы образуют бинарное дерево.

Теперь остается заняться практикой и не забывать, что в любом доказательстве правильная общая структура значит не меньше, чем правильность отдельных шагов. Хорошо и то, что любая последовательность правильных шагов приводит к результату, хотя, конечно, удачный выбор порядка разбиений может сильно сократить таблицу.

Упражнения к §9.2

9.2.1. Мы научились проверять на семантических таблицах высказывания на тождественную истинность. А как их проверять на тождественную ложность? Что в этом случае даст незакрытая семантическая таблица?

Проверить на семантических таблицах высказывания и рассуждения.

9.2.2. $(A \Rightarrow B \vee C) \Rightarrow (A \Rightarrow B) \vee (A \Rightarrow C)$

9.2.3. $(A \Rightarrow B) \vee (A \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow B \vee C)$

9.2.4. $(A\&B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C) \vee (B \Rightarrow C)$

9.2.5. $(A \Rightarrow C) \vee (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A\&B \Rightarrow C)$

9.2.6. $(A\&(B \vee C)) \Rightarrow (A\&C) \vee (B\&C)$

9.2.7. $(A\&(B \vee C)) \Rightarrow (A\&C) \vee (A\&B)$

9.2.8. $(A\&B) \vee (A\&C) \Rightarrow (A\&(B \vee C))$

9.2.9. $((A \Rightarrow B) \Rightarrow (C \Rightarrow D)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)\&(D \Rightarrow B)$

9.2.10. $((A \Rightarrow B) \Rightarrow C) \Rightarrow A \vee (B \Rightarrow C)$

9.2.11. $A \vee (B \Rightarrow C) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow C)$

9.2.12. $(A \vee (B\&C)) \Rightarrow (A \vee B)\&(A \vee C)$

9.2.13. $(A \vee B)\&(A \vee C) \Rightarrow (A \vee (B\&C))$

9.2.14. $(\neg A \vee B)\&(A \vee C) \Rightarrow B \vee C$

9.2.15. $B \vee C \Rightarrow (\neg A \vee B)\&(A \vee C)$

9.2.16. $(A \Rightarrow B)\&(A \Rightarrow C)\&(A \Rightarrow D) \Rightarrow \neg A$

9.2.17. $(B \Rightarrow A)\&(C \Rightarrow A)\&(D \Rightarrow A) \Rightarrow A$

9.2.18. $(A \Rightarrow B \vee C)\&(B \Rightarrow \neg A)\&(C \Rightarrow D)\&(D \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow E)$

9.2.19. $(A\&D \Rightarrow B \vee C) \Rightarrow (A \Rightarrow B) \vee (A \Rightarrow C) \vee (D \Rightarrow B)$

9.2.20. $(A \Rightarrow B \vee C)\&(\neg A \Rightarrow C) \Rightarrow B \vee C$

9.2.21. $((A \Rightarrow C) \Rightarrow D)\&\neg D \Rightarrow A\&\neg C$

9.2.22. $(A \Rightarrow B)\&(B \Rightarrow C) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow C)$

9.2.23. Майор Тронин в результате расследования установил, что два сотрудника организации п/я №13 являются агентами. Медников – агент английский либо американский, а Иванов – английский либо израильский. С присущей ему проницательностью тов. Тронин сделал вывод, что п/я №13 находится под контролем “*Intelligence Service*”. Прав ли он?

9.2.24. Если в России пытаются проводить реформы, то начинается смутное время. Если начинается смутное время, то либо наступает гражданская война, либо иностранное нашествие, либо Россия теряет часть территорий. Если наступает гражданская война, то население испытывает ужасные бедствия. Не лучше приходится населению и при нашествии. Сейчас в России пытаются проводить реформы. Значит, российский народ ждут ужасные бедствия.

9.2.25. (L. Carroll*) Он никогда не поет больше часа. Если кто-то поет больше часа, он надоедает окружающим. Тот, кто не надоедает окружающим – желанный гость. Значит, он – желанный гость.

9.2.26. Создайте правила разбиения для эквивалентности и на их основе постройте семантическую таблицу для $((A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow C) \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow C))$.

9.2.27. (J. Venn) Существовал клуб с такими правилами:

1. Члены финансового комитета должны избираться среди членов общей дирекции.
2. Нельзя быть одновременно членом общей дирекции и членом библиотечного комитета не будучи членом финансового комитета.
3. Ни один член библиотечного совета не может быть членом финансового комитета.

Упростите правила.

9.3 Семантические таблицы с кванторами

В отличие от таблиц истинности, метод семантических таблиц обобщается на всю логику предикатов. Здесь техническое улучшение, которым казалось исключение лишних случаев из перебора, переходит в принципиальное. Это — типичная ситуация в истории науки. Стремление улучшить изложение какого-то темного места гораздо чаще приводит к принципиальным открытиям, чем амбициозные попытки перевернуть науку и создать какую-либо "общую теорию всего". Теория относительности была создана Эйнштейном в результате доводки до логического конца анализа электродинамики движущихся тел, общая теория относительности также почти как техническое улучшение интенсивно ведшихся в то время многими крупными учеными работ по применению тензорных методов к механике. А вот все его многолетние усилия создать общую теорию поля не привели ни к чему. Лобачевский создал неевклидову геометрию, пытаясь усовершенствовать изложение геометрии для исключительно тупого контингента слушателей, примерно соответствующего нынешнему факультету повышения квалификации.[1]

Рассмотрим условия истинности и ложности всеобщности и существования. Поскольку $\forall x\ A$ истинна тогда и только тогда, когда $A(c)$ истинно для любого конкретного c, мы, имея $\models \forall x\ A$, можем получить $A(c_i)$ всякий раз, когда в таблице либо подтаблице появляется объект c_i.Если же $=\!\!| \forall x\ A$, то мы знаем лишь, что существует такой объект a, для которого $A(a)$ ложно. Чтобы отобразить это, постулируем $=\!\!| A(c_{n+1})$ для нового, ранее в таблице не встречавшегося, объекта c_{n+1} (называемого *вспомогательной константой*). Таким образом, приходим к следующим правилам разбиения для кванторов.

$$\begin{array}{cc} \dfrac{\models \forall x\ A}{\models A(c_i)} & \dfrac{=\!\!| \forall x\ A}{=\!\!| A(c_{n+1})} \\[2ex] \dfrac{\models \exists x\ A}{\models A(c_{n+1})} & \dfrac{=\!\!| \exists x\ A}{=\!\!| A(c_i)} \end{array} \tag{9.4}$$

Рассмотрим пример: проверка формулы

$$\exists x\ A(x) \& \forall x\ B(x) \Rightarrow \exists x\ (A(x) \& B(x)).$$

[1]Известно, что нет ничего легче, как не задумываясь ответить на вопрос. Один дурак, при наличии эрудиции либо уверенности в себе, может ответить на столько вопросов, что сто умных не смогут задать.

$$\begin{array}{c}
\Dashv \exists x\, A(x) \& \forall x\, B(x) \Rightarrow \exists x\, (A(x) \& B(x)) \\
\models \exists x\, A(x) \& \forall x\, B(x) \\
\Dashv \exists x\, (A(x) \& B(x)) \\
\models \exists x\, A(x) \\
\models A(c_1) \\
\models \forall x\, B(x) \\
\models B(c_1) \\
\Dashv (A(c_1) \& B(c_1)) \\
\hline
\begin{array}{c|c}
\underline{\underline{\Dashv A(c_1)}} & \underline{\underline{\Dashv B(c_1)}}
\end{array}
\end{array} \tag{9.5}$$

В дальнейшем для единообразия вспомогательные константы обозначаются c_1, c_2, ... Мы ввели объект c_1, рассмотрев $\models \exists x\, A(x)$, после чего подставили его в две другие кванторные формулы. Следующий пример показывает, что не всегда удается обойтись одним объектом.

$$\begin{array}{c}
\Dashv \forall x\, (A(x) \lor B(x)) \Rightarrow \forall x\, A(x) \lor \forall x\, B(x) \\
\Dashv \forall x\, A(x) \lor \forall x\, B(x) \\
\models \forall x\, (A(x) \lor B(x)) \\
\Dashv \forall x\, A(x) \\
\Dashv A(c_1) \\
\Dashv \forall x\, B(x) \\
\Dashv B(c_2) \\
\models A(c_1) \lor B(c_1) \\
\models A(c_2) \lor B(c_2) \\
\hline
\begin{array}{c|c}
\underline{\underline{\models A(c_1)}} &
\begin{array}{c}
\models B(c_1) \\
\hline
\begin{array}{c|c}
\models A(c_2) & \underline{\underline{\models B(c_2)}}
\end{array}
\end{array}
\end{array}
\end{array} \tag{9.6}$$

Здесь видно, что нам пришлось использовать $\models \forall x\, (A(x) \lor B(x))$ дважды: для c_1 и c_2. И именно из-за различия этих двух значений таблица не закрылась; незапертая подтаблица дает следующую опровергающую модель:

$$\begin{array}{ccc}
 & c_1 & c_2 \\
\mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\
\mathbf{B} & \mathbf{1} & \mathbf{0}
\end{array}$$

Следующий пример иллюстрирует еще две особенности, возникающие в предикатных семантических таблицах: возможность бесконечного порождения констант и аномалия с первым объектом. Он заодно показывает, что незапертость подтаблицы приходится порою усматривать более или менее косвенно, а не устанавливать доведением построения до конца, и что одна и та же формула может использоваться бесконечное количество раз.

$$
\begin{array}{c}
\dashv \forall x\, \exists y\, A(x,y) \Rightarrow \exists x\, A(x,x) \\
\dashv \exists x\, A(x,x) \\
\models \forall x\, \exists y\, A(x,y) \\
\models \exists y\, A(c_1,y) \\
\models A(c_1,c_2) \\
\dashv A(c_1,c_1) \\
\models \exists y\, A(c_2,y) \\
\models A(c_2,c_3) \\
\dashv A(c_2,c_2) \\
\cdots
\end{array}
\tag{9.7}
$$

Итак, бесконечно порождаются новые константы c_i, для которых выполнено $\models A(c_i, c_{i+1})$, но $\dashv A(c_i, c_i)$. Немного разобравшись с анализируемой формулой, мы видим, что построенная опровергающая модель отнюдь не минимальная. Достаточно было бы рассмотреть множество из двух элементов.

Упражнения к §9.3

Проверить на семантических таблицах высказывания и рассуждения.

9.3.1. [K] Некоторые цыплята — кошки. Некоторые кошки знают французский язык. Значит, некоторые цыплята знают французский язык.

9.3.2. $\exists x\, (A(x) \Rightarrow \forall y\, A(y))$[2]

9.3.3. $\forall x\, (A \vee B(x)) \Rightarrow A \vee \forall x\, B(x)$

9.3.4. $\forall x\, (A(x) \vee B(x)) \Rightarrow \exists x\, A(x) \vee \forall x\, B(x)$

9.3.5. $\exists x\, A(x) \& \forall x\, (\neg A(x) \vee B(x)) \Rightarrow \exists x\, B(x)$

9.3.6. $\exists x\, A(x) \& \exists x\, B(x) \Rightarrow \forall x\, (A(x) \vee B(x))$

9.3.7. $\forall x A(x) \& \exists x C(x) \& \exists x B(x) \Rightarrow \exists x (A(x) \& B(x) \& C(x))$

9.3.8. $\exists x\, (A(x) \& B(x)) \Rightarrow \exists x\, A(x) \& \forall x\, B(x)$

[2] Р. Смальян прокомментировал это высказывание следующим анекдотом. Заходит ковбой в бар и говорит бармену: “Мне налей и всем налей. Такой уж я человек: когда я пью, все пьют.” Через некоторое время: “Мне повтори и всем повтори. Такой уж я человек: когда я пью, все пьют.” Затем кладет на стойку деньги: “С меня возьми и со всех возьми. Такой уж я человек: когда я плачу, и все платят.”

9.3.9. $(\exists x A(x) \Rightarrow \forall x B(x)) \Rightarrow \forall x(A(x) \Rightarrow B(x))$

9.3.10. $\neg\exists x(A(x) \Rightarrow B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \& \forall x B(x)$

9.3.11. $\forall x \exists y A(x,y) \& \exists x \forall y B(x,y) \Rightarrow \exists x \exists y\, (A(x,y) \& B(x,y))$

9.3.12. $\forall x(A(x) \vee B(x)) \& (\forall x A(x) \Rightarrow \exists x C(x)) \& \forall x(B(x) \Rightarrow C(x)) \Rightarrow \exists x C(x)$

9.3.13. $\forall x\, (A(x) \vee B(x)) \& \exists x(A(x) \vee C) \& \exists x(C \Rightarrow B(x)) \Rightarrow \exists x B(x)$

9.3.14. $\forall x(A(x) \vee B(x)) \& \exists x \neg A(x) \&$
$\forall x \forall y(B(x) \Rightarrow C(y)) \& \exists x D(x) \Rightarrow \exists x(C(x) \& D(x))$

9.3.15. $\forall x \exists y\, (A(x) \Rightarrow B(y)) \& (\exists x A(x) \Rightarrow C) \Rightarrow (C \Rightarrow \exists z B(z))$

9.3.16. $\forall x \forall y\, (A(x) \Rightarrow B(y)) \& (\exists x C(x) \Rightarrow \exists x A(x)) \& \exists x(\neg C(x) \Rightarrow B(x)) \Rightarrow \exists x B(x)$

9.3.17. $\neg(\exists x A(x) \Rightarrow \forall y B(x,y))) \vee \forall x \neg A(x)$

9.3.18. $\forall x \exists y\, (A(x) \Rightarrow B(y)) \Rightarrow (\forall x A(x) \Rightarrow \exists x B(x))$

9.3.19. $\forall x(A(x) \Rightarrow B(x)) \&$
$\exists x(B(x) \& \neg C(x)) \Rightarrow \exists x(B(x) \& \neg A(x))$

9.3.20. $(\exists x B(x) \vee \exists x C(x)) \&$
$\forall x(C(x) \Rightarrow B(x)) \Rightarrow \exists x B(x)$

9.3.21. $\forall x\, (C(x) \Rightarrow B(x) \& D(x)) \&$
$\exists x(A(x) \& C(x)) \Rightarrow \exists x(A(x) \& B(x))$

9.3.22. [K] Некоторые птицы, гордящиеся своим хвостом, не могут петь. Ни одна птица, кроме павлина, не может гордиться своим хвостом. Значит. некоторые павлины не могут петь.

9.3.23. [K] Все львы свирепы. Некоторые львы не пьют кофе. Следовательно, некоторые из тех, кто пьет кофе, не свирепы.

9.3.24. [K] Ни одно ископаемое животное не может быть несчастно в любви. Устрица может быть несчастна в любви. Следовательно, некоторые устрицы — не ископаемые животные.

9.3.25. [K] Золото тяжелое. Ничто, кроме золота, не может заставить его замолчать. Следовательно, ничто легкое не может заставить его замолчать.

9.3.26. Некоторые лампочки плохо светят. Лампочки предназначены для того, чтобы светить. Следовательно, некоторые вещи, предназначенные для того, чтобы светить, светят плохо.

9.3.27. [К] Некоторые подушки мягкие. Ни одна кочерга не мягкая. Следовательно, некоторые кочерги — не подушки.

9.3.28. [К] Лишь тот, кто храбр, достоин славы. Некоторые хвастуны — трусы. Следовательно, некоторые хвастуны недостойны славы.

9.3.29. [К*] Необразованные люди обо всем судят поверхностно. Среди студентов Удмуртского университета есть и образованные люди. Значит, некоторые студенты УдГУ не судят обо всем поверхностно.

9.3.30. [К*] Все козлята прыгают. Ни одно молодое животное не прыгает, если оно не здорово. Следовательно, все молодые козлята здоровы.

9.3.31. Некоторые козы любят сено. Ни одна собака сена не любит. Значит, некоторые собаки — не козы.

9.3.32. Те, кто что-то учил, решили некоторые задачи. Андрей не решил ни одной. Значит, он не учил ничего.

9.3.33. Все рыбаки любители приврать. Все священники соблюдают заповеди. Никто не может и соблюдать заповеди, и вместе с тем врать. Значит, ни один рыбак не священник.

9.3.34. Не все политики мошенники. Все мошенники умны. Значит, некоторые политики глупы.

9.3.35. Студенты — любители покушать. Некоторые студенты худые. Не все те, кто любит покушать, студенты. Значит, некоторые любители покушать не являются худыми студентами.

9.3.36. Все мафиози жестоки. Некоторые чеченцы жестоки. Следовательно, некоторые чеченцы — мафиози.

9.3.37. Все шутки для того и предназначены, чтобы смешить людей. Ни одно постановление Думы — не шутка. Значит, ни одно такое постановление не предназначено для того, чтобы смешить людей.

9.4 Сокращенные семантические таблицы

Рассмотрим случай, когда часть компонент в формуле избыточна. Построим таблицу для формулы

$$(A \Rightarrow B)\ \&\ (B \Rightarrow D)\ \&\ (D \Rightarrow E) \Rightarrow (B \Rightarrow E).$$

$$\begin{array}{c}
\dashv (A \Rightarrow B)\ \&\ (B \Rightarrow D)\ \&\ (D \Rightarrow E) \Rightarrow (B \Rightarrow E)\\
\models (A \Rightarrow B)\ \&\ (B \Rightarrow D)\ \&\ (D \Rightarrow E) \quad \dashv (B \Rightarrow E)\\
\models (A \Rightarrow B) \quad \models (B \Rightarrow D) \quad \models (D \Rightarrow E) \quad \models B \quad \dashv E\\
\hline
\begin{array}{c|c}
\begin{array}{c} \dashv A \\ \hline \begin{array}{c|c} \underline{\underline{\dashv B}} & \begin{array}{c} \models D \\ \hline \begin{array}{c|c} \underline{\underline{\dashv D}} & \underline{\underline{\models E}} \end{array} \end{array} \end{array} \end{array}
&
\begin{array}{c} \models B \\ \hline \begin{array}{c|c} \underline{\underline{\dashv B}} & \begin{array}{c} \models D \\ \hline \begin{array}{c|c} \underline{\underline{\dashv D}} & \underline{\underline{\models E}} \end{array} \end{array} \end{array} \end{array}
\end{array}
\end{array} \tag{9.8}$$

Здесь видно, что разбор вариантов по первой импликации ничего не дал, и можно было начать сразу со второй, получив гораздо более приличную таблицу.

$$\begin{array}{c}
\dashv (A \Rightarrow B)\ \&\ (B \Rightarrow D)\ \&\ (D \Rightarrow E) \Rightarrow (B \Rightarrow E)\\
\models (A \Rightarrow B)\ \&\ (B \Rightarrow D)\ \&\ (D \Rightarrow E) \quad \dashv (B \Rightarrow E)\\
\models (A \Rightarrow B) \quad \models (B \Rightarrow D) \quad \models (D \Rightarrow E) \quad \models B \quad \dashv E\\
\hline
\begin{array}{c|c} \underline{\underline{\dashv B}} & \begin{array}{c} \models D \\ \hline \begin{array}{c|c} \underline{\underline{\dashv D}} & \underline{\underline{\models E}} \end{array} \end{array} \end{array}
\end{array} \tag{9.9}$$

Но как это усмотреть в самой таблице? В таблице 9.8 еще до ее разбиения появилась формула $\models B$, которая получилась во втором варианте первого разбиения. Значит, в этом варианте ни одной новой формулы не появилось, и мы сделали пустой шаг[3]

Определение 9.4.1. Шаг построения таблицы называется *избыточным*, если хотя бы в одной из получающихся подтаблиц не появляется новых формул, либо если разбивается формула $\models \exists x\, A(x)$, а в таблице уже имеется формула $\models A(c_i)$, либо разбивается $\dashv \forall x\, A(x)$, а в таблице уже имеется $\dashv A(c_i)$. Подтаблица называется *финальной*, если в ней не может быть сделано ни одного неизбыточного применения правил.

Избыточные разбиения просто не нужно делать. Более того, понятие избыточного разбиения позволило нам дать точный ответ на вопрос, когда же можно переходить к построению контрпримера: когда нашли финальную подтаблицу.

---

[3]На самом деле ничуть не лучше и формула $\dashv A$, появившаяся в первом варианте, поскольку элементарная формула A больше нигде не встречается.

На рассмотренных практических примерах видно, что иногда разбор при помощи семантических таблиц можно сократить далее. Например, если в подтаблице встречаются формулы $\models A \Rightarrow B$ и $\models A$, то подтаблица с $\Dashv A$ сразу же закрывается, и нетривиальна лишь таблица с $\models B$.

$$\begin{array}{c} \models A \Rightarrow B \\ \models A \\ \hline \underline{\underline{\Dashv A}} \;\Big|\; \models B \end{array} \tag{9.10}$$

Здесь без нарушения строгости и общности можно обойтись без разделения таблицы и просто добавить $\models B$. Это правило сокращения формулируется следующим образом.

$$\frac{\models A \Rightarrow B \quad \models A}{\models B} \qquad \textsf{(Modus Ponens)}$$

Modus Ponens – название этого правила в традиционной логике. Аналогично устанавливаются следующие правила сокращения:

$$\frac{\models A \Rightarrow B \quad \Dashv B}{\Dashv A} \qquad \textsf{(Modus tollens)}$$

$$\frac{\models A \vee B \quad \Dashv B}{\models A} \qquad \frac{\models A \vee B \quad \Dashv A}{\models B}$$

$$\frac{\Dashv A\&B \models B}{\Dashv A} \qquad \frac{\Dashv A\&B \quad \models A}{\Dashv B}$$

Еще один класс правил сокращения, применимых менее часто, это контрприменения, или обращения правил, не разбивающих таблицу. Например, имея $\models A$ и $\models B$, можно заключить $\models A\&B$. Эти правила целесообразно применять для того, чтобы избежать разбиения таблицы по сложной формуле в ситуации, подобной следующей:

$$\begin{array}{c} \models A\&B \Rightarrow D \\ \models A \qquad \models B \\ \models A\&B \\ \models D \end{array} \tag{9.11}$$

В отличие от предыдущих правил сокращения, которые являлись полностью безопасными, следующие правила сокращают лишь поиск опровержения, а при поиске доказательства заводят в тупик. Они основаны на наблюдении, что семантическая таблица с кванторами не всегда дает минимальную опровергающую модель. Избежать этого можно, разрешив подставлять в кванторные правила, в которых требуется новая константа, константу имеющуюся. Если при такой попытке подтаблица не закрылась, то мы находим опровергающую модель, если же закрылась, то попытка наша неудачна и нужно вернуться к стандартным правилам. Рассмотрим, как с помощью этого приема упрощается построение последней таблицы предыдущего параграфа.

$$\begin{array}{c} \dashv \forall x \exists y\, A(x,y) \Rightarrow \exists x A(x,x) \\ \dashv \exists x A(x,x) \qquad\qquad \models \forall x \exists y A(x,y) \\ \models \exists y\, A(c_1,y) \quad\; \models A(c_1,c_2) \quad\; \dashv A(c_1,c_1) \\ \models \exists y\, A(c_2,y) \qquad\qquad \models A(c_2,c_1) \\ \dashv A(c_2,c_2) \end{array} \tag{9.12}$$

А вот если взять в предпоследней строке c_2 вместо c_1, наша таблица “закроется”.

Подытожим:

Если мы ищем доказательство, то нужно обязательно рассматривать все варианты, брать новые константы, но подстановки констант можно искать самые многообещающие, а не перебирать все подряд.

Если мы ищем опровержение, можно ограничиваться одним, самым бесперспективным с точки зрения противоречий вариантом, иногда брать старые константы вместо новых, но подстановки обязательно проделать все.

Работая в одном направлении (доказательство либо опровержение), нельзя слишком увлекаться приведенными выше послаблениями, поскольку и Ваша первоначальная оценка формулы как истинной либо опровержимой может оказаться неверной, и сама формула в реальных задачах может быть видоизменена, поскольку никакая формализация не отражает полностью содержания реальной задачи.

При оформлении готового решения эти послабления можно использовать вовсю.

Чаще всего разумно до разделения таблицы проделать все действия, которые можно выполнить без разделения.

В случае, если разбор случаев может быть заменен на правило сокращения, это целесообразно сделать.

Избыточное разбиение формул делать не нужно.

Если в некотором варианте все разбиения избыточны, он готов для построения по нему опровергающей модели.

Упражнения к §9.4

Проверить на семантических таблицах высказывания и рассуждения. Если заключение частично опущено, восстановите его сами.

9.4.1. $((A \Rightarrow B\&C) \Rightarrow D)\&(C \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

9.4.2. $(A \vee B \Rightarrow D\&C)\&((A \Rightarrow C) \Rightarrow E)\&((A \Rightarrow D) \Rightarrow H)\&(B \Rightarrow F) \Rightarrow E\&H\&F$

9.4.3. $((A \Rightarrow B) \vee ((A \Rightarrow B) \Rightarrow C) \Rightarrow D) \Rightarrow D$

9.4.4. $(A \vee B \Rightarrow D\&C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)\&(A \Rightarrow D)\&(B \Rightarrow D)$

9.4.5. $(A \Rightarrow C)\&(A \Rightarrow D)\&(B \Rightarrow D) \Rightarrow (A \vee B \Rightarrow D\&C)$

9.4.6. $(A \vee B \Rightarrow D\&C)\&\neg A \Rightarrow \neg B \vee C \vee D$

9.4.7. $A \vee C \vee D \Rightarrow (A\&\neg B \Rightarrow C)\&(D\&B \Rightarrow C)$

9.4.8. $(A\&B \Rightarrow D \vee C) \Rightarrow D \vee (\neg C\&A \Rightarrow \neg B)$

9.4.9. $(A \vee B \Rightarrow D\&C)\&((A \Rightarrow C) \Rightarrow E)\&((B \Rightarrow D) \Rightarrow H)\&(E\&H \Rightarrow F) \Rightarrow F$

9.4.10. $((A \Rightarrow D) \Rightarrow E)\&((D \Rightarrow A) \Rightarrow H)\&(E \vee H \Rightarrow G \vee F) \Rightarrow G$

9.4.11. $(A \vee B \Rightarrow D)\&(A \vee C \Rightarrow E)\&(\neg A \Rightarrow B \vee C) \Rightarrow E \vee D$

9.4.12. $(\neg A \vee \neg B \vee \neg C \vee D) \Rightarrow (A \Rightarrow D) \vee (B \Rightarrow D) \vee (C \Rightarrow D)$

9.4.13. $(A \Rightarrow D\&C)\&((A \Rightarrow D) \Rightarrow E)\&((A \Rightarrow C) \Rightarrow H)\&(E \vee H \Rightarrow G) \Rightarrow G$

9.4.14. $((A \Rightarrow B\&C) \Rightarrow D)\&(A \Rightarrow B)\&(E\&A \Rightarrow C) \Rightarrow (E \Rightarrow D)$

9.4.15. $((A \Rightarrow B\&C) \Rightarrow D)\&(A\&E \Rightarrow B)\&(\neg E\&A \Rightarrow C) \Rightarrow D$

9.4.16. $(A\&H \Rightarrow B)\&(\neg H\&A \Rightarrow C)\&(\neg A \Rightarrow D) \Rightarrow B \vee C \vee D$

9.4.17. $(A \Rightarrow B \vee C \vee D)\&((A \Rightarrow D) \Rightarrow E)\&((A \Rightarrow C) \Rightarrow E) \Rightarrow E$

9.4.18. $(A\&B \Rightarrow D)\&(A \Rightarrow B \vee H)\&(B \Rightarrow A \vee E) \Rightarrow D \vee H \vee E$

9.4.19. $((A \Rightarrow B) \vee (A \Rightarrow C))\&((A \Rightarrow B \vee C) \Rightarrow D)\&(D\&E \Rightarrow G) \Rightarrow (E \Rightarrow G)$

9.4.20. $(A \Rightarrow B\&C)\&(B \Rightarrow D\&E)\&(C \Rightarrow F)\&(E\&F \Rightarrow G)\&(G\&D \Rightarrow H) \Rightarrow (A \Rightarrow H)$

9.4.21. $\forall x(A(x)\&B(x))\&\exists x(A(x) \Rightarrow C(x))\&\exists x(B(x) \Rightarrow D(x))\& \forall x(C(x)\&D(x) \Rightarrow E(x)) \Rightarrow \exists x E(x)$

9.4.22. $\exists x(A(x) \Rightarrow B(x))\&\forall x(A(x) \vee C)\&\exists x(C \Rightarrow B(x)) \Rightarrow \exists x B(x)$

9.4.23. $(\forall x\, A(x) \Rightarrow \exists x\, B(x))\& \forall x(C(x) \Rightarrow A(x))\&\forall x(C(x) \vee D) \Rightarrow \exists x B(x) \vee D$

9.4.24. $\forall x(A(x) \Rightarrow \exists x B(x))\&\forall x(C(x) \vee A(x))\&\exists x(C(x) \Rightarrow B(x)) \Rightarrow \exists x B(x)$

9.4.25. $\forall x\exists y(A(x,y) \vee B(y,x))\&\forall x\forall y(A(x,y) \Rightarrow C(x))\&\exists x\forall y(B(x,y) \Rightarrow C(x)) \Rightarrow \exists x C(x)$

9.4.26. $\forall x\exists y A(x,y)\&\forall x\exists y\neg A(x,y)\&\forall x\forall y(A(x,y) \Rightarrow B(x))\& \forall x\forall y(\neg A(x,y) \Rightarrow C(x)) \Rightarrow \forall x(H(x) \Rightarrow B(x)\&C(x))$

9.4.27. $\forall x\exists y A(x,y)\&\exists x\forall y(A(x,y)\&B(x) \Rightarrow C(x,y))\& \forall z B(z) \Rightarrow \exists x\exists y C(x,y)$

9.4.28. $\forall x\exists y A(x,y)\&\forall x\exists y(A(x,y)\&B(x) \Rightarrow C(x,y))\& \forall z B(z) \Rightarrow \exists x\exists y C(x,y)$

9.4.29. $\forall x(A(x) \Rightarrow \exists y(B(y)\&R(x,y)))\&\forall x(A(x) \Rightarrow \forall y(Q(y) \Rightarrow \neg R(x,y)))\&\exists x A(x) \Rightarrow \exists x(\neg Q(x)\&B(x))$

9.4.30. $\exists x(Q(x)\&\forall y(B(y) \Rightarrow R(x,y))) \Rightarrow (\forall x(Q(x) \Rightarrow B(x)) \Rightarrow \exists x(B(x)\&R(x,x)))$

9.4.31. $\exists x(Q(x) \;\&\; \exists y(B(y) \;\&\; \neg R(x,y))) \;\&\; \forall y(A(y) \Rightarrow \forall x(Q(x) \Rightarrow R(x,y))) \Rightarrow \exists x\neg Q(x)$

9.4.32. $\forall x(A(x) \Rightarrow \forall y(Q(y) \Rightarrow \neg R(x,y)))\&\exists x(A(x)\& \forall y(B(y) \Rightarrow R(x,y))) \Rightarrow \neg\exists x(\neg Q(x)\&B(x)$

9.4.33. $\forall x(A(x) \Rightarrow (\exists y B(x,y) \Rightarrow \exists y C(x,y)))\&\forall x(\exists y B(x,y) \Rightarrow B(x,x))\& \neg\exists x B(x,x)\&\forall x\forall y(C(x,y) \Rightarrow B(y,x)) \Rightarrow \forall x(A(x) \Rightarrow \forall y\neg B(x,y)).$

9.4.34. $\forall x(P(a,x) \Rightarrow Q(x,b))\&(\exists y\, Q(y,b) \Rightarrow \exists y\, Q(b,y)) \Rightarrow (\exists z\, P(a,z) \Rightarrow \exists x Q(b,x))$

9.4.35. $\forall x(A(x) \Rightarrow \forall y(Q(y) \Rightarrow R(x,y))) \;\&\; \neg\forall x(A(x) \Rightarrow \forall y(B(y) \Rightarrow R(x,y))) \Rightarrow \neg\forall x(B(x) \Rightarrow A(x))$

9.4.36. Если ездить на работу на автобусе, то приходится висеть на подножке или рискуешь опоздать. Если не ездить на нем, то надо ходить пешком. Если ходишь на работу пешком, то никогда не висишь на подножке, но можешь простудиться. Следовательно, если не рисковать опоздать, то надо висеть на подножке либо рисковать простудиться.

9.4.37. Если пойдешь в лес весной, тебя укусит клещ. Те, кого кусает клещ, заболевают энцефалитом или им делают укол. Тех, кто заболел, кладут в больницу. В больнице всегда делают уколы. Значит, если весной пойдешь в лес, ...

9.4.38. Будешь есть много хлеба, потолстеешь. Толстяки больны и вялы. Больные не могут добиться успеха, если им не повезет. Вялым людям никогда не везет. Значит, чтобы добиться успеха, необходимо ...

9.4.39. Старательные люди добиваются успеха. Лишь тот может считаться старательным, кто работает не менее десяти часов в сутки. Нельзя одновременно работать и отдыхать по десять часов в сутки. Легкомысленные люди отдыхают не менее десяти часов в сутки. Следовательно, легкомысленные люди ...

9.4.40. Розовая вода приятно пахнет. Ни одно лекарство не пахнет приятно. Если человек болен, он должен принимать лекарство либо соблюдать режим. Соблюдать режим и не принимать лекарство нельзя. Следовательно, если человек употребляет розовую воду, он не болен.

9.4.41. Если по телевизору не идет интересное кино, то в общежитии собирается веселая компания. Веселая компания всегда шумна. При шуме готовиться к занятиям невозможно. Если по телевизору идет интересное кино, невозможно не смотреть телевизор. Смотреть телевизор и готовиться к занятиям нельзя. Значит, в общежитии ...

9.4.42. Известно, что убийца — Джон, Билл или Джек. Если Джон или Джек — убийца, то убийство было после полуночи. Если убийство было до полуночи, то Джон лжет или Билл — убийца. Если Джон не лжет, то убийца — Билл. Следовательно, Билл — убийца или убийство было после полуночи.

9.4.43. Коля и Вася никогда не бывают вместе. Маша придет на вечеринку только вместе с Колей. Вася — только вместе с Глашей.

Вечеринка веселая, только если на ней присутствуют и Маша, и Глаша. Значит, веселых вечеринок не бывает.

9.4.44. Все парни самолюбивы. Ни один самолюбивый студент не аккуратен. Некоторые студенты аккуратны. Значит, некоторые студенты — не парни.

9.5 Исчисления традиционного типа

Исчисление — еще одно важнейшее понятие, наряду с формальным языком и семантикой введенное в число базовых математических конструкций математической логикой. Исчисление $\mathcal{I}$ опирается на некоторый формальный язык $\mathcal{L}$ и задает подкласс синтаксически правильно построенных объектов этого языка, порождаемых, или выводимых, в $\mathcal{I}$. Для описания таких объектов и действий с ними используется новый класс синтаксических конструкций — *выводы* (часто называемые в конкретных исчислениях *порождениями* либо *доказательствами*). Выводы включают в себя формулы, термы либо другие объекты языка $\mathcal{L}$, организованные в систему таким образом, что каждый из них связан с ограниченным числом других согласно четким и проверяемым правилам, а глобальная структура вывода также подчинена четким и проверяемым условиям.

Пример 9.5.1. Исчисление, порождающее подстановки порядка n.

Выводимые объекты — векторы σ вида $(i_1, \cdots, i_n)$, все i_k попарно различны и находятся в диапазоне $1 : n$. Как известно, такие кортежи задают перестановки чисел 1, . . . ,n.

Выводы — циклические ориентированные графы с k пронумерованными вершинами, такие, что вершина $i+1$ следует за i при $i < k$, первая следует за k-той, каждой вершине i сопоставлена подстановка σ_i; подстановка ζ в вершине, следующей за i, является произведением σ_1 и σ_i. Например, следующий граф есть вывод в исчислении подстановок 4-го порядка.

$$\begin{tikzcd}
(3,4,1,2) \arrow[r] & (4,1,2,3) \arrow[d] \\
(2,3,4,1) \arrow[u] & (1,2,3,4) \arrow[l]
\end{tikzcd} \tag{9.13}$$

Простейшим подклассом исчислений являются исчисления традиционного типа. Такое исчисление $\mathcal{I}$ задается описанием языка $\mathcal{L}$, аксиом, являющихся выражениями языка L, и правил вывода, каждое из которых имеет фиксированное конечное число посылок и одно заключение.

Правила вывода обычно записываются в следующей форме:

$$\frac{\Xi_1, \cdots, \Xi_n}{\Xi} \qquad Z\epsilon\upsilon\varsigma$$

Примененный здесь способ записи правил вывода является традиционным в математике. Над чертой стоят посылки, или аргументы, правила: формальные объекты, выведенные ранее, к которым разрешается применить правило. Под чертой стоит *заключение*, или *результат*: объект, который будет выведен после применения правила[4]. Рядом с правилом написано его имя (например, $Z\epsilon\upsilon\varsigma$). В соответствии с этим возникает следующее индуктивное определение выводимых (или порождаемых) объектов.

Определение 9.5.1.

1. Если Ξ — аксиома, Ξ — выводимый объект.
2. Если $\Xi_1, \cdots, \Xi_n$ — выводимые объекты, Ξ получается из них применением правила вывода, то Ξ — выводимый объект.

Процесс порождения объекта согласно данному индуктивному определению представляется деревом, как доказано в 6.1.

Определение 9.5.2. *Вывод* в исчислении $\mathcal{I}$ традиционного типа — конечное нагруженное дерево, листьям которого сопоставлены аксиомы, ребрам — положительные натуральные числа, остальным вершинам — пара из имени правила и объекта, получающегося применением данного правила к объектам, сопоставленным вершинам, непосредственно следующим за данной, взятым в порядке, соответствующем числам, приписанным ребрам, ведущим в эти вершины, причем количество вершин, непосредственно следующих за данной, равно количеству посылок в соответствующем правиле (обозначим его n), а ребра, в них ведущие, взаимно-однозначно занумерованы числами от 1 до n.

Таким образом, правила в исчислении, в отличие от правил в алгоритме или предложений в программе, лишь дают возможность совершить какие-то преобразования, но не обязывают нас сделать это. Как говорят, исчисление *порождает* объекты.

Пример 9.5.2. Рассмотрим исчисление для порождения палиндромов, или перевертышей (слов типа "кабак"), в алфавите A. Пусть ξ — переменная, значениями которой являются буквы в алфавите A. Аксиомами являются пустое слово, обозначаемое (для того, чтобы его увидеть) Λ, и любая буква ξ. Правило вывода единственное и с одной посылкой.

[4] Удвоение терминов имеет здесь смысл для того, чтобы, с одной стороны, подчеркнуть сходство как с импликацией, так и с процедурой, и, с другой стороны, избегнуть путаницы при рассмотрении правил, относящихся, например, к импликации.

$$\frac{\Xi}{\xi\Xi\xi}$$

Вывод перевертыша “потоп” имеет вид (здесь последовательные применения правил мы не станем полностью разворачивать в дерево):

$$\cfrac{\cfrac{\mathsf{т}}{\mathsf{ото}}}{\mathsf{потоп}}$$

Предложение 9.5.1. *Объект Ξ выводим в исчислении $\mathcal{I}$ тогда и только тогда, когда он встречается как корень в некотором дереве вывода.*

Следствие теоремы 6.1.

На самом деле выводимым оказывается любой объект, встречающийся в некотором выводе. Таким образом, исчисления традиционного типа позволяют порождать и использовать лишь абсолютно правильные конструкции; если они имеют дело с формулами, то они не позволяют применять никаких гипотез, допущений и т.п. С точки зрения современной теории творческого мышления они формализуют полностью рутинный стиль мышления, когда человек не может даже допустить ничего, кроме того, что он считает истинным. Но с чисто математической точки зрения такое свойство традиционных исчислений часто полезно для доказательства точных результатов. Строго сформулировав исчисление, необходимо исследовать для него проблемы корректности и полноты. Корректность означает согласованность исчисления с семантикой выводимых объектов (в частности, для исчисления традиционного типа тождественную истинность всех доказуемых объектов). Корректность, безусловно, необходима для применения исчисления. Полнота означает возможность вывести любой семантически правильный объект в нашем исчислении. Полнота не является столь обязательным свойством, а зачастую и просто теоретически недостижима. Но уж если она возможна, иметь ее стоит.

Пример 9.5.3. Рассмотрим исчисление $\mathcal{E}$ равенств натуральных чисел, представленных в следующей форме: n как

$$\overbrace{SS\cdots S}^{\mathsf{n}\ \text{раз}}\mathsf{0}\,.$$

Язык $\mathcal{L}$ состоит из равенств n=m.

Аксиома единственная: 0=0. Правило вывода также одно:

$$\frac{\mathsf{n} = \mathsf{m}}{\mathsf{Sn} = \mathsf{Sm}}$$

Легко видеть, что это исчисление полно и корректно относительно обычной интерпретации равенств.

Пример 9.5.4. Немного изменим определение натурального числа из прошлого примера, отбросив 0. После этого, наряду с исчислением, получающимся из предыдущего заменой аксиомы на '$=$', можно сформулировать исчисление $\mathcal{E}_1$, которое кажется более эффективным, добавив правило Π_1

$$\frac{\mathsf{n} = \mathsf{m} \quad \mathsf{l} = \mathsf{k}}{\mathsf{nl} = \mathsf{mk}}$$

где соединение есть просто приписывание одного слова к другому, а не умножение. Тем не менее можно доказать, что ни одно дерево вывода в расширенном исчислении не содержит меньше правил, чем в исходном.

Этот пример ставит важный и тонкий вопрос, связанный с представлением данных. Вывод представлен как дерево. Но дерево плохо тем, что его ветви абсолютно независимы, и получив однажды $\mathsf{n} = \mathsf{n}$, мы должны на другой ветви получать его вновь. Нельзя ли перейти к более эффективному представлению, не заставляющему копировать множество раз одни и те же куски вывода?

Таким представлением является *сеть вывода*. Ниже дана сеть вывода формулы $8 = 8$, более короткая, чем соответствующее дерево.

$$\begin{array}{c}
\mathsf{SSSSSSSS} = \mathsf{SSSSSSSS} \\
\downarrow \qquad\qquad \downarrow \\
\mathsf{SSSS} = \mathsf{SSSS} \\
\downarrow \qquad \downarrow \\
\mathsf{SS} = \mathsf{SS} \\
\downarrow \\
\mathsf{S} = \mathsf{S} \\
\downarrow \\
=
\end{array} \tag{9.14}$$

Сеть часто представляется в другом виде, более удобном для использования в математическом тексте. Это последовательность объектов. Каждый объект в этой последовательности является либо аксиомой, либо получается по одному из правил вывода из объектов, стоящих ранее. Известно, что при преобразовании сети в дерево количество объектов в выводе порою растет экспоненциально, т.е. пропорционально $c \cdot a^n$, где $a > 1$, n — количество объектов в выводе, c — константа.

Если исчисление содержит правила вывода, то возникает еще одно важное понятие.

Определение 9.5.3. Правило Π допустимо в исчислении $\mathcal{I}$, если множество выводимых объектов не изменяется после добавления Π.

Например, правило Π_1 допустимо в исчислении $\mathcal{E}$ из примера 9.5.3.

Упражнения к §9.5

9.5.1. Что получится, если опустить требование конечности дерева в определении вывода?

9.5.2. Верно ли, что в рассмотренном выше исчислении для подстановок порядка k любая подстановка, встретившаяся в выводе, является выводимой?

9.5.3. Докажите, что в расширенном исчислении из примера 9.5.4 $\mathsf{n}{=}\mathsf{n}$ выводится не менее чем за n применений правил.

9.5.4. Пусть задано исчисление традиционного типа, в котором языком является множество всех слов в алфавите $\{abc\}$, аксиомой – a, правилами вывода

$$\frac{\mathsf{X}a\mathsf{Y}}{\mathsf{X}ab\mathsf{Y}} \quad \frac{\mathsf{X}a\mathsf{Y}}{\mathsf{X}c\mathsf{Y}} \quad \frac{\mathsf{X}cbb\mathsf{Y}}{\mathsf{X}bba\mathsf{Y}}$$

Здесь X,Y – произвольные слова.

1. Вывести в этом исчислении $bbcb$.
2. Построить граф выводимых слов не более чем из пяти букв; слова X, Y связаны ребром, если Y переводится правилом в X.
3. Привести пример слова, имеющего два существенно различных вывода.
4. Привести пример невыводимого слова.

9.5.5. Пусть задано исчисление Ξ традиционного типа, в котором языком является множество всех слов в алфавите $\{ab\}$, аксиомой – b, правилами вывода

$$\frac{\mathsf{X}}{a\mathsf{X}a} \qquad \frac{\mathsf{X}}{\mathsf{X}a}$$

1. Показать, какие выражения выводимы в исчислении Ξ.
2. Дать семантику, относительно которой данное исчисление было бы полным.

3. Показать, что правило

$$\frac{\mathsf{X}b\mathsf{Y} \quad \mathsf{Y}b\mathsf{Z}}{\mathsf{X}b\mathsf{Z}}$$

допустимо в исчислении Ξ.

9.5.6. Рассмотрим теорию АА над языком слов в алфавите $\{\mathsf{S}{+}{=}\}$ с аксиомой $+=$ и правилами вывода

$$\frac{X+Y=Z}{X\mathsf{S}+Y=Z\mathsf{S}} \qquad \frac{X+Y=Z}{X+Y\mathsf{S}=Z\mathsf{S}}$$

1. Вывести $\mathsf{SS{+}SSS{=}SSSSS}$.
2. Доказать, что правило

$$\frac{X+Y=Z}{Y+X=Z}$$

допустимо в исчислении АА.

3. Доказать, что АА полно и корректно для сложения натуральных чисел.

9.5.7. Рассмотрим исчисление в алфавите $\{()\}$. Аксиома: Λ. Правила вывода:

$$\frac{\Xi}{(\Xi)} \qquad \frac{\Xi \quad \Psi}{\Xi\Psi}$$

1. Охарактеризовать выводимые объекты.
2. Доказать полноту исчисления.

9.5.8. Видоизменим второе правило предыдущего исчисления на

$$\frac{\Xi \qquad \Psi}{(\Xi\Psi)}$$

Чем это исчисление отличается от предыдущего?

9.5.9. Рассмотрим исчисление в языке выражений в алфавите

$$()irbct\hat{}\,.$$

Аксиомы его —

$$\{i, r, b, c\}\,.$$

Правила вывода:

$$\frac{\xi_1\ \ldots\ \xi_n}{(\xi_1\ \ldots\ \xi_n)}\,\mathbf{R} \qquad \frac{\xi}{T}\,\mathbf{I} \qquad \frac{\xi}{\hat{}\xi}\,\mathbf{P} \qquad \frac{\xi}{\xi\ \ \xi}\,\mathbf{D}$$

Здесь ξ– произвольное слово, T – слово из букв t. Вывод - конечный граф, начальными вершинами которого являются аксиомы, в каждом применении правила **I** T отлично от использованных в остальных применениях этого правила, в каждом цикле применяется хотя бы одно правило **P**. Выводимые объекты – встречающиеся в выводе. T *определено* в выводе Σ, если оно является заключением правила **I**.

1. Показать, что все T, встречающиеся в любом выводе, определены.
2. Показать, что если сопоставить нашим выражениям типы Паскаля по принципу: $i \to$ **integer**; $r \to$ **real**; $b \to$ **boolean**; $c \to$ **char**; $(\xi_1\ \ldots\ \xi_n) \to$ **record** $a1 : x_1; \ldots\ an : x_n$ **end**; $\hat{}\xi \to \hat{}x$; (здесь T – идентификатор a, определенный описанием **type** a=x; $\mathtt{x}$ – тип, сопоставленный выражению ξ, a_i – произвольные неповторяющиеся идентификаторы), то наше исчисление может рассматриваться как способ вывода корректных описаний типов языка Паскаль.
3. Показать, что, если убрать требование, чтобы в каждом цикле было правило **P**, наше исчисление становится некорректным.

9.5.10. Сформулировать полное и корректное исчисление для равенств постоянных выражений, составленных из натуральных чисел при помощи операций сложения.

9.5.11. Сформулировать полное и корректное исчисление для равенств постоянных выражений, составленных из натуральных чисел при помощи операций сложения и умножения.

9.6 Секвенции и формализация семантических таблиц

Для того, чтобы доказать корректность и полноту аппарата семантических таблиц для классической логики, необходимо прежде всего полностью формализовать этот термин, превратить его в математическую структуру.

Как обычно, точная формализация требует введения вспомогательных понятий, выявляющих многое из того, что скрыто за “общепонятными” словами в нестрогом описании. Важнейшее из них — секвенция. Прежде чем определить секвенцию, дадим неформальные пояснения.

Секвенция отображает некоторую стадию построения подтаблицы и состоит из всех результатов, полученных в ней в данный момент. Эти результаты, как мы уже видели, не просто формулы, а формулы с дополнительными спецификациями. Далее, при интерпретации секвенции необходимо учесть, что в некотором смысле метод семантических таблиц — метод доказательства от противного. Стремясь убедиться, что формула — тавтология, мы предполагаем, что она ложна, и старательно выискиваем все возможности, чтобы это нежелательное предположение оправдалось. Лишь неудача всех возможных попыток опровергнуть формулу заставляет нас принять, что она тождественно истинна. Данные соображения лежат в основе “парадоксального” определения истинности секвенции ниже.

Определение 9.6.1. Если задано множество спецификаций S, и $\alpha \in \mathsf{S}$, а A — формула, то αA — специфицированная формула. *Секвенция* — набор специфицированных формул. *Классическая секвенция* — секвенция, где S есть $\{\models, \dashv\}$, а формулы являются формулами логики предикатов.

Мы специально дали достаточно общее определение, поскольку секвенции будут использоваться и для неклассических логик. Большими греческими буквами Γ, Δ, Λ (возможно с индексами) будем обозначать произвольные (возможно пустые) наборы специфицированных формул. Аксиомы исчисления секвенций — секвенции вида $\Gamma \oplus \{\models \mathcal{A}, \dashv \mathcal{A}\}$ Видно, что аксиомы соответствуют закрывшимся подтаблицам, содержащим противоречия. Теперь правила для семантических таблиц могут быть переформулированы в правила исчисления секвенций. Нам достаточно показать технику переформулировок на примере правил для $\Rightarrow$ и $\forall$.

$$
\begin{array}{cc}
\models\Rightarrow \ \dfrac{\Gamma \oplus \{\models \mathsf{B}\} \quad \Gamma \oplus \{\dashv \mathsf{A}\}}{\Gamma \oplus \{\models \mathsf{A} \Rightarrow \mathsf{B}\}} & \dashv\Rightarrow \ \dfrac{\Gamma \oplus \{\dashv \mathsf{B}\} \oplus \{\models \mathsf{A}\}}{\Gamma \oplus \{\dashv \mathsf{A} \Rightarrow \mathsf{B}\}} \\
\models\forall \ \dfrac{\Gamma \oplus \{\models \forall x\, A(x)\}}{\Gamma \oplus \{\models \forall x\, A(x)\} \oplus \{\models A(c_i)\}} & \dashv\forall \ \dfrac{\Gamma \oplus \dashv \forall x\, A(x)}{\Gamma \oplus \{\models A(c_{n+1})\}}
\end{array}
\tag{9.15}
$$

Правила для всеобщности требуют пояснения. Там, где берется старая константа, мы сохраняем $\models \forall x\, A(x)$ с тем, чтобы его можно было использовать и для других констант. Если же введена новая константа, мы уже выжали из квантора все, что возможно, и сохранять его смысла нет.

Исчисление секвенций — традиционного типа. Для нашего конкретного случая семантических таблиц (секвенций) нежелательные эффекты традиционного определения в значительной степени нейтрализуются тем, что нас интересует не столько вся секвенция, как целое, сколько отдельные специфицированные формулы, входящие в нее. Еще одной приятной особенностью исчисления секвенций является то, что каждое правило вывода преобразует в результате лишь одну формулу; говорят, что оно применяется к этой формуле. Далее, формула, к которой применяется правило, собирается из своих подформул (возможно, с подставленными значениями свободных переменных). Таким образом, в дереве вывода в исчислении секвенций встречаются лишь подформулы формул, входящих в полученную секвенцию. Это свойство подформульности является чрезвычайно ценной особенностью секвенций и семантических таблиц, делающей их мощным инструментом в исследовании логических систем.

Исчисление секвенций создано немецким логиком Г. Генценом (G. Gentzen) в 1934 г.[5] Сам Генцен, и вслед за ним большинство логиков, применяют другую систему обозначений: секвенция представляется как фигура $\Gamma \to \Delta$, где Γ и Δ – наборы формул. Γ соответствует формулам, специфицированным как истинные, а Δ – как ложные. Пример дерева вывода в исчислении секвенций.

$$\begin{array}{ccc}
\models A, \models B, \Dashv A & & \models A, \models B, \Dashv B \\
\nwarrow & & \nearrow \\
& \models A, \models B, \Dashv A\&B & \\
& \uparrow & \\
& \models A, \Dashv (B \Rightarrow A\&B) & \\
& \uparrow & \\
& \Dashv A \Rightarrow (B \Rightarrow A\&B) &
\end{array} \tag{9.16}$$

В связи с локальной структурой дерева вывода появляется еще одно важное понятие. Если секвенция Δ находится в дереве выше секвенции Γ, то для каждой из формул Δ имеется возможность однозначно определить подформулу одной из формул Γ, в которую она переходит. Например, $\Dashv B$ из листа 2 переходит в подчеркнутую B в исходной $\Dashv A \Rightarrow (B \Rightarrow A\&\underline{B})$. Дадим строгие определения.

Определение 9.6.2. Для правила $\models\Rightarrow\ \Dashv A$ в одном из аргументов и $\models B$ в другом являются (непосредственными) результатами разбиения $\models A \Rightarrow$

---

[5] Его судьба была трагична. Он стал членом нацистской партии и ректором Пражского университета во время немецкой оккупации. За это он был расстрелян в 1945 г.

B. Они соответствуют посылке и заключению этой импликации. Для правила $\dashv \Rightarrow$ (непосредственными) результатами разбиения являются $\dashv B$ и $\models A$. Соответствие определяется аналогично. Для аргумента правила $\models \forall$ $\models A(c_i)$ – (непосредственный) результат, а $\models \forall x\, A(x)$ – результат разбиения $\models \forall x A(x)$ в результирующей секвенции. Первый из них соответствует подформуле $A(x)$, второй – всей формуле. Для правила $\dashv \forall$ $\dashv A(c_{n+1})$ – (непосредственный) результат разбиения $\dashv \forall x\, A(x)$ и соответствует подформуле $A(x)$. Для остальных правил результаты разбиения и соответствия для формул, к которым применяется правило, определяются аналогично. Для всех формул из Γ они сами в аргументе являются результатами разбиения их же в заключении правила.

Если A есть результат разбиения B, B – результат разбиения C, то А есть результат разбиения C и соответствует той подформуле C, которая соответствует в подформуле B', соответствующей B в C, подформуле A', соответствующей A в B.[6] Определим истинность и ложность секвенции в интерпретации.

Определение 9.6.3. Секвенция Δ истинна в интерпретации M, если хотя бы одна из ее формул противоречит своей спецификации; она ложна, если все формулы соответствуют своим спецификациям.

Таким образом, предполагая в начале построения семантической таблицы $\dashv A$, мы стремимся вывести секвенцию $\{\dashv A\}$, истинность которой означает истинность A.

Теорема 9.1. (Теорема корректности для исчисления секвенций) *Если секвенция выводима, то она истинна в любой интерпретации.*

Доказательство. Индукцией по числу секвенций в дереве вывода.

Базис. Пусть вывод состоит из одной секвенции. Тогда она является аксиомой. Значит, в ней есть формула, которая специфицирована и как истинная, и как ложная. Один из ее экземпляров и противоречит спецификации.

Шаг. Пусть корректность доказана для всех выводов с числом секвенций $< n$. Докажем ее для секвенций, выводимых за n шагов. Разберем случаи, когда результирующая секвенция получается по правилам для $\Rightarrow$ и $\forall$. Остальные рассматриваются аналогично. Пусть последним применялось правило $\dashv \Rightarrow$, получена $\Gamma \oplus \{\dashv A \Rightarrow B\}$ из $\Gamma \oplus \{\dashv B\} \oplus \{\models A\}$.

[6] Часто результаты разбиения называют *предками* соответствующей формулы. Но эта терминология зависит от точки зрения. Если рассматривать исчисление секвенций, то они скорее предки, а если рассматривать таблицы, они — потомки (конечно, измельчавшие).

По предположению индукции, исходная секвенция истинна в любой интерпретации M. Докажем более сильное, чем непосредственно требуется, утверждение: аргумент и результат правила одновременно истинны либо ложны в любой интерпретации.[7] Если аргумент ложен, то все формулы из Γ удовлетворяют своей спецификации, B ложно, A истинна. По таблице истинности для $\Rightarrow$, ложно $A \Rightarrow B$. Обратно, если результат ложен, то все формулы из Γ специфицированы правильно, и ложно $A \Rightarrow B$. По таблице истинности, тогда истинна A и ложно B. Значит, и аргумент тоже ложен. Поскольку условия ложности аргумента и результата эквивалентны, эквивалентны и условия их истинности.

Для правила $\dashv \Rightarrow$ установим эквивалентность истинности обоих аргументов и результата, или, что эквивалентно, ложности хотя бы одного из аргументов и ложности результата. Если ложен результат правила, то все формулы из Γ специфицированы правильно, и истинно $A \Rightarrow B$. По таблице истинности, тогда ложно A или истинно B. Значит, хотя бы одна из посылок истинна. Наоборот, если ложен один из аргументов правила, то все формулы из Γ специфицированы правильно, и ложна посылка импликации либо истинно ее заключение. В любом из этих случаев $A \Rightarrow B$ истинна. Теперь рассмотрим правило $\models \forall$. Если ложен аргумент, то соответствуют своим спецификациям все формулы из результата, поскольку все они входили в аргумент. Если истинен результат, то он полностью входит в аргумент, а $A(c_i)$ истинно, поскольку истинно $\forall x\, A(x)$.

И наконец, рассмотрим $\dashv \forall$. Здесь уже не выполнена эквивалентность истинности аргумента и результата в любой интерпретации. $A(c_{n+1})$ может быть истинно, хотя $\forall x A(x)$ ложно. Но из истинности аргумента в любой интерпретации следует истинность результата в любой интерпретации. В самом деле, возьмем произвольную интерпретацию M сигнатуры секвенции $\Gamma \oplus \{\dashv \forall x A(x)\}$. В ней нет интерпретации для c_{n+1}, поэтому ей соответствует целое семейство $(M_a)_{a \in \mathsf{U}}$ интерпретаций аргумента, отличающихся от M лишь тем, что c_{n+1} имеет значение $a \in \mathsf{U}$. В каждой из M_a аргумент истинен по предположению индукции. Если для некоторого $a \in \mathsf{U}$ противоречит своей спецификации одна из формул Γ, то поскольку она не содержит c_{n+1}, она сохранит то же значение и в M, и результат будет истинен. Если же ни для какого $a \in \mathsf{U}$ ни одной такой формулы из Γ не найдется, то в любой M_a $\dashv A(c_{n+1})$ противоречит своей спецификации, и, значит, $A(c_{n+1})$ истинна при любом значении c_{n+1} из U. По определению истинности, тогда в M истинна $\forall x A(x)$, эта формула противоречит своей спецификации и результат истинен. □

---

[7] Если бы у нас было возможно применять операцию $\Leftrightarrow$ к секвенциям, можно было бы сказать: секвенции в посылке и заключении эквивалентны.

Итак, мы установили, что замкнутая семантическая таблица доказывает тождественную истинность проверяемой формулы. Более того, для логики высказываний преобразования при построении семантических таблиц оказываются эквивалентными.

Упражнения к §9.6

9.6.1. Определить правила исчисления секвенций для всех остальных связок классической логики.

9.6.2. Перестроить в дерево секвенций семантические таблицы из предыдущих параграфов.

9.7 Семантические таблицы с равенством и для теорий

Исчисление предикатов с равенством характеризуется наличием выделенного двуместного предиката $=$, всегда интерпретируемого как совпадение, т.е. $\zeta(a = a) = 1$; $\zeta(a = b) = 0$ для различающихся a, b. Совпадение интерпретаций равных объектов гарантирует эквивалентность всех их свойств, согласно определению равенства, данному Лейбницем. Согласно теореме о замене эквивалентных, это означает, что $\mathsf{Subst}(A, x, t)$ может быть заменено на $\mathsf{Subst}(A, x, r)$, если $\models t = r$. Анализируя, где целесообразно проводить такую замену, видим, что она играет роль лишь там, где взаимодействуют две формулы, т.е. при выявлении противоречий, закрывающих подтаблицу. Кроме того, необходимо учесть, что $t = t$ всегда истинно. Это выражается следующими дополнительными правилами закрытия таблиц: если $\models t = r$ либо $\models r = t$, то $\models \mathsf{Subst}(A, x, t)$ и $=\!\!\mid \mathsf{Subst}(A, x, r)$ составляют противоречие. $=\!\!\mid t = t$ есть противоречие само по себе.

Пример 9.7.1. Докажем утверждение $\forall x \forall y(x = y \Rightarrow y = x)$.

$$
\begin{array}{c}
=\!\!\mid \forall x \forall y(x = y \Rightarrow y = x) \\
=\!\!\mid \forall y(c = y \Rightarrow y = c) \\
=\!\!\mid c = d \Rightarrow d = c \\
\models c = d \quad =\!\!\mid d = c \\
\underline{\underline{=\!\!\mid d = d}}
\end{array}
$$

Семантические таблицы для равенства являются частным случаем семантических таблиц для теории. Пусть нам надо установить, является ли A теоремой Th. Тогда построим вывод секвенции $\models \mathsf{Th} \oplus \{=\!\!\mid A\}$.

Здесь $\models \mathsf{Th}$ означает совокупность всех аксиом Th, специфицированных как истинные. В семантической таблице это означает возможность в любой момент выписать формулу $\models B$, где $B \in \mathsf{Th}$. Поскольку аксиом может быть бесконечно много, нецелесообразно требовать обязательно выписывать их все в самом начале.

Правила для логики с равенством можно проинтерпретировать как применение теории со следующими аксиомами: обычная аксиома $\forall x x = x$ и две схемы аксиом

$$\forall x \forall y (y = x \& \mathsf{Subst}(A, z, x) \Rightarrow \mathsf{Subst}(A, z, y));$$

$$\forall x \forall y (x = y \& \mathsf{Subst}(A, z, x) \Rightarrow \mathsf{Subst}(A, z, y));$$

где A – произвольная формула, не содержащая других свободных переменных, кроме z.

И наконец, рассмотрим случай, когда в сигнатуре теории присутствуют функции. Здесь действует очень простой закон. Выражения c, $f(c)$, $f(f(c))$, … считаются различными если в таблице не установлено равенство каких-либо из них, но ни одно из них не годится как новое, даже если оно еще никуда не подставлялось. Новой может быть лишь вспомогательная константа c_i. Когда появляется одна такая константа, то в таблице с функциональными символами она порождает бесконечно много выражений, которые требуется подставлять там, где правило использует старые объекты.

Упражнения к §9.7

Проверить истинность следующих формул и рассуждений в логике с равенством и/или функциональными символами.

9.7.1. $\forall x\, A(x, f(x)) \Rightarrow \exists x\, A(x, x)$

9.7.2. $\forall x\, A(x, f(x)) \& \forall x\, \forall y (x = y) \Rightarrow \exists x\, A(x, x)$

9.7.3. $\exists x\, \forall y\, x = y \& \exists x (A(x) \& \neg B(x)) \& \exists x\, \neg A(x) \Rightarrow \exists x\, B(x)$

9.7.4. $\forall x\, A(x) \vee \forall x\, \neg A(x) \Rightarrow \exists x\, \forall y (x = y)$

9.7.5. $\exists x\, \exists y\, \forall z (x = z \vee y = z) \& \exists x (B(x) \& A(x)) \& \exists x (B(x) \& \neg A(x)) \Rightarrow \forall x\, B(x)$

9.7.6. $\forall x\, \exists y (x = f(y)) \,\&\, \forall x\, \forall y\, \forall z (x = y \vee x = z \vee y = z) \Rightarrow \forall x\, f(f(x)) = x$

9.7.7. $\forall x\, \exists y (x = f(y)) \& \forall x\, f(f(x)) = x \Rightarrow \forall x\, \forall y\, \forall z (x = y \vee x = z \vee y = z)$

9.7.8. $\forall x\, f(f(x)) = x \Rightarrow \forall x\, \exists y(x = f(y))$

9.7.9. $\forall x\, \forall y(A(x)\&A(y) \Rightarrow x = y)\&\neg(a = b) \Rightarrow \exists x\, \neg A(x)$

9.7.10. $\forall x\, \forall y(\neg x = y \Rightarrow A(x) \vee A(y))\&\, \exists x(B(x)\&A(x))\&\, \forall x(C(x) \Rightarrow \neg A(x))\&$ $\forall x(C(x) \Rightarrow B(x)) \Rightarrow \forall x\, B(x)$

В жизни рассуждения обычно представляют не полностью, опуская "очевидные из контекста" аксиомы либо факты, использованные в них. Такие рассуждения называются энтимемы. Проанализировать и пополнить следующие энтимемы. Корректность пополнения установить при помощи семантических таблиц.

9.7.11. Лисы умнее кур. Значит, ни одна курица не умнее лисицы.

9.7.12. Все тутси выше пигмеев. Значит, ни один пигмей не тутси.

9.7.13. Я боюсь зубных врачей. Я не желаю быть в одной компании с тем, кого боюсь. Значит, я не хочу быть в одной компании с вами.

9.7.14. Народы, у которых некоторые национальные герои – злодеи, воинственны. Народы, у которых некоторые национальные герои – ученые, образованы. Аттила и фон Нейман – национальные герои Венгрии. Значит, венгры воинственны, но образованы.

Сделать выводы из посылок. Проверить их на таблицах.

9.7.15. Все курицы любят клевать пшено. Не все кошки жирные. Те, кто ест пшено, жиреет. Жирные не могут петь по ночам ...

9.7.16. Все козлята прыгают. Только здоровые молодые животные прыгают. Некоторые поросята не прыгают. На свете не более одного молодого существа, не являющегося козленком ...

9.7.17. Все павлины гордятся своим хвостом. Если кто-то гордится чем-то, не представляющим ценности, то он не может сделать ничего путного. Этот мост сделан павлинами. Все мосты в данной местности, кроме одного,— хорошего качества ...

9.7.18. Те, кто любит учиться, не нуждаются в поощрениях. Для тех, кто не любит учиться, поощрение бесполезно. Следовательно ... [8]

[8] Сделанный вывод явно софистичен. В чем обман?

9.7.19. Армия — школа жизни. Если жизнь бестолковая, то такова же и школа. Российская жизнь в данную пору — бестолковая. Только толковая армия может выиграть войну. Значит, ...

9.7.20. Чтобы проиграть войну, нужно проиграть хотя бы одно сражение. Наполеон в кампании 1812 г. выиграл все сражения. Эту кампанию он вел с Россией. Значит, ... [9]

9.7.21. Суворов во время итальянского похода выиграл все битвы и расстроил все планы противника. Если нет предательства, то расстроить планы противника достаточно для того, чтобы выигрыш битвы гарантировал победу в войне. Суворов проиграл Итальянскую кампанию. Значит, ...

9.7.22. (Н. Маккьявелли)[10] Чтобы добиться успеха, политику необходимо выглядеть добродетельным. Кроме добродетельных и аморальных, никто не может выглядеть добродетельным. Если бы добивались успеха лишь аморальные политики, то никто не был бы добродетельным. Некоторые люди добродетельны. ...

9.8 Теорема полноты

Теорему полноты есть смысл доказывать не только для логики предикатов, но и для любой теории, базирующейся на классической логике, воспользовавшись сделанным в предыдущем параграфе обобщением семантических таблиц. Нам необходимо установить, что для каждой теоремы A теории Th найдется замкнутая семантическая таблица. Но здесь нужно

[9] Приведенные здесь исторические факты верны. Какая же посылка оказывается сомнительной?

[10] Николо Маккьявелли — флорентийский общественный деятель и писатель. Он прославился своими книгами "Государь" и "Республика", в которых безжалостно показывал реальную, совершенно аморальную и бесчестную политику. Например, один из его принципов гласит, что пришедшему к власти в результате переворота правителю нужно опираться не на тех, кто поддержал его из идеи, а на тех, кто примкнул к нему ради выгоды, поскольку первые потребуют выполнения данных им обещаний. Поскольку такой показ воспринимался как оправдание существующих гадостей, Маккьявелли сам заслужил репутацию бесчестного человека, а неприличное поведение политиков до сих пор называют 'макиавеллизм'. Сам Маккьявелли в жизни был приличным человеком, но его вина в том, что он ставил личность ниже государства, что явилось корнем неисчислимых бед в истории.

Правда, стремление поставить личность выше государства приводило к не меньшим бедам, и уж во всяком случае к уничтожению народа либо цивилизации, пошедших по такому пути. Так что и здесь единственным выходом остается баланс.

было бы установить общий метод доказательства любой теоремы, а такового не существует, как будет доказано в разделе, посвященном теории алгоритмов. Поэтому придется действовать от противного: доказать, что незамкнутая семантическая таблица, удовлетворяющая некоторым критериям полноты, дает опровергающую модель для A, т.е. модель Th, в которой ложно A. Далее установим, что начатую семантическую таблицу можно продолжить до полной. По контрапозиции отсюда следует, что полная семантическая таблица для любой теоремы закроется. Реализация изложенной схемы доказательства требует введения ряда важных вспомогательных понятий: полная таблица, незавершенная таблица ...

Определение 9.8.1. *Незавершенная семантическая таблица* — дерево, каждой вершине которого сопоставлена секвенция, и секвенция в каждой вершине, не являющейся листом, получается из непосредственно следующих за ней по одному из правил вывода исчисления секвенций.

Таким образом, в незавершенной таблице снимаются требования конечности путей и того, что листьями могут быть лишь аксиомы. Содержательно говоря, незавершенная таблица является результатом нескольких разбиений, проделанных над интересующей нас формулой. Незавершенная таблица является одним из простейших примеров важного и для теории, и для приложений семейства понятий — *незавершенных выводов*.

Пример 9.8.1. Незавершенная таблица.

$$\begin{array}{c} \vdash A, \vdash B, \dashv A\&B \\ \uparrow \\ \vdash A, \dashv (B \Rightarrow A\&B) \\ \uparrow \\ \dashv A \Rightarrow (B \Rightarrow A\&B) \end{array} \tag{9.17}$$

Определение 9.8.2. *Шаг разбиения* — добавление правила π и вершин над листом ϖ незавершенной таблицы, не являющимся аксиомой, таким образом, чтобы ϖ был получен по правилу π из добавленных вершин.

Формула A *пройдена* в секвенции Γ, если она присутствует либо в самой Γ, либо в какой-нибудь секвенции на пути из корня незавершенной семантической таблицы в Γ. Шаг разбиения *избыточен*, если хотя бы в одной из добавленных секвенций все непосредственные результаты разбиения пройдены в Γ. Секвенция *финальна*, если она аксиома либо каждый шаг разбиения, применимый к ней, избыточен. Путь ω *незаперт*, если он бесконечен либо заканчивается в финальной секвенции, не являющейся аксиомой.

Семантическая таблица *полна*, если все листья являются финальными секвенциями, и для любого незапертого пути ω в ней выполнены следующие три (для таблиц в теории — четыре) условия:

1. Если формула является конъюнкцией, импликацией, дизъюнкцией либо отрицанием, то в некоторой секвенции на пути встретятся все непосредственные результаты ее разбиения из одного из аргументов соответствующего правила.

2. Для любой встречающейся в некоторой секвенции пути ω формулы вида $\dashv \forall x\, A(x)$ ($\models \exists x\, A(x)$) на ω встретится формула вида $\dashv A(c_i)$ ($\models A(c_i)$).

3. Для любой константы c_i, входящей в некоторую формулу на ω, и для любой встречающейся в некоторой секвенции ω формулы вида $\models \forall x A(x)$ ($\dashv \exists x A(x)$) на ω встретится формула $\models A(c_i)$ ($\dashv A(c_i)$).

4. (Для таблиц в теории Th) На ω встречается $\models A$ для любой $A \in \mathsf{Th}$.

Лемма 9.8.1 (О построении контрпримера). *В полной таблице по любому незапертому пути из корня можно построить интерпретацию, в которой истинны все встречающиеся на нем секвенции.*

Доказательство. Доказательство леммы разбивается на две части: построение контрпримера и его верификация.[11]

Построение контрпримера. В качестве универса контрмодели M возьмем множество всех констант, встречающихся в секвенциях пути ω. Каждая константа означает саму себя. $\zeta(P(c_1, \ldots, c_n))$ есть $\perp$, если $\dashv P(c_1, \ldots, c_n)$ встречается в какой-то секвенции на ω; $\top$, если встречается $\models P(c_1, \ldots, c_n)$. В остальных случаях оно определяется произвольным образом.

Верификация построения. То, что все секвенции пути ω истинны, означает, что все встречающиеся в них формулы удовлетворяют своим спецификациям. Это утверждение доказывается индукцией по построению формулы.

Прежде всего элементарная формула, встретившаяся в некоторой секвенции Γ_i на пути ω, будет присутствовать и во всех последующих секвенциях, поскольку ни одно правило не может ее разбить. Поэтому на незамкнутом пути не встретится противоречащих друг другу элементарных формул, и модель M определена корректно. Далее, по построению все элементарные формулы удовлетворяют своей спецификации. Базис индукции установлен.

[11] В современном теоретическом программировании под *верификацией* понимается доказательство соответствия конструкции спецификациям, заданным при ее построении; здесь это означает истинность всех секвенций.

Шаг индукции. Пусть соответствие спецификации доказано для всех формул с числом логических связок меньше n. Пусть A имеет n логических связок. Разберем случаи, соответствующие построению и спецификации A.

Если рассматриваемая формула есть $\models (B \Rightarrow C)$, то по определению полноты, на пути ω найдется либо $\models C$, либо $\Dashv B$. По предположению индукции, эти формулы удовлетворяют своим спецификациям. В каждом из этих случаев истинно $(B \Rightarrow C)$. Если она есть $\Dashv (B \Rightarrow C)$, то по полноте на пути ω встретятся и $\models B$, и $\Dashv C$. Поскольку они удовлетворяют своим спецификациям, $(B \Rightarrow C)$ ложно.

Если формула имеет вид $\Dashv \forall x\, A(x)$, то по условию полноты таблицы на пути ω встретится $\Dashv A(c_i)$ для какого-то c_i. Значит, $\forall x\, A(x)$ ложно.

Если формула есть $\models \forall x\, A(x)$, то по полноте на ω встретится $\models A(c_i)$ для любой константы c_i, принадлежащей универсу контрмодели M. По предположению индукции, любая из $\Dashv A(c_i)$ удовлетворяет своей спецификации, и значит, истинна. Но тогда по определению истинности истинно и $\forall x\, A(x)$.

Остальные связки разбираются аналогично.

Осталось убедиться, что полную таблицу всегда можно построить. Для этой цели сформулируем стратегию корректного разбиения формул, приводящую к такой таблице. Стратегия не будет определять однозначно, какая формула должна быть разбита в данный момент. Она лишь ограничивает допустимые разбиения.

Занумеруем все константы из сигнатуры теории нечетными натуральными числами. Все вспомогательные константы занумеруем четными. Занумеруем все аксиомы теории. Введем дополнительные спецификации для аксиом теории и многократно используемых (МИ) формул вида $\models \forall x\, A(x)$ и $\Dashv \exists x\, A(x)$. Аксиома может быть разрешена или задержана. Каждой МИ-формуле сопоставим множество α констант, по которым она уже разбивалась; кроме того, она может быть временно запрещена. Формула временно запрещается, когда происходит ее разбиение. Корректное разбиение МИ-формулы может производиться лишь по константе $c_i \in \alpha$, при этом c_i добавляется к α. Корректное разбиение не может производиться по временно запрещенной или задержанной формуле. Секвенция условно финальна, если в ней не может быть произведено ни одного неизбыточного корректного разбиения.

Стратегия корректного разбиения. Вначале задерживаем все аксиомы, кроме первой, и не запрещаем ни одной МИ-формулы. Пока формула не является условно финальной, производятся лишь корректные разбиения, причем разбиение МИ-формулы производится по константе c_i, имеющей минимальный номер среди всех таких констант, встречающихся в не-задержанных формулах секвенции. Когда секвенция оказалась условно финальной, разрешаем первую из задержанных аксиом и снимаем все временные запрещения.

Лемма 9.8.2. *В незавершенной семантической таблице для теории в любой секвенции число формул, не являющихся результатами разбиения аксиом, конечно.*

Доказательство. В корне дерева такая формула всего одна. Каждый шаг разбиения увеличивает их количество не более чем на 1. □

Лемма 9.8.3. (лемма о корректных разбиениях) *Любая последовательность корректных разбиений над секвенцией, содержащей конечное число разрешенных аксиом, за конечное число шагов приводит к условно финальной.*

Доказательство. Определим ранг секвенции как количество логических связок в формулах, не являющихся задержанными либо временно запрещенными. В условиях леммы ранг конечен, поскольку число таких формул конечно. При каждом разбиении ранг уменьшается на 1. □

Следствие. На любом бесконечном пути в таблице, построенной согласно стратегии корректных разбиений, имеется бесконечно много условно финальных секвенций.

Докажем теперь, что для каждой МИ-формулы A, встретившейся в секвенции Γ на незамкнутом пути ω, на этом пути встречаются результаты ее разбиения по каждой константе c_i, встречающейся на ω. Если ω завершается финальной секвенцией, то любое разбиение A избыточно, и соответственно, любое разбиение по любой константе c_i пройдено в финальной секвенции. Если же путь ω бесконечен, то в промежутке между i-той и $(i+1)$-ой условно финальными секвенциями, встретившимися на ω после появления A и c_i, A будет разбито по c_i.

Для любой обычной формулы результаты ее разбиения встретятся на ω до следующей условно финальной секвенции после того, как она появилась либо стала разрешена (если формула является аксиомой).

Итак, любая таблица, построенная в соответствии со стратегией корректных разбиений, полна. □

Таким образом, если полная таблица не является выводом в исчислении секвенций, то она дает модель, в которой все аксиомы Th истинны, а проверяемая формула A ложна. Комбинируя доказанное утверждение с теоремой корректности, получаем

Теорема 9.2. (**Теорема полноты классической логики**) $\mathsf{Th} \vdash A$ *тогда и только тогда, когда существует вывод секвенции* $\models \mathsf{Th} \oplus \{\dashv A\}$.

Таким образом, синтаксическая доказуемость при помощи семантических таблиц совпадает с семантическим отношением логического следования. Теорема полноты (в формулировке, связанной с другой формализацией логики) была первым фундаментальным результатом математической логики, доказанным в 1930 г. великим логиком современности К. Гёделем (K. Gödel).[12] Теорема полноты влечет несколько важных следствий.

Определение 9.8.3. Th *синтаксически непротиворечива*, если не замыкается семантическая таблица ни для какой формулы вида $A\&\neg A$.

Следствие 1 (Теорема существования модели) Если Th синтаксически непротиворечива, то она имеет модель.

Незапертый путь в полной таблице для $\models \mathsf{Th} \oplus \{\dashv A\&\neg A\}$ дает искомую модель.

Следствие 2 (Теорема компактности) Если $\mathsf{Th} \vdash A$, то найдется конечная подтеория $\mathsf{Th}_0 \subseteq \mathsf{Th}$, такая, что $\mathsf{Th}_0 \vdash A$.

В самом деле, найдется замкнутая семантическая таблица для A. Но она конечна, и следовательно, использует лишь конечное число аксиом Th.

Следствие 3 (Теорема компактности, форма 2) Если любая конечная подтеория Th непротиворечива, то Th непротиворечива.

Доказательство. Действуем от противного. Если таблица для $\models Th \cup \{\dashv A\&\neg A\}$ замкнута, то найдется конечная $\mathsf{Th}_0 \subset \mathsf{Th}$, такая, что Th_0 противоречива. Значит, если теория противоречива, то противоречива некоторая ее конечная подтеория. По контрапозиции, получаем отсюда искомую форму теоремы компактности. □

Следствие 4 (Теорема компактности, форма 3) Если любая конечная подтеория Th имеет модель, то и Th имеет модель.

Комбинация следствия 3 и теоремы существования модели.

Следствие 5 (Теорема о взаимной противоречивости) Если теории Th_1 и Th_2 непротиворечивы, а теория $\mathsf{Th}_1 \cup \mathsf{Th}_2$ противоречива, то найдется конечное число аксиом Th_1 и конечное число аксиом Th_2, которые противоречат друг другу.

---

[12] На самом деле теорему полноты (в форме теоремы существования модели) предвосхитил, но не сумел понятно сформулировать и доказать Лёвенгейм (L. Löwenheim) еще в 1915 г. Его работа осталась незамеченной и была заново открыта лишь после доказательства Гёделя.

Следствие 6 (Теорема о взаимной непротиворечивости) Если теории Th_1 и Th_2 непротиворечивы, и любое конечное число аксиом Th_2 не противоречит Th_1, то теория $\mathsf{Th}_1 \cup \mathsf{Th}_2$ непротиворечива

Доказательства этих следствий являются экзаменационными дополнительными вопросами на оценки 4–5.

Вы видите, сколько разнообразных форм, внешне совершенно не похожих друг на друга, может быть выведено как непосредственные следствия фундаментальной теоремы. Таким свойством обладают все принципиальные математические результаты. Но отнюдь не всегда их следствия становятся ясны сразу после их открытия. На первый взгляд (скажем) теорема компактности выглядит как тривиальное следствие теоремы полноты. Но потребовалось около двух десятилетий для формулировки теоремы компактности после того, как была полностью осознана формулировка теоремы полноты, да и первые ее доказательства были не такими простыми. Более совершенный аппарат позволяет ярче выделить взаимосвязи. Интересна и ее история. Она была доказана русским логиком А.И. Мальцевым во время II мировой войны и опубликована в Вестнике Ивановского педагогического института. Естественно, что публикация осталась незамеченной и на 10 лет позже она была "переоткрыта" Л. Хенкиным. Правда, историческую справедливость удалось восстановить, но теперь кое-кто утверждает, что она практически содержалась в уже упомянутой работе Лёвенхейма.

Упражнения к §9.8

9.8.1. Доказать, что любая модель теории Th с равенством может быть преобразована в такую, в которой равенство определяется как совпадение.

9.8.2. Доказать, что теория без равенства, имеющая модель с n элементами, имеет и модель с $n+1$ элементом.

9.8.3. Доказать, что теория с равенством, имеющая модели со сколь угодно большим числом элементов, имеет модель с бесконечным числом элементов.

9.8.4. Студент Гениалькис доказал, что все счетные модели теории с равенством R, описывающей порядок и его взаимоотношения со сложением и вычитанием на множестве рациональных чисел и имеющей перечисленные ниже аксиомы, изоморфны:

$$\begin{array}{ll}
\forall x\,\neg x < x & \forall x\,\forall y\,\forall z(x < y \& y < z \Rightarrow x < z) \\
\forall x\,0 + x = x & \forall x\,\exists y\,\exists z(y < x \& x < z) \\
\forall x\,x + 0 = x & \forall x\,\forall y(x < y \Rightarrow \exists z(x < z \& z < y)) \\
\forall x\,x + (-x) = 0 & \forall x\,\forall y\,\forall z\,x + (y + z) = (x + y) + z \\
1 > 0 & \forall x\,\forall y\,x + y = y + x \\
 & \forall x\,\forall y\,\forall z(x + y = x + z \Rightarrow y = z) \\
 & \forall x\,\forall y(x > 0 \Rightarrow x + y > x)
\end{array}$$

Доказательство занимает 121 страницу. Будете ли Вы его читать; если нет, то почему?

9.8.5. Известно, что если из предыдущей теории выбросить сложение, то все ее счетные модели действительно будут изоморфны. Как же согласовать это с существованием нестандартных моделей?

9.8.6. Какая аксиома теории R лишняя (следует из остальных)?

9.9 Сечения

Еще одним важным следствием теоремы полноты для семантических таблиц является теорема об устранении сечений.

Теорема об устранении сечений. Если семантические таблицы для $\Gamma \oplus \{\dashv A\}$ и $\Gamma \oplus \{\models A\}$ закрываются, то закрывается и семантическая таблица для Γ.

Доказательство. Поскольку в любой интерпретации A либо истинно, либо ложно, в соответствующей секвенции противоречит (по теореме корректности) своей спецификации одна из формул Γ. Значит, Γ тождественно истинна и по теореме полноты имеет замкнутую семантическую таблицу. □

Правило сечения

$$\frac{\Gamma \oplus \{\dashv A\} \qquad \Gamma \oplus \{\models A\}}{\Gamma}$$

присутствовало в исходной генценовской формулировке исчисления секвенций и доказательство устранимости сечений было первым серьезным результатом его работ. Формула A называется *формулой сечения* либо формулой, по которой производится сечение.

Заметим, что наше доказательство, хотя и краткое, обладает одним существенным недостатком, которого лишено гораздо более длинное доказательство Генцена. Оно полностью неконструктивно, не дает никакого способа преобразования замкнутых таблиц для его посылок в таблицу для заключения, кроме тривиального указания “ищите и обрящете.” Логический статус приведенного доказательства полностью аналогичен логическому статусу следующего доказательства того, что в шахматах, правила которых видоизменены таким образом, что каждая сторона делает два хода подряд, белые проиграть не могут.

> В детерминированной конечной игре обязательно имеется либо стратегия, ведущая к выигрышу одной из сторон, либо стратегия, ведущая к ничьей.[13] Рассмотрим три возможных случая. Если стратегия ведет к выигрышу белых либо к ничьей, то все доказано.
> Пусть она ведет к выигрышу черных. Тогда, воспользовавшись тем, что есть фигура, которая может ходить в начальной позиции (а именно, прыгающий через другие фигуры конь), сделаем ею ход, а затем вернем ее на исходную позицию (например, 1. Kg1–f3, Kf3–g1). Тогда мы передадим ход черным, и по предположению они теперь должны проиграть, что абсурдно. Итак, третий случай исключается.

Тот, кто попытается в реальной игре походить два раза конем тудаобратно, скорее всего, проиграет, так что никакого способа достичь хотя бы ничьей это доказательство не дает.

Устранение сечений внешне похоже на разбор случаев $A \vee \neg A$, но отнюдь не сводится к нему. Оно имеет место и для многих неклассических логик, в которых закон исключенного третьего отсутствует. Оно проваливается в ряде систем, в которых закон исключенного третьего есть.

Ввиду исключительной важности данного правила, мы рассмотрим и синтаксическое доказательство устранимости сечений, дающее способ перестройки таблицы без сечений в таблицу с сечениями. Более того, мы покажем, что имеется совокупность преобразований замкнутых таблиц, устраняющая из них сечения, и такая, что процесс устранения заканчивается независимо от порядка применения данных преобразований. Эти преобразования называются *шагами нормализации* таблицы. Шаги

[13] Кажется, что оговорка о конечности здесь перестраховка, но предположение о существовании выигрышной стратегии у одного из игроков для бесконечных игр оказалось новой аксиомой теории множеств, альтернативной аксиоме выбора (т.е. несовместимой с ней, но вроде бы не противоречащей всем остальным аксиомам)!

нормализации определяются в соответствии с главной связкой формулы сечения и с тем, созданы ли обе формулы сечения в посылках непосредственно на предыдущем шагу или же хоть одна из них передается от предыдущих секвенций без изменения.

Перед тем как их определить, докажем возможность некоторых преобразований выводов в исчислении секвенций, а именно: *ослабления* секвенций путем дописывания новых членов, подстановки конкретного значения вместо вспомогательной константы в заключении, т.н. *обращения* всех правил исчисления секвенций[14] и сокращения нескольких экземпляров одинаковых формул в заключении вывода. Далее покажем, что эти преобразования не усложняют вывода, но при этом несколько модифицируем понятие вывода. Аксиомами теперь будут лишь противоречия из элементарных формул. Очевидно, что любое противоречие из пары сложных формул разбивается на элементарные, так что с теоретической точки зрения понятие выводимости не изменяется.[15]

Предложение 9.9.1. (Подстановка) *Вывод секвенции* $\Gamma \oplus \{A(c_{n+1})\}$*, где* c_{n+1} *не входит в* Γ*, без увеличения числа применений правил и сложности встречающихся формул перестраивается в вывод* $\Gamma \oplus \{A(x \mid t)\}$ *для произвольного терма* t*.*

Доказательство. Начнем с частного случая подстановки — переименования вспомогательной константы. Докажем, что если c_l не входит в формулы из Γ, то вывод $\Gamma[x \mid c_{n+1}]$ можно преобразовать в вывод $\Gamma[x \mid c_l]$. В самом деле, противоречия после такой замены останутся противоречиями, и мы получаем базис индукции по длине вывода. Далее, все применения правил после такой замены остаются корректными применениями правил, кроме, может быть, двух правил, использующих[16] вспомогательную константу, да и то в случае, когда эта константа совпадает с c_l. Рассмотрим одно из них, например,

$$\frac{\begin{array}{c}\Sigma\\ \Gamma' \oplus \{\models A(c_l)\}\end{array}}{\Gamma' \oplus \{\models \exists y\, A(y)\}}$$

Здесь, как и ниже в описаниях преобразований, Σ обозначает вывод стоящей ниже его секвенции. В Σ меньше применений правил, чем в исходном

[14] На самом деле мы уже указали на возможность обращения правил, разрешив пользоваться для сокращения семантической таблицы обратными преобразованиями.

[15] Конечно, с практической точки зрения может быть утомительно разбивать до элементарных компонент уже встретившееся противоречие.

[16] В терминах таблиц, вводящих.

выводе, Γ' не содержит c_l. Поэтому по предположению индукции $_l$ можно переименовать везде внутри Σ, например, заменив ее на $_k$, не входящее в Σ и не совпадающее с c_{n+1}. После чего x можно повсюду заменять на c_l.

Теперь проведем подстановку терма. Все константы, входящие в t и не входящие в Γ, переименуем. После такого переименования все применения правил после подстановки останутся корректными. $\square$

Результат применения преобразования подстановки к выводу Σ обозначаем, аналогично подстановке в формулу, $\Sigma[c_{n+1} \mid t]$. Проведенное доказательство подчеркивает аналогию связанных переменных в формуле и вспомогательных констант в выводе: на самом деле мы занимались именно устранением коллизий.

Предложение 9.9.2. (Ослабление) *Вывод секвенции Γ перестраивается без увеличения числа применяемых правил и сложности формул в вывод секвенции $\Gamma \oplus \Delta$.*

Доказательство. Сначала при помощи подстановки переименуем внутри вывода Γ все вспомогательные константы, входящие в Δ и не встречающиеся в Γ. Затем просто дописываем Δ ко всем секвенциям в исходном выводе. $\square$

Предложение 9.9.3. *Вывод заключения любого из правил исчисления секвенций перестраивается в вывод любой из своих посылок без увеличения числа применяемых правил и сложности формул.*

Доказательство. Ведется индукцией по числу применений правил в выводе исходной секвенции.

Если примененных правил вообще нет, то исходная секвенция — аксиома, а поскольку противоречие состоит из элементарных формул, оно находится в Γ, и результирующая секвенция также является аксиомой.

Пусть теперь обратимость доказана для всех выводов с числом правил не более n. Докажем для выводов с $n+1$ правилом.

Проанализируем правила обращения для конъюнкции и всеобщности (остальные правила рассматриваются совершенно аналогично).

Докажем, что вывод $\Gamma \oplus \{\models A \,\&\, B\}$ без усложнения перестраивается в вывод $\Gamma \oplus \{\models A, \models B\}$. Проанализируем последнее из примененных в выводе правил. Если это правило создало $\models A \,\&\, B$, то просто отбрасываем его, если же оно его не затрагивало, то обращаем по предположению индукции выводы-посылки данного правила. Так же поступаем в случае $=\!\mid A \,\&\, B$, но здесь в случае, если последним применялось правило $=\!\mid \&$, отбрасываем целое поддерево вывода, поскольку нас интересует лишь одна из его посылок.

Рассмотрим перестройку вывода секвенции $\Gamma \oplus \{\dashv \forall x\, A(x)\}$ в вывод секвенции $\Gamma \oplus \{\dashv A(c_{n+1})\}$. Опять-таки если последнее правило создало $\dashv \forall x\, A(x)$, то отбрасываем его, иначе обращаем вывод посылки. Для истинности рассуждение совершенно аналогично. □

Предложение 9.9.4. *Вывод секвенции* $\Gamma \oplus \{\models A, \models A\}$ *без увеличения числа применений правил и сложности встречающихся формул перестраивается в вывод* $\Gamma \oplus \{\models A\}$. *Аналогично для* $\dashv A$.

Доказательство. Ведется индукцией по числу применений правил в выводе исходной секвенции.

Если она является аксиомой, то после устранения отдублированной формулы она аксиомой и останется.

Если последним применялось правило, не затрагивающее ни одного из экземпляров сокращаемой формулы, то по предположению индукции можно применить сокращение к выводам посылок и по тому же правилу получить вывод сокращенного заключения.

Если последним применялось правило к сокращаемой формуле, то рассмотрим ее вид. Пусть она имеет вид $B \,\&\, C$. Тогда вывод выглядит следующим образом

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma\\ \Gamma \oplus \{\models B \,\&\, C, \models B, \models C\}\end{array}}{\Gamma \oplus \{\models B \,\&\, C, \models B \,\&\, C\}}$$

Тогда по обратимости можно перестроить вывод Σ без увеличения длины в вывод Σ', дающий секвенцию

$$\Gamma \oplus \{\models B, \models C, \models B, \models C\}.$$

А теперь, применив сокращение, получаем из него вывод

$$\begin{array}{c}\Sigma''\\ \Gamma \oplus \{\models B, \models C, \models C\}\end{array}$$

Длина Σ'' не больше длины Σ, и опять можно применить предположение индукции, сократив еще раз:

$$\begin{array}{c}\Sigma'''\\ \Gamma \oplus \{\models B, \models C\}\end{array}$$

А теперь возвращаем на место последнее правило:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma'''\\ \Gamma \oplus \{\models B, \models C\}\end{array}}{\Gamma \oplus \{\models B \,\&\, C\}}$$

Рассмотрим случай $B \vee C$. Тогда вывод имеет форму

$$\dfrac{\begin{array}{cc}\Sigma_1 & \Sigma_2\\ \Gamma \oplus \{\models B \vee C, \models B\} & \Gamma \oplus \{\models B \vee C, \models C\}\end{array}}{\Gamma \oplus \{\models B \vee C, \models B \vee C\}}$$

Отсюда обращениями получаем

$$\begin{array}{cc}\Sigma_1' & \Sigma_2'\\ \Gamma \oplus \{\models B, \models B\} & \Gamma \oplus \{\models C, \models C\}\end{array}$$

Применяем имеющиеся по предположению индукции сокращения и возвращаем на место исходное правило:

$$\dfrac{\begin{array}{cc}\Sigma_1'' & \Sigma_2''\\ \Gamma \oplus \{\models B\} & \Gamma \oplus \{\models C\}\end{array}}{\Gamma \oplus \{\models B \vee C\}}$$

□

Есть еще одно место в исчислении секвенций, где возникают трудности при нормализации. Кванторы $\dashv \exists$ и $\models \forall$ "бессмертны": они не исчезают и дотягиваются из результата до всех аксиом-противоречий. Как Вы видели, действительно часто их нужно использовать многократно, но не бесконечное же число раз![17] Поэтому желательно было бы кое-когда от них избавляться.

Предложение 9.9.5. (Удаление последнего квантора) *Если вывод имеет вид*

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma\\ \Gamma \oplus \{\dashv A[x \mid t], \dashv \exists x\, A(x)\}\end{array}}{\Gamma \oplus \{\dashv \exists x\, A(x)\}}$$

и внутри Σ формула $\dashv \exists x\, A(x)$ более нигде не разбивается, то без увеличения длины вывода и сложности формул можно преобразовать Σ в вывод $\Gamma \oplus \{\dashv A[x \mid t]\}$. Аналогично для $\models \forall$.

Определим шаги нормализации.

Шаг 0 Если главная связка формулы сечения является пропозициональной и она не разбирается хотя бы в одной из его посылок, либо ее главная связка — квантор и ни в одной из посылок для него не вводится

[17] Это нужно лишь для опровержения, но не для доказательства.

вспомогательная константа, то выполняем одно из следующих преобразований *подъема сечения* в зависимости от того, какое правило применялось к одной из секвенций-посылок (эта секвенция для формул с пропозициональной связкой может выбираться произвольно, а для кванторных — соответствует посылке вида $\Gamma \oplus \{\models \exists x\, A(x)\}$ либо $\Gamma \oplus \{\dashv \forall x\, A(x)\}$).

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\Sigma_1}{\Gamma \oplus \{\models A, \dashv B, \dashv C\}}}{\Gamma \oplus \{\dashv A \Rightarrow B, \models C\}} \qquad \overset{\Sigma_2}{\Gamma \oplus \{\dashv A \Rightarrow B, \dashv C\}}}{\Gamma \oplus \{\dashv A \Rightarrow B\}} \Longrightarrow$$

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\Sigma_1}{\Gamma \oplus \{\models A, \dashv B, \dashv C\}} \qquad \overset{\Sigma_2'}{\Gamma \oplus \{\models A, \dashv B, \models C\}}}{\Gamma \oplus \{\models A, \dashv B\}}}{\Gamma \oplus \{\dashv A \Rightarrow B\}}$$

Для двухпосылочного правила:

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\Sigma_3}{\Gamma \oplus \{\dashv A, \models C\}} \qquad \overset{\Sigma_4}{\Gamma \oplus \{\models B, \models C\}}}{\Gamma \oplus \{\models A \Rightarrow B, \models C\}} \qquad \overset{\Sigma_5}{\Gamma \oplus \{\models A \Rightarrow B, \dashv C\}}}{\Gamma \oplus \{\models A \Rightarrow B\}} \Longrightarrow$$

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\Sigma_3}{\Gamma \oplus \{\dashv A, \models C\}} \qquad \overset{\Sigma_5'}{\Gamma \oplus \{\dashv A, \dashv C\}}}{\Gamma \oplus \{\dashv A\}} \qquad \dfrac{\overset{\Sigma_4}{\Gamma \oplus \{\models B, \models C\}} \qquad \overset{\Sigma_5''}{\Gamma \oplus \{\models B, \dashv C\}}}{\Gamma \oplus \{\models B\}}}{\Gamma \oplus \{\models A \Rightarrow B\}}$$

Σ_2' получается обращением Σ_2, Σ_5', Σ_5'' — два обращения Σ_5.

Для остальных пропозициональных связок преобразование производится аналогично. Рассмотрим теперь кванторы.

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\Sigma_1}{\Gamma \oplus \{\dashv \exists x\, A(x), \dashv A(x \mid t), \models C\}}}{\Gamma \oplus \{\dashv \exists x\, A(x), \models C\}} \qquad \overset{\Sigma_2}{\Gamma \oplus \{\dashv \exists x\, A(x), \dashv C\}}}{\Gamma \oplus \{\dashv \exists x\, A(x)\}} \Longrightarrow$$

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\Sigma_1}{\Gamma \oplus \{\dashv \exists x\, A(x), \dashv A(x \mid t), \models C\}} \qquad \overset{\Sigma_2'}{\Gamma \oplus \{\dashv \exists x\, A(x), \dashv A(x \mid t), \dashv C\}}}{\Gamma \oplus \{\dashv \exists x\, A(x), \dashv A(x \mid t)\}}}{\Gamma \oplus \{\dashv \exists x\, A(x)\}}$$

Для вспомогательной константы:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_3\\ \Gamma\oplus\{\models A(c_{n+1}),\models C\}\end{matrix}}{\Gamma\oplus\{\models\exists x\,A(x),\models C\}}\qquad\begin{matrix}\Sigma_4\\ \Gamma\oplus\{\models\exists x\,A(x),\Dashv C\}\end{matrix}}{\Gamma\oplus\{\models\exists x\,A(x)\}}\Longrightarrow$$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_3\\ \Gamma\oplus\{\models A(c_{n+1}),\models C\}\end{matrix}\qquad\begin{matrix}\Sigma_4'\\ \Gamma\oplus\{\models A(c_{n+1}),\Dashv C\}\end{matrix}}{\Gamma\oplus\{\models A(c_{n+1})\}}}{\Gamma\oplus\{\models\exists x\,A(x)\}}$$

Σ_2', Σ_4' получаются обращениями соответствующих выводов.

Для квантора $\forall$ преобразования аналогичны.

Шаг 1 Если одна из посылок правила сечения является аксиомой, то рассматриваем следующие два подслучая.

1. Формула сечения не участвует в противоречии. Тогда и в результате правила сечения имеется то же противоречие, и, следовательно результат является аксиомой. Значит, правило сечения вместе с его посылками и всем, что лежит над ними, можно просто опустить.
2. Формула сечения участвует в противоречии. Здесь опять придется разобрать два подслучая, но они совершенно симметричны.
   (a) Пусть противоречием является левая посылка. Тогда она имеет вид
   $$\Gamma\oplus\{\Dashv A,\models A\},$$
   а правая, соответственно,
   $$\Gamma,\oplus\{\Dashv A,\Dashv A\}.$$
   Заключение сечения имеет вид $\Gamma\oplus\{\Dashv A\}$. Значит, его можно получить из правой посылки преобразованием сокращения (предложение 9.9.4), не увеличивая длины вывода и сложности формул.
   (b) Симметрично.

⇒ Пусть главная логическая связка формулы сечения — импликация и в обоих посылках сечения она разбирается. Тогда имеем следующее преобразование:

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\Sigma_1}{\Gamma \oplus \{\Dashv A\}} \quad \overset{\Sigma_2}{\Gamma \oplus \{\models B\}}}{\Gamma \oplus \{\models A \Rightarrow B\}} \quad \dfrac{\overset{\Sigma_3}{\Gamma \oplus \{\models A, \Dashv B\}}}{\Gamma \oplus \{\Dashv A \Rightarrow B\}}}{\Gamma} \Longrightarrow$$

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\Sigma_1'}{\Gamma \oplus \{\Dashv A, \models B\}} \quad \overset{\Sigma_2'}{\Gamma \oplus \{\models A, \models B\}}}{\Gamma \oplus \{\models B\}} \quad \dfrac{\overset{\Sigma_3}{\Gamma \oplus \{\models A, \Dashv B\}} \quad \overset{\Sigma_1''}{\Gamma \oplus \{\Dashv A, \Dashv B\}}}{\Gamma \oplus \{\Dashv B\}}}{\Gamma}$$

Выводы со штрихами — ослабления соответствующих исходных выводов.

&, ∨ Для остальных бинарных пропозициональных связок преобразование определяется аналогично.

¬ Для отрицания

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\Sigma_1}{\Gamma \oplus \{\Dashv A\}}}{\Gamma \oplus \{\models \neg A\}} \quad \dfrac{\overset{\Sigma_2}{\Gamma \oplus \{\models A\}}}{\Gamma \oplus \{\Dashv \neg A\}}}{\Gamma} \Longrightarrow$$

$$\dfrac{\overset{\Sigma_2}{\Gamma \oplus \{\models A\}} \quad \overset{\Sigma_1}{\Gamma \oplus \{\Dashv A\}}}{\Gamma}$$

$\forall$ Для кванторов

$$
\cfrac{
\begin{array}{c}
\Sigma_j\\
\cfrac{\Gamma_j \oplus \{\models A[x \mid t_j], \models \forall x\, A(x)\}}{\Gamma_j \oplus \{\models \forall x\, A(x)\}}\\
\Sigma_i\\
\cfrac{\Gamma_i \oplus \{\models A[x \mid t_i], \models \forall x\, A(x)\}}{\Gamma_i \oplus \{\models \forall x\, A(x)\}}\\
\Sigma\\
\Gamma \oplus \{\models \forall x\, A(x)\}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\Psi\\
\cfrac{\Gamma \oplus \{\mathrel{=\!\!|}\, A(c_{n+1})\}}{\Gamma \oplus \{\mathrel{=\!\!|}\, \forall x\, A(x)\}}
\end{array}
}{\Gamma}
\quad \Longrightarrow
$$

$$
\begin{array}{c}
\cfrac{
\begin{array}{c}\Sigma'_j\\ \Gamma_j \oplus \{\models A[x \mid t_j]\}\end{array}
\quad
\begin{array}{c}\Psi^j[x \mid t]\\ \Gamma_j \oplus \{\mathrel{=\!\!|}\, A[x \mid t_j]\}\end{array}
}{\Gamma_j}\\
\cfrac{
\begin{array}{c}\Sigma'_i\\ \Gamma_i \oplus \{\models A[x \mid t_i]\}\end{array}
\quad
\begin{array}{c}\Gamma^i[x \mid t_i]\\ \Gamma_i \oplus \{\mathrel{=\!\!|}\, A[x \mid t_i]\}\end{array}
}{\Gamma_i}\\
\Sigma\\
\Gamma
\end{array}
$$

Здесь в выводе Σ выделены все применения правила $\models \forall$ к формуле сечения. Σ_i — выводы посылок таких правил, в которых имеются другие применения тех же правил, Σ_j — выводы, в которых других применений $\models \forall$ к формуле сечения нет. Σ'_i получается из Σ_i устранением последнего применения кванторного правила по предложению 9.9.5, а Σ'_j — вычеркиванием всех формул $\models \forall x\, A(x)$.

Из всех шагов нормализации обоснования требуют лишь кванторные. Достаточно заметить, что после устранения первых применений кванторного правила последующие за ними также становятся первыми, и т.п. Это легко оформляется индукцией.

Теорема 9.3. (Сильная теорема нормализации) *Любая последовательность шагов нормализации за конечное число шагов приводит к выводу без сечений.*

Доказательство. Для обоснования этого достаточно приписать любому сечению высоту, которая будет уменьшаться на каждом шаге нормализации и оценивается в единицах, множество которых удовлетворяет свойству бесконечного спуска. Натуральными числами оценить не получается из-за того, что слишком часто при нормализации одно сечение заменяется на несколько; приходится оценивать ординалами. А изобретение такой оценки можно рассматривать как задачу на 'отлично' для студента (подсказка: удобнее всего воспользоваться сложением по Куратовскому и возведением в степень). □

Упражнения к §9.9

9.9.1. (Для тех, кто хорошо знает официальные правила шахмат и играл в турнирах). Приведенное в примечании на стр. 235 доказательство ошибочно. Найдите неточность и исправьте ее.[18]

9.9.2. В японских шахматах ничьей нет. Тот, кто сделал ход, ведущий к троекратному повторению позиции, считается проигравшим. Королю не запрещено ходить под шах, так что при возникновении ситуации, которая в европейских шахматах считалась бы патом, король обязан пойти под бой и пасть смертью храбрых.[19] В начальной позиции многие фигуры[20] могут походить и затем вернуться назад. Можно ли перенести наше доказательство на модифицированные японские шахматы? А может быть, Вы придумаете для них другое?

9.9.3. Если не отказываться от неэлементарных противоречий, какой из пунктов нашего доказательства проваливается? Как можно было бы спасти его, изменив меру сложности вывода?

9.9.4. Студент Гениалькис принес Вам доказательство того, что каждый вывод секвенции $\Gamma \oplus \{\dashv \exists x\, A(x)\}$ можно перестроить в вывод секвенции $\Gamma \oplus \{\dashv A(x \mid t_1),\, \ldots,\, \dashv A(x \mid t_n)\}$ для некоторых $t_1, \ldots, t_n$, не увеличивая число шагов в выводе, но Вы тетрадь с доказательством потеряли. Как Вы ответите на вопрос Гениалькиса, верно ли его доказательство?[21]

---

[18] Ошибка возникает лишь при взаимодействии с полной системой правил шахматной игры в официальных соревнованиях.

[19] На самом деле там такая ситуация может возникнуть лишь теоретически, поскольку взятые фигуры (кроме, естественно, короля) переходят на сторону противника и воюют против бывших своих. Но это уже не имеет отношения к математическому содержанию задачи.

[20] Правда, на сей раз кроме коня, поскольку пешки стоят в третьем ряду, а конь ходит только вперед. Но это также не имеет отношения к задаче.

[21] Поскольку студент гениальный, все доказательства верных теорем, которые он дает, правильны, а поскольку человеку свойственно ошибаться …

Глава 10

Элементы нестандартного анализа

10.1 Историческое введение

История развития математических концепций является одним из примеров творческого развития. В ней выполнены многие общие закономерности такого развития. Стоит напомнить некоторые из них, которые необходимо знать любому, решающему сложные нестандартные практические задачи: [1]

1. Ни одно принципиально новое открытие не может быть обосновано его творцами строго. Более того, предложенные ими обоснования, как правило, содержат серьезные ошибки и впоследствии опровергаются.

2. Тот, кто боится делать *предположения*, противоречащие общепринятому и даже "здравому смыслу," не может открыть ничего нового.[2]

[1] Решение т.н. сложных нестандартных математических задач принципиально отличается. Здесь основным интересом является спортивный: решить поставленную авторитетным человеком задачу раньше других и получить славу и награду. Естественно, как и в спорте, имеются судейские коллегии, проверяющие чистоту достижения, т.е. прежде всего его соответствие принятым правилам и традициям. Реального творчества здесь обычно не так уж много, и чаще всего творческие достижения принадлежат не тем, кто в конце концов решил задачу. Примерами здесь являются 10-я проблема Гильберта и теорема Ферма.

[2] В теории творческого мышления это называется "инертностью." В психологии это называется "рутинностью мышления".

Тот, кто увлекается своими предположениями и начинает выдавать их за истины, после этого также не может выдать ничего нового.[3]

3. Не только логика открытия и обоснования, но и логика нахождения обоснования и его изложения принципиально различаются.

4. При каждом строгом обосновании мы в значительной степени теряем из виду исходную задачу, и более того, порою искажаем ее до неузнаваемости.

Интереснейшим и показательным примером творческого развития в математике является создание математического анализа. Известно, что в нынешнее время анализ излагается в учебниках совсем не так, как излагали его создатели, да и другие ученые вплоть до конца XVIII в. Основными понятиями служат множество, предел, функция, определяемая через множества, последовательность, определяемая через функцию.Что такое множество и зачем оно нужно в математике, осознано было лишь во второй половине XIX века[4], поэтому множеств создатели анализа не знали, а вот все остальные понятия были центральными и для них. Но воспринимались они совсем не так, как в современной математике.

Так, например, практически никто не замечал аналогий между понятиями последовательности и функции. Если с последовательностью связывалась в основном идея бесконечно продолжающегося порождения элементов, возможно, путем свободного выбора, то насчет функции практически не было сомнений, что это — либо аналитическое выражение, задающее связь аргумента с результатом, либо непрерывная кривая, которая может быть начерчена, либо какой-то другой тип их *явно заданной взаимосвязи.* Поэтому и появился термин "неявная функция," означавший функцию, для вычисления которой требовалось решить уравнение, зависящее от ее аргумента, как от параметра.

К такому пониманию функции в некотором смысле вернулись в современной теории вычислимости, но там первичны именно законы, порождающие последовательности, а законы, порождающие функции действительного переменного, достаточно косвенно определяются через них.

Но наиболее бросаются в глаза расхождения в определении предела и наличие в математике конца XVII – XVIII в. понятий актуально бесконеч-

[3]В психологии это называется "переходом ценных идей в сверхценные".

[4]Хотя в традиционной логике давно уже использовалось понятие класса, соответствующее по содержанию понятию множества, и попытки построить исчисление классов начались практически одновременно с созданием математического анализа; в частности, к ним приложили руку Лейбниц, Эйлер, Больцано ...

но малых величин. Математический анализ даже назывался в то время анализом бесконечно малых. Актуальные бесконечности были полностью отброшены при канонизации и уточнении изложения анализа в первой половине XIX в. Еще тридцать лет назад считалось, что они забыты навсегда и представляют интерес лишь для историков науки и издателей трудов классиков того времени. Но радикальное изменение взгляда на математику, порожденное математической логикой, привело к их неожиданному возрождению на абсолютно строгом уровне.[5]

Важнейшими из, казалось бы, навсегда отвергнутых понятий были понятия бесконечно малых и бесконечно больших величин и понятие дифференциала функции (которое Ньютоном и Лейбницем считалось первичным по отношению к понятию производной). dy было приращением функции $y = f(x)$ при бесконечно малом изменении x. Отношение $\frac{dy}{dx}$ было действительно результатом деления dy на dx. Конечно же, при делении одного бесконечно малого числа на другое могло получиться конечное число, но тонкость в том, что это конечное число могло содержать и бесконечно малую компоненту, которая считалась пренебрежимой по сравнению с конечным результатом и отбрасывалась.

Рассмотрим, например, как первоначально доказывалась теорема о производной произведения двух функций.

Пусть $\frac{dy}{dx} = a$, $\frac{dz}{dx} = b$. Пусть $u = y \cdot z$. Тогда при бесконечно малом приращении dx аргумента x имеем:

$$u = (y + dy) \cdot (z + dz) = yz + z\,dy + y\,dz + dy \cdot dz.$$

Отбрасывая пренебрежимо малую величину $dy \cdot dz$, получаем

$$du = y\,dz + z\,dy.$$

На этом выводе многие математики прекращали изложение, поскольку именно дифференциал, а не производная считался первичным понятием. Но некоторые (как правило, самого высокого класса либо с наиболее тонким чувством математической строгости) делали еще пару шагов.

$$\frac{du}{dx} = \frac{z\,dy + y\,dz + dy \cdot dz}{dx} = z\frac{dy}{dx} + y\frac{dz}{dx} + \frac{dy \cdot dz}{dx}.$$

[5] Тем не менее некоторые из понятий анализа бесконечно малых, и очень полезные, до сих пор не нашли новой интерпретации. Да к ним добавились еще другие понятия, созданные гениальным английским математиком-прикладником рубежа XIX–XX веков У. Хевисайдом. Лишь простейшие из них получили интерпретацию в теории обобщенных функций, но, кажется, традиционными аналитическими средствами здесь далеко не продвинешься.

Последний член получившегося выражения бесконечно мал, поэтому отбросим его и получим

$$\frac{du}{dx} = z\frac{dy}{dx} + y\frac{dz}{dx}.$$

Предел также интенсивно рассматривался математиками того времени, но определялся весьма расплывчато: как "первое и последнее" значение выражения, соответственно, при приближении к точке a и при удалении от нее. Интеграл определялся как сумма бесконечно большого числа бесконечно малых величин, примерно как

$$\sum_{i=0}^{i=(b-a)/\varepsilon} f(x+i\varepsilon)\,\varepsilon.$$

Впрочем, такое выражение считалось бы неприличным, поскольку уж о бесконечно больших натуральных числах математики, ясное дело, стыдились говорить.[6]

Подобные фокусы, когда бесконечно малые величины то полноправно использовались в преобразованиях, то вдруг отбрасывались, причем иногда не полностью, а частично, а ответ, тем не менее, выходил правильный, использовались некоторыми благонамеренными образованными людьми, в частности, епископом Беркли, для доказательства существования Бога, что, как и всякая благоглупость, лишь компрометировало и ту цель, ради которой это делалось, и те средства, которые при этом использовались. Естественно, что критически мыслящие математики в конце концов больше не захотели "приносить строгость в жертву успеху," и в начале XIX в. началось движение за изгнание бесконечно малых и замену их т.н. "$\varepsilon - \delta$ формулировками," которыми мучают нынешних студентов на I курсе.[7] Эта реформация часто связывается с именем французского математика Коши, который, как выяснилось в результате

[6]Хотя поскольку аксиома Архимеда, говорящая, что для любых двух $x, y > 0$ найдется такое n, что

$$\underbrace{x + \cdots x}_{n \text{ раз}} > y,$$

уже была осознана в то время, казалось бы, очевидно, что, сказав A, необходимо сказать и B: принять существование бесконечно больших натуральных чисел. Но в жизни (и в науке тоже) нежелательные следствия, сколь бы очевидны они ни были, почему-то очень долго не замечаются.

[7]И правильно мучают! Если Вы ими не овладели, Вам нечего и читать эту главу дальше.

анализа его работ, на самом деле использовал старые и новые методы вперемежку, но, правда, не стеснялся передоказывать новыми методами ранее доказанные им старыми способами утверждения.

К середине XIX в. стало неприличным пользоваться актуально бесконечно большими и бесконечно малыми величинами, уровень строгости математических доказательств поднялся настолько, что превзошел достигнутый в древнегреческой геометрии и спровоцировал появление столь неприятной для традиционного математического мировоззрения науки, как математическая логика.

Первые же результаты математической логики привели к выводу, что в строгих математических рассмотрениях большинство понятий не могут иметь прямой интерпретации. Они являются *идеальными понятиями* (в отличие от реальных, взятых из практики). От идеальных понятий *в принципе* можно было бы избавиться[8], таким образом, они необязательны и служат, с плоской прикладной точки зрения, лишь для сокращения выкладок.

Идеальным является уже понятие действительного числа, поскольку оно предполагает бесконечную последовательность уточняющихся приближений[9]. А уж чего там говорить о понятиях непрерывной функции и т.п ...

Уже на данном примере видно, что идеальность бывает разной степени, и введя идеальные понятия, мы часто вынуждены вводить еще более идеальные, чтобы успешно работать с уже имеющимися. Далее чувствуется, что плоская[10] прикладная точка зрения в чем-то ущербна, поскольку основные математические результаты, оказывается, касаются именно идеальных понятий.

Идеальные понятия после их осознания стали полноправным предметом изучения и в философии, и в теории творческого мышления, и в психологии. Выяснились весьма любопытные факты, которые обосновываются, в частности, и методами математической логики.

Потеря эффективности мышления при отказе от идеальных понятий столь грандиозна, что человек оказывается отброшенным на уровень раз-

[8] Данное выражение означает, что выкладки и рассуждения, включающие идеальные понятия, но приводящие к реальному результату, можно было бы перестроить таким образом, чтобы изгнать из них все идеальные понятия. Но насколько при этом усложнятся преобразования и доказательства, в расчет не принимается.

[9] Если копнуть поглубже, то возникают сомнения в реальности и рациональных, и натуральных чисел, поскольку мы не учитываем при их определении реальной конечности наших ресурсов и нашего времени; но эта степень идеальности, безусловно, намного ниже.

[10] Подчеркиваю, *плоская*! Плоская теоретическая точка зрения на самом деле столь же ущербна.

розненных эмпирических рецептов и не может создать ничего существенно нового. Более того, идеальные понятия дают возможность выразить множество эмпирических рецептов одним общим утверждением, и порою оно оказывается столь выразительно (например, принцип неподвижной точки: любое непрерывное отображение n-мерного круга в себя имеет неподвижную точку), что унифицируемые им рецепты выглядят совершенно по-разному и уж, конечно, относятся к разным областям знания.

Поэтому неудивительно, что среди ученых, занимающихся точными науками, популярна точка зрения Платона: на самом деле именно идеальные понятия первичны, а так называемые "реальные" служат лишь их несовершенными и бледными отражениями, их тенями. Если хорошенько вдуматься, то поймешь, что этот взгляд достаточно обоснован: в частности, одно из самых "реальных и материальных" понятий, по сути дела породившее весь мировоззренческий материализм — деньги — на самом деле ирреально, оно является лишь результатом соглашения между людьми, что доказали события в Камбодже, когда захватившие власть ультракоммунисты отменили деньги и никто не поднимал даже доллары. Удивительная эффективность и красота идеальных понятий и неэффективность и безобразие ползучего, эмпирического мышления просто провоцируют этот взгляд.[11]

Интересно, что после полета в области идеальных понятий математика совершенно неожиданно приходит к реальным результатам. Так, теория конечных полей открыла путь к кодам, исправляющим ошибки, а теория сложности вычислений — к современным надежным шифрам. Результаты алгебраической топологии используются при оптимизации интегральных схем и т.п.

10.2 Нестандартная модель

Пользуясь теоремой Мальцева о компактности, построим несколько необычную модель теории, описывающей натуральные числа.

Пусть задан некоторый язык, обязательно включающий константы 0 и 1, операцию сложения натуральных чисел и, возможно, другие опера-

[11] Сам автор весьма близок к данному взгляду, но не считает возможным навязывать его как единственно правильный. Любая человеческая интерпретация односторонняя и неполная. Поэтому всегда нужно наряду со своим взглядом признавать и альтернативный ему, а именно, что идеальные понятия суть лишь имена, получаемые путем последовательных обобщений опыта, и зачастую эти обобщения поднимаются столь высоко, что теряют видимую связь с ним, сохраняя тем не менее глубинные. С данной точки зрения идеальные понятия такие же орудия человеческой мысли, как механизмы — орудия его материальной деятельности.

ции. Пусть задана некоторая *арифметическая теория* Ar в данном языке и пусть все аксиомы Ar истинны на модели, универсом которой служат натуральные числа, а интерпретации всех заданных в языке операций и отношений соответствуют их содержательному смыслу. Такую модель будем называть *стандартной*.[12]

Мы уже видели на примере теории $\mathbf{\mathsf{Q}}$ из упражнения к 8.2.5, как строятся нестандартные модели для слабых подсистем арифметики. Для сильных систем (например с индукцией) нестандартную модель *явно* не построишь (и доказано, что вообще нет нестандартных моделей с вычислимыми операциями сложения и умножения). Но их существование является еще одним важным достижением логики, развеивающим псевдоплатонистский миф о том, что математика имеет дело с абсолютными понятиями, и открывающим путь к новому классу методов — методам нестандартных моделей.

Казалось бы, что уж теория, составленная из всех формул, истинных на стандартной модели, будет характеризовать ее полностью. Покажем, что это не так.

Пусть Tr_N — теория, состоящая из всех формул данной сигнатуры, истинных на множестве натуральных чисел. Пополним сигнатуру константой ω и зададим следующие аксиомы (их бесконечное число; если в сигнатуре имеются константа для данного натурального числа, то $\mathbf{n}$ означает такую константу; в противном случае это терм $\underbrace{1+\cdots+1}_{n \text{ раз}}$):

$$\omega > \mathbf{0},\ \omega > \mathbf{1},\ \ldots,\ \omega > \mathbf{n},\ \ldots \tag{10.1}$$

[12]Как Вы заметите сами после изучения результатов о недоказуемости и неполноте, условие об истинности аксиом на стандартной модели содержит глубоко спрятанный подводный камень: строго говоря, мы до сих пор не имеем полной уверенности в истинности на множестве натуральных чисел даже принципа математической индукции, поскольку любая попытка его обоснования ведет к порочному кругу: мы неявно пользуемся другой формой этого же принципа. Но степень уверенности математиков в истинности арифметических теорем на стандартной модели, конечно же, неизмеримо выше степени обоснованности любого естественнонаучного утверждения. Все последующие рассмотрения затрагиваются данным замечанием лишь в том отношении, что нестандартная модель гораздо сильнее привязана к конкретной форме математики, изучаемой Вами в стандартных курсах — классической математике, чем до сих пор рассмотренные результаты математической логики. При переходе к нетрадиционной математике красивые методы нестандартных моделей быстро перестают действовать. Это не дискредитирует их. Если бы Вам комментировали переносимость других математических результатов, то Вы были бы “приятно” изумлены, насколько тонка грань, отделяющая устойчивые по отношению к пересмотру основ математики теоремы от столь же неустойчивых, как приведенные в данной главе, и насколько много таких неабсолютных теорем.

Дополнительные аксиомы обозначим Th_ω. Рассмотрим вопрос о непротиворечивости теории $\mathsf{Tr}_N \bigcup \mathsf{Th}_\omega$. Сама по себе Tr_N, очевидно, непротиворечива, поскольку ее моделью является множество натуральных чисел. Точно так же непротиворечива и теория Th_ω, поскольку она не постулирует никаких свойств обычных натуральных чисел, кроме наличия 0, 1 и операции сложения, и в качестве ее модели можно взять, скажем, $\mathbb{N} \cup \{\omega\}$, а $+$ доопределить для ω следующим образом:

$$x + \omega = \omega + x = x.$$

Но очевидно, что в такой интерпретации разрушаются даже алгебраические свойства натуральных чисел, не говоря уже об индукции.

Для доказательства непротиворечивости $\mathsf{Tr}_N \bigcup \mathsf{Th}_\omega$ воспользуемся теоремой о взаимной непротиворечивости. Если к Tr_N добавить конечное число аксиом Th_ω, то получившаяся теория будет непротиворечива. В самом деле, в этом конечном подмножестве аксиом имеется аксиома с наибольшим $\mathbf{n}$. Обозначим его $\mathbf{n}_0$. Тогда, если придать ω значение $n_0 + 1$, то данный фрагмент $\mathsf{Tr}_N \bigcup \mathsf{Th}_\omega$ имеет моделью просто стандартный натуральный ряд!

Итак, $\mathsf{Tr}_N \bigcup \mathsf{Th}_\omega$ непротиворечива, и, следовательно, имеет модель. Эта модель называется *нестандартным натуральным рядом* и обозначается $\mathbb{N}^*$. Нестандартный натуральный ряд обладает любопытными свойствами.

> Все утверждения, формулируемые на языке логики и истинные на стандартной модели, будут истинны и на $\mathbb{N}^*$.

А как же с существованием бесконечно большого числа ω? Но понятие “бесконечно большое” задается не одной формулой, а их бесконечной последовательностью, так что его просто не существовало в исходном языке. Все свойства, предметы, функции, множества, определявшиеся в исходном языке, носят в нестандартной модели название “стандартных.”

А теперь вопрос: существует ли наименьшее бесконечно большое натуральное число? Конечно же, нет. Ведь $\omega \neq 0$, а для всякого натурального числа n, отличного от 0, существует число $n - 1$. Так что нестандартный натуральный ряд принципиально отличается от ординальных чисел, лишь обозначение бесконечно большого числа у них одно и то же. Если в ряду ординальных чисел существуют лишь все бо́льшие и бо́льшие бесконечности типа ω^ω, то здесь иерархия бесконечностей продолжается в обе стороны. Для ω существуют и $2 \cdot \omega$, и $[\omega/2]$,[13] и $[\sqrt{\omega}]$.

[13] Как принято в анализе, $[x]$ здесь обозначает целую часть x, а не кортеж из одного элемента.

Итак, в принципе нестандартный натуральный ряд открывает возможность использовать бесконечно большие числа как идеальные элементы, пользуясь тем, что все стандартные утверждения истинны на нем тогда и только тогда, когда они истинны на исходном натуральном ряду. Но не зря в XVII–XVIII вв. пользовались не бесконечно большими натуральными числами, а бесконечно малыми и бесконечно большими действительными. Нестандартный натуральный ряд заработал лишь в сочетании с нестандартной действительной осью.

Упражнения к §10.2

10.2.1. Что получится в результате деления нацело бесконечно большого числа на бесконечно большое? А конечного на бесконечно большое? А бесконечно большого на конечное? А умножения нуля на бесконечно большое?

10.2.2. Есть ли бесконечно большое число, превосходящее все

$$\left.\omega^{\omega^{\cdots^{\omega}}}\right\} n \text{ раз?}$$

10.3 Нестандартная действительная ось

В принципе построение нестандартной действительной оси точно такое же, как нестандартного натурального ряда. Берем какую-либо теорию, состоящую из истинных утверждений об $\mathbb{R}$ и пополняем ее новой константой ω, представляющей бесконечно большое число. Но здесь имеется одна скрытая ловушка, делающая такое построение зависимым от тонких гипотез современной классической математики и начисто разрушающая его при переходе к чуть-чуть нетрадиционной математике.

Если натуральных чисел счетное множество и вполне можно иметь константы для них всех, то действительных чисел — несчетное множество. Вспомним, что мы доказали теорему полноты лишь для счетных теорий, а для несчетных дали сноску, указывающую, каким способом можно было бы перенести наше доказательство и на них. Сделали мы так не из лени и не из упрощенчества,[14] а потому, что логический статус теоремы полноты для счетных и более чем счетных теорий совершенно

[14]Плоское возражение о том, что на практике все равно не встречается более чем счетных множеств, безжалостно парируется с двух сторон. Во-первых, доказательство несчетности действительных чисел, приведенное на стр. 103, как говорят, *абсолютно*, оно не зависит ни от каких гипотез теории множеств и переносится практически в какую угодно другую известную математику, так что несчетные множества не слишком большие, а просто слишком плохие, а уж гадостей исключать заранее

различный: первая доказывается практически абсолютно, а вторая зависит от одной из самых сомнительных аксиом теории множеств — аксиомы выбора, либо же от ее следствия, что каждое множество можно вполне упорядочить.

Применение в полную силу всех особенностей традиционной математики при построении нестандартной действительной оси связано с тем, что в математическом анализе интенсивно используются и множества, и семейства множеств, так что нужно позаботиться о сохранении не только суждений первого порядка, но и других, говорящих о структурах, составленных из стандартных объектов. К вопросу об этом мы вернемся ниже, в параграфе 10.5, который может быть опущен без всякого ущерба для дальнейшего, если Вы готовы принять на веру, что такое обоснование есть.

Итак, мы считаем, что в число стандартных объектов в математическом анализе входят *все* действительные числа, *все* их рассматриваемые в анализе множества и т. д.

Нестандартная действительная ось строится таким образом, что все свойства, выразимые на языке многосортной логики предикатов с переменными по действительным числам как исходному множеству и по всевозможным функциям и множествам из ранее построенных типов в ранее построенные, сохраняются. Таким образом, для нестандартной действительной оси $\mathbb{R}^*$ принцип сохранения выглядит следующим образом:

Принцип переноса

Пусть $\mathcal{A}$ — произвольная формула логики предикатов с переменными и кванторами по числам, их функциям и множествам и т.п., имеющая свободными переменными $x_1^{\tau_1}, \dots , x_n^{\tau_n}$, где τ_i — тип переменной x_i. Пусть $a_1, \dots , a_n$ — произвольные объекты из стандартной интерпретации, соответствующие по типам переменным x_i. Тогда

$$\mathbb{R} \models \mathcal{A}(a_1, \dots , a_n) \Leftrightarrow \mathbb{R}^* \models \mathcal{A}(a_1, \dots , a_n).$$

Суммируем:

1. При построении нестандартной модели множество действительных чисел пополняется до $\mathbb{R}^*$.

нельзя. Во-вторых, *на самом деле* и счетных множеств не бывает, все конечно, но попробуйте-ка обойтись одними конечными объектами! Вспомните, что говорилось об идеальных объектах.

2. Множество множеств действительных чисел становится подклассом множества всех подмножеств $\mathbb{R}^*$

3. Множество функций — подклассом соответствующего множества функций и т. д.

Таким образом, каждому множеству обычных действительных чисел сопоставляется в нестандартной модели множество нестандартных чисел, каждая функция продолжается на соответствующее ее области определения подмножество нестандартной оси.

Пример 10.3.1. Множеству всех действительных чисел $\mathbb{R}$ соответствует в нестандартной модели множество всех нестандартных действительных чисел $\mathbb{R}^*$. Множеству всех действительных чисел без нуля $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ соответствует $\mathbb{R}^* \setminus \{0\}$, поскольку сохраняется его характеристическое свойство

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}.$$

Начнем с терминологии, касающейся нестандартной модели.

Определение 10.3.1. (Объекты нестандартной модели) Объект называется *стандартным*, если он имелся в исходной модели. Множество (функция) называются *внутренними*, если они входят в нестандартную модель. Множество (функция) — *внешние*, если они не входят в нестандартную модель.

Число *конечное*, если оно меньше по модулю некоторого стандартного числа. Число *бесконечно большое*, если оно по модулю больше любого стандартного числа. Число *бесконечно малое*, если оно по модулю меньше любого отличного от нуля стандартного числа.

Прежде всего отметим некоторые свойства этих понятий, отнюдь не являющиеся сюрпризом. Сюрпризы еще будут!

Предложение 10.3.1. *1. Результаты всех алгебраических действий над конечными числами конечные.*

2. Единственное бесконечно малое стандартное число — ноль.

3. При делении конечного числа a на бесконечно большое ω получается бесконечно малое число.[15]

4. При делении конечного числа $a \neq 0$ на бесконечно малое $\varepsilon \neq 0$ получается бесконечно большое число.[16]

---

[15] В отличие от того, что может случиться в теории пределов, если $a \neq 0$, то $\frac{a}{\omega} \neq 0$.

[16] В отличие от того, что может случиться в теории пределов, если $\varepsilon \neq 0$, то $\frac{0}{\varepsilon} = 0$. А выражения $\frac{\varepsilon}{0}$ и $\frac{0}{0}$ остаются бессмысленными.

Итак, стандартные объекты переносятся из стандартной модели в расширенную. Если сами по себе числа либо другие стандартные базовые объекты можно просто отождествить с их нестандартными образами[17], то для множеств и функций (и вообще объектов высших типов) ситуация сложнее. Ясно, например, что нестандартным образом множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ служит множество нестандартных натуральных чисел $\mathbb{N}^*$. Функция $\sin$ при переносе на нестандартную ось должна быть доопределена для всех нестандартных значений. А уж если подумать, что же должно соответствовать операции интегрирования ...

Далее, если любое нестандартное число является полноправным объектом нестандартного анализа, который можно использовать в рассуждениях и для которого сохраняются все выразимые на логическом языке свойства, то для множеств и функций это уже не так. Часть из них, являющихся образами стандартных множеств и функций, также называются стандартными, хотя, как было показано выше, их содержание уже другое.[18] Часть — нестандартные — сохраняют общие свойства и входят в нестандартную модель (например, множество всех чисел, бо́льших ω). Часть из них — внешние — в нестандартную модель вообще не входят.

Критерием для установления того, что множества (функции) — внешние, является нарушение для них свойств, доказываемых для множеств либо функций в обычном анализе. Например, покажем, что множество стандартных действительных чисел (взятое как подмножество нестандартной действительной оси) является внешним.

Предложение 10.3.2. *Множество стандартных действительных чисел внешнее.*

Доказательство. Все стандартные действительные числа меньше по модулю бесконечно большого числа ω. Значит, это подмножество нестандартной действительной оси ограничено. Значит, оно имеет точную верхнюю грань. Эта грань является либо наибольшим элементом самого множества (но в $\mathbb{R}$ такого нет), либо наименьшим элементом множества его верхних границ

$$Z = \{x \mid x \in \mathbb{R}^* \ \& \ \forall z (z \in \mathbb{R} \Rightarrow x > z)\},$$

т.е. множества бесконечно больших чисел. Но наименьшего бесконечно большого числа также нет. $\square$

[17]Это столь же закономерно и вызывает те же затруднения, что и практически общепринятое отождествление целых чисел с действительными, принимающими то же значение. Не зря в компьютерах они представлены по-разному.

[18]Зато свойства те же, в частности, характеристические свойства для множеств.

Докажем теорему, с которой начался нестандартный анализ.

Теорема 10.1. *[A. Robinson, 1960] Любое конечное число однозначно представляется в виде суммы стандартного и бесконечно малого.*

Доказательство. Пусть a — конечное число. Это значит, что имеется такое стандартное $n \in \mathbb{N}$, что $|a| < n$. Следовательно, множество стандартных чисел

$$X_a = \{x \mid x \in \mathbb{R} \ \& \ x < a\} \tag{10.2}$$

ограничено сверху.[19] Любое ограниченное сверху множество действительных чисел имеет верхнюю грань. Обозначим верхнюю грань X_a через $\operatorname{st} a$. $\operatorname{st} a$ — стандартное число. Далее, $\varepsilon = a - \operatorname{st} a$ — бесконечно малое число, поскольку иначе $\operatorname{st} a$ не было бы верхней гранью X_a. □

Теперь рассмотрим две конкретизации принципа переноса, важные для проверки многих утверждений нестандартного анализа.

Предложение 10.3.3. (∀-перенос) *Пусть $A(x)$ — стандартная формула со свободной переменной x. Тогда*

$$\mathbb{R}^* \models \forall x\, A(x) \Leftrightarrow \forall x_0 (x_0 \in R \Rightarrow \mathbb{R}^* \models A(x_0)).$$

Предложение 10.3.4. (∃-перенос) *Пусть $A(x)$ — стандартная формула со свободной переменной x. Тогда*

$$\mathbb{R}^* \models \exists x\, A(x) \Leftrightarrow \exists x_0 (x_0 \in \mathbb{R} \ \& \ \mathbb{R}^* \models A(x_0)).$$

Заметим, что в обоих этих утверждениях $\Leftrightarrow$ связывает не формулы, а записанные при помощи логических средств предложения более общего языка, являющиеся внешними для нестандартной модели, и в них обоих для всех стандартных значений x_0 имеет место

$$\mathbb{R}^* \models A(x_0) \Leftrightarrow \mathbb{R} \models A(x_0).$$

Упражнения к §10.3

[19]Поскольку *все* множества стандартных действительных чисел входят в исходную модель, то не имеет никакого значения, что данное множество определено нестандартным условием.

10.3.1. Студент Классиков дал следующее доказательство, что функция $\lambda x \in [0,1].\,\mathrm{st}\,x$ внутренняя. Проанализируйте его.

Множество X_x, определенное формулой 10.2, — внутреннее (и даже стандартное). Но $\mathrm{st}\,a$ определено как верхняя грань данного множества. Таким образом, $\mathrm{st}\,a$ для каждого a определено стандартным образом, и значит, сама функция внутренняя.

10.3.2. Студент Гениалькис дал доказательство того, что в нестандартном анализе может существовать конечное нестандартное множество, содержащее все стандартные действительные числа. Студент Лыцаренко опроверг его следующим образом:

Для каждого стандартного конечного множества найдется стандартное число, ему не принадлежащее, а по принципу переноса это свойство переносится и на любые конечные множества в нестандартной модели.

Услышав такое возражение, Гениалькис порвал свое доказательство и убежал. Кто же из спорщиков прав? Если Вы считаете, что прав Гениалькис, попытайтесь восстановить его доказательство.

10.4 Нестандартные переформулировки

Начнем с того, как А. Робинсон возродил определение непрерывности, использовавшееся основателями математического анализа, и какие новые тонкости здесь выявились.

Теорема 10.2. *Стандартная функция f непрерывна в стандартной точке x тогда и только тогда, когда для любого $y \in \mathrm{Dom}\,f$, бесконечно мало отличающегося от x, $f(y)$ бесконечно мало отличается от $f(x)$.*

Доказательство. Докажем, что из стандартного определения следует нестандартное. Для любого стандартного $\varepsilon > 0$ найдется стандартное $\delta > 0$, такое, что при $|y - x| < \delta$ $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$. Возьмем теперь произвольное бесконечно малое δ_0. Оно меньше любого стандартного $\delta > 0$, и значит, $|f(x + \delta_0) - f(x)| < \varepsilon$ для любого стандартного $\varepsilon > 0$. А это и есть определение того, что $|f(x + \delta_0) - f(x)|$ бесконечно мало.

А теперь докажем, что из нестандартного следует стандартное. В самом деле, возьмем произвольное стандартное $\varepsilon > 0$. Если взять произвольное *бесконечно малое* $\delta > 0$, то для всех y, таких, что $|x - y| < \delta$

разность $f(x) - f(y)$ бесконечно мала, по нестандартному определению, и следовательно, заведомо меньше ε по модулю. Значит,

$$\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\delta(\delta > 0 \;\&\; \forall y(|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)).$$

Но данная формула стандартна и обоснована при произвольном стандартном ε. Значит, она по принципу переноса верна и для любого ε. Следовательно,

$$\forall\varepsilon\,(\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\delta(\delta > 0 \;\&\; \forall y(|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)))\,.$$

А это и есть классическое определение непрерывности.
Конец доказательства.

Теперь переформулируем на нестандартный язык понятие равномерной непрерывности.

В стандартной формулировке равномерная непрерывность отличается от непрерывности перестановкой одного квантора. Сравните:

$$\begin{gathered}\forall x(x \in \operatorname{Dom} f \Rightarrow \forall\varepsilon(\varepsilon > 0 \Rightarrow \\ \exists\delta(\delta > 0 \;\&\; \forall y(y \in \operatorname{Dom} f \Rightarrow |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon))))\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\forall\varepsilon(\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\delta(\delta > 0 \;\& \\ \forall x\,\forall y(x \in \operatorname{Dom} f \;\&\; y \in \operatorname{Dom} f \Rightarrow |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon))).\end{gathered}$$

Как влияет эта перестановка на нестандартную формулировку? Раньше x стояло снаружи, и поэтому мы утверждали нестандартную формулировку для стандартного x. Теперь же квантор по x упрятан далеко внутрь, и условие должно быть выполнено для *всех* x.

Теорема 10.3. *Стандартная функция f равномерно непрерывна на стандартном множестве X тогда и только тогда, когда для любых $x, y \in \operatorname{Dom} f$, бесконечно мало отличающихся друг от друга, $f(y)$ бесконечно мало отличается от $f(x)$.*

Доказательство. Остается в качестве упражнения и экзаменационного вопроса.
Конец доказательства.

А теперь переформулируем следующее утверждение:

> Последовательность a_n бесконечное число раз принимает значение 0.

Теорема 10.4. *Стандартная последовательность a_n бесконечное число раз принимает значение 0 <u>ттт</u> есть такое бесконечно большое натуральное число ω, что $a_\omega = 0$.*

Доказательство. Прежде всего разберемся, что же означает бесконечное число раз принимать значение 0.

$$\forall n\, \exists m(m > n \,\&\, a_m = 0). \tag{10.3}$$

Поскольку это предложение выполнено и в нестандартной модели, то в частности, для любого бесконечно большого ϖ

$$\exists m(m > \varpi \,\&\, a_m = 0).$$

Это m и будет искомым ω.

Теперь пусть существует бесконечно большое ω, такое, что $a_\omega = 0$. Утверждение (10.3) стандартное и начинается с всеобщности, поэтому по принципу переноса его можно обосновывать лишь для стандартных n. Но для любого стандартного n существует искомое m, а именно, ω. □

Итак, несколько неформально выражаясь, нестандартное число аккумулирует в себе свойства целой последовательности стандартных чисел.[20]

Чтобы точнее установить опасности, связанные с нестандартными формулировками, дадим несколько контрпримеров. Контрпримеры будут использовать те нестандартные объекты, которые ближе всего по построению и свойствам к стандартным — почти стандартные. Функция называется почти стандартной, если она представляется в виде $\lambda x\, f(\xi, x)$, где ξ — нестандартное число, f — стандартная функция. Аналогично, почти стандартное множество — сечение стандартного отношения по нестандартному значению аргумента.

Приведем почти стандартные контрпримеры к двум из доказанных эквивалентностей.

Пример 10.4.1. Непрерывность. Функция $\varepsilon \cdot \operatorname{sgn}$ бесконечно мало изменяется в окрестности нуля, но разрывна в ней. Наоборот, функция $\omega \cdot x$ бесконечно изменяется в окрестности нуля, но непрерывна в нуле.

Пример 10.4.2. Нули. Последовательность

$$a_n = \begin{cases} 1, & n \neq \omega \\ 0, & n = \omega \end{cases}$$

[20]Самая популярная конструкция нестандартных моделей — через ультрапроизведения — делает это замечание несколько более точным, но не дает ему полного обоснования. Такое соображение является прекрасным нестрогим приемом, но не может быть использовано в доказательствах. Таким образом, применяйте его, когда ищете формулировку теорем, но не когда их доказываете!

принимает значение 0 в единственной, но бесконечной точке. Обратного примера привести невозможно, поскольку всякая внутренняя последовательность, имеющая бесконечно большое число нулей, имеет хотя бы один бесконечный нуль. Докажем это.

Пусть имеется внутренняя последовательность a_n, бесконечно много раз принимающая значение 0, все нули которой конечны и, следовательно, стандартны. Тогда можно определить в нестандартной модели множество стандартных натуральных чисел посредством

$$\mathbb{N} = \{i \mid i \in \mathbb{N}^* \mathbin{\&} \exists j(a_j = 0 \mathbin{\&} j > i)\}.$$

Но мы доказали, что множество стандартных чисел — внешнее.

Упражнения к §10.4

Дать нестандартные определения и доказать их эквивалентность стандартным (все явно упомянутые объекты стандартны):

10.4.1. x — изолированная точка множества X.

10.4.2. x — предельная точка множества X.

10.4.3. $-\infty$ — предельная точка множества X.

10.4.4. Множество X конечно.

10.4.5. Множество X бесконечно.

10.4.6. Множество X ограничено.

10.4.7. Множество X неограничено.

10.4.8. Множество X всюду плотно.

10.4.9. Множество X открыто.

10.4.10. Множество X замкнуто.

10.4.11. Множество X компактно.

10.4.12. Уравнение $f(x) = 0$ имеет бесконечно много решений.

10.4.13. Уравнение $f(x) = 0$ имеет конечное число решений.

10.4.14. Уравнение $f(x) = 0$ имеет сколь угодно большие решения.

10.4.15. Уравнение $f(x) = 0$ имеет сколь угодно малые решения.

10.4.16. Последовательность a_n бесконечно большая.

10.4.17. Последовательность a_n стабилизируется.

10.4.18. Последовательность a_n принимает конечное число значений.

10.4.19. Последовательность a_n имеет 1 предельной точкой.

10.4.20. Последовательность a_n растет быстрее, чем b_n.

10.4.21. Функция f дифференцируема в точке 0.

10.4.22. Функция f неограничена вблизи точки b.

10.4.23. Функция f ограничена на действительной оси.

10.4.24. Функция f интегрируема на $[a, b]$.

Ко всем примерам привести почти стандартные контрпримеры.

10.5 Суперструктуры и теорема Лося

Чтение данного параграфа необязательно для тех, кто не стремится узнать точные доказательства всех используемых утверждений.

Для специалистов заметим, что здесь приведена более слабая форма теоремы Лося, чем приведенная, например, в [13]. Мы, следуя нашему базовому принципу — всячески отмежевываться от результатов, выполненных лишь для классической математики, — берем здесь ту ее форму, которая может быть перенесена на кое-какие модели неклассических систем. Другое дело, что доказательство и этой формы теоремы зависит от специфических принципов классической теории множеств, но здесь уж ничего не поделаешь: как аппарат для анализа других концепций и для их представления классическая математика ничуть не хуже любой другой.[21]

10.5.1 Аксиома выбора, некоторые ее следствия и альтернативы

Поскольку в доказательстве теоремы Лося и, соответственно, в построении нестандартной модели существеннейшим образом используется аксиома выбора (упомянутая ранее на стр. 99), мы начнем с ее обсуждения.

[21] Хотя и не лучше.

Аксиома выбора имеет внешне весьма привлекательную и простую формулировку, настолько естественную, что ее применение до начала XX века не осознавалось явно.

$$\begin{gathered}\forall x(x \in X \Rightarrow \exists y(y \in Y \ \& \ (x,y) \in R)) \Rightarrow \\ \exists f(f : X \to Y \ \& \ \forall x(x \in X \Rightarrow (x, f(x)) \in R)).\end{gathered} \tag{10.4}$$

Таким образом, она утверждает, что для каждого всюду определенного соответствия существует вложенное в него функциональное с той же областью определения. Как говорят, функция f *выбирает по элементу* из каждого из множеств $\{y \mid (x,y) \in R\}$. Поэтому ее часто называют *функцией выбора.*

Как и любое важное математическое утверждение, аксиома выбора имеет много эквивалентных, но внешне совершенно различных формулировок. Приведем три самые важные из них.

Первая из формулировок связана с обобщением понятия прямого произведения на бесконечные семейства сомножителей. Прежде всего определим, что такое семейство. *Семейство множеств* — просто другое название для функции, результатами которой являются множества. Часто семейство обозначается выражением типа

$$(X_i)_{i \in I}$$

вместо $\lambda i\, X(i)$. Аналогом n-ки, в которой i-тый элемент принадлежит множеству X_i, для произвольного множества индексов I служит функция с областью определения I, такая, что $f(i) \in X_i$. Таким образом, получаем еще одну формулировку аксиомы выбора, еще более естественную:

Прямое произведение семейства непустых множеств непусто.

Известны многие утверждения, эквивалентные аксиоме выбора. Перечислим часть из них и докажем их эквивалентность.

Предложение 10.5.1. (Теорема о вполне упорядочении) *Каждое множество можно вполне упорядочить.*

Доказательство. Из вполне упорядочения очевидно следует аксиома выбора, поскольку достаточно вполне упорядочить $\bigcup_{i \in I} X_i$ и сопоставить каждому i наименьший элемент X_i. Докажем обратное утверждение.

Пусть дано множество X. Рассмотрим множество всех его непустых подмножеств $\mathbf{P}\, X = \mathfrak{P}\, X \setminus \emptyset$. Построим для него функцию выбора $f(Y) \in Y$ для всех $Y \in \mathbf{P}\, X$. Построим трансфинитной рекурсией функцию $\varphi : X \to \mathfrak{On}$, где $\mathfrak{On}$ — класс всех ординалов.

$$\varphi(\alpha) = \begin{cases} f(X \setminus \{\varphi(\beta) \mid \beta \prec \alpha\}), & X \setminus \{\varphi(\beta) \mid \beta \prec \alpha\} \neq \emptyset \\ \alpha, & X \setminus \{\varphi(\beta) \mid \beta \prec \alpha\} = \emptyset \end{cases}$$

Найдется такой минимальный ординал α_0, при котором $X \setminus \{\varphi(\beta) \mid \beta \prec \alpha\} = \emptyset$, в противном случае существовала бы инъекция из класса ординалов в X, что невозможно, поскольку класс ординалов не является множеством. Тогда ограничение функции f на $\{\beta \mid \beta \prec \alpha_0\}$ является искомым вполне упорядочением. □

Предложение 10.5.2. (Лемма Цорна) *Если в частично-упорядоченном множестве X каждое линейно упорядоченное подмножество имеет верхнюю грань, то в множестве X существует максимальный элемент.*

Доказательство. Рассуждаем от противного. Допустим, что в X нет максимальных элементов. Тогда для каждого элемента $x \in X$ множество $\{y \mid y \in X \;\&\; y \succ x\}$ непусто. Вполне упорядочим элементы множества X (это вполне упорядочение не обязано быть как-то связано с линейным порядком). Построим теперь трансфинитной индукцией функцию

$$f(\alpha) = \text{минимальное } x \text{ такое, что } x \succ f(\beta) \text{ для всех } \beta \prec \alpha.$$

При каждом α множество $\{f(\beta) \mid \beta \prec \alpha\}$ — линейно упорядоченное подмножество X. Соответственно, оно имеет максимальный элемент, и поскольку он не наибольший, $f(\alpha)$ будет определено. Итак, мы построили инъекцию класса ординалов в множество X, чего быть не может. Таким образом, в множестве X должен быть хотя бы один максимальный элемент.

Осталось вывести аксиому выбора из леммы Цорна. Для этого докажем теорему о вполне упорядочении. Рассмотрим множество инъекций начальных отрезков ординалов в множество X. Оно естественно частично упорядочено вложением, если задано линейно упорядоченное семейство таких отображений, то его объединение также будет таким отображением. Значит, согласно лемме Цорна, существует хотя бы одна максимальная инъекция φ. Покажем, что она будет и сюръекцией. Если множество $X \setminus \operatorname{Val}\varphi$ непусто и α — наименьший ординал, не принадлежащий $\operatorname{Dom}\varphi$, то

$$\exists x\, x \in \{X \setminus \operatorname{Val}\varphi\}.$$

Возьмем такое x и положим $\varphi'(\alpha) = x$ и $\varphi'(\beta) = \varphi(\beta)$ при $\beta \prec \alpha$. Полученное φ' расширяет φ, а, по предположению, φ —максимальная инъекция. Итак, любая максимальная инъекция дает вполне упорядочение X. □

Предложение 10.5.3. (Существование ретракций) *Для любой сюръекции $f : X \to Y$ найдется ретракция $g : Y \to X$, такая, что $g \circ f = \mathrm{id}_Y$.*

Доказательство. Определим для семейства непустых множеств $(X_i)_{i\in I}$ функцию $\chi : \bigoplus_{i\in I} X_i \to I$, сопоставляющую каждой паре (i, x) ее первый компонент. Эта функция является сюръекцией. Соответствующая ей ретракция и будет функцией выбора. Обратная импликация доказана ранее. □

Теперь перейдем к более нетривиально связанным с аксиомой выбора формулировкам.

Аксиома зависимого выбора. [15]

$$\begin{array}{l}\forall x(x \in X \Rightarrow \exists y(y \in X \;\&\; (x,y) \in R)) \Rightarrow \\ \qquad \forall x(x \in X \Rightarrow \exists a(a : \mathbf{N} \to X \;\&\; \forall i(i \in \mathbf{N} \Rightarrow (a(i), a(i+1)) \in R)))\end{array}.$$

Итак, если отношение всюду определено, то для каждого элемента найдется бесконечная последовательность элементов, начинающихся с данного и связанных этим отношением.

Эта форма аксиомы выбора использована, в частности, в предложении 5.4.6. От нее зависит, таким образом, эквивалентность определения бесконечности по Расселу и неконечности множества и то, что каждое бесконечное множество содержит счетное подмножество.

Принцип линейного упорядочивания. Каждый частичный порядок можно продолжить до линейного.

Выведем принцип линейного упорядочения из аксиомы выбора.

Доказательство. Обозначим исходное отношение порядка $\succ_0$. Вполне упорядочим исходное множество $\mathcal{X}$[22]. После этого полного упорядочивания можно считать, что элементы $\mathcal{X}$ занумерованы ординальными числами, меньшими некоторого β. Построим теперь ординальную последовательность отношений порядка $\succ_\alpha$, где при $\gamma < \delta$ $\succ_\gamma \subseteq \succ_\delta$. Пусть $\succ_\alpha$ не является линейным порядком. Теперь возьмем элемент a с наименьшим номером, для которого имеются несравнимые с ним элементы. Среди элементов, несравнимых с a, возьмем элемент b с наименьшим номером. Возьмем отношение $\succ_\alpha \cup \{(a,b)\}$ (т.е положим $b \succ_{\alpha\oplus 1} a$). Возьмем транзитивное замыкание этого отношения и положим

$$\succ_{\alpha+1} = (\succ_\alpha \cup \{(a,b)\})^\infty.$$

Если порядок уже линейный, то положим $\succ_{\alpha+1} = \succ_\alpha$. Для предельных γ положим

$$\succ_\gamma = \bigcup_{\delta<\gamma} \succ_\delta .$$

Найдется такое $\alpha \prec \beta$, что $\succ_{\alpha+1} = \succ_\alpha$. Соответствующее отношение порядка и будет расширением нашего отношения порядка до линейного. □

Известно, что принцип линейного упорядочивания строго слабее аксиомы выбора. Его достаточно для конструирования некоторых видов нестандартных моделей.

Теперь перейдем к предложению, альтернативному аксиоме выбора. Интуитивно ясно, что в детерминированной игре без ничьей один из игроков обязан

[22] Не предполагается, что введенный полный порядок как-то связан с имеющимся у нас частичным.

иметь выигрывающую стратегию. Но наша интуиция здесь, как и во многих других местах, базируется на понятиях, основанных на конечности.

Пример 10.5.1. Рассмотрим следующую игру. На отрезке $[0,1]$ действительной оси задано подмножество X. Двое игроков делают ходы по очереди, каждый из них называет очередную цифру двоичного разложения действительного числа. Итог подводится после светопреставления (т.е. через бесконечное число ходов): если получившееся число принадлежит множеству X, выигрывает первый игрок, если нет — его противник. Таким образом, для каждой пары функций (f,g), перерабатывающих номер хода в $[0,1]$, определено действительное число $f \star g$, получающееся в результате игры.

Чтобы точно сформулировать один из наиболее противоречащих интуиции результатов современной теории множеств, введем новую операцию над кортежами: $a \star b$ является кортежем, в котором на четных местах стоят элементы кортежа a в том же порядке, а на нечетных — элементы кортежа b. Если один из кортежей короче, отсутствующие элементы будем считать нулями. Далее, пусть $\tilde{f}(n)$ — кортеж значений функции $[f(0),\ \ldots,\ f(n)]$. $\tilde{f}(-1)$ считается пустым кортежем.

Выигрывающей стратегией первого игрока называется такая функция f, определенная на конечных двоичных кортежах и дающая в качестве значения $\{0,1\}$, что

$$\forall g \left(g : \mathbf{N} \to [0,1] \Rightarrow \lambda n \begin{cases} f(\tilde{g}(n/2-1)) & n \text{ четно} \\ g((n-1)/2) & n \text{ нечетно} \end{cases} \in X \right). \tag{10.5}$$

Для второго игрока определение аналогично. Доказано, что существует множество X, для которого ни один из игроков не имеет выигрывающей стратегии.

Таким образом, следующее предложение противоречит аксиоме выбора:

Аксиома детерминированности.

В любой детерминированной игре один из игроков имеет выигрывающую стратегию. (10.6)

Пока не найдено никаких противоречий между аксиомой детерминированности и аксиомой зависимого выбора, и поэтому обычно они рассматриваются вместе.

Рассмотрим некоторые результаты теории множеств с аксиомой детерминированности. Во-первых, по-прежнему каждое бесконечное множество содержит счетное подмножество. Во-вторых, сохраняется теорема Кантора-Бернштейна и множества можно предупорядочить по мощности. Но теперь уже имеются множества несравнимой мощности.

В самом деле, пусть некоторое множество X не может быть вполне упорядочено. Тогда в нем имеется вполне упорядочиваемое подмножество максимальной мощности. Обозначим его Y. Но множество X_1 всех ординалов мощности множества Y имеет мощность большую, чем само Y. Таким образом, мощности X и X_1 несравнимы.

Упражнения к §10.5

10.5.1. Насчет бесконечных прямых произведений мы выяснили, что их существование эквивалентно аксиоме выбора. А вот как насчет прямых сумм?

10.5.2. Как Вам кажется, что важнее в существовании ненормальных игр без выигрывающих стратегий: бесконечность числа ходов или же бесконечность выбора альтернатив на каждом шагу? Можете ли Вы доказать детерминированность любой игры при конечности одного из этих множеств без использования аксиомы выбора?

10.5.3. В определении (10.5) создается впечатление, что второй игрок (моделируемый функцией g) играет без учета ходов первого. Объясните, почему не нужно усложнять данное определение.

10.5.4. Д. Гильберт предложил следующую переформулировку классической логики, чтобы избавиться от логических кванторов. Он рассмотрел кванторное выражение $\varepsilon x\, A(x)$, означающее такой объект x_0, для которого выполнено $A(x_0)$, если существует такой x, для которого $A(x)$, и произвольный объект, если $A(x)$ тождественно ложно. ε-символ Гильберта может быть описан следующими аксиомами:

$$A(t) \Rightarrow A(\varepsilon x\, A(x)),$$
$$(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow \varepsilon x\, A = \varepsilon x\, B.$$

Какое следствие влекут эти аксиомы в теории множеств? Изменится ли положение, если опустить вторую из них?

10.5.2 Ультрафильтры и структуры

Прежде всего определим язык конечных типов следующим образом. Исходными типами являются объектные типы и тип “логический”. Переменные имеются по каждому из типов, универс логического типа — $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$, универсы остальных объектных типов фиксированы. Определим три вида интерпретаций — стандартные, полустандартные и произвольные. При стандартной интерпретации универс сложного типа однозначно определяется через универсы его составляющих:

$$U_{(\tau_1,\ldots,\tau_n\to\pi)} = \mathrm{Func}(U_{\tau_1},\ldots,U_{\tau_n} \to U_\pi).$$

Очевидно, что если значениями функций является логический тип, то множество таких функций эквивалентно множеству соответствующих подмножеств.

При полустандартной интерпретации от равенства остается лишь вложение:

$$U_{(\tau_1,\ldots,\tau_n\to\pi)} \subset \mathrm{Func}(U_{\tau_1},\ldots,U_{\tau_n} \to U_\pi).$$

Таким образом, каждая функция остается функцией соответствующих аргументов и с соответствующими значениями, но уже не все функции представлены в нашей модели. Модели нестандартного анализа мы будем строить полустандартными, и тогда приведенная в 10.3 классификация получает полное, в том числе и терминологическое, обоснование.

При произвольной интерпретации универсы для всех типов задаются независимо, и для каждого сложного типа применение функций (предикатов) данного типа определяется отдельно через операцию Appl (применения функции к аргументам):

$$\zeta(F(X_1,\ldots,X_n)) = \mathsf{Appl}(\zeta(F),\zeta(X_1),\ldots,\zeta(X_n))$$

Произвольная интерпретация является у нас первым шагом на пути к полустандартной.[23]

Теорема 10.5. (Теорема Лося) *Пусть $\mathcal{A}$ — множество формул языка конечных типов, такое, что для каждого конечного подмножества $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ можно построить стандартную интерпретацию, где все $B \in \mathcal{B}$ истинны. Тогда имеется полустандартная интерпретация, в которой истинны все $A \in \mathcal{A}$.*

Доказательство. В качестве основного технического средства мы используем понятия *ультрафильтра* и *ультрапроизведения интерпретаций.*

Определение 10.5.1. *Фильтр* — множество $\mathcal{F}$ подмножеств некоторого множества I, такое, что:

1. $X \in \mathcal{F} \,\&\, X \subset Y \Rightarrow Y \in \mathcal{F}$.
2. $X \in \mathcal{F} \,\&\, Y \in \mathcal{F} \Rightarrow X \cap Y \in \mathcal{F}$.
3. $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

Ультрафильтр — такой фильтр, что для любого $X \subset I$ $X \in \mathcal{F} \vee \bar{X} \in \mathcal{F}$.

Содержательно множества из ультрафильтра могут интерпретироваться как большие, более того, как подавляющее большинство, такое, что пересечение любого конечного числа таких множеств все равно большое, а их дополнения — как маленькие.

Предложение 10.5.4. *Любой фильтр можно пополнить до ультрафильтра.*

Будем говорить, что множество X не противоречит фильтру $\mathcal{F}$, если ни для какого $Y \in \mathcal{F}$ $X \cap Y \neq \emptyset$.

Доказательство. Начнем с лемм.

[23] Понятия произвольной и полустандартной интерпретаций — единственное, что может быть ценно из данного параграфа в последующих главах книги. Разбирая функциональный язык λ-исчисления, мы будем интенсивно строить произвольные и полустандартные интерпретации.

Лемма 10.5.5. *Если $\mathcal{F}$ — фильтр, $X \subset I$, то либо X, либо $\bar{X}$ не противоречит $\mathcal{F}$.*

В самом деле, пусть и X, и $\bar{X}$ противоречат $\mathcal{F}$. Тогда найдутся такие $Y, Z \in \mathcal{F}$, что $X \cap Y = \emptyset$, $\bar{X} \cap Z = \emptyset$. Но тогда найдется одно такое $U = Y \cap Z$, что $U \in \mathcal{F}$, $X \cap U = \emptyset$ и $\bar{X} \cap U = \emptyset$. Значит, $(X \cap U) \cup (\bar{X} \cap U) = \emptyset$, но тогда по дистрибутивности

$$(X \cup \bar{X}) \cap U = I \cap U = \emptyset.$$

Но пустое множество в пересечении с универсом может давать лишь пустое множество, значит, $U = \emptyset$, чего не может быть, поскольку $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

Лемма 10.5.6. *Если $\mathcal{F}$ — фильтр, X — множество, не противоречащее $\mathcal{F}$, то найдется минимальный ультрафильтр, содержащий X и все элементы $\mathcal{F}$.*

Этот ультрафильтр строится элементарно: как множество множеств $\mathcal{F} \cup \{X \cap Y \mid Y \in \mathcal{F}\}$.

Вполне упорядочим множество 2^I.[24] Теперь трансфинитной индукцией построим ультрафильтр, расширяющий $\mathcal{F}$. Пусть $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$. На шаге $\alpha + 1$ берем первый элемент

$X \in 2^I$ (т.е. первое из подмножеств I), такой, что ни он, ни его дополнение не входят в $\mathcal{F}_\alpha$. Тогда, по лемме 10.5.5, либо он, либо его дополнение не противоречат $\mathcal{F}_\alpha$. И по лемме 10.5.6 можно построить минимальный фильтр, расширяющий $\mathcal{F}_\alpha$ и содержащий либо X, либо $\bar{X}$.

Конец доказательства.

Рассмотрим ультрафильтры над множеством натуральных чисел. Построить пример ультрафильтра очень легко: возьмем все множества, содержащие некоторое n_0. Фильтр, состоящий из всех множеств, содержащих некоторе x_0, называется *главным*. Мы показали, что есть ультрафильтр, расширяющий любой фильтр, а множество всех конечных множеств является фильтром. Значит, есть ультрафильтр, содержащий лишь бесконечные множества.[25] Но вот построить такой ультрафильтр никак не удается, и в конце концов было доказано, что:

Предложение 10.5.7. *В теории множеств нет такой формулы $A(X)$, что $\exists 1 X\, A(X)$ и такое X является неглавным ультрафильтром на $\mathbf{N}$.*

---

[24] Вот тот самый шаг, который делает существование нестандартной модели зависимым от конкретной формы теории множеств! Установлено, что избавиться от подобного шага невозможно в принципе, даже если I счетно.

[25] Но, конечно, не все: если и само X, и его дополнение бесконечны, то ультрафильтр содержит одно и только одно из них.

Говорят, что предикат истинен на большинстве элементов I, если множество истинности предиката принадлежит ультрафильтру над I.

Ультрафильтры применяются во многих тонких конструкциях современной топологии и функционального анализа. В логике они в основном используются в *ультрапроизведениях*. Прежде всего заметим, что прямое произведение моделей теории уже не является моделью классической логики. Рассмотрим, например, одноместный предикат P. Если $P(a) = \top, P(b) = \bot$, то по определению прямого произведения естественно положить $P(\langle a, b\rangle) = \langle \top, \bot\rangle$. Полбеды, что тогда модель получается недвузначной. Беда в том, что истинное во всех перемножаемых моделях утверждение может стать неистинным в произведении. Оба отмеченных недостатка устраняются следующей факторизацией.

Возьмем произвольный неглавный ультрафильтр $\mathcal{A}$ над X. Возьмем семейство моделей $(M_x)_{x\in X}$. Ультрапроизведение строится как прямое произведение $\prod_{i\in X} M_i$, факторизованное по отношению

$$\{(a, b) \mid \{i \mid a_i = b_i\} \in \mathcal{A}\}\,.$$

Таким образом, элементарная формула считается истинной на объектах из ультрапроизведения, если она истинна на их компонентах в большинстве перемножаемых моделей.

Докажем теперь, что ультрапроизведение моделей теории Th само является моделью теории Th. Для этого установим, что любая формула, а не только элементарная, истинна на ультрапроизведении тогда и только тогда, когда она истинна на большинстве компонент.

Предложение 10.5.8. Теорема об ультрапроизведениях. *Любая формула истинна в ультрапроизведении тогда и только тогда, когда она истинна на большинстве компонент.*

Доказательство. Действуем индукцией по длине формулы. Для конъюнкции и дизъюнкции индукционный шаг следует из замкнутости ультрафильтра относительно объединений и пересечений. Для отрицания достаточно заметить, что дополнение множества, не входящего в ультрафильтр, входит в него, так что отрицание неистинной формулы истинно. Импликация выражается через другие связки и отрицание. Остаются кванторы. $\forall x\, A(x)$ ложно в ультрапроизведении тогда и только тогда, когда найдется элемент ультрапроизведения $(a_i)_{i\in I}$, такой, что множество таких $i \in I$, что $M_i \models A(a_i)$, принадлежит ультрафильтру. Но если $\forall x\, A(x)$ ложно на большинстве компонент, то найдется элемент ультрафильтра $X \subset I$, такой, что для каждого $i \in X$ найдется a_i, при котором $A(a_i)$ ложно в M_i. Эти a_i по аксиоме выбора и дают искомый элемент ультрапроизведения (вне X определяем его значения произвольным образом.) Теперь для завершения доказательства достаточно заметить, что формула истинна на большинстве компонент ттт она не является ложной на большинстве компонент. $\square$

Итак, если все компоненты ультрапроизведения (и даже их большинство) являются моделями некоторой теории, то и само ультрапроизведение является ее моделью.

Итак, одной из моделей нестандартного анализа действительно является множество последовательностей стандартных действительных чисел, но эти последовательности отождествляются, если они совпадают на большинстве элементов.

В частности, бесконечно большие числа представляются бесконечно возрастающими последовательностями, если последовательность принимает лишь два значения (скажем, 0 и 1), то она равна одному из этих чисел (какому именно, зависит от ультрафильтра).

Глава 11

Естественный вывод в классической логике

11.1 О структуре математических доказательств

Семантические таблицы являются аппаратом проверки утверждений, и плохо работают в конкретных теориях. Это скорее чисто логическое средство. Математик *доказывает* утверждение, и даже построение контрпримера для него выглядит как частный случай доказательства, поскольку при этом он также опирается на теорию. При помощи семантических таблиц мы должны были бы заново воспроизвести модель теории, чтобы заняться доказательством или тем более контрпримером. Конечно, теорема об устранении сечений могла бы здесь помочь, но не при поиске контрпримера.

Рассмотрим типичные блоки математического доказательства. Оно начинается с формулировки доказываемого утверждения, которое чаще всего имеет вид "Все A, для которых выполнено B, обладают свойством C", или, что то же самое, "Если объект A таков, что B, то для него выполнено и C". Далее произносится ритуальная фраза типа "Возьмем произвольное x (A), такое, что B". К выбранному x применяются ранее доказанные теоремы, либо строятся вспомогательные объекты, к которым они опять-таки применяются. Порою появляются конструкции типа: "Докажем следующее вспомогательное утверждение", "Разберем по отдельности все возможные случаи", "Предположим противное ... Полученное противоречие доказывает теорему", "Аналогично предыдущему ... ", "Очевидно, что ... ". Очевидно, что замечания "Аналогично ... " и, аналогично ему, "Очевидно, что ... " чаще всего являются указаниями на дыру в доказательстве и неистощимым источником прямых ошибок и неточностей. А вот остальные конструкции необходимо представить в формальном виде.

Для начала проиллюстрируем на классических примерах, как эти конструкции взаимодействуют между собой. Известно, что математика как наука началась с доказательства Теэтета[1] несоизмеримости диагонали квадрата с его стороной.[2] Воспроизведем, в осовремененных терминах, но пользуясь лишь знаниями, известными во времена Теэтета, ее доказательство.

Пусть, напротив, некий отрезок α целое число раз укладывается и в стороне квадрата, и в его диагонали. Обозначим отношение длины стороны квадрата к α через n, а его диагонали — через m. Без ограничения общности можно считать, что одно из чисел n, m нечетно. В противном случае мы удвоили бы отрезок α и повторяли бы это удвоение до тех пор, пока они оба оставались бы четными. Далее, по теореме Пифагора, $n^2 + n^2 = 2n^2 = m^2$. Значит, квадрат m — четное число, и следовательно, само m четно. Значит, n нечетно, и квадрат его также нечетен. Но поскольку m четно, $m = 2 \cdot k$, и $m^2 = 4 \cdot k^2$. Следовательно, $2 \cdot n^2 = 4 \cdot k^2$, и сокращая на 2, получаем $n^2 = 2 \cdot k^2$ Значит, n — четное число, но это противоречит сделанному предположению, что среди n, m есть нечетное число. Полученное противоречие доказывает, что такого отрезка α быть не может.

Данное доказательство имеет сложную логическую структуру. Есть и приведение к противоречию, и доказательство вспомогательного результата (о том, что одно из чисел n, m может предполагаться нечетным), и использование ранее полученных теорем. Но один из приемов доказательства — разбор случаев — остался непримененным. Для того чтобы

---

[1]Как и во многих других случаях, практически невозможно установить, кому же принадлежит данный результат. Одни ссылаются на Филолая, другие утверждают, что он всего лишь разгласил результаты школы Пифагора, скрывавшиеся от профанов во избежание соблазна. Но Теэтет, во всяком случае, дал ясное и законченное доказательство.

[2] Многие считают, что ее началом была теорема Пифагора, но это, пожалуй, неточно по следующим причинам. Во-первых, теорема Пифагора имеет естественную и приятную формулировку, которая была известна вавилонянам за тысячу лет до Пифагора и установлена полуэмпирически. Во-вторых, неизвестно, что за доказательство ей дал сам Пифагор, но зато известно, насколько легко впасть в самообман при доказательстве такого приятного результата и не заметить дыр. Эмпирически же проверить несоизмеримость диагонали со стороной невозможно, теорема Теэтета уже чисто теоретический результат. Более того, для греков формулировка этой теоремы была и крайне неестественна, и неприятна, так что доказывать ее необходимо было строго и без пробелов, иначе ее бы не приняли.

проиллюстрировать и его, рассмотрим следующий результат, уже из XIX века.

Докажем, что имеются два иррациональных числа a, b, такие, что a^b рационально. Рассмотрим число $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. В 30-е годы XX века было дано весьма сложное доказательство того, что это число иррационально, но в XIX веке это было неизвестно. Тем не менее уже тогда, конечно же, было известно, что это число либо рационально, либо иррационально. Разберем оба этих случая по отдельности.

Пусть $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ рационально. Тогда искомые a, b уже найдены и оба равны $\sqrt{2}$. Пусть теперь $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ иррационально. Тогда положим $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $b = \sqrt{2}$. Тогда

$$a^b = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2.$$

Итак, в любом случае искомые a, b существуют, что и требовалось доказать.

Подытожим

- Математическое доказательство состоит из элементарных шагов, в каждом из которых мы ссылаемся лишь на ранее доказанные либо предположенные факты.

- Доказательство может содержать *вспомогательные выводы*, начинающиеся с временных предположений, или *допущений*, действующих лишь внутри данного вспомогательного вывода. Соответственно, и результаты, полученные внутри вспомогательного вывода, справедливы лишь условно, лишь тогда, когда выполнены допущения.

- И основное доказательство, и вспомогательные выводы начинаются с постановки цели (того, что требуется доказать), и завершаются в тот момент, когда мы приходим к искомой цели.

- Внутри вспомогательного вывода некоторые переменные могут быть объявлены произвольными.

11.2 Правила естественного вывода

Прежде чем дать формальное определение естественного вывода, проиллюстрируем на примерах то представление, в котором он используется в нашем пособии и в упражнениях. После появления языков программирования такой способ введения сложных формальных понятий перестал быть экзотикой. Никто не пытается сначала дать полное формальное определение языка C++, а уж затем показывать программы на этом языке. А сложность концепций логики и языков высокого уровня одна и та же.

11.2.1 Общая структура. Импликация и конъюнкция

Правила естественного вывода группируются по логическим связкам, которые они рассматривают, и делятся на *прямые* и *косвенные*. Прямое правило позволяет перейти от формул к формулам, например, правило применения $\Rightarrow$, обычно называемое "*правилом извлечения следствий*" или традиционным латинским именем *modus ponens*,

$$\frac{A \qquad A \Rightarrow B}{B}$$

позволяет перейти от формул A и $A \Rightarrow B$ к формуле B. Второе из правил, касающихся импликации, правило введения $\Rightarrow$, обычно называемое *правилом дедукции*, косвенное, оно опирается на целый вспомогательный вывод:

$$\frac{\begin{array}{l} * \, A \\ \left| \begin{array}{l} \ldots \\ B \end{array} \right. \end{array}}{A \Rightarrow B}$$

Вспомогательный вывод (или *подвывод*) начинается с *допущения*, отмеченного звездочкой, и заканчивается *результатом*. Допущение временно принимается в качестве истины и действует внутри данного вспомогательного вывода. Сам вспомогательный вывод может состоять из многих шагов, включать вложенные вспомогательные выводы (которые, таким образом, образуют древовидную, или блочную, структуру, хорошо известную Вам из языков программирования. На самом деле она была заимствована языками программирования из логики). Он помечается вертикальной чертой слева, чтобы отметить, что все, что записано внутри него, верно лишь относительно, и знать, до каких пор можно пользоваться и допущением, и сделанными из него заключениями. Как только вертикальная черта заканчивается, все, что было доказано внутри подвывода, использовано быть не может. Подвывод может быть использован лишь как целое, правилом косвенного заключения, да и оно имеет доступ лишь к его допущению и результату. А вот во внутренние подвыводы результаты, полученные в объемлющих, могут переноситься практически всегда, воспрепятствовать этому могут лишь требования, касающиеся произвольных переменных. Эта концепция опять-таки была заимствована языками программирования, и значение переменной, присвоенное в объемлющем блоке, может быть использовано и во внутреннем, если она не переописана в нем как локальная переменная этого внутреннего блока.

Правило дедукции говорит, что для доказательства следствия нужно предположить посылку и в этом предположении доказать заключение. После этого само следствие уже будет доказано *абсолютно*, без всяких допущений.

Как видно, для импликации были два правила: правило, позволяющее использовать доказанную импликацию, и правило, позволяющее доказывать импликацию: правило удаления и правило введения, *разбирающее* и *собирающее* правило. Так же устроены и правила для других связок. Более того, для импликации видно, что разбирающее правило в некотором отношении является следствием собирающего: если из A можно вывести B, то получив A, имеем право заключить и B. Такие наблюдения ценны в прикладной, да и в чистой математике, оно далее использовано в нашем курсе при рассмотрении вопроса об окольных путях в доказателствах и их устранении.

Теперь добавим правила для конъюнкции, которые гораздо проще и очевиднее:

$$\begin{array}{cc} \text{Соединение} & \text{Разъединение} \\ \dfrac{A \quad B}{A \,\&\, B} & \dfrac{A \,\&\, B}{A \quad B} \end{array}$$

При помощи этих четырех правил можно привести первый пример: вывод формулы $(A \Rightarrow B) \,\&\, (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$. Построим этот вывод постепенно.

Итак, нужно доказать импликацию. Для этого необходимо предположить посылку и вывести ее заключение.

$$\begin{array}{l} * \; (A \Rightarrow B) \,\&\, (B \Rightarrow C) \\ \left| \begin{array}{l} \\ \ldots \\ \\ A \Rightarrow C \end{array} \right. \\ (A \Rightarrow B) \,\&\, (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C) \end{array}$$

Из допущения можно сделать непосредственные выводы.

$$
\begin{array}{l}
* \ (A \Rightarrow B) \ \& \ (B \Rightarrow C) \\
\left| \begin{array}{l} A \Rightarrow B \\ B \Rightarrow C \\ \dots \\ A \Rightarrow C \end{array} \right. \\
(A \Rightarrow B) \ \& \ (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)
\end{array}
$$

А теперь, поскольку вновь необходимо доказать импликацию, нужно заводить еще один подвывод, предполагать ее посылку A и выводить ее заключение C. Но из A по *modus ponens* следует B, а из B — C. В итоге получаем

$$
\begin{array}{l}
* \ (A \Rightarrow B) \ \& \ (B \Rightarrow C) \\
\left| \begin{array}{l} A \Rightarrow B \\ B \Rightarrow C \\ * \ A \\ \left| \begin{array}{l} B \\ C \end{array} \right. \\ A \Rightarrow C \end{array} \right. \\
(A \Rightarrow B) \ \& \ (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)
\end{array}
$$

И на самом деле вывод пишется с двух сторон, поскольку нужно иметь в виду и данные, и цель.[3]

11.2.2 Дизъюнкция и разбор случаев

Теперь рассмотрим правила для дизъюнкции. Задача их корректного определения несколько сложнее, хотя основной способ рассуждений, базирующийся на дизъюнкции, известен еще со времен Аристотеля. Это так называемая *конструктивная дилемма*.

Если $A \vee B$, и из A следует C, а из B следует D, то $C \vee D$.

Например, если все живущие в Вайвоже — удмурты или русские, все удмурты рыжие, а все русские — русые, то все жители Вайвожа — рыжие или русые.

[3] Нужно помнить известную шутку: "Дурак начинает решать задачу с начала, умный — с конца, а программист — с середины".

На язык естественного вывода конструктивная дилемма переводится как следующее правило:

Конструктивная дилемма:

$$\begin{array}{c|c|c} & * A & * B \\ A \vee B & \cdots & \cdots \\ & C & D \\ \hline \multicolumn{3}{c}{C \vee D} \end{array}$$

Но при чисто формальном рассмотрении данного правила возникает ряд частных, однако тонких вопросов. Что делать, если C и D совпадают? Обязательно ли записывать их в том же порядке? Далее, а как вывести $C \vee D$ из C? Хоть последний переход и кажется ненужным, но он семантически верен, а значит, обязан быть предусмотренным. Поэтому в определении естественного вывода правило конструктивной дилеммы разбивается на три, применениями которых оно может быть заменено:

Правило разбора случаев:

$$\begin{array}{c|c|c} & * A & * B \\ A \vee B & \cdots & \cdots \\ & C & C \\ \hline \multicolumn{3}{c}{C} \end{array}$$

Правила ослабления:

$$\frac{A}{A \vee B} \qquad \frac{B}{A \vee B}$$

Покажем, как при помощи этих двух правил получить правило конструктивной дилеммы. Пусть имеются $A \vee B$ и выводы Σ_1: C из A и Σ_2: D из B. Тогда можно вывести $C \vee D$.

Конструктивная дилемма:

$$\begin{array}{c|c|c} & * A & * B \\ & \Sigma_1 & \Sigma_2 \\ A \vee B & C & D \\ & C \vee D & C \vee D \\ \hline \multicolumn{3}{c}{C \vee D} \end{array}$$

Таким образом, правило конструктивной дилеммы заменяется несколькими фиксированными шагами вывода. Такие правила называются *выводимыми* в исчислении.

Первый из рассмотренных нами примеров на самом деле показывает,что и известное *правило цепного заключения*, или *правило силлогизма*, также выводимо:

$$\frac{A \Rightarrow B \quad B \Rightarrow C}{A \Rightarrow C}$$

Естественно, что правила, для которых установлена выводимость, могут свободно применяться в выводе. Они не так уж сильно сокращают его длину, но значительно увеличивают понятность и упрощают структуру.

11.2.3 Отрицание. Приведение к абсурду и “от противного”. $A \vee \neg A$

Теперь перейдем к правилам для отрицания. Чтобы доказать отрицание $\neg A$, необходимо *предположить* A и вывести из него противоречие. Только тогда мы можем с уверенностью заявить, что A ложно Данный способ рассуждения называется *приведением к нелепости* либо по-латыни reductio ad absurdum. Такой способ, конечно же, противоречит общепринятому в демагогической практике (в частности, в выступлениях наших депутатов) приему: чтобы опровергнуть A, нужно просто его проигнорировать или заявить, что этого быть не может, потому что этого не может быть; чтобы доказать A, нужно прежде всего предположить само A. Математик не имеет права пользоваться грязными приемами, стремясь доказать A, он имеет право предположить лишь *противное*, т. е. самый нежелательный для него случай. А второе правило, касающееся отрицания, несколько необычно: это просто правило снятия двойного отрицания.

Reductio ad absurdum:

$$\begin{array}{l} * \; A \\ \left| \begin{array}{l} \dots \\ B \\ \neg B \end{array} \right. \\ \hline \quad \neg A \end{array}$$

Двойное отрицание:

$$\frac{\neg\neg A}{A}$$

Рассуждения, в которых применяется правило снятия двойного отрицания, называются *непрямыми рассуждениями* или *доказательствами от противного*. Порою их путают с приведением к абсурду, но логический статус этих рассуждений совершенно разный: приведение к абсурду является определением отрицания, а рассуждение от противного — уже использование нетривиальных его свойств. Докажем теперь важное выводимое правило: из противоречия следует все, что угодно.

Пусть доказаны A и $\neg A$. Выведем из них произвольное B.

$$\begin{array}{l} * \; \neg B \\ \left| \begin{array}{l} A \\ \neg A \end{array} \right. \\ \neg\neg B \\ B \end{array} \tag{11.1}$$

Итак, доказываем B от противного. Предполагаем его отрицание и, воспользовавшись уже имеющимся противоречием, приходим к $\neg\neg B$, а оттуда к B. Данный трюк нужен прежде всего затем, чтобы установить, что правило “из лжи следует все, что угодно” (ex falso quodlibet средневековых логиков) не нуждается в том, чтобы быть постулированным в нашей системе. Но пользоваться, конечно, теперь мы им будем.

Поскольку из любого противоречия следует все, что угодно, все противоречия для нас равноправны, и в качестве обозначения произвольного противоречия возьмем логическую константу $\perp$ (**ложь**).

Докажем теперь важную теорему, а именно: закон исключенного третьего. Тут даже не ясно сначала, с какой стороны подступиться, поскольку дизъюнкцию вроде бы надо выводить при помощи разбора случаев, а разбирать нечего. Но рассуждая от противного, удается запутаться в противоречиях, из которых нет другого выхода, кроме того, что признать, что закон исключенного третьего не может быть ложным.

$$\begin{array}{l} * \neg(A \vee \neg A) \\ \left|\begin{array}{l} * A \\ |A \vee \neg A \ ?! \\ \neg A \\ A \vee \neg A \ ?! \end{array}\right. \\ \neg\neg(A \vee \neg A) \\ A \vee \neg A \end{array} \tag{11.2}$$

Получающиеся противоречия помечены знаком ?! То, что столь простая формула имеет столь неестественное доказательство, на самом деле достаточно глубокий факт. Естественный вывод гораздо более тонкий инструмент, чем семантические таблицы, обладающий большой аналитической силой и легко модифицируемый. Здесь мы получаем первый сигнал о том, что не все тавтологии классической логики равноправны, что некоторые из них могут иметь более высокий статус, чем другие.

11.2.4 Некоторые полезные выводимые правила

Рассмотрим еще несколько широко применимых выводимых правил. Во-первых, опираясь на наше доказательство логического закона $A \vee \neg A$, можно в любой момент разбирать случаи A и $\neg A$. Далее, пользуясь тем, что из лжи следует все, что угодно, можно обосновать правило, известное нам как сокращающее в семантических таблицах:

$$\frac{A \vee B \quad \neg A}{B}$$

Как известно, этим правилом часто пользовался Шерлок Холмс, отбрасывая все возможные случаи, пока не оставался правильный. А из приведения к нелепости следует правило modus tollens традиционной логики:

$$\frac{A \Rightarrow B \quad \neg B}{\neg A}$$

После того, как на практическом занятии разобраны их выводы, выводимыми правилами можно свободно пользоваться при решении задач.

11.2.5 Кванторы

Перейдем теперь к кванторам. Как доказывается утверждение вида

$$\forall x(A(x) \Rightarrow B(x))?$$

Берется "произвольное x, такое, что $A(x)$" и для него доказывается $B(x)$. В заключительной части этого приема легко узнать правило дедукции для доказательства импликации $A(x) \Rightarrow B(x)$. Но вот что такое "произвольное x?" Ведь произвольного объекта вообще не бывает, любой взятый объект конкретен.

На самом деле и здесь мы сталкиваемся с одной из важнейших сторон математической абстракции. Она может включать в себя добровольный отказ от того, чтобы пользоваться некоторой информацией. В частности, в части 1, «**Язык математики**» разбиралось определение равенства Лейбница, которое, по сути дела, говорит, что мы не имеем права пользоваться какими-либо свойствами, различающими равные предметы. Здесь происходит аналогичное самоограничение.

> Говоря, что объект x произволен, мы лишаем себя права пользоваться какими-либо ранее установленными фактами о данном объекте.

Правила, касающиеся квантора $\exists$, следующие:

Доказательство на примере:	Вспомогательная константа:
$\dfrac{A(y \mid t)}{\exists x\, A(y \mid x)}$	$\dfrac{\exists x\, A(x)}{A(c_{n+1})}$

Отметим две тонкости, которые имеются в этих правилах. Во-первых, как и в семантических таблицах, вспомогательная константа должна быть девственной, отсутствующей и в нашей сигнатуре, и в ранее построенной части вывода. Но использоваться она может *лишь внутри того вспомогательного вывода, в котором была введена.* Когда этот подвывод заканчивается, заканчивается и ее область действия. Во-вторых, в правиле доказательства на примере подстановка должна прослеживаться в *обратном направлении*, от результата к примеру. Так что не обязательно все вхождения терма t в посылку должны заменяться на связываемую переменную x. В частности, корректен переход по этому правилу от $z = z$ к $\exists x(z = x)$, поскольку $z = z$ может рассматриваться как результат подстановки z вместо y в $z = y$.

Правила для всеобщности следующие:

Обобщение:

$$\begin{array}{l} * \; x \text{ произволен} \\ \left| \begin{array}{l} \ldots \\ A(x) \end{array} \right. \\ \hline \qquad \forall x\, A(x) \end{array}$$

Переход от общего к частному:

$$\frac{\forall x\, A(x)}{A(x \mid t)}$$

Во вспомогательном выводе правила обобщения *не могут использоваться никакие ранее появившиеся формулы, содержащие x свободно.* Конечно же, выводы, касающиеся произвольной переменной x, делать можно и нужно, но помогает при этом лишь правило перехода от общего к частному: доказанное общее утверждение, содержащее y связанно, может быть использовано при любом конкретном его значении, в том числе и при x.

Рассмотрим пример доказательства с кванторами. Докажем формулу

$$\forall x(A(x) \Rightarrow B(x)) \;\&\; \exists x\, A(x) \Rightarrow \exists x\, B(x).$$

$$\begin{array}{l} * \;\; \forall x(A(x) \Rightarrow B(x)) \;\&\; \exists x\, A(x) \\ \left| \begin{array}{l} \forall x(A(x) \Rightarrow B(x)) \quad \exists x\, A(x) \\ A(c_1) \\ A(c_1) \Rightarrow B(c_1) \\ B(c_1) \\ \exists x\, B(x) \end{array} \right. \\ \forall x(A(x) \Rightarrow B(x)) \;\&\; \exists x\, A(x) \Rightarrow \exists x\, B(x) \end{array}$$

В этом доказательстве имеется единственная тонкость. Пока не появилось c_1, не стоит переходить от общего к частному, чтобы не скомпрометировать эту константу преждевременно. Следующее доказательство напоминает наш первый пример из данной главы, но с добавлением квантора всеобщности.

$$
\begin{array}{l}
* \ \forall x(A(x) \Rightarrow B(x)) \ \& \ \forall x(B(x) \Rightarrow C(x)) \\
\begin{array}{|l}
\forall x(A(x) \Rightarrow B(x)) \quad \forall x(B(x) \Rightarrow C(x)) \\
* \ z \text{ произвольно} \\
\begin{array}{|l}
A(z) \Rightarrow B(z) \\
B(z) \Rightarrow C(z) \\
* \ A(z) \\
\begin{array}{|l}
B(z) \\
C(z)
\end{array} \\
A(z) \Rightarrow C(z)
\end{array} \\
\forall x(A(x) \Rightarrow C(x))
\end{array} \\
\forall x(A(x) \Rightarrow B(x)) \ \& \ \forall x(B(x) \Rightarrow C(x)) \Rightarrow \forall x(A(x) \Rightarrow C(x))
\end{array}
$$

В этом доказательстве интересно соотношение произвольных и непроизвольных переменных. z объявляется как произвольное, остается произвольным до того момента, когда открывается еще один подвывод, в нем оно уже не произвольно, поскольку от него зависит допущение, но после его завершения z вновь становится произвольным. Формулы типа $A(z) \Rightarrow B(z)$ не нарушают произвольности z, поскольку следуют из посылок, не зависящих от значения z.

А вот следующий пример иллюстрирует типичную ошибку: мы “докажем”, что поскольку все люди — мужчины или женщины, то все люди — мужчины или все люди — женщины.

$$
\begin{array}{l}
* \ \forall x(A(x) \vee B(x)) \\
\begin{array}{|l}
* \ x \text{ произвольно} \\
\begin{array}{|c}
A(x) \vee B(x) \\
\begin{array}{ll}
* \ A(x) & * \ B(x) \\
\begin{array}{|l}
A(x) \\
\forall x\, A(x) \\
\forall x\, A(x) \vee \forall x\, B(x)
\end{array} &
\begin{array}{|l}
B(x) \\
\forall x\, B(x) \\
\forall x\, A(x) \vee \forall x\, B(x)
\end{array}
\end{array} \\
\forall x\, A(x) \vee \forall x\, B(x)
\end{array} \\
\forall x\, A(x) \vee \forall x\, B(x)
\end{array} \\
\forall x(A(x) \vee B(x)) \Rightarrow \forall x\, A(x) \vee \forall x\, B(x)
\end{array}
$$

Здесь два структурных нарушения: во-первых, допущение, что x произвольно, используется не в том же подвыводе, а во вложенных, и вовторых, в этих вложенных подвыводах допущения уже зависят от x. Если первое из нарушений хотя бы не противоречит самому духу системы, то второе, безусловно, противоречит всему.

Упражнения к §11.2

11.2.1. Рассмотрите следующее исправление, внесенное в предыдущее доказательство студенткой Примерной:

$$
\begin{array}{l}
* \ \forall x(A(x) \vee B(x)) \\
\begin{array}{|l}
\qquad\qquad\qquad\qquad A(x) \vee B(x) \\
\begin{array}{ll}
* \ A(x) & * \ B(x) \\
\begin{array}{|l}
* \ x \text{ произвольно} \\
\begin{array}{|l} A(x) \\ \forall x\, A(x) \end{array}
\end{array}
&
\begin{array}{l}
* \ x \text{ произвольно} \\
\begin{array}{|l} B(x) \\ \forall x\, B(x) \end{array}
\end{array}
\end{array} \\
\qquad\qquad \forall x\, A(x) \vee \forall x\, B(x)
\end{array} \\
\forall x(A(x) \vee B(x)) \Rightarrow \forall x\, A(x) \vee \forall x\, B(x)
\end{array}
$$

11.2.2. Докажите следующие формулы:

1. $A \mathbin{\&} (B \vee C) \Rightarrow (A \mathbin{\&} B) \vee (A \mathbin{\&} C)$
2. $(A \mathbin{\&} B) \vee (A \mathbin{\&} C) \Rightarrow A \mathbin{\&} (B \vee C)$
3. $A \vee (B \mathbin{\&} C) \Rightarrow (A \vee B) \mathbin{\&} (A \vee C)$
4. $(A \vee B) \mathbin{\&} (A \vee C) \Rightarrow A \vee (B \mathbin{\&} C)$
5. $(A \Rightarrow B \vee C) \mathbin{\&} (C \Rightarrow D) \mathbin{\&} (B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow D)$
6. $(A \mathbin{\&} B \Rightarrow C) \mathbin{\&} (E \Rightarrow A) \mathbin{\&} (G \Rightarrow B) \mathbin{\&} (\neg G \Rightarrow B) \Rightarrow (E \Rightarrow C)$
7. $(A \mathbin{\&} B \Rightarrow C \vee D) \mathbin{\&} \neg D \Rightarrow (\neg C \mathbin{\&} A \Rightarrow \neg B)$
8. $(A \Rightarrow B \vee C) \Rightarrow (A \Rightarrow B) \vee (A \Rightarrow C)$
9. $(A \mathbin{\&} B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C) \vee (B \Rightarrow C)$
10. $(A \vee B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C) \mathbin{\&} (B \Rightarrow C)$
11. $((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$
12. $((A \Rightarrow B) \Rightarrow C) \mathbin{\&} ((B \Rightarrow A) \Rightarrow D) \Rightarrow C \vee D$

11.2.3. Докажите следующие формулы:

1. $\exists x(A(x) \mathbin{\&} B(x)) \Rightarrow \exists y\, A(y) \mathbin{\&} \exists z\, B(z)$
2. $\forall x(\, A(x) \vee B(x)) \mathbin{\&} \exists x\, \neg A(x) \Rightarrow \exists x\, B(x)$
3. $\exists x(A(x) \vee B(x)) \mathbin{\&} \forall x\, \neg A(x) \Rightarrow \forall x\, B(x)$
4. $\forall x(A(x) \vee B(x)) \mathbin{\&} \exists x(A(x) \Rightarrow C(x)) \mathbin{\&} \forall x(B(x) \Rightarrow C(x)) \Rightarrow \exists x\, C(x)$
5. $\forall x(A(x) \vee B(x)) \mathbin{\&} \forall x(A(x) \Rightarrow C(x)) \mathbin{\&} \forall x(B(x) \Rightarrow D(x)) \Rightarrow \forall x(C(x) \vee D(x))$
6. $\exists y\, A(y) \vee \exists z\, B(z) \Rightarrow \exists x(A(x) \vee B(x))$

11.3 Естественный вывод как граф

Здесь дается строгое определение естественного вывода через графы. При этом выявляются еще два правила, обычно скрытые в традиционной формулировке вывода как последовательности формул.

Прежде всего опишем типы вершин и ребер, присутствующих в графе вывода. Вершины делятся на *формулы*, *описания*, *подвыводы* и *правила*. Вершине-формуле приписывается формула; вершине-описанию — переменная либо вспомогательная константа; вершине-правилу — наименование этого правила. Формулы и описания часто объединяются под именем *информационных вершин*. Далее, ребра делятся на три типа. *Использующие* выходят из информационной вершины или подвывода и заканчиваются в правиле; *порождающие* — выходят из правила и заканчиваются в информационной вершине; *структурные*, или *подчиняющие* — выходят из подвывода и заканчиваются в информационной вершине или подвыводе. Среди структурных ребер выделяются ребра *допущение* и *результат*. На структурные ребра накладываются следующие

Условия иерархии

1. Каждая информационная вершина является концом одного и только одного структурного ребра.

2. Подграф, состоящий из подвыводов, является деревом. Корень этого дерева называется *главным выводом*.

3. В каждом подвыводе, кроме главного, начинается ровно одно ребро “допущение”. В каждом подвыводе начинается ровно одно ребро “результат”.

Таким образом, однозначно определяется подвывод, которому подчинена данная формула. Вершину, в которую ведет ребро “допущение”, называют *допущением* данного подвывода; вершину, в которую ведет ребро “результат”, — его *результатом*. Результат главного подвывода называют *теоремой*. Формулы не могут быть связаны друг с другом непосредственно, они связываются посредством правил. Вершины, соединенные с правилом использующим ребром, называются *посылками* данного правила, а вершины, в которые входят порождающие ребра, его *заключениями*. Посылки *используются* данным правилом, а заключения *порождаются* им. Структура взаимосвязи правил с информационными вершинами и иерархией подвыводов описывается следующими условиями.

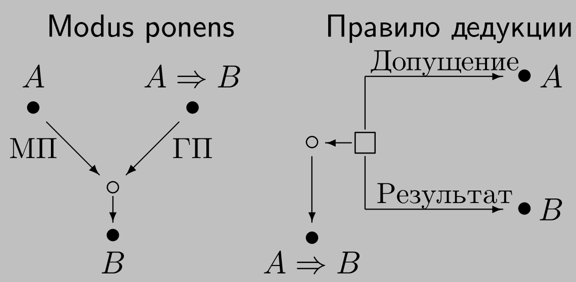
Условия структуры

1. Каждая информационная вершина, кроме допущений, является заключением одного и только одного правила.
2. Допущения не являются заключениями никакого правила.
3. Каждая информационная вершина, кроме результатов, используется не более чем одним правилом.
4. Результаты не используются никаким правилом.
5. Посылки и заключения всех правил, кроме правила передачи информации, подчинены одному и тому же подвыводу.
6. Граф вывода не имеет циклов.

Итак, лишь правило передачи информации (ППИ) может переносить формулы из одного подвывода в другой; все остальные действуют строго внутри некоторого подвывода; данный подвывод называется *подвыводом* правила.

Правила вывода описываются через их окрестности в графе вывода. Эта окрестность включает посылки и заключения, а также допущения и результаты посылок, если посылки являются подвыводами. Для правила передачи информации она включает также подвыводы, которым подчинены посылка и заключение.

Опишем применения правил для импликации.



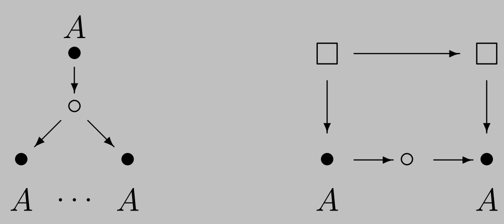
Здесь прямоугольничек обозначает подвывод, кружочек означает правило. К ребрам приписаны их типы. ‘МП’ означает малую посылку, ‘ГП ’ — главную посылку, ‘Допущение’ — допущение вспомогательного вывода, ‘Результат’ — его результат.

Правила для других связок описываются аналогично.

Дополнительным условием применения правила вспомогательной константы является то, что вводимая в нем вспомогательная константа отличается от любых констант, вводимых другими правилами. Далее, вспомогательная константа не может входить в допущение или результат соответствующего подвывода. Таким образом, она не может быть вынесена наружу.

Еще два *структурных правила вывода* выделяются именно в графовом представлении, хотя имеют достаточно ясное значение и неявно подразумеваются в традиционных определениях вывода. Это

Правило размножения Правило передачи информации



Первое из них имеет произвольное (≥ 1) число заключений, повторяющих ту же формулу, что была в посылке. Без него невозможно вывести $A \Rightarrow A$, поскольку одна и та же вершина не может быть и допущением, и результатом. Второе жизненно важно для взаимосвязи между подвыводами. На него накладывается следующее ограничение.

> Передаваемая формула A не может свободно содержать переменной, объявленной произвольной в подвыводе, куда она передается.

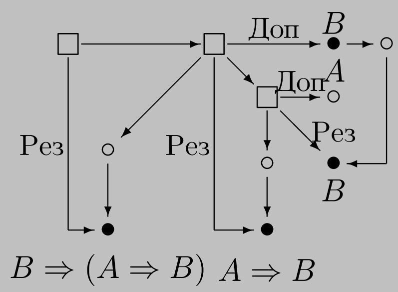
Выводом называется граф, удовлетворяющий всем перечисленным условиям, и такой, что окрестность каждого применения правила имеет соответствующий вид. Итак, правила задают условия на *локальную правильность* переходов, и она должна быть поддержана *глобальной правильностью* структуры вывода.

11.4 Правила формулировки отрицаний и согласованность с классической истинностью

Приведем выводы ряда формул, доказываемых достаточно искусственно, но необходимых для того, чтобы убедиться, что понятие естественного вывода действительно отражает классическую истинность. Далее, их выводы позволят в дальнейшем „отделить овец от козлищ“: результаты, доказываемые прямо, от результатов, требующих косвенного доказательства от противного.

Прежде всего убедимся, что из заданных значений истинности составляющих формул следует истинность либо ложность сложной формулы.

Например, $A \,\&\, \neg B \Rightarrow A \vee B$. Здесь, предположив $A \,\&\, \neg B$ и получив из него A, по правилу ослабления можно немедленно вывести $A \vee B$. На самом деле $\neg B$ оказывается просто ненужным. Столь же тривиально доказывается $B \Rightarrow A \vee B$. Далее, $A \,\&\, B \Rightarrow A \,\&\, B$ является тавтологией в любом смысле этого слова. Для установления $\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ достаточно воспользоваться правилом *ex falso quodlibet*. $B \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ требует всего лишь аккуратного оформления, которое и проделаем в виде графа:



Здесь видно, что во внутренний вспомогательный вывод с допущением B передается допущение внешнего вспомогательного вывода при помощи правила передачи информации. Не намного труднее и доказательство $\neg A \Rightarrow \neg(A \,\&\, B)$. Здесь достаточно лишь корректно распорядиться правилом приведения к нелепости.

$$
\begin{array}{l}
* \neg A \\
\left| \begin{array}{l} * A \,\&\, B \\ \left| \begin{array}{l} A \\ \bot \end{array} \right. \\ \neg(A \,\&\, B) \end{array} \right. \\
\neg A \Rightarrow \neg(A \,\&\, B)
\end{array}
$$

$\neg A$ проносится во внутренний вывод при помощи правила передачи информации. Интереснее вывод $\neg A \,\&\, \neg B \Rightarrow \neg(A \vee B)$.

$$
\begin{array}{l}
* \neg A \,\&\, \neg B \\
\left| \begin{array}{l} \neg A \quad \neg B \\ * A \vee B \\ \left| \begin{array}{l} \quad * A \quad\; * B \\ \quad |\bot \qquad |\bot \\ \qquad\quad \bot \end{array} \right. \\ \neg(A \vee B) \end{array} \right. \\
\neg A \,\&\, \neg B \Rightarrow \neg(A \vee B)
\end{array}
$$

и вывод $A \mathbin{\&} \neg B \Rightarrow \neg(A \Rightarrow B)$.

$$\begin{array}{l} * \; A \mathbin{\&} \neg B \\ \begin{array}{|l} A \quad \neg B \\ * \; A \Rightarrow B \\ \begin{array}{|l} B \\ \perp \end{array} \\ \neg(A \Rightarrow B) \end{array} \\ A \mathbin{\&} \neg B \Rightarrow \neg(A \Rightarrow B) \end{array}$$

А теперь докажем правила формулировки отрицаний. Каждое из них является эквивалентностью и требует доказательства и в ту, и в другую сторону. В одну сторону — от отрицаний частей к отрицанию целого — они по сути дела уже доказаны для пропозициональных связок. $(\neg A \vee \neg B) \Rightarrow \neg(A \mathbin{\&} B)$ легко доказать самим, базируясь на уже доказанных фактах); докажем их для кванторов.

$$\begin{array}{l} * \;\; \exists x \, \neg A(x) \\ \begin{array}{|l} \neg A(c_1) \\ * \;\; \forall x \, A(x) \\ \begin{array}{|l} A(c_1) \\ \perp \end{array} \\ \neg \, \forall x \, A(x) \end{array} \\ \exists x \, \neg A(x) \Rightarrow \neg \, \forall x \, A(x) \end{array} \qquad \begin{array}{l} * \;\; \forall x \, \neg A(x) \\ \begin{array}{|l} * \;\; \exists x \, A(x) \\ \begin{array}{|l} A(c_1) \\ \neg A(c_1) \\ \perp \end{array} \\ \neg \, \exists x \, A(x) \end{array} \\ \forall x \, \neg A(x) \Rightarrow \neg \, \exists x \, A(x) \end{array}$$

В обоих этих примерах правило передачи информации применяется корректно: вспомогательная константа может быть использована во внутреннем подвыводе; во внутренний подвывод может быть пронесена замкнутая формула. Импликации в обратном направлении порою требуют косвенных доказательств. Проведем все их выводы явно, чтобы выделить прямые и косвенные. Но конечно же, приемы, которые в этих выводах применяются, хорошим стилем оформления не назовешь. Они требуются для того, чтобы обосновать общепринятые правила и в дальнейшем пользоваться уже ими.

$$
\begin{array}{l}
\ast\ \neg(A \vee B)\\
\mid\ \ast\ A\\
\mid\ \mid\ A \vee B\\
\mid\ \mid\ \bot\\
\mid\ \neg A\\
\mid\ \ast\ B\\
\mid\ \mid\ A \vee B\\
\mid\ \mid\ \bot\\
\mid\ \neg B\\
\mid\ \neg A \mathbin{\&} \neg B\\
\neg(A \vee B) \Rightarrow \neg A \mathbin{\&} \neg B
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\ast\ \neg(A \Rightarrow B)\\
\mid\ \ast\ \neg A\\
\mid\ \mid\ A \Rightarrow B\\
\mid\ \mid\ \bot\\
\mid\ \neg\neg A\\
\mid\ A\\
\mid\ \ast\ B\\
\mid\ \mid\ A \Rightarrow B\\
\mid\ \mid\ \bot\\
\mid\ \neg B\\
\mid\ A \mathbin{\&} \neg B\\
\neg(A \Rightarrow B) \Rightarrow A \mathbin{\&} \neg B
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
\ast\ \neg(A \mathbin{\&} B) & & \\
\mid\ A \vee \neg A & & \\
\mid\ \ \ast\ A & & \ast\ \neg A\\
\mid\ \mid\ B \vee \neg B & & \\
\mid\ \mid\ \ \ast\ B & \ast\ \neg B & \\
\mid\ \mid\ \mid\ A \mathbin{\&} B & & \mid\ \neg A \vee \neg B\\
\mid\ \mid\ \mid\ \bot & \mid\ \neg A \vee \neg B & \\
\mid\ \mid\ \mid\ \neg A \vee \neg B & & \\
\mid\ \mid\ \neg A \vee \neg B & & \\
\neg(A \mathbin{\&} B) \Rightarrow \neg A \vee \neg B & &
\end{array}
$$

Из данных трех выводов полтора — косвенных. Третий целиком косвенный, и красивее всего оформляется через использование $A \vee \neg A$, во втором косвенным является вывод A. Осталось рассмотреть кванторы.

$$
\begin{array}{l}
\ast\ \neg\,\exists x\, A(x)\\
\mid\ \ast\ x\ \text{произвольно}\\
\mid\ \mid\ \ast\ A(x)\\
\mid\ \mid\ \mid\ \exists x\, A(x)\\
\mid\ \mid\ \mid\ \bot\\
\mid\ \mid\ \neg A(x)\\
\mid\ \forall x\, \neg A(x)\\
\neg\,\exists x\, A(x) \Rightarrow \forall x\, \neg A(x)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\ast\ \neg\,\forall x\, A(x)\\
\mid\ \ast\ \neg\,\exists x\, \neg A(x)\\
\mid\ \mid\ \ast\ x\ \text{произвольно}\\
\mid\ \mid\ \mid\ \ast\ \neg A(x)\\
\mid\ \mid\ \mid\ \mid\ \exists x\, \neg A(x)\\
\mid\ \mid\ \mid\ \mid\ \bot\\
\mid\ \mid\ \mid\ \neg\neg A(x)\\
\mid\ \mid\ \mid\ A(x)\\
\mid\ \mid\ \forall x\, A(x)\\
\mid\ \mid\ \bot\\
\mid\ \neg\neg\,\exists x\, \neg A(x)\\
\mid\ \exists x\, \neg A(x)\\
\neg\,\forall x\, A(x) \Rightarrow \exists x\, \neg A(x)
\end{array}
$$

Второй из этих выводов является неподражаемо косвенным. Теперь можно свободно пользоваться формулировкой отрицаний, что особенно ценно в сочетании с $A \vee \neg A$.

Упражнения к §11.4

11.4.1. Докажите следующие формулы:

1. $\forall x(A(x) \vee B) \Rightarrow \forall x\, A(x) \vee B$
2. $\forall x(A(x) \vee B(x)) \Rightarrow \forall x\, A(x) \vee \exists x\, B(x)$
3. $\forall x\, \exists y\, A(x, y)\ \&\ \exists x\, \forall y\, B(x, y) \Rightarrow \exists x\, \exists y(A(x, y)\ \&\ B(x, y))$
4. $(\forall x\, A(x) \Rightarrow B) \Rightarrow \exists x(A(x) \Rightarrow B)$
5. $(B \Rightarrow \exists x\, A(x)) \Rightarrow \exists x(B \Rightarrow A(x))$
6. $(\exists x\, A(x) \Rightarrow B)\ \&\ (\forall x\, \neg A(x) \Rightarrow B) \Rightarrow B$
7. $\exists x(A(x) \Rightarrow \forall x\, A(x))$
8. $\forall x\, \exists y\, A(y, x)\ \&\ \forall x\, \forall y\, \forall z(A(x, y)\ \&\ A(x, z) \Rightarrow A(y, z)) \Rightarrow \forall x\, A(x, x)$
9. $\forall x\, \exists y\, A(y, x)\ \&\ \forall x\, \forall y\, \forall z(A(x, y)\ \&\ A(x, z) \Rightarrow A(y, z)) \Rightarrow$ $\forall x\, \forall y(A(x, y) \Rightarrow A(y, x))$.
10. $\forall x\, \forall y(A(x) \vee B(y)) \Rightarrow \forall x\, A(x) \vee \forall x\, B(x)$
11. $\exists x\, \forall y\, B(x, y) \Rightarrow \exists x\, B(x, x)$
12. $\exists x\, \forall y(A(x) \Rightarrow B(x, y)) \Rightarrow \exists x(A(x) \Rightarrow B(x, x))$
13. $\exists x(A(x) \Rightarrow B(x))\ \&\ \forall x(\neg A(x) \Rightarrow B(x))\ \&\ \forall x(\neg B(x) \vee C(x)) \Rightarrow$ $\exists x\, C(x)$
14. $\forall x\, \forall y(A(f(x), y) \vee B(x, y))\ \&\ \forall x\, \forall y(\neg A(x, g(y)) \vee B(x, y))$ $\Rightarrow \exists x \exists y B(x, y)$.

11.5 Теорема полноты естественного вывода

Доказательство эквивалентности выводимости и логической истинности менее прямое, чем для семантических таблиц. Мы не будем стараться строить вывод всякой истинной формулы, а опровергающую модель для невыводимой формулы построим столь неэффективно, что воспользоваться данной теоретической конструкцией для практических целей практически невозможно. Это связано с “асимметричностью” естественного вывода: он хорош как средство доказательства, но то, что вывод не удалось завершить, не всегда дает информацию для опровержения.

Утверждение о полноте состоит из двух частей. Нужно доказать корректность, т. е. утверждение о том, что каждая теорема является семантическим следствием теории, и собственно полноту, о том, что каждое семантическое следствие может быть выведено. Первая часть доказывается достаточно тривиальной индукцией, но с достаточно нетривиальной формулировкой инварианта индукции и входящих в него понятий.

Теорема 11.1. (Теорема корректности) *Если A выводима в* Th*, то A является семантическим следствием* Th*.*

Доказательство. Сформулируем вспомогательное понятие *незаконченного вывода.* Незаконченный вывод — граф, удовлетворяющий условиям, наложенным на вывод, кроме того, что каждый подвывод должен иметь результат и использоваться в дальнейшем. Естественно, подвыводы, не имеющие результатов, использованы быть не могут. Незаконченный вывод может рассматриваться как промежуточная стадия построения вывода методом “снизу-вверх”, от посылок и аксиом к результатам и теореме. Многие преобразования выводов являются общими для завершенных и незавершенных выводов. В данном доказательстве нам потребуется переименование произвольных переменных. То, что произвольные переменные вложенных подвыводов могут совпадать, гарантирует возможность переносить куски из вывода в вывод без изменений, но несколько затрудняет семантические рассуждения. Докажем, что без изменения теоремы все произвольные переменные в выводе могут быть сделаны различными. Индукция ведется по числу вершин-формул в незаконченном выводе. Доказывается следующее предложение.

> Если Σ — незаконченный вывод, A — встречающаяся в нем формула, $A_1, \ldots, A_n$ — допущения всех подвыводов, в которые входит формула A, $c_1, \ldots, c_k$ - входящие в нее вспомогательные константы, причем c_i вводится в формуле $B_i(c_i)$, $z_1, \ldots, z_m$ — произвольные переменные, входящие свободно в A, $E_1, \ldots, E_l$ — аксиомы Th, использованные в нашем незаконченном выводе, то в любой интерпретации $\mathbf{M}$, в которой истинны все $E_1, \ldots, E_l$, при любых значениях $z_1, \ldots, z_m$, $c_1, \ldots, c_k$, таких, что истинны все $A_1, \ldots, A_n$, $B_i(c_i)$, истинна и наша формула A. Итак, формула, встретившаяся в выводе, должна быть истинна лишь в том случае, когда истинны все предположения, явные и неявные, от которых она зависит. Далее, второй частью индукционного утверждения, доказываемой одновременно с первой, является следующее утверждение: если

вспомогательная константа c_i вводится посредством формулы $B_i(c_i)$ и $A_1, \dots, A_p$ — допущения, а $E_1, \dots, E_q$ — аксиомы Th, использованные в незаконченном выводе $B_i(c_i)$, $z_1, \dots, z_r$ — входящие в них свободные переменные, то в любой интерпретации, в которой истинны $A_1, \dots, A_p, E_1, \dots, E_q$, при любых значениях $z_1, \dots, z_r$ можно подобрать такое значение c_i, при котором $B_i(c_i)$ истинно.

Базис индукции. Если в незаконченном выводе одна формула, то она является допущением либо аксиомой, и инвариант индукции истинен тривиально.

Шаг индукции. Пусть инвариант доказан для всех незаконченных выводов длины $\leq n$. Докажем его для незаконченных выводов длины $n+1$. Пусть Σ содержит $n+1$ формулу. Возьмем произвольную формулу A, не используемую никаким правилом. Удалив ее, а также (если она не является аксиомой либо допущением) породившее ее правило, из вывода, получим незаконченный вывод Σ_A, содержащий n формул. Все встречающиеся в нем формулы, по предположению индукции, истинны в любой интерпретации, где истинны допущения и аксиомы, от которых они зависят. Для вспомогательных констант можно подобрать подходящие значения при любых значениях соответствующих произвольных переменных. Теперь рассмотрим всевозможные случаи, соответствующие получению A.

Если A является аксиомой либо допущением, оно рассматривается так же, как и в базисе индукции.

Пусть A получена по правилу *modus ponens*. Тогда посылками этого правила являются формулы вида B и $B \Rightarrow A$, подчиненные тому же вспомогательному выводу. Выбрасывая из вывода Σ_A формулу A и породившее ее правило modus ponens, получаем незаконченный вывод длины n, в котором встречаются B и $B \Rightarrow A$. По предположению индукции, они истинны в соответствующих контекстах, а по структуре вывода контекст у них тот же, что и у A. А если в некоторой интерпретации истинны B и $B \Rightarrow A$, то в ней истинно A. Все остальные правила прямого заключения, касающиеся пропозициональных связок, рассматриваются столь же тривиально.

Пусть $A \Rightarrow B$ получено по правилу дедукции. Тогда в Σ_A имеется подвывод, допущением которого является A, а результатом — B. Опять-таки, отбрасывая из Σ_A формулу A и породившее ее правило, получаем, что B истинно в любой интерпретации, где истинны формулы, принадлежащие контексту $A \Rightarrow B$, и формула A. Значит, по теореме дедукции, $A \Rightarrow B$ истинна в любой интерпретации, где истинны все формулы из ее контекста.

Пусть C получено по правилу разбора случаев. Тогда в Σ_A имеются формула $A \vee B$ и подвыводы, допущениями которых являются A и B соответственно, а результатом — C. По предположению индукции, в любой интерпретации, где истинны формулы из контекста, истинно $A \vee B$, значит, в ней истинно либо A, либо B, и опять-таки по структуре вывода и предположению индукции, истинно C.

Пусть $\neg C$ получено по правилу *reductio ad absurdum*. Тогда в любой интерпретации, где истинен контекст и вдобавок C, истинны некоторые B и $\neg B$. Но этого быть не может, значит, C не истинно ни в одной из моделей контекста, и во всех таких моделях истинно $\neg C$.

Перейдем к кванторным правилам. Правило перехода от общего к частному разбирается тривиально. Рассмотрим правило вспомогательной константы. Оно вводит новую константу c_i посредством формулы $B_i(c_i)$. Для нее нетривиальна лишь вторая часть инварианта. Но поскольку в любой модели нашего контекста истинно $\exists x\, B_i(x)$, мы получаем возможность найти подходящее значение c_i.

При обосновании правила доказательства на примере, т. е. перехода от $A(t)$ к $\exists x\, A(x)$ необходимо опять-таки вспомнить вторую часть инварианта и подобрать подходящие значения всех вспомогательных констант, входящих в терм t. В правиле обобщения $A(z)$ верно при любом значении произвольной переменной z.
Доказательство корректности завершено. $\square$

Теперь рассмотрим обратную импликацию. Чтобы доказать ее, опять-таки, как и для семантических таблиц, применим контрапозицию и заметим, что она эквивалентна следующему утверждению. Теория Th непротиворечива, если в ней невыводима никакая пара формул B и $\neg B$. Она противоречива, если в ней выводимо такое противоречие. Очевидно, что в противоречивой теории выводима любая формула (по доказанному нами правилу *ex falso quodlibet*), и она моделей не имеет. Отсюда, если всякое семантическое следствие выводимо, то всякая семантически противоречивая теория противоречива. Значит, если теория непротиворечива с точки зрения выводимости, то она непротиворечива и с точки зрения семантики, т.е. имеет модель. Итак, доказываем теорему о существовании модели:

Теорема 11.2. *Всякая непротиворечивая теория имеет модель.*

Прежде всего заметим, что по определению непротиворечивости, если Th непротиворечива и A — замкнутая формула ее словаря, то непротиворечива по крайней мере одна из теорий $\mathsf{Th} \cup \{A\}$, $\mathsf{Th} \cup \{\neg A\}$. В самом деле, теория $\mathsf{Th} \cup \{A\}$ противоречива тогда и только тогда, когда $\neg A$ выводима в Th (почему?). Значит, поскольку по крайней мере одна из формул $\neg A$, A невыводима, можно без противоречия добавить к Th противоположную ей. Очевидно, что пополняя теорию, мы можем расширить любую непротиворечивую теорию до полной, в которой из любых двух замкнутых формул $\neg A$, A выводима одна и только одна.

Далее, когда теория полна, ее теоремы могут быть множеством всех замкнутых формул, истинных на некоторой интерпретации данной сигнатуры. Но прямо построить такую интерпретацию, исходя из полной теории, не всегда удается. Мешает этому *некорректность*: в полной теории может оказаться теорема вида $\exists x\, A(x)$, такая, что ни для какого терма t $A(t)$ не является теоремой. Таким образом, может доказываться существование предметов, которые назвать нельзя. В связи с этим определим

Определение 11.5.1. Теория $\exists$-*корректна*, если для каждой теоремы вида $\exists x\, A(x)$ найдется такой терм t, для которого $A(t)$ является теоремой. Теория $\vee$-*корректна*, если для каждой теоремы вида $A \vee B$ либо A, либо B является теоремой. Теория *корректна*, если она и $\exists$-корректна, и $\vee$-корректна.

Интерпретацией, порождаемой теорией Th, называется следующая:

Универс состоит из замкнутых термов. Элементарная формула

$$P(t_1, \ldots, t_n)$$

считается истинной тогда и только тогда, когда она является теоремой.

Лемма 11.5.1. *Если* Th *полна и корректна, то порождаемая ею интерпретация является моделью* Th.

Доказательство. Индукцией по построению формул докажем, что любая теорема Th истинна в данной интерпретации. Базис индукции, касающийся элементарных формул, выполнен по определению интерпретации. Теперь пусть истинность доказана для всех теорем с числом логических связок $\leq n$. Докажем ее для формул с $n+1$ связкой.

Пусть формула имеет вид $A \;\&\; B$. Тогда она является теоремой в том и только в том случае, если как A, так и B являются теоремами, а значит, истинны. Если она имеет вид $A \vee B$, то она истинна по $\vee$-корректности и предположению индукции. Если она имеет вид $A \Rightarrow B$, то она эквивалентна $\neg A \vee B$, и истинна по $\vee$ -корректности.

Теперь рассмотрим кванторы. Теорема $\forall x\, A(x)$ влечет $A(t)$ для любого терма t. Но по определению интерпретации, ее универс состоит из всех таких термов. По предположению индукции, $A(t)$ истинно для любого терма t. Значит, по определению истинности, $\forall x\, A(x)$ истинно. По $\exists$-корректности, если $\exists x\, A(x)$ является теоремой, то $A(t)$ при некотором терме t является теоремой. Но тогда по предположению индукции $A(t)$ истинно, и по определению истинности $\exists x\, A(x)$ истинно.

Легко видеть, что и наоборот, любая истинная в порождаемой теорией Th интерпретации формула является теоремой Th в случае, если Th полна и корректна. Итак, полная и корректная теория имеет *точную модель*, в которой истинны теоремы и только они. Построить точную модель очень привлекательно, но для большинства теорий при этом приходится переходить, например, к булевозначным моделям. Уже теория из двух аксиом $\{A \Rightarrow B, B \Rightarrow C\}$ не имеет точной двузначной модели. $\square$

Осталось сделать самую малость: построить полную и корректную теорию.

Первый шаг в этом построении следующий. Перенумеруем все замкнутые формулы нашей теории, не начинающиеся с отрицания.[4] В качестве исходной теории Th_0^0 возьмем саму Th. На $i+1$-ом шаге рассматриваем формулу A_i. Если она не противоречит построенной на предыдущем шагу теории Th_i^0, то добавляем ее, если же она противоречит, то добавляем $\neg A_i$.

На шагу ω берем объединение всех ранее построенных теорий. Получившаяся теория полна, но не обязательно корректна. Поэтому на этом же шагу добавляем для всех аксиом вида $\exists x\, A(x)$, для которых в Th_ω нет аксиом[5] вида $A(x \mid t)$, новые константы c_i и новые аксиомы $A(x \mid c_i)$.

После этого теория опять может стать неполной, поэтому перенумеруем все формулы новой теории и на шагах $\omega + n + 1$ поступаем так же, как на шагах $n+1$. На шаге 2ω опять-таки объединяем все $\mathsf{Th}_{\omega+n}$ и добавляем вспомогательные константы для всех некорректных существований. Этот процесс продолжаем по всем ординалам вида $n \cdot \omega + k$, т.е. по всем ординалам, меньшим ω^2. На шаге ω^2 объединяем все теории, полученные на шагах $n \cdot \omega$. Полученная теория будет полной (поскольку любая замкнутая формула A либо ее отрицание будет присутствовать уже в теории $(n+1)\cdot\omega$, где $\mathsf{Th}_{n\cdot\omega}$ — теория, в которой появились все вспомогательные константы из A. Аналогично, если на шаге $n \cdot \omega$ имеются все вспомогательные константы из $\exists x\, A(x)$, то на шаге $(n+1)\cdot\omega$

[4] Если сигнатура несчетна, то в качестве номеров воспользуемся ординалами. Здесь используется аксиома выбора, от которой, как мы уже замечали, зависит теорема полноты для более чем счетных теорий.

[5] А почему мы не сказали осторожнее: теорем?

будем иметь $A(t)$.
Конец доказательства теоремы о существовании модели.

Упражнения к §11.5

11.5.1. Мы добавляем вспомогательные константы для существований все разом, “оптом,” на шаге $n \cdot \omega$. А почему это ничему не мешает? Почему они не путаются между собой?

11.6 Логика с равенством и ее полнота

Работа с равенством для естественного вывода, так же, как и для семантических таблиц, базируется на его определении по Лейбницу. Зададим два правила работы с равенством, выражающие один и тот же факт: равные объекты можно без ограничений заменять друг на друга:

$$\frac{t = u \quad A(x|t)}{A(x|u)} \quad \frac{t = u \quad A(x|u)}{A(x|t)} \tag{11.3}$$

и одну аксиому равенства $\forall x(x = x)$. Корректность этих правил и аксиомы очевидна.

Конструкция из теоремы о существовании модели обеспечивает для каждой непротиворечивой теории с равенством существование полной и корректной интерпретации, в которой истинны все аксиомы, но равенство интерпретируется как некоторое отношение эквивалентности. Такую интерпретацию будем называть *нестрогой моделью равенства.* Чтобы доказать теорему существования модели для логики с равенством, достаточно перестроить любую нестрогую модель в обычную. Для этого установим следующее свойство нестрогой модели.

Предложение 11.6.1. *В нестрогой модели M теории с равенством, если $M \models a_1 = b_1, \dots, M \models a_n = b_n$, то для любого n-арного предиката P $M \models P(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow P(b_1, \dots, b_n)$.*

Доказательство. По правилам замены равных, из $x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n$ при произвольных x_i, y_i выводимы обе импликации: от $P(x_1, \dots, x_n)$ к $P(y_1, \dots, y_n)$ и наоборот. Значит, выводима формула

$$\forall x_1, y_1 \dots \forall x_n, y_n \left(\begin{array}{ll} x_1 = y_1 \;\&\; \cdots \;\&\; x_n = y_n & \Rightarrow \\ (P(x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow P(y_1, \dots y_n)) & \end{array} \right).$$

Тогда выводима и исходная эквивалентность, применяя правило перехода от общего к частному и правило извлечения следствий. $\square$

Предложение 11.6.2. *Каждую нестрогую модель теории с равенством можно преобразовать в такую ее модель, где сохраняются значения всех замкнутых формул.*

Доказательство. Рассмотрим фактор-множество универса M по отношению $M \models a = b$. По предыдущему предложению все предикаты согласованы с этим отношением эквивалентности, значит, они переносятся на фактор-множество. Получившаяся фактор-интерпретация и является искомой моделью. □

11.7 Метод резолюций и его сравнение с методом естественного вывода

И семантические таблицы, и естественный вывод были неудобны для реализации на примитивных вычислительных машинах 60-х гг. Ситуация еще осложнялась тем, что их качественная реализация требует сложных структур данных и методики не ниже по уровню, чем современное объектно-ориентированное программирование, а этих средств в те времена еще не было. Поэтому был изобретен метод, идеально подходивший для реализации на достаточно примитивных вычислительных системах и завоевавший практически монопольное положение за последние десятилетия.[6] Разберем сам метод, его достоинства и недостатки.

Метод резолюций базируется на приведении формул классической логики к стандартной форме. Тавтологии, используемые при этом приведении, не сохраняются в неклассических логиках, и поэтому в принципе метод резолюций с самого начала создавался (в отличие от семантических таблиц и естественного вывода) как ориентированный на классическую логику. Такая специализация явилась одной из предпосылок его достаточно высокой эффективности для ряда задач и, соответственно, его успеха.

Приведение формулы к виду, пригодному для применения метода резолюций, производится в несколько этапов. Первый — вынесение всех

[6] В науке, так же как и в биологических сообществах, существует эффект экологической ниши. Если есть потребности, не удовлетворяемые ни одной из существующих распространенных систем, то первая из систем, удовлетворившая их, становится классической и, независимо от своих достоинств и недостатков, очень трудно вытесняемой. Конкурент обязан здесь не просто быть на порядок лучше, но еще и суметь провести рекламную кампанию. Более того, те, кто уже привык к классической системе, как правило, просто не желают знать ничего нового, так что надеяться здесь можно лишь на новое поколение. Рассматриваемый метод резолюций завоевал именно такое положение.

кванторов вперед. При этом пользуются следующими эквивалентностями классической логики:

$$\begin{array}{cc}
\forall x\, A(x)\,\&\, B \Leftrightarrow \forall x(A(x)\,\&\, B) & \exists x\, A(x)\,\&\, B \Leftrightarrow \exists x(A(x)\,\&\, B)\\
\forall x\, A(x) \vee B \Leftrightarrow \forall x(A(x) \vee B) & \exists x\, A(x) \vee B \Leftrightarrow \exists x(A(x) \vee B)\\
(\forall x\, A(x) \Rightarrow B) \Leftrightarrow \exists x(A(x) \Rightarrow B) & (B \Rightarrow \forall x\, A(x)) \Leftrightarrow \forall x(B \Rightarrow A(x))\\
(\exists x\, A(x) \Rightarrow B) \Leftrightarrow \forall x(A(x) \Rightarrow B) & (B \Rightarrow \exists x\, A(x)) \Leftrightarrow \exists x(B \Rightarrow A(x))\\
\neg\,\forall x\, A(x) \Leftrightarrow \exists x\,\neg\, A(x) & \neg\,\exists x\, A(x) \Leftrightarrow \forall x\,\neg\, A(x)
\end{array} \tag{11.4}$$

Заметим, что эти правила точно так же могут использоваться и наоборот, для вноса кванторов внутрь формулы. Поэтому появляются две стандартные формы в классической логике: *предваренная*, где кванторы вынесены наружу, и *водворенная*, где они внесены внутрь. Рассмотрим пример.

$$\forall x(\exists y(\forall z\, B(z) \Rightarrow \forall u\, D(u,y)) \vee \exists v(\forall w\, E(v,w)\,\&\,\forall q\, H(x,q))). \tag{11.5}$$

Предваренной формой этой формулы будет, в частности,

$$\forall x\,\exists y\,\exists z\,\forall u\,\exists v\,\forall w\,\forall q((B(z) \Rightarrow D(u,y)) \vee (E(v,w)\,\&\, H(x,q))), \tag{11.6}$$

а также, скажем (при другом порядке выноса независимых друг от друга кванторов),

$$\forall x\,\exists v\,\forall q\,\forall w\,\exists y\,\forall u\,\exists z((B(z) \Rightarrow D(u,y)) \vee (E(v,w)\,\&\, H(x,q))). \tag{11.7}$$

Водворенной формой будет, в частности,

$$(\forall z\, B(z) \Rightarrow \exists y\,\forall u\, D(u,y)) \vee \forall x\,\exists v(\forall w\, E(v,w)\,\&\,\forall q\, H(x,q)). \tag{11.8}$$

Здесь квантор по x не перенесен еще глубже внутрь потому, что $\exists$ и $\forall$ неперестановочны. Теперь можно дать и определение.

Определение 11.7.1. Формула находится в *предваренной* форме, если она имеет вид $\mathsf{K}\vec{x}\, A(\vec{x})$, где K — последовательность кванторов, A кванторов не содержит. Формула находится в *водворенной* форме, если область действия ни одного квантора не может быть уменьшена применением эквивалентностей (11.4).

Как уже отмечалось, водворенная форма лучше с точки зрения понимания и обратного перевода на естественный язык. Предваренная несколько удобней для доказательства некоторых математических результатов.

Рассмотрим один из этих результатов, послуживший идейной основой метода резолюций. Интуитивно сочетание кванторов $\forall x\,\exists y$ может пониматься как утверждение о существовании функции, строящей y по x. Точные выражения этого интуитивного принципа бывают различными (одним из них является аксиома выбора.) Молодой французский математик Ж. Эрбран[7] в 1930 г. доказал теорему, которая может считаться алгоритмическим уточнением этого интуитивного соответствия для случая классической логики. А именно, рассмотрим предваренную формулу

$$\mathsf{K}\vec{x}\,A(\vec{x}). \tag{11.9}$$

Переменные, связанные кванторами всеобщности, обозначим через x_i, а кванторами существования — через y_j Сопоставим каждому квантору $\exists y_j$ функцию $f_j(x_1,\ \ldots,\ x_i)$, зависящую от всех переменных в стоящих ранее кванторах всеобщности (нульместная функция в данном случае отображается как константа). Тогда наша формула преобразуется к виду

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n\, A(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x})). \tag{11.10}$$

Такое преобразование называется *сколемизацией*, а сами функции — *сколемовскими функциями*.[8] Теперь возьмем константу c_0, если у нас вообще не было нульместных функций, и построим универс из термов, образующихся применением сколемовских функций к имеющимся у нас константам. Этот универс ввел в рассмотрение Эрбран, и поэтому его называют эрбрановским универсом.

Теорема 11.3. (Теорема Эрбрана, первая форма) *Формула (11.9) является противоречием тогда и только тогда, когда найдутся такие системы термов из эрбрановского универса $\vec{t}_1,\ \ldots,\ \vec{t}_m$, что конъюнкция частных примеров формулы (11.10)*

$$A(\vec{t}_1, \vec{f}(\vec{t}_1))\ \&\ \cdots\ \&\ A(\vec{t}_m, \vec{f}(\vec{t}_m)) \tag{11.11}$$

является противоречием в исчислении высказываний.

---

[7]Как часто было в логике, история данного открытия явилась несколько трагичной. Эрбран блестяще защитил диссертацию, одним из главных результатов которой являлась данная теорема. Но данное им доказательство было длинным и непонятным. Уже в 50-х гг. появились другие доказательства, а в начале 60-х в диссертации Эрбрана была найдена ошибка. Заметим, что саму теорему никто под сомнение не брал, но пользоваться ею стали лишь после появления понятных доказательств. А Эрбран вскоре после защиты диссертации трагически погиб и не успел изведать позора либо поправить ошибку сам ...

[8]Поскольку впервые такие функции для замены кванторов стал систематически использовать Т. Сколем.

Доказательство. Строим семантическую таблицу для формулы $\models$(11.9). Движением по дереву секвенций от корня к листьям сопоставим каждой встретившейся в ней вспомогательной константе терм эрбрановского универса. А именно, константе, 'взятой из воздуха,' сопоставим c_0. Константам, получившимся в результате снятия начальных кванторов существования, сопоставим соответствующие сколемовские константы. Если константа c_k получилась из внутреннего квантора существования, то предшествующие $x_1, \ldots, x_i$ были заменены на ранее построенные константы, которым по построению уже сопоставлены термы $r_1, \ldots, r_i$. Тогда сопоставляем c_k терм $f_j(r_1, \ldots, r_i)$.

Теперь прослеживаем все подстановки вместо $\vec{x}$, произведенные в процессе построения таблицы, и каждая из них дает нам одну из систем термов. Первыми шагами построения таблицы для $\models$(11.11) являются порождения всех $\models A(\vec{t_i}, \vec{f}(\vec{t_i}))$, а затем воспроизводим все шаги исходной таблицы, кроме снятия кванторов.
Конец доказательства.

Как и обычно, для применений теоремы нужно проварьировать ее формулировку. Поэтому рассмотрим вторую формулировку теоремы Эрбрана, получающуюся некоторым преобразованием ее контрапозиции. Инвертируем процесс сколемизации, теперь на переменные будем заменять кванторы существования, а на функции — кванторы всеобщности. Полученная форма будет иметь вид

$$\exists y_1 \ldots \forall y_m \, A(\vec{g}(\vec{y}), \vec{y}). \tag{11.12}$$

При инверсной сколемизации точно так же появляется эрбрановский универс и имеет место следующая

Теорема 11.4. (Теорема Эрбрана, вторая форма) *Формула (11.9) является тавтологией тогда и только тогда, когда найдутся такие системы термов из эрбрановского универса $\vec{t}_1, \ldots, \vec{t}_m$, что дизъюнкция частных примеров формулы (11.12)*

$$A(\vec{f}(\vec{t_1}), \vec{t_1}) \vee \cdots \vee A(\vec{f}(\vec{t_m}), \vec{t_m}) \tag{11.13}$$

является тавтологией в исчислении высказываний.

Доказательство данной теоремы аналогично предыдущей. Именно вторая форма теоремы Эрбрана была использована создателем метода резолюций Дж. Робинсон для разработки машинного алгоритма.

Но предварительно был проделан еще один шаг в приведении формул к стандартному виду. В исчислении высказываний еще с XIX века известны две стандартные формы для исчисления высказываний: конъюнктивная и дизъюнктивная. Конъюнктивная форма получается из таблиц истинности. Каждое значение логических переменных P_i, при котором формула A истинна, представляется как конъюнкция *атомарных формул* или *атомов*: элементарных формул либо их отрицаний. Такие конъюнкции называются *конъюнктами*. Конъюнкты дизъюнктивно объединяются и получается формула, эквивалентная A. Отрицанием конъюнктивной нормальной формы для $\neg A$ получается дизъюнктивная нормальная форма для A, в которой атомарные формулы соединяются дизъюнкциями, а получившиеся *дизъюнкты* — конъюнкциями.

При работе методом резолюций, так же, как и в семантических таблицах, начинают с отрицания формулы. Поэтому используется альтернативная сколемизация, а пропозициональная часть формулы представляется как конъюнктивная нормальная форма, а затем отрицается и превращается в конъюнкцию дизъюнктов.

Самым блестящим достижением Дж. Робинсон и метода резолюций явилась формулировка крупноблочного правила, соединяющего в себе обобщенную подстановку и шаг логического вывода. Это правило и было названо *правилом резолюции*.

Дадим критерий, когда две последовательности термов с одинаковым числом членов могут быть приведены к одинаковому виду подстановкой вместо свободных переменных.

Определение 11.7.2. *Подстановкой* называется множество пар вида (x, t), где x — переменная, t — терм, причем все первые члены в этих парах различны[9]. Применение подстановки σ к терму t обозначается $t\sigma$ и определятся индуктивно, так же, как в определении подстановки для выражений.

1. $x\sigma = t$, если $(x, t) \in \sigma$.

2. $x\sigma = x$, если нет пары $(x, t) \in \sigma$.

3. $c\sigma = c$, c — константа.

4. $f(t_1, \dots, t_n)\sigma = f(t_1\sigma, \dots, t_n\sigma)$.

Композиция подстановок σ, ϖ определяется следующим образом:

$$\sigma\varpi = \{(x, \varpi t) \mid (x, t) \in \sigma\}.$$

$\sigma \geq \vartheta \Leftrightarrow \exists \varpi\, \vartheta = \sigma\varpi$ (читается: σ накрывает ϑ). Если каждая из двух подстановок накрывается другой, то они эквивалентны. Подстановка σ унифицирует последовательности термов $t_1, \dots, t_n$ и $r_1, \dots, r_n$, если для всех i $t_i\sigma = r_i\sigma$.

[9] Можно было бы сказать, что подстановка — частичная функция из переменных в термы, но мы уже сталкивались и еще столкнемся с коварством различных смыслов таких понятий. Поэтому сформулируем чуть длиннее и скучнее. но однозначно.

Легко доказать, что отношение эквивалентности подстановок действительно является эквивалентностью, и что отношение накрытия — предпорядок, согласованный с нею.

Теорема 11.5. (Теорема об унификации) *Для каждых двух унифицируемых последовательностей термов существует унифицирующая подстановка, накрывающая любую другую такую подстановку.*

Доказательство. Проведем построение, которое за конечное число шагов даст такую подстановку σ либо выяснит, что ее нет.

Шаг 0. Вначале положим подстановку пустым множеством.

Шаг 1. Ищем в последовательностях пару термов, каждый из которых начинается с функционального символа. Если соответствующие функциональные символы различны, то две последовательности неунифицируемы, если же они совпадают, заменяем члены $f(s_1, \ldots, s_k)$ и $g(q_1, \ldots, q_k)$ на последовательности $s_1, \ldots, s_k$ и $q_1, \ldots, q_k$, соответственно.

После этого шага во всех парах соответствующих друг другу термов хотя бы один член является переменной либо константой.

Шаг 2. Удаляем из последовательностей все одинаковые члены, находящиеся на одинаковых местах. Если после этого хотя бы в одном месте встретятся две соответствующие друг другу (различные) константы, унификация невозможна.

Теперь в каждой из пар термов хотя бы один является переменной.

Шаг 3. Если первой парой является пара (x, t), то если t содержит x, заключаем, что унификация невозможна, а если t не содержит x, то добавляем к σ пару (x, t), выбрасываем первые члены из двух последовательностей и заменяем остальные r на $r\{(x, t)\}$. Если после этого появились пары, оба компонента которых не являются переменными, то возвращаемся к шагу 1. Симметрично действуем в случае, когда переменной является второй компонент пары.

Шаг 4. Если длина обеих последовательностей дошла до 0, унифицирующая подстановка найдена.

Данный алгоритм всегда кончает работу, потому что в любом цикле количество переменных уменьшается хотя бы на 1. То, что построенная унификация накрывает все остальные, легко показать индукцией по построению. □

Унифицирующая подстановка, накрывающая все остальные, называется *наиболее общим унификатором*.

Правило резолюции состоит в том, что для двух дизъюнктов вида

$$P(\vec{t}) \vee \mathcal{Q} \qquad \neg\, P(\vec{r}) \vee \mathcal{R}$$

ищется подстановка σ, унифицирующая $\vec{t}$ и $\vec{r}$. Если она находится, то в результате применения правила получается дизъюнкт $(\mathcal{Q} \vee \mathcal{R})\sigma$.

Еще одной красивой находкой в методе резолюций явилось представление дизъюнктов как множеств атомов. Поскольку в множестве порядок элементов не играет роли, и не может быть дублируемых, многие тонкие, но неприятные вопросы сами собой отпали.

Поскольку в методе резолюций рассуждают от противного, формула считается доказанной, если в результате последовательности резолюций получается ложь, представлением которой служит пустой дизъюнкт.

На примерах из метода резолюций мы долго останавливаться не будем, поскольку они изложены в множестве учебников и достаточно просто написанных монографий. Мы сошлемся лишь на классический, аккуратно и просто написанный труд [29]. Здесь мы даем лишь необходимый материал для решения нескольких упражнений и первичного овладения данным методом.

Пример 11.7.1. (Чень, Ли) Некоторые пациенты любят своих докторов. Ни один пациент не любит знахаря. Значит, ни один доктор — не знахарь.

Решение (этих же авторов.) Переведем посылки и заключения на формальный язык:

$$F_1 \Leftrightarrow \exists x(P(x) \,\&\, \forall y(D(y) \Rightarrow L(x,y))),$$

$$F_2 \Leftrightarrow \forall x(P(x) \Rightarrow \forall y(Q(y) \Rightarrow \neg L(x,y))),$$

$$G \Leftrightarrow \forall x(D(x) \Rightarrow \neg Q(x)).$$

Поскольку проверяемое утверждение имеет вид $F_1 \,\&\, F_2 \Rightarrow G$, после отрицания оно переходит в $F_1 \,\&\, F_2 \,\&\, \neg G$. При приведении к предваренной форме ни один квантор $\exists$ не попадает после $\forall$, так что ни одной сколемовской функции не появляется. В итоге мы получаем следующие дизъюнкты:

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & P(a) \\ (2) & \neg D(y) \vee L(a,y) \end{array}\right\} \text{ из } F_1,$$
$$(3) \quad \neg P(x) \vee \neg Q(y) \vee \neg L(x,y) \quad \text{из } F_2,$$
$$\left.\begin{array}{ll} (4) & D(b) \\ (5) & Q(b) \end{array}\right\} \text{ из } \neg G.$$

Методом резолюций получается следующий вывод пустого дизъюнкта:

(6)	$L(a,b)$	резольвента (4) и (2)
(7)	$\neg Q(y) \vee \neg L(a,y)$	резольвента (3) и (1)
(8)	$\neg L(a,b)$	резольвента (7) и (5)
(9)	$\square$	резольвента (6) и (8)

Конец решения.

Упражнения к §11.7

11.7.1. Найдите ошибку в решении примера 11.7.1.[10]

11.8 Окольные пути как средство сокращения вывода

Мы рассмотрим теперь вопрос о недостатках метода резолюций, которые он, обладая огромными достоинствами, обязан иметь. Одним из недостатков является необходимость предварительного приведения формул к стандартной форме, после чего содержательный смысл порою теряется, а длина формул может резко возрасти. Он неразрывно связан с другим, неустранимым недостатком. Именно из-за этого недостатка, глубоко спрятанного и в методе резолюций, и в методе семантических таблиц, математическое доказательство оказалось ближе всего по структуре к естественному выводу.

Покажем, что естественный вывод может быть невообразимо короче резолюционного. Мы базируемся здесь на примере петербургского логика В.П. Оревкова, приведенном, в частности, в дополнении к переводу книги [29]. Его идея следующая. Сформулировать несколько предложений таким образом, чтобы, во-первых, их можно было бы проинтерпретировать на множестве натуральных чисел, во-вторых, после сколемизации единственной доступной функцией оказалась бы

$$\mathsf{S}x = \lambda x\, x+1,$$

и в-третьих, нам удалось бы доказать существование числа

$$a_n = 2^{2^{\cdots^{2}}} \ (n \text{ раз}).$$

Для этого достаточно определить "всего лишь" x^y при помощи предиката $P(x,y,z)$, истинного, когда $x^y = z$. А наши a_n можно было бы затем определить при помощи последовательности кванторов существования

$$\exists x_0 \ldots x_n (P(2,0,x_0) \mathbin{\&} \cdots \mathbin{\&} P(2,x_{n-1},x_n)). \tag{11.14}$$

Умножением и сложением натуральных чисел здесь не воспользуешься, поскольку описывающие их формулы дадут соответствующие сколемовские функции, но можно пройти окольным путем. Воспользуемся тем, что функция

$$\varphi(x,y) = x + 2^y$$

[10]Для нахождения этой ошибки не обязательно разбираться в методе резолюций.

определяется системой рекурсивных уравнений

$$\begin{cases} \varphi(x,0) & = & x+1 \\ \varphi(x,y+1) & = & \varphi(\varphi(x,y),y) \end{cases} \tag{11.15}$$

и распишем их на языке логики предикатов:

$$\begin{array}{l} \forall w\, \exists v\, P(w,0,v)\ \& \\ \forall uvw(\exists y(P(y,0,u)\ \&\ \exists z(P(v,y,z)\ \&\ P(z,y,w))) \\ \qquad \Rightarrow P(v,u,w)). \end{array} \tag{11.16}$$

Для того чтобы определить формулу, выражающую существование a_n, введем сокращения:

$$\begin{array}{ccc} B_0(b_0,x) & \triangleq & \exists v_0\, P(b_0,x,v_0) \\ & \cdots & \\ B_{i+1}(b_0,x) & \triangleq & \exists v_{i+1}(P(b_0,x,v_{i+1})\ \&\ B_i(b_0,v_{i+1})). \end{array}$$

При предобработке для метода резолюций формулы (11.16) $\Rightarrow B_n(0,0)$ получаются следующие дизъюнкты:

$$\begin{array}{l} P(x,0,s(x)) \\ \neg\, P(y,0,u) \vee \neg\, P(v,y,z) \vee \neg\, P(z,y,w) \vee P(v,u,w) \\ \neg\, P(0,0,v_k) \vee \neg\, P(0,v_k,v_{k-1}) \vee \cdots \vee \neg\, P(0,v_1,v_0). \end{array} \tag{11.17}$$

При каждой унификации единственная имеющаяся функция s итерируется не более одного раза.

Чтобы коротко доказать $\forall b_0\, \forall x\, B_n(x)$, исходя из (11.16), воспользуемся следующим приемом. Дадим серию индуктивных определений, каждое из которых содержательно будет означать одно и то же — натуральный ряд, но шаг каждого последующего будет равен многим шагам предыдущего.

$$\begin{array}{ccc} A_0^*(x,y) & \triangleq & \exists v_0\, P(x,y,v_0), \\ & \cdots & \\ A_{i+1}^* & \triangleq & \exists v_{i+1}(A_i(v_{i+1})\ \&\ P(x,y,v_{i+1})), \\ A_0(x) & \triangleq & \forall w_0\, \exists v_0\, P(w_0,x,v_0), \\ & \cdots & \\ A_{i+1}(x) & \triangleq & \forall w_{i+1}(A_i(w_{i+1}) \Rightarrow A_{i+1}^*(w_{i+1},x)). \end{array} \tag{11.18}$$

Содержательно каждое A_i можно интерпретировать как индукцию по определению для предиката $\forall w_0\, \exists v_0\, P(w_0,x,v_0)$ и определения натурального ряда прыжками через $2^{2^{\cdots^{2}}}$ (n раз) членов. Каждое A_{i+1} выводится из A_i, а из последнего из них элементарно выводится B_n.

Но логическая сложность формул A_i быстро возрастает с увеличением номера. Если же разрешить использовать окольные пути лишь по формулам ограниченной сложности, то длина вывода B_n начинает суперэкспоненциально возрастать, как только исчерпается потенциал возможных определений. Поэтому ни метод резолюции, ни метод семантических таблиц не может даже в принципе состязаться с естественным выводом при доказательстве трудных формул.[11]

Упражнения к §11.8

11.8.1. Оцените порядок длины формулы A_i (скажем, ее длина пропорциональна i, i^2 или какой-то еще быстрее растущей функции?)

11.9 Несколько слов о языке Пролог

Язык Пролог рекламируется как язык логического программирования. Его основой явилось наблюдение, сделанное Хорном, что формулы вида $\forall \vec{x}(P_1(\vec{x})\ \&\ \cdots P_n(\vec{x}) \Rightarrow Q(\vec{x}))$ обладают многими приятными свойствами. В частности, из классического доказательства формулы вида $\exists \vec{y}(R_1(\vec{y})\ \&\ \cdots\ \&\ R_k(\vec{y}))$ можно получить построение соответствующего y[12]. В данных формулировках P, Q, R — предикаты. Переводя хорновские формулы на язык метода резолюций, получаем класс хорновских дизъюнктов вида

$$\neg P_1 \vee \cdots \neg P_n \vee Q,$$

содержащих ровно один неотрицательный предикат и служащих переводами хорновских аксиом теории, и целевой дизъюнкт

$$\neg R_1 \vee \cdots \vee \neg R_k,$$

вообще положительных предикатов не содержащий и представляющий доказываемую теорему. Далее, поиск вывода в такой системе дизъюнктов можно организовать достаточно регулярно: каждый раз вести резолюцию с результатом предыдущего преобразования целевого дизъюнкта, аксиомы же между собой прямо не взаимодействуют. Но это дает практически идею языка программирования, основанного на следующих принципах.

[11] Правда, большинство практически нужных формул вполне пригодны для применения методов без окольных путей. Но как и везде, неприятность может поджидать в самый неожиданный момент для внешне безобидных утверждений. Одним из таких утверждений является теорема Кантора-Шредера-Бернштейна 5.2.

[12] Вы должны уже понимать, что слишком часто это не так.

Программа состоит из множества хорновских дизъюнктов, записываемых в виде

$$Q((\vec{t})) : -P_1(\vec{t_1}), \dots, P_n(\vec{t_n}).$$

Корме того, в программе имеется цель вида

$$: -R_1, \dots, R_k.$$

Каждый шаг выполнения программы состоит в преобразовании цели путем ее унификации с одним из дизъюнктов. При взаимодействии цели

$$: -Q(t), R_1(s_1), \dots, R_k(s_k)$$

с дизъюнктом

$$Q((\vec{t^*})) : -P_1(\vec{t_1}), \dots, P_n(\vec{t_n})$$

получается дизъюнкт вида

$$: -P_1(\vec{t_1^*}), \dots, P_n(\vec{t_n^*}), R_1(s_1^*), \dots, R_k(s_k^*).$$

Программа считается успешно завершенной, если в некоторый момент из цели исчезают все предикаты. Программа может зафиксировать неудачу, если один из предикатов цели ни с одним из дизъюнктов программы не унифицируется. Естественно,что может быть и промежуточный, но гораздо чаще встречающийся случай: программа не может зафиксировать неудачу, а просто зацикливается либо переполняется из-за неограниченного удлинения выражений.

Эта схема могла быть реализована многими способами. Поскольку Пролог появился в самом начале 70-х гг., был выбран способ, тогда находившийся вполне на уровне, но сейчас уже безнадежно морально устаревший.[13] Выбирается всегда первый член целевого дизъюнкта и первый из унифицируемых с ним дизъюнктов программы.

Здесь возникает сложность, которая была удачно разрешена и составила одно из важнейших достижений Пролога. Взяв первого кандидата, мы можем через несколько шагов зайти в тупик, а решение было совсем рядом: надо было взять следующего. Тут работает механизм возвратов (backtracking). Если фиксируется неудача, мы возвращаемся к первой точке, где было несколько кандидатов на унификацию, и подставляем

[13] Впрочем, уже тогда можно было бы чуть дальше глянуть на уже имевшиеся достижения информатики, но, как правило, больше одного удачного нововведения ни в одной принципиально новой системе не делается.

следующий из возможных дизъюнктов. Этот механизм явился красивой и экономичной с точки зрения представления программ альтернативой явному выписыванию условных операторов. Но конечно же, с точки зрения исполнения программ он может безнадежно проигрывать в эффективности.

Правило „брать первого кандидата из не отвергнутых ранее“ обладает и другими особенностями. Во-первых, логика перестает быть классической, поскольку тривиально истинный дизъюнкт вида

$$P(x) : -P(x)$$

при помещении в программу вполне может привести к ее зацикливанию (если он применится однажды, то он будет применяться бесконечно). Вовторых (и это уже большой плюс) появляется возможность выражать циклы и индукцию при помощи дизъюнктов типа

$$A(n+1) : -A(n), B.$$

Далее Пролог, некоторое время просуществовав в университетской среде, неожиданно получил громадную рекламу в связи с тем, что японцы объявили его внутренним языком своего проекта ЭВМ пятого поколения. В итоге была набрана критическая масса людей, которые знают Пролог, получили под него ассигнования и больше ничего знать не хотят.[14] Более того, сам термин логическое программирование сейчас понимается как программирование на Прологе.

Множество литературы по языку Пролог имеется на русском языке, и поэтому нет смысла излагать его подробно здесь. Мы остановимся лишь на его принципиальных достижениях и, в первую очередь, недостатках, поскольку дух саморекламы, проникший в учебные пособия и особенно в фирменные руководства, заставляет о них умалчивать.

Пролог сделал еще один любопытный шаг. Поскольку алгоритм унификации мог бы столь же хорошо работать, если бы на месте предиката также стояла бы переменная либо терм, очень быстро предикаты были обобщены до скобочных выражений и на месте предиката и функции может стоять любое функциональное выражение, унифицируемое по тем же правилам, что и термы. Здесь чисто эмпирически была нащупана тонкая

[14] В Америке до сих пор во многих фирмах используются безнадежно морально устаревшие языки COBOL и PL/1, поскольку их персонал просто ничего другого знать не хочет. Сила инерции привела к тому, что случайно выбранная раскладка клавиатуры для англоязычных пишущих машинок (одна из самых антиэргономичных, призванная *замедлять* скорость печатания на часто заедавших машинках третьей четверти XIX века) стала ненарушимым стандартом.

грань. Известно, что для понятий высших порядков операция унификации невычислима, а Пролог сдвинулся ровно настолько вверх по иерархии понятий, чтобы не потерять ничего из преимуществ унификации для первопорядковых выражений.[15]

Другие шаги Пролога были закономерны и столь же закономерно вели в тупик. Программа не может существовать без ввода-вывода и программистам плохо без стандартных функций. Поэтому в Пролог были введены непосредственно интерпретируемые предикаты и непосредственно вычисляемые функции. Так, например, встретив предикат $\mathsf{Input}(\mathsf{x})$, Пролог-программа не ищет его унификации, а запрашивает значение x у человека. Встретив функцию $\sin(t)$, программа обходится с $\sin$ как с формальным символом функции до тех пор, пока не определится значение t, после чего просто вычисляет его.

В Пролог было введено Прологовское отрицание. $-P$ считается успешно унифицированным, если выражение P ни с чем не унифицируется.

Словом, в Пролог были введены плохо сочетавшиеся с ним возможности, и не только русские создают сами себе трудности, а потом успешно их преодолевают. В программировании и во многих науках это — почти что стандартный метод действий.

Часто плохо предсказуемый результат взаимодействия логической структуры почти что вывода и непосредственно исполняемых предикатов и функций приводит к тому, что Пролог хорош лишь для небольших программ, а сложные Пролог-программы отлаживать труднее, чем соответствующие программы, написанные в хорошем объектно-ориентированном стиле.[16] Как говорят, здесь имеется достаточно грубое концептуальное противоречие (формально непротиворечивые понятия сильно мешают друг другу).

Исходя из нашего опыта, Пролог есть смысл использовать для кусков программ, обладающих исключительно сложной логикой при явном задании вариантов. Все вычислительные части программ при этом стоит писать на других языках и иметь либо Пролог-программу, вызывающую вычислительные модули, либо (скажем) Паскаль-программу с внешней Пролог-подпрограммой.

---

[15] Это — удачный пример обобщения без потерь. Заметим, что литературе о Прологе данное преимущество упоминается вскользь и как-то стыдливо, что, видимо, связано с тенденцией рекламировать каждый метод как универсальный. А здесь пришлось бы подчеркнуть его принципиальные ограничения.

[16] Эта оценка принадлежит не только автору, но в том или ином виде повторяется во всех серьезных работах по технологии и методологии программирования при рассмотрении выгод и недостатков применения Пролога.

Глава 12

Основы теории определений

12.1 Определения в математике

Прежде всего заметим, что под теорией определений в общей и в математической логике понимают совершенно разные вещи. В общей логике заботятся о понятиях и рассматривают определения понятий. Здесь самое важное — разъяснить *содержание* определяемого. В математической логике определения служат средством выражения одних терминов через другие, с тем чтобы можно было минимизировать число исходных, как говорят математики, неопределяемых понятий. Значит, самое важное здесь точно выразить *объем* определяемого.

Таким образом, содержательное определение должно дать критерии, согласно которым можно проверить, подходит ли данный объект под данное понятие, а математическое — способ замещения данного понятия другими, которые считаются определенными раньше. При этом часто замещаемое понятие интуитивно проще своего определения (смотри, например, определение непрерывности на языке ε-δ).

Пример 12.1.1. Определение непрерывности, которым пользовался, в частности, Л. Эйлер: непрерывная функция — такая, график которой можно начертить, не отрывая карандаша от бумаги. Это определение очень хорошо с содержательной точки зрения (хотя и здесь его можно покритиковать, но совершенства в реальной жизни не бывает). Оно никуда не годится с точки зрения математики (попробуйте-ка определить понятие "начертить, не отрывая карандаша от бумаги" либо задать аксиоматику его свойств).

Пример 12.1.2. Определение окружности как линии, получающейся при сечении шара плоскостью, никуда не годится с содержательной точки зрения, поскольку оно определяет более простое через более сложное, но может великолепно работать в математике при задании аксиоматики геометрии, берущей в качестве исходных пространственные понятия.

Еще одной целью определений в математике служит сокращение рассуждений фиксированием постоянно встречающихся в них сложных блоков. Как правило, в дальнейшем выделенные блоки превращаются в новые абстрактные понятия. Например, так появилось понятие группы: часто встречающаяся структура утверждений и данных была аксиоматизирована и стала повсюду в рассуждениях заменяться одним понятием.

Третьей целью определений является наименование интересных объектов, построенных в математике. Так были определены, в частности, числа π и e.

В данной главе мы разберем некоторые элементарные результаты теории определений, как правило, достаточно абсолютные и переносимые на многие неклассические логики.

12.2 Сокращающие определения

Простейший вид определений — когда сложное выражение заменяется новым предикатом либо новой функцией. Таким образом можно рассматривать, в частности, определения непрерывности и функции tg.

$$\mathrm{Cont}\, f \triangleq$$
$$\forall x \forall \varepsilon \, (\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta \, (\delta > 0 \,\&\, \forall y \, (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)))$$
$$\mathrm{tg}\, x \triangleq \frac{\sin x}{\cos x}$$

Общая схема таких определений следующая.

Имеется формула $\mathcal{A}(x_1, \ldots, x_n)$, не содержащая других свободных переменных, кроме явно указанных. Тогда можно ввести новый n-местный предикат P посредством определения:

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \, (P(x_1, \ldots, x_n) \Leftrightarrow \mathcal{A}(x_1, \ldots, x_n)).$$

Очевидно, что такое определение в некотором смысле ничего нового не добавляет к старой теории. Но что значит “ничего нового”, полагается уточнить. Это может быть уточнено двумя способами — семантическим, через модели, и синтаксическим, через перевод утверждений новой теории в утверждения старой. Оба уточнения работают с двумя теориями Th_1 и Th_2, такими, что сигнатура σ_2 второй теории шире сигнатуры первой σ_1, и все аксиомы первой теории являются аксиомами второй. В таком случае Th_2 называется *расширением* Th_1.

Определение 12.2.1. 1. Th_2 сигнатуры $\sigma_1 \supset \sigma$ называется *консервативным расширением* теории Th_1 сигнатуры σ, если формула сигнатуры σ является теоремой Th_2 $\underline{\text{ттт}}$ она является теоремой Th_1.

2. Th_2 называется *несущественным расширением* Th_1, если имеется способ[1] φ перевода формул второй теории в формулы первой, сохраняющий все логические связки (т. е. $\varphi(A \,\&\, B) = \varphi(A) \,\&\, \varphi(B)$, $\varphi(\forall x\, A) = \forall x\, \varphi(A)$ и т.п.)

Пример 12.2.1. Рассмотрим теорию коммутативных групп, операции в которой обозначим $x + y$ и $-x$. Добавим умножение и аксиомы, определяющие поле. Полученная теория является консервативным расширением теории групп, поскольку все, касающееся лишь аддитивных операций, остается без изменения, но не является ее несущественным расширением, поскольку нет средств выразить умножение через сложение. Таким образом, консервативное расширение теории может позволять выразить новые понятия и тем самым быть существенно богаче исходной теории,.

Определение 12.2.2. Th_2 — семантическое распространение теории Th_1 сигнатуры σ на сигнатуру $\sigma_1 \supset \sigma$, если всякая модель Th_1 может быть без изменения универса и интерпретаций понятий из σ продолжена до модели Th_2. Th_2 — семантическое несущественное расширение, если такое продолжение модели единственно.

Предложение 12.2.1. 1. *Каждое несущественное расширение является семантическим распространением.*

2. *Каждое семантическое распространение является консервативным расширением.*

Доказательство. Пункт 1. Поскольку все новые понятия определимы через старые, пункт очевиден.
Пункт 2. Поскольку всякая модель Th_1 продолжается до модели Th_2, очевидно, что формула исходной сигнатуры, опровергаемая на какой-либо модели Th_1, опровергается и на продолжающей ее модели Th_2. Таким образом, Th_2 не добавляет новых теорем в старой сигнатуре, что и требовалось доказать.
Конец доказательства

12.3 Теорема Крейга об интерполяции

Рассмотрим один из важнейших результатов математической логики. Покажем, что, если *в логике* доказуема импликация от A к B, то имеется промежуточная формула C, содержащая лишь общие для них понятия.

[1]Точнее, алгоритм. Но этого понятия мы еще не ввели. Впрочем, наложенные ниже ограничения делают данный способ для конечных сигнатур алгоритмом.

Формулировка данного результата представляется интуитивно очевидной, но на самом деле эта “очевидность” — показатель того, что мы склонны *потребовать* выполнения такого свойства для логической системы. Во втором томе Вы увидите, насколько легко разрушается теорема интерполяции для неклассических логик.

Пусть имеются две сигнатуры σ_1 и σ_2. Пусть сигнатура σ (возможно, пустая) является их пересечением. Если сигнатура пустая, то элементарными формулами данной сигнатуры будем считать $\top$ и $\bot$.

Теорема 12.1. Теорема Крейга об интерполяции (Craig) *Если в классической логике доказуема формула $A \Rightarrow B$, где A — формула сигнатуры σ_1, B — формула σ_2, то найдется формула C сигнатуры σ, такая, что в логике доказуемы импликации $A \Rightarrow C$ и $C \Rightarrow B$.*

Такая формула называется *интерполяционной формулой* или *интерполянтом.*

Доказательство. Воспользуемся аппаратом семантических таблиц. Формула доказуема, если у нее есть замкнутая семантическая таблица. Внесем в ее определение лишь маленькое видоизменение: противоречиями будут считаться формулы $\models \bot$ и $=\!\!| \top$. Интерполянт построим, исходя из данной таблицы, рекурсией по дереву таблицы. Естественно, для индуктивного доказательства теорему придется несколько обобщить, сформулировав инвариант индукции.

Индуктивное утверждение

Пусть σ_1, σ_2 — произвольные сигнатуры, σ — их пересечение. Секвенция $\Gamma \oplus \Delta$ такова, что формулы из подсеквенции Γ записаны в сигнатуре σ_1, а формулы из подсеквенцииΔ — в σ_2. Пусть Σ — вывод данной секвенции. Тогда найдется формула сигнатуры σ, такая, что Σ с увеличением количества применяемых правил не более чем в два раза перестраивается в выводы секвенций $\Gamma \oplus \{=\!\!| C\}$ и $\Delta \oplus \{\models C\}$.

Строим C рекурсией по Σ и одновременно даем способ перестройки Σ в два соответствующих вывода Σ_1 и Σ_2.

Базис. Пусть Γ, Δ является противоречием. Тогда противоречие $\models A, =\!\!| A$ может быть одного из четырех видов:

1. Оба его члена принадлежат Γ.

2. Оба его члена принадлежат Δ.

3. $\models A$ принадлежит Γ, а $=\!\!| A$ — Δ.

4. $=\!\!| A$ принадлежит Γ, а $\models A$ — Δ.

Противоречия последних двух типов будем называть *перекрестными*. В перекрестных противоречиях формула A принадлежит сигнатуре σ. Если противоречие принадлежит п. 3, то интерполянтом C будет A, а если п. 4, то $\neg A$. В случае 3 выводом секвенций $\Gamma, \dashv C$ и $\Delta, \models C$ строятся легко: будет само исходное противоречие, а в случае 4 — результат разбиения формулы $\neg A$.

В случае противоречия вида 1 в качестве C берем $\bot$, а в случае 2 — $\top$. Один из выводов обеспечивается исходным противоречием, а другой — добавленной логической константой с несоответствующей ей спецификацией.

Шаг рекурсии. Пусть индуктивное утверждение обосновано для любых выводов с числом применений правил $\leq n$. Докажем его для вывода с $n+1$ правилом. Рассмотрим различные применения правил и перестроим для них интерполянт.

Если правило однопосылочное и не вводит вспомогательную константу, то интерполянт не изменяется. В том из выводов Σ_i, где формула, к которой применяется правило, принадлежит оставляемой части исходной секвенции, оставляем то же правило, примененное к той же формуле, а в другом из выводов применение данного правила просто удаляем, поскольку оно имеет дело с исчезнувшей формулой.

Если правило — двухпосылочное, то для каждой из его посылок мы, по предположению индукции, сопоставили интерполянты C_1, C_2. Создадим из них новый интерполянт таким образом, чтобы применение данного правила не пропадало ни в одном из перестраиваемых выводов. Соответственно, если правило применялось к формуле из Γ, пишем $C_1 \vee C_2$, если к Δ — C_1 & C_2. Опишем теперь перестройку вывода.

$$\frac{\overset{\Sigma_1^1}{\Gamma_1, A_1, \Delta} \quad \overset{\Sigma_1^2}{\Gamma_1, A_2, \Delta}}{\Gamma_1, A, \Delta} \Rightarrow \frac{\overset{\Sigma_1^{10}}{\Gamma_1, A_1, \dashv C_1, \dashv C_2} \quad \overset{\Sigma_1^{20}}{\Gamma_1, A_2, \dashv C_1, \dashv C_2}}{\Gamma_1, A, \dashv C_1 \vee C_2}$$

Здесь Σ_1^1 и Σ_1^2 — два построенных ранее модифицированных вывода, A_1 и A_2 — две части, на которые разбивается специфицированная формула A, входящая в Γ, Γ_1 — то, что остается от Γ после удаления данного экземпляра A. Σ_1^{10} и Σ_1^{20} получаются ослаблениями выводов Σ_1^1 и Σ_1^2, соответственно. Σ_2 получается непосредственным применением правила $\models\vee$ к двум построенным выводам.

И наконец, если правило вводило вспомогательную константу, опять-таки действуем таким образом, чтобы данная вспомогательная константа ввелась в обоих перестроенных выводах. Поэтому, если c_{n+1} вводилась формулой Γ, то заменяем $C(c_{n+1})$ на $\exists x\, C(x)$, где x — переменная, не входящая в C (ни свободно, ни связанно). Если же c_{n+1} вводилась в формуле из Δ, заменяем $C(c_{n+1})$ на $\forall x\, C(x)$. При перестройке вывода возможное вхождение c_{n+1} в интерполянт, которое может помешать введению вспомогательной константы, устраняется:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Sigma_1'}{\Gamma_1, \models A(c_{n+1}), \dashv C(c_{n+1}), \dashv \exists x\, C(x)}}{\Gamma_1, \models A(c_{n+1}), \dashv \exists x\, C(x)}}{\Gamma_1, \models \exists y\, A(y), \dashv \exists x\, C(x)} \qquad \dfrac{\dfrac{\Sigma_2}{\Delta, \models C(c_{n+1})}}{\Delta, \models \exists x\, C(x)}$$

Конец доказательства.

Упражнения к §12.3

12.3.1. Постройте интерполянты для следующих формул:

1. $A \,\&\, (B \vee C) \,\&\, (D \vee E) \Rightarrow (A \,\&\, B) \vee (A \,\&\, C) \vee (A \,\&\, E)$;
2. $A \,\&\, (B_1 \vee B_2) \Rightarrow ((A \vee D_1) \,\&\, B_1) \vee (A \,\&\, (B_2 \vee D_2))$
3. $A \,\&\, (B_1 \vee B_2) \,\&\, (C_1 \vee C_2) \Rightarrow$
   $((C_1 \vee D_1) \,\&\, B_1) \vee (A \,\&\, (B_2 \vee D_2)) \vee (E \,\&\, D_1)$

12.3.2. А каков же будет интерполянт, если A и B вообще не имеют общих понятий? Что можно сказать в данном случае про формулу $A \Rightarrow B$?

12.3.3. В индуктивном утверждении мы позаботились о кванторах всеобщности для сигнатур. В каком пункте нашего доказательства сигнатуры изменяются?

12.3.4. Студент Гениалькис сформулировал новую аксиоматику арифметики, в которой понятия сложения и умножения не встречаются в одной и той же аксиоме, а других операций нет (естественно, в данной аксиоматике есть принцип математической индукции). Он, исходя из этого, установил следующий результат:

Если в арифметике доказано утверждение вида $A \Rightarrow B$, где A не содержит умножения, а B не содержит сложения, то найдется формула C, содержащая лишь предикат равенства и константы, которая является интерполянтом. Что Вы ему ответите?

12.4 Теорема Бета об определимости

Докажем теперь, что семантическое несущественное расширение — то же самое, что и несущественное расширение. Для этого достаточно установить определимость через понятия сигнатуры σ одного предиката, однозначно определяющегося в любой модели исходной теории.

Определение 12.4.1. Пусть дана сигнатура σ_1 и ее подсигнатура σ. Предикат $P \notin \sigma$ *определим* через σ в теории Th, если в сигнатуре σ есть такая формула $A(x_1, \ldots, x_n)$, свободные переменные которой $x_1, \ldots, x_n$, что в теории Th доказуемо

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n (A(x_1, \ldots, x_n) \Leftrightarrow P(x_1, \ldots, x_n)).$$

Теорема 12.2. (Теорема Бета об определимости) *(Beth, 1952) P определим через σ тогда и только тогда, когда в любых двух моделях M_1, M_2 теории Th с одинаковыми универсами и одинаковыми значениями понятий из σ значения P совпадают.*

Доказательство. Очевидно, что определимое понятие сохраняет свои значения во всех интерпретациях, где одинаковы значения определяющей его сигнатуры.

Чтобы доказать обратную импликацию, проведем следующее преобразование теории Th. Отдублируем все предикаты и константы, не входящие в σ, двойник каждого предиката обозначим $\bar{Q}$, двойник константы — $\bar{c}$. Двойником формулы назовем результат замены всех понятий, не входящих в σ, на их двойники. Теперь заменим все аксиомы теории Th, содержащие понятия, не входящие в σ, на их двойники. Получившуюся теорию обозначим $\overline{\mathsf{Th}}$. Очевидно, что всякую модель Th можно изоморфно преобразовать в модель $\overline{\mathsf{Th}}$ и что двойник формулы выводим в $\overline{\mathsf{Th}}$ <u>ттт</u> формула выводима в Th. Последнее легче усмотреть даже не из теоретико-модельных соображений, а непосредственно построив преобразование вывода.

Далее, если теория Th непротиворечива, то непротиворечива и теория $\mathsf{Th} \cup \overline{\mathsf{Th}}$. Ее модель получается просто удвоением интерпретаций понятий, не входящих в σ, в модели исходной теории. Теперь выведем важное следствие из предположения теоремы:

$$\mathsf{Th} \cup \overline{\mathsf{Th}} \vdash \forall \vec{x} (P(\vec{x}) \Leftrightarrow \bar{P}(\vec{x})).$$

В самом деле, возьмем произвольную модель теории $\mathsf{Th} \cup \overline{\mathsf{Th}}$. Из нее естественно получаются две модели теории Th, в которых совпадают универсы и интерпретации понятий из σ. Значит, согласно допущению, в них совпадают и интерпретации предикатов P и $\bar{P}$. А совпадение интерпретаций и означает истинность эквивалентности.

Теперь применяем теорему полноты и получим, что имеется вывод формулы $\forall \vec{x} (P(\vec{x}) \Leftrightarrow \bar{P}(\vec{x}))$ в теории $\mathsf{Th} \cup \overline{\mathsf{Th}}$. Возьмем все аксиомы, участвующие в этом выводе. Тогда в классической логике выводима формула

$$A_1 \mathbin{\&} \cdots \mathbin{\&} A_n \mathbin{\&} \bar{B}_1 \mathbin{\&} \cdots \mathbin{\&} \bar{B}_k \Rightarrow \forall \vec{x} (P(\vec{x}) \Leftrightarrow \bar{P}(\vec{x})), \tag{12.1}$$

где A_i — все задействованные аксиомы теории Th, а $\bar{B}_j$ — все аксиомы теории $\overline{\mathsf{Th}}$, не являющиеся аксиомами исходной теории и участвующие в выводе эквивалентности. Значит, выводима импликация

$$A_1 \mathbin{\&} \cdots \mathbin{\&} A_n \Rightarrow \left(\bar{B}_1 \mathbin{\&} \cdots \mathbin{\&} \bar{B}_k \Rightarrow \forall\vec{x}(P(\vec{x}) \Leftrightarrow \bar{P}(\vec{x}))\right), \tag{12.2}$$

являющаяся эквивалентным преобразованием формулы 12.1. Тогда выводимы следующие две формулы, являющиеся переформулировками обеих импликаций данной условной эквивалентности:

$$\forall\vec{x}\left(A_1 \mathbin{\&} \cdots \mathbin{\&} A_n \mathbin{\&} P(\vec{x}) \Rightarrow \left(\bar{B}_1 \mathbin{\&} \cdots \mathbin{\&} \bar{B}_k \Rightarrow \bar{P}(\vec{x})\right)\right), \tag{12.3}$$

$$\forall\vec{x}\left(A_1 \mathbin{\&} \cdots \mathbin{\&} A_n \mathbin{\&} \neg P(\vec{x}) \Rightarrow \left(\bar{B}_1 \mathbin{\&} \cdots \mathbin{\&} \bar{B}_k \Rightarrow \neg\bar{P}(\vec{x})\right)\right). \tag{12.4}$$

Для первой из этих формул применим теорему Крейга и построим интерполянт C, такой, что

$$\forall\vec{x}\,(A_1 \mathbin{\&} \cdots \mathbin{\&} A_n \mathbin{\&} P(\vec{x}) \Rightarrow C)\,, \tag{12.5}$$

$$\forall\vec{x}\left(C \Rightarrow \left(\bar{B}_1 \mathbin{\&} \cdots \mathbin{\&} \bar{B}_k \Rightarrow \bar{P}(\vec{x})\right)\right). \tag{12.6}$$

Этот C и является искомым выражением P через понятия σ. В самом деле, C записано в сигнатуре σ, поскольку оно находится в общем словаре посылки и заключения импликации 12.3. Далее, в теории Th доказуемо

$$\forall\vec{x}\,(P(\vec{x}) \Rightarrow C)\,, \tag{12.7}$$

а в теории $\overline{\mathsf{Th}}$ —

$$\forall\vec{x}\left(C \Rightarrow \bar{P}(\vec{x})\right). \tag{12.8}$$

Но по изоморфизму между $\overline{\mathsf{Th}}$ и исходной теорией тогда

$$\forall\vec{x}\,(C \Rightarrow P(\vec{x})) \tag{12.9}$$

в теории Th. Искомая эквивалентность доказана.
Конец доказательства.

Применением этой теоремы является, например, следующее рассуждение. Операция извлечения квадратного корня неопределима через алгебраические операции сложения, вычитания, умножения и деления, поскольку, например, в множестве комплексных чисел квадратный корень из -1 можно определить двояко: как i и как $-i$. Эти два определения алгебраически неразличимы, поскольку отображение

$$x + iy \mapsto x - iy$$

является изоморфизмом поля комплексных чисел.

Упражнения к §12.4

12.4.1. Покажите, что операция умножения неопределима через сложение.

12.4.2. Покажите, что деление неопределимо через сложение и умножение.

Глава 13

Неполнота и неформализуемость

13.1 Теорема Тарского о невыразимости истины

Как мы уже говорили, понятие конечности оказывается невыразимым на языке классической логики. Соответственно, никакая теория не может однозначно описывать множество натуральных чисел. Но она в принципе могла бы описывать все формулы данной сигнатуры, истинные на этом множестве, чего было бы часто достаточно. В частности, в таком случае существовал бы алгоритм для вычисления, истинна ли данная математическая формула, и вопрос практической проверки утверждения сводился бы лишь к оптимизации данного алгоритма.[1]

В самом деле, опишем следующий процесс. Будем порождать всевозможные конечные графы и искать среди них доказательство либо замкнутой формулы A, либо ее отрицания.[2] Поскольку одна из этих двух формул доказуема, процесс поиска когда-нибудь закончится и наша программа проверки правильности формул выдаст результат.[3]

---

[1] Таким образом, хотя бы для математики была бы в принципе осуществима мечта Лейбница: вместо того чтобы спорить, вычислять. Но обратите внимание на количество сослагательных наклонений и модальностей в предыдущем предложении.

[2] Этот исключительно примитивный переборный алгоритм был, видимо, впервые предложен испанским схоластом Луллием, затем ехидно прокомментирован Свифтом в его описании Лапутянской академии, а нынешнее время носит вполне приличное название *алгоритма британского музея*.

[3] Заметьте, что в данном рассуждении нет никакой оценки числа шагов, необходимых для выдачи результата. Более того, оно опирается на один принцип, безусловно, приемлемый в традиционной математике, но достаточно часто оспариваемый в кон-

Тщетность надежд на полноту традиционных математических теорий доказал в 1931 г. австрийский математик Курт Гёдель, тот самый, который доказал до этого полноту классической логики. Доказательство Гёделя было весьма трудным технически, но к нынешнему времени появилась возможность дать более прозрачное его изложение. Мы начнем с результата, доказанного польским логиком А. Тарским в 1928 г., который может считаться идейной основой результата Гёделя.[4]

Как известно, определение истинности формул логического языка дается индуктивно. Пусть у нас зафиксировано некоторое кодирование формул логического языка термами нашего языка (в частности, такое кодирование может иметься в языках, содержащих натуральные числа, поскольку слова в данном конечном алфавите естественно кодируются как натуральные числа в соответствующей системе счисления: см. стр. 129.) Пусть, далее, кодирование настолько удобное, что мы можем выразить подстановку, т.е. построить формулу $Subst(x, y, z)$, такую, что

$$\forall x \, \forall y \, \exists 1 z \, Subst(x, y, z)$$

для любого кода a формулы $A(x)$ с одной свободной переменной x и для любого объекта b объект $\iota z A(a, b, z)$ является кодом $A(b)$. Тогда, согласно результату об описательных определениях, мы можем ввести функцию $\mathrm{sub}(A, b)$, вычисляющую по коду формулы A, имеющей свободную переменную, и по объекту b код формулы, являющейся подстановкой b вместо x в данную формулу. Код формулы A обозначим $\lceil A \rceil$.

Определением истинности по Тарскому называется такая формула Tr, что для любого кода замкнутой формулы A

$$\mathsf{Tr}(\lceil A \rceil) \Leftrightarrow A. \tag{13.1}$$

структивной, интересующейся не только истинностью формул, но и реализуемостью получающихся конструкций. Этот принцип был явно сформулирован русским математиком А.А. Марковым и носит название *принцип Маркова*.

> Если алгоритм построен, то доказывать конечность числа его шагов можно и косвенными методами.

Естественно ожидать, что при таком подходе число шагов вычисления может оказаться астрономически большим, что, как было доказано, иногда и происходит. Но обычная математическая индукция в этом смысле не намного лучше: при доказательстве конечности с ее помощью число шагов тоже может оказаться невообразимо большим. Конечно, во втором случае их поменьше, но это — разница типа разницы ω и $\omega!$ в нестандартном анализе: одно бесконечно, а другое — невообразимо бесконечно.

[4] Взаимосвязь между этими результатами не была очевидна ни самим Гёделю и Тарскому, ни остальным логикам до середины 40-х гг.

Теорема 13.1. (Тарский, 1928) *Если в языке теории имеется отрицание и она достаточно богата, чтобы выразить подстановку, то истинность неопределима по Тарскому.*

Доказательство. В самом деле, пусть имеется определение истины $\mathsf{Tr}(x)$. Рассмотрим формулу $B \overset{\triangle}{=} \neg\, \mathsf{Tr}(\mathrm{sub}(x, x))$. Содержательно она утверждает, что формула ложна на своем коде. Тогда по определению и по свойству (13.1) имеем:

$$B(\ulcorner B \urcorner) \Leftrightarrow \neg\, \mathsf{Tr}(\mathrm{sub}(\ulcorner B \urcorner, \ulcorner B \urcorner)) \Leftrightarrow \neg\, B(\ulcorner B \urcorner).$$

Таким образом, пришли к противоречию.
Конец доказательства.

Далее возникает соблазн заявить, что (хотя бы в случае полной теории) доказуемость является определением истинности по Тарскому и поэтому если в теории можно определить понятие доказательства, то она не может быть полна. Но Гёдель уловил важную ловушку, которая кроется здесь: для того чтобы доказуемость могла считаться определением истины, необходимо, чтобы можно было доказать в теории

$$\exists x\, \mathsf{Proof}(x, \ulcorner A \urcorner) \Leftrightarrow A. \tag{13.2}$$

Здесь $\mathsf{Proof}(x, \ulcorner A \urcorner)$ — формула, выражающая доказуемость. Сам Тарский в эту ловушку не попался, а Гёдель показал, что такое свойство на самом деле намного сильнее непротиворечивости и не может быть выполнено для достаточно богатых непротиворечивых теорий. Тем не менее некоторое ослабление данного свойства выполнено для арифметики, если только вся наша традиционная математика имеет смысл:[5]

Принцип рефлексии:

$$\exists x\, \mathsf{Proof}(x, \ulcorner \exists x\, \mathsf{Proof}(x, \ulcorner A \urcorner) \urcorner)\underline{\text{ттт}}\, \exists x\, \mathsf{Proof}(x, \ulcorner A \urcorner). \tag{13.3}$$

Содержательно это означает, что доказать доказуемость A то же самое, что доказать само A.

Заметим, что определения истинности для подмножеств формул вполне могут существовать. Более того, было показано, что в арифметике

[5]То, что мы делаем такую оговорку о смысле математики — также следствие результатов современной математической логики. Но заметим, что даже ставить вопрос об оценке шансов достоверности математики невозможно, поскольку само понятие оценки, понятие числа немедленно видоизменится, если, не дай Бог, окажется, что современная математика базируется на глубоко спрятанных противоречиях. Впрочем, в той же дыре окажется и современная физика, поскольку вся она основывается на неявном предположении, что величины можно измерять действительными числами, и в некотором смысле даже выводится из такого предположения.

можно определить истинность для формул, имеющих менее n перемен кванторов формулой, имеющей n перемен кванторов.

Неопределимость истинности приводит, в частности, к тому, что принцип математической индукции приходится формализовывать не как одну аксиому, а как схему аксиом, утверждающих свойство индукции для всех формул нашего языка.

Упражнения к §13.1

13.1.1. Можно ли внутри теории множеств построить определение истинности для формул, все кванторы в которых ограничены некоторым множеством?

13.1.2. А произвольным конечным множеством (возможно, своим для каждого квантора)?

13.2 Аксиоматическое описание вычислимости

В современной математике понятие алгоритма является одним из центральных. Оно требует отдельного изучения, и есть много учебников, посвященных данной науке (теории алгоритмов и вычислений.) Недостатком таких изложений часто является излишняя привязанность к конкретному представлению алгоритмов. В данном месте мы изложим основные выводы теории алгоритмов в такой форме, чтобы максимально очистить их логическую суть от конкретной реализации. Это позволяет работать с алгоритмами над любым имеющимся множеством исходных программ и типов данных,[6] скажем, над действительными числами и стандартными функциями действительных чисел. При этом мы заодно можем снять многие вопросы, возникающие у людей, не желающих смириться с отрицательным результатами современной логики и ищущих пути их обхода.

Известно, что одним из основных свойств алгоритмов является их выполнимость. Первоначально выполнимость понималась как возможность исполнения машиной заложенной в нее программы. Но еще до появления современных универсальных машин Тьюринг доказал, что уже простейшая модель такой машины обладает любопытным свойством, которое вовсю используется в современной информатике: есть одна машина (*универсальная*), которая может смоделировать поведение и результаты любой другой. А именно:

---

[6]Именно такая ситуация является практически наиболее распространенной и требует теоретического осмысления.

(Аксиома универсального алгоритма) Имеется такой алгоритм Υ, что для любого другого алгоритма φ найдется его код $\lceil\varphi\rceil$, такой, что результаты вычисления $\varphi(x)$ и $\Upsilon([\lceil\varphi\rceil, x])$ совпадают для любого x.

Возникает вопрос, а почему мы сразу не записали данное утверждение формулой? В частности, потому, что эта аксиома сама по себе ограничивает набор возможных формализаций понятия алгоритма, которые необходимо использовать в соответствующей формуле, и отсекает некоторые из принимаемых обычно по умолчанию вариантов.

Прежде всего, что является входными данными и результатами алгоритма? Из анализа аксиомы универсального алгоритма видно, что несколько неудобно брать в качестве таких данных сами объекты. Лучше пользоваться их структурами. Таким образом, лучше брать не универс U, а множество кортежей над ним U^*. Из технических соображений к U целесообразно добавить два логических значения ИСТИНА и ЛОЖЬ (если их там не было).

Раз у нас есть множество кортежей, то нужно иметь элементарные операции над кортежами. Практика и теория совместно показали, что достаточно иметь одну двуместную операцию APPEND (см. (5.3)), присоединяющую свой второй аргумент к первому. Кроме того, нужны несколько одноместных операций: две, значением которых являются произвольные кортежи либо объекты —

TAIL(x), выделяющая последний элемент кортежа x,
BODY(x),удаляющую из кортежа его хвост, т.е. последний элемент;

и четыре предиката:

ATOM	Проверяет, является ли x элементом исходного множества U.
SIMPLE	Проверяет, что x — кортеж из одного элемента.
TRUE	Проверяет, что x — атом, равный ИСТИНА.
NIL	Проверяет, что x — пустой кортеж [].

Пустой кортеж будем обозначать NULL. Через эти операции выражение, стоящее в аксиоме об универсальном алгоритме, записывается следующим образом:

$$\Upsilon(\mathsf{APPEND}(\mathsf{APPEND}(\mathsf{NULL}, \lceil\varphi\rceil), x)) \tag{13.4}$$

Конечно, мы не будем писать в стиле (13.4); это выражение просто показывает, как записать кортеж через имеющиеся у нас операции, и дает возможность в дальнейшем спокойно использовать конечные кортежи с фиксированным числом элементом, пользуясь следующим соглашением:

Выражение $\mathsf{APPEND}(\cdots(\mathsf{APPEND}(\mathsf{NULL}, t_1), \cdots), t_n)$ обозначается $[t_1, \ldots, t_n]$.

Термы, построенные из заданных известных алгоритмов и предикатов при помощи перечисленных выше операций и имеющие лишь одну свободную переменную x, называются *простейшими композициями* алгоритмов. В компьютерах, как Вы знаете, исполняется только тот алгоритм, который переведен программой-транслятором с языка описаний алгоритмов на язык самой машины. Программа-транслятор является универсальным алгоритмом в смысле нашей аксиомы, а алгоритмический язык — кодированием алгоритмов. Из рассмотрения данного частного случая кодирования видно, что некоторые простые операции над программами тоже должны быть алгоритмичны, а именно:

(Аксиома композиций) Если имеется простейшая композиция $T(\varphi_1, \ \ldots, \ \varphi_n)$ переменных алгоритмов $\varphi_1, \ \ldots, \ \varphi_n$, то имеется алгоритм, выдающий для кортежа кодов $[\lceil\varphi_1\rceil, \ \ldots, \ \lceil\varphi_n\rceil]$ код $\lceil T(\varphi_1, \ \ldots, \ \varphi_n)\rceil$.[7]

Докажем, что

Предложение 13.2.1. *Из двух принятых выше аксиом следует невозможность построить всюду определенный универсальный алгоритм.*

Доказательство. Рассмотрим выражение $\psi(x) \stackrel{\triangle}{=} [\Upsilon([x,x]), \mathsf{NULL}]$. Это — простейшая композиция и она является алгоритмом. Пусть π — ее код. Тогда $\Upsilon([\pi,\pi])$ есть по определению универсального алгоритма $\psi(\pi)$. По определению ψ, последнее выражение записывается как $[\Upsilon([\pi,\pi]), \mathsf{NULL}]$. Таким образом, мы получили, что кортеж $\Upsilon([\pi,\pi])$ не меняется после добавления еще одного элемента, чего не может быть. Значит, значение $\Upsilon([\pi,\pi])$ не определено.
Конец доказательства.

Итак, мы видим, насколько увязываются между собой элементы формализации понятий. Приняв две естественных аксиомы вычислимости, мы уже не имеем права делать математическими представлениями алгоритмов функции. Мы должны рассматривать, как минимум, частично определенные функции. Таким образом, слишком рано заменив слова естественного языка на “точные” математические термины, мы можем

[7] Примечание для математиков. Такие кодирования алгоритмов являются *главными вычислимыми нумерациями* (см. [14]), но мы не прикладывали никаких усилий к тому, чтобы минимизировать требования и получить в точности это понятие.

зайти в тупик. Сначала уясняйте задачу и ситуацию, минимально пользуясь символами, а затем уже подставляйте действительно точные, но подходящие к случаю, понятия.

Заметим, что результат о неопределенности не запрещает возможности недетерминированных алгоритмов, которые при одних и тех же начальных данных могут давать разные результаты. Поэтому мы старались нигде не использовать знак равенства, а говорить осторожнее: дает тот же результат. Утверждение, что алгоритм μ на входных данных a может давать результат b, обозначается

$$\mu(a) \to b.$$

Равенство будем использовать лишь в том случае, если результат имеется и только один.

Таким образом, точная формальная запись свойств универсальной функции может выглядеть как в следующей формуле:

$$\Upsilon\,(\mathsf{APPEND}(\mathsf{APPEND}(\mathsf{NULL}, \lceil\varphi\rceil), x)) \to y \Leftrightarrow \varphi(x) \to y. \qquad (13.5)$$

Но данная формулировка, хотя формально и безупречна, содержательно может подвести, поскольку часто нам важен не только конечный результат, но и процесс его вычисления. Пока что вычисления оставим в покое.

Последний принцип, который мы выделим в описании алгоритмов, дает возможность определять процедуры рекурсивно, сами через себя. Чтобы максимально ясно выразить его, воспользуемся идеей формулировки Дж. Маккарти. Заметим, что простейшие композиции, в которых последним применялся предикат, можно сами рассматривать как предикаты, поскольку любое их возможное значение может быть только логическим. Такие предикаты будем называть простейшими алгоритмическими. Определим условные термы следующим образом:

Определение 13.2.1. Если t — простейшая композиция, то t — условный терм.
Если P — простейший алгоритмический предикат, а t и u — условные термы сигнатуры σ, то

$$\mathsf{if}\ P\ \mathsf{then}\ t\ \mathsf{else}\ u\ \mathsf{fi}$$

условный терм той же сигнатуры. Его значения определяются следующим образом:

$$\begin{array}{c} \mathsf{if}\ P\ \mathsf{then}\ t\ \mathsf{else}\ u\ \mathsf{fi} \to b \\ (P \,\&\, t \to b) \lor (\neg\, P \,\&\, r \to b). \end{array} \quad \Leftrightarrow$$

Таким образом, если условие не определено, то условный терм тоже неопределен, а вот если одно из выражений не определено, то условный терм может быть определен.

> **(Аксиома о рекурсивном определении)** Если все функции сигнатуры σ проинтерпретированы как алгоритмы, ψ не входит в σ, а $t(\psi, x)$ — условный терм со свободной переменной x в сигнатуре σ, пополненной ψ, то имеется алгоритм, такой, что
>
> $$\psi(a) \to b \Leftrightarrow t(\psi, a) \to b.$$
>
> Его определение записывается в форме
>
> $$\psi(x) \leftarrow t(\psi, x).$$

Пример 13.2.1. Рекурсивное определение функции, выделяющей из кортежа первый элемент, может быть задано следующим образом:

$$
\begin{array}{l}
\mathsf{FIRST}(x) \leftarrow \\
\ \mathsf{if}\ \mathsf{ATOM}(x)\ \mathsf{then}\ \mathsf{NULL}\ \mathsf{else} \\
\ \ \mathsf{if}\ \mathsf{NIL}(x)\ \mathsf{then}\ \mathsf{NULL}\ \mathsf{else} \\
\ \ \ \mathsf{if}\ \mathsf{SIMPLE}(x)\ \mathsf{then}\ \mathsf{TAIL}(x)\ \mathsf{else} \\
\ \ \ \ \mathsf{FIRST}(\mathsf{BODY}(x)) \\
\ \mathsf{fi}\ \mathsf{fi}\ \mathsf{fi}
\end{array}
$$

Заметим, что мы умалчивали, какое же значение принимают исходные функции на неподходящих аргументах (скажем, BODY, если ей подать атом или пустой кортеж). Пример 13.2.1 заодно показывает, что можно просто определять новые алгоритмы так, чтобы сомнительные случаи исключались заранее (оставались в другой альтернативе условного терма). Так что если нам зачем-то нужна всюду определенность элементарных композиций, то эти функции можно доопределить произвольным образом.

Пример 13.2.2. Поскольку мы доказали, что не все алгоритмы определены на всех значениях, естественно ожидать, что наша главная операция рекурсивного определения приводит к неопределенным функциям. И в самом деле, рассмотрим

$$\mathsf{ERR}(x) \leftarrow \mathsf{APPEND}(\mathsf{ERR}(\mathsf{APPEND}(x, \mathsf{NULL})), \mathsf{NULL}).$$

Вычисление данного алгоритма не может привести ни к какому результату ни при каком значении x. В самом деле, результат должен был являться кортежом, поскольку последней применяется функция APPEND. Тогда результат для $[x, \mathsf{NULL}]$ должен быть на один элемент короче, и так далее. Получается бесконечный спуск в длинах значений.

Заметим, что при стандартной семантике рекурсивных процедур не определен гораздо более простой алгоритм:

$$\mathsf{ERR1}(x) \leftarrow \mathsf{ERR1}(\mathsf{APPEND}(x, \mathsf{NULL}))).$$

Но здесь логически привести к противоречию предположение о существовании значения не удается, и можно представить себе семантику алгоритмического языка, раскрывающего такие определения в тождественную функцию (тоже подходящую в качестве решения такого рекурсивного уравнения).

Из неопределенности вычислимых функций (функций, определяемых алгоритмами) следует, что не для всякого предиката множество его истинности можно задать всюду определенным вычислимым предикатом. Появляются следующие определения:

Определение 13.2.2. Множество называется *разрешимым*, если имеется всюду определенный алгоритм, вычисляющий его характеристическую функцию (таким образом, данный алгоритм должен всегда давать значение, логическое значение, и только одно из логических значений; такой алгоритм называется ***вычислимым предикатом***). Множество называется *перечислимым*, если имеется однозначный алгоритм, дающий значение ИСТИНА тогда и только тогда, когда элемент принадлежит данному множеству.[8]

Например, множество троек $\langle A, a, b\rangle$, где A — код алгоритма, таких, что алгоритм с кодом A дает значение b на входных данных a, является перечислимым, но не разрешимым.

Заметим, что дополнения некоторых перечислимых множеств могут быть неперечислимы. Чтобы легче показать это, рассмотрим еще одну аксиому вычислимости, которая не столь обязательна, как предыдущие, отражая желательное и выполняющееся почти всегда в реализациях свойство вычислений. А именно, мы выразим, что алгоритмы выполняются шаг за шагом и выдают решение через конечное число шагов. Соответственно, привлекая компьютерные аналогии, мы вспоминаем, что некоторые программы не переводятся машиной на свой язык, а исполняются шаг за шагом при помощи специальной программы-интерпретатора. Существование интерпретатора — более сильное свойство, чем существование универсальной функции, и может быть записано следующим образом:

---

[8] Но, конечно же, этот алгоритм может не давать никакого значения, если элемент множеству не принадлежит.

(Аксиома перечислимости) Имеется такой разрешимый предикат Ψ, что для любого алгоритма φ $\varphi(a) \to b$ тогда и только тогда, когда имеется кортеж C, первым членом которого является пара $[\lceil\varphi\rceil, a]$, все последующие члены имеют вид $[\lceil\varpi_i\rceil, a_i]$, где ϖ_i — некоторый алгоритм, а последний — $[\mathsf{NULL}, b]$, на котором $\Psi(C) = \mathsf{ИСТИНА}$.

Ψ можно интерпретировать как предикат, проверяющий, является ли данная конечная последовательность пар начальным отрезком вычисления некоторого алгоритма.

Если принять аксиому перечислимости, то, в частности, для натуральных чисел любое множество, такое, что и оно само, и его дополнение являются перечислимыми, разрешимо. Правда, для действительных чисел и других сложных (не кодируемых достаточно просто натуральными числами) объектов ситуация может быть несколько сложнее.

Порою нужна не разрешимость, а более слабое понятие: *отделимость*.

Определение 13.2.3. Множество Z *отделяет* два непересекающихся множества X и Y, если $X \subset Z$, $Y \subset \bar{Z}$.

Таким образом, отделимость — понятие относительное. Она зависит от рассматриваемой системы множеств и универса.

Теорема 13.2. (Теорема о неотделимости) *Имеются два перечислимых множества X и Y, таких, что нет разрешимого множества Z, отделяющего их.*

Идея доказательства. В качестве таких двух множеств можно взять

$$\{[x, y] \mid \Upsilon([x, y]) \to 0\},$$
$$\{[x, y] \mid \Upsilon([x, y]) \to 1\}.$$

Если предикат равенства вычислим, то любые два одноэлементных множества отделимы. Но, скажем, для действительных чисел естественно, в частности, рассматривать вычислимость на базисе некоторых стандартных непрерывных аналитических функций ($\cdot$, $+$, $-$, $\backslash$, exp, sin, cos, ln $\ldots$) и предиката $<$, определенного как частичный, чтобы сохранить непрерывность: если $x = y$, то значение $x < y$ не определено. Поэтому естественно появляется понятие отделимых элементов: два элемента отделимы, если есть вычислимый предикат, истинный на одном из них и ложный на другом.

Имеется просто формулируемая и общая теорема, показывающая, что для свойств вычислимых функций нельзя почти никогда надеяться на разрешимость. Детерминированный алгоритм φ называется *экстенсиональным* по первому аргументу, если для всех A и B, таких, что функции, ими вычисляемые, одинаковы, имеем $\varphi([A] * X) \to y \Leftrightarrow \varphi([B] * X) \to y$. Таким образом, он на одинаковых функциях дает одинаковые результаты.

Теорема 13.3. (Теорема Райса) *Пусть предикат равенства разрешим. Тогда, если экстенсиональный алгоритм всюду определен, то он не зависит от первого аргумента, т.е.*

$$\begin{aligned}&\forall x, y(x, y \text{ — коды алгоритмов} \Rightarrow\\ &\quad \forall z, u(\varphi([x] * z) \to u \Leftrightarrow \varphi([y] * z) \to u)).\end{aligned}$$

Доказательство. Рассуждаем от противного. Пусть есть такое z, что $\psi = \lambda x\, \varphi([x] * z)$ не является тождественной функцией.

Пусть ERROR — нигде не определенная функция, а e — код одного из алгоритмов, ее вычисляющих. Пусть $\varphi([e] * z) \to a$. Тогда, по экстенсиональности φ, для любого кода e_0 нигде не определенной функции $\varphi([e_0] * z) \to a$. Поскольку ψ не является тождественной, найдется такой код d, соответствующий некоторой вычислимой функции χ, что $\varphi([d] * z) \to b$. Теперь построим следующее определение:

$$\xi(f, x, y) \leftarrow \mathsf{if\ ATOM}(\Upsilon(f, x)\ \mathsf{then}\ \chi(y)\ \mathsf{else}\ \chi(y)\ \mathsf{fi}. \qquad (13.6)$$

Эта функция нигде не определена, если$f(x)$не определено, а в противном случае при фиксированных f, x дает χ. Таким образом, проверяя, чему равно $\varphi(\lambda y\, \xi(f, x, y))$, мы могли бы проверить, применима ли функция к аргументу, что является неразрешимой проблемой.
Конец доказательства.

И наконец, рассмотрим ту систему алгоритмов, которая обычно представляется в книгах по теории вычислимости. Она может быть описана следующим образом.

Имеется бесконечно много атомов — натуральные числа. Истину отождествляем с 1, ложь — с 0. Имеются две исходные функции и один предикат, определенные на атомах:

$\mathsf{S}(n)$, дающая по n $n+1$,
$\mathsf{Pd}(n)$, дающая по $n > 0$ $n-1$, а для 0 — NULL;
$\mathsf{Z}(n)$, предикат, проверяющий, равен ли его аргумент 0.

Такие алгоритмы, конечно же, детерминированы, поскольку детерминированы исходные функции, и называются *рекурсивными функциями*. Соответственно, множества, разрешимые при помощи рекурсивных функций, называются *рекурсивно разрешимыми*, а перечислимые с их помощью — *рекурсивно перечислимыми*.

Пример 13.2.3. Построим алгоритм, осуществляющий сложение двух натуральных чисел:

$$\mathsf{PLUS}([m,n]) \leftarrow \mathsf{if}\ \mathsf{Z}(n)\ \mathsf{then}\ m\ \mathsf{else}\ \mathsf{PLUS}([m,\mathsf{Pd}(n)])\ \mathsf{fi}.$$

Другой способ определения алгоритмов показан в определении оператора Mu, строящего минимальное значение n, при котором $\phi([m,n]) = 0$.

$$\mathsf{Muk}(\phi,[m,k]) \leftarrow \mathsf{if}\ \mathsf{Z}\phi(m,k)\ \mathsf{then}\ k\ \mathsf{else}\ \mathsf{Muk}(\phi,[m,\mathsf{S}(k)])\ \mathsf{fi};$$
$$\mathsf{Mu}(\phi,m) \leftarrow \mathsf{Muk}(\phi,[m,0]).$$

Здесь сначала вводится вспомогательный алгоритм, а сама рекурсия идет в другом направлении, чем обычно. Такая операция часто обозначается *квантором минимизации*, введенным Д. Гильбертом:

$$\mu n\, P(n),$$

где P — алгоритмический предикат.

Есть экспериментальный факт, степень подтвержденности которого в настоящий момент неизмеримо выше, чем у любого естественнонаучного принципа: все изобретенные детерминированные алгоритмы выражаются как рекурсивные схемы над примененным базисом исходных функций. Этот факт имеет и теоретическое подтверждение, но уже требующее перехода к неклассической логике. Если несколько ограничить логические средства так, чтобы существование означало построение, то из полученного доказательства можно извлечь рекурсивное определение способа построения искомого объекта через функции, осуществляющие построение результатов примененных утверждений. Как и принято в естественных науках, это экспериментальное наблюдение возведено в ранг общего утверждения, но в отличие от, скажем, законов Ньютона скромно называется *тезис Черча* (может быть, правильнее было бы добавить сюда еще и фамилию Тьюринга):[9]

[9] Алан Тьюринг — английский математик, в конце 30-х гг. создавший математическую модель простейшей вычислительной машины, пригодной для вычисления всего того, что можно фактически сделать в математике. Эта машина имеет память в виде ленты, в каждой ячейке которой стоит символ 0 либо 1, и программу, записанную в постоянной памяти и неизменяемую в момент вычисления, каждая команда в которой состоит в анализе одной из ячеек ленты, записи туда нового значения, сдвиге на одну ячейку влево или вправо и переходе к явно указанной следующей команде. Во время второй мировой войны он внес немалый вклад в победу союзников, обеспечив нечитаемость английских шифров для немцев и дешифровку немецких, а также улучшив методы расшифровки сигналов радиолокаторов. После войны он опубликовал небольшую книгу о только что появившихся тогда компьютерах, в которой, в

> Любой содержательный алгоритм выражается в любой из принятых в настоящее время в математике формализаций понятия алгоритма (в частности, как рекурсивная схема.)

Из этого тезиса следует строгое утверждение, которое доказано для всех используемых в математике понятий алгоритма: все они эквивалентны в том смысле, что алгоритмически определимые функции над минимальным базисом понятий совпадают.[10] Но еще более важно то, что для всех явно выделенных в математике способов построения алгоритмов найдено их представление, согласующееся с тезисом Черча.[11]

частности, заявил, что вопрос: "Может ли машина мыслить?" должен решаться не на эмоциональном уровне, а при помощи точных критериев того, что такое мышление. Он предложил в качестве одного из таких критериев тест Тьюринга.

> Если машина может длительное время поддерживать телетайпный диалог с человеком, сидящим в другом помещении и не знающим, кто его партнер, и тот уверен, что разговаривал с человеком, то она может считаться разумной.

Этот тест в его примитивном понимании был опровергнут Дж. Вейценбаумом, но в данном случае и сама формулировка такого теста, и его опровержение внесли блестящие страницы в историю околокомпьютерной методологии, в которой на самом деле мало утверждений, не являющихся благоглупостями и требующих серьезного опровержения.

Почти сразу после публикации книги А. Тьюринг умер.

[10]Тут есть две ловушки. Во-первых, совпадение определимости не означает сопоставимости ресурсов, необходимых для вычисления данной конкретной функции различными понятиями алгоритма. Так что утверждение, что все можно вычислить на машине Тьюринга, является математической демагогией, когда применимость подменяют определимостью. Во-вторых, если исходный базис брать не минимальным и общепринятым, а произвольным (как делали мы), то даже определимость начинает различаться. Рекурсивные схемы — один из мощнейших в смысле относительной определимости аппаратов теории алгоритмов.

[11]Есть одно исключение, найденное автором. Если имеются вращающиеся черные дыры, то в принципе можно организовать вычислительный процесс таким образом, чтобы получить ответ на неразрешимую задачу, но при этом нужно самому успешно совершить путешествие сквозь такую черную дыру в другую Вселенную. Таким образом, в некотором смысле тезис Черча и общая теория относительности друг другу противоречат. На самом деле именно логики порою выдвигали *обоснованные* возражения против теории относительности, слишком часто подвергавшейся неквалифицированной критике. Так, Курт Гёдель построил пример Вселенной, в которой время может идти по кругу, и тем самым опроверг мнение Эйнштейна, что из общей теории относительности должна следовать однонаправленность времени (после чего сам А. Эйнштейн выдвинул эту работу на одну из самых престижных научных премий). Серьезная теория требует глубоких возражений, а глубинные взаимосвязи научного знания гораздо сильнее, чем можно вообразить, наблюдая современную науку, разделенную на почти невзаимодействующие отрасли.

Упражнения к §13.2

13.2.1. А почему мы не взяли в качестве множества структур более простое множество U^∞?

13.2.2. В доказательстве предложения о невозможности всюду определенного универсального алгоритма есть неточность. Постарайтесь найти ее и исправить, чуть-чуть видоизменив построения и не вводя в рассмотрение никаких новых случаев.

13.2.3. А почему это мы не потрудились ввести логические связки в аксиоматику алгоритмов? Можно ли их там выразить?

13.2.4. Верно ли, что разрешимые множества образуют булеву алгебру?

13.2.5. Постройте алгоритм, выделяющий первый элемент кортежа. Потрудитесь, чтобы он был всегда определенным.

13.2.6. Постройте алгоритм, вычисляющий соединение кортежей.

13.2.7. Пусть алгоритм $\mathsf{ADD}([n,m])$ определен тогда и только тогда, когда n, m — атомы, являющиеся целыми числами, и выдает их сумму. Постройте алгоритм SUM суммирования всех членов кортежа.

13.2.8. Постройте алгоритм, вычисляющий произведение двух натуральных чисел.

13.2.9. Постройте предикат, проверяющий равенство двух натуральных чисел.

13.2.10. В наших последних примерах была одна вольность речи: мы определяли рекурсией не $\phi(x)$, а $\phi([m,n])$. Как ее устранить? Намного ли удлинятся при этом определения?

13.2.11. Студент Лыцаренко дал следующее доказательство того, что при выполнении аксиомы перечислимости любое перечислимое множество с перечислимым дополнением разрешимо:

Пусть алгоритм φ перечисляет само множество, а ψ — его дополнением. Рассмотрим алгоритм типа алгоритма британского музея. Будем перебирать все кортежи из пар, первая пара в которых $[\lceil\varphi\rceil, a]$ либо $[\lceil\psi\rceil, a]$, и проверять каждый из них универсальным интерпретатором, не является ли он вычислением, и если является, получилась ли в результате истина. Поскольку один из алгоритмов перечисляет множество, а другой — его дополнение, в конце концов один из них выдаст истину.

Можете ли Вы найти слабое место в данном рассуждении, и когда оно верно?

13.2.12. Студент Классиков заявил, что не всюду определенные функции — это извращение конструктивистов и информатиков, без них всегда можно обойтись. В самом деле, дополним наш универс элементом ОШИБКА. Положим, что любой кортеж, содержащий такой элемент, равен ему, и что любой алгоритм на аргументе ОШИБКА выдает значение ОШИБКА, и тогда все становится на свои места. Неопределенный в данной точке алгоритм просто выдает в ней значение ОШИБКА. Можете ли Вы что-нибудь возразить?

13.2.13. После того, как его предыдущее рассуждение вызвало непонимание отдельных коллег, Классиков заявил, что они вообще занимаются плохой математикой и, в частности, нарушают принцип бритвы Оккама. Ваши рекурсивные функции можно было бы определить как алгоритмы, получающиеся в пустой исходной сигнатуре (т.е. лишь из тех операций, которые есть в аксиомах, и константы NULL). А что Вы ему на это скажете?

13.2.14. Обобщите по возможности теорему Райса на случай, когда экстенсиональный алгоритм дает на различных функциях два отделимых значения.

13.3 Представимость через доказуемость

В данном параграфе и далее до конца главы теории, если иное явно не оговорено, имеют разрешимое множество аксиом.[12]

Выразимости понятий порою недостаточно для того, чтобы корректно работать с ними формальными методами. Дело в том, что даже выразимые понятия могут находиться в достаточно сложных отношениях с понятием доказательства. Если нечто истина, это не обязательно можно доказать принятыми формальными средствами.[13] Поэтому надо посмо-

[12] На практике неясно, как использовать теорию, если даже понятие ‘быть аксиомой ’ нельзя проверить.

[13] В качестве иллюстрации смотрите судебную практику, но она еще хуже, поскольку там средства доказательства внутренне противоречивы и позволяют порою доказать ложь.

треть, для каких же классов понятий доказуемость совпадает с истинностью.

Очевидно, что надеяться на это можно лишь для разрешимых множеств. Но оказывается, что и наоборот, любое разрешимое множество выразимо таким способом.

Рассмотрим базовую формализацию арифметики. Ее аксиомы практически всегда выполнены в математических теориях, включающих как минимум натуральные числа. Эта аксиоматика известна под именем *арифметики Пеано*.

Сигнатура содержит предикат равенства, константу 0 и три функциональных символа:
одноместный S, интерпретируемый как прибавление 1;
два двуместных — сложение и умножение, с обычной интерпретацией.
Сложение и умножение будем записывать как бинарные операции.

Теория имеет бесконечно много аксиом, но почти все они[14] выражаются единой формулой со свободной предикатной переменной: принципом математической индукции.

$$A(0)\ \&\ \forall x(A(x) \Rightarrow A(S(x))) \Rightarrow \forall x\, A(x). \tag{13.7}$$

Следующая аксиома утверждает, что 0 — начальный элемент натурального ряда:

$$\forall x \neg\, S(x) = 0.$$

Далее идет свойство, утверждающее его линейность:

$$\forall x\, \forall y (S(x) = S(y) \Rightarrow x = y).$$

Далее — свойства сложения, умножения и возведения в степень, а на самом деле их рекурсивные определения через S:[15]

$$\begin{array}{cc}
\forall x(x + 0 = x) & \forall x\, \forall y (x + S(y) = S(x + y)) \\
\forall x(x \cdot 0 = 0) & \forall x\, \forall y (x \cdot S(y) = x \cdot y + x) \\
\forall x(x \uparrow 0 = 1) & \forall x\, \forall y (x \uparrow S(y) = x \uparrow y \cdot x)
\end{array}$$

[14] В математике слова ‘почти все’, как правило, имеют точный смысл. В частности, для счетного множества это почти всегда (уже в обыденном смысле) означает ‘всегда, за исключением конечного числа элементов.’ Тем не менее на математическое ‘почти всегда’ тоже нужно полагаться с оглядкой: ведь конечное число исключений может быть больше, скажем, $10^{10^{10}}$.

[15] Со времен Геделя известно, что возведение в степень можно определить через сложение и умножение *внутри* арифметики, но нам не нужно быть до такой степени пуристами: с возведением в степень конструкция становится прозрачнее, а во всех распространенных математических теориях оно все равно необходимо.

А теперь легко увидеть, что любое число **n** представляется как

$$\overbrace{S(\cdots S}^{n\text{ раз}}(0)\cdots)$$

Такое выражение будем называть *изображением* числа и обозначать просто **n**. Содержательной индукцией легко показать, что доказывается, и даже без помощи аксиомы математической индукции,[16] $\mathbf{n} \neq \mathbf{m}$ для всех отличных друг от друга чисел, что, если P — замкнутый терм, а **n** —его значение, то доказывается $P = \mathbf{n}$, а если **n** не является его значением, то доказывается $P \neq \mathbf{n}$. Итак, на замкнутых элементарных формулах арифметики в любой непротиворечивой теории, содержащей перечисленные выше аксиомы, истинность совпадает с доказуемостью, а ложность — с доказуемостью отрицания.

Определение 13.3.1. Формула $A(\bar{x})$ *арифметически разрешима*, если при каждом наборе значений $\bar{\mathbf{n}}$ $A(\bar{\mathbf{n}})$ либо $\neg A(\bar{\mathbf{n}})$ доказуемо в арифметике.

Очевидно, что пропозициональная комбинация арифметически разрешимых формул арифметически разрешима.

Поскольку понятие вывода алгоритмически проверяемо, и значит, задается рекурсивным предикатом, можно построить такие полиномы P_P и Q_P, что формула

$$\mathsf{Proof}(n, A) \stackrel{\triangle}{=} \exists \bar{x}\, P_P(n, A, \bar{x}) = Q_P(n, A, \bar{x})$$

выражает отношение ‘n является кодом вывода формулы с кодом A’.

Определим теперь $m \leqslant n$ как $\exists x\, m+x = n$, а $m < n$ как $\exists x\, m+S(x) = n$. Следующая группа результатов уже доказывается математической индукцией:

$$\begin{gathered}
\forall x\, \forall y (x \leq y \Leftrightarrow x < y \vee x = y) \\
\neg \exists x\, x < 0 \\
\forall x (x < 1 \Leftrightarrow x = 0) \\
\forall x (x < 2 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1) \\
\cdots \\
\forall x (x < \mathbf{n} \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1 \vee \cdots \vee x = \mathbf{n-1}) \\
\cdots
\end{gathered} \tag{13.8}$$

Из них следует, что из арифметической разрешимости $A(x, \bar{y})$ следует арифметическая разрешимость т. н. конечных квантификаций:

$$\forall x (x < z \Rightarrow A(x, \bar{y})) \quad \exists x (x < z \;\&\; A(x, \bar{y})).$$

[16] Обратите внимание на два разных смысла слава индукция в этой фразе. Но мы подчеркнули их разницу соответствующими определениями (определениями в лингвистическом смысле.)

Итак, арифметическая разрешимость замкнута еще и относительно кванторов по конечным отрезкам натурального ряда. Таким образом, свойство ‘быть простым числом’, выразимое формулой

$$\mathsf{Pr(n)} \stackrel{\triangle}{=} \forall x, y(x < n \,\&\, x > 1 \,\&\, y < n \,\&\, y > 1 \Rightarrow \neg\, x \cdot y = n), \qquad (13.9)$$

арифметически разрешимо. В связи с данным предикатом нам понадобится и известная теорема Евклида о бесконечности множества простых чисел. Она, конечно же, доказывается в формальной арифметике, хотя тот метод доказательства, который приводится учебниках:

> Пусть p — наибольшее простое число. Возьмем число $p! + 1$. Оно не может делиться ни на одно из простых чисел до p, поскольку дает для каждого из них остаток единица. Значит, оно либо само простое, либо делится на простое число, большее p. Полученное противоречие доказывает теорему.

в формальной арифметике прямо не проходит из-за отсутствия функции факториал.[17]

Докажем сначала лемму о том, что для каждого числа n имеется m, делящееся на все числа от 1 до n. Для 0 таким числом является, например, 1. Теперь пусть такое число есть для n. Умножая его на $n+1$, получаем искомое число для $n+1$.

Пусть p — произвольное простое число. По лемме возьмем число, делящееся на все числа до p. Обозначим его k_p. Добавив к нему 1, получаем число, не делящееся ни на одно простое число до p. Но $k_p + 1$ либо само является простым числом, либо делится на некоторое простое число. И в том, и в другом случае получающееся простое число больше p. По разбору случаев теорема доказана.

Теперь можно заметить, что любое натуральное число может рассматриваться как кортеж натуральных чисел. В самом деле, возьмем разложение $n > 1$ на простые множители. Оно имеет вид

$$2^{a_1} \cdot 3^{a_2} \cdots p_k^{a_k+1}.$$

Поскольку степень максимального простого числа, входящего в разложение n, больше 0, мы добавили 1 к a_k. Так что 1 естественно считать кодом пустого кортежа, а n — кодом

$$a_1, a_2, \ \ldots, \ a_k.$$

[17]На самом деле функция факториал, как и практически все другие используемые в математике вычислимые функции, определима в арифметике, но путь к этому определению идет через теорему Евклида.

Еще одно важное свойство арифметической разрешимости — возможность использовать без ее нарушения определимые функции с арифметически разрешимым графиком. В самом деле, докажем следующее.

Определение 13.3.2. Функция f называется *арифметически представимой*, если имеется формула $A(x, y)$, для которой:

1. $f(x) \stackrel{\triangle}{=} \iota y\, A(x, y)$.
2. В арифметике доказуемо $\forall x\, \exists \leq 1 y\, A(x, y)$.
3. На стандартном натуральном ряде истинно $\forall x\, \exists 1 y\, A(x, y)$.
4. $A(x, y)$ арифметически разрешимо.

Предложение 13.3.1. *Если формула $B(x, \vec{y})$ арифметически разрешима, а f — арифметически представима, то арифметически разрешима и*

$$B(f(x), \vec{y}).$$

Доказательство. Рассмотрим расшифровку $A(f(x), \vec{y})$, а именно,

$$\exists z(A(x, z)\ \&\ B(z, \vec{y})).$$

$A(\mathbf{n}, \mathbf{m})$ для любых изображений чисел истинна в любой модели тогда и только тогда, когда $\mathbf{m} = f(\mathbf{n})$ (это следует из арифметической разрешимости.) Далее, вообще для любого элемента a модели арифметики $A(\mathbf{n}, a)$ истинно тогда и только тогда, когда $f(\mathbf{n}) = a$ (это следует из однозначности.) Значит, $A(f(\mathbf{n}), \vec{k})$ доказуемо тогда и только тогда, когда доказуемо $A(\mathbf{m}, \vec{k})$ для соответствующего значения $m = f(n)$.
Конец доказательства.

Теперь легко обосновать арифметическую представимость нескольких функций.

$$n \bmod m = \begin{cases} \text{остаток от деления } n \text{ на } m, & m > 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$n \operatorname{div} m = \begin{cases} \text{частное от деления } n \text{ на } m, & m > 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\log_n m = \begin{cases} \text{целая часть логарифма}, & m > 0,\ n > 1 \\ \text{m}, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$n \operatorname{pow} m = \begin{cases} \text{степень, с которой } n \text{ входит в разложение } m, & n \text{ простое} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\operatorname{dig}(i, n, m) = \begin{cases} i\text{-я цифра в } n\text{-ичном разложении } m, & n > 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Цифры в позиционном представлении числа мы начинаем нумеровать с последней, в соответствии со степенями основания системы. Так что последняя цифра — нулевая, предшествующая ей — первая, и т. д.[18]

Предложение 13.3.2. *Пусть $A(x)$ — арифметически разрешимая формула, для которой задана возрастающая функция φ, определимая в арифметике и с арифметически разрешимым графиком, такая, что в промежутке от $\varphi(n)$ до $\varphi(n+1)$ по крайней мере одно число m удовлетворяет $A(m)$. Тогда свойство "Быть k-тым числом, для которого выполнено A" арифметически разрешимо.*

Доказательство. Рассмотрим формулу

$$\begin{array}{ll} & \forall i(i < \mathbf{n} \Rightarrow A(\mathrm{dig}(i, \varphi(\mathbf{n}), \mathbf{m}))) \\ \& & \forall j(j < \mathrm{dig}(\mathbf{n}, \varphi(\mathbf{n}), \mathbf{m})) \mathbin{\&} A(j) \Rightarrow \exists i(i < n \mathbin{\&} \mathrm{dig}(i, \varphi(\mathbf{n}), \mathbf{m}) = j)) \\ \& & \log_{\varphi(n)} \mathbf{m} = \mathbf{n} \\ \& & \forall i(i < n \Rightarrow \mathrm{dig}(i, \varphi(\mathbf{n}), \mathbf{m}) < \mathrm{dig}(i+1, \varphi(\mathbf{n}), \mathbf{m})). \end{array} \tag{13.10}$$

Она утверждает, что число m кодирует в системе с основанием $\varphi(n)$ первые n последовательных чисел, для которых выполнено A. Формула (13.10) удовлетворяет условиям определения 13.3.2. Следовательно, можно определить функцию $\mathsf{CODE}(n)$, выдающую по n код первых n элементов множества $\{i \mid A(i)\}$. Искомый элемент представляется как $\mathrm{dig}(\mathbf{n}, \varphi(\mathbf{n}), \mathsf{CODE}(\mathbf{n}))$.
Конец доказательства.

Следствие. Функция $\mathsf{Prim}(n)$, вычисляющая n-тое простое число, представима в арифметике.

Для доказательства следствия достаточно сослаться на известный в теории чисел факт, что между n и n^2 обязательно имеется хотя бы одно простое число, и взять в качестве φ, скажем, $\lambda n\, n^4$.

А теперь можно построить арифметически разрешимый предикат

$$\mathsf{Proof}(\mathbf{n}, \mathbf{a}, \mathbf{m}),$$

утверждающий, что $\mathbf{n}$ является кодом вывода в нашей теории Th формулы $A(\mathbf{m})$. Мы не будем проводить это построение явно, поскольку его осуществимость следует из тезиса Черча.

[18] Арабы пишут справа налево, но числа записывают в том же порядке, что и европейцы. Как видите, это несколько логичнее. Переняв арабские цифры, европейцы не сообразили изменить порядок их записи в соответствии со своим направлением письма. Делать этого теперь уже не нужно, единожды сделанное часто превращается в обычай, ломка которого не стоит получаемых преимуществ, но учитывать в математической формализации такие нелогичности стоит.

Упражнения к §13.3

13.3.1. Почему мы не сделали напрашивающегося вывода, что в условиях определения 13.3.2 формула $\forall x\, \exists 1 y\, A(x, y)$ истинна на любой модели арифметики и, следовательно, по теореме полноты, доказуема в ней?

13.3.2. Почему мы не ослабили в определении 13.3.2 требование доказуемости $\forall x\, \exists \leqslant 1 y\, A(x, y)$ до ее истинности на стандартном натуральном ряду, ведь все равно A арифметически разрешимо?

13.3.3. Студент Гениалькис обвинил автора в устарелости изложения и предложил следующий подход:

Мы воспользуемся для установления арифметической разрешимости одним тонким результатом, установленным российским ученым А. Матиясевичем, доказательство которого приводить не будем.

Под диофантовым уравнением будем понимать равенство двух многочленов (возможно, от многих переменных) с положительными коэффициентами. Будем искать решения таких уравнений в натуральных (неотрицательных целых) числах. Оказывается, между такими уравнениями и алгоритмами есть прямая взаимосвязь.

Теорема 13.4. *Для любого рекурсивно перечислимого множества X найдутся два многочлена $P_X(n, \bar{m})$, $Q_X(n, \bar{m})$, такие, что*

$$\exists \bar{m}\, P_X(n, \bar{m}) = Q_X(n, \bar{m}) \Leftrightarrow n \in X. \tag{13.11}$$

Таким образом, найдется многочлен с целыми коэффициентами, для которого данное множество является проекцией множества его корней на первую координату[19] и формула (13.11) представляет данное множество в арифметике, поскольку, очевидно, если она истинна, она доказуема.

Можете ли Вы что-нибудь возразить?

13.3.4. А почему мы не взяли в качестве φ для простых чисел $\lambda n\, n^2$?

[19]Поскольку данный многочлен, как правило, содержит немало вспомогательных переменных, неточно выражаться, что X представляется как его множество корней.

13.4 Неполнота

Неполноту любой непротиворечивой формальной теории, позволяющей выразить понятие доказательства (т. е., в частности, теории, содержащей арифметику), можно теперь установить диагональным процессом, аналогичным использованному в теореме Тарского. Простейшая напрашивающаяся здесь конструкция — взять формулу

$$\neg \exists n \, \mathsf{Proof}(n, a, a) \tag{13.12}$$

и подставить в нее ее собственный геделев номер. Тогда она будет выражать свою собственную недоказуемость и не может быть доказана. Далее, если можно доказать ее отрицание, то отсюда будет следовать существование ее доказательства, но теория непротиворечива, и отрицание ее тоже не может быть доказано.

Но последняя часть данного рассуждения содержит скрытую ловушку: существование доказательства следует лишь семантически в стандартной модели арифметики, и поэтому мало, чтобы теория была непротиворечива, нужно, чтобы ее арифметические теоремы были истинны на стандартном натуральном ряду. Сам Гёдель заметил эту ловушку и явно ее указал, а через несколько лет американский логик Дж. Россер привел более тонкую конструкцию, которая действует в любой непротиворечивой теории и позволяет получить ряд обобщений результатов о неполноте.

$$\mathsf{Rosser}(n, \ulcorner A \urcorner) \overset{\triangle}{=} \mathsf{Proof}(n, \ulcorner A \urcorner, \ulcorner A \urcorner) \Rightarrow \exists i (i < n \,\&\, \mathsf{Proof}(i, \ulcorner \neg A \urcorner, \ulcorner A \urcorner)). \tag{13.13}$$

Эта формула устанавливает недоказуемость самой себя более тонким способом: она утверждает для своего вывода существование вывода собственного отрицания с более коротким кодом.

Пусть имеется доказательство формулы

$$\forall n \, \mathsf{Rosser}(n, \ulcorner \forall n \, \mathsf{Rosser} \urcorner). \tag{13.14}$$

Оно имеет некоторый код $\mathbf{n}_0$. Тогда, согласно (13.13),

$$\exists i (i < \mathbf{n}_0 \,\&\, \mathsf{Proof}(n, \ulcorner \neg \forall n \, \mathsf{Rosser} \urcorner, \ulcorner \forall n \, \mathsf{Rosser} \urcorner)).$$

Но последняя формула арифметически разрешима и, значит, доказуема тогда и только тогда, когда истинна. Значит, наша теория противоречива, чего не может быть.

Пусть теперь имеется доказательство отрицания формулы (13.14). Тогда это доказательство имеет код $\mathbf{n}_0$. Для произвольного $k > \mathbf{n}_0$ доказывается заключение импликации из формулы Россера, а $k \leq \mathbf{n}_0$ лишь конечное число, и по арифметической разрешимости и по непротиворечивости рассматриваемой теории для них можно установить, что ложна посылка. Итак, из доказуемости отрицания формулы Россера следует сама формула Россера.

Теорема 13.5. (Теорема Гёделя о неполноте в форме Россера) *По любой непротиворечивой теории* Th*, содержащей арифметику, можно построить такую формулу* R_{Th}*, что ни она сама, ни ее отрицание не доказуемы в* Th.

Есть одно любопытное неформальное следствие теоремы о неполноте, на фундаментальный логический характер которого впервые обратил внимание Брауэр в 1908 г.[20]

Парадокс института математики.

Пусть некий Институт Математики взял заказ на вычисление оптимального значения некоего параметра, который может изменяться от -1 до 1. После годичных глубоких исследований выдана теорема о том, что искомое оптимальное значение есть 0, если не существует максимального простого числа-близнеца, и $\sin p$, если таким числом является p. Поскольку число π иррациональное, $\sin p$ может оказаться где угодно на отрезке $(-1, 1)$. Спрашивается, получил ли заказчик хоть какую-то информацию в результате данного, с точки зрения классической логики, однозначного и полностью определенного ответа?

Упражнения к §13.4

13.4.1. А как же теория, рассматривавшаяся нами в главе, посвященной

[20]Это было сделано в его диссертации, носившей вызывающее название: “О недостоверности логических принципов.” В ней обосновывалось положение, что классическая логика была создана для конечных объектов, и поэтому при ее применении к бесконечным, идеальным объектам должны обязательно возникать несоответствия тому, чего мы могли бы ожидать при прямом переносе примитивных результатов. В частности, он обратил внимание на то, что если мы желаем, чтобы доказанное утверждение с квантором существования $\exists x\, A(x)$ действительно давало построение такого x и при этом допускаем бесконечные множества (хотя бы совокупность натуральных чисел), то необходимо отказаться от закона исключенного третьего $A \vee \neg A$ и от закона двойного отрицания $\neg\neg A \Rightarrow A$. В 1908 г. уже было известно, что некоторые математические теоремы о существовании не дают построений, но такие теоремы имелись лишь в теории множеств и использовали аксиому выбора, и поэтому бытовало общее мнение, что избавиться от них можно пересмотром математических аксиом. Брауэр же подчеркнул, что никакой пересмотр конкретных аксиом здесь не поможет, что и подтвердилось через два десятилетия.

нестандартному анализу, аксиомами которой являются все истинные формулы арифметики? Она ведь содержит формальную арифметику, непротиворечива, но полна.

13.5 Вокруг теоремы Гёделя

Название данного параграфа заимствовано у К. Подниекса, который так назвал свою книгу [21].[21] Кроме того, в главе существенно использованы идеи книги [12].

Теорема Гёделя о неполноте — результат, плохо приемлемый психологически для многих математиков и гуманитариев. Она подрывает вульгарно понимаемую веру в познаваемость мира научными методами, являющуюся одной из догм 'религии прогресса': оказывается, что даже самая точная из наук не может познать даже простейшее множество объектов — натуральные числа. Поэтому весьма распространенной являлась реакция, когда она игнорировалась как не имеющая отношение к реально используемым в математике утверждениям.

Первую брешь на данном пути пробил результат Коэна о неразрешимости континуум-гипотезы в традиционной системе теории множеств.

Континуум-гипотеза Кантора заключается в том, что нет множеств промежуточной мощности между натуральным рядом и множеством действительных чисел. И действительно, несмотря на все старания математиков, таких множеств построить не удавалось. В конце 30-х гг. Гёдель доказал, что континуум-гипотезу нельзя опровергнуть в теории множеств. В 1961 г. молодой английский математик П. Дж. Коэн доказал, что в теории множеств нельзя ее и доказать.

Арифметика продержалась в отношении отсутствия интересных для математиков-нелогиков неразрешимых утверждений лет на 15 дольше, но в конце концов был получен любопытный результат, приоткрывающий еще одну взаимосвязь между неразрешимостью и вычислимостью, и более того, имеющий отношение к программированию.

В 20-х гг. английский математик П. Рамсей доказал интересную теорему, вариант которой для конечных множеств мы приведем:

[21] Значительная часть материала также ведет начало от данной книги, являвшейся одним из самых глубоких комментариев к теореме Гёделя. Интересно, что ее постигла судьба многих умных работ: рецензия на нее (весьма авторитетного логика, славившегося дотошностью) была просто разгромной. Более того, в книге Подниекса автор заметил элементы того, что он пытается проводить как систему здесь: многоуровневого критического мышления, когда положительный результат на одном уровне часто означает отрицательный на другом, и наоборот. Видимо, эта особенность книги и вызвала раздражение мощного, но одноуровневого ума рецензента.

Теорема 13.6. (теорема Рамсея) *Для каждого k найдется такое число l, что в произвольном графе с l вершинами найдется либо полный подграф с k вершинами, либо такие k вершин, что никакая пара из них не связана дугой.*

Такая формулировка неявно утверждает существование функции φ, строящей l по k. Теорема Рамсея может быть доказана в арифметике, но это доказательство дает очень плохую оценку для φ, и почти сразу же стало известно, что эту оценку можно намного улучшить. Однако при установлении лучшей оценки использовались сильные теоретико-множественные соображения.

В середине 70-х гг. было доказано, что имеется такая оценка φ, которая не может быть обоснована в арифметике, но обосновывается в теории множеств. А далее пошла целая серия результатов, которые установили, что оценку можно улучшать и улучшать, но каждое улучшение требует все более и более сильных фрагментов, а затем и расширений, традиционной теории множеств.

Но ведь теорема Рамсея может использоваться (и на самом деле неоднократно использовалась) для обоснования вычислительных алгоритмов, и здесь вопрос о величине числа l приобретает важное значение. Итак, получился интересный неформальный результат: *чем эффективнее составленная программа, тем сложнее может быть ее обоснование и тем более абстрактных понятий оно может потребовать*. Так что те, кто утверждает, что нужно пользоваться лишь реальными понятиями и изгонять идеальные, абстрактные, рискуют проиграть не только в сложности и глубине рассуждений, но и в силе реальных методов.

Теперь рассмотрим аргументы, показывающие, почему практически невероятно как-либо обойти теорему Гёделя о неполноте и нельзя никаким образом ‘конечнозначно’ проинтерпретировать ее, скажем, так:

> Любая формула либо доказуема, либо опровержима, либо неразрешима.

Обобщим теорему Гёделя в форме Россера следующим образом. Возьмем произвольное перечислимое множество чисел X. Тогда имеется формула $A_X(x)$, такая, что доказуемо $A(\mathbf{n})$ тогда и только тогда, когда $n \in X$.

Рассмотрим теперь следующий вопрос. Пусть даны два непересекающихся перечислимых множества X и Y. Можно ли построить такую формулу, которая в случае полноты отделяла их друг от друга? Здесь можно воспользоваться идеей Россера и применить ее от противного. Пусть формула $A(n, m)$ такова, что она арифметически разрешима и

$\exists y\, A(n,y) \Leftrightarrow n \in X$. Наличие такой формулы следует из аксиомы перечислимости. Аналогично, пусть $B(n,m)$ обладает таким же свойством для Y. Построим теперь по образу Россера формулу

$$\begin{array}{l} \mathsf{DR}(k,n,m,\ulcorner C(x)\urcorner) \stackrel{\triangle}{=} \\ \quad (A(n,m) \Rightarrow \mathsf{Proof}(k,\ulcorner C(n)\urcorner,\ulcorner C(n)\urcorner) \Rightarrow \\ \qquad \exists i(i<k\ \&\ \mathsf{Proof}(i,\ulcorner \neg\, C(n)\urcorner,\ulcorner C(n)\urcorner))))\ \& \\ \quad (B(n,m) \Rightarrow \mathsf{Proof}(k,\ulcorner \neg\, C(n)\urcorner,\ulcorner \neg\, C(n)\urcorner) \Rightarrow \\ \qquad \exists i(i<k\ \&\ \mathsf{Proof}(i,\ulcorner C(n)\urcorner,\ulcorner C(n)\urcorner))). \end{array} \tag{13.15}$$

Содержательно данная формула означает отсутствие доказательства $C(n)$ при $n \in X$ и $\neg\, C(n)$ при $n \in Y$. Рассуждениями, аналогичными теореме Россера, получаем, что в любом непротиворечивом расширении арифметики невыводимо $\forall x, y\, \mathsf{DR}(\mathsf{x},\mathsf{n},\mathsf{y})$ при $n \in X$ и его отрицание при $n \in Y$.

Из усиленной формы конструкции Россера следует, что не существует алгоритмической расширяющейся последовательности теорий Th_n, таких, что $\forall x, y\, \mathsf{DR}(\mathsf{x},\mathsf{n},\mathsf{y})$ для каждого n разрешимо хотя бы в своей $\mathsf{Th}_{f(n)}$. В самом деле, тогда мы могли бы любую вычислимую функцию доопределить до всюду определенной, чего не может быть.

Из сильной непополнимости вытекает ряд результатов, на которые впервые обратил внимание Подниекс. Есть формулы, для которых неразрешимо утверждение об их неразрешимости и т.д., и даже бесконечное число утверждений, каждое из которых утверждает неразрешимость предыдущего. Не помогает здесь переход и к более сильным теориям для проверки неразрешимости и даже построение целой последовательности таких теорий.

Обобщая ту же конструкцию Россера, можно получить существование для любого n множества n формул, которые не только независимы, но и взаимно независимы: их булева комбинация доказуема тогда и только тогда, когда она является тавтологией. Более того, такие системы могут порождаться значениями одной и той же формулы. Эти построения вынесены в задачи для сильных студентов.[22]

[22] Все эти рассуждения являются частным случаем того, что незнание гораздо более разнообразно по своим формам, чем знание. Умножая свое знание, мы еще сильнее умножаем незнание, поскольку начинаем видеть то, чего не видели раньше, и избавляемся от иллюзий, что ответы на многие вопросы, в обыденной жизни считающиеся однозначными, на самом деле известны. А вообще, нужно всегда помнить, что знание как любого отдельного человека, так и всего рода человеческого конечно, зато невежество его бесконечно (хотя бы потенциально). Поэтому люди, рассуждая совместно, складывают не только свои знания, но и (в первую очередь) свое незнание, и решение, принятое комитетом, как правило, глупее того, которое произнес бы самый тупой из его членов.

Все приведенные выше общие конструкции являются эффективными и достаточно простыми построениями. Таким образом, любая теория преобразуется в пример неразрешимого в ней утверждения, любая эффективная последовательность теорий — в пример утверждения, неразрешимого всеми этими теориями.

Теперь рассмотрим идеи следующей группы результатов. Поскольку сами теории поставляют нам примеры неразрешимых утверждений, они же должны поставлять и способы своего собственного пополнения, так, чтобы эти неразрешимые утверждения были решены. Первый из таких способов пополнения нашел сам Гёдель. Он заметил, что его рассуждения в доказательстве теорем неполноты могут быть проведены в самой теории Th, если к ней добавить формулу, выражающую непротиворечивость этой теории. Следовательно,

Теорема 13.7. (Теорема Гёделя о непротиворечивости) *Непротиворечивость достаточно сильной теории не может быть доказана внутри нее самой.*

Но тогда утверждение о непротиворечивости Th является способом пополнения Th, причем таким, который использует лишь неявно имевшиеся в виду при построении Th предположения (кто же намеренно использует противоречивую теорию в математике?)[23]

Появилось предположение, что в некоем принципе можно достичь доказательства любого истинного предложения арифметики, построив последовательность расширяющихся теорий, каждая следующая из которых утверждает непротиворечивость предыдущей. Конечно же, было понятно, что простой вычислимой последовательности здесь недостаточно, поскольку результаты Подниекса интуитивно предвосхищались многими крупными логиками с момента осознания теоремы Гёделя. Но почему не продолжать построение по ординалам?

Оказалось, что непротиворечивость — слишком слабый принцип, если даже вести расширение по всем ординалам. Она годится лишь для дока-

[23] На самом деле ситуация намного тоньше. Если взять другое кодирование утверждения о непротиворечивости, идеей которого является повторять конъюнктивно A и дизъюнктивно ее отрицания столько раз, какова длина рассматриваемого доказательства A, то непротиворечивость арифметики можно доказать в самой арифметике. Другое дело, что это кодирование неявно включает в себя непротиворечивость арифметики. Словом, нигде в окрестностях теоремы Гёделя не надейтесь на простые и однозначные рецепты и истолкования. Поэтому практически все популярные философские комментарии к этой теореме неверны. Все вышеизложенное можно суммировать следующим образом: не верьте никаким философским комментариям к теореме Гёделя, кроме изложенных в книге [12] (но и этим тоже не верьте!)

зательства утверждений вида

$$\forall x(\varphi(x) = 0),$$

где φ — вычислимая функция. Однако практически одновременно с результатами Гёделя появился еще один, гораздо более мощный, чем непротиворечивость, способ расширения теорий. Конечно же, он интуитивно базируется на гораздо более мощных предпосылках.

Австрийский логик Р. Карнап предложил применять для того, чтобы гарантировать доказуемость любой истинной формулы, следующее правило:

$$\frac{A(\mathbf{0}),\ \ldots,\ A(\mathbf{n}),\ \ldots}{\forall x\, A(x)}$$

Это правило имеет бесконечное число посылок — для всех стандартных натуральных чисел. Естественно, если рассматривать другую теорию со стандартной моделью, то посылки правила должны пробегать по всему универсу данной модели. Карнап считал очевидным, что такого правила достаточно для полноты теории, но эта очевидность оказалась столь глубокой теоремой, что была в чуть более слабом виде доказана лишь в 50-х гг., а последние штрихи поставил в начале 70-х гг. А.Г. Драгалин.

Конечно же, понятие доказательства с применением правила Карнапа сразу же перестает быть конечным объектом и становится индуктивным определением общего вида. Конечно же, эффективно построить бесконечно много доказательств посылок тоже нельзя, необходимо иметь общий алгоритм такого доказательства. И поэтому в конце 50-х — начале 60-х гг. стало интенсивно исследоваться *формальное правило Карнапа*:

$$\mathsf{FCR}_{Th} = \frac{\forall x\, \exists y\, \mathsf{Proof}_{Th}(x, y, \ulcorner A(x) \urcorner)}{\forall x\, A(x)}$$

Итак, формальное правило Карнапа заменяет бесконечное число выводов на доказательство выводимости при произвольном x. Непротиворечивость самой Th легко выводится однократным применением правила Карнапа для доказательств внутри Th. Доказано, что добавление формального правила Карнапа позволяет вывести многие формулы, не выводимые из непротиворечивости.[24] Доказано, что для любой истинной формулы арифметики имеется некоторое кодирование ординалов до ω^ω,

[24]Заметим, что принцип рефлексии (13.3) является частным случаем правила Карнапа. Хотя он не изменяет отношения выводимости, но может значительно укоротить многие выводы.

такое, что в трансфинитной последовательности теорий, начинающейся с $\mathsf{Th}_0 = \mathsf{PA}$ и определяемой правилами

$$\begin{cases} \mathsf{Th}_{\alpha+1} & = & \mathsf{Th}_\alpha \cup \mathsf{FCR}_{Th_\alpha}, \\ \mathsf{Th}_{\lim_{\beta_n}} & = & \bigcup_{n\in\mathbf{N}} \mathsf{Th}_{\beta_n}. \end{cases}$$

где β_n — стандартная возрастающая последовательность ординалов, определяющая при данном кодировании предельный ординал α, найдется теория, в которой выводима данная формула. Но, конечно же, при любом фиксированном кодировании ординалов можно доходить и до ε_0, и до более страшных ординалов, применяемых лишь специалистами по теории доказательств, а полноты все равно не будет.

И наконец, рассмотрим вопрос о фрагментах арифметики. Очевидно, что уже они неполны. Но есть еще один любопытный эффект неполноты, связанный с тем, что каждый фрагмент арифметики, где индукция ограничена формулами вида

$$\mathsf{K}_1 x_1 \dots \mathsf{K_n} x_n R(\vec{x}),$$

где R — разрешимое отношение, K_i — кванторы, существенно слабее всей арифметики, а именно, непротиворечивость такого фрагмента доказывается в следующем. Поэтому в 50-е гг. была доказана теорема, названная *парадоксом изобретателя*.

Теорема 13.8. *(Ван Хао, 1955) Для каждого n найдется формула вида $\forall x\, R(x)$ с разрешимым предикатом R, для доказательства которой в арифметике понадобится индукция по формулам с не менее чем n кванторами.*

Итак, в арифметике ситуация качественно меняется по сравнению с исчислением предикатов: теперь использование промежуточных сложных лемм не просто сокращает вывод, а делает его вообще возможным[25].

Упражнения к §13.5

13.5.1. Докажите, что, если система n формул $A_1, \dots, A_n$ такова, что ни одна из конъюнкций

$$\mu_1 A_1 \,\&\, \cdots \,\&\, \mu_n A_n,$$

где каждое из μ_i есть пустое слово либо знак отрицания, неразрешима, то булева комбинация этих формул выводима <u>ттт</u>, когда она является тавтологией (такую систему назовем независимой, аналогично независимой системе множеств).

[25]Еще одна иллюстрация к необходимости идеальных объектов и сложных формализмов при открытии ‘простых’ теорем.

13.5.2. Постройте независимую систему формул.

13.5.3. Постройте формулу $A(x)$, такую, что при любом n система $A(0)$, $\dots$, $A(\mathbf{n})$ независима.

13.6 Формализация неформализуемых понятий

Те, кто верует слепо, — пути не найдут.
Тех, кто мыслит, — сомнения вечно гнетут.
Опасаюсь, что голос раздастся однажды:
«О невежды! Дорога не там и не тут!»

(О. Хайям. [20, стр. 42])

Итак, даже в математике достаточно сложные понятия невозможно формализовать. Тем не менее мы вовсю пользуемся их формализациями. Более того, компьютеризация всех сфер человеческой деятельности приводит к (слишком часто неосознанной) формализации и тех понятий, которые всегда трактовались как неформальные. Эта сторона была впервые ярко подчеркнута Дж. Вейценбаумом в его книге [9].[26] Ведь любая

[26]Дж. Вейценбаум — один из ярчайших (но отнюдь не самых преуспевших) представителей направления, известного под названием искусственный интеллект. В середине 60-х годов он создал программу ELIZA (названную по имени героини пьесы Б. Шоу "Пигмалион"), которая имитировала диалог между психоаналитиком и пациентом. Она не пыталась понять человеческий язык (что было в принципе невозможно на том уровне развития компьютеров и информатики), а просто на основе формальных знаний о синтаксисе фраз возвращала человеку его собственные утверждения в виде вопросов либо замечаний. Некоторые из правил переформулировки были весьма остроумны, например, на утверждения типа:

— Никто меня не любит,—

мог последовать вопрос:

— Кого конкретно Вы имеете в виду?

Эта программа послужила эффектным экспериментальным опровержением теста Тьюринга (см. примечание на стр. 331): люди воспринимали программу как вполне разумного и доброжелательного собеседника.

Столь творческая и критически мыслящая личность, как Вейценбаум, не могла быть не шокирована тем, что вокруг его программы, которая была наполовину шуткой, наполовину опровержением почтенной и глубокой гипотезы (Тьюринг, пожалуй, просто переоценил интеллект среднего человека), поднялся невероятный шум как вокруг великого достижения искусственного интеллекта. Это навело его на мысль проанализировать другие "достижения", знаменитые к началу 70-х гг., и выявившаяся картина была просто ужасной: воинствующее полузнание, игнорирующее все достижения мировой гуманитарной и математической мысли, примитивные модели, рекомпьютерная программа заодно является формализацией понятий, с которыми она работает.

И, наконец, компьютеры заставили людей работать со сложными формализациями, причем они, как идеальные бюрократы, строго следуют букве этих формализаций. И тут выявилось, что даже сложные формальные понятия человек склонен понимать как неформальные. Более того, такую особенность человека нельзя высокомерно игнорировать как недоразвитость. Только на этой основе можно дать понятие ошибки в языке программирования.[27]

Поэтому дальше нельзя игнорировать вопрос о том, что же такое формализация неформализуемого, как с ней работать и как не попасться в ловушки, явно имеющиеся в понятии, с самого начала содержащем внутреннее противоречие.

Пожалуй, первым открыто заговорил о формализации неформализуемых понятий новосибирский логик Н.В. Белякин. Он воспользовался ситуацией, возникшей вокруг теоремы Гёделя о неполноте, для представления гуманитарных понятий.

Основная идея Белякина следующая. Гуманитарное понятие (например, любовь, дружба, честь) разъясняется на прецедентах и получает неявное алгоритмическое определение. Но деятели культуры специализируются на том, что каждый раз, когда такое определение становится почти фиксированным и общепринятым (когда возникает формализация), придумывают прецеденты, не подходящие под данное определение.[28] С алгоритмической точки зрения это можно уточнить следующим образом. В каждый данный момент формализация представляет из себя разрешимое подмножество некоторого идеального образа понятия, не являющегося даже перечислимым множеством. Каждая формализация *алгоритмически* порождает прецедент, входящий в идеальное множество, но не подходящий под нее саму. Более того, таким свойством обладает и каждая вычислимая последовательность формализаций. Значит, хотя в не-

---

кламируемые как универсальный решатель задач, разгул агрессивной саморекламы и профанации. Поэтому он написал горькую книгу, говорящую о том, что на самом деле происходит не компьютерная революция, а компьютерная контрреволюция и в науке, и в обществе.

[27]Критерии ошибки в математической формализации достаточно ясны: либо прямое противоречие, либо расхождение с истинностью в стандартной модели. А вот в описании алгоритмических языков очень трудно сделать такую ошибку, которая привела бы к явной невычислимости некоторых конструкций. Поэтому, как ни парадоксально, есть понятие ошибки в программе, но до сих пор практически нет понятия ошибки в том, на чем базируются программы: в определении алгоритмических языков.

[28]В частности, отношения Ромео и Джульетты были прецедентом, не подходившим под почти формализованное в тот момент понятие любви.

котором смысле формализации неформализуемого понятия по Белякину и стремятся к идеальному пределу, но любой реальный предел сам себя помогает опровергнуть (точно так же, как любая непротиворечивая теория сама помогает построить пример неразрешимого в ней истинного утверждения).

Строго определить систему формализаций неформализуемых понятий можно, базируясь на теореме Гёделя о неполноте и результатах теории алгоритмов и теории доказательств. В самом деле, поскольку понятия неформализуемы, они должны иметь не просто расходящиеся, а прямо противоречащие друг другу формализации. Далее, поскольку содержательные понятия тесно взаимосвязаны друг с другом, есть смысл рассматривать их совместную формализацию. И наконец, подмеченный Н. В. Белякиным эффект диагонализации должен, конечно же, иметь место. Таким образом, приходим к следующим принципам, которые естественно принять как постулаты теории неформализуемых понятий.

> Принцип 1. Понятия могут описываться лишь в их взаимосвязи. Совокупность взаимосвязанных понятий может быть описана как сигнатура σ (называемой в гуманитарных исследованиях *тезаурус*).[29]

Скажем, понятия любви и ревности тесно взаимосвязаны и принадлежат одному и тому же тезаурусу.

> Принцип 2. Объем понятия является производным от его содержания и взаимосвязей с другими понятиями.[30]

> Принцип 3. Для гуманитарных понятий и их объемы, и их взаимосвязи все время меняются, их нельзя однозначно зафиксировать.[31]

> Принцип 4. Имеется оператор диагонализации, выдающий по любой эффективно заданной последовательности уточнений рассматриваемых понятий новое уточнение, не совпадающее ни с одним из членов последовательности.[32]

---

[29]Данный постулат не принимался Белякиным, но давно уже использовался (часто неявно) в работах Тарского, Карнапа, Витгенштейна и др.

[30]Пожалуй, впервые этот принцип явно сформулировал Карнап.

[31]А это часто утверждали многие гуманитарии, отрицая возможность применения математики для анализа их понятий. Ну что же, в данном пункте мы с ними согласны.

[32]Н.В. Белякин.

> Принцип 5. Имеется оператор альтернативы, выдающий по каждой паре уточнений (Φ_0, Φ_1), где Φ_1 расширяет Φ_0, новое уточнение Φ_2, расширяющее Φ_0, но несовместимое с Φ_1.[33]

> Принцип 6. Имеются абсолютно общепризнанные соотношения между понятиями (*трюизмы*), но они — самые бесполезные из всех соотношений.

В самом деле, трюизмом является, скажем, описание ревности как отрицательного чувства к объекту действительного или предполагаемого увлечения любимого (любимой). Из этого определения, вполне почтенного для какого-либо научного трактата, никаких позитивных выводов не сделаешь. Зато принципы (принадлежащие противоположным культурам любовных отношений):

> Если ты — джигит, зарежь подонка, посягающего на твою любимую!

> Если ты — светский человек, не дай чувству ревности проявиться наружу!

позитивны, дают конкретную стратегию поведения в соответствующей ситуации, но полностью несовместимы друг с другом.

Теперь надо строить математическую модель. Следующие принципы говорят уже о формализации только что перечисленных содержательных положений на базе теоремы Гёделя о неполноте и ее обобщений.

> Принцип 7. В каждый данный момент для данной конкретной цели взаимоотношения понятий описываются как классическая теория Th_α. Эта теория называется *ипостасью* системы неформализуемых понятий.[34]

Заметим, что здесь сделано сильное предположение о том, что каждая ипостась описывается теорией, применяющей классическую логику. Это предположение нуждается в проверке, и проверка была произведена в первой же работе, описывавшей теорию неформализуемых понятий [19]. В ней было показано, что при естественных предположениях (а именно, принцип 10) уже для неклассической арифметики не удается построить

[33] А этого у него не было, поскольку он первоначально не рассматривал даже отрицание.

[34] Ипостась — в христианском богословии одно из конкретных проявлений непостижимой и бесконечной сущности единого Бога в нашем мире. Ипостасями являются Бог-Отец, Бог-Сын и Бог-Дух Святой. Аналогичное понятие имеется и в иудаизме.

нетривиальной системы расширений, описывающей арифметические понятия как неформализуемые. Таким образом, теория неформализуемых понятий еще ярче подчеркивает исключительную роль классической логики в системе известных логик.

> Принцип 8. Среди этих теорий есть теория Th_0, являющаяся подтеорией любой Th_α.

> Принцип 9. Имеется вычислимая функция φ, строящая по каждой паре теорий $Th_\alpha \subset Th_\beta$, теорию $Th_{\varphi(\alpha,\beta)}$, расширяющую Th_α, но несовместимую с Th_β.

Таким образом, каждое расширение теории имеет альтернативу.

Следующий принцип также является сильным предположением, показавшим свою эффективность при описании систем неформализуемых понятий. Он говорит о том, что никакой из новых результатов, полученных в расширениях данной ипостаси, не может считаться даже относительно бесспорным (неопровержимым в других расширениях).

> Принцип 10. Пересечением множества теорем всех теорий, расширяющих Th_α, являются теоремы самой Th_α.

Этот принцип сразу же отметает в качестве основы для систем неформализуемых понятий теории, базирующиеся на многих известных неклассических логиках.

Теория неформализуемых понятий позволила дать подходы к решению некоторых задач, связанных с несоответствием понятий в языках программирования. Появились и логические следствия. Одно из них мы приведем здесь.

Определение 13.6.1. Высказывание A называется *псевдопроблемой* относительно ипостаси Th_α, входящей в систему формализаций неформализуемых понятий, если ни в какой ипостаси, являющейся расширением Th_α, ни A, ни $\neg A$ не являются теоремами.

Предложение 13.6.1. Метод критики оснований. *Если A — псевдопроблема, B не является псевдопроблемой, B неразрешимо в Th_α и в теории Th_α доказано $A \Rightarrow B$, то можно подобрать формулу D, не являющуюся псевдопроблемой, такую, что $D \Rightarrow A$ и $A \Rightarrow D$ — не теоремы Th_α, а $D \Rightarrow B$ — ее теорема.*

Доказательство. Пусть для определенности B доказывается в некоторых формализациях. Тогда имеется теория Th_β, расширяющая Th_α, в которой доказывается B. Но тогда есть конечный список D_1 аксиом

Th_β, из которого выводится B в Th_α. Значит, $D_1 \Rightarrow B$ является теоремой Th_α. Поскольку Th_β имеет альтернативу $Th_{\varphi(\alpha,\beta)}$, усилим D_1 до списка аксиом D, опровергаемого в данной альтернативе. Поскольку A — псевдопроблема, то ни она, ни ее отрицание не выводимы ни в Th_β, ни в $Th_{\varphi(\alpha,\beta)}$. Отсюда получаем, что четыре импликации

$$\begin{array}{cc} D \Rightarrow A & D \Rightarrow \neg A \\ \neg D \Rightarrow A & \neg D \Rightarrow \neg A \end{array}$$

невыводимы в Th_α, и соответственно, D — искомое независимое от A основание.

Конец доказательства.

Содержательно данный результат означает, что основание, являющееся псевдопроблемой, ничего не может дать для доказательства содержательных утверждений. Если мы вывели имеющее смысл в данной системе теорий утверждение из псевдопроблемы, то можно подобрать другую, уже нетривиальную гипотезу, из которой оно получается.

Понятие псевдопроблемы появилось в работах Венской школы позитивизма в 20-х годах. Псевдопроблемами называли пышно звучащие философские вопросы типа

— Что первично: материя или сознание?—

теряющие смысл при переводе на научный язык. Мы идем дальше, и внутрь формализаций псевдопроблемы могут проникнуть, но опора на них является порочным методом.

С другой стороны, данный результат имеет отношение к давно известному в логике примеру логической ошибки. В жизни слишком часто мы считаем, что отвергли выводы человека, если сумели опровергнуть посылки, на которых он базируется. Например, отвергнув посылку об изначальном равенстве способностей всех людей, мы отвергаем целесообразность равенства их прав. Это еще со времен Аристотеля квалифицировалось как логическая ошибка: единственный способ опровергнуть предложение — временно принять его. Критика оснований может лишь показать, что декларированное утверждение не обосновано. Мы показали, что в реальной ситуации критика оснований может быть еще более сильным аргументом, если мы обнаруживаем в основаниях не ложное утверждение, а псевдопроблему. Допустим, опора на существование Бога в научном исследовании полностью уничтожает силу приводимых аргументов. На любое утверждение нужно опираться в своем месте и по соответствующему поводу. Религии и так нанесли слишком большой ущерб излишне благонамеренные ученые, очень хотевшие научно доказать существование Бога и делавшие при этом легко обнаруживаемые ошибки.

Системы формализаций неформализуемых понятий позволяют выразить и еще одну важнейшую сторону знания, впервые затронутую в неклассических логиках. Поскольку незнание всеобъемлюще и неистребимо, порою один из самых мощных видов знания — знание о незнании. Конкретные классические теории не позволяют этого использовать, а вот в их системах постулирование и использование незнания вполне возможно.

И наконец, можно заметить, что соотношения между неформализуемыми понятиями, выраженные в данной теории, относятся лишь к данным их ипостасям. Чтобы выразить более глобальные утверждения (например, что A содержательно следует из B в том смысле, что приняв при формализации A, мы вынуждены принимать и B во избежание распада системы понятий), необходимо рассматривать целые системы теорий, а тут уже вступает в права неклассическая логика.

Подытожим:

Истинность формул данного языка нельзя выразить внутри него самого.

Не все вычислимые функции могут быть продолжены до всюду определенных.

Ни одна достаточно богатая теория не может быть полна.

Неполнота не может быть устранена никакими средствами, допускающими хотя бы частичную алгоритмическую проверку.

Неразрешимые утверждения бывают разных типов, в том числе и такие, которые не зависят не только от теории, но и друг от друга.

Пополнение теории правилом, позволяющим переходить от доказуемости $A(\mathbf{n})$ при произвольном $\mathbf{n}$ к истинности $\forall x\, A(x)$ весьма сильно расширяет возможности теории.

Даже внутри самой теории имеются предложения вида $\forall x\, P(x)$ с разрешимым P, для доказательства которых необходимо привлекать сколь угодно сложные формулы.

Можно заниматься формализацией и неформализуемых понятий, и в этом случае классическая логика — первый кандидат на звание подходящей для теорий, описывающих состояние понятий в данный момент, для данной цели и с данной точки зрения.

Классическая логика перестает работать, если мы интересуемся не истинностью в случае неизменной фиксированной точки зрения, а развитием понятий. Она может подвести нас и тогда, когда мы стремимся использовать доказанные утверждения вида $\exists x\, A(x)$ как основу для алгоритмических построений.

Классическая логика практически бессильна, когда нужно формализовывать незнание.

Выражаясь несколько метафорически, классическая логика — логика конкретного знания и веры, а неклассическая — логика построения, изменения знания и сомнения.

Часть III

Введение в неклассические логики

Глава 14

Основы λ-исчисления

Язык λ-конверсий является сейчас одним из важнейших выразительных средств в логике, информатике, математической лингвистике, искусственном интеллекте и когнитивной науке. Начнем с синтаксических аспектов λ-конверсий и их использования как формального языка.

14.1 Основы λ-языка

В математике укоренились некоторые т.н. “вольности речи”, часто приводящие к двусмысленностям и затруднениям, практически ничего не облегчая взамен. Одна из таких традиционных неаккуратностей — смешение значения выражения с функцией, вычисляющей это выражение. Например, в уравнении $x^2 = 1$ x^2 есть выражение, в тождестве

$$\frac{d}{dx} x^2 = 2x \tag{14.1}$$

x^2 есть функция, а относительно $2x$ этот вопрос может быть решен лишь из контекста (а порою и из него возникают лишь двусмысленности). Для обозначения функций используются записи типа $x \to x^2$, и этого хватает для случая, когда функции не являются аргументами преобразований. Но уже запись

$$\frac{d}{dx} x \to x^2$$

неудобна, а далее непоследовательность такой формы обозначений причиняет все больше и больше неприятностей.

Американский логик Черч (A. Church) предложил обозначения, позволяющие трактовать функциональные и смешанные выражения столь же последовательно, как и обычные математические. *Квантор функциональности* $\lambda x.\, t(x)$, где $t(x)$ — терм, образует выражение, интерпретируемое как функция, аргументом которой является x, а результатом — значение $t(x)$. Это выражение само рассматривается как терм, к которому можно применять преобразования и о свойствах которого можно говорить, x становится связанной переменной, подстановки производятся по тем же правилам, что и обычно, чтобы избежать коллизий. Так что с точки зрения λ-языка утверждение, что производная e^x в точке 0 есть 1 записывается четко и ясно:

$$\mathbf{D}(\lambda x.\, e^x)(0) = 1 \tag{14.2}$$

Здесь $\mathbf{D}$ — оператор дифференцирования, применяемый к функции $\lambda x.\, e^x$ (заметим, что традиционное dx становится просто ненужным; аргумент функции однозначно определяет, по какой переменной берется производная). $\mathbf{D}$ применяется к функции действительной переменной и в результате дает также функцию действительной переменной. Видно, что результат применения оператора $\mathbf{D}$ к функции $\lambda x.\, e^x$ применяется далее к числу 0.

Рассмотрим несколько более сложный пример: формулу для производной суммы.

$$\mathbf{D}\lambda x.\, (f(x) + g(x)) = \lambda x.\, (\mathbf{D}(f)(x) + \mathbf{D}(g)(x)) \tag{14.3}$$

Здесь строго различается применение операций к функциям и к значениям этих функций. Сложение обрабатывает числа, а дифференцирование — операции над числами.

То, что математику можно построить не на базе чисел и множеств, а на базе понятия функции, если разрешить свободно использовать функции как аргументы и результаты[1] других функций, заметили практически одновременно великий венгерский математик Я. фон Нейман и российский логик Л.Я. Шейнфинкель. Фон Нейман стремился в тот момент действовать как можно более традиционно, поэтому он создал теорию, которая выглядит как перевод теории множеств на язык функций, и, как недостаточно безумная, она оказалась забыта. Зато Шейнфинкель выделил минимальный базис колоссальной общности и необычности, который был развит другими. Операции, применяемые к функциям, осознанно использовались в математике и до Шейнфинкеля. Они назывались *операторами* (если результат — функция) либо *функционалами* (если результат — объект). Сейчас они чаще всего называются функционалами

[1] Последнее требование не выполняется в общеупотребительных языках программирования, а в тех академических языках, где выполняется, обычно реализовано так. что приводит к безнадежной неэффективности вычислений.

(высших типов). В λ-языке и те, и другие чаще всего называются просто функциями. Но лишь Л. Я. Шейнфинкель и Х. Б. Карри (H.B. Curry) начали разработку их систематической теории. И сразу же они натолкнулись на важное преобразование, позволяющее уменьшить количество сущностей.

Для описания функций многих переменных хочется ввести многоместный квантор типа $\lambda x_1 \dots x_n . t(x_1, \ \dots, \ x_n)$. Карри[2] подметил исключительно важное преобразование, базирующееся на том, что у нас функции систематически трактуются как значения. Вместо $f(x, y)$ он рассмотрел функционал f, перерабатывающий x в функцию от y. $f(x)(y) = f(x, y)$. Таким образом, без ограничения общности достаточно рассматривать функции от одного аргумента. Такое преобразование называется *преобразованием Карри* (Currying). Оно соответствует также представлению $\lambda x_1 \dots x_n$ в форме $\lambda x_1 \dots \lambda x_n$. (Проверьте!)

Преобразование Карри имеет важные аналогии в программировании. Оно соответствует *частичной параметризации* процедур. Если имеется процедура $\mathsf{P}(\mathsf{x1}, \mathsf{x2}, \dots, \mathsf{xn})$, а известно лишь значение $\mathsf{x1} = a$, можно тем не менее проделать внутри P вычисления, зависящие лишь от $\mathsf{x1}$, и получить *частичную процедуру* $\mathsf{P1}(\mathsf{x2}, \dots, \mathsf{xn}) = \mathsf{P}(a, \mathsf{x2}, \dots, \mathsf{xn})$. Если не требовать оптимизации частичной процедуры, то частичная параметризация становится удобным, легко реализуемым и не портящим эффективность программ методом программирования, который, к несчастью, был осознан вскоре после того, как было фиксировано определение наиболее популярных языков программирования — C и Pascal. У себя в примерах будем обозначать частичную параметризацию $\mathsf{P}^*(a, \dots, \mathsf{z})$.

Отметим один тонкий момент. Пусть дана процедура $\mathsf{P}(\mathsf{x}, \mathsf{y})$. Произведя частичную параметризацию $\mathsf{P}^*(a, b)$, мы с точки зрения программирования получаем не значение $\mathsf{P}(a, b)$, а процедуру без параметров, вычисляющую это значение.

Упражнения к §14.1

14.1.1. Пусть $f(x, y)$ — функция, вычисляющая расстояние между двумя действительными числами. Что такое $\lambda x. \, f(0, x)$?

14.1.2. Запишите определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\, dx$ на λ-языке.

14.1.3. Если $f(x, y) = e^x \cdot \sin(y)$, то что такое $\lambda xy. \, f(y, \pi/2 - x)$?

14.1.4. Вычислить $\lambda x. \, \mathbf{D} \lambda y \, (y^3 \cdot x + y)(1)(3)$.

[2] На самом деле это преобразование рассматривалось еще Шейнфинкелем и фон Нейманом.

14.1.5. Студентка Тупицына спросила: “А зачем вообще все многочисленные кванторы? Почему не писать, например, $\exists\lambda x\, A(x)$ вместо $\exists x\, A(x)$, где $\exists$ понимается как логическая операция над функциями с логическими значениями, и обходиться одним квантором λ?” Ваше отношение к этому предложению: приносит ли оно какие-то удобства либо неудобства, либо совсем некорректно, и почему?

14.1.6. Студентка Примерная записала утверждение $\lambda x.\, x^2+1 > \lambda x.\, \frac{1}{2+x^2}$. Что Вы скажете по этому поводу?

14.1.7. Прокомментируйте запись $\forall x\, \mathrm{Max}(a, b, f(x)) \geq f(x)$, где Max — функционал нахождения максимума функции на отрезке $[a, b]$.

14.1.8. Студент Чудаков предложил по аналогии с распространенным в математике обозначением множеств в стиле $\{f(x, y) \mid A(x, y)\}$ использовать λ-обозначения типа $\lambda(x^2 + y^2).\, \{\sin(x) \cdot \cos(y)\}$. Что можно сказать по данному поводу?

14.2 λ-конверсии

Пожалуй, впервые общие свойства и преобразования пространств некоторых частных видов операторов и функционалов начали исследоваться в линейной алгебре. Матрицы были введены как представления пространства линейных преобразований; еще более фундаментальное наблюдение было сделано при рассмотрении пространств линейных функционалов из конечномерного пространства в скаляры. Это пространство оказалось имеющим столько же измерений, и векторы исходного пространства могут рассматриваться как линейные функционалы на этом сопряженном пространстве. В выражении $fx = c$ возникает *двойственность* между функциями и аргументами, которая является краеугольным камнем при развитии λ-языка: можно считать функцией f, а x — ее аргументом, можно и наоборот.[3]

Шейнфинкель предложил подчеркнуть двойственность следующей системой обозначений. Операция применения функции к аргументу записывается (fx), а не $f(x)$, как обычно. Здесь важно то, что при помощи преобразования Карри все функции могут быть сделаны одноместными функционалами. Черч предложил важное упрощение языка Карри, которое сейчас и принято называть языком λ-исчисления.

[3] Двойственность не означает возможность путать аргументы и функции. Она означает лишь право сделать *глобальную* замену функций и аргументов друг на друга. А уж насколько она будет странно выглядеть, другое дело.

Определение 14.2.1. λ-сигнатура — множество констант. λ-термы сигнатуры σ задаются следующим индуктивным определением.

1. Константа сигнатуры σ есть λ-терм.

2. Переменная есть λ-терм.

3. Если t и u — λ-термы, то (tu) — λ-терм.

4. Если x — переменная, t — λ-терм, то $\lambda x.\, t$ — λ-терм.

Пример 14.2.1. Если $\mathbf{D}$, f и 0 — константы, изображающие оператор дифференцирования, функцию одной переменной и ноль, то значение $\frac{df}{dx}(0)$ изображается $((\mathbf{D}f)0)$.

Так же, как в логике предикатов, для λ-термов определяются понятия свободной и связанной переменной и подстановки. Через подстановку определяется важнейшее из преобразований над λ-термами — β-конверсия. Оно состоит в символьном вычислении результата вызова функции $\lambda x.\, t(x)$. Одинарная стрелка $\to$ читается “за один шаг переходит в”. Большая стрелка $\Rightarrow$ читается “преобразуется в”.

$$(\lambda x.\, t\, r) \to \mathsf{Subst}(t, x, r) \tag{14.4}$$

Это преобразование называется β-конверсия.

Пример 14.2.2. $\lambda x.\, x$ есть тождественная функция. В самом деле,

$$(\lambda x.\, x\, t) \Rightarrow t$$

для любого t. Обозначив терм $\lambda x.\, x$ через $\mathbf{I}$, можем записать это как $(\mathbf{I}\, t) \Rightarrow t$. В частности, $(\mathbf{I}\,\mathbf{I}) \Rightarrow \mathbf{I}$.

λ-термы позволяют определить предельно общее[4] исчисление символьных вычислений функциональных выражений. Оно называется *исчислением λ-конверсий*. В этом исчислении выводятся выражения вида $r \Rightarrow t$. Аксиомы его — (14.4), переписанная через $\Rightarrow$:

$$(\lambda x.\, t\, r) \Rightarrow \mathsf{Subst}(t, x, r) \tag{14.5}$$

и $t \Rightarrow t$.

[4]Общее не значит, что туда запихали все, что можно и нельзя. Это означает предельно простое выражение широко применимой идеи, которое может быть легко конкретизировано для частных случаев.

Правила вывода следующие.

$$\frac{t \Rightarrow u \quad u \Rightarrow r}{t \Rightarrow r} \qquad \text{(транзитивность)} \tag{14.6}$$

$$\frac{t \Rightarrow u}{(t\,r) \Rightarrow (u\,r)} \qquad \text{(преобразование функции)} \tag{14.7}$$

$$\frac{t \Rightarrow u}{(r\,t) \Rightarrow (r\,u)} \qquad \text{(преобразование аргумента)} \tag{14.8}$$

$$\frac{t \Rightarrow u}{\lambda x.\,t \Rightarrow \lambda x.\,u} \qquad \text{(правило } \xi\text{)} \tag{14.9}$$

Названия “β-конверсия”и “правило ξ”традиционны для обозначения этих характерных преобразований λ-термов. Правда, их суть лучше отражали бы названия типа “символьное вычисление”и ”преобразование определения”. Чаще всего $\Rightarrow$ не ставят, а просто выписывают последовательность преобразуемых (конвертируемых) друг в друга термов.

Пример 14.2.3. Рассмотрим λ-термы

$$\Psi = \lambda x.\,(x\,x); \quad \Omega = (\Psi\,\Psi) = (\lambda x.\,(x\,x)\ \lambda x.\,(x\,x)).$$

По β-конверсии Ω преобразуется в

$$\mathsf{Subst}(\lambda x.\,(x\,x), x, \Psi) = (\Psi\,\Psi) = \Omega.$$

Итак, Ω конвертируется сам в себя.

Отметим взаимосвязь Ω с парадоксом Расселла. Рассмотрим множество всех множеств, *являющихся* собственными элементами: $Z = \{x | x \in x\}$. Тогда $Z \in Z \Leftrightarrow Z \in \{x | x \in x\} \Leftrightarrow Z \in Z$. Хотя здесь мы и не получили грубого противоречия, мы высветили логическую основу парадокса Расселла, парадокса лжеца и многих других парадоксов: ударяясь в абстракции, слишком легко определить понятия, ничего не содержащие, кроме самих себя.[5] Карри дал интересную переформулировку таких “рефлексивных парадоксов”. Пусть $\mathbf{A} = \{x | x \in x \Rightarrow A\}$. Тогда $\mathbf{A} \in \mathbf{A} \Leftrightarrow (\mathbf{A} \in \mathbf{A} \Rightarrow A)$. Пусть $\mathbf{A} \in \mathbf{A}$. Тогда $\mathbf{A} \in \mathbf{A} \Rightarrow A$. Значит, из $\mathbf{A} \in \mathbf{A}$ следует A. Но $(\mathbf{A} \in \mathbf{A} \Rightarrow A) \Leftrightarrow \mathbf{A} \in \mathbf{A}$. Следовательно, $\mathbf{A} \in \mathbf{A}$. Но $\mathbf{A} \in \mathbf{A} \Rightarrow A$. Значит, A. Итак, имея неограниченные абстракции и пользуясь ими в рассуждениях, можно доказать все, что угодно. В λ-конверсиях объекты, подобные Ω, относительно безобидны (в точности в той же степени, что “зацикливание” в программах).

[5] Некоторые философы и богословы определяли Бога как “то, что является причиной самого себя”. Анализ парадоксов показывает, что это довольно плоско: причина самой себя скорее ничто, чем Бог.

Подробней проанализируем роль различных правил в λ-конверсиях. β- конверсия является определением вызова процедуры, принятым в большинстве языков программирования. Транзитивность означает возможность выполнить целую последовательность вычислений. Единственное разумное ограничение на нее — исчерпание ресурсов, которое обычно игнорируется в семантике алгоритмического языка. Практически нечего возразить и на правило преобразования аргумента. А вот преобразование функции уже несколько более сомнительно. Оно чаще всего просто избегается в языках программирования за счет того, что функция не является полноправным значением. Правило ξ не может быть просто проигнорировано, поскольку любой приличный язык включает описания процедур, но такое преобразование чаще всего прямо запрещается в семантике языков программирования. В самом деле, чаще всего процедура содержит операторы, рассчитанные на разные значения аргумента и при конкретном значении аргумента выполняются (за счет операторов типа if, case, while, repeat) лишь некоторые из них. Попытка же вычислять, не разобравшись со значением аргумента, вполне может привести к ошибке. Например, если процедура для положительного x вычисляет его квадратный корень, а для отрицательного действует по-другому, то попытка слишком рано вычислить $\sqrt{x}$ приведет к ошибке. Таким образом, анализ правила ξ привел нас к выявлению ограничений на частичные вычисления в обычных языках программирования. Даже если известны значения всех переменных, входящих в выражение, но выражение находится внутри описания процедуры либо внутри условного оператора, вычислять его нельзя. А вот в λ-конверсиях можно производить вычисление любого подтерма, где бы он ни стоял. Докажем это.

Определение 14.2.2. λ-терм с дырой. Пусть символ $\Box$ обозначает дыру.

1. $\Box$ — λ-терм с дырой.

2. Если t — λ-терм, r — λ-терм с дырой, то $(t\,r)$ и $(r\,t)$ — λ-термы с дырой.

3. Если x — переменная, r — λ-терм с дырой, то $\lambda x.\, r$ — λ-терм с дырой.

Через $t[r]$ обозначим результат замены дыры в λ-терме t с дырой на λ-терм r.

Предложение 14.2.1. *1. В λ-терме с дырой ровно одна дыра.*

2. Если t — λ-терм с дырой, r — λ-терм, то $t[r]$ — λ-терм.

3. *Если r - подтерм λ-терма s, то найдется терм с дырой t, такой, что $s \equiv t[r]$*[6]*.*

4. *Если t — λ-терм с дырой, r и s — λ-термы, $r \Rightarrow s$, то $t[r] \Rightarrow t[s]$.*

Доказательство. Пункты 1 и 2 тривиально доказываются индукцией по построению терма с дырой. Пункт 3 опирается на единственность дерева построения λ-терма и усиливает ее до следующей леммы.

Лемма о подтермах. Если r — вхождение подтерма в λ-терм t, то дерево порождения r является поддеревом дерева t.

И, наконец, пункт 4. Действуем индукцией по длине терма с дырой, используя пункт 1. Если терм состоит из одной дыры, то все очевидно. В противном случае дыра находится в одном из его подтермов, который сам, согласно 3, является λ-термом с дырой. Рассмотрим три возможных случая. Если t имеет вид $\lambda x\, t_1$, то, по предположению индукции, $t_1[r] \Rightarrow t_1[s]$. Но тогда по правилу ξ $t[r] \Rightarrow t[s]$.

Остальные случаи также разбираются прямым применением правил конверсии.

□

Рассмотрим некоторые конструкции λ-языка. Пусть f и g — функции. Тогда $(f(gx))$ применяет f к результату вычисления g на x, и терм $\lambda x.\,(f(gx))$ выражает функцию, являющуюся композицией f и g. С другой стороны, $((fx)y)$, если принять во внимание преобразование Карри, выражает применение функции f к двум аргументам, а, соответственно, $((fg)y)$ — применение функционала f к функциональному аргументу g и обычному x.[7]

Исходя из содержательного смысла конверсий как символьных вычислений, можно определить равенство λ-термов t и r как существование такого s, что $t \Rightarrow s$, $r \Rightarrow s$. Но обосновать такое определение не слишком просто: ведь прежде всего отношение равенства должно быть отношением эквивалентности; рефлексивность и симметричность нашего определения очевидны, но с транзитивностью дело обстоит не так просто. Если $t_1 \Rightarrow s_1$, $t_2 \Rightarrow s_1$, $t_2 \Rightarrow s_2$, $t_3 \Rightarrow s_2$, то откуда следует, что найдется такое s, что $t_1 \Rightarrow s$, $t_3 \Rightarrow s$? Тем не менее временно примем такое сомнительное определение, которое обосновывается теоремой Черча-Россера, доказываемой в следующей главе.

---

[6] $\equiv$ означает графическое равенство выражений.

[7] На самом деле нигде не сказано, что g — функция, а x — предмет. Занимаясь λ- исчислением, необходимо помнить, что функция может быть подставлена в любом месте.

Теперь рассмотрим преобразование, впервые введенное явно в λ-исчислении и ставшее краеугольным камнем современной теории программирования.

Предложение 14.2.2 (Лемма о неподвижной точке). *Для любого λ-терма F найдется такой λ-терм X, что $X = (F\,X)$.*

Доказательство. Определим W как $\lambda x.\,(F(xx))$, и пусть X есть $(W\,W)$. Тогда легко показать самим, что X конвертируется в (FX).[8] □

Данное предложение служит ярким примером важной и нетривиальной теоремы, доказывающейся в три строчки, но такой, до которой нелегко было додуматься, и такой, которая имеет множество применений. В самом деле, поскольку создатели λ-языка с самого начала отдавали себе отчет в его универсальности (он годится для выражения любого функционала, встречающегося в математике, естественно, при подходящем подборе исходных констант,) то их не могло не смущать, в частности, следующее рассуждение:

> Рассмотрим функцию натуральных чисел $\varphi = \lambda n\, n + 1$.
> Она не имеет неподвижной точки, поскольку, если m —
> таковая, то $m = m + 1$. (14.10)

Здесь на помощь приходит то, что в λ-исчислении имеется, в частности, терм Ω, конвертирующийся сам в себя и не имеющий значения. $(\varphi\,\Omega)$ просто не имеет значения, так же как и само Ω и как $\Omega + 1$. И, соответственно, нет ничего удивительного в том, что $(\varphi\,\Omega) = \Omega = \Omega + 1$.

Поскольку приведенное нами преобразование, очевидно, само выражается в λ-языке, то имеется комбинатор неподвижной точки $\mathbf{Y}$, который можно определить, например, как

$$\lambda F\,(\lambda x\,(F(x\,x))\ \lambda x\,(F(x\,x))).$$

$\mathbf{Y}$ не является ни единственным, ни даже наилучшим, из комбинаторов неподвижной точки, но используется он чаще всего. В частности,

$$\mathbf{Y}f \to f(\mathbf{Y}f)$$

не имеет места (почему?)

Поэтому часто рассматривается комбинатор

$$\Theta \equiv (\lambda xy.\,y(xyy)\ \lambda xy.\,y(xyy)).$$

Красивые примеры еще нескольких комбинаторов неподвижной точки см. в упражнениях.

[8] Здесь есть единственная, но ехидная тонкость: не $(F\,X)$ преобразуется в X, а X в него!

Упражнения к §14.2

14.2.1. Покажите, что $(\Theta F) \to (F\,(\theta F))$.

14.2.2. (Klop) Пусть

$$Ъ = \lambda abcdefghijklmnopqstuvwxyzr.\\ (r(thisisafixedpointcombinator)),$$

$$\$ = (ЪЪЪЪЪЪЪЪЪЪЪЪЪЪЪЪЪЪЪЪЪЪЪЪЪЪ)$$

Показать, что \$ — комбинатор неподвижной точки.

14.2.3. Перевести пример Клопа на русский язык (так,чтобы в терме читалась русская фраза с аналогичным значением, а алфавит, в отличие от латинского, присутствовал бы в неизмененном порядке.)

14.2.4. Построить комбинатор A, такой, что $(Afx) = (fx)$.

14.3 Теорема Черча-Россера

Важнейшим из известных приятных свойств систем преобразований является свойство *конфлюэнтности*, либо *свойство квадрата*: если a преобразуется как в b, так и в c, то имеется такое d, что b преобразуется в d и c преобразуется в d. Это означает, что, какими путями ни вести преобразование, придем к одному и тому же результату. Докажем это свойство для λ-конверсий.

Теорема Черча-Россера. Если $t \Rightarrow r$, $t \Rightarrow s$, то найдется такое q, что $s \Rightarrow q$, $r \Rightarrow q$.

Доказательство. Пользуясь идеей Мартин-Лефа, определим вспомогательное отношение конверсии $\to$, в котором β-конверсия к каждому подтерму применяется не более одного раза.

$$\begin{array}{cc} t \to t; & \dfrac{t \to r}{\lambda x.\, t \to \lambda x.\, r}; \\ \dfrac{t \to r \quad s \to q}{(t\, r) \to (s\, q)}; & \dfrac{t \to r \quad s \to q}{\lambda x.\,(t\, s) \to r[x|q]} \end{array} \tag{14.11}$$

Лемма 14.3.1. *Если $t \to r$, то $t \Rightarrow r$.*

Лемма 14.3.2. *$\Rightarrow$ является транзитивным замыканием $\to$.*

Лемма 14.3.3. *Если $\lambda x\, t \Rightarrow r$, то r также начинается с λx.*

Лемма 14.3.4. *Если $(t\, r) \to s$, то либо s есть (qv), где $t \to q$, $r \to v$, либо t есть $\lambda x.\, q$, s есть $q1[s|r1]$, где $q \to q1$, $r \to r1$.*

Все эти леммы очевидны.

Лемма 14.3.5. *Если $t \to r$, $s \to q$, то $t[x|s] \to r[x|q]$.*

Индукцией по построению t, аналогично предложению 3.2.1.

Лемма 14.3.6. *Отношение $\to$ обладает свойством конфлюэнтности.*

Доказательство леммы. Индукцией по длине преобразования t в r.

Если t есть само r, то достаточно взять s в качестве q.

Если t есть $\lambda x.\, (t_1\, t_2)$, а r есть $r_1[x|r_2]$, где $t_1 \to r_1$, $t_2 \to r_2$, то s есть одно из двух.

1. $\lambda x\, (s_1 s_2)$, где $t_1 \to s_1$, $t_2 \to s_2$. Тогда, по предположению индукции, для r_1, s_1 можно найти q_1, и, соответственно, для r_2, s_2 общее q_2. По лемме 14.3.5, в качестве q можно взять $q_1[x|q_2]$.

2. $s_1[x|s_2]$. Непосредственно применяем предположение индукции и лемму 14.3.5.

Если теперь t есть $(t_1 t_2)$, а r есть $(r_1 r_2)$, то опять возникают два подслучая.

1. $(s_1\, s_2)$. Непосредственно применяем предположение индукции.

2. t есть $\lambda x.\, (t_{11} t_2)$, s есть $s_1[x|s_2]$, где $t_{11} \to s_1$, $t_2 \to s_2$. Тогда по предположению индукции, t_{11} и r_1, t_2 и r_2 попарно приводятся к общему терму. Применяем лемму 14.3.5.

А теперь, поскольку конверсия — транзитивное замыкание *to*, а *to* конфлюэнтно, теорема доказана.

Упражнения к §14.3

14.3.1. Студент Талантов предложил следующее расширение λ-конверсий. Ввести термы вида $[x\, y\, z]$ со следующими правилами конверсии: $[fab] \Rightarrow (fa)(fb)$; $[fga] \Rightarrow (fa)(ga)$. Прокомментируйте это предложение.

14.3.2. Студентка Невинная предложила следующий вариант λ-конверсий для кортежей. Вводятся термы вида $[t_1 \dots t_n]$ вместе со следующими правилами конверсии:

$$([t_1 \dots t_n]\, r) \Rightarrow [(t_1\, r) \dots (t_n\, r)]$$
$$(t[r_1 \dots r_n]) \Rightarrow [(t\, r_1) \dots (t\, r_n)]$$

Ваше мнение об этом предложении: разумно ли оно с точки зрения истолкования и сохраняет ли оно свойство локальности конверсий и свойство конфлюэнтности?

14.4 λ-исчисление

Исчислению λ-конверсий соответствует исчисление равенств термов, конвертируемых в одно и то же выражение, которое обычно называется λ- *исчислением* либо *комбинаторной логикой.* Языком этого исчисления служат равенства λ-термов $t = u$. Аксиомы — равенства $t = t$. Правила вывода - следующие шесть.

$$\begin{array}{cc}
\lambda x.\,(t\, r) = \mathsf{Subst}(t, x, r) & (\beta - \text{конверсия}) \\
\dfrac{t = u}{u = t} & \dfrac{t = u \quad u = r}{t = r} \\
\dfrac{t = u}{(t\, r) = (u\, r)} & \dfrac{t = u}{(r\, t) = (r\, u)} \\
\dfrac{t = u}{\lambda x.\, t = \lambda x.\, u} & (\text{правило } \xi)
\end{array} \tag{14.12}$$

Глава 15

Корни неклассических логик

15.1 Корни неклассических логик в традиционной логике

Классическая логика последовательно проводит естественные математические принципы — минимальность используемых понятий, распространение формализации на наиболее общую область, где она применима, доведение до конца тех предположений, которые мы вынуждены сделать. Она согласуется с четырьмя законами традиционной логики.

Первые три из данных законов восходят к Аристотелю. Правда, Аристотель никогда их явно не выделял,но повторил их в своих работах [1, 2, 3, 4, 5] столько раз и в столь разнообразных вариантах, что было очевидно их первостепенное значение.

15.1.1 Закон тождества

Как и другие законы, он был упомянут им во множестве вариантов, самый выразительный из которых, пожалуй [4, кн. 4, гл. 4]:

> ... В самом деле, не означать что-то одно — значит ничего не означать; если же слова ничего не обозначают, то конец всякому рассуждению за и против, а в действительности — и в свою защиту, ибо невозможно что-либо мыслить, если не мыслят что-то одно.

Его содержательная формулировка

> Один и тот же термин в одном и том же рассуждении должен употребляться в одном и том же отношении, в одном и том же смысле и применительно к одному и тому же месту и времени.

Более краткая формулировка данного закона следующая:

Используемые понятия не должны ни изменяться, ни подменяться в ходе одного и того же рассуждения. (15.1)

Ее несколько более либеральный вариант

Используемые понятия не должны подменяться в ходе одного и того же рассуждения. (15.2)

Это предположение, конечно же, обязано выполняться в традиционных математических рассмотрениях, да и не только в них. Например, корректный диспут в науке, в религии или в праве невозможен без следования закону тождества. Подмена понятий в ходе рассуждения либо спора квалифицируется как софистический прием.[1]

Схоласты упростили формулировку закона тождества до лапидарной:

Закон III.1 (Тождества). A есть A.

Математической его формулировкой обычно служит формула

$$A \Leftrightarrow A. \tag{15.3}$$

Поскольку эта формула не просто является тавтологией, а одной из самых простых и устойчивых к смене логических понятий тавтологий, закон тождества часто трактуется как полный трюизм. Из приведенных выше рассмотрений видно, что это отнюдь не так. Конечно же, наиболее абсолютной формулировкой закона тождества является (15.2), которая уж точно не должна нарушаться ни в каком честном рассуждении, за исключением таких, целью которых является показать возможные двусмысленности либо нежелательные для автора понимания его положений.

Пример 15.1.1. Рассмотрим случай, когда с целью повышения качества некоторых товаров, ставших вредными для потребителей, вносится предложение о создании службы их сертификации и проверки качества. Тогда вполне естественно задать вопрос человеку, вносящему данное предложение, что будет проверять эта служба на самом деле? Будет ли она проверять качество товаров или же пункты ею самою разработанной инструкции и зачастую с целью содрать с продавца либо взятку, либо штраф?

[1] Софисты — в древней Греции философы и риторы, обучавшие людей за плату искусству ведения споров и составления речей. Поскольку их клиенты и они сами были больше заинтересованы в успехе, чем в выяснении истины, очень скоро софистами стали называть людей, квалифицированно применяющих нечестные приемы в ходе выступлений либо споров.

Пример 15.1.2. Очень жаль, что творцов нынешнего закона о компьютерных преступлениях не заинтересовало такое естественное его толкование. Поскольку любая манипуляция с данными есть либо их чтение, либо изменение, либо уничтожение, то любая ошибка программиста и многие ошибки пользователя становятся уголовно наказуемыми деяниями, поскольку они приводят к несанкционированному чтению, изменению либо уничтожению информации.

Если две последние формулировки создают впечатление полной тривиальности данного закона, то первые четко показывают его важнейшую роль в организации мышления. Подмена значений слов — один из основных источников ошибок и главнейшее орудие софистов. Даже частные случаи нарушения Закона Тождества получили свое название.

Например, в софизме

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Взвод построен в две шеренги;}\\ \text{Галлиуллин — рядовой этого взвода;}\end{array}}{\text{Галлиуллин построен в две шеренги}}$$

подменяется собирательный и разделительный смысл слова “взвод”. Это — ошибка “От смысла собирательного к смыслу разделительному.”

При *формализации* Закон Тождества неумолимо выдерживается в ходе рассуждения, ценой того, что он практически всегда нарушается в его начале и конце.

15.1.2 Закон непротиворечия

Закон Непротиворечия считается вторым из основных законов Логики, сформулированных Аристотелем. Оригинальная аристотелевская формулировка данного утверждения следующая [4, кн. 4, гл. 3]:

Закон III.2 (Непротиворечия). Невозможно, чтобы одно и то же в одно и то же время было и не было присуще одному и тому же в одном и том же отношении (и все другое, что мы могли бы еще уточнить, пусть будет уточнено во избежание словесных затруднений).

Эту формулировку, которая казалась излишне усложненной, упростили до

Закон III.3 (Непротиворечия, сокращенный). Оба утверждения A и $\neg A$ не могут выполняться одновременно.

Пара высказываний A и $\neg A$ называется *прямым противоречием*.

Закону Непротиворечия соответствует метод рассуждений, известный в традиционной логике как *приведение к абсурду* (*reductio ad absurdum*).

Чтобы доказать $\neg A$, т. е. чтобы опровергнуть A, наоборот, временно принимается A, и данное предположение приводится к абсурду, т. е. из него выводится противоречие. Ему соответствует косвенное правило естественного вывода

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Допустим } A\\ \dots\\ B \quad \neg B\end{array}}{\neg A}$$

Обычно в современной логике Закон Непротиворечия формулируется в виде математического утверждения $\neg(A \mathbin{\&} \neg A)$. Но у него имеется другая математическая формулировка, которая более адекватно выражает его смысл. Это — требование *непротиворечивости теории*:

> A и $\neg A$ не могут быть одновременно теоремами данной теории.

Выражением математического Закона Непротиворечия в логике можно считать правило, установленное средневековыми схоластами и имеющее в традиционной логике название: “Из лжи следует все, что угодно”(“*ex falso quodlibet*”):

$$\frac{A \quad \neg A}{B}$$

Закон Непротиворечия с самого начала осознавался как ограничение, аналогичное Закону Тождества. Естественно, каждый из нас, кто жив сейчас, через некоторое время будет мертв, а некоторое время назад он еще не жил. Поэтому в законе непротиворечия *оба члена противоречия должны рассматриваться в одном и том же контексте и в одно и то же время*, и все прочее, как и подчеркивал Аристотель. Очевидно, что одни и те же предметы в одно и то же время не могут обладать отрицающими друг друга свойствами. Например, никто не может быть в одно и то же время выше 2 метров и не выше 2 метров, женат и холост. Тем не менее в жизни мы часто встречаем нарушение данного закона. В частности, женщина вполне может утверждать:

Все мужчины — подонки, а мой муж — хороший человек. (15.4)

Порою одно и то же действие может квалифицироваться и как законное, и как незаконное, поскольку законность включает не только букву законов, но и их толкование.

Внимательно посмотрев на этот закон, мы видим, что он отделяет квазивысказывания от высказываний. Для квазивысказываний, конечно же, непротиворечивости нельзя даже требовать. В частности, многие люди знают, что можно одновременно любить и ненавидеть одного и того же человека.

Закон Непротиворечия принципиально отвергался в логике джайнов и буддистов, поскольку они отрицали наличие объективных понятий в нашем мире, и поэтому утверждение "A есть и B, и не-B"рассматривалось ими как вполне допустимое.

В современной логике Закон Непротиворечия отвергается, в частности, для формализаций понятий, заложенных в базу знаний, поскольку любое знание специалиста в достаточно сложной предметной области оказывается противоречивым по форме. Поэтому в настоящее время интенсивно развиваются паранепротиворечивые логики, в которых, во всяком случае, отвергается принцип *ex falso quodlibet*. Основоположником европейской паранепротиворечивой логики можно считать Н. А. Васильева. Интенсивно развиваться стала она после трудов Ньютона Да Косты.

Паранепротиворечивой логикой приходится пользоваться также в тех случаях, когда выводы делаются по умолчанию (если что-то не запрещено, то оно разрешено, или наоборот.) Она показала свою полезность также для задач ведения сложных баз данных, поскольку данные, заложенные в разное время, могут начать противоречить друг другу.

Но, тем не менее, опыт показывает, что, если есть хоть малейшая возможность, нужно пытаться сохранять Закон Непротиворечия, и это окупается.

15.1.3 Закон исключенного третьего

Еще один закон также принадлежит Аристотелю, оригинальная формулировка которого была следующей:

Закон III.4 (Исключенного третьего). Оба утверждения A и $\neg A$ не могут опровергаться одновременно.[2]

Уже сам Аристотель замечал, что закон исключенного третьего не может быть применен даже к некоторым высказываниям. В качестве примера он приводил, в частности,

$$\text{Завтра будет морское сражение.} \tag{15.5}$$

[2]Этот закон часто называют по-латыни: *tertium non datur*.

В самом деле, сегодня ни оно, ни его отрицание не ложны. Тем более не универсальна часто используемая более жесткая формулировка закона исключенного третьего, также упоминавшаяся Аристотелем, но не являвшаяся главной для него:

$$\begin{array}{c}\textsf{Сильный закон исключенного третьего:}\\ \textsf{Одно из утверждений } A \textsf{ или } \neg A \textsf{ истинно.}\end{array} \tag{15.6}$$

Эта формулировка в последнее время подменяется еще более узкой, сразу привязанной к одной из формализаций логики:

$$\begin{array}{c}\textsf{Булев закон исключенного третьего:}\\ A \vee \neg A.\end{array} \tag{15.7}$$

Именно формулировка (15.7) чаще всего понимается под законом исключенного третьего в современной математической логике. И именно она чаще всего подвергается пересмотру в неклассических логиках.

15.1.4 Закон достаточного основания

Последний закон был, насколько известно, сформулирован Г. Лейбницем намного позже (на 2 тысячелетия, согласно традиционной хронологии, и уж ни в коем случае не менее чем на 500 лет) остальных.

Закон III.5 (Достаточного основания). Никакое высказывание A не может утверждаться без достаточного основания.

Только благодаря этому закону стало возможно развитие математической логики. Его часто используемая жесткая формулировка:

> Никакое идеальное утверждение не может быть принято, если оно не является следствием ранее принятых утверждений и строго установленных (экспериментальных) фактов

отделяет математическую логику (и логику точных наук вообще) от содержательной.

Наиболее яркий пример применения этого закона — вся математическая практика, в которой математик имеет право утверждать нечто, лишь доказав. Второй пример — католическая теология, в которой строго следят за тем, чтобы новое утверждение было обосновано ссылками на Священное Писание, Священное Предание и труды признанных схоластов.

Пример 15.1.3. Из-за закона достаточного основания родство индоевропейских языков между собой признается неоспоримым фактом, поскольку зафиксирован целый ряд языковых параллелей, и их число увеличивается по мере возрастания древности источников. Точно та же ситуация для семитских языков, и она даже прозрачнее, поскольку они объединены еще и сходством грамматик. Доказано и родство финно-угорских языков, хотя здесь нет древних источников. А вот существование *ностратической* семьи языков, в которую входят и индоевропейские, и финно-угорские, и семитские, и многие другие языки, остается гипотезой, потому что еще не накоплено достаточного количества оснований.

На закон достаточного основания при переформулировках логики стараются не покушаться (пытались сделать это при развитии т. н. диалектической логики на базе конъюнктурно профанированных набросков Гегеля и Маркса).

15.1.5 Алгебраические законы логики

Любая логическая теория, в которой есть эквивалентность и выполняется правило замены эквивалентных, может быть представлена как алгебра Линденбаума. Элементами этой алгебры являются классы формул, для которых доказуема эквивалентность, а операциями — пропозициональные связки. Поэтому эквивалентности между формулами могут рассматриваться как тождества в соответствующей алгебре логики.

Алгебраические законы логики — соотношения между формулами, характеристические для алгебры логики. Обычно в их число включают следующие.

$$\begin{gathered}\text{(Законы идемпотентности)}\\ A \mathbin{\&} A \Leftrightarrow A \qquad A \vee A \Leftrightarrow A\end{gathered} \tag{15.8}$$

$$\begin{gathered}\text{(Законы коммутативности)}\\ A \mathbin{\&} B \Leftrightarrow B \mathbin{\&} A \qquad A \vee B \Leftrightarrow B \vee A\end{gathered} \tag{15.9}$$

$$\begin{gathered}\text{(Законы ассоциативности)}\\ (A \mathbin{\&} B) \mathbin{\&} C \Leftrightarrow A \mathbin{\&} (B \mathbin{\&} C) \qquad (A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)\end{gathered} \tag{15.10}$$

$$\begin{gathered}\text{(Законы поглощения)}\\ (A \mathbin{\&} B) \vee B \Leftrightarrow A \qquad (A \vee B) \mathbin{\&} B \Leftrightarrow A\end{gathered} \tag{15.11}$$

$$\begin{gathered}\text{(Законы истины и лжи)}\\ (A \mathbin{\&} \mathbf{0}) \Leftrightarrow \mathbf{0} \qquad (A \mathbin{\&} \mathbf{1}) \Leftrightarrow A\\ (A \vee \mathbf{0}) \Leftrightarrow A \qquad (A \vee \mathbf{1}) \Leftrightarrow \mathbf{1}\end{gathered} \tag{15.12}$$

Вышеперечисленные тождества гарантируют существование естественного частичного порядка на множестве логических значений и то, что операции конъюнкции и дизъюнкции дают пересечение и объединение значений. Таким образом, в этом случае логические значения образуют решетку. Данные алгебраические тождества выполняются почти во всех логиках, за исключением линейных конструктивных логик, введенных Ж.-И. Жираром. В них $A \mathbin{\&} A$ сильнее A, поскольку требует за наши ресурсы[3] построить две реализации A.

Еще два закона дистрибутивности также естественны, и нарушаются лишь в квантовых логиках.

$$\begin{array}{c} A \mathbin{\&} (B \vee C) \Leftrightarrow (A \mathbin{\&} B) \vee (A \mathbin{\&} C) \\ A \vee (B \mathbin{\&} C) \Leftrightarrow (A \vee B) \mathbin{\&} (A \vee C) \end{array} \tag{15.13}$$

Рассмотрим тождества формулировки отрицаний (4.41–4.46). Они выведены для классической логики, но область их применения намного шире. Правила формулировки отрицаний столь привлекательны, что дают стимул для изменения логики не в сторону их нарушения. а в сторону их восстановления, если они почему-то оказались нарушенными. Более того, они могут использоваться для введения отрицания в те логики, в которых его не было сначала.

Правила формулировки отрицания, касающиеся отрицания, конъюнкции и дизъюнкции, образуют систему, определяющую решетку с инволющией. Если к ним добавить закон исключенного третьего и закон противоречия, то получается булева алгебра, являющаяся алгеброй логических значений классической логики.

Упражнения к §15.1

Разобрать следующие рассуждения. Корректны ли они, и, если они некорректны и опираются на некоторые законы логики, за границы применимости каких законов они выходят?

15.1.1. Тот, кто ест меньше, более голоден. тот, кто более голоден, ест больше. Значит, тот, кто ест меньше, ест больше.

15.1.2. Тому, кто хочет учиться, поощрение не нужно. Тому, кто не хочет учиться, оно бесполезно. Значит, поощрять учащихся бесполезно.

15.1.3. Если все люди равны по способностям изначально, то все различия происходят от воспитания и обучения. Подавляющее большинство знаний и привычек человек приобретает в первые годы жизни, и многие из них — уже в утробе матери. Поэтому если все люди равны изначально, кастовая система общества, когда профессия человека предопределяется профессией его родителей, является идеальной.

---

[3] В естественной интерпретации линейной логики — за наши деньги

15.1.4. Тот, кто хочет что-то изучить, не знает этого. Не знающий невежествен. Таким образом, лишь невежественные люди желают учиться.

15.1.5. То, что ты не потерял, у тебя есть. Ты не терял рогов. Значит у тебя есть рога.

15.1.6. Все коммунисты — атеисты, материалисты и сторонники государственного контроля за обществом. Иван Масонов — атеист, материалист и государственник. Значит, он — коммунист.

15.1.7. В утверждении 15.4, как утверждают многие, на самом деле нет внутреннего противоречия. Объясните, почему? (Как понимают 'все' в обыденной жизни?)

15.2 Сила и недостатки классической логики

Чтобы перейти к неклассическим логикам, нам необходимо выяснить причины, по которым недостаточно использование классической логики. Многие из них перечислялись в первой части учебного пособия. Сейчас мы напомним и систематизируем основные выводы и положения, касающиеся самой классической логики и ее места в общей системе логик.

Положение 1. Классическая логика основывается на предположении, что значение сложного предложения зависит лишь от значений его компонент, а не от их смысла. Формально такое предположение выражается как правило замены эквивалентных:

$$\frac{A \Leftrightarrow B \quad C[A]}{C[B]} \tag{15.14}$$

Положение 2. Замена эквивалентных приводит к тому, что логика может быть описана через (возможно, переменное) множество логических значений, составляющее алгебру, операции которой соответствуют логическим связкам данной логики.

Положение 3. Классическая логика является *истинностнозначной*, т. е. может быть описана через фиксированную алгебру логических значений $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$.

Положение 4. Классическая логика *не обязательно* требует двузначности интерпретаций. Необходимо и достаточно, чтобы множество истинностных значений образовывало булеву алгебру. Таким образом, сфера ее применения значительно шире, чем может показаться при ее стандартном изложении через таблицы истинности.

Положение 5. Чтобы применять классическую логику, необходимо, чтобы выполнялись основные свойства аксиоматики следования по Тарскому — рефлексивность, монотонность, транзитивность и теорема дедукции.

Положение 6. Следовательно, для ее применения необходимо быть уверенным, как минимум, в том, что имеющиеся ресурсы достаточно велики либо расходуемые достаточно малы, чтобы пренебречь их ограниченностью; что новое знание не может перечеркнуть старое, что мы можем пренебречь временем либо, по крайней мере, его необратимостью.

Положение 7. Классическая логика перестает работать, если мы интересуемся не истинностью в случае неизменной фиксированной точки зрения, а развитием понятий.

Положение 8. Классическая логика может подвести нас тогда, когда мы стремимся использовать доказанные утверждения вида $\exists x\, A(x)$ как основу для алгоритмических построений.

Положение 9. Классическая логика практически бессильна, когда нужно формализовывать незнание.

Положение 10. Классическая логика может подвести в любой момент, если мы работаем с квазивысказываниями.

Положение 11. Выражаясь несколько метафорически, классическая логика — логика конкретного знания и веры, а неклассическая — логика построения, изменения знания и сомнения.

15.3 Использование доказательств

Центральным понятием, введенным математикой, явилось доказательство. Само его появление коренным образом видоизменило стиль мышления значительной части людей и положило начало тому, что сейчас называют *рациональным научным мышлением*. Не зря на дверях платоновской Академии, по слухам, была надпись: “Не знающим геометрии вход запрещен.”[4]

[4]Мы употребили здесь модальность ‘по слухам’, поскольку книга Диогена Лаэртского, служащая почти единственным источником сведений о жизни античных философов, отличается стилем, больше всего похожим на нынешние сборники низкопробных анекдотов, и, соответственно, степень достоверности излагаемого в ней кажется весьма средней (‘Хоть верь, хоть не верь’, как говорят в таком случае китайцы; под эту категорию у них подходят и ответ дамы легкого поведения на вопрос, сколько ей лет, и донесение полководца с далекой границы о победе.) Хорошо знающие китайскую культуру могут заметить, что в одном месте здесь понятие видоизменено, это

Как определил Аристотель:

Доказательство — речь, в которой из положенного с необходимостью вытекает нечто, отличное от положенного. (15.15)

Это содержательное определение до сих пор остается лучшим, если отвлечься от того, что ныне доказательство отнюдь не всегда связывают со словами.[5]

Другое содержательное определение доказательства было дано нами в первой части книги:

Доказательство — конструкция, синтаксическая правильность которой гарантирует семантическую. (15.16)

Естественно, что столь общее и гибкое понятие, как доказательство, должно быть приложимо самыми разными способами.

Первое приходящее в голову применение доказательства — обеспечение истинности некоторых утверждений. Но вопрос

Что есть истина? (15.17)

столь труден, что на него не стал отвечать скептику Понтию Пилату даже сам Иисус Христос. Хорошо было тогда, когда считалось, что математические утверждения истинны в некотором неоспоримом смысле. Но даже в те времена глубочайшие мыслители, высказывавшие суждения, на первый взгляд, утверждавшие абсолютность математических понятий, сопровождали их оговорками, которые можно было понять лишь на следующем уровне.

Пример 15.3.1. Иммануил Кант, в частности, утверждал, что геометрические истины носят *априорный* характер, то есть предшествуют всякому человеческому опыту и не зависят от него. Но обосновывал он это следующим образом. Вещи мы можем мыслить себе лишь во времени и в пространстве, и поэтому разум в некотором смысле навязывает законы Природе. Поднявшись на следующий уровень, мы видим, что априорность геометрии означает лишь ее предшествование *опыту, основанному на классическом европейском рациональном мышлении*.

Тем не менее обоснование остается одной из основных функций доказательства. Другой вопрос — *что* обосновывает доказательство?

сделано, поскольку мы старались адекватнее передать *смысл* китайских изречений для людей другой культуры.

[5]Даже расширение класса слов выражениями формализованного языка не всегда достаточно, см., напр., диаграммы Венна в §5.2

Ответ, на который скатываются даже многие математики, удрученные выявившейся относительностью математических знаний: математическое доказательство устанавливает лишь то, что утверждение выведено по общепринятым и закрепленным традицией правилам игры из утверждений, ранее признанных в соответствии с этими правилами доказанными. Но тогда остается необъяснимой 'порою фантастическая эффективность математики в других науках'.[6] На самом деле здесь делается упор всего на одном из использований математических доказательств, причем выхолащивается его суть в угоду форме.[7]

Мы выделим четыре использования доказательств.

15.3.1 Сведение новой задачи к уже решенным.

Чистые математики занимаются тем, что решают задачи. Откуда берутся задачи, уже немного рассматривалось в первом томе (§25). А вот что значит ее решить — важный вопрос.

Никакое математическое доказательство не ведется с самого начала (за исключением нескольких примитивных теорем в учебниках логики и алгебры.) Оно заканчивается ссылками на уже известные теоремы, которые когда-то тоже были математическими задачами. Таким образом, как говорят в математическом фольклоре,

Решить задачу — значит, свести ее к уже решенным. (15.18)

Рассмотрим пример.

Пример 15.3.2. Одна из простейших геометрических теорем — утверждение о возможности деления отрезка пополам. Разберем доказательство этого утверждения. Вначале из каждой из вершин отрезка радиусом равным, скажем, длине этого отрезка проводится окружность. Находятся две точки пересечения этих двух окружностей. Через эти две точки проводится прямая, пересечение которой с исходным отрезком дает его середину.

Тут мы свели данную задачу к следующим, предполагающимся уже ре-

[6] Эта характеристика принадлежит Н. Бурбаки.

[7] Пренебрежение содержанием в пользу формы — один из мощнейших, и, соответственно, обоюдоострых методов математической (да и любой другой, в частности, юридической) формализации. Он настолько органически присущ ей, что вошел в сам термин *формализация*. Вопрос здесь в мере и вкусе. Сделаешь один лишний шаг, и содержание пропадет, сделаешь в меру — подчеркнутся те особенности содержания, которые оставались скрытыми.

шенными:

Через данную точку данным радиусом провести окружность; (15.19)

Найти две точки пересечения двух пересекающихся окружностей; (15.20)

Найти точку пересечения двух прямых. (15.21)

Первая из данных задач является *постулатом* Евклида.[8] Вторая — выводится из аксиом Евклида, но для применения данного построения требуется предусловие

Расстояние между центрами окружностей меньше суммы их радиусов и больше их разности. (15.22)

Далее, по двум полученным точкам пересечения можно провести прямую (опять постулат Евклида, опять исходное построение.) Эта прямая пересекается с исходным отрезком и мы опять-таки ссылаемся на результат, что высота, медиана и биссектриса равнобедренного треугольника совпадают, тем самым обосновав корректность проведенного построения.

Эта привычка сводить новые задачи к уже решенным послужила даже основанием для шутки, которая на самом деле достаточно точно отражает суть математического метода:

Математику задали вопрос:

— Как приготовить чай?

— Элементарно. Берем чайник, наливаем в него воду, зажигаем газ, ставим чайник на огонь, ждем, пока закипит, выключаем газ, кладем заварку, заливаем ее кипятком, ждем еще 5 минут, и чай готов.

— А если у нас уже есть чайник с кипятком?

— Выливаем из него кипяток и водим задачу к предыдущей.

Именно так и действует хороший математик, решая задачу.

15.3.2 Выявление условий, при которых можно пользоваться данным утверждением.

Следующее применение доказательств менее прямое, но отнюдь не менее важное. Когда говорят, что некоторое утверждение строго доказано, возникает иллюзия, что теперь-то им можно пользоваться вовсю. Как бы не так!

---

[8] Евклид строго различал *аксиомы* (истинные утверждения) и *постулаты* (исходные построения, исходные задачи, предполагающиеся решенными).

Пример 15.3.3. Допустим, мы знаем, что некоторая характеристика $\lambda x\, f(x)$ физического процесса непрерывно изменяется на отрезке $[0, 1]$ и принимает на его концах значения разных знаков. Тогда имеется следующий алгоритм нахождения точки, в которой она имеет значение 0.

Обозначим текущий отрезок X (т.е. вначале $X = [0, 1]$.) *На его концах функция f принимает значения разных знаков.* Выделенное утверждение сделаем инвариантом построения. Выпишем его явно:

$$\text{Функция } f \text{ непрерывна на } X \text{ и принимает на его концах значения разных знаков.} \tag{15.23}$$

Разделим X пополам. В его середине a могут оказаться три возможности.

1. $f(a) = 0$. Тогда мы точно нашли корень.

2. $f(a)$ имеет тот же знак, что и $f(X.\mathrm{low})$, где $X.\mathrm{low}$ — нижняя граница отрезка X. Тогда в качестве нового значения X берем $[a, X.\mathrm{up}]$, где $X.\mathrm{up}$ — верхняя граница отрезка X.

3. $f(a)$ имеет тот же знак, что и $f(X.\mathrm{up})$. Тогда в качестве нового значения X берем $[X.\mathrm{low}, a]$.

Таким образом, мы либо на некотором шаге останавливаемся и выдаем точное значение корня, либо вдвое уменьшаем интервал, на котором он заключен. Получившаяся последовательность стягивающихся сегментов дает искомый корень.

Казалось бы (как и утверждается в большинстве учебников по программированию) мы получили построение корня с любой наперед заданной точностью. Но рассмотрим чуть подробнее имеющийся у нас разбор случаев. Любая самая маленькая ошибка в вычислении $f(a)$ может повлечь за собой выбор неправильной половины интервала и большие ошибки в вычислении корня. Итак, на самом деле *корень мы не вычисляем*. А что же нам гарантирует данное доказательство? Не так уж мало. Если мы достаточно потрудимся, мы с гарантией найдем такую точку x_0, что $f(x_0) \sim 0$ в пределах точности вычислений f. Итак, мы находим не корень, а точку, где значение достаточно мало.

В рассмотренном примере наличие разбора случаев позволило выделить неявное предположение, что f вычисляется *абсолютно точно*, выяснить существенность данного предположения для дальнейшего построения и установить, что же остается, если данное предположение не выполнено.[9]

---

[9]Последний шаг самый важный! Повторяем еще раз, что на практике почти ни одна теорема не применяется в условиях, где выполнены ее посылки.

15.3.3 Получение построения, дающего некоторый результат.

Вернемся к примеру 15.3.3.

15.3.4 Произнесение заклинания, дабы освятить свое либо предложенное заказчиком решение.

Казалось бы, в серьезной работе такому использованию доказательства не стоит уделять внимание, но на практике слишком часто ученые выполняют роль, которая при язычестве отводилась магам, жрецам либо шаманам, а в мировых религиях порою выполняют за мзду священники. Мы остановимся на признаках, по которым можно распознать такой труд.

Во-первых, видно, что сначала писался результат, а затем к нему приделывалось обоснование. Во-вторых, результат содержательно комментируется в пользу одного из фирменных решений. В-третьих, эти комментарии, как правило, самое плоское место писания. И, наконец, самое важное: отмечаются лишь достоинства предложенного решения, его ограничения и недостатки как будто не существуют. Если же для соблюдения видимости объективности приводятся другие решения, то здесь делается упор на их недостатки и ограничения, и порою сквозь зубы признаются отдельные достоинства, конечно же, напрочь загубленные недостатками.

Глава 16

Интуиционистская логика

Интуиционистская логика — наиболее близкий во многих отношениях к классической член семейства неклассических логик. Более того, она — практически единственная неклассическая логика, не являющаяся просто одним из членов целого семейства, а обладающая уникальными, выделенными свойствами. Если классическая логика имеет почти стандартную и простейшую из возможных семантику в виде таблиц истинности,[1] то интуиционистская логика замечательна тем, что четыре известных разнородных класса семантик для неклассических логик сосуществуют для нее. Поэтому интуиционистская логика может послужить в качестве полигона для семантик неклассических логик, применяемых далее к самым разнообразным системам.

16.1 Создание интуиционистской логики

16.1.1 Брауэр: идея конструктивности

К началу XX века математика столкнулась с кризисом оснований, проявлявшимся как в грубых парадоксах типа противоречий (например, парадокс Рассела в ч. 1, §1.7), так и в том, что понятия, изначально считавшиеся тождественными, стали заметно расходиться.

Вернемся к парадоксу Института математики, рассмотренному в §245 и напомним его логическую суть.

Предложение 16.1.1. *Если классическая теория* Th *неполна и имеются обозначения для всех элементов универса (эти термы будем называть* конкретными*), и мощность универса не меньше 2, то имеется*

[1] Но вспомните семантику булевых алгебр из первого тома.

такая формула $A(x)$, что доказано $\exists x\, A(x)$, но ни при каком конкретном и не может быть доказано $A(u)$.

Доказательство. Пусть G — неразрешимая в Th замкнутая формула. Пусть 0 и 1 — два различных элемента универса, которые имеются по определению. В качестве $A(x)$ возьмем

$$(\mathsf{G} \,\&\, x = 1) \vee (\neg\, \mathsf{G} \,\&\, x = 0).$$

$\exists x\, A(x)$ доказывается разбором случаев G и $\neg\,\mathsf{G}$. Но если бы при каком-то u было доказано $A(u)$, то заодно была бы разрешена и проблема G, которая неразрешима по предположению. $\square$

Мы видим, что парадокс Института математики зависит лишь от теоремы Гёделя о неполноте и логического принципа $A \vee \neg\, A$.

В начале XX века теорема Гёделя о неполноте могла лишь присниться в страшном сне, но математики уже заметили, что понятия “существовать” и “быть построенным” стали заметно различаться. Появилось понятие *чистых теорем существования*, в которых нет построения объекта, чье существование доказывается.[2] Козел отпущения, на которого можно было свалить ответственность за чистые теоремы существования нашелся сравнительно быстро: *аксиома выбора* (§35).[3]

Но молодой голландский ученый Л. Э. Я. Брауэр уже в 1908 г. опубликовал на голландском языке статью под вызывающим названием: “*О недостоверности логических принципов.*”

Личность самого Брауэра весьма интересна и необычна. Его первая книга имела заголовок “*Жизнь, искусство и мистика*” и была посвящена философии, на него оказали большое влияние идеи Ницше, Бергсона и Хайдеггера, а также восточная (прежде всего, индийская) философия. Впрочем, на Хайдеггера и он сам оказал большое обратное влияние. Упомянутая выше его диссертация также была прежде всего философским трудом.

Идеей диссертации Брауэра было то, что законы классической логики не носят ни априорного, ни абсолютного характера. Они выведены прямым обобщением законов работы с небольшими конечными совокупностями устойчивых во времени объектов. Затем они были незаконно перенесены на оперирование с бесконечно большими совокупностями и

---

[2] Любопытно, что в человеческой истории зачастую самые грязные явления называются чистыми!

[3] И на первый взгляд поделом! Она действительно ответственна *в классической математике* за самые грубые формы чистых теорем существования.

стали, соответственно, неадекватны. Эта неадекватность не осознавалась длительное время и в конце концов завела математику в громадный тупик, из которого не выберешься пересмотром отдельных аксиом. Нужно либо полностью отказаться от бесконечных совокупностей объектов, либо перейти к другой логике, либо перестать придавать какой-то содержательный смысл математическим утверждениям, признав их чисто абстрактными, идеальными. Далее, математика полностью игнорирует незавершенность человеческого знания и незавершенность, как говорил Брауэр, *становящийся характер* многих математических объектов. В частности, действительное число рассматривается как уже существующая бесконечная десятичная дробь, а не как процесс получения все более и более точных приближений.

Даже если мы точно определили абстрактный объект, например, число π, мы все равно не знаем его полностью. Например, вычислив 10^{10} знаков данного числа, мы можем так и не узнать, есть ли в его десятичном разложении последовательность 30 семерок?

Чтобы преодолеть рассмотренные выше трудности, предлагалось разрушить до основания все здание математики и заново построить его на новых принципах. Но откуда было взять новые принципы, если даже логика была поставлена под сомнение? Брауэр предложил пользоваться новой логикой, которая, как он утверждал, гораздо интуитивно понятнее, чем классическая, и описывает математические утверждения не как абстрактные истину и ложь, а как предложения о возможности выполнить некоторое *умственное построение*, решить некоторую *конструктивную задачу*.[4] Математическое доказательство должно дать требуемое построение вместе с его обоснованием. Методы, дающие построения, Брауэр (и не только он) называл *эффективными* методами.

Брауэр прекрасно понимал, что математическое построение — сущность весьма высокого уровня и для его обоснования недостаточно ссылки на практику, тем более что в те времена точного понятия алгоритма, которое математически мыслящему человеку соблазнительно взять в качестве формализации расплывчатого понятия вычисления, еще не существовало. Поэтому оставалось ссылаться в качестве первоисточника математики на Идеи, но уже не считая математику прямым воплощением Идей. Поскольку понятий для выражения новых ипостасей Идей, которые осознал Брауэр, в европейской науке еще не было выработано, Брауэр ссылался на интуицию как инструмент их понимания. По-

---

[4]Здесь не зря мы добавили прилагательное к задаче. Как говорилось в §15.3.1, математическая задача отнюдь не обязательно включает построение, вспомните, что значит ее решить?

этому он назвал предлагаемую обновленную логику и математику *интуиционистской.* Иногда он употреблял и другое название, связанное с центральной ролью конструкций в предлагаемой модификации математики и логики — *конструктивная* логика и математика. Исторически в дальнейшем эти два термина разошлись. Названия '*Интуиционизм*' и '*интуиционистская логика*' остались за системами, идущими напрямую от оригинальных брауэровских рассмотрений. '*Конструктивизм*' и '*конструктивная логика*' стали более общими терминами, характеризующими *весь класс математик и логик, ставящих на первое место понятие задачи и конструкции, а не истины и обоснования.*[5]

16.1.2 Интуиционизм и программа Гильберта

Надо сказать, что при всей радикальности исходных принципиальных позиций Брауэр подошел к задаче реформирования логики и математики максимально осторожно, пытаясь сохранить все, что не противоречит исходным принципам конструктивности. Чтобы проделать это максимально квалифицированно, он даже пошел на период стратегического отступления, и, продекларировав необходимость замены математики, занялся вначале традиционной (как ее сегодня называют, *классической*) математикой. Он получил первоклассные результаты и завоевал настолько большой авторитет, что его ввели в редакцию ведущего в то время в мире математического журнала "*Mathematische Annalen*," председателем редакционного совета которого был сам Давид Гильберт.[6] Одна из его теорем вошла в золотой фонд математики.

Теорема 16.1. ***(Теорема Брауэра о неподвижной точке)*** *Любое непрерывное отображение n-мерного шара в себя имеет неподвижную точку.*

После этого Брауэр начал публиковать серию работ, посвященных пересозданию математики на новой основе, следя за тем, чтобы каждое доказательство давало построение. У него появились и ученики, прежде

[5] В советской, а зачастую и в мировой, научной литературе термином '*конструктивная математика*' или 'конструктивное направление в математике' порою называют конкретную ее разновидность, развивавшуюся в 50-е – 70-е гг. в СССР под руководством А. А. Маркова.

[6] Давид Гильберт считается одним из самых выдающихся математиков, когда-либо живших на Земле. Он получил принципиальные результаты в самых разных разделах математики, в том числе и в логике. Но еще важнее, чем его результаты, была формулировка им 20 проблем математики на I международном конгрессе математиков.

всего, в самой Голландии. Большинство математиков высокомерно игнорировали новое направление, тем более, что Брауэр подчеркивал неформализуемость интуиционистской математики и не желал явно выписывать ее аксиомы.

Работы и декларации Брауэра вызвали раздражение у Гильберта, который считал, что Брауэр выплескивает вместе с водой и ребенка.[7] Но Гильберт не мог игнорировать критики Брауэра и поэтому предложил свою программу спасения классической математики, в которой был ряд важнейших мировоззренческих моментов.

Программа Гильберта

1. Необходимо четко осознать, что подавляющее большинство математических объектов и теорем никаких прообразов в реальном мире не имеют. Реальными являются лишь утверждения типа $2 \times 2 = 4$, а число π и теорема Ферма — уже идеальные объект и высказывание. *В принципе* идеальные объекты и результаты нужны лишь как промежуточные стадии для получения реальных результатов и в данном смысле не являются необходимыми.[8]

2. Тем не менее математика не может существовать без идеальных объектов, поскольку иначе мы не могли бы *практически* получить многих реальных результатов. Таким образом, идеальные объекты необходимы для эффективности нашего мышления.[9]

3. Необходимо обосновать, что *в принципе* идеальные объекты и утверждения можно устранить из выводов реальных утверждений; сложность получившихся преобразований при этом роли не играет, поскольку реально их устранять никто не собирается, но доказатель-

---

[7]Интересно, что основное эмоциональное возражение Гильберта против интуиционизма высвечивает сразу два методологических корня классической математики.

> Отнять у математиков закон исключенного третьего все равно, что запретить астроному пользоваться телескопом или боксеру — кулаками. (16.1)

В самом деле, Брауэр пожелал вывести математику за пределы общей естественнонаучной и прогрессистской концепции европейского рационализма и заодно пересмотреть в ней правила игры, превратив ее из европейского бокса в нечто более похожее на восточные единоборства.

[8]В данном пункте Гильберт полностью признал обоснованность критики Брауэра.

[9]В данном пункте Гильберт предвосхитил результаты о потрясающей сложности (либо даже невозможности) устранения объектов и утверждений высших уровней из математических доказательств. Смотри, например, в §11.8. Другое дело, что Гильберт, видимо, не предвидел парадокса изобретателя (теорема 13.8) в столь сильной форме.

ство возможности устранения должно быть проведено как можно более абсолютными средствами, с которыми согласны и классики, и интуиционисты, и по возможности все могущие появиться в будущем диссиденты других толков. Такие средства Гильберт назвал *финитными*.[10]

4. Для строгого финитного доказательства теорем о преобразовании выводов необходимо *полностью уточнить понятие математического языка и логического вывода*.[11]

5. После формализации необходимо финитно доказать непротиворечивость и полноту получившейся формальной системы, поскольку это гарантирует пункт 3.[12]

Хотя взаимодействие между Брауэром и Гильбертом привело к формулировке Гильбертом весьма разумной программы (более разумной, чем большевистские замашки Брауэра,) взаимоотношения между ними сложились достаточно сложно. В редакционном совете журнала Гильберту все время приходилось выслушивать декларации Брауэра о том, что данная работа смысла не имеет, неожиданно для Гильберта завершавшиеся объективной оценкой возможности ее опубликования. Не имея прав вывести Брауэра из редсовета, Гильберт организовал коллективную отставку его членов и не ввел Брауэра в новый состав. Так что тот, кто был более нетерпим в теории, оказался более терпим на практике, и наоборот.

Брауэр высоко оценил программу Гильберта и даже выступил в его защиту (уже после того, как Гильберт неблагородно обошелся с ним), когда поверхностно мыслящая научная общественность объявила о провале программы Гильберта. Но высокая оценка Брауэра не радовала

[10] Ничего не возразишь! Даже Брауэр заявил, что после такого обоснования он бы снял все возражения против классической математики, лишь бы сами математики классического направления перестали говорить о реальном смысле, кроющемся за идеальными объектами и утверждениями.

[11] Таким образом, впервые была поставлена со всей остротой задача формализации классической математики.

[12] И после десятилетия попыток в данном направлении, когда Гильберт неоднократно объявлял, что искомые доказательства почти получены, остались лишь несколько незначительных частных случаев — теорема Гёделя о неполноте! Она произвела впечатление атомной бомбы, полностью уничтожившей программу Гильберта, и все, сконцентрировавшись на предложенных Гильбертом средствах, забыли его основную цель — пункт 3. А средства ведь не только что не необходимы, но иногда даже не достаточны для главной цели! Сам Гильберт пытался заметить, да и Гёдель говорил, что опровергнуты лишь конкретные средства достижения цели, но их никто уже не слушал.

Гильберта, поскольку тот выпячивал те аспекты программы, которые сам Гильберт предпочитал не афишировать, и подчеркивал не только ее достоинства, но и ее слабости. В частности, Брауэр заявлял, что даже доказательства непротиворечивости не хватило бы для обоснования классической математики:

> Неправильная теория, не натолкнувшаяся на противоречие, не становится от этого более правильной, точно так же, как преступное поведение, не осужденное законом, не становится от этого менее преступным.

16.1.3 Формализация и первые интерпретации

Брауэр неоднократно заявлял, что, в отличие от классической математики, интуиционистская *принципиально* не может быть формализована, но тем не менее поставил перед своим учеником А. Гейтингом задачу формализации интуиционистской логики, и Гейтинг ее успешно решил. Но еще до этой формализации русские математики А. Н. Колмогоров и В. А. Гливенко сделали два важных шага в интерпретации интуиционистской логики. Колмогоров построил интерпретацию (вернее, схему интерпретаций) интуиционистской логики как исчисления задач, а Гливенко показал, что интуиционистская логика лишь по видимости слабее классической, а на самом деле содержит изоморфный образ классической логики.

Когда появилась формализация интуиционистской логики, почти сразу же была дана и ее первая строгая интерпретация. Она основывалась на идее алгебр Линденбаума-Тарского и, в свою очередь, была подтверждением их силы как математического аппарата. Было сформулировано понятие *псевдобулевой алгебры* и дана интерпретация интуиционистской логики как логики со значениями в псевдобулевых алгебрах.

Тем не менее само понятие псевдобулевой алгебры могло первоначально рассматриваться как выдуманное *ad hoc*, специально для того, чтобы проинтерпретировать интуиционистскую логику. Следующим принципиальным шагом в данном направлении стала польская интерпретация интуиционистской логики, где значениями формул являлись открытые подмножества произвольного топологического пространства. Итак, интуиционистская логика оказалась связанной с важнейшими математическими понятиями.

Далее, новые понятия в математической логике стали все чаще создаваться и для классической, и для интуиционистской логики. Г. Генцен создал свое исчисление естественного вывода и исчисление секвенций сразу для двух данных логик. Для них же он доказал теорему нормализации. Э. Бет также создал семантические таблицы и для той, и для другой логики, и для интуиционистской — чуть раньше.

16.1.4 Разногласия и новые идеи

> Полное единство мнений бывает только на кладбище.
> И. Джугашвили (Сталин), 1917 г.

А в самом интуиционизме начались расхождения. Многие были недовольны формализацией отрицания по Гейтингу и начали ее варьировать (минимальная логика, сильное отрицание, безотрицательная математика). Другие начали проявлять недовольство слишком сильными, по их мнению, абстракциями, введенными Брауэром, особенно это течение усилилось после появления точного понятия алгоритма. Третьи … но в учебнике можно и остановиться.

Реакция Брауэра была совершенно неординарной для отца-основателя школы. Вместо обвинений в адрес ревизионистов и уклонистов он спокойно сказал:

> Поскольку интуиционисты говорят на неформализованном языке, среди них *должны были* появиться разногласия. (16.2)

Там, где есть единомыслие,нет мысли! Если бы побольше выдающихся умов это понимали, и понимали бы еще, насколько апостолы, как правило, профанируют и компрометируют идею!

Принципиальный плюрализм и уважение к чужой точке зрения у Брауэра тем более примечательны, что в жизни он отдал дань традиционной слабости творческих людей, часто дававших себя соблазнить лозунгами экстремистских групп. Брауэр поддерживал Гитлера до тех пор, пока не столкнулся с гитлеризмом на практике, пока Германия не оккупировала самым подлым и вероломным образом нейтральную Голландию. Брауэр после этого занял патриотическую позицию.

После войны Брауэр опубликовал серию работ, в которых как будто задался целью показать, что он не хуже других умеет создавать альтернативы. Он ввел в математику последовательности, зависящие от развития самого математического знания (и тем самым в дальнейшем, через своего ученика Бета, дал начало новой теории моделей, ныне популярных под именем моделей Крипке.) Он показал принципиально новые возможности интуиционистской математики, в частности, возможность *формализации и позитивного использования незнания.* Он дал новый подход к известному со времен Зенона Элейского[13] концептуальному противоречию в математической модели пространства: существуют точки, и вместе с тем пространство бесконечно делимо, — он показал, что точки вводить необязательно.

16.1.5 Период после Брауэра

Начиная с 1954 г. Брауэр больше не публиковал научных работ. Но целое направление уже было создано и продолжало интенсивно развиваться. В это время расцвел, в частности, советский конструктивизм, основателем которого был А. А. Марков.[14]

---

[13]Зенон Элейский — греческий мудрец, живший по традиционной хронологии в VI веке до н. э. и прославившийся своими *апориями*: парадоксами пространства и времени. В частности, бесконечную делимость пространства ставит под сомнение апория Ахиллес и черепаха.

> Докажем, что быстроногий Ахиллес никогда не догонит черепаху. В самом деле, пока Ахиллес добежит до того места, где была черепаха, та проползет еще немного, пока он доберется до нового ее положения, она продвинется еще дальше, и так до бесконечности. (16.3)

Существование точек ставит под сомнение апория Стрела:

> Если стрела находится в любой данный момент в одной и той же точке, то она не движется, а если она не находится в некоторый момент ни в одной точке, то где же она? (16.4)

[14]Андрей Андреевич Марков — выдающийся русский математик. Он сын знаменитого математика А. А. Маркова, и, отталкиваясь от отца, не пожелал кончать математический факультет, и некоторое время работал инженером. Но затем он вернулся в математику. Работы, принесшие ему славу, были сделаны во многих областях, но в первую очередь в топологии и в алгебре, где предельно неконструктивные доказательства были скорее правилом, чем исключением. В дальнейшем он, возможно, под влиянием прикладных работ в области кодирования и декодирования (вспомним, что и Тьюринг этим занимался,) перешел к конструктивной точке зрения и в некоторых отношениях стал более радикален, чем Брауэр. Это было связано и с более физическим и материалистическим мировоззрением А. А. Маркова, искавшего твердых оснований. Подходящим и надежным основанием стало точное понятие алгоритма, и А. А. Марков перестроил конструктивный взгляд таким образом. что везде были лишь алгоритмы и данные для них. В дальнейшем А. А. Марков стал пытаться обосновать саму интуиционистскую логику через теорию алгоритмов. Он столь же бескомпромиссно, как и Брауэр, отстаивал свои убеждения, и столь же был терпим на практике к людям с другой точкой зрения. Порою он заявлял следующим образом:

> Я этого не понимаю, но этим надо заниматься! (16.5)

Необходимо помнить, что в его устах “не понимаю” означало невозможность проинтерпретировать нечто со строго конструктивной точки зрения.

Советский конструктивизм, в отличие от интуиционизма, с самого начала взял курс на точное понятие алгоритма, которое уже сформировалось к началу 50-х годов. Первым применил точное понятие алгоритма для построения семантики интуционистских теорий американский ученый С. К. Клини в 1940–1945 гг.[15] Он дал понятие *реализуемости*, которое может рассматриваться как подстановка конкретного понятия алгоритма в общую схему Колмогорова. Но, тем не менее, именно понятие реализуемости стало первой точной реализацией неформальной схемы, предложенной Колмогоровым. Затем (уже в 50-х гг.) Клини показал, что такую подстановку можно осуществлять разными, расходящимися между собой, способами.

Н. А. Шанин[16] построил алгоритм конструктивной расшифровки, аналогичный сколемизации в классической логике. Этот алгоритм выносил конструктивную задачу наружу, а проблему обоснования решения ставил таким образом, чтобы для ее доказательства можно было пользоваться классической логикой. Это еще сильнее прояснило связь классической и конструктивной логики.

Третьим направлением в широко понимаемой конструктивной математике стало то, которое ведет начало от поляков. Они предложили рассматривать лишь алгоритмические построения, но логику не менять. Тем самым они соединили недостатки классической и конструктивной математики, хотя данной концепции и оказалось достаточно для решения нескольких задач.

---

[15] С. К. Клини — выдающийся американский логик. Его фамилия читается так необычно, поскольку она сохранила остатки фризского чтения (фризы — маленький народ на островах Северного моря.) Курсовой работой Клини было построение алгоритма для вычисления разности натуральных чисел (в те времена теория алгоритмов лишь начинала развиваться.) Затем он дал множество красивых интерпретаций неклассических теорий, написал фундаментальную книгу по математической логике [32]. Он — один из основателей теории нейронных сетей.

[16] Н. А. Шанин — ученик А. А. Маркова. Он начинал с работы в самых абстрактных теоретико-множественных областях математики, в частности, в топологии. Именно по топологии он защитил докторскую диссертацию. Затем он всей душой воспринял конструктивную математику и начал, по примеру Брауэра, заявлять всем, что их работы никакого смысла не имеют. Ему возразили. что никакого смысла тогда не имеет и его диссертация, и он обратился в Высшую аттестационную комиссию с письмом, в котором просил лишить его степени доктора наук, поскольку его диссертация выполнена в области, не имеющей никакого смысла. Ему ответили, что по положению такая причина лишения степени не предусмотрена.

Н. А. Шанин — гораздо более крайний конструктивист, чем А. А. Марков, но и у него убежденность и научный экстремизм никогда не вырождались в личную нетерпимость по отношению к людям, придерживающимся других точек зрения (но тем, кто считались конструктивистами, порой приходилось несладко за уклонения.)

Пожалуй, конец этого этапа знаменуется несколькими событиями. Во-первых, наконец-то с помощью предложенной Д. Правитцем нормализации выводов и реализуемости по Клини было строго доказано, что во многих сильных теориях, базирующихся на интуиционистской логике, доказательство и на самом деле дает построение. Далее, были выделены важные классы формул, где классическая и конструктивная доказуемость совпадают (в частности, хорновские формулы, давшие начало языку ПРОЛОГ.) И, наконец, Э. Бишоп (США) предложил концепцию конструктивной математики, ориентированную на соединение достоинств интуиционистского и конструктивного в советском смысле подходов. Идея была следующей: пользоваться лишь алгоритмами, но явно этого не говорить, и применять преимущества формализации намеренного незнания, показанные Брауэром. В дальнейшем мы это рассмотрим подробнее.

16.1.6 Вторая героическая эпоха: математические результаты и попытки приложений

К концу 60-х годов развитие конструктивной математики, казалось бы, выдохлось, но на самом деле выдохлась задача переформулировки результатов классической математики в конструктивной форме. И 70-е годы знаменуются всплеском результатов уже по самой интуиционистской логике и ее приложениям к математике.

Провозвестниками приложений конструктивной логики к программированию явились работы Х. Б. Карри и Р. Л. Констейбла. Карри заметил, что доказательства в импликативном фрагменте гильбертовской формулировки логики высказываний в точности соответствуют типизируемым термам в комбинаторной логике. Констейбл заметил, что, поскольку конструктивное доказательство обязательно включает построение, оно может использоваться для автоматизированного синтеза программ. Оба этих наблюдения в дальнейшем были развиты многими способами и скрещены между собой.

16.2 Интерпретация Колмогорова

Поскольку логические формулы понимаются в интуиционистской логике (и в других конструктивных логиках) как задачи, естественно построить интерпретацию, которая оперировала бы не с их истинностными значениями, а с решениями этих задач. Такую интерпретацию построил А. Н. Колмогоров в 1925 г. (более развитый вариант — 1932 г.) Надо заметить, что при этом Колмогоров следовал брауэровскому описанию смысла логических связок при конструктивном понимании, а его интерпретацию сразу же развил и уточнил ученик Брауэра А. Гейтинг. Поэтому на Западе данная интерпретация часто называется BKH-интерпретацией. Мы предпочитаем традиционный русский термин.

Как Вы помните, в теории вычислимости было установлено, что не всюду определенность (*частичность*) является необходимым свойством алгоритмически определяемых функций. Поэтому мы будем работать с не всюду определенными функциями и в наших интерпретациях.[17] Поэтому введем терминологическое различие. *Оператор* всюду определен для данных соответствующего типа, а *функционал* либо *отображение* — не обязательно. Если f — отображение, то $!f(t)$ означает, что значение $f(t)$ существует (т. е. что $f(t)$ определено.)

Определение 16.2.1 (Колмогоровская интерпретация). Пусть ⓡ A — *множество решений* A и a ⓡ A означает, что a — решение of A, т.е. что $a \in$ ⓡ A. Пусть U — наш универс рассмотрения. Оператор, преобразующий A в ⓡ A называется *слабо колмогоровской интерпретацией*, если выполнены следующие условия (пункты, помеченные $*$, нужны лишь для логики предикатов.)

1. Есть оператор join и отображения pr_1, pr_2 такие, что:

$$\forall a, b\,(a \circledR A \mathbin{\underline{\&}} b \circledR B \supset \mathrm{join}(a,b) \circledR (A \mathbin{\&} B))\,,$$
$$\forall c\,(c \circledR A \mathbin{\&} B \supset !\mathrm{pr}_1(c) \mathbin{\underline{\&}} \mathrm{pr}_1(c) \circledR A \mathbin{\underline{\&}} !\mathrm{pr}_2(c) \mathbin{\underline{\&}} \mathrm{pr}_2(c) \circledR B)\,.$$

* Для квантора $\exists$.

$$\forall c\,(c \circledR \exists x\, A(x) \supset !\mathrm{pr}_1(c) \mathbin{\underline{\&}} \mathrm{pr}_1(c) \in U \mathbin{\underline{\&}} !\mathrm{pr}_2(c) \mathbin{\underline{\&}} \mathrm{pr}_2(c) \circledR A(\mathrm{pr}_1(c)))\,.$$

2. Есть операторы in_1, in_2 и отображение case, такие, что

$$\forall a\,(a \circledR A \supset \mathrm{in}_1(a) \circledR A \vee B)\,,$$
$$\forall b\,(b \circledR B \supset \mathrm{in}_2(b) \circledR A \vee B)\,,$$
$$\forall c\,(c \circledR (A \vee B) \supset$$
$$(!\mathrm{case}(1,c) \mathbin{\underline{\&}} \mathrm{case}(1,c) \circledR A) \mathbin{\underline{\vee}} (!\mathrm{case}(2,c) \mathbin{\underline{\&}} \mathrm{case}(2,c) \circledR B))\,.$$

3. Есть отображение ev такое, что

$$\forall a\,(a \circledR A \mathbin{\underline{\&}} f \circledR (A \Rightarrow B) \supset !\mathrm{ev}(f,a) \mathbin{\underline{\&}} \mathrm{ev}(f,a) \circledR B)\,.$$

[17] Во времена Колмогорова это еще не было ясно, и поэтому он не делал оговорки о частичности функций.

* Для квантора $\forall$.

$$f \text{ ⓡ } \forall x\, A(x) \supset \underline{\forall} a\, (a \in U \supset !\mathrm{ev}(f,a) \mathbin{\underline{\&}} \mathrm{ev}(f,a) \text{ ⓡ } A(a))\,.$$

4. Если нет таких a, что a ⓡ A, то 0 ⓡ $\neg A$.

Если главные импликации $\supset$ повсюду заменить на $\equiv$, то интерпретация называется *строго колмогоровской* или просто *колмогоровской*.

Через ! ⓡ A обозначается тот факт, что ⓡ A непусто. Если ! ⓡ A, то A называется *реализуемой* в данной колмогоровской интерпретации.

Это определение отличается от оригинального в нескольких отношениях. Во-первых, у Колмогорова не было явно указанных отображений и операторов, а прямо говорилось , что множество ⓡ A & B — прямое произведение ⓡ $A\times$ ⓡ B, множество ⓡ $A \vee B$ — прямая сумма ⓡ $A\oplus$ ⓡ B. Пункт, соответствующий ⓡ $A \Rightarrow B$, был определен только частично. Было сказано, что элементами ⓡ $A \Rightarrow B$ являются *эффективные* преобразования ⓡ A в ⓡ B, но само понятие *эффективного преобразования* оставалось неопределенным.

Таким образом, в сущности интерпретация Колмогорова была *метаинтерпретацией*, общим методом построения целого множества интерпретаций. Наше определение еще сильнее подчеркивает этот аспект и ее взаимосвязи с категорными конструкциями. Посмотрите на операторы и отображения, определявшиеся в пунктах 1 и 2. Они наводят на воспоминание об определяющих диаграммах для прямого произведения и прямой суммы (ч. 1., диаграммы 5.8, 5.9.)

Посмотрим, что гарантирует наше слабое определение.

Предложение 16.2.1. *Выполнены следующие соотношения.*

1. *Если* ! ⓡ A *и* ! ⓡ B, *то* ! ⓡ A & B.
2. *Если* ! ⓡ A & B, *то* ! ⓡ A *и* ! ⓡ B.
3. *Если* ! ⓡ A *и* ! ⓡ $A \Rightarrow B$, *то* ! ⓡ B.
4. *Если* ! ⓡ A *или* ! ⓡ B, *то* ! ⓡ $A \vee B$.
5. *Не могут быть одновременно* ! ⓡ A *и* ! ⓡ $\neg A$.
6. *Если* ! ⓡ $\forall x\, A(x)$, *то* ! ⓡ $A(u)$ *для любого* $u \in U$.
7. *Если* ! ⓡ $\exists x\, A(x)$, *то* ! ⓡ $A(u)$ *для некоторого* $u \in U$.
8. *Если* ! ⓡ $A(u)$ *для некоторого* $u \in U$, *то* ! ⓡ $\exists x\, A(x)$.

Таким образом, прямые правила вывода классической логики (за исключением правила снятия двойного отрицания, отвергнутого Брауэром) сохраняются в колмогоровской интерпретации, а реализуемость формулы вполне может служить аналогом классической истинности.

Интерпретация Колмогорова служит и сильным косвенным, полуформальным, методом анализа конструктивных утверждений. Прежде всего рассмотрим сильный закон исключенного третьего и закон двойного отрицания, критиковавшиеся Брауэром в его диссертации.

Пример 16.2.1. Реализуемость $A \vee \neg A$ означает возможность либо построения реализации A, либо установления, что такой реализации не существует. А именно, для каждого A имеется элемент, из которого с помощью операции case можно получить либо реализацию A, либо реализацию $\neg A$. Если этот закон принят как общий, то такая проверка должна делаться допустимыми у нас средствами. Значит, если мы интересуемся вычислимостью, то закон исключенного третьего может приниматься лишь в случае, если наш язык настолько ограничен, что все выразимые в нем свойства разрешимы.

Пример 16.2.2. Доказано, что *элементарная теория действительных чисел* и *элементарная геометрия* полны. В качестве примера приведем формулировку аксиом элементарной теории действительных чисел.

Сигнатура состоит из отношений $>$ и $=$, операций сложения, умножения и вычитания и трехместного предиката, выражающего деление $\mathrm{Div}(x, y, z)$, истинного, когда $x/y = z$.

Аксиомы делятся на три группы. Первая — стандартные аксиомы поля, которые, в частности, позволяют определить константы 0 как $x - x$ и 1 как x/x для произвольного $x \neq 0$.

Вторая — аксиомы линейно упорядоченного поля.

$$\begin{array}{rr}
\forall x, y, z(x > y \mathbin{\&} y > z \Rightarrow x > z) & \forall x, y, z(y < z \Rightarrow x + y < x + z) \\
\forall x \neg(x > x) & \forall x, y, z(y < z \mathbin{\&} x > 0 \Rightarrow x \cdot y < x \cdot z) \\
0 < 1 & \forall x, y(x = y \vee x < y \vee x > y)
\end{array} \qquad (16.6)$$

Третья группа состоит из единственной схемы аксиом, утверждающей существование корня для любого многочлена нечетной степени.

В данных теориях нет множества натуральных чисел и выводится либо опровергается любое утверждение, которое можно сформулировать на их языке (логику мы рассматриваем пока что классическую). Например, в элементарной теории действительных чисел можно формулировать произвольные алгебраические выражения и, скажем, теоремы о существовании корня у данного многочлена. Поскольку эти теории полны, они разрешимы. Таким образом, в геометрии закон исключенного третьего полностью корректен, поскольку любое утверждение *в принципе* можно проверить на истинность либо ложность (вопрос о том, сколько реально ресурсов для этого потребуется, нас сейчас не интересует). Поэтому эллины совершенно правильно пользовались классической логикой при построении своей математики.

Что означает реализуемость $A \vee \neg A$ без ограничений на язык? Значит, мы можем решить любую задачу! Значит, теорема Гёделя о неполноте просто не может быть выполнена! Итак, закон исключенного третьего с конструктивной точки зрения вполне заслуживает названия *принцип всезнания* и выглядит совершенно нереалистичным.[18]

А чем же провинился принцип двойного отрицания? Тут вопрос несколько тоньше. Рассмотрим формулу $\neg\neg A$. Когда она реализуема и каковы ее реализации?

Реализацией ее является стандартный элемент 0, а реализуема она, когда нет реализаций у $\neg A$. Расшифровываем последнее условие, и получаем интересное соотношение:

> $\neg\neg A$ реализуема тогда и только тогда, когда реализуема A, но реализацией ее является заранее известный элемент 0. (16.8)

Что теперь означало бы принятие закона $\neg\neg A \Rightarrow A$? Тогда был бы общий метод преобразовывать любую решаемую проблему в ее решение, т.е. *общий решатель задач.*[19] Итак, закон снятия двойного отрицания с

[18]Анекдотично, но показательно для стиля мышления большинства математиков следующее. Теоремы Гёделя во времена Брауэра сначала не было, а затем он принципиально не желал пользоваться ею для обоснования своих конструкций, поскольку не считал, что она имеет отношение к сущности классической математики. Поэтому он аргументировал неприемлемость, скажем, сильного закона исключенного третьего, следующим образом.

> Мы не знаем, есть ли в десятичном разложении числа *pi* последовательность цифр 0123456789. Поэтому, если через A обозначить утверждение
>
> > В десятичном разложении π есть последовательность цифр 0123456789, (16.7)
>
> то мы не можем утверждать ни A, ни $\neg A$, и поэтому $A \vee \neg A$ нельзя считать истинным.

Брауэр не мог вообразить себе ни мощности и общедоступности современных компьютеров, ни тупости многих их использований. Некто совершенно точно вычислил, что эта последовательность встречается в числе π и объявил о решении проблемы, давно поставленной интуиционистами!

[19]Общий решатель задач — такой же нонсенс, как вечный двигатель, но тем не

конструктивной точки зрения означает существование общего решателя задач, и естественно, что, приняв сильный закон исключенного третьего, мы должны принять и закон двойного отрицания и наоборот.

Пример 16.2.3. Рассмотрим вопрос, может ли интуиционистская теория противоречить классической? Пусть $A(x)$ — неразрешимое свойство, а наши эффективные методы — алгоритмические. Тогда нет такого функционала φ, который реализует $\forall x(A(x) \vee \neg A(x))$, и, значит, по определению реализумости, мы должны считать обоснованным $\neg \forall x(A(x) \vee \neg A(x))$

Пример 16.2.4. Рассмотрим совершенно неформальный пример, тем не менее, достаточно убедительно показывающий, что нельзя механически получать $\exists x \neg A(x)$ из $\neg \forall x\, A(x)$.

Пусть реализовать $A(x)$ означает соблазнить девушку x. Тогда реализовать $\forall x\, A(x)$ — это найти общий метод соблазнения любой девушки. Вполне реалистична ситуация, когда такого метода нет, и, тем не менее, любую девушку в принципе можно соблазнить, подойдя к этому творчески.

Неформальные ответы на многие вопросы требуют исследования более тонкой структуры колмогоровской интерпретации.

Пример 16.2.5. Рассмотрим следующий вопрос:

> Каков конструктивный смысл формулы $A \Rightarrow A$ и в каких случаях она может быть конструктивно неверна? (16.9)

Ее реализацией является тождественная функция, и, соответственно, формальный закон тождества неформально означает возможность бездействия, наличие преобразований, которые ничего не изменяют. Таким образом, чтобы не было $A \Rightarrow A$, необходимо не иметь и тождественных функционалов. В частности, для этого достаточно учесть, что есть время, которое необратимо расходуется даже при бездействии.

Пример 16.2.6. Чуть-чуть видоизменим предыдущую импликацию. $A \Rightarrow A \;\&\; A$ уже требует удвоения реализации A. А, если на реализацию тратятся ресурсы, то вполне их может не хватить на два экземпляра такой реализации. Конечно, примером такого ресурса опять-таки может служить время, но здесь достаточно и денег, которые могут не расходоваться при бездействии, но расходоваться при действиях.

Упражнения к §16.2

Пусть реализации конъюнкции, дизъюнкции и существования — прямые суммы и прямые произведения.

менее традиционно являлся одной из целей классического искусственного интеллекта. Некоторые программы даже так назывались.

16.2.1. Что получится, если в качестве реализаций $A \Rightarrow B$ будут рассматриваться все классические теоретико-множественные функции $f:\ ⓡ A \to ⓡ B$? А если еще обобщим, и будем рассматривать все отношения?

16.2.2. А если теперь будем рассматривать лишь постоянные функции?

16.2.3. Рассмотрим формулу

$$(\neg A \Rightarrow B \vee C) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B) \vee (\neg A \Rightarrow C).$$

Студент Классиков следующим образом обосновал ее конструктивную приемлемость.

Пусть некоторый функционал φ решает задачу $\neg A \Rightarrow B \vee C$. Тогда φ по решению $\neg A$ вычисляет, какой из членов дизъюнкции решается, и дает его решение. Но реализация отрицания известна заранее — 0. Так подставим 0 в φ и получим, какой из членов дизъюнкции в заключении решается, а уж его решение нетрудно получить опять-таки из φ!

Можете ли Вы что-либо возразить и если да, то что? Если возражаете, то что разумного в рассуждениях Классикова?

16.2.4. Почему мы не включили в число аксиом действительных чисел плотность порядка

$$\forall x, y(x < y \Rightarrow \exists z(x < z \,\&\, z < y))? \qquad (16.10)$$

16.2.5. Напишите одну аксиому, выражающую наличие корня у любого многочлена третьей степени.

16.2.6. Мы позаботились о существовании корней у многочленов нечетной степени. А как доказать существование $\sqrt{2}$?

16.3 Формализация Гейтинга

Как уже говорилось, первую формализацию интуиционистской логики дал ученик Брауэра А. Гейтинг. Первоначально сам Брауэр не рассматривал эту формализацию как нечто устойчивое, настаивая на неформализуемости не только интуиционистской математики (в чем он был прав), но и самой логики (в чем он тоже был прав, если рассматривать целый класс конструктивных логик.) Но попытки видоизменить конструкцию Гейтинга приводили к гораздо менее красивым системам, а его формализация постепенно обрастала точными интерпретациями и красивыми теоремами. В результате сейчас интуиционистскую логику отождествляют с формализаций Гейтинга.

Формализацию Гейтинга проще всего описать как результат замены в исчислении естественного вывода для классической логики правила двойного отрицания на правило *из лжи следует все, что угодно (*ex falso quodlibet*.)*

$$\frac{A \qquad \neg A}{B} \tag{16.11}$$

Поскольку *ex falso quodlibet* допустимо в классической логике, любое логическое доказательство в системе Гейтинга одновременно является классическим доказательством.[20] Так что имеется возможность, не будучи интуиционистом, анализировать конкретные доказательства и при прочих равных условиях проводить их интуиционистскими средствами.

Доказательство закона исключенного третьего $A \vee \neg A$ (11.2) использовало закон двойного отрицания. В интуиционистской логике от данного вывода остается почти все, кроме конца, и доказывается $\neg\neg(A \vee \neg A)$.

Доказательство формулы $A \mathbin{\&} \exists x\, B(x) \Rightarrow \exists x(A \mathbin{\&} B(x))$ может быть проведено интуиционистскими средствами, а $\forall x(A \vee B(x)) \Rightarrow A \vee \forall x\, B(x)$ — нет.

В самом деле, рассмотрим два этих доказательства.

$$\begin{array}{l} * \; A \mathbin{\&} \exists x\, B(x) \\ \left|\begin{array}{ll} A & \exists x\, B(x) \\ & B(c_1) \\ A \mathbin{\&} B(c_1) & \\ \exists x(A \mathbin{\&} B(x)) & \end{array}\right. \\ A \mathbin{\&} \exists x\, B(x) \Rightarrow \exists x(A \mathbin{\&} B(x)) \end{array} \tag{16.12}$$

[20] Тем не менее в конкретных теориях, основанных на гейтинговской формализации интуиционистской логики, вполне могут быть результаты, противоречащие классической логике. Смотри далее.

Второе доказательство

$$
\begin{array}{l}
* \ \forall x(A \lor B(x)) \\
\left|\begin{array}{ll}
\begin{array}{l} * \ A \\ \\ \\ \mid A \lor \forall x\, B(x) \\ \\ \\ \end{array} & \begin{array}{l} * \ \neg A \\ \left|\begin{array}{l} * \ z \text{ произвольное} \\ \left|\begin{array}{l} A \lor B(z) \\ B(z) \end{array}\right. \\ \forall x\, B(x) \\ A \lor \forall x\, B(x) \end{array}\right. \end{array} \\
A \lor \forall x\, B(x) &
\end{array}\right. \\
\forall x(A \lor B(x)) \Rightarrow A \lor \forall x\, B(x)
\end{array}
\tag{16.13}
$$

В данном доказательстве исполльзуется и закон исключенного третьего, и правило *ex falso quodlibet* (когда из $\neg A$ и $A \lor B(z)$ следует $B(z)$.)

Конечно, рассмотрение конкретного доказательства еще не обосновывает неприемлемости данной формулы в интуиционистской логике. Но отсутствие прямых доказательств уже делает ее подозрительной.

Отметим, что свойство замены эквиввалентных сохраняется и для интуиционистской логики (все формулы, на которых оно базируется, доказываются интуиционистски).

Упражнения к §16.3

Попытайтесь доказать интуиционистски

16.3.1. $A \,\&\, (B \lor C) \Rightarrow (A \,\&\, B) \lor (A \,\&\, C)$.

16.3.2. $A \lor (B \,\&\, C) \Rightarrow (A \lor B) \,\&\, (A \lor C)$.

16.3.3. $(A \,\&\, B) \lor (A \,\&\, C) \Rightarrow A \,\&\, (B \lor C)$.

16.3.4. $(A \lor B) \,\&\, (A \lor C) \Rightarrow A \lor (B \,\&\, C)$.

16.3.5. $A \Rightarrow \neg\neg A$.

16.3.6. $\neg A \lor B \Rightarrow (A \Rightarrow B)$.

16.3.7. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg A \lor B$.

16.4 Первые математические модели интуиционистской логики

Первой математической моделью интуиционистской логики был ее перевод на алгебраический язык. Поскольку свойство замены эквивалентных сохраняется, остается без изменения и определение алгебры Линденбаума-Тарского на стр. 191. Она теперь уже не обязательно будет булевой алгеброй, и приходится устанавливать ее характеристические свойства.

Прежде всего, поскольку отношение $\vdash A \Rightarrow B$ транзитивно, рефлексивно и почти антисимметрично, оно является отношением частичного порядка на элементах алгебры Линденбаума-Тарского. Далее, & и $\vee$ являются нижней и верхней гранью двух элементов согласно данному отношению. Для обоснования этого достаточно доказать (для &, для $\vee$ аналогично):

$$\begin{gathered} A \mathbin{\&} B \Rightarrow A, \qquad A \mathbin{\&} B \Rightarrow B, \\ (C \Rightarrow A) \mathbin{\&} (C \Rightarrow B) \Rightarrow (C \Rightarrow A \mathbin{\&} B). \end{gathered} \tag{16.14}$$

Таким образом, алгебра Линденбаума-Тарского интуиционистской теории является решеткой. Более того, данная решетка дистрибутивна, поскольку выполнены законы дистрибутивности. Но в данной решетке есть и операция импликации, которую теперь необходимо охарактеризовать в терминах частично-упорядоченных множеств. Рассмотрим два пути к импликации.

Первый путь (абстрактный). Вглядимся в диаграмму для экспоненты, конкретизированную для категории частичного порядка:

(16.15)

16.5 Модели Крипке

Следующий класс моделей интуиционистской логики связан с давней проблемой, наиболее остро прозвучавшей в знаменитом вопросе Аверроэса. Если даже Бог может подчиняться законам логики, значит, она описывает не только наш мир, но и другие возможные миры. Поэтому возникает идея рассмотреть модели, основанные на множестве миров.

Еще Брауэр заметил, что содержательно интуиционистская логика предполагает накопление знаний, а не их видоизменение, и это замечание было положено в основу моделей возможных миров, обычно называемых *моделями Крипке.*[21]

[21] История создания данного понятия, как всегда, более сложная. Этот класс моделей неявно содержался еще в алгебраических моделях (см. замечание ниже). Явно он был использован П. Дж. Коэном для доказательства независимости аксиомы выбора и континуум-гипотезы от стандартной теории множеств. С. Крипке первым показал применимость данной конструкции к широкому классу логик и ее гибкость.

Определение 16.5.1. Модель Крипке $\mathfrak{K}$ для сигнатуры σ — алгебраическая система некоторой односновной сигнатуры ϖ, называемой ***сигнатурой отношений на мирах***, элементами универса которой $U_{\mathfrak{K}}$ (часто обозначаемого $W_{\mathfrak{K}}$ или просто W) служат алгебраические системы сигнатуры σ. Элементы универса назыываются ***(возможными) мирами***. Универс мира $p \in W$ обозначается U_p.

Для случая интуиционистской логики рассматривается конкретный вид моделей Крипке — интуиционистские модели Крипке. Сигнатура отношений ϖ состоит из одного двуместного отношения $\preccurlyeq$. Оно является отношением частичного порядка. Миры согласованы с данным отношением следующим образом.

1. $p \preccurlyeq q \Rightarrow U_p \subseteq U_q$,

2. $p \preccurlyeq q \mathbin{\&} U_p \models P(a_1, \ldots, a_n) \Rightarrow U_q \models P(a_1, \ldots, a_n)$.

Таким образом, при подъеме по мирам универсы могу лишь расширяться, и истинность элементарных формул не может перети в ложность. Вспоминая определение из гл. 1, получаем, что при $p \preccurlyeq q$ q является надструктурой p.

Истинность в модели Крипке интуиционистской логики определяется следующим образом. Индуктивно определяем отношение $p \models A$, где p — мир, A — формула.

Определение 16.5.2. Индуктивно определяем отношение $p \models A$, где p — мир, A — формула.

1. $p \models P(a_1, \ldots, a_n)$ означает истинность $P(a_1, \ldots, a_n)$ в классической алгебраической системе p.[22]

2. $p \models A \mathbin{\&} B$ означает, что $p \models A$ и $p \models B$.

3. $p \models A \vee B$ означает, что $p \models A$ или $p \models B$.

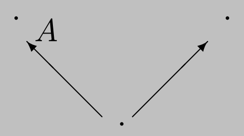
4. $p \models A \Rightarrow B$ означает, что для всех миров q, таких, что $p \preccurlyeq q$, если $q \models A$, то $q \models B$.

5. $p \models \neg A$ означает, что для всех миров q, таких, что $p \preccurlyeq q$, неверно, что $q \models A$.

[22] Поскольку истинность элементарных формул в алгебраической системе задается непосредственно интерпретацией предикатов, можно было в данном случае обойтись без представления мира как алгебраической системы, задав его просто как множество значений истинности элементарных формул. Такое представление намного удобнее для пропозициональных формул, поэтому мы широко пользуемся им в примерах. Но общее определение не сложнее, зато намного гибче.

6. $p \models \exists x\, A(x)$ означает, что найдется такое $a \in U_p$, что $p \models A(a)$.
7. $p \models \forall x\, A(x)$ означает, что для всех миров q, таких, что $p \preccurlyeq q$, и для всех $a \in U_q$ $q \models A(a)$.

Пример 16.5.1. Рассмотрим следующую модель Крипке.



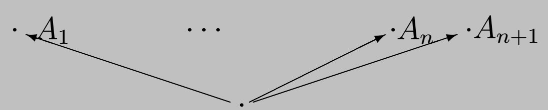
(16.16)

В ней не истинно $A \vee \neg A$, поскольку в начальной точке у нас не известно ни то, ни другое (нет A, но нельзя утверждать и $\neg A$, поскольку выше A может появиться.)

Пример 16.5.2. Покажем, что интуиционистская логика не задается никакой конечной системой истинностных значений. В самом деле, если бы это было так, то имелось бы не более n логических значений формул, и, значит, в любой интерпретации в любой совокупности из $n+1$ формулы две обязательно были бы эквивалентны.[23] Значит. была бы тождественно истинна формула

$$(A_1 \Leftrightarrow A_2) \vee \cdots \vee (A_n \Leftrightarrow A_{n+1}),$$

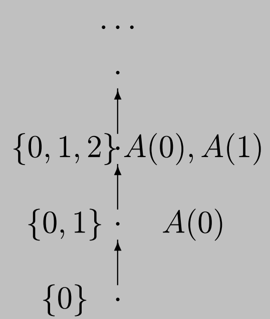
где через дизъюнкцию соединены все возможные попарные эквивалентности разных формул. Но следующая модель Крипке опровергает данную дизъюнкцию, поскольку ни одна из эквивалентностей не истинна в нижней точке.



(16.17)

И, наконец, рассмотрим пример модели Крипке для логики предикатов.

Пример 16.5.3.



(16.18)

---

[23] Здесь мы принимаем естественную гипотезу, что эквивалентность означает совпадение истинностных значений.

В данной модели в любом из миров есть такое n, что не истинно $A(n) \vee \neg A(n)$. Значит ни в каком из миров не истинно $\forall x(A(x) \vee \neg A(x))$. А тогда, по определению истинности отрицания, в любой ее точке истинно

$$\neg \forall x(A(x) \vee \neg A(x)) \tag{16.19}$$

Итак, с интуиционистской логикой могут быть совместимы и формулы, противоречащие классической.

Упражнения к §16.5

16.5.1. Постройте модель, в которой $\neg \forall x\, A(x)$, но не выполнено, что $\exists x\, A(x)$.

16.5.2. Постройте модель, где опровергается $(A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow A)$. Может ли такая модель не иметь ветвлений?

16.6 Семантические таблицы для интуиционистской логики

Как уже говорилось, конструкция семантических таблиц переносится на неклассические логики. Здесь мы рассмотрим ее для интуиционистской логики.

Правила разбиения остаются такими же, как и в классических таблицах, но добавляются новые спецификации и уточняется в соответствии с ними понятие противоречия.

Определение 16.6.1. *Интуиционистская спецификация* — фигура $\alpha\Xi$, где Ξ — спецификация истинностного значения $\models$ или $\dashv$, а α — ***интуиционистский префикс***, описывающий множество миров, в которых должно иметь место данное значение формулы.

Интуиционистский префикс — кортеж, членами которого являются натуральные числа и символы $\star$. Если префикс не содержит $\star$, то он описывает единственный мир, именем которого служит данный кортеж. Если префикс содержит $\star$, то он описывает все кортежи натуральных чисел, образующиеся замещением символов $\star$ произвольными кортежами натуральных чисел[24]

Два префикса *совместимы*, если их множества миров пересекаются.

[24]В том числе и пустым кортежом, так что кортеж, образующийся выбрасыванием всех $\star$ из некоторого префикса, описывается им.

Символы $\star$ играют здесь ту же роль, что и в шаблонах для задания строк либо имен файлов в программировании, поэтому мы их использовали, несмотря на некоторое неудобство (они лишь жирностью отличаются от операции соединения кортежей.)

Исходная формула помечается как $[\,] \Dashv A$.

Перепишем все правила классических семантических таблиц, указывая, как видоизменяются префиксы.

$$
\begin{array}{cc}
\dfrac{\alpha \models \mathcal{A}\&\mathcal{B}}{\alpha \models \mathcal{A} \quad \alpha \models \mathcal{B}} & \dfrac{\alpha \Dashv \mathcal{A}\&\mathcal{B}}{\alpha \Dashv \mathcal{A} \mid \alpha \Dashv \mathcal{B}} \\
\dfrac{\alpha \models \mathcal{A} \vee \mathcal{B}}{\alpha \models \mathcal{A} \mid \alpha \models \mathcal{B}} & \dfrac{\alpha \Dashv \mathcal{A} \vee \mathcal{B}}{\alpha \Dashv \mathcal{A} \quad \alpha \Dashv \mathcal{B}} \\
\dfrac{\alpha \models \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}}{\alpha \Dashv \mathcal{A} \mid \alpha \models \mathcal{B}} & \dfrac{\alpha \Dashv \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}}{\alpha * [n] * [\star] \models \mathcal{A} \quad \alpha * [n] \Dashv \mathcal{B}} \\
\dfrac{\alpha \models \neg\mathcal{A}}{\alpha \Dashv \mathcal{A}} & \dfrac{\alpha \Dashv \neg\mathcal{A}}{\alpha * [n] * [\star] \models \mathcal{A}} \\
\dfrac{\alpha \models \forall x\ A}{\alpha \models A(c_i)} & \dfrac{\alpha \Dashv \forall x\ A}{\alpha * [n] \Dashv A(c_{n+1})} \\
\dfrac{\alpha \models \exists x\ A}{\alpha \models A(c_{n+1})} & \dfrac{\alpha \Dashv \exists x\ A}{\alpha \Dashv A(c_i)}
\end{array}
\tag{16.20}
$$

Индексы видоизменяются лишь в правилах $\Dashv \Rightarrow$, $\Dashv \neg$, $\Dashv \forall$. Появившиеся в них формулы будут отвергаться либо утверждаться не в мире α, в котором отвергалась исходная формула, а в новом мире вида $\alpha * [n]$, непосредственно следующем за ним. n в каждом из таких правил выбирается новым. Противоречием считается лишь такая пара формул $\alpha \models A$, $\beta \Dashv A$, в которой α и β совместимы.

Заметим, что формула, которая стала истинной, не может в дальнейшем оказаться ложной, поскольку все правила, вводящие $\models A$, помещают звездочку в конец кортежа.

Пример 16.6.1. Рассмотрим семантическую таблицу для закона исключенного третьего.

$$
\begin{array}{cc}
\multicolumn{2}{c}{[\,] \Dashv A \vee \neg A} \\
[\,] \Dashv A & [\,] \Dashv \neg A \\
 & [1, \star] \models A
\end{array}
\tag{16.21}
$$

Противоречия нет, потому что A отвергается на более раннем уровне, чем утверждается. Из данной таблицы получается следующая модель Крипке:

$$
\begin{tikzcd}
{[1].} \ \models A & . \ A \\
{[\,].} \ \Dashv A \arrow[u] & . \arrow[u]
\end{tikzcd}
\tag{16.22}
$$

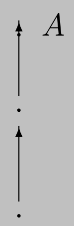
Слева модель Крипке записана со всей информацией, которую можно извлечь из семантической таблицы, а справа — так, как это принято делать, оставив лишь минимальную информацию, полностью ее определяющую.[25]

Заметим, что у нас получилась несколько другая модель, чем (16.21), чуть проще, но чуть менее наглядная. Действительно, A нет сейчас, $\neg A$, правда, тоже нет, но никогда и не будет. Так что на самом деле в данной модели истинно $\neg\neg A$, но опровергается A, и она более сильна, чем нужно для опровержения $A \vee \neg A$.

Пример 16.6.2. Рассмотрим теперь следующую семантическую таблицу.

$$\begin{array}{c} [\,] \dashv \neg\neg A \Rightarrow A \\ [1,\star] \models \neg\neg A \quad [1] \dashv A \\ [1,2] \dashv \neg A \\ [1,2] \models A \end{array} \tag{16.23}$$

Получившаяся модель отличается от (16.22) добавлением совершенно избыточного промежуточного мира:



(16.24)

Конечно же, полностью устранить избыточность построений, поставляемых семантическими таблицами, очень трудно, но данный конкретный случай диагностируется просто:

> *Если на данном уровне отвергаемая формула, требующая подъема на новый уровень, единственна, то новый уровень можно не вводить.*

Строгое обоснование данного сокращающего правила следует ниже.

Предложение 16.6.1. *Семантическая таблица*

[25] Заметим, что в моделях Крипке интуиционистской логики (да и других логик зачастую) не принято выписывать отвергаемые в данной точке утверждения, поскольку формально достаточно принять положение о том, что все не истинное отвергается. Но семантическая таблица ставит отвержение лишь там, где истинность данной формулы недопустима для опровержения цели. Поэтому на самом деле мы теряем часть информации, особенно ценную для преобразования моделей.

Рассмотрим теперь семантическую таблицу для достаточно сложной формулы.

$$
\begin{array}{c}
[] \Dashv ((((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A) \Rightarrow B) \Rightarrow B \\
[\star] \models (((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A) \Rightarrow B \\
[] \Dashv B \\
\hline
\begin{array}{c|c}
\begin{array}{c}
[\star] \Dashv ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A) \\
[\star, 1, \star] \models (A \Rightarrow B) \Rightarrow A \\
[\star, 1] \Dashv A \\
\hline
\begin{array}{c|c}
\begin{array}{c}
[\star, 1, \star] \Dashv A \Rightarrow B \\
[\star, 1, \star 2] \Dashv B \\
\underline{\underline{[\star, 1, \star, 2, \star] \models A}}
\end{array}
&
\underline{\underline{[\star, 1] \models A}}
\end{array}
\end{array}
&
\underline{\underline{[\star] \models B}}
\end{array}
\end{array}
\tag{16.25}
$$

И, наконец, построим таблицу для формулы логики предикатов.

$$
\begin{array}{c}
[] \Dashv \neg\neg \forall x(A(x) \vee \neg A(x)) \\
[\star] \models \neg \forall x(A(x) \vee \neg A(x)) \\
[\star] \Dashv \forall x(A(x) \vee \neg A(x)) \\
[\star, 1] \Dashv A(c_0) \vee \neg A(c_0) \\
[\star, 1] \Dashv A(c_0) \\
[\star, 1] \Dashv \neg A(c_0)) \\
[\star, 1, 2, \star] \models A(c_0) \\
[\star, 1, 2] \Dashv A(c_1) \vee \neg A(c_1) \\
\cdots
\end{array}
\tag{16.26}
$$

Таким образом, в интуиционистской логике правило $\Dashv\forall$ тоже может оказаться многократно применяемым. Если префикс данного правила содержит $\star$, то в каждом совместимом с данным префиксом мире должна порождаться новая константа, если только применение правила не стало избыточным.

Упражнения к §16.6

16.6.1. Разработайте быстрый алгоритм для проверки совместимость префиксов.

16.6.2. $(A \Rightarrow B \vee C) \Rightarrow (A \Rightarrow B) \vee (A \Rightarrow C)$.

16.6.3. $\neg\neg(A \vee \neg A)$.

16.6.4. $\neg(A \mathbin{\&} B) \Rightarrow \neg A \vee \neg B$.

16.6.5. $\neg\neg\forall x(A(x) \vee \neg A(x))$

16.7 Полнота семантических таблиц

Как было замечено при доказательстве теоремы полноты классической логики, полнота и корректность — первое, что необходимо доказывать для нового формализма.

Те достаточно общие способы доказательства, которые были применены для классической логики, также переносятся на доказательство полноты многих систем семантических таблиц для неклассических логик. Интуиционистская логика показательна здесь типичностью применяемых для нее модификаций, поэтому доказательство придется вновь провести подробно (исключая те моменты, которые *полностью аналогичны* ходам, примененным для классической логики).

Начнем с обоснования сокращающих правил, специфических для интуиционистской логики.

Предложение 16.7.1. *Если на данном уровне в секвенции имеется лишь единственная формула: отвергаемая формула, требующая подъема на новый уровень, то новый уровень можно не вводить.*

Доказательство. Пусть на уровне $\alpha = \alpha_1 * [i]$ у нас имеется лишь формула $\alpha \dashv \neg A$. Тогда, поскольку после разбиения формулы $\alpha \dashv \neg A$, на уровне α больше не останется формул, формулы, специфицированные на уровне α, в дальнейшем появиться не могут. $\square$

16.8 Фундаментальные результаты теории доказательств

Интуиционистская логика — одна из немногих логических систем, на которые переносятся все главные результаты теории доказательств для классической логики.

Система естественного вывода для интуиционистской логики образуется из классической системы заменой правила доказательства от противного на правило *ex falso quodlibet*:

$$\frac{A \qquad \neg A}{B}$$

16.9 Реализуемости и вариации интуиционистских принципов

Рекурсивная реализуемость Клини может рассматриваться как непосредственная конкретизация колмогоровской интерпретации следующим образом:

1. Все функции — алгоритмы.

2. Во избежание трудностей с функционалами высших типов все функции отождествляются с их программами, а эти программы кодируются натуральными числами, так что формально все реализации — натуральные числа.

3. Все алгоритмы, в том числе и частично определенные, допускаются в качестве функций.

4. При работе с программами функций мы не интересуемся вычисляемой данной программой функцией, программа рассматривается просто как строка символов. Соответственно, преобразования высших порядков не обязаны давать одинаковые значения для кодов оних и тех же функций.

16.10 Интуиционистская логика и категории

Последний вид семантик неклассических логик — *категорные интерпретации.* В принципе колмогоровская интерпретация подсказывает категорную, но функционалы, конечно же, приносят немало хлопот.

16.11 О формализации незнания

Для тех, кто к совершенству путь прошел,
Неведение знанием бывает.
А знанье, что невежда приобрел,
В невежестве его изобличает.

(Руми. [20, стр. 212])

Рассмотрим принципиально новые возможности, предоставляемые интуиционизмом в области формализации.

Творческая последовательность.

$$\alpha(n) = \begin{cases} 0, & \text{если в году } n \text{ не доказана формула } A, \\ 1, & \text{если она доказана.} \end{cases}$$

Видно, что творческая последовательность идейно совпадает с моделью Крипке интуиционистской логики. В моделях Крипке формула может некоторое время оставаться неразрешенной, а затем при движении вверх по дереву возможных миров стать истинной. Если же она никогда не станет истинной, она по определению считается ложной. Принцип, формально выражающий наличие творческих последовательностей, носит называние схемы Крипке, хотя Крипке лишь вторым написал его формальное выражение. В доказательствах его использовал уже Брауэр, а под другим названием — конструкций — изоморфный принцип использовал и формально выразил Крайзел.

$$\forall x\, \exists \alpha (A(x) \Leftrightarrow \exists n\, \alpha(n) = 1) \tag{16.27}$$

Беззаконные последовательности. Вводится новый тип последовательностей, обладающий следующим свойством:

$$\forall \alpha (A(\alpha) \Rightarrow \exists n\, \forall \beta (\forall m (m < n \Rightarrow \alpha(m) = \beta(m)) \Rightarrow A(\beta))),$$

т. е. все, что мы о них знаем, мы знаем из уже полученной информации. Трулстра (Голландия, 1974) доказал, что композиции алгоритмов и беззаконных последовательностей образуют модель интуиционизма, в которой можно промоделировать творческие последовательности. Беззаконные последовательности явились первым примером позитивного использования незнания в точных науках. Возможность сформулировать незнание в виде логической формулы — еще одно достижение интуиционизма.

Глава 17

Семантики Крипке и базирующиеся на них логики

Семантики Крипке стали ныне одним из наиболее распространенных орудий в современной неклассической логике, в философии и в когнитивной науке. Общая их идея соответствует тому, что мы видели в интуиционистской логике. Модели представляется как множество возможных миров. Эти миры связаны некоторыми отношениями и некоторые логические связки заставляют переходить от данного мира к другим связанным с ним мирам. Рассмотрим эту конструкцию на примерах.

17.1 Общая идея

Еще Аристотель, создавая логику, рассматривал тот ее фрагмент, который позже лег в основу классической логики, как частный случай. Он осознавал, что понятие истинности слишком часто привязано к случайным обстоятельствам, в которых мы оказались. Поэтому статус истинных предложений

$$2 \times 2 = 4 \tag{17.1}$$

$$\textsf{Аристотель родился в Стагире} \tag{17.2}$$

совершенно разный. Первое из них *необходимо*, оно не зависит от нашего конкретного мира, а второе просто (или даже *случайно*) истинно именно в нашем конкретном мире. А вот предложение

$$\textsf{Аристотель родился в Афинах} \tag{17.3}$$

в нашем конкретном мире ложно, но оно является *возможным*: вполне могло быть стечение обстоятельств, при которых он бы родился именно там.

Значительная часть Логики Аристотеля была посвящена *модальным* утверждениям, содержащим модальности, прежде всего, возможность и необходимость. Но в средние века эта часть его теории практически игнорировалась. В большинстве университетов Аристотеля разрешалось изучать лишь до модальностей. Обоснованием этого являлось опасение, что, узнав про модальности, студенты засомневаются, что Бог сотворил лучший из возможных миров, и даже могут перейти к гностически-буддийской ереси, что миров очень много.[1]

Таким образом, истолкование модальностей 'возможно' и 'необходимо' требует перехода от одного мира к целому множеству возможных миров.

$$\text{Возможное — то, что истинно в одном из миров.} \tag{17.4}$$

[1]Гностики — секты времен раннего христианства. Некоторые из них признавали Христа, а некоторые — были скорее просвещенными язычниками. Общим был у них взгляд на мир, который они рассматривали как изначально злой, порожденный слабым посланцем Бога — Демиургом (творцом, ремесленником с оттенком "халтурщик.") Души томятся в этой юдоли зла, и даже смерть неспособна вырвать их из нее, поскольку они перевоплощаются.

Буддизм сходен с гностицизмом в изначально пессимистическом взгляде на мир и в общей задаче — освобождения душ от зла мира. Но он даже несколько более атеистичен по исходной природе, поскольку для него мир — не творение, а самоорганизующаяся система духовных атомов — *дхарм.* Зато роль человека в мире для буддистов исключительно велика даже по сравнению с христианством, а не то что с гностицизмом. Лишь люди могут достичь высших степеней духовного совершенства, чтобы освободиться самим и, возможно, (в разных толках буддизма это трактуется по-разному) помочь освободиться и другим. Поэтому христиане упрекают гностиков в богохульстве, а буддистов — в гордыне.

И то, и другое учение склонно к признанию существования множества миров. Джайны вообще включили множественность миров в свою догматику.

Стоит различать множественность обитаемых миров в нашем Мире, во Вселенной, и множественность Миров с разными законами. Первое даже в средние века не считалось противоречащим совершенству Божию. В частности, кардинал Николай Кузанский интенсивно развивал идею множественности обитаемых миров, отвергая геоцентрический взгляд. И самого Джордано Бруно сожгли вовсе не за его натурфилософские взгляды, в частности, за проповедь множества обитаемых миров (что даже в те времена являлось максимум подозрительным с точки зрения ереси,) а за его богословские рассуждения, которые были безусловно еретическими.

Современный католицизм считает, что миров может быть много, поскольку, хотя Бог и мог сотворить лишь лучший из возможных миров, но такой лучший мог определяться неоднозначно (порядок является лишь частичным.) А что касается нашей Вселенной, католики давно уже считают проявлением людской гордыни убеждение, что разумная жизнь может существовать лишь на Земле. Повсюду, где есть условия для появления разумных существ, они *должны* появляться, дабы славить Творца.

Православные богословы здесь занимают менее определенную позицию, предпочитая не отвечать на такие провокационные и вводящие в соблазн вопросы.

Необходимое — то, что истинно не только в нашем случайном мире, но и во всех возможных мирах. (17.5)

На самом деле это же истолкование нужно и для других модальностей. Например, рассмотрим предложение

Завтра будет морское сражение, (17.6)

Это предложение сам Аристотель приводил в качестве примера высказывания, к которому не применим сильный закон исключенного третьего. Оно относится к миру, который будет завтра, а не к нынешнему его состоянию. Поэтому и в логиках, изучающих временные соотношения, модель возможных миров хорошо себя показала. Но здесь каждый мир модели — фиксированное состояние одного и того же Мира.[2]

А теперь рассмотрим еще один класс модальных высказываний, который начал изучать также Аристотель — ассерторические модальности. Пусть некто говорит:

Я знаю, что A. (17.7)

Чтобы проанализировать и проинтерпретировать данное квазивысказывание, нам необходимо перейти из нашего мира в мир внутренних представлений и знаний говорящего. Таким образом, и здесь возникает семантика возможных миров.

И, наконец, даже в описании логик программ естественна та же конструкция, поскольку каждый оператор программы изменяет ее область памяти, и, так сказать, переносит нас из одной модели в другую с той же сигнатурой. А уж если говорить об объектно-ориентированном программировании, здесь аналогия с моделями еще более прямая, поскольку изменяются не только значения констант, но и алгоритмы функций.

17.2 Модальные логики и их модели Крипке

Начнем с простейшего случая, для которого впервые была осознана общая идея моделей Крипке.

[2]Вспомните, что классическая логика описывает данное конкретное состояние конкретных высказываний, и поэтому уже не подходит для изменяющегося мира. Но данный вывод подходит лишь к логике в чистом виде, а не к базирующимся на ней теориям, и поэтому теория, основанная на классической логике, вполне может описывать изменяющийся мир. В частности, таковы многие модели, основанные на дифференциальных уравнениях, да и само исчисление бесконечно малых создавалось с целью изучать изменения, процессы, протекающие в мире.

17.2.1 Язык и общая конструкция модели

Чуть-чуть обобщим определение моделей Крипке 16.5.1.

Определение 17.2.1. Пусть задан некоторый класс моделей Ξ сигнатуры σ (например, алгебраические модели, или классические модели, или реализационные).

Общая модель Крипке $\mathfrak{K}$ для сигнатуры σ над классом моделей Ξ — алгебраическая система некоторой одноосновной сигнатуры ϖ, называемой *сигнатурой отношений на мирах*, элементами универса которой $U_{\mathfrak{K}}$ $W_{\mathfrak{K}}$ служат модели из Ξ. Элементы универса $U_{\mathfrak{K}}$ называются *(возможными) интерпретациями* либо *(возможными) мирами*. Если в моделях определено понятие универса, то универс мира $p \in W$ обозначается U_p.

Простейший и наиболее часто рассматриваемый вид моделей Крипке — реляционные системы с одним бинарным отношением R, обычно называемым *отношением достижимости*.

17.2.2 Свойства отношения достижимости и конкретные логики

17.2.3 Нешкальные логики

17.3 Временные логики

17.4 Релевантные логики и многоместные отношения между мирами

17.5 Выразительные возможности модальных и временных логик

17.6 Динамические и программные логики

17.7 Деонтические логики

Глава 18

Проблема отрицания

18.1 Три стороны классического отрицания и четвертая — содержательного

Отрицание — та связка, которая доставляла наибольшие неприятности в неклассических логиках. Дело в том, что в классическом отрицании соединены три стороны, гармонически сочетающиеся в классической логике, но сразу расходящиеся при отступлении от нее.

Первая сторона отрицания состоит в алгоритме формулировки отрицаний (§4.6.) Такой способ отрицания назовем *прямым отрицанием.* В самом деле, эти правила настолько просты и естественны, что в интуиционистской логике жаль их исчезновения. Сформулируем эти правила в виде законов, обобщающих законы де Моргана. Соответствующий вариант отрицания естественно обозначать $-$.

$$-(A \mathbin{\&} B) = -A \lor -B \qquad -(A \lor B) = -A \mathbin{\&} -B \tag{18.1}$$

$$- - A = A \qquad -(A \Rightarrow B) = A \mathbin{\&} -B \tag{18.2}$$

$$-\forall x\, A = \exists x -A \qquad -\exists x\, A = \forall x -A \tag{18.3}$$

Сохранение этих правил является одним из критериев того, что отрицание в неклассической логике сформулировано хорошо, но, как уже видно на примере интуиционистской, цепляться за них нельзя.

Вторая сторона отрицания состоит в выведении из данного предположения явно неприемлемых следствий (*редукционное*, или *дедуктивное*, *отрицание*). На нее было обращено большое внимание Карри и Марковым. Здесь определение отрицания просто:

$$\text{из } A \text{ следует неприемлемое утверждение } F. \tag{18.4}$$

Правилом, подчеркивающим эту сторону отрицания, является *reductio ad absurdum*:

$$\frac{A \Rightarrow \mathbf{F}}{\neg A} \tag{18.5}$$

где $\mathbf{F}$ — какое-либо неприемлемое утверждение. Карри ввел даже множество *контраксиом*, каждая из которых служит основанием для отрицания.

Пример 18.1.1. М. Крейнович [17] применил данный вид отрицания для того, чтобы показать конструктивную неприемлемость многих математических утверждений. Он вывел из них закон исключенного третьего. Закон исключенного третьего имеет максмальную степень интуиционистской неприемлемости среди классически истинных формул логики предикатов. Поэтому рассуждение Крейновича показало, в частности, что утверждение о существовании верхней грани у любого ограниченного можества действительных чисел конструктивно абсолютно неприемлемо, а вот лемму Гейне-Бореля о возможности выбрать конечное подпокрытие из любого открытого покрытия отрезка можно рассматривать как возможный вариант, приемлемый в некоторых системах конструктивного анализа.

Третья сторона отрицания состоит в том, что $\neg A$ означает, что A не может быть никогда (*тривиализирующее отрицание*).[1] Ее отражает правило *ex falso quodlibet (из лжи следует все)*:

$$\frac{A \quad \neg A}{B} \tag{18.6}$$

Карри еще в 30-е годы заметил, что подобное правило может оказаться определением противоречивости для систем без отрицания: система *противоречива по Карри*, если в ней выводимы все формулы. Более того, оно может служить основой для введения отрицания в безотрицательный язык.

Пример 18.1.2. Рассмотрим формальную арифметику, из которой удалено отрицание и, соответственно, аксиома $\forall n \neg n + 1 = 0$. Если к ней добавить аксиому $0 = 1$, она становится противоречивой по Карри. Докажем это.

Прежде всего, докажем по индукции $\forall n\, 0 = n$.

Базис. $0 = 0$.

Шаг. Пусть $0 = n$, где n — произвольное. Докажем $0 = n+1$. Поскольку $0 = n$, имеем $1 = n + 1$ (по аксиоме $\forall x, y(x = y \Rightarrow x + 1 = y + 1)$.) Тогда по транзитивности равенства $0 = n + 1$, что и требовалось доказать.

[1] Этого быть не может, потому что этого не может быть никогда!

Отсюда по аксиоме равенства следует $\forall x, y\, x = y$. Подстановкой получаем произвольную элементарную формулу $t = u$.

А теперь индукцией по построению *произвольной* формулы A доказываем, что она выводима. В самом деле, для элементарных это доказано, а далее, поскольку все наши связки ведут от истинных к истинным (нет отрицания), это легко видеть.

Итак, формула

$$A \Rightarrow 0 = 1 \tag{18.7}$$

является полноценной заменой отрицания в арифметике.

Более того, в классической безотрицательной арифметике она сразу же оказывается полноценным классическим отрицанием. В самом деле, закон приведения к абсурду, очевидно, выполнен, поскольку $\perp$ определена как $0 = 1$. $A \vee \neg A$ является частным случаем классической тавтологии

$$A \vee (A \Rightarrow B).$$

Четвертая сторона отрицания была первоначально предложена Брауэром в качестве определения конструктивного смысла отрицания, но Брауэр сразу же отказался от своей идеи. Это — определение отрицания A как *такого действия, которое препятствует реализации (либо обоснованию) A* (*превентивное отрицание.*)

18.2 Минимальная логика

Минимальную логику предложил Иогансон как исправление интуиционистской логики в связи с тем, что она не отказалась от казавшегося парадоксальным закона *ex falso quodlibet.* Он просто устранил это правило из гейтинговской формализации.

После такой модификации отрицание стало действительно очень слабым высказыванием. Оно сохранило лишь одну сторону классического отрицания — редукционное отрицание.

В минимальной логике, конечно же, из противоречия не обязательно выводится все, что угодно, и противоречивая теория может быть нетривиальной. Но тем не менее она в каком-то смысле вырожденна.

Предложение 18.2.1. *В минимальной логике из противоречия выводится отрицание любой формулы.*

Доказательство. В самом деле, если у нас имеется противоречие B и $\neg B$, то мы можем импортировать его в любой вспомогательный вывод.

После импорта мы можем, предположив A, заключить по правилу приведения к абсурду (которое сохраняется) $\neg A$. □

Пример 18.2.1. Рассмотрим интерпретацию лжи как истины.[2] Тогда правило приведения к абсурду сохраняет силу, поскольку истина следует из всего, что угодно. Значит, данная интерпретация моделирует минимальную логику. Но в такой интерпретации истинна (либо реализуема) любая формула вида $\neg A$.

В арифметике, в частности, отрицание моделируется в системе без отрицания. Из $0 = 1$ выводима с помощью аксиомы индукции любая позитивная формула.

Таким образом, в реальных аксиоматических теориях минимальная логика не дает никаких новых эффектов по сравнению с интуиционистской, и поэтому представляет интерес лишь для перепроверки области применения интуиционистских результатов.

Упражнения к §18.2

18.2.1. Дайте определение модели Крипке для минимальной логики.

18.2.2. Проверьте, будут ли минимально доказуемы следующие формулы:

1. $(A \vee B) \,\&\, \neg A \Rightarrow B$.
2. $(\neg\neg A \Rightarrow A) \,\&\, (\neg\neg A \vee \neg A) \Rightarrow (A \vee \neg A)$.
3. $(\neg A \vee B) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$.
4. $\neg(A \,\&\, B) \Rightarrow \neg A \vee \neg B$.
5. $\neg A \vee \neg B \Rightarrow \neg(A \,\&\, B)$.
6. $\neg \exists x\, A(x) \Rightarrow \forall x \neg A(x)$.

18.2.3. Догадайтесь, на что заменить в арифметике без отрицания аксиому

$$\forall x \neg \mathsf{S}\, x = 0.$$

18.2.4. Каково соотношение безотрицательных фрагментов минимальной и интуиционистской логики?

---

[2] Именно так!

18.3 Логика с сильным отрицанием

Грис модифицировал интуиционистскую логику в другом направлении, введя в нее *сильное отрицание* $\sim$, определяемое по правилам прямого отрицания, и сохранив *ex falso quodlibet.* Правила естественного вывода для логики с сильным отрицанием формулируются по отдельности для связок и для отрицаний связок. Таким образом, сильное отрицание работает по-разному в различных контекстах[3] Для обычных связок правила остаются прежними. Для отрицания исчезает правило приведения к абсурду, но остается правило ex falso quodlibet.

$$\begin{array}{cc} \text{Устранение } \sim\Rightarrow & \text{Введение } \sim\Rightarrow \\ \dfrac{\sim(A \Rightarrow B)}{A \quad \sim B} & \dfrac{A \quad \sim B}{\sim(A \Rightarrow B)} \end{array} \tag{18.8}$$

Остальные правила для комбинаций отрицания и связок также следуют классическим правилам формулировки отрицаний. В том числе имеется и два правила для комбинации $\sim\sim$.

$$\begin{array}{cc} \text{Устранение } \sim\sim & \text{Введение } \sim\sim \\ \dfrac{\sim\sim A}{A} & \dfrac{A}{\sim\sim A} \end{array} \tag{18.9}$$

Рассмотрим теперь определение модели Крипке для логики Гриса. Структура миров остается такой же, как в интуиционистской логике (см. определение 16.5.1). В каждом мире теперь элементарная формула может иметь одно из трех значений: $\top$, $\bot$ или $\mathfrak{u}$, что означает, что значение формулы в данном мире неизвестно. При подъеме по модели возрастают как множество истинных, так и множество ложных элементарных формул (что можно интерпретировать следующим образом: неизвестность является не равноправным логическим значением, а временным состоянием высказывания, которое в любой момент может быть заменено на одно из определенных состояний[4]). Совместной индукцией определяются

[3]Но, конечно, эти его действия взаимно согласованы, иначе не получилась бы логическая система, имеющая, как и полагается отличной конструктивной логике, четыре взаимосогласованные интерпретации: естественный вывод, алгебраическая система, модели Крипке, реализуемость.

[4]Но никто не гарантирует, что неизвестное высказывание когда-нибудь будет уточнено.

понятия истинности и ложности формулы.

$$
\begin{array}{cc}
\dfrac{p \models A \text{ и } p \models B}{p \models A \,\&\, B} & \dfrac{p \Dashv A \text{ или } p \Dashv B}{p \Dashv A \,\&\, B} \\
\dfrac{p \models A \text{ или } p \models B}{p \models A \vee B} & \dfrac{p \Dashv A \text{ и } p \Dashv B}{p \Dashv A \vee B} \\
\dfrac{p \models A}{p \Dashv \sim A} & \dfrac{p \Dashv A}{p \models \sim A} \\
\dfrac{\begin{array}{c}\text{Если } q \models A, \text{ то } q \models B \\ \text{для всех } p \preccurlyeq q\end{array}}{p \models A \Rightarrow B} & \dfrac{p \models A \text{ и } p \Dashv B}{p \Dashv A \Rightarrow B} \\
\dfrac{\begin{array}{c}\text{Есть такое } c \in U_p, \\ \text{что } p \models A(c)\end{array}}{p \models \exists x\, A(x)} & \dfrac{\begin{array}{c}\text{Для всех } p \preccurlyeq q \text{ и для всех} \\ c \in U_q \ q \Dashv A(c)\end{array}}{p \Dashv \exists x\, A(x)} \\
\dfrac{\begin{array}{c}\text{Для всех } p \preccurlyeq q \text{ и для всех} \\ c \in U_q \ q \models A(c)\end{array}}{p \models \forall x\, A(x)} & \dfrac{\begin{array}{c}\text{Есть такое } c \in U_p, \\ \text{что } p \Dashv A(c)\end{array}}{p \Dashv \forall x\, A(x)}
\end{array}
\tag{18.10}
$$

Заметим, что обычное интуиционистское отрицание выражается через сильное отрицание и импликацию. А именно,

$$\neg A \Leftrightarrow (A \Rightarrow \sim A) \tag{18.11}$$

Теперь легко построить модель, в которой ложен сильный закон исключенного третьего. А именно, она состоит из одного мира, в котором неизвестно A. Тогда $\neg A$ и одновременно $\neg \sim A$.

Сильное отрицание может пониматься как конструктивное опровержение, когда мы не просто приводим к противоречию некоторое предложение, а строим для него контрпример. Соответственно, реализуемость для сильного отрицания (построение которой оставлено Вам в качестве упражнения), может быть интерпретирована как построение программы, для которой мы интересуемся не только выдачей результата, но и осмысленного сообщения об ошибке в случае неудачи.[5]

Упражнения к §18.3

18.3.1. Дайте определение реализуемости для формул логики с сильным отрицанием.

18.3.2. Как видоизменится доказательство теоремы полноты для логики с сильным отрицанием?

---

[5]Все, кто имели дело с программами, прекрасно понимают разницу между информативным сообщением об ошибке и простым вылетом или, еще хуже, зависанием программы.

18.3.3. Рассмотрим следующее рассуждение. $\sim\sim \mathfrak{A}$ для любой формулы $\mathfrak{A}$ означает то же самое что и $\mathfrak{A}$. Рассмотрим теперь $A \Rightarrow B$. Оно эквивалентно $\sim\sim (A \Rightarrow B)$, но $\sim (A \Rightarrow B$ эквивалентно $A \,\&\!\sim B$. Таким образом, $A \Rightarrow B$ эквивалентно $\sim (A \,\&\!\sim B)$. Но, по правилам формулировки отрицания, последняя формула эквивалентна $\sim A \vee\sim\sim B$, что эквивалентно $\sim A \vee B$. Таким образом, $A \Rightarrow B$ эквивалентно $\sim A \vee B$. Взяв частный случай $A \Rightarrow A$, получаем $\sim A \vee A$, а данная формула не то, что невыводима, а даже может быть ложной в модели Крипке

В чем дело?

18.3.4. Можно ли рассматривать сильное отрицание в классической логике?

18.4 Логика неполной информации

Одна из проблем, на которую мы уже неоднократно наталкивались — неполные структуры, частично-определенные операции и прочее подобное.

18.5 Основы логики противодействия

Очевидно, почему Брауэр испугался собственной идеи превентивного отрицания. Он, при всей внешней революционности, как уже было показано, максимально осторожно относился к идеям математики. А данное понимание отрицания находится в грубейшем концептуальном противоречии с идеей чистой математики. Ничто не может воспрепятствовать математику сделать вывод, который следует из ранее доказанных предложений, даже если этот вывод противоречит другим ранее доказанным. Другое дело, что такой вывод должен заставить пересмотреть некоторые из ранее принятых положений. Итак, мы видим, что грубой математической реализацией идеи Брауэра может служить правило *modus tollens*:

$$\frac{A \Rightarrow B \quad \neg B}{\neg A} \tag{18.12}$$

Заметим, что *modus tollens* точно так же согласуется с отрицанием как приведением к нежелательному результату: если из B следует нечто нежелательное, то оно следует и из A. Поэтому данное правило нельзя считать прямым и сколько-нибудь адекватным отражением идеи Брауэра.

Но при сохранении хотя бы той части парадигмы современной математики, что значения и смысл математических утверждений не зависят от людей и не меняются со временем, если эти утверждения уже доказаны, дальше двинуться невозможно.

Рассмотрим теперь логику меняющегося мира, в котором действуют активные субъекты. Тогда задача воспрепятствовать истинности A становится вполне осмысленной. Описание такого вида отрицания представляет нелегкую задачу. Остановимся на некоторых трудностях.

Пример 18.5.1. Рассмотрим ситуацию, где нам нужно воспрепятствовать действию, заключающемуся в повороте на 180° некоторого устройства. Тогда, если нам недопустимо прямо воздействовать на противника и есть основания полагать, что распознать состояние устройства ему будет затруднительно, лучший способ помешать противнику — самому заранее выполнить этот поворот, дабы он своим действием восстановил желаемое нам состояние.

Этот пример более или менее условный, но в восточных единоборствах известно, что часто лучший способ воспрепятствовать приему противника — помочь ему. Также и интриганы часто препятствуют чему-то нежелательному, помогая проводящему в жизнь данное действие таким образом, чтобы он якобы добился успеха, а результаты были бы прямо противоположны ожидаемым.

18.6 Паранепротиворечивая логика

Паранепротиворечивая логика отказывается от третьей стороны отрицания, и, более того, рассматривает A и $\neg A$ как вполне совместимые случаи. Содержательным обоснованием этого является, напрмер, следующее рассуждение.

> Пить водку вредно для здоровья. Поэтому водку пить нельзя. Но пить водку принято в нашем обществе. Поэтому пить водку нужно. (18.13)

Глава 19

Логики, базирующиеся на нестандартных отношениях следования

19.1 Ресурсные ограничения и нетранзитивность.

Пусть наши ресурсы конечны и, более того, ограничены сверху некоторой фиксированной оценкой. Тогда мы можем проделать не более некоторого числа шагов преобразований, расходующих ресурсы.

19.2 Умолчания и немонотонность

Часто на практике умолчание тоже означает некоторое знание. Например, если мы ничего не говорим о действующем законе, значит, он не изменяется.

19.3 Конечность и нерефлексивность

19.4 Деньги и линейность

Глава 20

Доказательства и программы

20.1 Изоморфизм Карри-Ховарда

Мартышкам стало холодно зимой,
Вдруг светлячок зажег огонь живой.
«Согреемся теперь, конец мученьям»—
И приложили светлячка к поленьям.

(Рудаки. [20, стр. 212])

Поскольку конструктивное доказательство дает умственное построение, возникает соблазн использовать его для построения и анализа программ. История такого применения доказательств, пожалуй, берет начало от забытой работы Карри [30] и от его совместной монографии с Ховардом [31], один из результатов которой мало того что изящен с математической точки зрения, но еще и выглядит необычайно соблазнительно и поэтому слишком хорошо помнится.

Рассмотрим фрагмент интуиционистской логики, в котором есть всего одна связка $\Rightarrow$. Формулы данного языка изоморфны типам в типизированном λ-исчислении. Это — первая основа изоморфизма. Вторая основа — уже ранее неоднократно подмеченная аналогия между применением функции к аргументу и правилом *modus ponens*, между λ-абстракцией и правилом дедукции. Начнем с примера.

Пример 20.1.1. Проанализируем доказательство формулы $(A \Rightarrow B) \Rightarrow$

$((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$.

$$\begin{array}{l}
* A \Rightarrow B \\
\quad | \quad * B \Rightarrow C \\
\quad | \quad | \quad * A \\
\quad | \quad | \quad | \quad B \\
\quad | \quad | \quad | \quad C \\
\quad | \quad | \quad A \Rightarrow C \\
\quad | \quad (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C) \\
(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C))
\end{array} \tag{20.1}$$

Построим по этому доказательству замкнутый λ-терм типа $((a \to b) \to ((b \to c) \to (a \to c)))$, реализующий данную формулу. Поскольку последним применялось правило дедукции, терм должен иметь вид λ-абстракции

$$\lambda f^{(a\to b)}.\,(\cdots)^{((b\to c)\to(a\to c))}, \tag{20.2}$$

где мы уже знаем и тип связанной переменной, и тип подкванторного выражения. Аналогично, конкретизируя подкванторное выражение, исходя из его вывода, получаем

$$\lambda f^{(a\to b)}.\,\lambda g^{(b\to c)}.\,(\cdots)^{(a\to c)}. \tag{20.3}$$

Конкретизируя последнее выражение, опять получаем λ-абстракцию:[1]

$$\lambda f^{(a\to b)}.\,\lambda g^{(b\to c)}.\,\lambda x^{a}.\,(\cdots)^{c}. \tag{20.4}$$

И, наконец, рассматривая внутренний подвывод, мы видим, что в нем к x применялись f и g:

$$\lambda f^{(a\to b)}.\,\lambda g^{(b\to c)}.\,\lambda x^{a}.\,(g(fa)). \tag{20.5}$$

Итак, мы построили функционал, дающий композицию своих аргументов.

Переходим к точным определениям.

20.2 Системы высших типов

Видно, что уже изоморфизм Карри-Ховарда, несмотря на внешнюю простоту, требует интенсивного использования функционалов высших типов.

[1] То, что мы используем переменную x для элементарного типа, а f и g — для функциональных, является лишь стилистическим украшением.

20.3 Призраки и классификация выводов

Пожалуй, Г. С. Цейтин в 1970 г. первым заметил, что для обоснования правильности программы недостаточно тех значений, которые присутствуют в ее тексте и при ее вычислении. Нужны также величины, лишние и даже порою вредные для вычислений, но необходимые, чтобы обосновать их корректность.

Пример 20.3.1. Если мы пишем цикл типа

$$\mathsf{while}\ P\ \mathsf{do}\ S; \tag{20.6}$$

то мы не заинтересованы (как правило) в том, чтобы он работал бесконечно. Но вычисление числа шагов цикла может быть не менее трудной задачей, чем вычисление самого цикла, и, чтобы не делать двойную работу, нужно ввести значение-призрак ω,[2] ограничивающий сверху число шагов цикла, и *доказать*, что оно действительно обладает таким свойством.

Этот пример показывает еще одну сторону значений-призраков. Если мы можем построить ω как обычное натуральное число и достаточно быстро вычислить его (хотя бы оно и было грубой верхней оценкой числа шагов), то в цикле можно поставить аварийный завершитель, если число его повторений превзошло известную верхнюю границу ω. Таким образом, призраки зачастую вновь обретают плоть, если мы интересуемся диагностикой ошибок.

20.4 Конструктивная расшифровка

20.5 Теорема о верификации

20.6 Проблема совместимости операторов на примере exit

[2]Мы специально здесь применили обозначение, вызывающее аналогии и с нестандартными числами, и с ординалами. Действительно, данный призрак не обязан быть натуральным числом, он может быть любым идеальным объектом, гарантирующим конечность реального процесса.

Глава 21

Гибридные логические системы и развитие теории неформализуемости

21.1 Примеры гибридных систем

Поскольку, как мы видим, практически все сложные описания многоуровневые, и разные уровни обычно различаются по применяемым средствам, интересны системы, соединяющие несколько различных логик на разных уровнях.

21.2 Гибридная логика неформализуемости

21.3 Формализация незнания

Глава 22

Применения логики в когнитивной науке

22.1 Проблема контекста

Проблема контекста восходит еще к Аристотелю, одно из первых творений которого в области логики [7] как раз и посвящено контекстам. В первой части нашей книги данная проблема неоднократно затрагивалась в связи с переводами между естественным и формальным языком.

Литература

[1] Аристотель. *Первая аналитика.* Сочинения, т. 1, М.: Мысль, 1975, с. 117–254.

[2] Аристотель. *Вторая аналитика.* Сочинения, т. 1, М.: Мысль, 1975, с. 255–346.

[3] Аристотель. *Категории.* Сочинения, т. 2, М.: Мысль, 1978, с. 51–90.

[4] Аристотель. *Метафизика.* Сочинения, т. 1, М.: Мысль, 1975.

[5] Аристотель. *Об истолковании.* Сочинения, т. 1, М.: Мысль, 1975, с. 91–116.

[6] Аристотель. *О софистических опровержениях.* Сочинения, т. 1, М.: Мысль, 1975, с. 533–593.

[7] Аристотель. *Топика.* Сочинения, т. 1, М.: Мысль, 1975, с. 347–532.

[8] Дж. Булос, Р. Джеффри. *Вычислимость и логика*. М., Мир, 1994.

[9] Дж. Вейценбаум. *Возможности вычислительных машин и человеческий разум*. М., Радио и связь, 1982.

[10] В.И. Вернадский. *Труды по всеобщей истории науки*. М., Наука, 1988.

[11] П. Вопенка. *Математика в альтернативной теории множеств*. М., Мир, 1983.

[12] С.С. Гончаров, Ю.Л. Ершов, К.Ф. Самохвалов. *Введение в логику и методологию науки*. М.: Интерпракс, 1994.

[13] М. Девис. *Прикладной нестандартный анализ*. М., Мир, 1980.

[14] Ю.Л. Ершов. *Теория нумераций*. М.: Наука, 1977.

[15] В. Г. Кановей. *Аксиома выбора и аксиома детерминированности*. М.: Наука, 1984.

[16] Н.И. Конрад. *У-цзы. Трактат о военном искусстве. Перевод и исследование.* в кн.: Н. И. Конрад. *Избранные труды. Синология*.М.: 1977.

[17] М. Крейнович. *Из чего следует закон исключенного третьего?*

[18] К. Куратовский, А. Мостовский. *Теория множеств*. М.: Мир, 1970.

[19] Н.Н. Непейвода. *О формализации неформализуемых понятий: автопродуктивные системы теорий*. Семиотика и информатика, вып. 25 (1985), с. 46–93.

[20] *Омар Хайям в кругу мудрости.* Симферополь, Реноме, 1999

[21] К.М. Подниекс. *Вокруг теоремы Гёделя*. Рига, 1981.

[22] И. Пригожин. *От существующего к возникающему*. М., Наука, 1985.

[23] Е. Расёва, Р. Сикорский. *Математика метаматематики*. М.: Наука, 1972.

[24] С.П. Расторгуев, В.Н. Чибисов. *Цель как криптограмма*. М.: Яхтсмен, 1996.

[25] Р.Р. Столл. *Множества. Логика. Аксиоматические теории*. М.: Просвещение, 1968.

[26] В.А. Успенский. *Что такое нестандартный анализ*? М., Наука, 1987.

[27] П. Тейяр де Шарден. *Феномен человека*. М., Наука, 1987.

[28] А.Т. Фоменко. *Глобальная хронология*.М., МГУ, 1993.

[29] Chin-lang Cheng, R. Lee. *Symbolic logic and mechanical theorem proving*. Academic Press, 1973 (руссский перевод: Ч. Чень, Р. Ли. Математическая логика и автоматическое доказательство теорем. М.: Наука, 1983).

[30] H.B. Curry.

[31] H.B. Curry, Howard *Combinatory logic*, vol. 2

[32] S. C. Kleene. *Introduction in metamathematics*. N.-Y., 1952 (русский перевод С. К. Клини. *Введение в метаматематику*. М., 1957)

Предметный указатель

Персоналии

Николай Николаевич Непейвода
Прикладная логика
Учебное пособие

Данная работа частично поддержана Минвузом России, гранты 94-1.17-336, программа “Фундаментальные исследования в естествознании”и “Логические операторы,”Новосибирский центр по математическим наукам, 1996

Технический редактор	С.И. Зянкина
Корректор	Е.Ф. Осипова
Компьютерная подготовка	С.Н. Непейвода

Лицензия ЛР № 020411 от 18.02.97
Сдано в производство 25.11.97. Формат $60 \times 90\,{}^1\!/_{16}$. Печать офсетная. Уч. изд. л. 28,5. Усл. печ. л. 24,0. Тираж 4000 экз. Заказ №   .

Издательство Удмуртского университета, 426000, Ижевск, Майская, 23.
Типография Удмуртского Университета, Ижевск, Университетская, 1.