

СПБГУ

Курс лекций по механике

[Введите подзаголовок документа]

Прохоренко Ф.Ф.
02.12.2012

Оглавление

Оглавление	2
Глава 1. Введение	6
1.1. Системы отсчета, системы координат. Тела, примеры тел в механике.	6
1.2. Некоторые сведения из векторного анализа.	7
1.3. Некоторые сведения из тензорного анализа	10
1.3.1. Определение тензора второго ранга	10
1.3.2. Операции с тензорами второго ранга.....	11
1. Транспонирование и разложение тензора на симметричную и кососимметричную части	11
2. Тензорный базис, координаты тензора. Матричный образ тензора.....	11
3. Скалярное и векторное умножение тензора на вектор и тензор. Единичный тензор.....	11
4. След, векторный инвариант, определитель тензора. Теорема о представлении кососимметричного тензора.....	12
3.3. Некоторые тождества, связанные с определителем тензора	13
1.3.4 Ортогональные тензоры. Тензор поворота.....	14
Глава 2. Статика.....	15
2.1. Воздействия и их классификация. Главный вектор и главный момент воздействий. Зависимость главного момента от выбора опорной точки.....	15
2.2. Уравнения равновесия для произвольной и плоской систем воздействий. Момент относительно оси. Типы опорных реакций. Статически определимые и неопределимые системы.	16
2.3. Эквивалентные воздействия.....	18
2.4. Равнодействующая, центр параллельных сил, центр тяжести.....	19
Глава 3. Кинематика точки.....	21
3.1 Скорость и ускорение в декартовой системе координат.....	21
3.2 Скорость и ускорение в цилиндрической системе координат	21
3.3. Скорость и ускорение при траекторном (естественном) способе описания движения.	22
Глава 4. Кинематика твердого тела.....	23
4.1 Кинематика плоского движения.	23
4.1.1 Основная формула кинематики твердого тела. Формула Эйлера	23
4.1.2 Мгновенный центр скоростей и способы его нахождения.....	24
4.1.3. Ускорения точек твердого тела при произвольном и плоском движении	25
4.2. Произвольное движение твердого тела.....	26
4.2.1 Описание ориентации тела. Направляющие косинусы.	26
4.2.2. Углы Эйлера, самолетные (корабельные) углы.	27

4.2.3. Матрица поворота. Матрица спина. Вектор угловой скорости.	28
4.2.4. Описание ориентации с помощью тензора поворота. Теорема Эйлера о тензоре поворота.	30
4.2.5. Тензор спина, вектор угловой скорости, формула Пуассона.	31
4.2.6. Теорема о сложении угловых скоростей.	31
4.2.7. Примеры вычисления вектора угловой скорости.	33
Пример 1. Углы Эйлера.	33
Пример 2. Самолетные (корабельные) углы.	34
Пример 3. Трехстепенной гироскоп в кардановом подвесе.	35
Пример 4. Движение конуса по конусу.	35
4.2.8. Связь тензора поворота и вектора конечного поворота.	36
4.2.9. Сложное движение точки. Теоремы о сложении скоростей и ускорений (теорема Кориолиса).	37
4.2.10. Сложное движение тела.	39
Глава 5. Фундаментальные законы механики.	42
5.1. Первый фундаментальный закон механики - закон баланса количества движения. Открытые и закрытые тела.	42
Пример. Уравнение Мещерского. Формула Циолковского.	43
5.1.1. Центр масс. Теорема о движении центра масс.	44
5.1.2. Уравнения динамики относительного движения материальной точки. Силы инерции.	45
Пример 1. Маятник Фуко.	45
Пример 2. Отклонение снарядов (битва у Фолклендских островов).	47
5.2. Второй фундаментальный закон механики - закон баланса момента количества движения (кинетического момента, момента импульса).	50
5.2.1. Зависимость кинетического момента от выбора опорной точки. Кинетический момент твердого тела. Тензор инерции.	51
5.2.2. Постоянный тензор инерции. Осевые и центробежные моменты инерции. Вычисление моментов инерции относительно произвольных осей.	52
5.2.3. Зависимость тензора инерции от точки (обобщенная теорема Гюйгенса-Штейнера).	53
5.2.4. Главные оси и главные моменты инерции.	54
5.2.5. Эллипсоид инерции.	56
5.2.6. Вычисление тензоров инерции некоторых тел (шар, цилиндр, конус).	56
5.2.7. Дифференциальное уравнение вращения вокруг неподвижной оси. Физический маятник.	58
5.2.8. Дифференциальные уравнения произвольного движения твердого тела. Замена опорной точки во втором фундаментальном законе.	59
Пример 1. Качение шара по вращающейся плоскости.	60

Пример 2. Качение шара по внутренней поверхности вертикального цилиндра.....	61
5.2.9. Динамические реакции оси вращающегося тела. Пример	62
Глава 6. Третий фундаментальный закон механики (закон баланса энергии).	64
6.1. Кинетическая энергия материальной точки и твердого тела. Теорема Кенига.....	64
6.2. Мощность, работа. Потенциальные воздействия.....	65
6.3. Примеры потенциальных воздействий	66
6.4. Теорема об изменении кинетической энергии.	67
6.5. Третий фундаментальный закон механики (закон баланса энергии).	67
Глава 7. Механика Лагранжа	69
7.1.Обобщенные координаты, связи, число степеней свободы.	69
7.2. Уравнения Лагранжа (второго рода).....	70
Замечание 1. Вычисление обобщенных сил для потенциальных воздействий.	72
Замечание 2. Принцип возможных скоростей.....	72
Замечание 3. Обобщенные силы, обеспечивающие постулируемую зависимость координат от времени. Примеры.	72
Замечание 4. О неголономных системах. Пример.	73
Глава 8. Колебания систем.....	76
8.1. Колебания системы с одной степенью свободы.	76
8.1.1. Свободные колебания без сопротивления.	77
8.1.2. Вынужденные колебания без сопротивления при гармоническом воздействии. Резонанс.	78
8.1.3. Вынужденные колебания без сопротивления при произвольном воздействии. Интеграл Дюамеля.	78
8.1.4. Свободные колебания с учетом сопротивления.....	79
8.1.5. Вынужденные колебания с учетом вязкого сопротивления.....	81
Пример. Малые колебания кривошипно-шатунного механизма.	82
8.2. Колебания системы с несколькими степенями свободы.....	84
8.2.1. Линеаризация уравнений движения вблизи положения равновесия.	84
8.2.2 Устойчивость положения равновесия.....	85
8.2.3. Собственные частоты и формы малых колебаний.	85
8.2.4. Общее решение задачи о свободных колебаниях.	87
8.2.5. Главные (нормальные) координаты	88
8.2.6. Вынужденные колебания системы с несколькими степенями свободы.	90
1.Разложение по формам свободных колебаний (метод главных координат).....	90
2. Случай гармонических обобщенных сил. Пример: динамический гаситель.....	91

8.3. Колебания упругих тел с распределенными параметрами.....	92
8.3.1. Метод Рэлея-Ритца	92
Пример 1. Свободные изгибные колебания консольного клина переменного круглого сечения	93
8.3.2. Метод конечных элементов (МКЭ).	94
Пример 2. Продольные колебания консольного стержня постоянного сечения.....	95

Глава 1. Введение.

1.1. Системы отсчета, системы координат. Тела, примеры тел в механике.

Все явления в окружающем нас мире могут быть описаны только в системах отсчета, посредством которых можно указать место и время события.

Введем тройку не лежащих в одной плоскости (некомпланарных) направленных из точки А отрезков (векторов) $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$, называемых отсчетным репером и заполним пространство точками, положение которых задается векторами

$$\underline{R} = x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 + x_3 \underline{e}_3, \quad (-\infty < x_k < +\infty) \quad (1.1)$$

где вещественные числа x_1, x_2, x_3 называются отсчетными координатами.

Отсчетный репер (А, $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$) с множеством точек (1.1) называется телом отсчета.

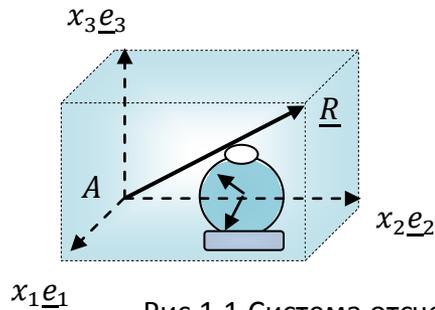


Рис.1.1. Система отсчета

Система отсчета – это тело отсчета с прибором для измерения времени (часами) (рис.1.1). Только в системе отсчета могут быть введены основные понятия, в том числе расстояние и направление. В системе отсчета можно ввести сколько угодно систем координат, в том числе и подвижных, но, скажем, ни скорость точки, ни ускорение от системы координат не зависят.

Механика не изучает реальные физические объекты ввиду их неодолимой сложности; она изучает *тела* - математические модели, наделенные некоторыми общими свойствами реальных объектов.

Основными «кирпичиками», из которых составляются тела, являются *материальная точка* и *твердое тело*, которые, собственно, и являются основными объектами изучения в общем курсе теоретической механики.

Материальная точка – наделенная массой тело, для описания положения которого достаточно одного лишь вектора положения. Так, если нас интересует только положение Земли на ее орбите, мы считаем Землю материальной точкой и описываем положение, скажем, ее центра; в то же время при описании движения какой-либо элементарной частицы необходимо учитывать и ее вращение – а это уже, по меньшей мере, модель твердого тела. Как станет ясно из дальнейшего, для твердого тела кроме вектора положения какой-либо его точки необходимо еще тремя координатами (углами) описать его ориентацию.

Кроме того, взаимодействие материальных точек описывается только силами, а твердых тел еще и моментами.

Тела можно разделить на одномерные, двумерные и трехмерные.

Одномерные тела занимают линию в пространстве и могут состоять из материальных точек (нити) и твердых тел-точек (стержни). Двумерные тела занимают поверхность в пространстве и также могут состоять из материальных точек (мембраны) и тел-точек (оболочки).

Трехмерные модели занимают объем .

1.2. Некоторые сведения из векторного анализа.

Некоторые физические величины описываются одним лишь числом - это скалярные величины (масса, температура, объем, энергия); для описания других требуется задать величину и направление – это векторы (скорость, сила). Векторы будут обозначаться подчеркнутыми буквами (например \underline{a} , \underline{F}); та же буква без черты будет обозначать модуль (длину): $a \stackrel{\text{def}}{=} |\underline{a}|$.

Сразу же заметим, что векторы в виде направленных отрезков идеально подходят для описания перемещения (трансляции) тела в пространстве, а даже такое простейшее движение тела как вращение вокруг неподвижной оси удобно изобразить в виде кругового вектора $\underline{\varphi}^*$, полностью описывающего и направление вращения и своей длиной угол поворота.

Круговому вектору $\underline{\varphi}^*$ сопоставим прямой $\underline{\varphi}$, который перпендикулярен плоскости кругового, а направление согласовано с выбором *ориентации пространства*, а именно:

Пространство называется *правоориентированным*, если с конца прямого вектора $\underline{\varphi}$ направление кругового видно **против** часовой стрелки и *левоориентированным*, если **по** часовой стрелке (рис.1.2).



Рис. 1.2. Ориентация пространства

Векторы и тензоры называются *полярными*, если при изменении ориентации они не изменяются, и *аксиальными*, если изменяют знак на противоположный. Из вышесказанного ясно, что величины, прямо либо косвенно связанные с перемещениями, являются (скорее всего) полярными, а с вращениями – аксиальными, но это необходимо проверять.

На множестве векторов (в векторном пространстве) вводятся операции с векторами, позволяющие не постулировать (как это принято в математике), а доказать привычные правила коммутативности (перестановочности) операций сложения и умножения, (за исключением операции векторного умножения, для которого $\underline{a} \times \underline{b} = -\underline{b} \times \underline{a}$), дистрибутивности (распределительный закон умножения), ассоциативности (сочетательный закон) сложения.

1. Сложение векторов $\underline{a} + \underline{b} = \underline{c}$ (рис 1.3а)

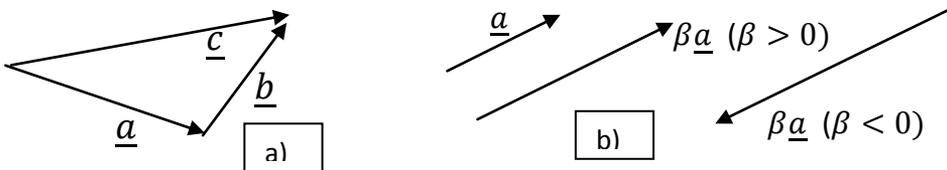


Рис. 1.3. Сложение и умножение на число

2. Умножение на число: $|\beta \underline{a}| = |\beta| \cdot |\underline{a}|$ (рис 1.3b)

3. Скалярное произведение: $\underline{a} \cdot \underline{b} \stackrel{\text{def}}{=} |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cos(\widehat{a, b})$ (1.2)

Независимо от выбора базиса модуль вектора вычисляется по формуле $|\underline{a}| \equiv a = \sqrt{\underline{a} \cdot \underline{a}}$.

С помощью скалярного произведения можно вычислить проекцию вектора \underline{a} на направление вектора \underline{b} : $\text{пр}_b(\underline{a}) = \frac{(\underline{a} \cdot \underline{b})}{b}$ и угол между ними: $\cos(\widehat{a, b}) = \frac{(\underline{a} \cdot \underline{b})}{ab}$.

В наиболее часто применяемом ортонормированном базисе $\underline{d}_1, \underline{d}_2, \underline{d}_3$, в котором

$$\underline{d}_s \cdot \underline{d}_k = \delta_{sk} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0, & k \neq s \\ 1, & k = s \end{cases} \text{ - символ Кронекера, } \underline{a} \cdot \underline{b} = (a_s \underline{d}_s) \cdot (b_k \underline{d}_k) = a_s b_k \delta_{sk} = a_s b_s.$$

Здесь применяется правило суммирования по повторяющимся индексам: $a_s b_s \equiv \sum_{s=1}^3 a_s b_s$.

Упражнение. С помощью скалярного умножения доказать теорему косинусов

$$\text{для суммы векторов } \underline{a} + \underline{b} = \underline{c}: c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos(\underline{a}, \underline{b})$$

4. Векторное произведение $\underline{a} \times \underline{b} = \underline{c}$.

Векторное произведение непосредственно связано с ориентацией пространства.

В результате произведения $\underline{a} \times \underline{b}$ получается вектор \underline{c} , модуль которого равен произведению модулей сомножителей на синус угла между ними: $c = ab \sin(\underline{a}, \underline{b})$, а направлен он перпендикулярно сомножителям в ту сторону, откуда кратчайший поворот первого сомножителя ко второму виден

a) против часовой стрелки в правоориентированном пространстве

b) по часовой стрелке в левоориентированном

Далее по умолчанию будем считать пространство правоориентированным. Отметим геометрический смысл векторного произведения - это вектор, перпендикулярный к сомножителям, длина которого равна площади построенного на них параллелограмма (рис.1.4a)

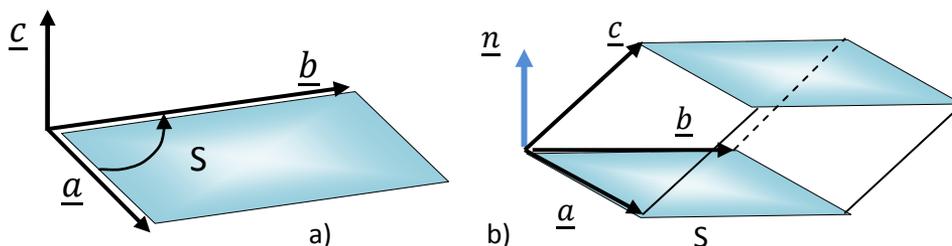


Рис.1.4. Векторное и смешанное произведения

Из определения векторного произведения следует, что в результате произведения двух полярных или двух аксиальных векторов получается вектор аксиальный, а произведение полярного на аксиальный – полярный вектор.

Векторное произведение не зависит от системы координат, а его координатная форма записи зависит. Так, в ортонормированном базисе $\underline{d}_1, \underline{d}_2, \underline{d}_3$ векторное произведение формально можно записать в виде определителя

$$(\underline{a} \times \underline{b}) = \pm \begin{vmatrix} \underline{d}_1 & \underline{d}_2 & \underline{d}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \quad (1.3)$$

где знак (+) для правой тройки базисных векторов, а (-) – для левой.

Тройка векторов $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ называется правой (в правоориентированном пространстве), если с конца третьего вектора (\underline{c}) кратчайший поворот от первого (\underline{a}) ко второму (\underline{b}) виден происходящим против часовой стрелки.

В заключение параграфа приведем часто используемые в механике формулы смешанного и двойного векторного произведений.

Смешанное произведение $(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c}$ имеет простой геометрический смысл. Поскольку $\underline{a} \times \underline{b} = S \underline{n}$, где S – площадь параллелограмма, а \underline{n} – единичный вектор нормали (рис.1.4b), то $(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c} = S \underline{n} \cdot \underline{c} = \pm V$, где V – объем параллелепипеда, построенного на векторах $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$; знак (+) соответствует случаю, когда тройка векторов $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ правая, знак (-) – левая.

. Смешанное произведение не изменяется при круговой перестановке:

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c} = (\underline{c} \times \underline{a}) \cdot \underline{b} = (\underline{b} \times \underline{c}) \cdot \underline{a} \quad (1.4)$$

В координатном виде смешанное произведение с учетом (1.3) можно записать в виде

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c} = \pm \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \equiv \pm \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \quad (1.5)$$

где, как и в (1.3), знак (+) для правой тройки базисных векторов, а (-) – для левой.

Формула для двойного векторного произведения имеет вид (без доказательства)

$$\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = \underline{b} (\underline{a} \cdot \underline{c}) - \underline{c} (\underline{a} \cdot \underline{b}) \quad (\text{формула «бац – цаб»}) \quad (1.6)$$

Упражнение. Доказать тождество (тождество Лагранжа):

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot (\underline{c} \times \underline{d}) = \begin{vmatrix} (\underline{a} \cdot \underline{c}) & (\underline{a} \cdot \underline{d}) \\ (\underline{b} \cdot \underline{c}) & (\underline{b} \cdot \underline{d}) \end{vmatrix}. \quad (1.6a)$$

Доказательство. Обозначим $(\underline{a} \times \underline{b}) = \underline{f}$, внесем его по (1.4) в векторное произведение и воспользуемся тождеством (1.6)

$$\begin{aligned} \underline{f} \cdot (\underline{c} \times \underline{d}) &= (\underline{f} \times \underline{c}) \cdot \underline{d} = [-\underline{c} \times (\underline{a} \times \underline{b})] \cdot \underline{d} = [\underline{b} (\underline{a} \cdot \underline{c}) - \underline{a} (\underline{c} \cdot \underline{b})] \cdot \underline{d} = \\ &= (\underline{a} \cdot \underline{c})(\underline{b} \cdot \underline{d}) - (\underline{a} \cdot \underline{d})(\underline{b} \cdot \underline{c}) \blacksquare \end{aligned}$$

Полагая, в частности, $\underline{c} = \underline{a}$, $\underline{d} = \underline{b}$ получим

$$|\underline{a} \times \underline{b}|^2 = a^2 b^2 - (\underline{a} \cdot \underline{b})^2$$

Упражнение. Доказать тождество

$$[(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c}] [(\underline{d} \times \underline{e}) \cdot \underline{f}] = \begin{vmatrix} \underline{a} \cdot \underline{d} & \underline{a} \cdot \underline{e} & \underline{a} \cdot \underline{f} \\ \underline{b} \cdot \underline{d} & \underline{b} \cdot \underline{e} & \underline{b} \cdot \underline{f} \\ \underline{c} \cdot \underline{d} & \underline{c} \cdot \underline{e} & \underline{c} \cdot \underline{f} \end{vmatrix} \quad (1.6b)$$

Разумеется, это тождество можно проверить прямым вычислением с помощью (1.5), но можно поступить иначе, познакомясь заодно с понятием взаимного базиса. Обозначим для удобства $\underline{d} = \underline{e}_1$, $\underline{e} = \underline{e}_2$, $\underline{f} = \underline{e}_3$ и разложим произвольный вектор по этому базису:

$\underline{x} = x^1 \underline{e}_1 + x^2 \underline{e}_2 + x^3 \underline{e}_3$. Чтобы найти, например, координату x^1 , надо умножить \underline{x} векторно на \underline{e}_2 (исчезнет второе слагаемое) и затем скалярно на \underline{e}_3 (исчезнет третье). Получим

$$x^1 = \frac{\underline{e}_3 \times \underline{e}_2}{(\underline{e}_1 \times \underline{e}_2) \cdot \underline{e}_3} \cdot \underline{x} \equiv \underline{e}^1 \cdot \underline{x}, \quad x^2 = \frac{\underline{e}_3 \times \underline{e}_1}{(\underline{e}_1 \times \underline{e}_2) \cdot \underline{e}_3} \cdot \underline{x} \equiv \underline{e}^2 \cdot \underline{x}, \quad x^3 = \frac{\underline{e}_1 \times \underline{e}_2}{(\underline{e}_1 \times \underline{e}_2) \cdot \underline{e}_3} \cdot \underline{x} \equiv \underline{e}^3 \cdot \underline{x},$$

где $\underline{e}^1, \underline{e}^2, \underline{e}^3$ называются векторами *взаимного базиса*.

Таким образом, $\underline{x} (\underline{e}_1 \times \underline{e}_2) \cdot \underline{e}_3 = (\underline{e}_3 \times \underline{e}_2) \cdot \underline{x} \underline{e}_1 + (\underline{e}_3 \times \underline{e}_1) \cdot \underline{x} \underline{e}_2 + (\underline{e}_1 \times \underline{e}_2) \cdot \underline{x} \underline{e}_3$. Положим теперь $\underline{x} = \underline{a} \times \underline{b}$, заменим в правой части с помощью тождества Лагранжа произведение на \underline{x} и умножим последнее равенство скалярно на \underline{c} . Полученное выражение – разложение определителя (1.6b) по третьей строке. ■

1.3. Некоторые сведения из тензорного анализа

При описании многих явлений часто встречается ситуация, когда одна векторная величина является функцией другой векторной величины. Так, например, сила $\underline{T} dS$, действующая на элементарную площадку dS в точке A тела зависит от ориентации этой площадки, которая задается вектором нормали \underline{n} , то есть $\underline{T} = \underline{f}(\underline{n})$ (рис.1.5). Аналогично, вектор \underline{j} плотности тока в анизотропном проводнике не параллелен вектору \underline{E} напряженности электрического поля, а является ее функцией $\underline{j} = \underline{j}(\underline{E})$. Установление вида этих функций является задачей механики и физики, но в любом случае приходим к необходимости введения нового понятия – пары векторов.

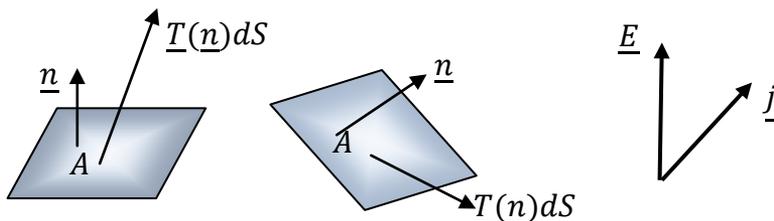


Рис. 1.5

1.3.1. Определение тензора второго ранга

Простейшим тензором второго ранга является *диада* – упорядоченная пара векторов \underline{a} и \underline{b} , которая записывается единым символом $\underline{a} \otimes \underline{b}$ (или $\underline{a} \underline{b}$); знак (\otimes) (или отсутствие знака) называется знаком тензорного умножения. Термин «упорядоченная» означает, что $\underline{a} \underline{b} \neq \underline{b} \underline{a}$. Тензоры будем обозначать буквами с двойной чертой $\underline{\underline{A}} = \underline{a} \otimes \underline{b} \equiv \underline{a} \underline{b}$.

Далее знак (\otimes) мы использовать не будем.

На множестве диад вводятся правила:

1. Распределительный закон по отношению к первому и второму векторам:

$$(\underline{a} + \underline{b})\underline{c} = \underline{a}\underline{c} + \underline{b}\underline{c}, \quad \underline{a}(\underline{b} + \underline{c}) = \underline{a}\underline{b} + \underline{a}\underline{c}$$

2. Сочетательный закон по отношению к скалярному множителю: $\gamma \underline{a} \underline{b} = (\gamma \underline{a}) \underline{b} = \underline{a} (\gamma \underline{b})$
3. Распределительный закон по отношению к скалярному множителю:

$$(\gamma + \delta) \underline{a} \underline{b} = \gamma \underline{a} \underline{b} + \delta \underline{a} \underline{b}$$

4. Существование нулевой диады: $0 \cdot (\underline{a} \underline{b}) = (0 \cdot \underline{a}) \underline{b} = \underline{a} (0 \cdot \underline{b}) = \underline{0}$

5. Под суммой двух и более диад будем понимать неупорядоченную совокупность

$$\underline{a} \underline{b} + \underline{c} \underline{d} + \dots + \underline{p} \underline{q}$$

Рассматривая сумму двух диад $\underline{a} \underline{b} + \underline{c} \underline{d}$, видим, что она не может быть записана в виде одной диады, за исключением случаев, сводящимся к законам (1)-(3). Аналогично, нельзя свести к одной диаде и сумму большего числа диад, то есть правила (1)-(5) выводят нас за пределы множества диад (множество незамкнутое). Нетрудно убедиться, что минимальной неупрощаемой в общем случае совокупностью, к которой может быть приведена сумма любого числа диад, является сумма трех диад. Действительно, сумма четырех, например, диад в силу линейной зависимости в трехмерном пространстве четырех и более векторов записывается в виде суммы трех диад:

$$\underline{a} \underline{b} + \underline{c} \underline{d} + \underline{e} \underline{f} + \underline{g} \underline{h} = [\underline{h} = x\underline{b} + y\underline{d} + z\underline{f}] = (\underline{a} + x\underline{g}) \underline{b} + (\underline{c} + y\underline{g}) \underline{d} + (\underline{e} + z\underline{g}) \underline{f}$$

Определение: *тензором второго ранга называется неупорядоченная сумма любого*

конечного числа диад $\underline{\underline{A}} = \underline{a} \underline{b} + \underline{c} \underline{d} + \dots + \underline{p} \underline{q}$

По поводу этого определения сделаем замечание. Тензор в виде одной диады иногда называют линейным тензором, в виде суммы двух диад – плоским, а в виде неупрощаемой суммы трех диад полным [1]. Смысл этих терминов станет понятным ниже.

1.3.2. Операции с тензорами второго ранга.

Заметим, что если тензор входит в формулу или определение линейно, то его можно для сокращения записи заменять одной диадой; ниже будем этим иногда пользоваться.

1. Транспонирование и разложение тензора на симметричную и кососимметричную части.

Пусть $\underline{\underline{A}} = \underline{a} \underline{b}$. Тогда $\underline{\underline{A}}^T = (\underline{a} \underline{b})^T \stackrel{\text{def}}{=} \underline{b} \underline{a}$, т.е. для транспонирования надо просто поменять векторы в диадах местами. Если $\underline{\underline{B}}^T = \underline{\underline{B}}$, то тензор называется симметричным, а если $\underline{\underline{B}}^T = -\underline{\underline{B}}$, то кососимметричным (или антисимметричным).

Всякий тензор можно разложить на симметричную и кососимметричную части:

$$\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{A}}^T) + \frac{1}{2} (\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{A}}^T).$$

Первое слагаемое – симметричная часть, второе – кососимметричное.

2. Тензорный базис, координаты тензора. Матричный образ тензора.

Будем (для простоты) использовать ортонормированный базис $\underline{d}_1, \underline{d}_2, \underline{d}_3$, которого вполне достаточно для изложения основных понятий в курсе теоретической механики, тем более что все формулы остаются справедливыми и в случае произвольного базиса.

Разложим все векторы в произвольном тензоре $\underline{\underline{A}} = \underline{a} \underline{b} + \underline{c} \underline{d} + \dots + \underline{p} \underline{q}$ по базису:

$$\underline{a} = a_m \underline{d}_m, \underline{b} = b_k \underline{d}_k, \dots, \underline{q} = q_s \underline{d}_s, \text{ подставим в } \underline{\underline{A}} \text{ и «приведем подобные»}. \text{ Получим}$$

$\underline{\underline{A}} = A_{mn} \underline{d}_m \underline{d}_n$, где набор из девяти диад $\{\underline{d}_m \underline{d}_n\}_{m,n=1,2,3}$ называется тензорным базисом, а величины A_{mn} – координатами (компонентами) тензора.

Тензору $\underline{\underline{A}}$ в указанном базисе можно сопоставить матрицу $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$.

Подчеркнем, что матричный образ тензора изменяется при изменении системы координат, а, следовательно, и базиса, а сам тензор – нет; в этом и заключается, пожалуй, главное (но не единственное) преимущество тензорного «языка».

3. Скалярное и векторное умножение тензора на вектор и тензор. Единичный тензор.

Скалярное произведение – самая распространенная операция. Пусть $\underline{\underline{A}} = \underline{a} \underline{b} + \underline{c} \underline{d} + \underline{p} \underline{q}$.

По определению, умножение справа: $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{f} \stackrel{\text{def}}{=} \underline{a} (\underline{b} \cdot \underline{f}) + \underline{c} (\underline{d} \cdot \underline{f}) + \underline{p} (\underline{q} \cdot \underline{f}) = \underline{f}^*$,

$$\text{умножение слева: } \underline{f} \cdot \underline{\underline{A}} \stackrel{\text{def}}{=} (\underline{f} \cdot \underline{a}) \underline{b} + (\underline{f} \cdot \underline{c}) \underline{d} + (\underline{f} \cdot \underline{p}) \underline{q} = \underline{f}^{**}.$$

В обоих случаях вектор скалярно умножается на ближайший в каждой диаде вектор, и в результате получается новый вектор; отсюда, по-видимому, следует принятое в математике определение тензора как «линейного оператора, преобразующего векторное пространство само в себя». Впрочем, и это крайне узкое определение имеет смысл. Пусть тензор – одна диада $\underline{\underline{A}} = \underline{a} \underline{b}$. Тогда при умножении его, например, справа на любой вектор \underline{c} получается $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{c} = \underline{a} (\underline{b} \cdot \underline{c}) \equiv \underline{c}^*$ –

вектор, коллинеарный вектору \underline{a} - отсюда и его название «линейный тензор». Если $\underline{A} = \underline{a} \underline{b} + \underline{c} \underline{d}$ – сумма двух диад, то при умножении его (например) справа на любой вектор \underline{f} получится вектор $\underline{a} (\underline{b} \cdot \underline{f}) + \underline{c} (\underline{d} \cdot \underline{f})$, лежащий в плоскости векторов \underline{a} и \underline{c} – отсюда и название «плоский тензор»: все векторы «ложатся» на одну плоскость.

Аналогично умножению на вектор вводится скалярное умножение тензора на тензор.

Пусть $\underline{A} = \underline{a} \underline{b}$, $\underline{B} = \underline{c} \underline{d}$. Тогда $\underline{A} \cdot \underline{B} = (\underline{a} \underline{b}) (\underline{c} \underline{d}) \stackrel{\text{def}}{=} \underline{a} \underline{d} (\underline{b} \cdot \underline{c}) \equiv \underline{C}$ - новый тензор.

Правило осталось тем же: скалярно перемножаются ближайшие векторы в диадах.

Упражнение: 1. Показать, что $\underline{A} \cdot \underline{c} \equiv \underline{c} \cdot \underline{A}^T$ и, следовательно, для симметричного тензора $\underline{A} \cdot \underline{c} \equiv \underline{c} \cdot \underline{A}$, а для кососимметричного ($\underline{S}^T = -\underline{S}$) $\underline{S} \cdot \underline{b} = -\underline{b} \cdot \underline{S}$

2. Показать, что $(\underline{A} \cdot \underline{B})^T \equiv \underline{B}^T \cdot \underline{A}^T$.

Пусть тензоры записаны в координатном виде $\underline{A} = a_{mn} \underline{d}_m \underline{d}_n$, $\underline{B} = b_{sk} \underline{d}_s \underline{d}_k$.

Тогда $\underline{A} \cdot \underline{B} = a_{mn} b_{sk} \underline{d}_m \underline{d}_k (\underline{d}_n \cdot \underline{d}_s) = a_{mn} b_{sk} \underline{d}_m \underline{d}_k \delta_{ns} = a_{mn} b_{nk} \underline{d}_m \underline{d}_k = \underline{C} = c_{mk} \underline{d}_m \underline{d}_k$, откуда из $\underline{A} \cdot \underline{B} = \underline{C}$ получаем правило перемножения матриц $c_{mk} = a_{mn} b_{nk}$, которое в линейной алгебре вводится «по определению».

Единичным тензором называется тензор, в результате скалярного произведения на который слева или справа вектора (или тензора) получается тот же самый вектор (или тензор.)

Разложение вектора \underline{a} по базису имеет вид $\underline{a} = (\underline{a} \cdot \underline{d}_m) \underline{d}_m = \underline{a} \cdot (\underline{d}_m \underline{d}_m) \equiv \underline{a} \cdot \underline{E}$, где, согласно определению, $\underline{E} \equiv \underline{d}_m \underline{d}_m = \underline{d}_1 \underline{d}_1 + \underline{d}_2 \underline{d}_2 + \underline{d}_3 \underline{d}_3$ - единичный тензор.

Обратным к тензору \underline{A} называется тензор \underline{A}^{-1} , являющийся решением уравнения $\underline{A} \cdot \underline{A}^{-1} = \underline{E}$ или, что равносильно, $\underline{A}^{-1} \cdot \underline{A} = \underline{E}$.

Векторное умножение тензора на вектор достаточно показать на одной диаде $\underline{A} = \underline{a} \underline{b}$;

$\underline{A} \times \underline{c} = (\underline{a} \underline{b}) \times \underline{c} \stackrel{\text{def}}{=} \underline{a} (\underline{b} \times \underline{c})$ - получается новый тензор.

Упражнение. Доказать тождество $\underline{a} \times \underline{E} \times \underline{b} \equiv \underline{b} \underline{a} - (\underline{a} \cdot \underline{b}) \underline{E}$, (1.7)

и, умножив его скалярно на \underline{c} , получить формулу (1.6) двойного векторного произведения.

4. След, векторный инвариант, определитель тензора. Теорема о представлении кососимметричного тензора.

След (trace) тензора $\underline{A} = \underline{a} \underline{b} + \underline{c} \underline{d} + \dots + \underline{p} \underline{q}$ - число, получаемое заменой диадного умножения на скалярное:

$$\text{tr } \underline{A} \stackrel{\text{def}}{=} \underline{a} \cdot \underline{b} + \underline{c} \cdot \underline{d} + \dots + \underline{p} \cdot \underline{q}. \quad (1.8)$$

Если тензор записан в координатном виде $\underline{A} = a_{mn} \underline{d}_m \underline{d}_n$, то $\text{tr } \underline{A} = a_{11} + a_{22} + a_{33}$ - сумма элементов главной диагонали матрицы. В силу своего определения при любой замене базиса след тензора не изменяется (скалярные произведения от базиса не зависят), поэтому его называют *первым инвариантом* тензора.

Векторным инвариантом тензора $\underline{A} = \underline{a} \underline{b} + \underline{c} \underline{d} + \dots + \underline{p} \underline{q}$ называется вектор, полученный заменой диадного произведения векторным:

$$\underline{A}_\times \stackrel{\text{def}}{=} \underline{a} \times \underline{b} + \underline{c} \times \underline{d} + \dots + \underline{p} \times \underline{q} \quad \text{или} \quad \underline{A}_\times \stackrel{\text{def}}{=} a_{mn} \underline{d}_m \times \underline{d}_n \quad (1.9)$$

Векторный инвариант симметричного тензора, у которого $a_{mn} = a_{nm}$ равен нулю.

Что же касается кососимметричного тензора, то можно доказать теорему:

Теорема. Произвольный кососимметричный тензор $\underline{\underline{S}}$ может быть единственным образом представлен в виде $\underline{\underline{S}} = \underline{\omega} \times \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{E}} \times \underline{\omega}$, (1.10)

где $\underline{\omega} = -\frac{1}{2} \underline{\underline{S}}_{\times}$ называется сопутствующим вектором тензора $\underline{\underline{S}}$.

Доказательство. Поскольку $\underline{\underline{S}} = -\underline{\underline{S}}^T$, то $S_{mn} = -S_{nm}$ и $\underline{\underline{S}}$ можем записать в виде

$$\underline{\underline{S}} = S_{12}(\underline{d}_1 \underline{d}_2 - \underline{d}_2 \underline{d}_1) + S_{13}(\underline{d}_1 \underline{d}_3 - \underline{d}_3 \underline{d}_1) + S_{23}(\underline{d}_2 \underline{d}_3 - \underline{d}_3 \underline{d}_2)$$

Найдем вектор $-\frac{1}{2} \underline{\underline{S}}_{\times}$ и обозначим его $\underline{\omega}$: $\underline{\omega} = -(S_{12}\underline{d}_3 - S_{13}\underline{d}_2 + S_{23}\underline{d}_1)$.

Поскольку координаты $\underline{\omega}$ содержат по одной лишь компоненте тензора $\underline{\underline{S}}$, а не их комбинации, то сопутствующий вектор определяется через $\underline{\underline{S}}$ единственным образом.

Обратно, умножив $\underline{\omega} \times \underline{\underline{E}}$, убедимся, что $\underline{\omega} \times \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{S}}$.

Определителем (детерминантом) тензора называется [1] число:

$$\det \underline{\underline{A}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{[(\underline{A} \cdot \underline{a}) \times (\underline{A} \cdot \underline{b})] \cdot (\underline{A} \cdot \underline{c})}{(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c}}, \quad (\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c} \neq 0 \quad (1.11)$$

Очевидно, что определение (1.11) не зависит от системы координат и, более того, можно доказать, что оно не зависит и от выбора тройки некопланарных векторов $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$. Запишем тензор в виде $\underline{\underline{A}} = a_{mn} \underline{d}_m \underline{d}_n$ и обозначим для простоты $\underline{a} = \underline{d}_1, \underline{b} = \underline{d}_2, \underline{c} = \underline{d}_3$. Тогда

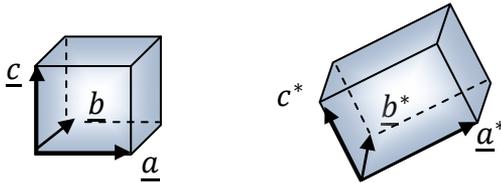
$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{d}_1 = a_{11}\underline{d}_1 + a_{21}\underline{d}_2 + a_{31}\underline{d}_3, \underline{\underline{A}} \cdot \underline{d}_2 = a_{12}\underline{d}_1 + a_{22}\underline{d}_2 + a_{32}\underline{d}_3, \underline{\underline{A}} \cdot \underline{d}_3 = a_{13}\underline{d}_1 + a_{23}\underline{d}_2 + a_{33}\underline{d}_3$$

и с помощью (1.5) выражение (1.11) принимает вид определителя матрицы координат тензора в ортонормированном базисе:

$$\det \underline{\underline{A}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (1.12)$$

Определитель тензора имеет простой геометрический смысл. Обозначим $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{a} = \underline{a}^*$,

$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{b} = \underline{b}^*, \underline{\underline{A}} \cdot \underline{c} = \underline{c}^*$. Тогда, вспомнив, что смешанное произведение – объем построенного на перемножаемых векторах параллелепипеда, получим: $\det \underline{\underline{A}} = \pm V^*/V$ -отношение «деформированного и повернутого» объема к исходному.



3.3. Некоторые тождества, связанные с определителем тензора

Приведем тождества, которые будут использоваться в дальнейшем. Первое из них, не связанное, правда, с определителем, имеет вид (1.7)

$$\#1: \quad \underline{a} \times \underline{\underline{E}} \times \underline{b} \equiv \underline{b} \underline{a} - (\underline{a} \cdot \underline{b}) \underline{\underline{E}} \quad (1.13)$$

$$\#2. \quad (\underline{\underline{B}} \cdot \underline{a}) \times (\underline{\underline{B}} \cdot \underline{b}) \equiv (\det \underline{\underline{B}}) \underline{\underline{B}}^{-T} \cdot (\underline{a} \times \underline{b}) \quad (1.14)$$

$$\#3 \quad (\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}^T)_{\times} = (\det \underline{\underline{B}}) \underline{\underline{B}}^{-T} \cdot \underline{\underline{A}}_{\times} \quad (1.15)$$

$$\#4 \quad (\underline{\underline{A}} \times \underline{\underline{a}}) \cdot \underline{\underline{A}}^T \equiv \underline{\underline{A}} \cdot (\underline{\underline{a}} \times \underline{\underline{A}}^T) \equiv (\det \underline{\underline{A}}) (\underline{\underline{A}}^{-T} \cdot \underline{\underline{a}}) \times \underline{\underline{E}} \quad (1.16)$$

Тождество #2 следует из определения определителя (1.11). Перепишем его в виде

$$\left\{ \left[(\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{a}}) \times (\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{b}}) \right] \cdot \underline{\underline{B}} \right\} \cdot \underline{\underline{c}} = \left\{ (\det \underline{\underline{B}}) (\underline{\underline{a}} \times \underline{\underline{b}}) \right\} \cdot \underline{\underline{c}},$$

и, поскольку вектор $\underline{\underline{c}}$ – любой, то $\left[(\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{a}}) \times (\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{b}}) \right] \cdot \underline{\underline{B}} = (\det \underline{\underline{B}}) (\underline{\underline{a}} \times \underline{\underline{b}})$.

Умножив скалярно на $\underline{\underline{B}}^{-1}$ справа, приходим к #2.

Тождество #3 линейно относительно $\underline{\underline{A}}$, поэтому можем взять в качестве $\underline{\underline{A}}$ одну диаду $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{a}}\underline{\underline{b}}$.

Левая часть примет вид $\left[(\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{a}}) (\underline{\underline{b}} \cdot \underline{\underline{B}}^T) \right]_{\times} = \left[(\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{a}}) (\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{b}}) \right]_{\times} = (\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{a}}) \times (\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{b}})$ и по тождеству #2 с учетом того, что $\underline{\underline{A}}_{\times} = \underline{\underline{a}} \times \underline{\underline{b}}$ получаем #3.

Тождество #4 получается из #3. «Несущественная» часть $(\underline{\underline{A}} \times \underline{\underline{a}}) \cdot \underline{\underline{A}}^T \equiv \underline{\underline{A}} \cdot (\underline{\underline{a}} \times \underline{\underline{A}}^T)$ доказывается немедленно, если переписать ее в виде $\underline{\underline{A}} \cdot (\underline{\underline{E}} \times \underline{\underline{a}}) \cdot \underline{\underline{A}}^T \equiv \underline{\underline{A}} \cdot (\underline{\underline{a}} \times \underline{\underline{E}}) \cdot \underline{\underline{A}}^T$.

Замечая далее, что тензор $\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{A}} \cdot (\underline{\underline{E}} \times \underline{\underline{a}}) \cdot \underline{\underline{A}}^T = -\underline{\underline{S}}^T$ кососимметричный, представим его в виде $\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{\omega}} \times \underline{\underline{E}}$, где сопутствующий вектор $\underline{\underline{\omega}} = -\frac{1}{2} \underline{\underline{S}}_{\times} = -\frac{1}{2} \left[\underline{\underline{A}} \cdot (\underline{\underline{E}} \times \underline{\underline{a}}) \cdot \underline{\underline{A}}^T \right]_{\times}$ по тождеству #3 с учетом того, что $(\underline{\underline{E}} \times \underline{\underline{a}})_{\times} = -2\underline{\underline{a}}$ равен $(\det \underline{\underline{A}}) (\underline{\underline{A}}^{-T} \cdot \underline{\underline{a}})$.

1.3.4 Ортогональные тензоры. Тензор поворота.

Тензор $\underline{\underline{Q}}$ называется ортогональным, если он удовлетворяет уравнению $\underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{Q}}^T = \underline{\underline{E}}$, или, вспоминая определение обратного тензора $\underline{\underline{Q}}^{-1} = \underline{\underline{Q}}^T$.

Пусть векторы $\underline{\underline{a}}, \underline{\underline{b}}, \underline{\underline{c}}$ преобразуются тензором $\underline{\underline{Q}}$ в $\underline{\underline{a}}^* = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{a}}, \underline{\underline{b}}^* = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{b}}, \underline{\underline{c}}^* = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{c}}$.

Скалярное произведение $\underline{\underline{a}}^* \cdot \underline{\underline{b}}^* = (\underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{a}}) \cdot (\underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{b}}) = \underline{\underline{a}} \cdot \underline{\underline{Q}}^T \cdot \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{b}} = \underline{\underline{a}} \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{b}} = \underline{\underline{a}} \cdot \underline{\underline{b}}$ не изменяется, то есть не изменяются ни длины векторов, ни углы между ними.

Вычисляя определитель от $\underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{Q}}^T = \underline{\underline{E}}$, получим $(\det \underline{\underline{Q}})^2 = 1, \det \underline{\underline{Q}} = \pm 1$.

Из определения $\det \underline{\underline{Q}} = \frac{(\underline{\underline{a}}^* \times \underline{\underline{b}}^*) \cdot \underline{\underline{c}}^*}{(\underline{\underline{a}} \times \underline{\underline{b}}) \cdot \underline{\underline{c}}}$ следует, что если $\det \underline{\underline{Q}} = +1$, то ориентация троек векторов не изменяется, то есть они поворачиваются как жесткая система и поэтому такой тензор называется тензором поворота. Если же определитель равен (-1), то поворот сопровождается т.н. центральной инверсией ($-\underline{\underline{E}}$), изменяющей направления всех векторов на противоположные.

Глава 2. Статика

Статика изучает условия равновесия (покоя) тел в какой-либо системе отсчета. Поскольку в покое скорости равны нулю, тело можем называть твердым, но это не обязательно.

2.1. Воздействия и их классификация. Главный вектор и главный момент воздействий. Зависимость главного момента от выбора опорной точки.

В механике принимается, что действие тел друг на друга, приводящее к изменению их движения и состояния, описывается *силами и моментами - воздействиями*.

Силы и моменты, с которыми действуют друг на друга тела, входящие в рассматриваемую систему, называются внутренними (internal), а силы и моменты, с которыми тела, не включенные в систему, действуют на тела системы, называются внешними (external).

Воздействия, с которыми тела могут действовать друг на друга вне зависимости от того, находятся они в контакте или нет, называются *массовыми*, или силами и моментами *дальнодействия*. Примерами являются гравитационное, электрическое, электромагнитное воздействия.

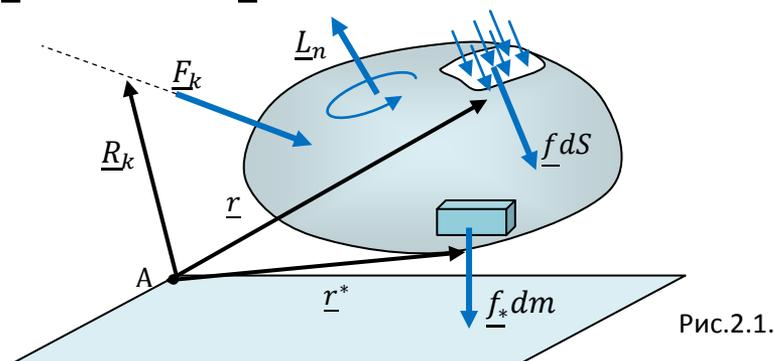
Силы и моменты, с которыми тела (или части одного тела) действуют друг на друга через общую область контакта (поверхность, линию, точку), называются контактными. Примерами контактных воздействий являются давление, трение, силы (напряжения) и моменты, с которыми части тела действуют друг на друга. Контактные воздействия представляют наибольший интерес, поскольку свободные тела, не имеющие контакта с другими, встречаются весьма редко, а массовые воздействия, как правило, известны.

Силы и моменты могут быть измерены многими способами, например, по деформации пружины и деформации самого тела; определение сил и моментов из законов механики по ускорению не является единственным способом.

Сила описывается полярным вектором \underline{F} , а момент аксиальным вектором \underline{M} .

В механике Ньютона, где все тела состоят из материальных точек, моменты определяются только как моменты сил, поскольку к точке невозможно приложить момент, она не может вращаться; в механике Эйлера моменты вводятся как независимые понятия.

Рассмотрим тело, воздействие на которое со стороны его внешности описывается массовыми \underline{f}_* , контактными \underline{f} , сосредоточенными \underline{F}_k силами и моментами \underline{L}_n (рис 2.1).



Главным вектором внешних сил называется векторная сумма

$$\underline{F}^{ext} \triangleq \sum_{(k)} \underline{F}_k + \int_{(m)} \underline{f}_* dm + \int_{(S)} \underline{f} dS \quad (2.1)$$

В (1.1) \underline{f}_* - массовая плотность, т.е. сила на единицу массы (например, сила тяжести); \underline{f} - поверхностная плотность, т.е. сила на единицу площади (например, давление).

Моментом силы \underline{F} относительно опорной точки (центра) A называется векторное произведение

$$\underline{m}_A(\underline{F}) \stackrel{\text{def}}{=} \underline{R} \times \underline{F}, \quad (2.2)$$

где \underline{R} – вектор, проведенный из точки A к линии действия силы.

Главным моментом внешних воздействий называется сумма

$$\underline{M}_A^{ext} \triangleq \sum_{(k)} \underline{R}_k \times \underline{F}_k + \int_{(m)} \underline{r}_* \times \underline{f}_* dm + \int_{(S)} \underline{r} \times \underline{f} dS + \sum_{(n)} \underline{L}_n, \quad (2.3)$$

где \underline{L}_n – приложенные к телу моменты, которые часто изображают в виде «пары сил».

Поскольку причиной (источником) сил и моментов, действующих на тело, являются разные внешние тела, в определениях (2.1), (2.3) содержится так называемая аксиома аддитивности воздействий: *сила и момент, действующие на тело, равны сумме сил и моментов, действующих на это тело со стороны всех внешних тел.*

Подставляя в (2.3) $\underline{R}_k = \underline{AB} + \underline{\rho}_k$, $\underline{r}_* = \underline{AB} + \underline{\rho}_*$, $\underline{r} = \underline{AB} + \underline{\rho}$ и вынося постоянный вектор \underline{AB} за знаки суммы и интегралов, получим зависимость главного момента от выбора опорной точки:

$$\underline{M}_A^{ext} = \underline{M}_B^{ext} + \underline{AB} \times \underline{F}^{ext}. \quad (2.4)$$

Словесная формулировка (2.4) звучит так: *момент относительно «нового» центра (A) равен моменту относительно «старого» (B) плюс момент главного вектора сил, помещенного в старом центре, относительно нового.*

2.2. Уравнения равновесия для произвольной и плоской систем воздействий. Момент относительно оси. Типы опорных реакций. Статически определимые и неопределимые системы.

Из первых двух фундаментальных законов механики – баланса количества движения и момента количества движения следует, что необходимыми условиями равновесия тела в инерциальной системе отсчета является равенство нулю главного вектора и главного момента внешних воздействий:

$$\underline{F}^{ext} = \mathbf{0} \quad (2.5)$$

$$\underline{M}_A^{ext} = \mathbf{0} \quad (2.6)$$

В проекции на оси декартовой системы координат векторные уравнения (2.5) и (2.6) представляют собой в общем случае систему шести уравнений равновесия

$$\begin{cases} F_x^{ext} = 0 \\ F_y^{ext} = 0 \\ F_z^{ext} = 0 \\ M_{Ax}^{ext} = 0 \\ M_{Ay}^{ext} = 0 \\ M_{Az}^{ext} = 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

В случае так называемой плоской системы сил, когда все силы лежат в одной плоскости OXY , а моменты, разумеется, ей перпендикулярны, система состоит из трех уравнений

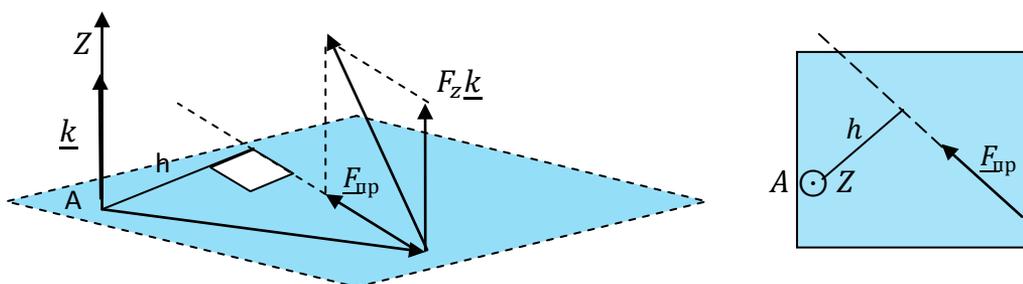
$$\begin{cases} F_x^{ext} = 0 \\ F_y^{ext} = 0 \\ M_{Az}^{ext} = 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

Моментом силы относительно оси Z называется проекция на эту ось момента, вычисленного относительно *любой* точки на этой оси: $m_{Az} \stackrel{\text{def}}{=} \underline{m}_A(\underline{F}) \cdot \underline{k}$. Действительно, умножая скалярно на орт оси \underline{k} равенство $\underline{m}_A(\underline{F}) = \underline{m}_B(\underline{F}) + \underline{AB} \times \underline{F}$, получим $m_{Az} = m_{Bz}$.

Раскладывая силу на составляющие $\underline{F} = F_z \underline{k} + \underline{F}_{\text{пр}}$ (см. рисунок), получим практическое правило для вычисления момента относительно оси

$$: m_{Az} = (\underline{R} \times \underline{F}) \cdot \underline{k} = (\underline{R} \times \underline{F}_{\text{пр}}) \cdot \underline{k} + \underbrace{(\underline{R} \times F_z \underline{k}) \cdot \underline{k}}_{=0} = \pm F_{\text{пр}} h$$

при взгляде с оси Z составляющая $\underline{F}_{\text{пр}}$ стремится повернуть тело *против часовой* стрелки, и знак (+) – если *по часовой* стрелке.



Типы опорных реакций.

Контактные силы и моменты, с которыми на рассматриваемое тело действуют окружающие тела, называют реакциями связей, а сами тела – связями. Связи накладывают ограничения на возможные движения точек тела. Рассмотрим наиболее часто встречающиеся типы опор.

Заметим, что общим правилом по определению вида реакций связи является следующее:

а) сообщаем телу всевозможные перемещения (скорости) и если при этом связь препятствует перемещению в каком-либо направлении, то в этом направлении имеется составляющая *силы реакции*.

б) сообщаем телу всевозможные повороты (угловые скорости) и если при этом связь препятствует повороту вокруг какой-либо оси, то вокруг этой оси имеется составляющая *момента*, иными словами, проекция момента на эту ось не равна нулю.

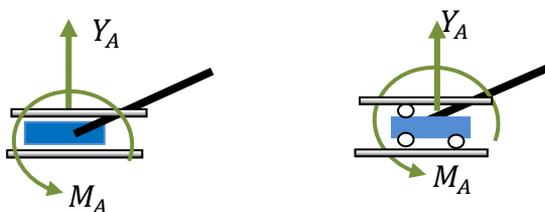
1. Заделка (консольная опора, жесткое защемление).



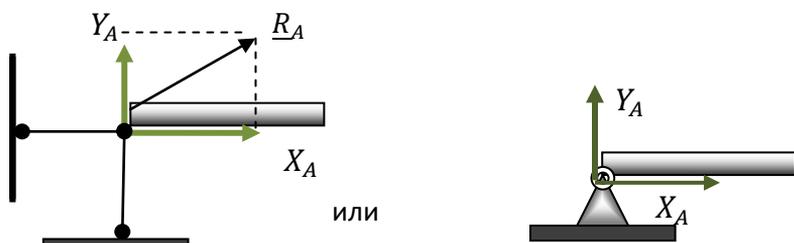
Заделка действует на тело (балку) неизвестной силой \underline{R}_A , препятствующей движению во всех направлениях и моментом \underline{M}_A , препятствующим повороту вокруг любой оси.

2. Подвижная заделка.

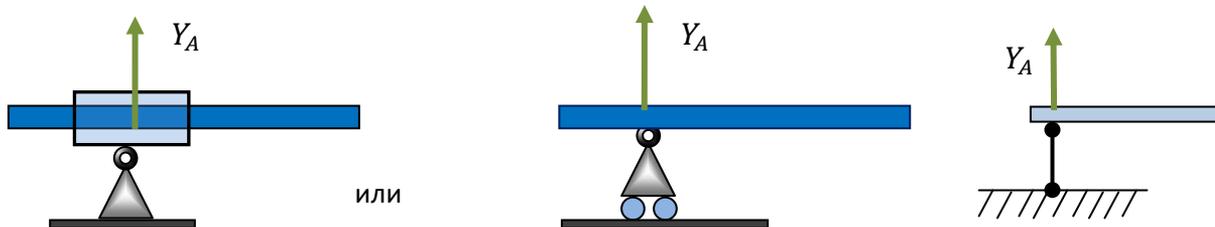
Подвижная заделка позволяет двигаться в определенном направлении, поэтому отсутствует составляющая силы реакции в этом направлении.



3. Неподвижный шарнир - препятствует движению во всех направлениях, но позволяет вращаться, поэтому его действие описывается только силой реакции



4. Подвижный шарнир – препятствует движению только в одном направлении



Если число неизвестных равно числу линейно-независимых уравнений, которые можно составить для системы, то система называется статически определимой, а если число неизвестных больше, то статически неопределимой. Так, например, для балки с жестко защемленными краями в случае плоской системы число неизвестных равно шести, а уравнений можно составить только три - задача статически неопределима.

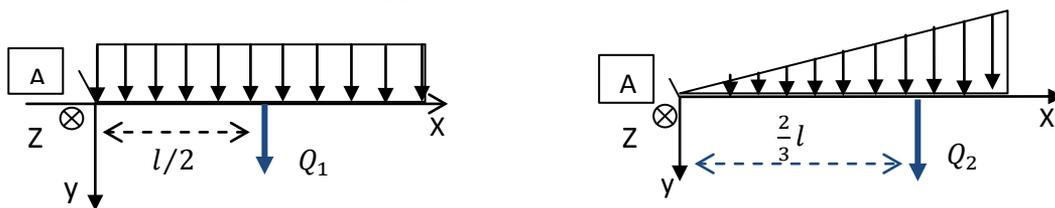
Статическая определимость или неопределимость далеко не всегда очевидны и могут проявиться лишь в отсутствии решения системы уравнений равновесия вследствие того, что уравнения в системе линейно зависимы, т.е. некоторые уравнения являются линейными комбинациями остальных. Так, написав для тела шесть уравнений вида (2.7), используя произвольную опорную точку A , мы не сможем решить эту систему для случая, когда, например, тело нагружено силами (в том числе и реакциями опор), линии действия которых пересекаются в некоторой точке и момент относительно этой точки тождественно равен нулю; следовательно, из шести уравнений будут независимы только три.

2.3. Эквивалентные воздействия

Эквивалентными воздействиями в теоретической механике называют воздействия, которые при замене одной системы воздействий на другую не изменяют движения (в частности, состояния покоя) тела.

Если рассматривается твердое тело, то есть тело, находящееся в покое или совершающее жесткое движение, то, как следует из законов механики, необходимыми условиями эквивалентности являются равенства главных векторов и главных моментов воздействий.

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся в учебных задачах статики случаи равномерно и линейно-распределенной нагрузки.



В случае равномерно - распределенной нагрузки ее линейная плотность (сила на единицу длины) $q(x) = q_0$, для линейно-распределенной $q(x) = q_0 \frac{x}{l}$. Найдем главные векторы и проекции на ось Z главных моментов относительно, например, точки А. Имеем

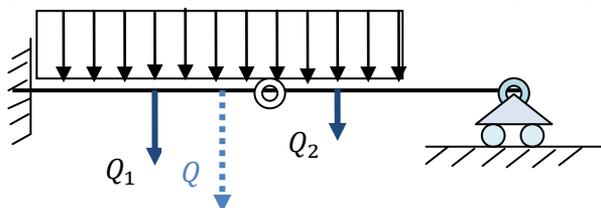
$$Q_1 = \int_0^l q_0 dx = q_0 l, \quad M_{Az}^1 = \int_0^l x(q_0 dx) = q_0 \frac{l^2}{2} \equiv Q_1 \cdot \frac{l}{2};$$

$$Q_2 = \int_0^l q_0 \frac{x}{l} dx = \frac{q_0 l}{2}, \quad M_{Az}^2 = \int_0^l x \left(q_0 \frac{x}{l} dx \right) = q_0 \frac{l^2}{3} \equiv Q_2 \cdot \frac{2}{3} l.$$

Полученные формулы показывают, что для быстрого составления уравнений равновесия удобно заменить распределенные нагрузки сосредоточенными силами Q_1 и Q_2 . Собственно говоря, применение эквивалентности на этом и заканчивается.

Замечание 1.

В учебных задачах на равновесие систем тел необходимым элементом является определение реакций в соединениях этих тел, например, в шарнирах.



Для получения правильного результата следует заменить распределенную нагрузку на участках по разные стороны от шарнира сосредоточенными силами Q_1 и Q_2 , но не на одну силу Q (см. рис.).

Замечание 2.

Попытки придать понятию «эквивалентность» некий универсальный смысл, распространив его и на произвольную систему материальных точек [2] и тем самым на деформируемое тело вообще лишены смысла, поскольку в этом случае понятие эквивалентности сводится лишь к замене одной силы в точке на сумму сил в этой же самой точке.

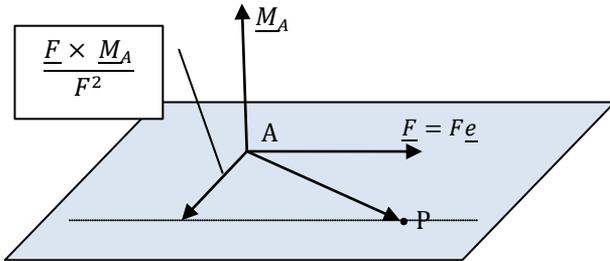
2.4. Равнодействующая, центр параллельных сил, центр тяжести.

Воздействия (силы и моменты) характеризуются главным вектором сил $\underline{F} = F\underline{e}$ и главным моментом \underline{M}_A относительно произвольной опорной точки. Запишем формулу, связывающую моменты относительно двух точек – опорной точки А и так называемой точки приведения Р:

$$\underline{M}_A = \underline{M}_P + \underline{AP} \times \underline{F}. \quad (1)$$

Если есть такая точка приведения P , относительно которой главный момент \underline{M}_P равен нулю, то говорят, что система приводится к *равнодействующей, приложенной в точке приведения*. Из формулы (1) $\underline{M}_A = 0 + \underline{AP} \times \underline{F}$ следует, что приведение к равнодействующей возможно, только если главный момент \underline{M}_A и главный вектор \underline{F} перпендикулярны. При этом множество точек приведения к равнодействующей находятся на прямой

$$\underline{AP} = \frac{\underline{F} \times \underline{M}_A}{F^2} + \lambda \underline{e}, \quad (2)$$



где λ – произвольный параметр.

Рассмотрим систему параллельных сил $\{ \underline{F}_k = \tilde{F}_k \underline{e} \}$, где \tilde{F}_k – проекция \underline{F}_k на направление, задаваемое вектором \underline{e} . Главный вектор $\underline{F} = (\sum \tilde{F}_k) \underline{e} \equiv \tilde{F} \underline{e}$ и главный момент $\underline{M}_A = \sum \underline{R}_k \times (\tilde{F}_k \underline{e}) = (\sum \underline{R}_k \tilde{F}_k) \times \underline{e}$ перпендикулярны, поэтому система приводится к равнодействующей. Покажем, что в этом случае на прямой

(2) существует такая точка приведения C , называемая *центром параллельных сил*, положение которой не изменяется при повороте всех сил на произвольный угол (точки приложения сил не изменяются).

Подставляя выражения \underline{F} и \underline{M}_A в (2) и раскрывая двойное векторное произведение, получим

$$\underline{AP} = \frac{\tilde{F} \underline{e} \times [(\sum \underline{R}_k \tilde{F}_k) \times \underline{e}]}{\tilde{F}^2} + \lambda \underline{e} = \frac{1}{\tilde{F}} \sum \underline{R}_k \tilde{F}_k + \underline{e} \left[\lambda - \frac{1}{\tilde{F}} \sum (\underline{R}_k \cdot \underline{F}_k) \right].$$

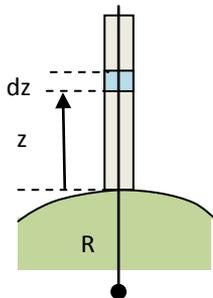
Чтобы это выражение не зависело от направления сил (вектора \underline{e}), надо положить

$$\lambda = \frac{1}{\tilde{F}} \sum (\underline{R}_k \cdot \underline{F}_k) \text{ и тогда положение центра параллельных сил задается формулой}$$

$$\underline{AC} \equiv \underline{R}_C = \frac{1}{\tilde{F}} \sum \underline{R}_k \tilde{F}_k. \quad (3)$$

Частный случай параллельных сил – силы тяжести, действующие на точки тела. Если тело небольшого размера, то можно пренебречь различием в направлении сил (к центру Земли) и различиями в величине сил ввиду разного расстояния до центра Земли. Тогда центр тяжести совпадает с центром масс $\underline{R}_C = \frac{\sum (m_k g) \underline{R}_k}{(Mg)} = \frac{\sum m_k \underline{R}_k}{M}$.

Оценим различие в положениях центра масс и центра тяжести «высокого» тела.



Пример. Центр тяжести небоскреба.

Обозначим $\rho = \frac{m}{h}$ – линейная плотность массы. Сила тяжести, действующая

на элемент массы $dm = \rho dz$ равна $dF = \frac{GM \rho dz}{(R+z)^2} = \rho g \frac{dz}{(1+\frac{z}{R})^2}$, где $g =$

$\frac{GM}{R^2}$ – ускорение на поверхности Земли. Суммарная сила тяжести

$$F = \rho g \int_0^h \frac{dz}{(1+\frac{z}{R})^2} = \frac{\rho g h}{(1+\frac{h}{R})}.$$

$$z_T = \frac{1}{F} \int z dF = \frac{(1+\frac{h}{R})}{h} \cdot \int_0^h \frac{z dz}{(1+\frac{z}{R})^2} = \frac{(1+\frac{h}{R})}{h} R^2 \left[\ln \left(1 + \frac{h}{R} \right) - \frac{h}{R} \cdot \frac{1}{(1+\frac{h}{R})} \right].$$

Заменяя $\ln \left(1 + \frac{h}{R} \right) \approx \frac{h}{R} - \frac{1}{2} \left(\frac{h}{R} \right)^2$, получим $z_T = \frac{h}{2} - \frac{h^2}{2R}$. Для высоты $h = 0.5$ км получим, что центр тяжести ниже центра масс на $\frac{0,25}{2 \cdot 6370}$ км ≈ 2 см.

Глава 3. Кинематика точки

Положение точки в системе отсчета задается вектором $\underline{R}(t)$ как функцией времени, проведенным в точку из некоторого неподвижного в системе отсчета центра А:

Траекторией называется кривая, по которой движется точка, скоростью \underline{V} – производная по времени вектора положения \underline{R} , ускорением \underline{W} – производная от вектора скорости

$$\underline{V} \triangleq \frac{d\underline{R}}{dt} = \dot{\underline{R}}; \quad \underline{W} \triangleq \frac{d\underline{V}}{dt} = \ddot{\underline{R}}. \quad (3.1)$$

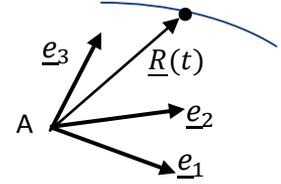
Из определения производной вектора следует, что вектор скорости направлен по касательной к траектории. Собственно говоря, формулами (3.1) вся кинематика точки и исчерпывается; все технические трудности связаны лишь с выбором системы координат.

Упражнение 1. Исходя из определения производной вектор-функции от скалярного аргумента $\frac{d\underline{a}}{du} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\underline{a}(u+\Delta u) - \underline{a}(u)}{\Delta u}$ показать, что

1) $(\underline{a} \cdot \underline{b})' = \dot{\underline{a}} \cdot \underline{b} + \underline{a} \cdot \dot{\underline{b}}$ (производная скалярного произведения)

2) $(\underline{a} \times \underline{b})' = \dot{\underline{a}} \times \underline{b} + \underline{a} \times \dot{\underline{b}}$ (производная векторного произведения)

3) Если $|\underline{a}(t)| = \text{const}$, то $\dot{\underline{a}} \perp \underline{a}$ (продифференцировать квадрат модуля, равный $\underline{a} \cdot \underline{a}$).



3.1 Скорость и ускорение в декартовой системе координат.

В декартовой системе вектор положения задается в виде $\underline{R} = x_1 \underline{d}_1 + x_2 \underline{d}_2 + x_3 \underline{d}_3$, где x_k – координаты вектора, а $\underline{d}_1, \underline{d}_2, \underline{d}_3$ – ортонормированный базис, т.е. базисные векторы единичные и взаимно-перпендикулярные. В этом случае координаты равны проекциям вектора на оси, задаваемые базисными векторами: $x_k = \underline{R} \cdot \underline{d}_k$.

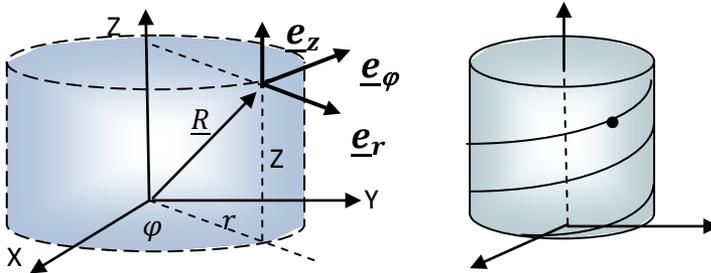
Векторы скорости и ускорения равны

$$\underline{V} = \dot{x}_1 \underline{d}_1 + \dot{x}_2 \underline{d}_2 + \dot{x}_3 \underline{d}_3, \quad \underline{W} \triangleq \frac{d\underline{V}}{dt} = \ddot{\underline{R}} = \ddot{x}_1 \underline{d}_1 + \ddot{x}_2 \underline{d}_2 + \ddot{x}_3 \underline{d}_3,$$

а их модули $V = \sqrt{\underline{V} \cdot \underline{V}} = \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2}, \quad W = \sqrt{\ddot{x}_1^2 + \ddot{x}_2^2 + \ddot{x}_3^2}$

3.2 Скорость и ускорение в цилиндрической системе координат

Вектор положения точки задается как функция цилиндрических координат r, φ, z :



$$\underline{R} = x \underline{d}_1 + y \underline{d}_2 + z \underline{d}_3 = r \cos \varphi \underline{d}_1 + r \sin \varphi \underline{d}_2 + z \underline{d}_3. \quad (3.2)$$

В цилиндрической системе координат, как и в любой другой системе, вводятся базисные векто-

$$\text{ры} \quad \begin{cases} \underline{R}_r \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \underline{R}}{\partial r} = \cos \varphi \underline{d}_1 + \sin \varphi \underline{d}_2 \equiv \underline{e}_r; \quad |\underline{e}_r| = 1, \\ \underline{R}_\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \underline{R}}{\partial \varphi} = r(-\sin \varphi \underline{d}_1 + \cos \varphi \underline{d}_2) \equiv r \underline{e}_\varphi; \quad |\underline{e}_\varphi| = 1 \\ \underline{R}_z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \underline{R}}{\partial z} = \underline{d}_3 \equiv \underline{e}_z. \end{cases} \quad (3.3)$$

Базисные векторы направлены по касательным к так называемым координатным линиям – линиям, получающимся при изменении **только одной** координаты.

Использование единичных базисных векторов $\underline{e}_r, \underline{e}_\varphi, \underline{e}_z$ удобно тем, что координаты вектора в единичном базисе имеют ту же размерность, что и сам вектор.

Дифференцируя (3.2), получим с учетом (3.3)

$$\underline{V} \triangleq \frac{dR}{dt} = \frac{\partial R}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial R}{\partial \varphi} \dot{\varphi} + \frac{\partial R}{\partial z} \dot{z} = \dot{r} \underline{e}_r + r \dot{\varphi} \underline{e}_\varphi + \dot{z} \underline{e}_z \quad (3.4)$$

Дифференцируя (3.4) и учитывая, что $\dot{\underline{e}}_r = \dot{\varphi} \underline{e}_\varphi, \dot{\underline{e}}_\varphi = -\dot{\varphi} \underline{e}_r$, будем иметь

$$\underline{W} = (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) \underline{e}_r + (r \ddot{\varphi} + 2\dot{r} \dot{\varphi}) \underline{e}_\varphi + \ddot{z} \underline{e}_z \equiv w_r \underline{e}_r + w_\varphi \underline{e}_\varphi + w_z \underline{e}_z \quad (3.5)$$

Упражнение 2. Найти скорость и ускорение точки, движущейся по цилиндру.

$r = R, \varphi = \omega t, z = \mu t$ (винтовая линия)

3.3. Скорость и ускорение при траекторном (естественном) способе описания движения.

Этот способ применяется, когда точка движется по заданной линии (траектории).

Уравнением $\underline{R} = \underline{R}(s)$ задается линия, по которой движется точка; закон движения по ней $s = s(t)$, где s – дуговая координата, т.е. длина дуги со знаком.

Базисные векторы вводятся следующим образом:

$$\underline{\tau} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dR}{ds}, \quad |\underline{\tau}| = 1 \text{ – единичный вектор (орт) касательной,}$$

$$\frac{d\underline{\tau}}{ds} = \frac{d^2R}{ds^2} \stackrel{\text{def}}{=} K \underline{n}, \text{ где } K = \left| \frac{d\underline{\tau}}{ds} \right| \text{ – кривизна, а } \underline{n} \text{ – единичный}$$

вектор главной нормали $\underline{b} \stackrel{\text{def}}{=} \underline{\tau} \times \underline{n}$ – т.н. вектор бинормали

Векторы \underline{n} и $\underline{\tau}$ лежат в так называемой соприкасающейся плоскости – предельном при $\Delta s \rightarrow 0$ положении плоскости, содержащей $\underline{\tau}(s)$ и $\underline{\tau}(s+\Delta s)$. Кривизна K характеризует скорость изменения направления касательной; обратную к ней величину $\rho = \frac{1}{K}$ называют радиусом кривизны траектории.

Вектор скорости $\underline{v} \triangleq \frac{dR}{dt} = \frac{dR}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \dot{s} \underline{\tau} \equiv v_\tau \underline{\tau}$, где v_τ является (единственной) проекцией вектора скорости на направление касательной и может быть любого знака.

Дифференцируя еще раз, получаем вектор ускорения

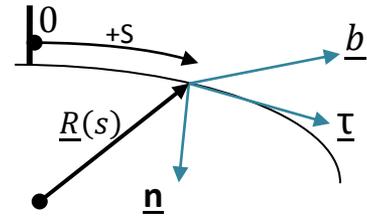
$$\underline{W} = \frac{dv}{dt} = \ddot{s} \underline{\tau} + \dot{s} \dot{\underline{\tau}}.$$

Производную $\dot{\underline{\tau}}$ также запишем как производную сложной функции $\dot{\underline{\tau}} = \frac{d\underline{\tau}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = K \dot{s} \underline{n}$,

Тогда $\underline{W} = \ddot{s} \underline{\tau} + K \dot{s}^2 \underline{n} \equiv W_\tau \underline{\tau} + W_n \underline{n}$, где

$$W_\tau = \ddot{s} = \frac{dv_\tau}{dt} \text{ – касательное (тангенциальное) ускорение,}$$

$$W_n = K \dot{s}^2 = \frac{v^2}{\rho} \text{ – нормальное ускорение.}$$



Глава 4. Кинематика твердого тела

Твердым телом будем называть тело, расстояния между точками которого не изменяются в процессе движения.

Если в качестве модели реального объекта рассматривается тело, состоящее из тел-точек, положение которых описывается не только вектором положения, а и ориентацией (т.е. тела-точки могут вращаться), то в определение следует добавить слова « и взаимная ориентация не изменяется».

4.1 Кинематика плоского движения.

Плоским движением называется движение, при котором траектории (а, следовательно, и скорости) всех точек тела лежат в плоскостях, параллельных одной фиксированной плоскости. Таково, например, движение книги по ровному столу. Ясно, что достаточно изучить движение одного лишь сечения – плоской фигуры (одного листа книги).

4.1.1 Основная формула кинематики твердого тела. Формула Эйлера

Положение твердого тела вообще и плоской фигуры в частности описывается вектором положения какой-либо точки A , называемой полюсом, и ориентацией, которую удобно описывать с помощью жестко связанной с телом тройки векторов. Для простоты возьмем ортонормированную тройку векторов, которые в отсчетном положении обозначаются $\underline{d}_1, \underline{d}_2, \underline{d}_3$, а в актуальном в момент времени $t - \underline{D}_1(t), \underline{D}_2(t), \underline{D}_3(t)$. В качестве отсчетного положения чаще всего удобно взять положение в момент времени $t = 0$, тогда $\underline{D}_k(0) = \underline{d}_k$, но иногда в качестве отсчетного удобнее взять положение, которое тело никогда не занимало в прошлом и, возможно, никогда не займет в будущем.

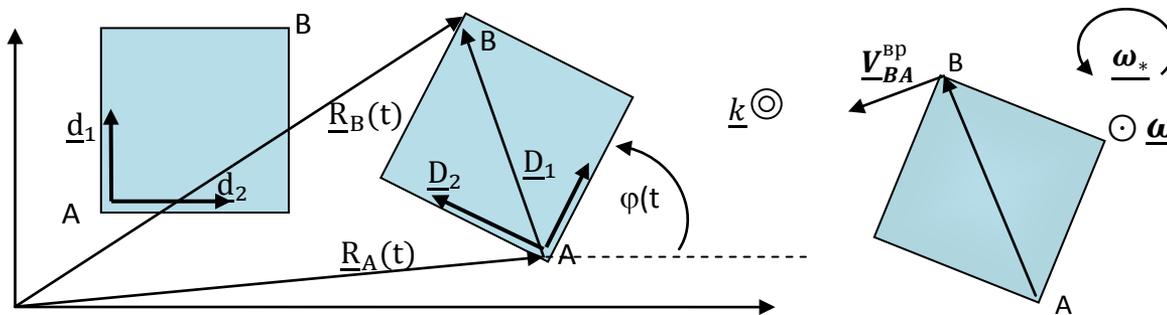


Рис 4.1.

При плоском движении ориентация задается одним углом $\varphi(t)$. Введем вектор угловой скорости $\underline{\omega} \stackrel{\text{def}}{=} \dot{\varphi} \underline{k}$, где единичный вектор \underline{k} перпендикулярен плоской фигуре, а его направление согласовано с положительным направлением отсчета угла $\varphi(t)$ в соответствии с принятой ориентацией пространства. Так, в правоориентированном пространстве \underline{k} направлен так, что с его конца положительное направление отсчета угла $\varphi(t)$ видно происходящим против часовой стрелки, т.е. «на нас» (рис 4.1). Заметим, что независимо от выбора положительного направления отсчета угла $\varphi(t)$ вектор $\underline{\omega}$ направлен «на нас», если фигура в данный момент времени вращается против часовой стрелки.

Запишем очевидное равенство $\underline{R}_B(t) = \underline{R}_A(t) + \underline{AB}(t)$. (4.1)

Обозначим для краткости $\underline{AB} = \underline{b}(t)$ и разложим \underline{b} по актуальному базису :

$\underline{b} = b_1 \underline{D}_1 + b_2 \underline{D}_2$, где координаты b_1 и b_2 постоянные.

Разложим \underline{D}_1 по отсчетному базису $\underline{D}_1 = \cos \varphi \underline{d}_1 + \sin \varphi \underline{d}_2$ и продифференцируем по времени: $\dot{\underline{D}}_1 = (-\sin \varphi \dot{\underline{d}}_1 + \cos \varphi \dot{\underline{d}}_2) \dot{\varphi}$. Нетрудно убедиться, что $\dot{\underline{D}}_1 = \underline{\omega} \times \underline{D}_1$. Совершенно аналогично

$\dot{\underline{D}}_2 = \underline{\omega} \times \underline{D}_2$, откуда следует $\dot{\underline{b}} = b_1 \dot{\underline{D}}_1 + b_2 \dot{\underline{D}}_2 = \underline{\omega} \times (b_1 \underline{D}_1 + b_2 \underline{D}_2)$ или

$$\dot{\underline{b}} = \underline{\omega} \times \underline{b} \quad (4.2)$$

Эта формула называется **формулой Эйлера** и она справедлива не только для плоского, но и для произвольного движения твердого тела.

Дифференцируя (4.1), получим с учетом (4.2) $\dot{\underline{R}}_B(t) = \dot{\underline{R}}_A(t) + \dot{\underline{A}}B(t)$ или

$$\underline{V}_B = \underline{V}_A + \underline{\omega} \times \underline{AB} \quad (4.3)$$

Эту формулу будем называть основной формулой кинематики твердого тела.

Слагаемое $\underline{\omega} \times \underline{AB} \equiv \underline{V}_{BA}^{BP}$ называют вращательной скоростью точки В вокруг полюса А. Направление этого перпендикулярного к \underline{AB} слагаемого легко получить, вращая фигуру вокруг полюса А – отсюда и его название.

На рисунке $\underline{\omega}_*$ - круговой вектор угловой скорости, которому сопоставляется прямой $\underline{\omega}$.

4.1.2 Мгновенный центр скоростей и способы его нахождения.

Из основной формулы кинематики твердого тела (4.3) ясно, что если $\underline{\omega} \neq 0$, то можно найти такую точку Р, скорость которой равна нулю – эта точка и называется мгновенным центром скоростей.

Для определения неизвестного вектора \underline{AP} из уравнения $\underline{V}_A + \underline{\omega} \times \underline{AP} = 0$ умножим его слева векторно на $\underline{\omega}$ и, раскрывая двойное векторное произведение, будем иметь

$$\underline{\omega} \times \underline{V}_A + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{AP}) = \underline{\omega} \times \underline{V}_A + \underline{\omega}(\underline{\omega} \cdot \underline{AP}) - \underline{AP} \omega^2 = 0, \text{ откуда}$$

$$\underline{AP} = \frac{\underline{\omega} \times \underline{V}_A}{\omega^2} \quad (4.4)$$

Формула (4.4) предполагает, разумеется, известными \underline{V}_A и $\underline{\omega}$, но во многих случаях мгновенный центр скоростей можно найти другими способами. Наиболее часто встречаются случаи:

1. Тело катится без проскальзывания.

Мгновенный центр скоростей находится в точке касания тела с неподвижной поверхностью.

Следующие случаи следуют из основной формулы, где в качестве полюса выбран мгновенный центр скоростей: $\underline{V}_B = \underline{V}_P + \underline{\omega} \times \underline{AP} = \underline{\omega} \times \underline{PB}$. (4.5)

Отсюда следует, что: а) $\underline{V}_B \perp \underline{PB}$ - скорость всякой точки В перпендикулярна \underline{PB} ,

б) $V_B = \omega \cdot PB$ - скорость всякой точки В пропорциональна расстоянию до точки Р.

2. Если известна скорость одной точки А и линия, вдоль которой может быть направлена скорость другой точки В, то мгновенный центр скоростей находится на пересечении перпендикуляров к скоростям. В этом случае вычисляется величина угловой скорости $\omega = \frac{V_A}{PA}$, определяется ее направление и, соответственно, скорость точки В (см. рис 4.2).

Если перпендикуляры не пересекаются, то $\omega = 0$ (мгновенно- поступательное движение) и скорости всех точек равны $V_A = V_B$.

Если перпендикуляры слились, то мгновенный центр скоростей находится на пересечении линии, соединяющей концы векторов скорости и общего перпендикуляра.

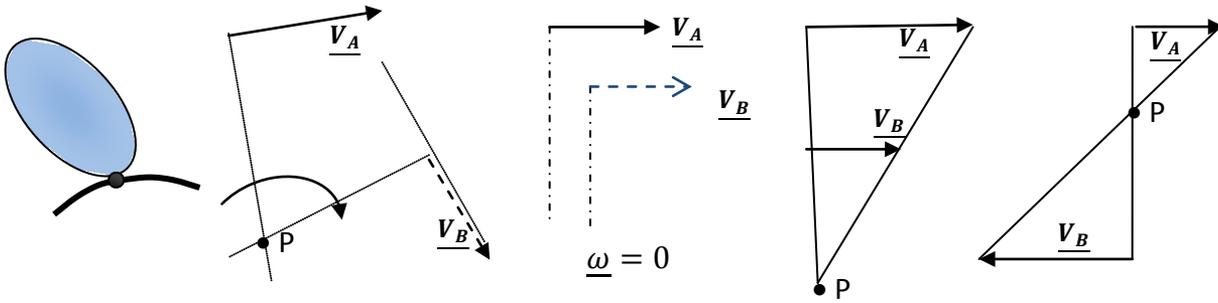


Рис.4.2 . Мгновенный центр скоростей

4.1.3. Ускорения точек твердого тела при произвольном и плоском движении

Дифференцируя основную формулу кинематики твердого тела (4.3) $\underline{V}_B = \underline{V}_A + \underline{\omega} \times \underline{AB}$, получаем формулу для ускорений

$$\underline{\dot{V}}_B = \underline{\dot{V}}_A + \underline{\dot{\omega}} \times \underline{AB} + \underline{\omega} \times \underline{AB} = \underline{\dot{V}}_A + \underline{\dot{\omega}} \times \underline{AB} + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{AB}).$$

Производная вектора угловой скорости по времени называется вектором углового ускорения

$\underline{\dot{\omega}} \stackrel{\text{def}}{=} \underline{\varepsilon}$, слагаемое $\underline{\varepsilon} \times \underline{AB} \stackrel{\text{def}}{=} \underline{W}_{BA}^{\text{BP}}$ – вращательное ускорение точки В вокруг полюса А,

$\underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{AB}) \stackrel{\text{def}}{=} \underline{W}_{BA}^{\text{OC}}$ – осеостремительное ускорение. Таким образом

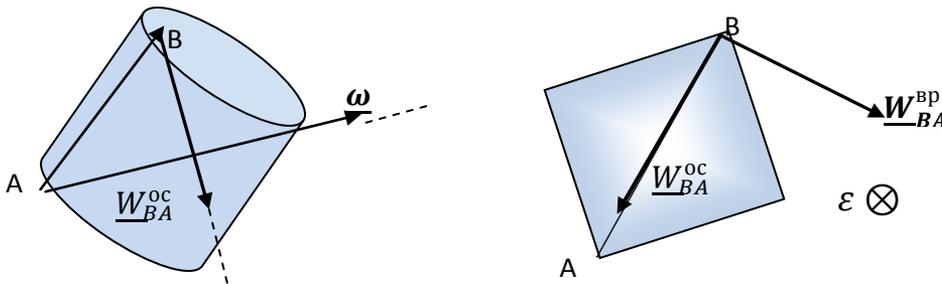
$$\underline{W}_B = \underline{W}_A + \underline{\varepsilon} \times \underline{AB} + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{AB}) = \underline{W}_B + \underline{W}_{BA}^{\text{BP}} + \underline{W}_{BA}^{\text{OC}}, \text{ где}$$

$$\underline{W}_{BA}^{\text{BP}} = \underline{\varepsilon} \times \underline{AB},$$

$$\underline{W}_{BA}^{\text{OC}} = \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{AB}).$$

(4.6)

Формулы (4.6) применимы для произвольного движения. Поясним термин «осеостремительное ускорение». В теоретической механике линия, проходящая через полюс А параллельно вектору угловой скорости $\underline{\omega}$, называется мгновенной осью вращения.



Нетрудно убедиться, что двойное векторное произведение $\underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{AB}) = \underline{W}_{BA}^{\text{OC}}$ направлено к мгновенной оси вращения под прямым углом, а его модуль равен $\omega^2 AB \sin(\underline{AB}, \underline{\omega}) = \omega^2 h$, где h – расстояние от точки В до мгновенной оси вращения.

В случае плоского движения мгновенная ось вращения на плоском рисунке вырождается в точку- «центр», поэтому во многих учебниках $\underline{W}_{BA}^{\text{OC}}$ называют «центроостремительным» $\underline{W}_{BA}^{\text{IC}}$. Векторы угловой скорости $\underline{\omega} = \dot{\varphi} \underline{k}$ и углового ускорения $\underline{\varepsilon} = \ddot{\varphi} \underline{k}$ перпендикулярны плоскости движения. Раскрывая двойное векторное произведение, получим

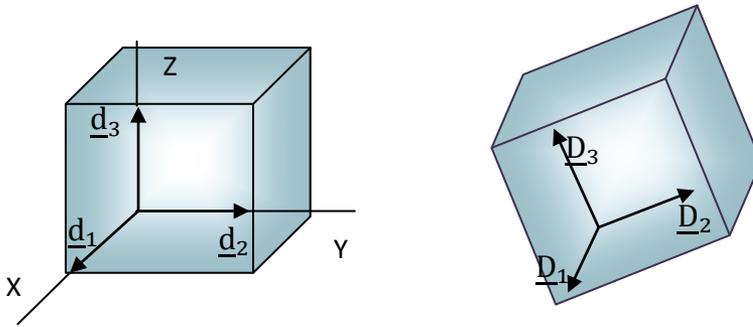
$$\underline{W}_{BA}^{\text{OC}} = \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{AB}) = \underline{\omega}(\underline{\omega} \cdot \underline{AB}) - \underline{AB} \omega^2 = -\underline{AB} \omega^2, \text{ так как } \underline{\omega} \perp \underline{AB}.$$

4.2. Произвольное движение твердого тела

4.2.1 Описание ориентации тела. Направляющие косинусы.

Как уже говорилось в параграфе (4.1.1), положение твердого тела можно описать вектором положения какой-либо точки А, называемой полюсом, и ориентацией, которую удобно описывать с помощью жестко связанной с телом тройки векторов. Для простоты возьмем ортонормированную тройку векторов, которые в отсчетном положении обозначаются $\underline{d}_1, \underline{d}_2, \underline{d}_3$, а в актуальном в момент времени $t - \underline{D}_1(t), \underline{D}_2(t), \underline{D}_3(t)$. В качестве отсчетного положения чаще всего удобно взять положение в момент времени $t = 0$, тогда $\underline{D}_k(0) = \underline{d}_k$, но иногда в качестве отсчетного удобнее взять положение, которое тело никогда не занимало в прошлом и, возможно, никогда не займет в будущем. Так, например, можно принять, что $\underline{d}_1, \underline{d}_2, \underline{d}_3$ - орты декартовой системы координат в используемой системе отсчета.

Разложим векторы \underline{D}_k по базису $\underline{d}_1, \underline{d}_2, \underline{d}_3$:



$$\underline{D}_k = (\underline{D}_k \cdot \underline{d}_1)\underline{d}_1 + (\underline{D}_k \cdot \underline{d}_2)\underline{d}_2 + (\underline{D}_k \cdot \underline{d}_3)\underline{d}_3 \quad (k=1, 2, 3) \quad (4.7)$$

Скалярные произведения $\underline{D}_k \cdot \underline{d}_s$, равные косинусам углов между \underline{D}_k и \underline{d}_s , называются направляющими косинусами α_{ks} : $\underline{D}_k \cdot \underline{d}_s = \cos(\widehat{\underline{D}_k, \underline{d}_s}) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_{ks}$.

Принимая правило суммирования по повторяющимся индексам, вместо трех строчек (4.7), в каждой из которых три слагаемых, можем написать короткую формулу

$$\underline{D}_k = \alpha_{ks}\underline{d}_s. \quad (4.8)$$

При этом принимается соглашение, что по индексам, присутствующим в обеих частях равенства (в данном случае это индекс k) суммирование не производится, а равенство повторяется « k » раз.

Имеется 9 направляющих косинусов, но только 3 из них являются независимыми, поскольку между ними есть 6 уравнений связей

$$\underline{D}_k \cdot \underline{D}_n = \begin{cases} 0, & k \neq n \\ 1, & k = n \end{cases} \stackrel{\text{def}}{=} \delta_{kn}, \text{ где, напомним, } \delta_{kn} \text{ называется символом Кронекера, или}$$

$$\underline{D}_k \cdot \underline{D}_n = (\alpha_{ks}\underline{d}_s) \cdot (\alpha_{nm}\underline{d}_m) = \alpha_{ks}\alpha_{nm}(\underline{d}_s \cdot \underline{d}_m) = \alpha_{ks}\alpha_{nm}\delta_{sm} = \alpha_{ks}\alpha_{ns} = \delta_{kn} \quad (4.9)$$

В (4.9) символ δ_{sm} «отфильтровал» в двойной сумме по индексам s и m только те слагаемые, у которых $s = m$.

Знание направляющих косинусов полностью решает задачу описания движения, но выбрать три независимых и аналитически выразить через них остальные шесть невозможно, так как система уравнений (4.9) нелинейная, поэтому в качестве трех параметров, задающих ориентацию тела, обычно используются углы.

4.2.2. Углы Эйлера, самолетные (корабельные) углы.

Традиционно углы Эйлера вводятся следующим образом. Переход из отсчетного положения $\underline{d}_1, \underline{d}_2, \underline{d}_3$ в актуальное $\underline{D}_1, \underline{D}_2, \underline{D}_3$ осуществляется тремя поворотами (рис.4.3):

1. Поворот вокруг \underline{d}_3 на угол прецессии ψ . При этом \underline{d}_1 переходит в положение $\tilde{\underline{d}}_1$, (\underline{d}_2 в $\tilde{\underline{d}}_2$).
2. Поворот вокруг $\tilde{\underline{d}}_1$ на угол нутации θ . При этом $\tilde{\underline{d}}_2 \mapsto \tilde{\tilde{\underline{d}}}_2$, $\underline{d}_3 \mapsto \underline{D}_3$. (4.10)
4. Поворот вокруг \underline{D}_3 на угол собственного (чистого) вращения φ

Для лучшего понимания на рис.4.4 изображен волчок и углы Эйлера, описывающие его ориентацию.

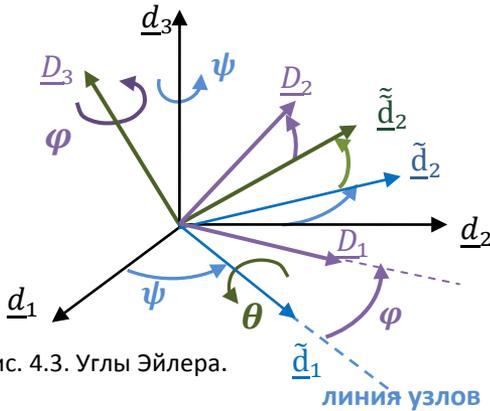


Рис. 4.3. Углы Эйлера.

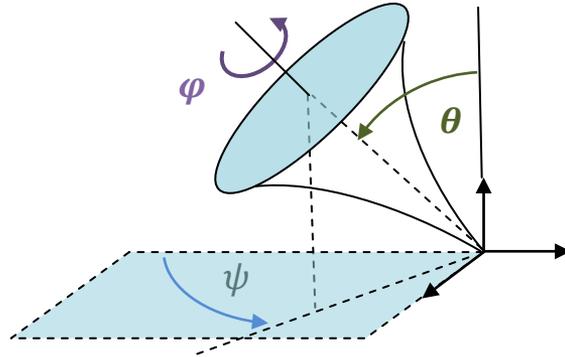


Рис. 4.4. Углы Эйлера (волчок)

Заметим, что можно доказать (догадаться трудно), что традиционная последовательность поворотов (4.10) может быть заменена на последовательность поворотов на те же самые углы вокруг неподвижных осей:

1. Поворот вокруг \underline{d}_3 на угол собственного (чистого) вращения φ
2. Поворот вокруг \underline{d}_1 на угол нутации θ . (4.11)
4. Поворот вокруг \underline{d}_3 на угол прецессии ψ

Недостаток углов Эйлера в том, что при малом угле нутации θ углы ψ и φ в линейном приближении становятся неразличимы и входят в уравнения в виде суммы $(\psi + \varphi)$.

Этого недостатка лишены самолетные (корабельные) углы (рис.4.5).

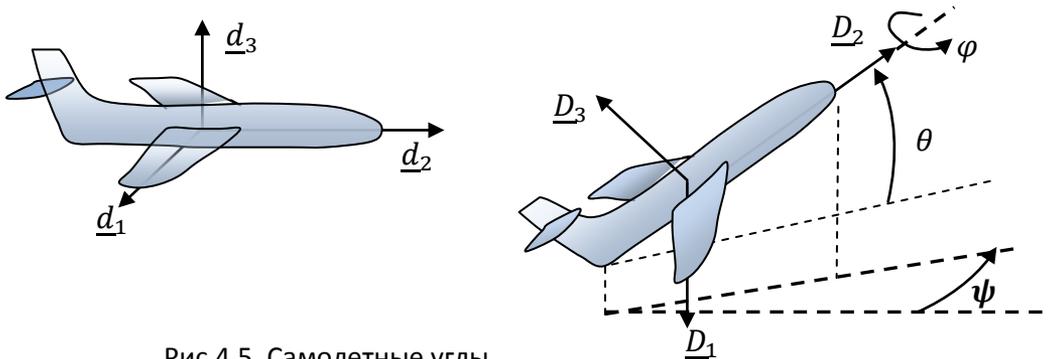


Рис.4.5. Самолетные углы

Переход из отсчетного положения $\underline{d}_1, \underline{d}_2, \underline{d}_3$ в актуальное $\underline{D}_1, \underline{D}_2, \underline{D}_3$ можно осуществить тремя поворотами (повернуть самостоятельно!) (рис.4.5):

1. Поворот вокруг \underline{d}_3 на угол рысканья ψ , при этом $\underline{d}_1 \mapsto \tilde{\underline{d}}_1$, $\underline{d}_2 \mapsto \tilde{\underline{d}}_2$
2. Поворот вокруг $\tilde{\underline{d}}_1$ на угол тангажа θ , при этом $\underline{d}_3 \mapsto \tilde{\underline{d}}_3$, $\tilde{\underline{d}}_2 \mapsto \tilde{\tilde{\underline{d}}}_2$ (4.12)

3. Поворот на угол крена φ вокруг $\underline{\tilde{d}}_2 = \underline{D}_2$

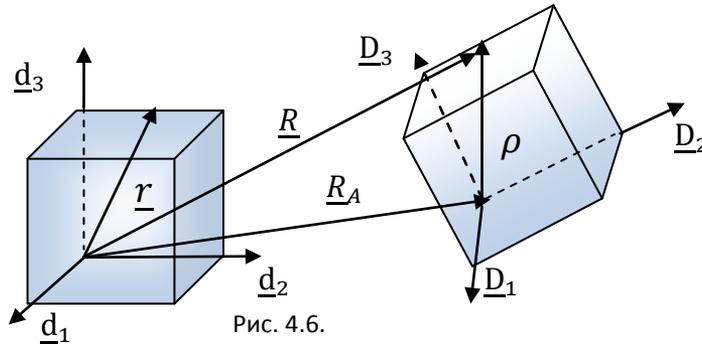
Выражение «можно осуществить» неслучайное; нетрудно понять, что возможны и другие варианты, например, повороты вокруг фиксированных осей

1. Поворот вокруг \underline{d}_2 на угол крена φ (рискуя сломать крылья)
2. Поворот вокруг \underline{d}_1 на угол тангажа θ (подъем «носа») (4.13)
3. Поворот вокруг \underline{d}_3 на угол рысканья ψ

Впрочем, тождественность (4.12) и (4.13) также необходимо доказать.

4.2.3. Матрица поворота. Матрица спина. Вектор угловой скорости.

Запишем очевидную векторную формулу для вектора положения \underline{R} какой-либо точки $\underline{R} = \underline{R}_A + \underline{\rho}$ (рис.4.6) в матричном виде. Найдем координаты вектора $\underline{\rho}$ относительно отсчетного базиса. Разложим вектор $\underline{\rho}$ по актуальному базису $\underline{\rho} = \rho_k \underline{D}_k$ и введем «перенесенный» вектор $\underline{r} = \rho_n \underline{d}_n$, координаты которого в отсчетном базисе равны координатам вектора $\underline{\rho}$ в актуальном; иными словами, $\underline{\rho}$ - «повернутый» вместе с телом вектор \underline{r} (Рис.4.6).



Раскладывая векторы \underline{D}_k по отсчетному базису, получим

$$\underline{\rho} = \rho_k \underline{D}_k = \rho_k (\underline{D}_k \cdot \underline{d}_m) \underline{d}_m = \alpha_{km} \rho_k \underline{d}_m.$$

Введем матрицу поворота $\Pi = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$ и столбцы $\hat{R} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\hat{R}_A = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$, $\hat{r} = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \end{pmatrix}$

Векторная формула $\underline{R} = \underline{R}_A + \underline{\rho}$ в матричной записи имеет вид

$$\hat{R} = \hat{R}_A + \Pi \cdot \hat{r} \quad (4.14)$$

1. Матрица поворота Π является ортогональной, т.е.

$$\Pi \cdot \Pi^T = E, \text{ где } E - \text{единичная матрица} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

Доказательство этого утверждения – формула (4.9)

$$\underline{D}_k \cdot \underline{D}_n = (\alpha_{ks} \underline{d}_s) \cdot (\alpha_{nm} \underline{d}_m) = \alpha_{ks} \alpha_{nm} (\underline{d}_s \cdot \underline{d}_m) = \alpha_{ks} \alpha_{nm} \delta_{sm} = \alpha_{ks} \alpha_{ns} = \delta_{kn}$$

Вычисляя определитель произведения (4.15), получим $\det^2 \Pi = 1, \Rightarrow \det \Pi = \pm 1$, а так как в отсчетном положении $\Pi = E$, то $\det \Pi = +1$ (ортогональные матрицы с определителем, равным (+1), называют *собственно* ортогональными или матрицами поворота). Матрица поворота при умножении на векторы не изменяет ни длин векторов, ни углов между ними, т.е. действительно их поворачивает.

2. Матрица поворота имеет один собственный (неподвижный) вектор \hat{m} , который задает ось поворота. Иными словами, надо показать, что система уравнений $\Pi \cdot \hat{m} = \hat{m}$, где $\Pi \neq E$, имеет единственное решение. Запишем систему в виде $(\Pi - E) \cdot \hat{m} = 0$. Определитель этой однородной системы равен нулю, так как

$$\det(\Pi - E) \equiv \det(\Pi \cdot (E - \Pi^T)) \equiv -\det(\Pi^T - E) \equiv -\det(\Pi - E),$$

следовательно, система имеет ненулевое решение. Предположив, что имеется два решения \underline{m}_1 и \underline{m}_2 , тут же придем к выводу, что перпендикулярный к ним $\underline{m}_3 = \underline{m}_1 \times \underline{m}_2$ также является решением (углы между векторами не изменяются), а это значит, что $\Pi = E$ т.е. поворота нет..

В дальнейшем будем считать неподвижный вектор оси поворота \underline{m} единичным, а положительное направление отсчета угла поворота φ согласованным с направлением \underline{m} в соответствии с принятой ориентацией пространства (т.е. с конца \underline{m} положительный поворот виден против часовой стрелки) (рис.4.7). Матрицу поворота будем обозначать $\Pi = \Pi(\varphi)$.

Матрица $\Pi(\varphi)$ в ортонормированном базисе $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{m}$ имеет вид

$$\Pi(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Дифференцируя (4.15), получим $\dot{\Pi} \cdot \Pi^T + \Pi \cdot \dot{\Pi}^T = 0$ или, обозначив $\dot{\Pi} \cdot \Pi^T = S$ – матрица спйна (англ. to spin - вертеть) $S + S^T = 0$. Таким образом, матрица спйна кососимметрическая: $S = -S^T$. Умножая справа $\dot{\Pi} \cdot \Pi^T = S$ на Π , получим формулу Пуассона для матрицы поворота:

$$\dot{\Pi} = S \cdot \Pi \quad (4.16)$$

Мы подошли к самому трудному в рамках матричного описания моменту – определению вектора угловой скорости.

Можно, разумеется, поступить стандартным (см., например, [2]) способом и написать:

« введем обозначения для элементов кососимметрической матрицы S по формуле

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если составить вектор $\underline{\omega} = \omega_1 \underline{d}_1 + \omega_2 \underline{d}_2 + \omega_3 \underline{d}_3$, то результат умножения матрицы S на вектор \hat{r} может быть представлен в виде векторного произведения $\underline{\omega} \times \underline{r}$

В приведенной цитате $\underline{\omega}$ - вектор угловой скорости.

Дифференцируя (4.14), получим матричную запись основной формулы кинематики твердого тела $\underline{V}_B = \underline{V}_A + \underline{\omega} \times \underline{AB}$:

$$\dot{\underline{R}} = \dot{\underline{R}}_A + \dot{\Pi} \cdot \hat{r} = \dot{\underline{R}}_A + S \cdot \Pi \cdot \hat{r} \quad (4.17)$$

Матричный подход, будучи удобным для вычислений, очень мало подходит для анализа и вывода соотношений; всякую формулу, написанную на векторном и тензорном языке, без труда можно записать в матричном виде, а вот получить компактную и выразительную формулу для описания какого-либо физического явления в матричном виде трудно.

Кроме того, не следует забывать, что элементы матрицы являются координатами (компонентами) тензора в каком-либо базисе. Сам тензор не зависит от выбора базиса, а его компоненты зависят. Для безошибочной записи в матричном виде необходимо, чтобы все векторы и тензоры, входящие в выражение, были записаны в одном базисе, а это не всегда удобно, поскольку раз-

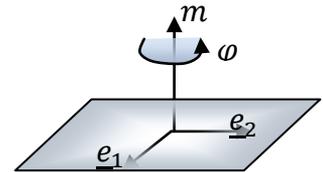


Рис.4.7

ные тензоры имеют «простой» вид в разных базисах, поэтому нужно пересчитывать матрицы с помощью матриц перехода.

4.2.4. Описание ориентации с помощью тензора поворота. Теорема Эйлера о тензоре поворота.

Ориентация тела задается тензором поворота $\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{G}}_k \underline{\underline{g}}_k$, переводящим жестко связанную с телом тройку векторов из отсчетного положения $\underline{\underline{g}}_1, \underline{\underline{g}}_2, \underline{\underline{g}}_3$ в актуальное $\underline{\underline{G}}_1, \underline{\underline{G}}_2, \underline{\underline{G}}_3$ (рис.4.8)

$$\underline{\underline{G}}_k = \underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{g}}_k$$

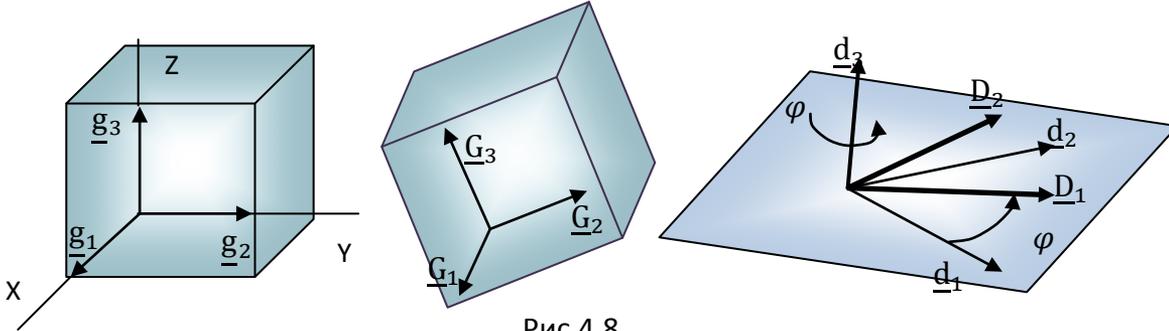


Рис.4.8

Раскладывая $\underline{\underline{G}}_k$ по отсчетному базису, будем иметь

$$\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{G}}_k \underline{\underline{g}}_k = (\underline{\underline{G}}_k \cdot \underline{\underline{g}}_s) \underline{\underline{g}}_s \underline{\underline{g}}_k = \alpha_{ks} \underline{\underline{g}}_s \underline{\underline{g}}_k, \text{ где } \alpha_{ks} = \cos(\widehat{\underline{\underline{G}}_k, \underline{\underline{g}}_s}) \text{ называются направляющими косинусами.}$$

направляющими косинусами.

Теорема Эйлера. Произвольная ориентация твердого тела получается из отсчетной одним поворотом на угол φ вокруг оси поворота.

В математическом виде теорема сводится к следующей теореме:

Теорема о представлении тензора поворота.

Тензор поворота $\underline{\underline{P}}$, не равный $\underline{\underline{E}}$, единственным образом можно представить в виде

$$\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{m}} \underline{\underline{m}} + (\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{m}} \underline{\underline{m}}) \cos \varphi + \underline{\underline{m}} \times \underline{\underline{E}} \sin \varphi \quad (4.18)$$

Где φ - угол поворота, а единичный вектор $\underline{\underline{m}}$ задает прямую в пространстве, называемую осью поворота; положительное направление отсчета угла поворота φ согласовано с направлением $\underline{\underline{m}}$ в соответствии с принятой ориентацией пространства, т.е. в правоориентированном пространстве положительный поворот с конца $\underline{\underline{m}}$ виден против часовой стрелки.

Доказательство.

Покажем, что существует единственный неподвижный вектор $\underline{\underline{m}}$, т.е. уравнение

$\underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{m}} = \underline{\underline{m}}$ имеет единственное решение. Перепишем его в виде однородного уравнения $(\underline{\underline{P}} - \underline{\underline{E}}) \cdot \underline{\underline{m}} = 0$, которое имеет решение, только если определитель равен нулю, что и следует из цепочки $\det(\underline{\underline{P}} - \underline{\underline{E}}) \equiv \det(\underline{\underline{P}} \cdot (\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{P}}^T)) \equiv -\det(\underline{\underline{P}}^T - \underline{\underline{E}}) \equiv -\det(\underline{\underline{P}} - \underline{\underline{E}})$.

Предполагая, что существуют два решения $\underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{m}}_1 = \underline{\underline{m}}_1$ и $\underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{m}}_2 = \underline{\underline{m}}_2$, получим с помощью тождества #2 (1.13) $(\underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{m}}_1) \times (\underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{m}}_2) \equiv \underline{\underline{P}} \cdot (\underline{\underline{m}}_1 \times \underline{\underline{m}}_2)$, что означает, что и вектор $\underline{\underline{m}}_3 = \underline{\underline{m}}_1 \times \underline{\underline{m}}_2$ также является неподвижным вектором, что невозможно ($\underline{\underline{P}} \neq \underline{\underline{E}}$).

Положим $\underline{m} = \underline{d}_3$, а в качестве \underline{d}_1 и \underline{d}_2 возьмем любые перпендикулярные к \underline{m} и между собой единичные векторы. Поскольку тензор поворота не изменяет углов между векторами, то векторы $\underline{D}_1 = \underline{P} \cdot \underline{d}_1$ и $\underline{D}_2 = \underline{P} \cdot \underline{d}_2$ лежат в плоскости \underline{d}_1 и \underline{d}_2 (см. рис.4.8). Имеем

$$\underline{P} \cdot \underline{d}_1 = \underline{D}_1 = \underline{d}_1 \cos \varphi + \underline{d}_2 \sin \varphi, \quad \underline{P} \cdot \underline{d}_2 = \underline{D}_2 = -\sin \varphi \underline{d}_1 + \cos \varphi \underline{d}_2.$$

Подставляя эти выражения в тензор $\underline{P} = \underline{d}_3 \underline{d}_3 + \underline{D}_1 \underline{d}_1 + \underline{D}_2 \underline{d}_2$ и, заменяя диады, содержащие \underline{d}_1 и \underline{d}_2 на независимые от их выбора выражения $\underline{E} - \underline{m} \underline{m} \equiv \underline{d}_1 \underline{d}_1 + \underline{d}_2 \underline{d}_2$ и $\underline{m} \times \underline{E} \equiv \underline{d}_2 \underline{d}_1 - \underline{d}_1 \underline{d}_2$, приходим к (4.18): $\underline{P} = \underline{m} \underline{m} + (\underline{E} - \underline{m} \underline{m}) \cos \varphi + \underline{m} \times \underline{E} \sin \varphi$. ■

Можно доказать [3], что тензор поворота аналитически выражается через произведение $\varphi \underline{m}$, называемым вектором поворота, поэтому в дальнейшем тензор поворота будем в необходимых случаях обозначать $\underline{P}(\varphi \underline{m})$.

Представление (4.18) позволяет доказать весьма важную теорему:

Теорема. Если неподвижный вектор \underline{m} тензора $\underline{P}(\varphi \underline{m})$, определяющий ось поворота, сам получен поворотом $\underline{m} = \underline{Q} \cdot \underline{n}$, то $\underline{P}(\varphi \underline{m}) = \underline{Q} \cdot \underline{P}(\varphi \underline{n}) \cdot \underline{Q}^T$. (4.19)

Иными словами: «тензор поворота с повернутой осью равен повернутому тензору»

Доказательство. Подставляя в (4.18) $\underline{m} = \underline{Q} \cdot \underline{n}$, получим

$$\begin{aligned} \underline{m} \underline{m} &= \underline{Q} \cdot \underline{n} \underline{n} \cdot \underline{Q}^T, \quad \underline{E} = \underline{Q} \cdot \underline{E} \cdot \underline{Q}^T, \text{ и, полагая в тождестве \#4 (1.16) } \underline{A} = \underline{Q} \\ \underline{m} \times \underline{E} &= (\underline{Q} \cdot \underline{n}) \times \underline{E} = \underline{Q} \cdot (\underline{n} \times \underline{E}) \cdot \underline{Q}^T. \text{ Таким образом,} \\ \underline{P} &= \underline{m} \underline{m} + (\underline{E} - \underline{m} \underline{m}) \cos \varphi + \underline{m} \times \underline{E} \sin \varphi = \underline{Q} \cdot [\underline{n} \underline{n} + (\underline{E} - \underline{n} \underline{n}) \cos \varphi + \underline{n} \times \underline{E} \sin \varphi] \cdot \underline{Q}^T. \blacksquare \end{aligned}$$

4.2.5. Тензор спина, вектор угловой скорости, формула Пуассона.

Дифференцируя по времени уравнение $\underline{P} \cdot \underline{P}^T = \underline{E}$, получим

$\dot{\underline{P}} \cdot \underline{P}^T + \underline{P} \cdot \dot{\underline{P}}^T \equiv (\dot{\underline{P}} \cdot \underline{P}^T) + (\underline{P} \cdot \dot{\underline{P}}^T)^T = 0$ или, обозначив $\underline{S} = \dot{\underline{P}} \cdot \underline{P}^T$: $\underline{S} + \underline{S}^T = 0$, то есть тензор $\underline{S} = \dot{\underline{P}} \cdot \underline{P}^T$, называемый тензором спина - кососимметричный, поэтому он может быть записан в виде (1.10):

$$\underline{S} \stackrel{\text{def}}{=} \dot{\underline{P}} \cdot \underline{P}^T = \underline{\omega} \times \underline{E} = \underline{E} \times \underline{\omega}, \text{ где } \underline{\omega} = -\frac{1}{2} \underline{S}_\times = -\frac{1}{2} (\dot{\underline{P}} \cdot \underline{P}^T)_\times \quad (4.20)$$

называется вектором угловой скорости. Вектор $\underline{\omega}$ задает ось вращения.

Исходя из представления Эйлера (4.18) можно прямым вычислением из (4.20) получить

$$\underline{\omega} = \dot{\varphi} \underline{m} + \sin \varphi \dot{\underline{m}} + (1 - \cos \varphi) \underline{m} \times \dot{\underline{m}} \quad (4.21)$$

Из (4.21) видно, что ось поворота и ось вращения совпадают только когда ось поворота неподвижна ($\underline{m} = \text{const}$), тогда $\underline{\omega} = \dot{\varphi} \underline{m}$.

Умножив равенство $\underline{S} = \underline{\omega} \times \underline{E}$ справа скалярно на \underline{P} , получим формулу Пуассона

$$\dot{\underline{P}} = \underline{\omega} \times \underline{P}. \quad (4.22)$$

4.2.6. Теорема о сложении угловых скоростей

Теорема. Если тензор поворота \underline{P} является композицией (произведением) поворотов

$$\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{P}}_2 \cdot \underline{\underline{P}}_1, \text{ то}$$

$$\underline{\underline{\omega}} = \underline{\underline{\omega}}_2 + \underline{\underline{P}}_2 \cdot \underline{\underline{\omega}}_1, \text{ где } \underline{\underline{\omega}}_k = -\frac{1}{2} \left(\dot{\underline{\underline{P}}}_k \cdot \underline{\underline{P}}_k^T \right)_{\times} \quad (4.23)$$

угловые скорости, соответствующие тензорам поворота $\underline{\underline{P}}_k$.

Доказательство. Докажем сначала лемму:

Пусть $\underline{\underline{Q}}$ – тензор поворота, $\underline{\underline{A}}$ – произвольный тензор, тогда

$$\left(\underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{Q}}^T \right)_{\times} = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{A}}_{\times}, \quad (4.24)$$

« векторный инвариант повернутого тензора равен повернутому векторному инварианту».

Доказательство леммы немедленно следует из тождества #3 (1.15)

$$\left(\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}^T \right)_{\times} = \left(\det \underline{\underline{B}} \right) \underline{\underline{B}}^{-T} \cdot \underline{\underline{A}}_{\times}, \text{ в котором достаточно положить } \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{Q}}, \underline{\underline{B}}^{-T} \equiv \left(\underline{\underline{Q}}^{-1} \right)^T \equiv \underline{\underline{Q}}.$$

Впрочем, лемма имеет простой геометрический смысл. Примем в качестве $\underline{\underline{A}}$ одну диаду $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{a}} \underline{\underline{b}}$ (в лемму тензор $\underline{\underline{A}}$ входит линейно). Пусть векторы $\underline{\underline{a}}, \underline{\underline{b}}, \underline{\underline{c}} = \underline{\underline{a}} \times \underline{\underline{b}}$ преобразуются тензором $\underline{\underline{Q}}$ в $\underline{\underline{a}}^* = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{a}}, \underline{\underline{b}}^* = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{b}}, \underline{\underline{c}}^* = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{c}}$. Поскольку тройка поворачивается как жесткая система, то $\underline{\underline{a}}^* \times \underline{\underline{b}}^* = \underline{\underline{c}}^*$ т.е. $\left(\underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{a}} \right) \times \left(\underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{b}} \right) = \underline{\underline{Q}} \cdot \left(\underline{\underline{a}} \times \underline{\underline{b}} \right)$ или $\left(\underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{a}} \underline{\underline{b}} \cdot \underline{\underline{Q}}^T \right)_{\times} = \underline{\underline{Q}} \cdot \left(\underline{\underline{a}} \underline{\underline{b}} \right)_{\times}$.

Вычисляя теперь тензор спина

$$\underline{\underline{S}} = \dot{\underline{\underline{P}}} \cdot \underline{\underline{P}}^T = \left(\dot{\underline{\underline{P}}}_2 \cdot \underline{\underline{P}}_1 + \underline{\underline{P}}_2 \cdot \dot{\underline{\underline{P}}}_1 \right) \cdot \underline{\underline{P}}_1^T \cdot \underline{\underline{P}}_2^T = \dot{\underline{\underline{P}}}_2 \cdot \underline{\underline{P}}_2^T + \underline{\underline{P}}_2 \cdot \dot{\underline{\underline{P}}}_1 \cdot \underline{\underline{P}}_1^T \cdot \underline{\underline{P}}_2^T = \underline{\underline{S}}_2 + \underline{\underline{P}}_2 \cdot \underline{\underline{S}}_1 \cdot \underline{\underline{P}}_2^T$$

и сопутствующие векторы левой и правой частей с помощью леммы (4.24) получим (4.23).

Упражнение. Показать, что если $\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{P}}_3 \cdot \underline{\underline{P}}_2 \cdot \underline{\underline{P}}_1$, то

$$\underline{\underline{\omega}} = \underline{\underline{\omega}}_3 + \underline{\underline{P}}_3 \cdot \underline{\underline{\omega}}_2 + \underline{\underline{P}}_3 \cdot \underline{\underline{P}}_2 \cdot \underline{\underline{\omega}}_1$$

Дифференцируя (4.23), получим формулу сложения угловых ускорений

$$\underline{\underline{\varepsilon}} \stackrel{\text{def}}{=} \dot{\underline{\underline{\omega}}} = \dot{\underline{\underline{\omega}}}_2 + \dot{\underline{\underline{P}}}_2 \cdot \underline{\underline{\omega}}_1 + \underline{\underline{P}}_2 \cdot \dot{\underline{\underline{\omega}}}_1.$$

Заменив по формуле Пуассона $\dot{\underline{\underline{P}}}_2 = \underline{\underline{\omega}}_2 \times \underline{\underline{P}}_2$, будем иметь

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}_2 + \underline{\underline{\omega}}_2 \times \underline{\underline{P}}_2 \cdot \underline{\underline{\omega}}_1 + \underline{\underline{P}}_2 \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}_1 \quad \text{или, заметив, что } \underline{\underline{P}}_2 \cdot \underline{\underline{\omega}}_1 = \underline{\underline{\omega}} - \underline{\underline{\omega}}_2$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}_2 + \underline{\underline{\omega}}_2 \times \underline{\underline{\omega}} + \underline{\underline{P}}_2 \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}_1 \quad (4.25)$$

Замечание.

Практически во всех учебниках не дается строгого определения угловой скорости, это понятие остается затененным интуитивными соображениями (кроме случая фиксированной оси поворота, когда $\underline{\underline{\omega}} = \dot{\underline{\underline{\phi}}} \underline{\underline{m}}$). Доказываются «теоремы» о том, что $\underline{\underline{\omega}}$ « можно переносить вдоль оси поворота », что угловые скорости можно складывать, если тело вращается вокруг параллельных, либо пересекающихся физических осей, но не рассматривается случай, когда оси не пересекаются и т.д. и т.п.

Теорема сложения угловых скоростей всегда приводится в виде $\underline{\underline{\omega}} = \underline{\underline{\omega}}_2 + \underline{\underline{\omega}}_1$. Очевидно, что под $\underline{\underline{\omega}}_1$ здесь понимается $\underline{\underline{P}}_2 \cdot \underline{\underline{\omega}}_1$.

4.2.7. Примеры вычисления вектора угловой скорости.

Пример 1. Углы Эйлера

Традиционно углы Эйлера вводятся следующим образом. Переход из отсчетного положения $\underline{d}_1, \underline{d}_2, \underline{d}_3$ в актуальное $\underline{D}_1, \underline{D}_2, \underline{D}_3$ осуществляется тремя поворотами (рис.4.9):

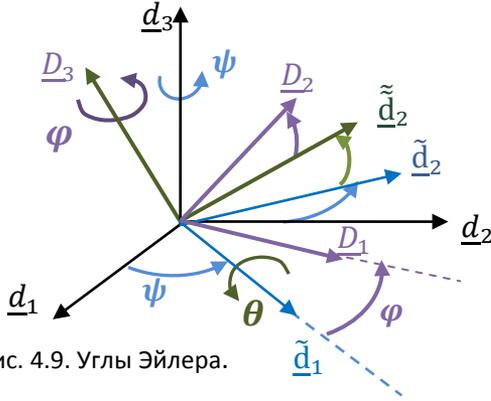


Рис. 4.9. Углы Эйлера.

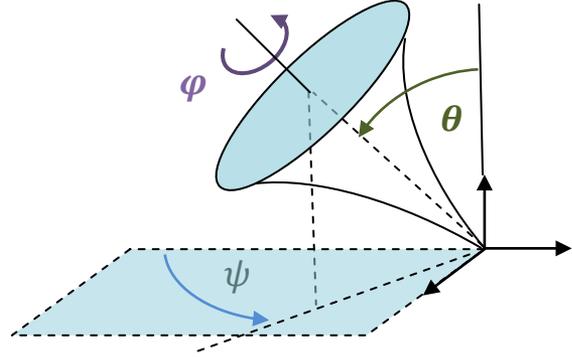


Рис. 4.10. Углы Эйлера (волчок)

1. Поворот вокруг \underline{d}_3 на угол *прецессии* ψ . При этом \underline{d}_1 переходит в положение $\underline{\tilde{d}}_1$, (\underline{d}_2 в $\underline{\tilde{d}}_2$). Этот поворот описывается тензором $\underline{\underline{P}}(\psi \underline{d}_3)$
2. Поворот вокруг $\underline{\tilde{d}}_1$ на угол *нутаии* θ . При этом $\underline{\tilde{d}}_2 \mapsto \underline{\tilde{\tilde{d}}}_2$, $\underline{d}_3 \mapsto \underline{D}_3$. Этот поворот описывается тензором $\underline{\underline{P}}(\theta \underline{\tilde{d}}_1)$
3. Поворот вокруг \underline{D}_3 на угол *собственного (чистого) вращения* φ – тензор $\underline{\underline{P}}(\varphi \underline{D}_3)$.

Таким образом, результирующий тензор поворота равен

$$\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{P}}(\varphi \underline{D}_3) \cdot \underline{\underline{P}}(\theta \underline{\tilde{d}}_1) \cdot \underline{\underline{P}}(\psi \underline{d}_3) \quad (4.26)$$

Для наглядности на рис.4.10 изображен волчок и углы Эйлера, описывающие его ориентацию.

Покажем, что традиционная последовательность поворотов (4.26) может быть заменена на последовательность поворотов на **те же** самые углы вокруг **неподвижных** осей:

1. Поворот вокруг \underline{d}_3 на угол *собственного (чистого) вращения* φ
2. Поворот вокруг \underline{d}_1 на угол *нутаии* θ .
3. Поворот вокруг \underline{d}_3 на угол *прецессии* ψ

Поскольку $\underline{D}_3 = \underline{\underline{P}}(\theta \underline{\tilde{d}}_1) \cdot \underline{\underline{P}}(\psi \underline{d}_3) \cdot \underline{d}_3$, $\underline{\tilde{d}}_1 = \underline{\underline{P}}(\psi \underline{d}_3) \cdot \underline{d}_1$ то по теореме (4.19)

$$\begin{aligned} \underline{\underline{P}}(\varphi \underline{D}_3) &= \left[\underline{\underline{P}}(\theta \underline{\tilde{d}}_1) \cdot \underline{\underline{P}}(\psi \underline{d}_3) \right] \cdot \underline{\underline{P}}(\varphi \underline{d}_3) \cdot \left[\underline{\underline{P}}(\theta \underline{\tilde{d}}_1) \cdot \underline{\underline{P}}(\psi \underline{d}_3) \right]^T, \\ \underline{\underline{P}}(\theta \underline{\tilde{d}}_1) &= \underline{\underline{P}}(\psi \underline{d}_3) \cdot \underline{\underline{P}}(\theta \underline{d}_1) \cdot \underline{\underline{P}}^T(\psi \underline{d}_3). \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в (4.26), получим с учетом $\underline{\underline{P}}(\cdot) \cdot \underline{\underline{P}}^T(\cdot) = \underline{\underline{E}}$

$$\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{P}}(\psi \underline{d}_3) \cdot \underline{\underline{P}}(\theta \underline{d}_1) \cdot \underline{\underline{P}}(\varphi \underline{d}_3). \quad \blacksquare \quad (4.27)$$

Разумеется, преимущество (4.27) по сравнению с (4.26) в том, что оси поворотов неподвижны.

Вектор угловой скорости по теореме о сложении угловых скоростей (4.23) равен

$$\underline{\omega} = \dot{\psi} \underline{d}_3 + \underline{\underline{P}}(\psi \underline{d}_3) \cdot (\dot{\theta} \underline{d}_1) + \underline{\underline{P}}(\psi \underline{d}_3) \cdot \underline{\underline{P}}(\theta \underline{d}_1) \cdot (\dot{\varphi} \underline{d}_3) = \dot{\psi} \underline{d}_3 + \dot{\theta} \underline{\tilde{d}}_1 + \dot{\varphi} \underline{D}_3.$$

Это же (правильное) выражение обычно получают из (4.26), применяя правдоподобные рассуждения о сложении «бесконечно малых» поворотов; применив их к другой последовательности поворотов, например (4.27), получим *абсолютно неверный результат*

$$\underline{\omega} = \dot{\psi} \underline{d}_3 + \dot{\theta} \underline{d}_1 + \dot{\varphi} \underline{d}_3.$$

Из (4.27) видно, что при малом угле нутации θ , когда $\underline{P}(\theta \underline{d}_1) \approx \underline{E}$ тензор поворота $\underline{P} \approx \underline{P}(\psi \underline{d}_3) \cdot \underline{P}(\varphi \underline{d}_3) = \underline{P}((\psi + \varphi) \underline{d}_3)$ - углы ψ и φ в линейном приближении становятся неразличимыми и входят в уравнения в виде суммы $(\psi + \varphi)$. В этом неудобство углов Эйлера.

Пример 2. Самолетные (корабельные) углы.

Этого недостатка лишены самолетные (корабельные) углы (рис.4.11).

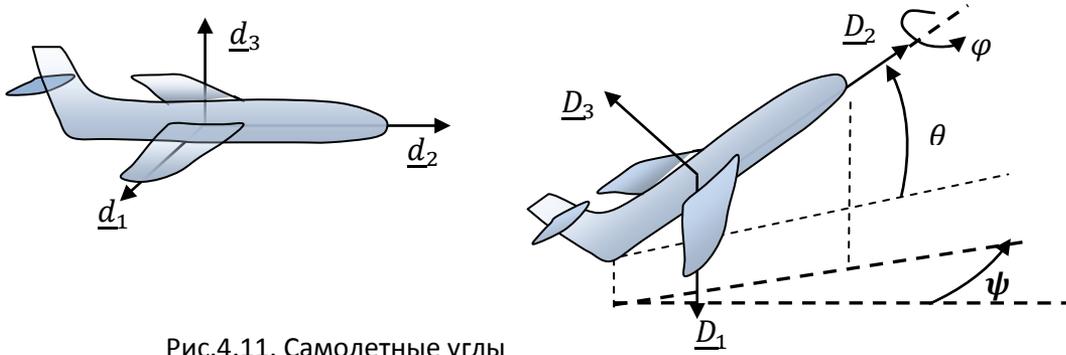


Рис.4.11. Самолетные углы

Переход из отсчетного положения $\underline{d}_1, \underline{d}_2, \underline{d}_3$ в актуальное $\underline{D}_1, \underline{D}_2, \underline{D}_3$ можно осуществить тремя поворотами (повернуть самостоятельно!) (рис.4.11):

1. Поворот вокруг \underline{d}_3 на угол *рысканья* ψ , при этом $\underline{d}_1 \mapsto \tilde{\underline{d}}_1, \underline{d}_2 \mapsto \tilde{\underline{d}}_2$
2. Поворот вокруг $\tilde{\underline{d}}_1$ на угол тангажа θ , при этом $\underline{d}_3 \mapsto \tilde{\underline{d}}_3, \tilde{\underline{d}}_2 \mapsto \tilde{\tilde{\underline{d}}}_2$
4. Поворот на угол крена φ вокруг $\tilde{\tilde{\underline{d}}}_2 = \underline{D}_2$.

$$\text{Тензор поворота равен } \underline{P} = \underline{P}(\varphi \tilde{\tilde{\underline{d}}}_2) \cdot \underline{P}(\theta \tilde{\underline{d}}_1) \cdot \underline{P}(\psi \underline{d}_3) \quad (4.28)$$

Выражение «можно осуществить» неслучайное; нетрудно понять, что возможны и другие варианты, например, повороты вокруг фиксированных осей. Применяя теорему о тензоре поворота с повернутой осью (4.19) из того, что $\tilde{\underline{d}}_1 = \underline{P}(\psi \underline{d}_3) \cdot \underline{d}_1$, $\tilde{\tilde{\underline{d}}}_2 = \underline{P}(\theta \tilde{\underline{d}}_1) \cdot \underline{P}(\psi \underline{d}_3) \cdot \underline{d}_2$, будем иметь

$$\begin{aligned} \underline{P} &= \left[\underline{P}(\theta \tilde{\underline{d}}_1) \cdot \underline{P}(\psi \underline{d}_3) \right] \cdot \underline{P}(\varphi \underline{d}_2) \cdot \left[\underline{P}(\theta \tilde{\underline{d}}_1) \cdot \underline{P}(\psi \underline{d}_3) \right]^T \cdot \underline{P}(\theta \tilde{\underline{d}}_1) \cdot \underline{P}(\psi \underline{d}_3) = \\ &= \underline{P}(\theta \tilde{\underline{d}}_1) \cdot \underline{P}(\psi \underline{d}_3) \cdot \underline{P}(\varphi \underline{d}_2) \cdot \underbrace{\underline{P}^T(\psi \underline{d}_3) \cdot \underline{P}^T(\theta \tilde{\underline{d}}_1) \cdot \underline{P}(\theta \tilde{\underline{d}}_1) \cdot \underline{P}(\psi \underline{d}_3)}_{\underline{E}} = \\ &= \underline{P}(\psi \underline{d}_3) \cdot \underline{P}(\theta \underline{d}_1) \cdot \underbrace{\underline{P}^T(\psi \underline{d}_3) \cdot \underline{P}(\psi \underline{d}_3)}_{\underline{E}} \cdot \underline{P}(\varphi \underline{d}_2) = \underline{P}(\psi \underline{d}_3) \cdot \underline{P}(\theta \underline{d}_1) \cdot \underline{P}(\varphi \underline{d}_2). \end{aligned}$$

Таким образом, получили следующую композицию поворотов:

1. Поворот вокруг \underline{d}_2 на угол *крена* φ (рискую сломать крылья)
2. Поворот вокруг \underline{d}_1 на угол *тангажа* θ (подъем «носа»)
4. Поворот вокруг \underline{d}_3 на угол *рысканья* ψ

Тензор поворота и вектор угловой скорости имеют вид

$$\begin{aligned} \underline{P} &= \underline{P}(\psi \underline{d}_3) \cdot \underline{P}(\theta \underline{d}_1) \cdot \underline{P}(\varphi \underline{d}_2) \quad (4.29) \\ \underline{\omega} &= \dot{\psi} \underline{d}_3 + \underline{P}(\psi \underline{d}_3) \cdot (\dot{\theta} \underline{d}_1) + \underline{P}(\psi \underline{d}_3) \cdot \underline{P}(\theta \underline{d}_1) \cdot (\dot{\varphi} \underline{d}_2) \end{aligned}$$

Пример 3. Трехстепенной гироскоп в кардановом подвесе.

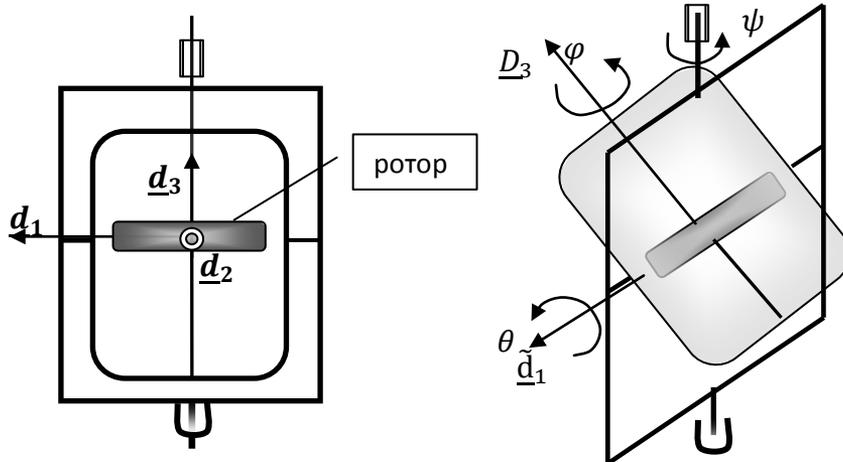


Рис.4.12. Трехстепенной гироскоп

Карданов подвес имеет три *физических* оси поворота, поэтому нетрудно догадаться, как тремя поворотами вокруг *неподвижных* осей перевести ротор гироскопа из отсчетного положения в актуальное. Разумеется, последовательность поворотов может быть любой, но, как мы убедились, повороты вокруг неподвижных осей самые удобные.

$$\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{P}}(\psi \underline{d}_3) \cdot \underline{\underline{P}}(\theta \underline{d}_1) \cdot \underline{\underline{P}}(\varphi \underline{d}_3),$$

$$\underline{\omega} = \dot{\psi} \underline{d}_3 + \underline{\underline{P}}(\psi \underline{d}_3) \cdot (\dot{\theta} \underline{d}_1) + \underline{\underline{P}}(\psi \underline{d}_3) \cdot \underline{\underline{P}}(\theta \underline{d}_1) \cdot (\dot{\varphi} \underline{d}_3) = \dot{\psi} \underline{d}_3 + \dot{\theta} \underline{\tilde{d}}_1 + \dot{\varphi} \underline{D}_3. \quad (4.30)$$

Физические оси позволяют правильно найти угловую скорость как сумму угловых скоростей вращений вокруг этих осей в актуальном положении.

Пример 4. Движение конуса по конусу

Ориентация подвижного конуса (шестерни) задается двумя углами – углом поворота ψ вокруг неподвижной оси (вектора \underline{k}) и углом φ вращения вокруг собственной оси, актуальное положение которой задается вектором $\underline{n} = \underline{\underline{P}}(\psi \underline{k}) \cdot \underline{n}_0$.

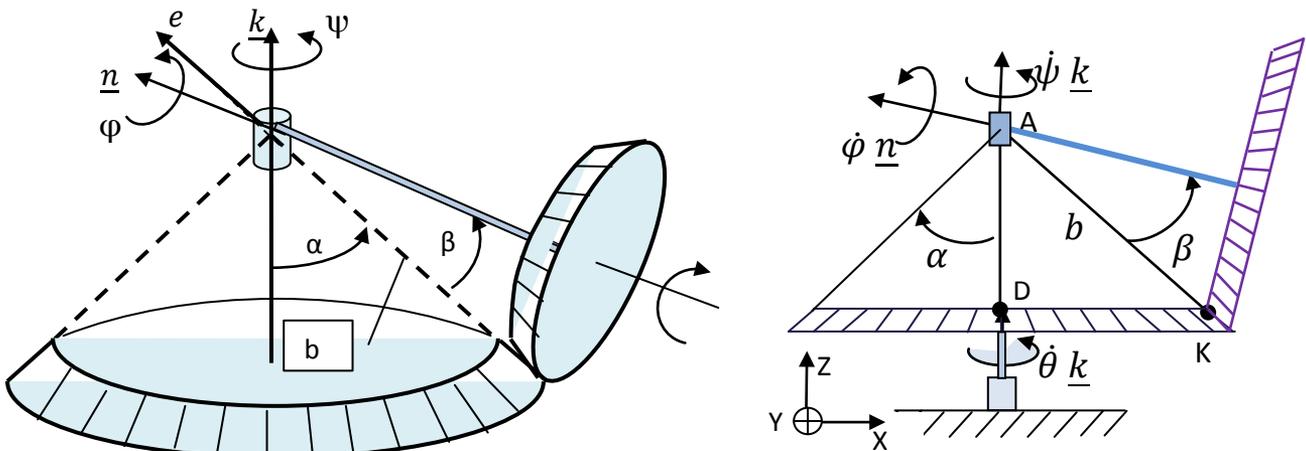


Рис.4.13. Качение конуса(шестерни)

Тензор поворота $\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{P}}(\psi \underline{k}) \cdot \underline{\underline{P}}(\varphi \underline{n}_0)$ - повороты вокруг неподвижных осей.

$$\underline{\omega} = \dot{\psi} \underline{k} + \underline{P}(\psi \underline{k}) \cdot (\dot{\varphi} \underline{n}_0) \equiv \dot{\psi} \underline{k} + \dot{\varphi} \underline{n}. \quad (4.31)$$

Если нет проскальзывания, то длина дуги окружности основания неподвижного конуса равна длине соответствующей дуги подвижного: $b \sin \alpha \cdot \psi = b \sin \beta \cdot \varphi$, откуда $\sin \alpha \dot{\psi} = \sin \beta \dot{\varphi}$ и $\underline{\omega} = \dot{\psi} \left(\underline{k} + \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \underline{n} \right)$. Векторное произведение угловой скорости на вектор \underline{e} касающихся образующих конусов равно нулю: $\underline{\omega} \times \underline{e} = \dot{\psi} \underline{k} \left(\sin \alpha - \sin \beta \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \right) = 0$, следовательно, $\underline{\omega}$ параллелен \underline{e} (см.рис.4.13).

Впрочем, геометрическому подходу следует предпочесть кинематический. Так, если вращается и нижняя шестерня (конус), то для нахождения угловой скорости проще исходить из равенства скоростей в точке контакта К: $\underline{V}_K = \dot{\theta} \underline{k} \times \underline{DK} = \underline{\omega} \times \underline{AK} = (\dot{\varphi} \underline{n} + \dot{\psi} \underline{k}) \times \underline{AK}$.

Проецируя эту формулу на ось Y , получим $\dot{\theta} b \sin \alpha = -\dot{\varphi} b \sin \beta + \dot{\psi} b \sin \alpha$, откуда

$$\dot{\varphi} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} (\dot{\psi} - \dot{\theta})$$

Дифференцируя угловую скорость (4.31), получим угловое ускорение $\underline{\varepsilon} = \ddot{\psi} \underline{k} + \ddot{\varphi} \underline{n} + \dot{\varphi} \dot{\underline{n}}$ и с учетом $\dot{\underline{n}} = \underline{P}(\psi \underline{k}) \cdot \underline{n}_0 = \dot{\psi} \underline{k} \times \underline{n}$

$$\underline{\varepsilon} = \ddot{\psi} \underline{k} + \ddot{\varphi} \underline{n} + \dot{\varphi} \dot{\psi} (\underline{k} \times \underline{n})$$

4.2.8. Связь тензора поворота и вектора конечного поворота .

В каком бы виде ни был записан тензор поворота – через направляющие косинусы или в виде композиции поворотов, угол поворота и ось поворота определяются из выражений для следа и векторного инварианта тензора поворота

$$\underline{P}(\varphi \underline{m}) = \underline{m} \underline{m} + (\underline{E} - \underline{m} \underline{m}) + \sin \varphi \underline{m} \times \underline{E}.$$

След и векторный инвариант равны

$$\text{tr} \underline{P} = 1 + 2 \cos \varphi, \quad \underline{P}_x = -2 \underline{m} \sin \varphi. \quad (1)$$

Рассмотрим композицию поворотов $\underline{P}(\varphi \underline{m}) = \underline{P}(\beta \underline{k}) \cdot \underline{P}(\alpha \underline{n})$ вокруг осей, заданных единичными векторами \underline{n} и \underline{k} , угол между которыми равен γ . Постараемся получить как можно более простые выражения для «суммарного» угла поворота φ и оси \underline{m} через углы β и α и оси \underline{k} и \underline{n} . Перемножив тензоры и заменив в произведении диадные произведения скалярными и векторными, найдем соответственно

$$\text{tr} \underline{P} = 1 + 2 \cos \varphi = \cos \beta + \cos \alpha + \cos \beta \cos \alpha + \cos^2 \gamma (1 - \cos \beta)(1 - \cos \alpha) - 2 \cos \gamma \sin \beta \sin \alpha,$$

$$\begin{aligned} \underline{P}_x = -2 \underline{m} \sin \varphi = & \underline{k} [\cos \gamma \sin \alpha (1 - \cos \beta) - \sin \beta (1 + \cos \alpha)] + \\ & + \underline{n} [\cos \gamma \sin \beta (1 - \cos \alpha) - \sin \alpha (1 + \cos \beta)] + \\ & + (\underline{k} \times \underline{n}) [\cos \gamma (1 - \cos \alpha)(1 - \cos \beta) - \sin \alpha \sin \beta]. \end{aligned}$$

Эти выражения, приведенные в [3], можно упростить, заменив тригонометрические функции через половинные углы. Так, из выражения для $\text{tr} \underline{P}$ имеем

$$\cos \varphi = 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} - 1 = \frac{\text{tr} \underline{P} - 1}{2}, \text{ откуда, опуская элементарные выкладки, получим}$$

$$\cos^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{\text{tr} \underline{P} + 1}{4} = \left(\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} - \cos \gamma \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \right)^2 \text{ или}$$

$$\cos \frac{\varphi}{2} = + \left(\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} - \cos \gamma \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \right). \quad (2)$$

Аналогично, выражение для векторного инварианта преобразуется к виду

$$\underline{P}_x = -2 \underline{m} \sin \varphi = -4 \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \left(\underline{k} \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} + \underline{n} \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} + (\underline{k} \times \underline{n}) \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \right), \text{ или}$$

$$\underline{m} \sin \frac{\varphi}{2} = \left(\underline{k} \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} + \underline{n} \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} + (\underline{k} \times \underline{n}) \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \right). \quad (3)$$

Из системы уравнений (2), (3) определяются угол и ось «суммарного» поворота. Заметим, что знак (+) в (2) выбран из тех соображений, что если, например, $\alpha = 0$, то угол φ должен быть равен другому: $\varphi = \beta$ и $\underline{m} = \underline{k}$.

Если ввести векторы конечных поворотов

$$\underline{\theta}_\alpha \triangleq 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \underline{n}, \quad \underline{\theta}_\beta \triangleq 2 \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \underline{k}, \quad \underline{\theta}_\varphi \triangleq 2 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \underline{m},$$

то уравнение (3) принимает форму *правила сложения конечных поворотов* [10]

$$\underline{\theta}_\varphi = \frac{\underline{\theta}_\beta + \underline{\theta}_\alpha + \frac{1}{2} \underline{\theta}_\beta \times \underline{\theta}_\alpha}{1 - \frac{1}{4} \underline{\theta}_\alpha \cdot \underline{\theta}_\beta}$$

4.2.9. Сложное движение точки. Теоремы о сложении скоростей и ускорений (теорема Кориолиса).

Имеются две системы отсчета - называемая неподвижной система S , в которой будут написа-

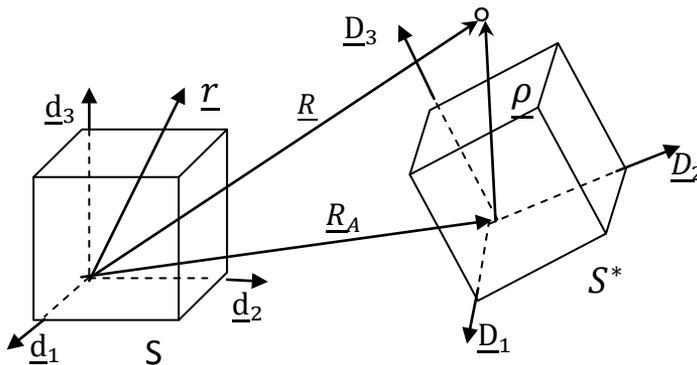


Рис.4.15.

ны все формулы, и подвижная S^* (рис. 4.15)

Движение точки по отношению к неподвижной системе называется *абсолютным*; скорость и ускорение обозначаются $\underline{V}_a, \underline{W}_a$.

Движение точки по отношению к подвижной системе называется *относительным*; скорость и ускорение обозначаются $\underline{V}_r, \underline{W}_r$.

Движение подвижной системы по отношению к неподвижной называется *переносным*; скорость и ускорение того места подвижной системы, где в данный момент находится рассматриваемая точка, обозначаются $\underline{V}_e, \underline{W}_e$

Вектор положения точки в неподвижной системе может быть представлен в виде суммы

$$\underline{R}(t) = \underline{R}_A(t) + \underline{\rho}(t),$$

Разложим $\underline{\rho}(t)$ по базису подвижной системы: $\underline{\rho}(t) = x_1(t)\underline{D}_1(t) + x_2(t)\underline{D}_2(t) + x_3(t)\underline{D}_3(t)$, где $x_k(t)$ – координаты относительного движения точки. Таким образом,

$$\underline{R}(t) = \underline{R}_A(t) + x_k(t)\underline{D}_k(t) \quad (4.32)$$

Для упрощения записи формул ниже символ зависимости величин от времени опустим.

Дифференцируя (4.32) и заменяя по формуле Эйлера $\underline{\dot{D}}_k = \underline{\omega} \times \underline{D}_k$, где $\underline{\omega}$ – угловая скорость подвижной системы, получим

$$\underline{\dot{R}}(t) = \underline{\dot{R}}_A(t) + x_k \underline{\dot{D}}_k + \dot{x}_k \underline{D}_k = \underline{\dot{R}}_A(t) + \underline{\omega} \times [x_k \underline{D}_k] + \dot{x}_k \underline{D}_k = \underline{\dot{R}}_A(t) + \underbrace{\underline{\omega} \times \underline{\rho} + \dot{x}_k \underline{D}_k}_{\underline{\dot{\rho}}}. \quad (4.33)$$

Первые два слагаемых – уже знакомая скорость того места подвижной системы, где находится наблюдаемая точка, то есть переносная скорость

$$\underline{V}_e \stackrel{\text{def}}{=} \underline{\dot{R}}_A(t) + \underline{\omega} \times \underline{\rho}, \quad (4.34)$$

а сумма произведений производных относительных координат \dot{x}_k на базисные векторы подвижной системы \underline{D}_k является относительной скоростью:

$$\underline{V}_r \stackrel{\text{def}}{=} \dot{x}_k \underline{D}_k. \quad (4.35)$$

Таким образом, абсолютная скорость равна сумме переносной и относительной:

$$\underline{V}_a = \underline{V}_e + \underline{V}_r. \quad (4.36)$$

Продифференцируем (4.33): $\underline{\ddot{R}} = \underline{\ddot{R}}_A + \underline{\dot{\omega}} \times \underline{\rho} + \underline{\omega} \times \underline{\dot{\rho}} + \ddot{x}_k \underline{D}_k + \dot{x}_k \underline{\dot{D}}_k$.

Подставив в это выражение $\underline{\dot{\omega}} \stackrel{\text{def}}{=} \underline{\varepsilon}$ - вектор углового ускорения подвижной системы, ранее полученную формулу (см. 4.33) $\underline{\dot{\rho}} = \underline{\omega} \times \underline{\rho} + \dot{x}_k \underline{D}_k$, формулу Эйлера $\underline{\dot{D}}_k = \underline{\omega} \times \underline{D}_k$, получим

$$\underline{\ddot{R}} = \underline{\ddot{R}}_A + \underline{\varepsilon} \times \underline{\rho} + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{\rho}) + \ddot{x}_k \underline{D}_k + 2\underline{\omega} \times (\dot{x}_k \underline{D}_k).$$

Первые три слагаемые – ускорение того места подвижной системы, где находится точка, то есть переносное ускорение

$$\underline{W}_e \stackrel{\text{def}}{=} \underline{\ddot{R}}_A + \underline{\varepsilon} \times \underline{\rho} + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{\rho}), \quad (4.37)$$

сумма произведений производных относительных координат \ddot{x}_k на базисные векторы подвижной системы \underline{D}_k является относительным ускорением

$$\underline{W}_r \stackrel{\text{def}}{=} \ddot{x}_k \underline{D}_k, \quad (4.38)$$

а последнее, далеко не очевидное слагаемое называется ускорением Кориолиса

$$\underline{W}_{cor} \stackrel{\text{def}}{=} 2 \underline{\omega} \times \underline{V}_r. \quad (4.39)$$

Получили теорему о сложении ускорений (теорему Кориолиса): Абсолютное ускорение равно сумме переносного ускорения, относительного и ускорения Кориолиса:

$$\underline{W}_a = \underline{W}_e + \underline{W}_r + \underline{W}_{cor}, \quad (4.40)$$

$$\underline{W}_{cor} \stackrel{\text{def}}{=} 2 \underline{\omega} \times \underline{V}_r$$

Замечание. Относительная скорость $\underline{V}_r \stackrel{\text{def}}{=} \dot{x}_k \underline{D}_k$ и ускорение $\underline{W}_r \stackrel{\text{def}}{=} \ddot{x}_k \underline{D}_k$ обычно называют скоростью и ускорением, измеряемыми «подвижным наблюдателем», что не совсем верно, поскольку для подвижного наблюдателя подвижный базис \underline{D}_k является неподвижным $\underline{d}_k = \underline{D}_k(0)$, то есть «истинные» относительная скорость и ускорение равны $\underline{v}_r = \dot{x}_k \underline{d}_k$, $\underline{w}_r = \ddot{x}_k \underline{d}_k$, а $\underline{V}_r \stackrel{\text{def}}{=} \dot{x}_k \underline{D}_k$ и ускорение $\underline{W}_r \stackrel{\text{def}}{=} \ddot{x}_k \underline{D}_k$ – это повернутые вместе с подвижной системой «истинные».

Все вышеизложенное можно кратко получить, используя тензор поворота.

Вектор положения точки в неподвижной системе может быть представлен в виде суммы

$$\underline{R}(t) = \underline{R}_A(t) + \underline{\rho}(t) = \underline{R}_A(t) + \underline{P}(t) \cdot \underline{r}(t),$$

где $\underline{P}(t)$ -тензор поворота подвижной системы отсчета, $\underline{r}(t) = x_k(t)\underline{d}_k$ – вектор в неподвижной системе, описывающий относительное движение, $\underline{\rho}(t) = \underline{P}(t) \cdot \underline{r}(t)$ - повернутый вместе с подвижной системой вектор $\underline{r}(t)$, т.е это вектор относительного положения, каким его видит неподвижный наблюдатель (рис.4.14). Дифференцируя это равенство и воспользовавшись формулой Пуассона $\dot{\underline{P}} = \underline{\omega} \times \underline{P}$, получим теорему сложения скоростей

$$\dot{\underline{R}}(t) = \dot{\underline{R}}_A(t) + \dot{\underline{P}}(t) \cdot \underline{r}(t) + \underline{P} \cdot \dot{\underline{r}} = \underbrace{\dot{\underline{R}}_A(t) + \underline{\omega} \times \underline{P} \cdot \underline{r}}_{\underline{V}_e} + \underbrace{\underline{P} \cdot \dot{\underline{r}}}_{\underline{V}_r} = \underline{V}_e + \underline{V}_r,$$

а дифференцируя еще раз – теорему о сложении ускорений

$$\ddot{\underline{R}} = \underbrace{\ddot{\underline{R}}_A + \underline{\varepsilon} \times \underline{\rho} + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{\rho})}_{\underline{W}_e} + \underbrace{\underline{P} \cdot \ddot{\underline{r}}}_{\underline{W}_r} + \underbrace{2\underline{\omega} \times \underline{V}_r}_{\underline{W}_{cor}} = \underline{W}_e + \underline{W}_r + \underline{W}_{cor} \quad \blacksquare$$

4.2.10. Сложное движение тела

Рассматривается движение тела («летающей тарелки») относительно двух систем отсчета- неподвижной с осями \underline{d}_k и подвижной с осями \underline{e}_k (рис 4.16).

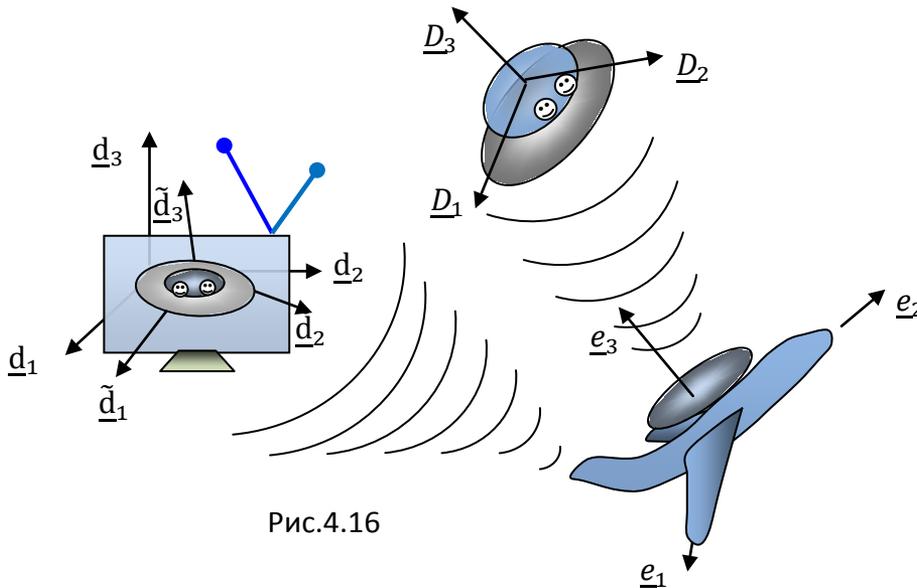


Рис.4.16

Необходимо определить абсолютную ориентацию тела по известной ориентации подвижной системы и относительной ориентации, информация о которой может быть передана в неподвижную систему любым способом, например, в виде телевизионной картинки или в числовом виде посредством направляющих косинусов $\beta_{kn} = \underline{D}_k \cdot \underline{e}_n$, измеряемых подвижным наблюдателем.

Тензор поворота, описывающий «абсолютную» ориентацию $\underline{P}_a = \underline{D}_k \underline{d}_k$; $\underline{P}_a \cdot \underline{d}_k = \underline{D}_k$; описывающий переносное движение $\underline{P}_e = \underline{e}_k \underline{d}_k$; $\underline{P}_e \cdot \underline{d}_k = \underline{e}_k$. Тензор поворота относительной ориентации введем в виде $\tilde{\underline{P}}_r = \beta_{kn} \underline{d}_n \underline{d}_k$; $\tilde{\underline{P}}_r \cdot \underline{d}_k = \tilde{\underline{d}}_k$, т.е. этот тензор действительно описывает то движение, которое «видит» подвижный наблюдатель, одушевленный или неодушевленный

ный (например, телекамера) и которое неподвижный может наблюдать на экране телевизора. Таким образом,

$$\underline{\underline{P}}_a = \underline{\underline{P}}_e \cdot \tilde{\underline{\underline{P}}}_r = (\underline{e}_s \underline{d}_s) \cdot (\beta_{kn} \underline{d}_n \underline{d}_k) = \beta_{kn} \delta_{sn} \underline{e}_s \underline{d}_k = \underbrace{\beta_{kn} \underline{e}_n}_{\underline{D}_k} \underline{d}_k = \underline{D}_k \underline{d}_k \quad (4.41)$$

Вектор угловой скорости по теореме о сложении угловых скоростей имеет вид

$$\underline{\omega}_a = \underline{\omega}_e + \underline{\underline{P}}_e \cdot \underline{\omega}_r. \quad (4.42)$$

Вектор углового ускорения

$$\begin{aligned} \underline{\varepsilon}_a &= \dot{\underline{\omega}}_a = \dot{\underline{\omega}}_e + \underline{\underline{P}}_e \cdot \dot{\underline{\omega}}_r + \underline{\underline{P}}_e \cdot \underline{\omega}_r = \underline{\varepsilon}_e + \underline{\omega}_e \times \overbrace{\underline{\underline{P}}_e \cdot \underline{\omega}_r}^{\underline{\omega}_a - \underline{\omega}_e} + \underline{\underline{P}}_e \cdot \underline{\varepsilon}_r, \text{ или} \\ \underline{\varepsilon}_a &= \dot{\underline{\omega}}_a = \dot{\underline{\omega}}_e + \underline{\underline{P}}_e \cdot \dot{\underline{\omega}}_r + \underline{\underline{P}}_e \cdot \underline{\omega}_r = \underline{\varepsilon}_e + \underline{\underline{P}}_e \cdot \underline{\varepsilon}_r + \underline{\omega}_e \times \underline{\omega}_a \end{aligned} \quad (4.43)$$

Существует и другая [4] интерпретация сложного движения, которая в части описания ориентации по сути не отличается от вышеизложенного подхода, а вот в части определения относительной угловой скорости отличается существенно.

Тензор поворота переносного движения, как и ранее $\underline{\underline{P}}_e = \underline{e}_k \underline{d}_k$; $\underline{\underline{P}}_e \cdot \underline{d}_k = \underline{e}_k$.

Тензором относительного поворота называется $\underline{\underline{P}}_r = \underline{D}_k \underline{e}_k$; $\underline{\underline{P}}_r \cdot \underline{e}_k = \underline{D}_k$. Действительно, матрица компонент этого тензора, записанного в базисе \underline{e}_k , описывает относительную ориентацию $\underline{\underline{P}}_r = \beta_{ks} \underline{e}_s \underline{e}_k$.

Очевидно, что тензор поворота абсолютного движения

$$\underline{\underline{P}}_a = \underline{\underline{P}}_r \cdot \underline{\underline{P}}_e = (\underline{D}_k \underline{e}_k) \cdot (\underline{e}_s \underline{d}_s) = \underline{D}_k \underline{d}_k.$$

Сразу же отметим, что $\underline{\underline{P}}_r$ - это повернутый вместе с подвижной системой «истинный» тензор поворота относительного движения $\tilde{\underline{\underline{P}}}_r$:

$$\underline{\underline{P}}_e \cdot \tilde{\underline{\underline{P}}}_r \cdot \underline{\underline{P}}_e^T = (\underline{e}_s \underline{d}_s) \cdot (\beta_{km} \underline{d}_m \underline{d}_k) \cdot (\underline{d}_n \underline{e}_n) = \delta_{sm} \delta_{kn} \beta_{km} \underline{e}_s \underline{e}_n = \beta_{km} \underline{e}_m \underline{e}_k \equiv \underline{\underline{P}}_r,$$

так что $\underline{\underline{P}}_a = \underline{\underline{P}}_r \cdot \underline{\underline{P}}_e = \underline{\underline{P}}_e \cdot \underbrace{\tilde{\underline{\underline{P}}}_r \cdot \underline{\underline{P}}_e^T \cdot \underline{\underline{P}}_e}_{\underline{E}} = \underline{\underline{P}}_e \cdot \tilde{\underline{\underline{P}}}_r$ - формула (4.41).

Векторы абсолютной и переносной угловых скоростей вводятся обычным способом в соответствии с формулой Пуассона $\dot{\underline{\underline{P}}}_a = \underline{\omega}_a \times \underline{\underline{P}}_a$, $\dot{\underline{\underline{P}}}_e = \underline{\omega}_e \times \underline{\underline{P}}_e$, а вот вектор относительной угловой скорости $\underline{\omega}_r^*$ определяется таким образом, чтобы формула сложения угловых скоростей имела привычный (см. любой учебник) вид

$$\underline{\omega}_a = \underline{\omega}_e + \underline{\omega}_r^*. \quad (4.44)$$

Для этого $\underline{\omega}_r^*$ вводится формулой

$$\underline{\underline{P}}_r^\nabla = \underline{\omega}_r^* \times \underline{\underline{P}}_r, \quad (4.45)$$

где $\underline{\underline{P}}_r^\nabla$ - производная Яуманна, известная в теоретической механике как относительная производная. Так, если вектор задан координатами в подвижном базисе \underline{e}_k , то полная производная по времени имеет вид

$$\dot{\underline{b}} = (\underline{b}_m \underline{e}_m)' = \dot{\underline{b}}_m \underline{e}_m + \underline{b}_m \dot{\underline{e}}_m = \underline{\dot{b}}_m \underline{e}_m + \underline{\omega} \times \underline{b},$$

где подчеркнутое слагаемое – относительная производная, т.е. производная, которую вычислял бы подвижный наблюдатель, для которого базисные векторы \underline{e}_k неподвижны.

. Таким образом,

$$\underline{b}^\nabla \stackrel{\text{def}}{=} \underline{\dot{b}} - \underline{\omega} \times \underline{b}.$$

Совершенно аналогично для тензора

$$\underline{\underline{P}}_r^\nabla \stackrel{\text{def}}{=} \underline{\underline{P}}_r - \underline{\underline{\omega}}_e \times \underline{\underline{P}}_r + \underline{\underline{P}}_r \times \underline{\underline{\omega}}_e. \quad (4.46)$$

Дифференцируя $\underline{\underline{P}}_a = (\underline{\underline{P}}_r \cdot \underline{\underline{P}}_e) = \underline{\underline{P}}_r \cdot \underline{\underline{P}}_e + \underline{\underline{P}}_r \cdot \underline{\underline{P}}_e$ и заменяя $\underline{\underline{P}}_r$ по (4.46), (4.45), приходим к (4.44).

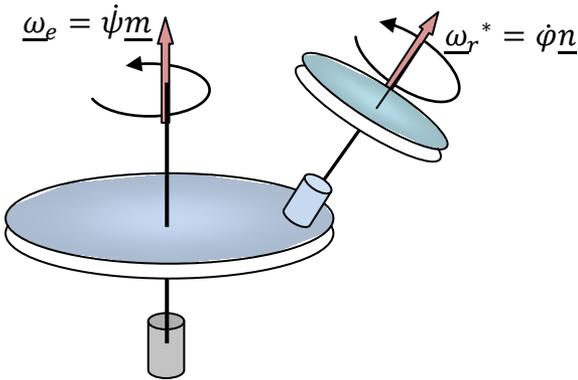
Собственно говоря, из (4.42) следует, что $\underline{\underline{\omega}}_r^* = \underline{\underline{P}}_e \cdot \underline{\underline{\omega}}_r$, то есть это повернутый вместе с подвижной системой (вместе с телевизором) «истинный» вектор угловой скорости относительного движения $\underline{\underline{\omega}}_r$. При графоаналитическом решении задач, когда, разумеется, рассматривается актуальное состояние, именно $\underline{\underline{\omega}}_r^*$ изображается на рисунках.

В качестве примера можно рассмотреть, например, вращающуюся вокруг неподвижной оси с ортом $\underline{\underline{m}}$ платформу, относительно которой вокруг оси с ортом $\underline{\underline{n}}(t)$ вращается тело (рис.4.17).

Введем подвижную систему отсчета, связанную с платформой.

. Тензор поворота переносного движения $\underline{\underline{P}}_e = \underline{\underline{P}}(\psi \underline{\underline{m}})$. Тензор поворота относительного движения («истинный») $\underline{\underline{P}}_r = \underline{\underline{P}}(\varphi \underline{\underline{n}}_0)$, где $\underline{\underline{n}}_0$ - орт оси поворота тела в отсчетном положении. Заметим, что для подвижного наблюдателя постоянный вектор $\underline{\underline{n}}_0$ остается неподвижным и впредь. Разумеется, по (4.41),(4.42)

$$\begin{aligned} \underline{\underline{P}}_a &= \underline{\underline{P}}_e \cdot \underline{\underline{P}}_r = \underline{\underline{P}}(\psi \underline{\underline{m}}) \cdot \underline{\underline{P}}(\varphi \underline{\underline{n}}_0). \\ \underline{\underline{\omega}}_a &= \underline{\underline{\omega}}_e + \underline{\underline{P}}_e \cdot \underline{\underline{\omega}}_r = \psi \underline{\underline{m}} + \underline{\underline{P}}(\psi \underline{\underline{m}}) \cdot (\varphi \underline{\underline{n}}_0) = \psi \underline{\underline{m}} + \varphi \underline{\underline{n}}. \end{aligned} \quad (4.47)$$



При втором подходе $\underline{\underline{P}}_r = \underline{\underline{P}}(\varphi \underline{\underline{n}})$, $\underline{\underline{P}}_a = \underline{\underline{P}}_r \cdot \underline{\underline{P}}_e = \underline{\underline{P}}(\varphi \underline{\underline{n}}) \cdot \underline{\underline{P}}(\psi \underline{\underline{m}})$, $\underline{\underline{\omega}}_r^* = \varphi \underline{\underline{n}}$ (вектор $\underline{\underline{n}}$ считается постоянным). Так как $\underline{\underline{n}} = \underline{\underline{P}}(\psi \underline{\underline{m}}) \cdot \underline{\underline{n}}_0$, то по теореме (4.19) $\underline{\underline{P}}_r = \underline{\underline{P}}(\varphi \underline{\underline{n}}) = \underline{\underline{P}}(\psi \underline{\underline{m}}) \cdot \underline{\underline{P}}(\varphi \underline{\underline{n}}_0) \cdot \underline{\underline{P}}^T(\psi \underline{\underline{m}})$ и, как отмечалось выше, получим (4.47).

Глава 5. Фундаментальные законы механики.

Фундаментальные законы формулируются в инерциальных системах отсчета.

Инерциальная система отсчета - система, относительно которой изолированная от внешних сил (одинокая во всем мире) материальная точка либо движется равномерно и прямолинейно, либо находится в покое.

Заметим, что этим определением вводится понятие *равномерного течения времени* и тем самым способ тарировки часов.

Подробное изложение рассматриваемых вопросов можно найти в книге [5].

5.1. Первый фундаментальный закон механики - закон баланса количества движения. Открытые и закрытые тела.

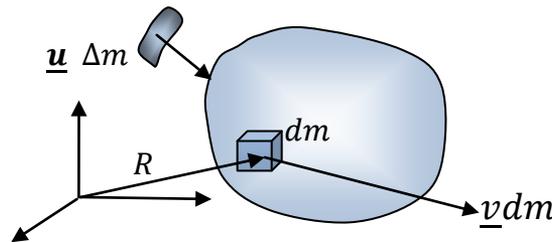
Скорость изменения количества движения тела равна главному вектору внешних сил плюс скорость подвода количества движения в тело.

$$\underline{\dot{Q}} = \underline{F}^{ext} + \frac{\delta Q}{\delta t} \quad (5.1)$$

Количество движения (импульс) одной точки $\underline{Q} \stackrel{\text{def}}{=} m\underline{v}$;
 тела, состоящего из материальных точек $\underline{Q} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{(k)} m_k \underline{v}_k$; (5.2)

тела, занимающего какую-либо область в пространстве с непрерывно распределенной массой (континуального тела)

$$\underline{Q} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{(m)} \underline{v} dm = \int_{(m)} \underline{\dot{R}} dm. \quad (5.3)$$



Скорость подвода количества движения в тело определяется как

$$\frac{\delta Q}{\delta t} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta m \underline{u}}{\Delta t}, \quad (5.4)$$

где Δm – присоединяющаяся к телу за время Δt со скоростью \underline{u} масса.

Тела, обменивающиеся массой со своим окружением, называются открытыми, не обменивающимися – закрытыми. Примером открытого тела является, например рабочее колесо турбины вместе с рабочим телом (газ, пар, вода), участок речного русла или трубопровода, ракета. Для

закрытых тел, разумеется $\frac{\delta Q}{\delta t} = \mathbf{0}$.

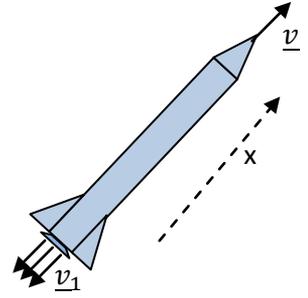
Введение открытых тел - вынужденная мера в механике, поскольку нас обычно интересует, что *сейчас* происходит в *данном месте* пространства, а проследить за историей каждой частицы жидкости, оказавшейся в выделенном теле, практически невозможно; частица «приходит неизвестно откуда и уходит неизвестно куда».

Для материальной точки первый ФЗМ принимает вид второго закона Ньютона

$$m\underline{W} = \underline{F} \quad (5.5)$$

Пример. Уравнение Мещерского. Формула Циолковского.

В качестве примера применения первого закона для открытых тел рассмотрим ракету массой $m(t) = m_* + m_{\text{топл}}(t)$, где m_* – «сухая» масса ракеты, $m_{\text{топл}}(t)$ – масса топлива в ракете. Заметим, что описать движение закрытого тела постоянной массы $m_* + m_{\text{топл}}(t) + m_{\text{газ}}(t)$ – ракеты с уже сгоревшим топливом (газом) практически невозможно, поскольку это потребовало бы задания сил, действующих не только на ракету, но и на сгоревшее топливо (газ).



Запишем уравнение первого фундаментального закона $\underline{\dot{Q}} = \underline{F}^{ext} + \frac{\delta Q}{\delta t}$.

Количество движения $\underline{Q} = m(t)\underline{v}$. В главный вектор внешних сил \underline{F}^{ext} входят сила тяжести, аэродинамические силы и, строго говоря, давление на срезе сопла двигателя.

Скорость подвода количества движения $\frac{\delta Q}{\delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(-1)\Delta m_{\text{газ}}\underline{v}_1}{\Delta t}$, где $\Delta m_{\text{газ}}$ – масса отделяющегося за время Δt газа, \underline{v}_1 – его скорость, а знак (-1) учитывает факт именно отделения.

Поскольку $\Delta m_{\text{газ}} = -\Delta m_{\text{топл}} = -\Delta m$, то $\frac{\delta Q}{\delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta m \cdot \underline{v}_1}{\Delta t} = \dot{m}\underline{v}_1$. Таким образом, $(m\underline{v})' = \dot{m}\underline{v}_1$, откуда

$$m\underline{\dot{v}} = \underline{F}^{ext} + \dot{m}(\underline{v}_1 - \underline{v}). \quad (1)$$

Это уравнение было получено И.В. Мещерским в 1897 г.

В терминах кинематики относительного движения скорость (абсолютная) отделяющегося газа \underline{v}_1 равна сумме переносной скорости \underline{v} ракеты и относительной скорости \underline{u} , поэтому уравнение принимает вид

$$m\underline{\dot{v}} = \underline{F}^{ext} + \dot{m}\underline{u} \quad (1^a)$$

или, если ввести т.н. реактивную силу $\underline{S} \equiv \dot{m}\underline{u}$, $m\underline{\dot{v}} = \underline{F}^{ext} + \underline{S}$.

Предположим, что $\underline{F}^{ext} = 0$, ракета движется поступательно и что относительная скорость истечения постоянна. Проецируя (1^a) на ось X, получим с учетом $u_x = -u$: $m \frac{dv_x}{dt} = -\frac{dm}{dt} u$.

Отсюда, интегрируя

$$v_x(t) = v_x(0) + u \cdot \ln \frac{m(0)}{m(t)}$$

Скорость ракеты, израсходовавшей все топливо, равна $v_x = v_x(0) + u \cdot \ln(1 + \frac{m_{\text{топл}}(0)}{m_*})$

Эту формулу опубликовал К.Э. Циолковский в 1903 г.

5.1.1. Центр масс. Теорема о движении центра масс.

Центром масс (центром инерции) тела называется точка \mathbf{C} , вектор положения которой задается формулой

$$\underline{R}_C \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\int_{(m)} \underline{R} dm}{m} \quad (\text{или, для системы точек, } \underline{R}_C \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sum_{(k)} m_k \underline{R}_k}{m}), \quad (5.6)$$

где m - масса всего тела, \underline{R} - вектор положения элемента dm .

Далее будем рассматривать закрытое тело.

Перепишем определение (5.6) в виде $m \underline{R}_C = \int_{(m)} \underline{R} dm$ и продифференцируем по времени:

$$m \dot{\underline{R}}_C = \int_{(m)} \dot{\underline{R}} dm \stackrel{\text{def}}{=} \underline{Q}.$$

Получили, что *количество движения (импульс) тела равен произведению массы тела на скорость центра масс:*

$$\underline{Q} = m \underline{V}_C \quad (5.7)$$

Подставляя это выражение в закон (5.1), будем иметь

$$m \underline{W}_C = \underline{F}^{ext}, \quad (5.8)$$

и, сравнивая с уравнением второго закона Ньютона, приходим к теореме о движении центра масс: *центр масс тела движется как материальная точка с массой всего тела под действием силы, равной главному вектору внешних сил.*

Если $\underline{F}^{ext} = \mathbf{0}$, то скорость центра масс постоянна $\underline{V}_C = \underline{C}_1$, $\underline{R}_C = \underline{C}_1 t + \underline{C}_2$

Другой пример. Из школьной физики известно, что при пренебрежении сопротивлением воздуха траектория снаряда, на которого действует сила тяжести – парабола. Из (5.8) следует, что при его взрыве в полете центр масс разлетевшихся осколков будет двигаться по той же траектории.

Центр масс обладает любопытным свойством: величина

$$I^A \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{(k)} m_k |\underline{R}_k - \underline{R}_A|^2 \quad (\text{или } I^A \stackrel{\text{def}}{=} \int_{(m)} |\underline{R} - \underline{R}_A|^2 dm)$$

- сумма произведений масс точек тела на квадраты расстояний до точки А, называемая полярным моментом инерции тела в точке А, минимальна, если в качестве точки А взять центр масс; иными словами, если в качестве меры расстояния принять произведение массы на квадрат расстояния до точки, то центр масс – точка, «ближайшая» ко всем точкам тела.

Заменим квадрат модуля скалярным произведением

$$I^A = \sum_{(k)} m_k (\underline{R}_k - \underline{R}_A) \cdot (\underline{R}_k - \underline{R}_A) = \sum_{(k)} m_k \underline{R}_k \cdot \underline{R}_k - 2 \underline{R}_A \cdot \sum_{(k)} m_k \underline{R}_k + \underline{R}_A \cdot \underline{R}_A \sum_{(k)} m_k$$

и, рассматривая I^A как функцию \underline{R}_A , найдем дифференциал

$$dI^A = 2 d\underline{R}_A \cdot (m \underline{R}_A - \sum_{(k)} m_k \underline{R}_k).$$

Необходимое условие экстремума (в данном случае минимума) – равенство $dI^A = 0$, откуда вследствие

произвольности $d\underline{R}_A$ получим $\underline{R}_A = \frac{\sum_{(k)} m_k \underline{R}_k}{m} \equiv \underline{R}_C$

5.1.2. Уравнения динамики относительного движения материальной точки. Силы инерции.

Как уже отмечалось, уравнение 1-го ФЗМ для материальной точки имеет вид второго закона Ньютона (точку считаем закрытым телом)

$$m\underline{W}_a = \underline{F}. \quad (5.9)$$

По теореме о сложении ускорений $\underline{W}_a = \underline{W}_e + \underline{W}_r + \underline{W}_{cor}$, $\underline{W}_{cor} \stackrel{\text{def}}{=} 2 \underline{\omega} \times \underline{V}_r$, поэтому (5.9) можем записать в виде

$$m\underline{W}_r = \underline{F} + (-m\underline{W}_e) + (-m\underline{W}_{cor}), \quad (5.10)$$

где величины $\underline{S}_e \stackrel{\text{def}}{=}} (-m\underline{W}_e)$, $\underline{S}_{cor} \stackrel{\text{def}}{=} (-m\underline{W}_{cor})$ по определению называются соответственно переносной и кориолисовой силами инерции.

Эти силы называют Эйлеровыми силами инерции, поскольку Эйлер получил их формулы в своих исследованиях законов движения жидкости во вращающихся каналах.

Силы инерции тождественно равны нулю в системах отсчета, движущихся поступательно и равномерно относительно исходной инерциальной. Эти системы образуют класс инерциальных систем отсчета.

Если наблюдатель в какой-либо системе отсчета обнаружит явления, противоречащие законам механики, в которых движения тел зависят от воздействий со стороны других *физических тел*, то либо не все воздействия учтены, либо его система отсчета неинерциальная.

Пример 1. Маятник Фуко.

Впервые публичная демонстрация была осуществлена французским физиком и астрономом [Жаком Фуко](#) в 1851г. в [Парижском Пантеоне](#): под куполом Пантеона он подвесил металлический шар массой 28 кг с закреплённым на нём остриём на стальной проволоке длиной 67м, крепление маятника позволяло ему свободно колебаться во всех направлениях, под точкой крепления было сделано круговое ограждение диаметром 6 метров, по краю ограждения была насыпана песчаная дорожка таким образом, чтобы маятник в своём движении мог при её пересечении прочерчивать на песке отметки. Чтобы избежать бокового толчка при пуске маятника, его отвели в сторону и привязали верёвкой, после чего верёвку пережгли.

Маятник [Фуко](#) в Парижском Пантеоне



Период колебания маятника при такой длине подвеса составлял 16,4 секунд, при каждом колебании отклонение от предыдущего пересечения песчаной дорожки составляло ~3 мм, за час плоскость колебаний маятника повернулась более чем на 11° по часовой стрелке, то есть примерно за 32 часа совершила полный оборот и вернулась в прежнее положение.

Для качественного понимания причины поворота плоскости колебаний поместим маятник на Северном полюсе и сообщим ему начальную скорость \underline{V}_0 .

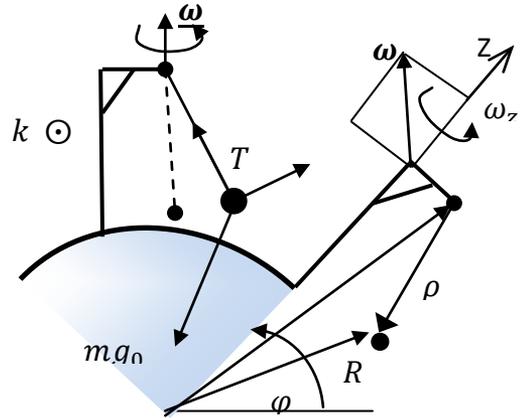
В инерциальной системе отсчета, в качестве которой можно взять систему, связанную с «неподвижными» звездами, уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{\underline{R}} = m\underline{g}_0 + \underline{T}, \quad (5.11)$$

где \underline{R} - вектор положения маятника с началом в неподвижной точке системы отсчета

(например, в центре Земли), \underline{T} - натяжение нити, а $m\underline{g}_0$ - гравитационное притяжение Земли.

Ясно, что если начальная скорость лежит в плоскости $m\underline{g}_0$ и \underline{T} , то маятник не выйдет из постоянной в инерциальной системе плоскости колебаний, что с точки зрения земного наблюдателя воспринимается как вращение этой плоскости по часовой стрелке с угловой скоростью ω . Если же маятник находится на широте φ , то плоскость колебаний вращается с угловой скоростью $\omega_z = \omega \sin \varphi$.



Рассматривая движение маятника как сложное, состоящее из переносного вместе с Землей и относительного, запишем уравнение в виде (5.10)

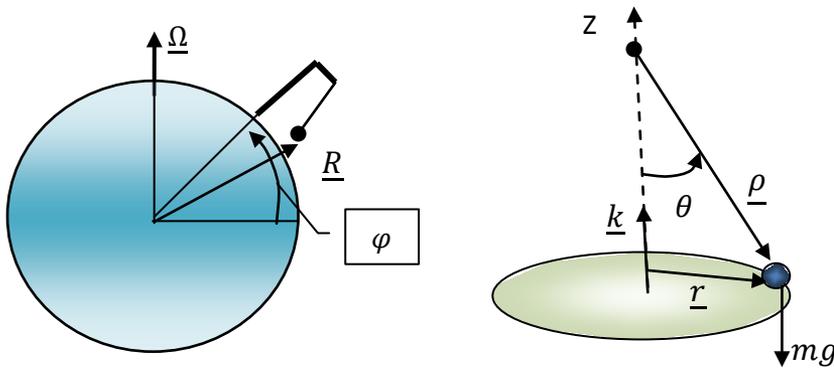
$$m\underline{W}_r = \underline{T} + m\underline{g} + (-m\underline{W}_{cor}), \quad \underline{W}_{cor} \stackrel{\text{def}}{=} 2 \underline{\omega} \times \underline{V}_r, \quad \text{где}$$

сумма $m\underline{g} \stackrel{\text{def}}{=} m\underline{g}_0 + (-m\underline{W}_e) = m\underline{g}_0 + (-m\underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{R}))$ – сила тяжести на данной широте.

Решение этого уравнения даже в линейном приближении довольно громоздко, (смотри ниже), поэтому пока ограничимся тем, что «добавочная» сила инерции Кориолиса $(-2m \underline{\omega} \times \underline{V}_r)$

направлена перпендикулярно скорости вправо, если смотреть вслед маятнику, чем и объясняется вращение плоскости колебаний по часовой стрелке. Заметим также, что линейное приближение дает ту же угловую скорость вращения $\omega_z = \omega \sin \varphi$.

Маятник Фуко (точное решение линейной задачи)



Рассматривая движение маятника как сложное, состоящее из переносного вместе с Землей и относительного, запишем уравнение в виде

$$m\underline{W}_r = \underline{T} + m\underline{g} + (-m\underline{W}_{cor}), \quad \underline{W}_{cor} \stackrel{\text{def}}{=} 2 \underline{\Omega} \times \underline{V}_r, \quad \text{или}$$

$$\underline{\ddot{\rho}} = \underline{g} + \frac{1}{m}\underline{T} - 2 \underline{\Omega} \times \underline{\dot{\rho}}, \quad (1)$$

где $\underline{T} = -\frac{T}{a} \underline{\rho}$, $|\underline{\rho}| = a$, сумма $m\underline{g} \stackrel{\text{def}}{=} m\underline{g}_0 + (-m\underline{W}_e) = m\underline{g}_0 + (-m\underline{\Omega} \times (\underline{\Omega} \times \underline{R}))$ – сила тяжести на данной широте φ .

Представим вектор угловой скорости Земли в виде $\underline{\Omega} = \Omega_z \underline{k} + \underline{\tilde{\Omega}}$ и, удерживая линейные относительно \underline{r} (и θ) величины, будем иметь

$$\underline{\rho} = -a \cos \theta \underline{k} + \underline{r} \cong -a \underline{k} + \underline{r}, \quad \text{где } \underline{r} \text{ – горизонтальная составляющая вектора положения,}$$

$$\underline{\dot{\rho}} = \underline{\dot{r}}, \quad \underline{T} \approx -\frac{T}{a} \underline{r} + T \underline{k}, \quad \underline{\Omega} \times \underline{\dot{\rho}} = \Omega_z \underline{k} \times \underline{\dot{r}} + \underline{\tilde{\Omega}} \times \underline{\dot{r}},$$

где подчеркнутое слагаемое параллельно \underline{k} .

Из проекции уравнения (1) на ось Z получим $T \approx mg$, а «плоская» часть примет вид

$$\underline{\ddot{r}} + 2\Omega_z \underline{k} \times \underline{\dot{r}} + \omega^2 \underline{r} = 0, \quad \text{где } \omega^2 \equiv \frac{g}{a}. \quad (2)$$

Решение уравнения (2) будем искать в виде $\underline{r} = \underline{P}(-\Omega_z \underline{k} t) \cdot \underline{u}(t)$. Используя формулу Пуассона

$$\underline{\dot{P}} = (-\Omega_z \underline{k}) \times \underline{P}, \quad \text{получим}$$

$$\underline{\dot{r}} = (-\Omega_z \underline{k}) \times \underline{r} + \underline{P} \cdot \underline{\dot{u}},$$

$$\underline{\ddot{r}} = (-\Omega_z \underline{k}) \times \underline{\dot{r}} + (-\Omega_z \underline{k}) \times \underline{P} \cdot \underline{\dot{u}} + \underline{P} \cdot \underline{\ddot{u}} =$$

$$= (-\Omega_z \underline{k}) \times \underline{\dot{r}} + (-\Omega_z \underline{k}) \times (\underline{\dot{r}} - (-\Omega_z \underline{k}) \times \underline{r}) + \underline{P} \cdot \underline{\ddot{u}} =$$

$$= \underline{P} \cdot \underline{\ddot{u}} + (-2\Omega_z \underline{k}) \times \underline{\dot{r}} + \Omega_z^2 (-\underline{r}), \quad (\text{учли, что } \underline{k} \times (\underline{k} \times \underline{r}) = -\underline{r}).$$

Подставляя $\underline{\ddot{r}}$ в (2), получим $\underline{P} \cdot [\underline{\ddot{u}} + (\omega^2 - \Omega_z^2) \underline{u}] = 0$, или

$$\underline{\ddot{u}} + (\omega^2 - \Omega_z^2) \underline{u} = 0.$$

Решение этого уравнения $\underline{u}(t) = \underline{A} \cos \lambda t + \underline{B} \sin \lambda t$, где $\lambda^2 \equiv \omega^2 - \Omega_z^2 \approx \omega^2$, при произвольных \underline{A} и \underline{B} , то есть при произвольных начальных условиях, описывает движение по эллипсу. Решение уравнения (2) $\underline{r} = \underline{P}(-\Omega_z \underline{k} t) \cdot \underline{u}(t)$ описывает вращение этого эллипса по часовой стрелке с угловой скоростью Ω_z . При начальных условиях, осуществленных Фуко (отклонение и отпускание без начальной скорости) $\underline{r}(0) = \underline{r}_0$, $\underline{\dot{r}}(0) = \underline{v}_0 = 0$ находим $\underline{A} = \underline{r}_0$, $\underline{B} = \frac{1}{\lambda} \Omega_z \underline{k} \times \underline{r}_0 \approx 0$ и решение $\underline{r} = \underline{P}(-\Omega_z \underline{k} t) \cdot \underline{r}_0 \cos \lambda t$ можно трактовать как вращение плоскости колебаний маятника.

Пример 2. Отклонение снарядов (битва у Фолклендских островов).

В декабре 1914 г. произошло сражение между английской и немецкой эскадрами у Фолклендских островов (50° южной широты).

По свидетельству английского морского офицера немецкие корабли обстреливались с максимальной дистанции (порядка 15 км), причем снаряды ложились левее цели примерно на сотню ярдов (примерно 90 м), хотя были пристреляны еще в Англии (примерно на 50° северной широты).

Рассмотрим полет снаряда на широте φ .

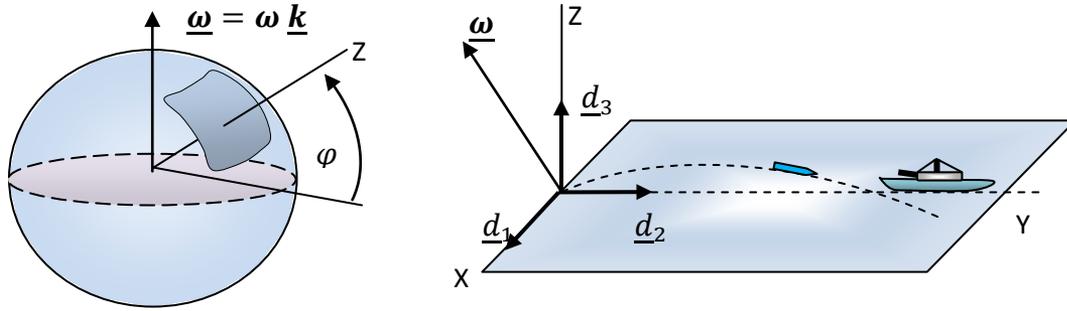


Рис 5.2. Отклонение снаряда

Уравнение динамики относительного движения

$$m \frac{d\underline{v}}{dt} = m\underline{g} + \underline{F}^{\text{ад}} + (-2m \underline{\omega} \times \underline{v}),$$

где \underline{v} – скорость снаряда относительно Земли, $m\underline{g}$ – сила тяжести, считающаяся постоянной в рассматриваемой области, $\underline{F}^{\text{ад}}$ – аэродинамическая сила.

Для простоты положим $\underline{F}^{\text{ад}} = 0$, тогда уравнение примет вид

$$\frac{d\underline{v}}{dt} = \underline{g} - 2 \underline{\omega} \times \underline{v}. \quad (5.11)$$

Это линейное дифференциальное уравнение может решено точно, мы построим здесь приближенное методом последовательных приближений.

Нулевое приближение получим, положив $\underline{\omega} = 0$:

$$\frac{d\underline{v}}{dt} = \underline{g}, \Rightarrow \underline{v} = \underline{g}t + \underline{v}_0 \quad (5.12)$$

Первое приближение получим, подставив (5.12) в правую часть (5.11):

$$\frac{d\underline{v}}{dt} = \underline{g} - 2 \underline{\omega} \times (\underline{g}t + \underline{v}_0). \Rightarrow \underline{v} = \underline{g}t + \underline{v}_0 - 2 \underline{\omega} \times \left(\frac{1}{2} \underline{g}t^2 + \underline{v}_0t \right). \quad (5.13)$$

Если ограничиться линейными членами относительно малой величины ω ($\omega \cong 0,727 \cdot 10^{-4}$), то этого приближения достаточно.

Сумма $\underline{g}t + \underline{v}_0$ – это движение тела без учета вращения Земли, слагаемое $(-\underline{\omega} \times \underline{g}t^2)$ объясняет отклонение падающих тел к востоку (в северном и южном полушариях); наконец, слагаемое $(-2 \underline{\omega} \times \underline{v}_0t)$ описывает отклонение снаряда вправо от направления стрельбы в северном полушарии и влево в южном. Чтобы оценить это отклонение, будем считать для простоты траекторию настильной, т.е. $\underline{v} \cong \underline{v}_0 + \dot{x}\underline{d}_1$, $\underline{v}_0 = v_0\underline{d}_2$.

Проинтегрируем это слагаемое и найдем проекцию вектора положения на направление оси x (вправо от направления стрельбы):

$$x = \underline{d}_1 \cdot (-\underline{\omega} \times \underline{v}_0t^2) = (\underline{d}_1 \times \underline{d}_2) \cdot \underline{k} \omega v_0t^2 = \omega v_0t^2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \omega v_0t^2 \sin \varphi.$$

В южном полушарии знак отрицательный, т.к. $(\underline{d}_1 \times \underline{d}_2) \cdot \underline{k} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -\sin \varphi$, и снаряд отклоняется влево, поэтому при стрельбе в южном полушарии из орудия, пристрелянного в северном, отклонение удваивается.

Точное решение уравнения (5.11) в учебниках отсутствует; возможно, причина в громоздкости, если решать его в координатном виде. В векторном виде решение проще.

Решение неоднородного уравнения

$$\frac{d\underline{v}}{dt} + 2 \underline{\omega} \times \underline{v} = \underline{g}$$

равно сумме решений однородного уравнения $\frac{d\underline{v}}{dt} + 2 \underline{\omega} \times \underline{v} = \underline{0}$ и частного решения.

Вспомнив формулу Пуассона (4.22) $\underline{\dot{P}} = \underline{\Omega} \times \underline{P}$, решение однородного уравнения немедленно запишем в виде $\underline{v}_{\text{одн}} = \underline{P}(-2 \underline{\omega} t) \cdot \underline{A}$, где \underline{A} - произвольный постоянный вектор. Частное решение найдем методом вариации произвольных постоянных:

$$\underline{v}_{\text{частн}} = \underline{P}(-2 \underline{\omega} t) \cdot \underline{B}(t).$$

Подставив это выражение в уравнение, будем иметь

$$\underline{P}(-2 \underline{\omega} t) \cdot \underline{\dot{B}}(t) = \underline{g}, \Rightarrow \underline{\dot{B}}(t) = \underline{P}^T(-2 \underline{\omega} t) \cdot \underline{g} = \underline{P}(2 \underline{\omega} t) \cdot \underline{g},$$

откуда $\underline{B}(t) = \int_0^t \underline{P}(2 \underline{\omega} t) \cdot \underline{g} dt$ (положили $\underline{B}(0) = 0$ и, следовательно, $\underline{A} = \underline{v}_0$).

. Записывая $\underline{\omega} = \omega \underline{k}$ и вспоминая представление Эйлера для тензора поворота

$$\underline{P}(\theta \underline{k}) = \underline{k} \underline{k} + (\underline{E} - \underline{k} \underline{k}) \cos \theta + \underline{k} \times \underline{E} \sin \theta, \text{ получим точное решение}$$

$$\underline{v}(t) = \underline{P}(-2 \underline{\omega} t) \cdot \left[\underline{v}_0 + (\underline{k} \cdot \underline{g}) \underline{k} \left(t - \frac{\sin 2 \omega t}{2 \omega} \right) + \frac{\sin 2 \omega t}{2 \omega} \underline{g} + \underline{k} \times \underline{g} (1 - \cos 2 \omega t) \right].$$

Разлагая тригонометрические функции в ряды и, удерживая члены с первой степенью ω , получим приближенное решение (5.13).

5.2. Второй фундаментальный закон механики - закон баланса момента количества движения (кинетического момента, момента импульса).

Скорость изменения кинетического момента относительно неподвижной точки равна главному моменту внешних воздействий плюс скорость подвода кинетического момента

$$\dot{\underline{K}}_A = \underline{M}_A^{ext} + \frac{\delta \underline{k}_A}{\delta t} \quad (5.14)$$

Кинетический момент (момент импульса) одной точки $\underline{K}_A \stackrel{\text{def}}{=} \underline{R} \times m\underline{V}$;

тела, состоящего из материальных точек $\underline{K}_A \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{(k)} \underline{R}_k \times (m_k \underline{V}_k)$; (5.15)

тела, занимающего какую-либо область в пространстве с непрерывно распределенной массой (континуального тела) $\underline{K}_A \stackrel{\text{def}}{=} \int_{(m)} \underline{R} \times \underline{V} dm$. (5.16)

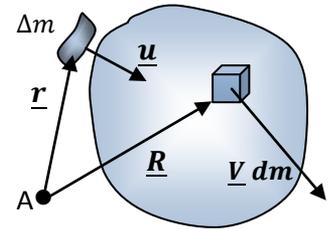
Скорость подвода момента количества движения в тело определяется как

$$\frac{\delta \underline{k}_A}{\delta t} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\underline{r} \times (\Delta m \underline{u})}{\Delta t},$$

где Δm –присоединяющаяся к телу за время Δt со скоростью \underline{u} масса.

Главным моментом внешних воздействий называется (см. рис.2.1. главы 2) сумма

$\underline{M}_A^{ext} \triangleq \sum_{(k)} \underline{R}_k \times \underline{F}_k + \int_{(m)} \underline{r}_* \times \underline{f}_* dm + \int_{(S)} \underline{r} \times \underline{f} dS + \sum_{(n)} \underline{L}_n$, где $\underline{F}_k, \underline{f}_*, \underline{f}$ - сосредоточенные, массовые, контактные силы соответственно, а \underline{L}_n – моменты.



Замечание 1. Третий закон Ньютона.

Из двух законов следует третий закон Ньютона для точек: $\underline{f}_{12} = -\underline{f}_{21}, \underline{f}_{12} \parallel (\underline{R}_2 - \underline{R}_1)$.

Запишем законы для каждой из точек и для системы из двух точек. Имеем:

$$(m_1 \underline{v}_1)^{\bullet} = \underline{f}_{12} + \underline{f}_1^{ext}, (m_2 \underline{v}_2)^{\bullet} = \underline{f}_{21} + \underline{f}_2^{ext}, (m_1 \underline{v}_1 + m_2 \underline{v}_2)^{\bullet} = \underline{f}_1^{ext} + \underline{f}_2^{ext} \quad (1)$$

$$\dot{\underline{K}}_{1A} = \underline{R}_1 \times (\underline{f}_{12} + \underline{f}_1^{ext}), \dot{\underline{K}}_{2A} = \underline{R}_2 \times (\underline{f}_{21} + \underline{f}_2^{ext}), (\underline{K}_{1A} + \underline{K}_{2A})^{\bullet} = \underline{R}_1 \times \underline{f}_1^{ext} + \underline{R}_2 \times \underline{f}_2^{ext} \quad (2)$$

Складывая первые два уравнения и вычитая третье, получим из (1) и (2)

$$\underline{f}_{12} = -\underline{f}_{21}, (\underline{R}_2 - \underline{R}_1) \times \underline{f}_{12} = \underline{0}.$$

Замечание 2. Теорема об изменении кинетического момента.

В механике Ньютона, где тела состоят из материальных точек, а силы взаимодействия между ними центральны и подчинены третьему закону Ньютона закон баланса момента количества движения (кинетического момента) доказывается как теорема об изменении момента количества движения.

Дифференцируя по времени момент (5.15), получим с помощью второго закона Ньютона для точки

$$m_k \dot{\underline{v}}_k = \underline{f}_k^{ext} + \sum_s \underline{f}_{ks}^{int}$$

$$\dot{\underline{K}}_A = \sum_{(k)} \underbrace{\dot{\underline{R}}_k \times (m_k \underline{v}_k)}_{=0} + \sum_{(k)} \underline{R}_k \times (m_k \dot{\underline{v}}_k) = \sum_{(k)} \underline{R}_k \times \underline{f}_k^{ext} + \underbrace{\sum_k \sum_s \underline{R}_k \times \underline{f}_{ks}^{int}}_{=0} = \underline{M}_A^{ext}.$$

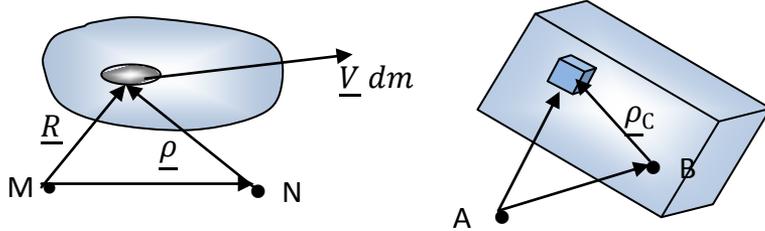
Последняя двойная сумма разбивается на равные нулю суммы пар слагаемых

$$\underline{R}_k \times \underline{f}_{ks}^{int} + \underline{R}_s \times \underline{f}_{sk}^{int} = (\underline{R}_k - \underline{R}_s) \times \underline{f}_{ks}^{int} = \underline{0}, \text{ т.к. } \underline{f}_{ks}^{int} \parallel (\underline{R}_k - \underline{R}_s).$$

5.2.1. Зависимость кинетического момента от выбора опорной точки. Кинетический момент твердого тела. Тензор инерции.

Хотя закон баланса кинетического момента сформулирован в инерциальной системе отсчета, сам кинетический момент может вычисляться в любой системе отсчета.

Рассмотрим любое (не обязательно твердое) тело и две произвольные, может быть подвижные, точки М и N.



Заменив $\underline{R} = \underline{MN} + \underline{\rho}$, немедленно получим $\underline{K}_M = \int_{(m)} \underline{R} \times \underline{V} dm = \underline{K}_N + \underline{MN} \times \int_{(m)} \underline{V} dm$

или, вспоминая определение количества движения $\underline{Q} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{(m)} \underline{V} dm \equiv m \underline{V}_c$,

$$\underline{K}_M = \underline{K}_N + \underline{MN} \times \underline{Q} = \underline{K}_N + \underline{MN} \times (m \underline{V}_c) \quad (5.17)$$

Рассмотрим движение твердого тела в любой (не обязательно инерциальной) системе отсчета. Найдем кинетический момент относительно какой-либо точки В, принадлежащей телу (т.е. движущейся вместе с телом).

Подставим в определение (5.16) $\underline{K}_B \stackrel{\text{def}}{=} \int_{(m)} \underline{\rho} \times \underline{V} dm$ основную формулу кинематики твердого тела $\underline{V} = \underline{V}_B + \underline{\omega} \times \underline{\rho}$, взяв за полюс точку В:

$$\underline{K}_B \stackrel{\text{def}}{=} \int_{(m)} \underline{\rho} \times (\underline{V}_B + \underline{\omega} \times \underline{\rho}) dm = (\int_{(m)} \underline{\rho} dm) \times \underline{V}_B + \int_{(m)} \underline{\rho} \times (\underline{\omega} \times \underline{\rho}) dm.$$

Вспоминая определение центра масс $m \underline{\rho}_c \stackrel{\text{def}}{=} \int_{(m)} \underline{\rho} dm$, первое слагаемое запишем в виде

$$(\int_{(m)} \underline{\rho} dm) \times \underline{V}_B = m \underline{\rho}_c \times \underline{V}_B = \underline{BC} \times (m \underline{V}_B).$$

Во втором слагаемом раскроем двойное векторное произведение:

$$\int_{(m)} \underline{\rho} \times (\underline{\omega} \times \underline{\rho}) dm = \int_{(m)} [\underline{\omega} (\underline{\rho} \cdot \underline{\rho}) - \underline{\rho} (\underline{\rho} \cdot \underline{\omega})] dm = \int_{(m)} [\underline{\omega} \rho^2 - \underline{\rho} (\underline{\rho} \cdot \underline{\omega})] dm.$$

Независящий от переменных интегрирования вектор угловой скорости $\underline{\omega}$ вынесем из интеграла со знаком скалярного умножения, представив $\underline{\omega} \equiv \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\omega}$, где, напомним, $\underline{\underline{E}}$ — единичный тензор, представимый в ортонормированном базисе в виде $\underline{\underline{E}} = \underline{d}_k \underline{d}_k$. Тогда

$$\int_{(m)} [\underline{\omega} \rho^2 - \underline{\rho} (\underline{\rho} \cdot \underline{\omega})] dm = \left[\int_{(m)} (\rho^2 \underline{\underline{E}} - \underline{\rho} \underline{\rho}) dm \right] \cdot \underline{\omega},$$

Описывающий распределение массы вокруг точки В интеграл называется *тензором инерции тела в точке В (или относительно точки В)*:

$$\underline{\underline{J}}^B \stackrel{\text{def}}{=} \int_{(m)} (\rho^2 \underline{\underline{E}} - \underline{\rho} \underline{\rho}) dm. \quad (5.18)$$

Таким образом, кинетический момент твердого тела относительно принадлежащей ему точки, называемый *собственным кинетическим моментом*, имеет вид

$$\underline{K}_B = m \underline{\rho}_c \times \underline{V}_B + \underline{\underline{J}}^B \cdot \underline{\omega}, \quad (\underline{\rho}_c \equiv \underline{BC}) \quad (5.19)$$

Формула упрощается, если в качестве полюса В выбрать центр масс: тогда $\underline{\rho}_c = 0$ и

$$\underline{K}_C = \underline{\underline{J}}^C \cdot \underline{\omega}, \quad (5.20)$$

где тензор инерции тела относительно центра масс $\underline{\underline{J}}^C$ называется *центральной*.

Если тело вращается вокруг неподвижной точки В, то

$$\underline{\underline{K}}_B = \underline{\underline{J}}^B \cdot \underline{\underline{\omega}}. \quad (5.21)$$

Теперь, если нам нужно найти кинетический момент относительно какой-либо точки, например, относительно неподвижной точки А, достаточно воспользоваться формулой (5.17)

$$\underline{\underline{K}}_A = \underline{\underline{K}}_B + \underline{\underline{AB}} \times (m\underline{\underline{V}}_C). \quad (5.22)$$

5.2.2. Постоянный тензор инерции. Осевые и центробежные моменты инерции. Вычисление моментов инерции относительно произвольных осей.

Из определения тензора инерции $\underline{\underline{J}}^B \stackrel{\text{def}}{=} \int_{(m)} (\rho^2 \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{\rho}} \underline{\underline{\rho}}) dm$, вычисляемого в актуальном положении твердого тела, ясно, что тензор инерции зависит от времени.

Разложим вектор $\underline{\underline{\rho}}$ и единичный тензор по базису $\underline{\underline{D}}_1, \underline{\underline{D}}_2, \underline{\underline{D}}_3$, жестко связанному с телом:

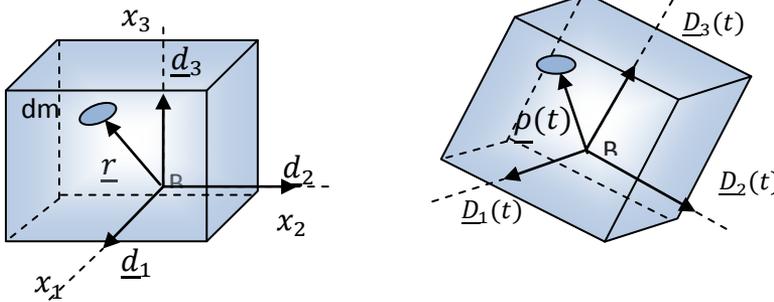
$$\underline{\underline{\rho}} = x_s \underline{\underline{D}}_s, \quad \rho^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \quad \underline{\underline{\rho}} \underline{\underline{\rho}} = x_s x_k \underline{\underline{D}}_s \underline{\underline{D}}_k, \quad \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{D}}_s \underline{\underline{D}}_s.$$

Тогда тензор инерции примет вид $\underline{\underline{J}}^B(t) = I_{sk} \underline{\underline{D}}_s \underline{\underline{D}}_k$, где координаты I_{sk} постоянные, а переменные $\underline{\underline{D}}_s(t)$ и $\underline{\underline{\rho}}$ – это повернутые вместе с телом постоянные векторы $\underline{\underline{d}}_s$ и $\underline{\underline{r}} = x_s \underline{\underline{d}}_s$ в отсчетном (например, при $t=0$) положении. Таким образом, $\underline{\underline{J}}^B(t)$ – это повернутый вместе с телом («вмороженный» в тело) постоянный тензор инерции

$$\underline{\underline{I}}^B \equiv \underline{\underline{J}}^B(0) = \int_{(m)} (r^2 \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{r}} \underline{\underline{r}}) dm = I_{sk} \underline{\underline{d}}_s \underline{\underline{d}}_k. \quad (5.23)$$

Последнее предложение с помощью тензора поворота «переводится» в формулу

$$\underline{\underline{J}}^B(t) = \underline{\underline{P}}(t) \cdot \underline{\underline{I}}^B \cdot \underline{\underline{P}}^T(t).$$



Далее мы будем говорить о постоянном тензоре $\underline{\underline{I}}^B = I_{sk} \underline{\underline{d}}_s \underline{\underline{d}}_k$, координаты которого называются *моментами инерции*.

Из (5.23) ясно, что тензор инерции симметричный $(\underline{\underline{I}}^B)^T = \underline{\underline{I}}^B$, т.е. $I_{sk} = I_{ks}$.

Формально координаты I_{mn} тензора в ортонормированном базисе вычисляются с помощью скалярного умножения тензора слева на $\underline{\underline{d}}_m$, а справа на $\underline{\underline{d}}_n$:

$$I_{mn} = \underline{\underline{d}}_m \cdot \underline{\underline{I}}^B \cdot \underline{\underline{d}}_n. \quad (5.24)$$

Из (5.23) имеем:

$$\begin{cases} I_{11} = \underline{d}_1 \cdot \underline{I}^B \cdot \underline{d}_1 = \int_{(m)} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1^2) dm = \int_{(m)} (x_2^2 + x_3^2) dm = \int_{(m)} h_1^2 dm \\ I_{22} = \underline{d}_2 \cdot \underline{I}^B \cdot \underline{d}_2 = \int_{(m)} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_2^2) dm = \int_{(m)} (x_1^2 + x_3^2) dm = \int_{(m)} h_2^2 dm, \\ I_{33} = \underline{d}_3 \cdot \underline{I}^B \cdot \underline{d}_3 = \int_{(m)} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_3^2) dm = \int_{(m)} (x_1^2 + x_2^2) dm = \int_{(m)} h_3^2 dm \end{cases} \quad (5.25)$$

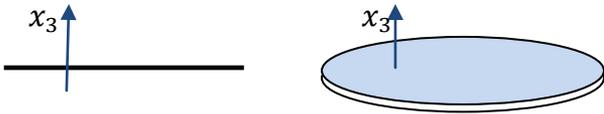
где h_k^2 – квадрат расстояния от элемента dm до «К»-ой оси,

$$\begin{cases} I_{12} = I_{21} = \underline{d}_1 \cdot \underline{I}^B \cdot \underline{d}_2 = \int_{(m)} (-x_1 x_2) dm \\ I_{13} = I_{31} = \underline{d}_1 \cdot \underline{I}^B \cdot \underline{d}_3 = \int_{(m)} (-x_1 x_3) dm \\ I_{23} = I_{32} = \underline{d}_2 \cdot \underline{I}^B \cdot \underline{d}_3 = \int_{(m)} (-x_2 x_3) dm \end{cases} \quad (5.26)$$

Моменты инерции (5.25) называются *осевыми*, а (5.26) - *центробежными*.

Из (5.25) следуют своеобразные «правила треугольника»

$$I_{nn} + I_{kk} \geq I_{ss}, \quad (n \neq k \neq s).$$

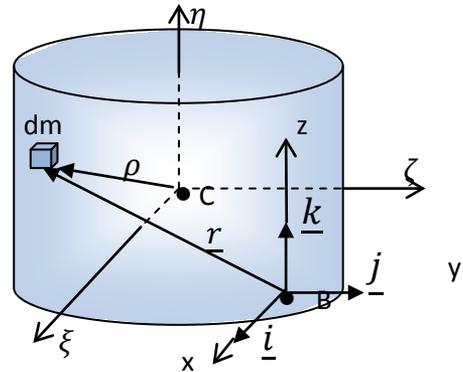


Например, $I_{11} + I_{22} = \int_{(m)} (x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2) dm = I_{33} + \underbrace{2 \int_{(m)} (x_3^2) dm}_{\geq 0} \geq I_{33},$

причем ясно, что равенство возможно только в тех случаях, когда у всех точек тела координата $x_3 = 0$; например, если тело – бесконечно тонкий стержень или бесконечно тонкая пластина.

5.2.3. Зависимость тензора инерции от точки (обобщенная теорема Гюйгенса- Штейнера).

Для описания движения твердых тел необходимо вычислять тензор инерции относительно разных точек. Так, например, тело может вращаться вокруг различных неподвижных точек и, соответственно, осей. Чтобы избавиться от необходимости каждый раз вычислять интегралы (5.25), (5.26), найдем связь между центральным тензором инерции \underline{I}^C , который является неотъемлемым, вычисленным или измеренным атрибутом тела, и тензором инерции в некоторой точке \underline{I}^B .



Подставляя в определение тензора $\underline{I}^B = \int_{(m)} (r^2 \underline{E} - \underline{r} \underline{r}) dm$ выражения $\underline{r} = \underline{BC} + \underline{\rho}$, $r^2 = \underline{r} \cdot \underline{r} = BC^2 + \rho^2 + 2\underline{BC} \cdot \underline{\rho}$, $\underline{r} \underline{r} = \underline{BC} \underline{BC} + \underline{BC} \underline{\rho} + \underline{\rho} \underline{BC} + \underline{\rho} \underline{\rho}$, получим $\underline{I}^B = \int_{(m)} (\rho^2 \underline{E} - \underline{\rho} \underline{\rho}) dm + m [BC^2 \underline{E} - \underline{BC} \underline{BC}] + \underbrace{\dots}_{0}$

Все невыписанные слагаемые равны нулю, поскольку они содержат равный нулю множитель $\int_{(m)} \underline{\rho} dm \stackrel{\text{def}}{=} m \underline{\rho}_c = 0$ (постоянный вектор \underline{BC} и тензор \underline{E} выносятся из интегралов). Таким образом, получили *обобщенную теорему Гюйгенса- Штейнера*

$$\underline{\underline{I}}^B = \underline{\underline{I}}^C + m \left[BC^2 \underline{\underline{E}} - \underline{BC} \underline{BC} \right]. \quad (5.27)$$

Пусть x, y, z - оси с началом в точке В и базисными векторами $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$, а $\underline{\xi}, \underline{\zeta}, \underline{\eta}$ - параллельные им оси с началом в центре масс (*центральные оси*) с координатами x_C, y_C, z_C . Умножая (5.27) слева и справа скалярно на \underline{i} , получим формулу связи для осевых моментов инерции

$$\begin{aligned} \underline{i} \cdot \underline{\underline{I}}^B \cdot \underline{i} &= \underline{i} \cdot \underline{\underline{I}}^C \cdot \underline{i} + m \left[BC^2 \underline{i} \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \underline{i} - (\underline{i} \cdot \underline{BC})(\underline{BC} \cdot \underline{i}) \right] \quad \text{или} \\ I_{xx}^B &= I_{\xi\xi}^C + m [BC^2 - x_c^2] = I_{\xi\xi}^C + m [y_c^2 + z_c^2] = I_{\xi\xi}^C + m a^2, \end{aligned} \quad (5.28)$$

где a^2 - квадрат расстояния между осями X и ξ .

Умножая (5.27) слева на \underline{i} и справа на \underline{j} , получим формулу связи для центробежных моментов инерции

$$\begin{aligned} \underline{i} \cdot \underline{\underline{I}}^B \cdot \underline{j} &= \underline{i} \cdot \underline{\underline{I}}^C \cdot \underline{j} + m \left[BC^2 \underbrace{\underline{i} \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \underline{j}}_0 - (\underline{i} \cdot \underline{BC})(\underline{BC} \cdot \underline{j}) \right] \quad \text{или} \\ I_{xy}^B &= I_{\xi\zeta}^C + m [-x_C y_C]. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Разумеется, формулы (5.28) и (5.29) легко записываются и для других осей. Заметим также, что поскольку осевые моменты инерции не зависят от положения точек на осях, часто в формулах (5.28) «имена» точек В и С опускаются. Из (5.28) следует, что осевые моменты инерции минимальны, если оси центральные (вспомним о центре масс, как о точке, «ближайшей» ко всем точкам тела).

5.2.4. Главные оси и главные моменты инерции.

Начнем с определения:

Если для тензора второго ранга $\underline{\underline{A}}$ существует вектор \underline{e} , $|\underline{e}| = 1$ такой, что $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{e} = \lambda \underline{e}$, то число λ называется главным (собственным) значением тензора, \underline{e} - собственным вектором, а ось, задаваемая \underline{e} - главной осью тензора.

Теорема о приведении тензора инерции к главным осям.

Тензор инерции, как и любой симметричный тензор, имеет тройку *ортогональных* собственных векторов $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ и тройку *вещественных* собственных значений (главных моментов) I_1, I_2, I_3 , причем:

1. Если собственные значения различны, то собственные векторы определяются единственным образом и тензор инерции имеет вид

$$\underline{\underline{I}} = I_1 \underline{e}_1 \underline{e}_1 + I_2 \underline{e}_2 \underline{e}_2 + I_3 \underline{e}_3 \underline{e}_3$$

2. Если два собственных значения равны, например $I_1 = I_2 \equiv I \neq I_3$, то однозначно определяется собственный вектор \underline{e}_3 , а \underline{e}_1 и \underline{e}_2 - любые перпендикулярные к \underline{e}_3 (и друг к другу); в этом случае $\underline{\underline{I}} = I(\underline{e}_1 \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \underline{e}_2) + I_3 \underline{e}_3 \underline{e}_3 \equiv I_3 \underline{e}_3 \underline{e}_3 + I(\underline{\underline{E}} - \underline{e}_3 \underline{e}_3)$.

Такой тензор называется *трансверсально-изотропным*; он не изменяется, если тело вращать вокруг оси изотропии, задаваемой \underline{e}_3 .

3. Если равны все собственные значения $I_1 = I_2 = I_3 \equiv I$, то $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ - любая ортонормированная тройка и тензор инерции называется *шаровым*

$$\underline{\underline{I}} = I(\underline{e}_1 \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \underline{e}_3) = I \underline{\underline{E}}$$

Эта теорема доказывается в курсе линейной алгебры как теорема о собственных числах (значениях) и собственных векторах симметричной матрицы.

Применительно к тензору инерции ее содержание сводится к тому, что существует, по меньшей мере, одна тройка главных осей, т.е. осей, относительно которых центробежные моменты инерции равны нулю и тензор инерции в этих осях имеет вид

$$\underline{\underline{I}} = I_1 \underline{e}_1 \underline{e}_1 + I_2 \underline{e}_2 \underline{e}_2 + I_3 \underline{e}_3 \underline{e}_3$$

. Поскольку ориентация тройки осей задается **тремя** параметрами (например, углами Эйлера), то существует возможность сделать равными нулю **три** центробежных момента.

В некоторых случаях, когда тело обладает каким – либо видом симметрии, то согласно физическому принципу Кюри-Неймана этой же симметрией должен обладать и тензор инерции; тогда главные оси могут быть найдены из соображений симметрии.

Так, например, если тело обладает плоскостью симметрии BXZ , то перпендикулярная ей ось Y является главной (рис.5.3а). Действительно, центробежные моменты $I_{xy}^B = \int_{(m)} xy \, dm$

и $I_{yz}^B = \int_{(m)} yz \, dm$ равны нулю, поскольку каждому элементу dm с координатами (x, y, z) соответствует симметричный с координатами $(x, -y, z)$.

Если имеется еще одна плоскость симметрии BYZ , перпендикулярная первой, то ось X (а, следовательно, и Z) тоже главная: $I_{xy}^B = \int_{(m)} xy \, dm = 0$ и $I_{xz}^B = \int_{(m)} xz \, dm = 0$, так что тензор инерции для любой точки B , находящейся на линии пересечения этих плоскостей, имеет вид $\underline{\underline{I}}^B = I_{xx}^B \underline{i} \underline{i} + I_{yy}^B \underline{j} \underline{j} + I_{zz}^B \underline{k} \underline{k}$.

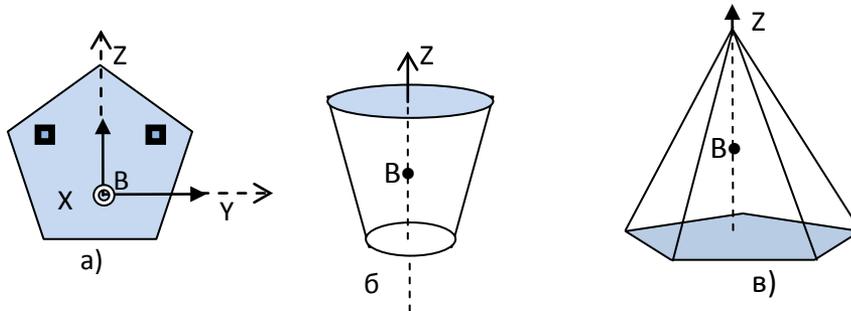


Рис. 5.3. Симметричные тела

Если тело осесимметричное (рис.5.3б), то любая плоскость, содержащая ось Z , является плоскостью симметрии и, в дополнение ко всему вышесказанному ясно, что $I_{xx}^B = I_{yy}^B \equiv I$; так что тензор инерции **трансверсально-изотропный**

$$\underline{\underline{I}}^B = I (\underline{\underline{E}} - \underline{k} \underline{k}) + I_{zz}^B \underline{k} \underline{k}$$

Если тело обладает осью симметрии « N » - го порядка, т.е. тело переходит «само в себя» при повороте на угол $\varphi = \frac{2\pi}{N}$, $N > 2$ (на рис.5.3в $N=5$), то можно доказать, что и в этом случае тензор инерции $\underline{\underline{I}}^B$ трансверсально-изотропный.

5.2.5. Эллипсоид инерции.

Тензору инерции, как и всякому симметричному тензору, можно сопоставить наглядный геометрический объект – так называемую тензорную поверхность.

Пусть $\underline{\underline{I}}^B$ – тензор инерции в точке В. Построим квадратичную форму и приравняем ее единице:

$$\underline{r} \cdot \underline{\underline{I}}^B \cdot \underline{r} = 1 \quad (5.30)$$

Это уравнение поверхности, описываемой вектором \underline{r} с началом в точке В, которая для положительного тензора является эллипсоидом. Действительно, записывая \underline{r} и $\underline{\underline{I}}^B$ в главных осях, получим:

$$\underline{\underline{I}}^B = I_1 \underline{e}_1 \underline{e}_1 + I_2 \underline{e}_2 \underline{e}_2 + I_3 \underline{e}_3 \underline{e}_3, \underline{r} = x \underline{e}_1 + y \underline{e}_2 + z \underline{e}_3,$$

$$\underline{r} \cdot \underline{\underline{I}}^B \cdot \underline{r} = I_1 x^2 + I_2 y^2 + I_3 z^2 = 1 \text{ или, в каноническом виде}$$

$$\left(\frac{x}{\frac{1}{\sqrt{I_1}}} \right)^2 + \left(\frac{y}{\frac{1}{\sqrt{I_2}}} \right)^2 + \left(\frac{z}{\frac{1}{\sqrt{I_3}}} \right)^2 = 1 \quad (5.31)$$

Уравнение (5.31) – уравнение эллипсоида с полуосями, равными $\frac{1}{\sqrt{I_k}}$

Так как протяженное в каком-либо направлении тело имеет относительно оси, совпадающей с этим направлением, наименьший момент инерции, то эллипсоид инерции приблизительно повторяет форму тела.

1. Найдем момент инерции $I_{\xi\xi}^B$ относительно оси ξ , задаваемой вектором $\underline{BM} = BM \underline{d}$, $|\underline{d}| = 1$. Имеем $\underline{BM} \cdot \underline{\underline{I}}^B \cdot \underline{BM} = BM^2 \underline{d} \cdot \underline{\underline{I}}^B \cdot \underline{d} = 1$, откуда

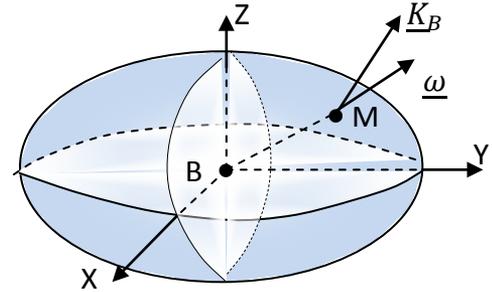
$$I_{\xi\xi}^B = \underline{d} \cdot \underline{\underline{I}}^B \cdot \underline{d} = 1/BM^2$$

2. Вычислим дифференциал от уравнения (5.30):

$2 \underline{dr} \cdot (\underline{\underline{I}}^B \cdot \underline{r}) = 0$, откуда следует, что вектор $(\underline{\underline{I}}^B \cdot \underline{r})$ перпендикулярен к эллипсоиду, поскольку вектор \underline{dr} лежит в касательной плоскости к поверхности.

Кинетический момент тела, вращающегося вокруг точки В, равен $\underline{K}_B = \underline{\underline{I}}^B \cdot \underline{\omega}$, поэтому \underline{K}_B направлен по нормали к поверхности эллипсоида в точке его пересечения с мгновенной осью вращения, проведенной через точку В.

3. Если тело обладает осью симметрии «N» - го порядка, т.е. переходит «само в себя» при повороте на угол $\varphi = \frac{2\pi}{N}$, $N > 2$ (рис.5.3в), то «вмороженный» в него эллипсоид инерции обладает тем же свойством и, следовательно, является эллипсоидом вращения с равными полуосями; т.е. тензор инерции $\underline{\underline{I}}^B$ трансверсально-изотропный.



5.2.6. Вычисление тензоров инерции некоторых тел (шар, цилиндр, конус).

1. Шар.

Центральный тензор инерции – шаровой: $\underline{\underline{I}}^C = I(\underline{e}_1 \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \underline{e}_3) = I \underline{\underline{E}}$.

Складывая моменты инерции, получим

$$I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} = 3I = 2 \int_{(m)} (x^2 + y^2 + z^2) dm = 2 \int_{(m)} r^2 dm$$

В качестве элемента массы dm возьмем массу шарового слоя толщиной dr : $dm = \rho dV$, где элементарный объем $dV = \rho \cdot 4\pi r^2 dr$, а плотность $\rho = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi(R^3 - a^3)}$.

. Тогда $I = \frac{2}{3} \int_{(m)} r^2 dm = \frac{2}{3} \cdot 4\pi\rho \int_{r=a}^{r=R} r^4 dr$ и окончательно $I = \frac{2}{5} m \frac{R^5 - a^5}{R^3 - a^3}$.

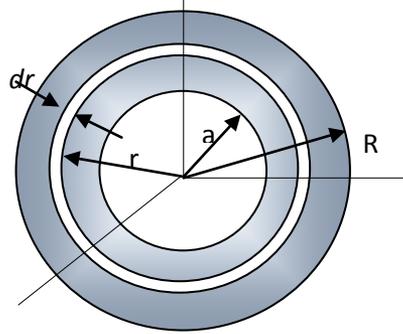
Рассмотрим частные случаи.

а) Шар: $a = 0$

$$I = \frac{2}{5} m R^2$$

б) Оболочка: $a \rightarrow R$

$$I = \lim_{a \rightarrow R} \frac{2}{5} m \frac{R^5 - a^5}{R^3 - a^3} = \frac{2}{3} m R^2$$



2. Полый прямой круговой цилиндр.

Найдем сначала $I_{zz} = \int_{(m)} (x^2 + y^2) dm = \int_{(m)} r^2 dm$.

Выделим двумя цилиндрическими поверхностями радиуса r и $r + dr$ трубку толщиной dr и от тройного интеграла перейдем к одинарному:

$$dm = 2\pi r h \cdot \rho; \quad \rho = \frac{m}{\pi(R^2 - a^2)h};$$

$$I_{zz} = 2\pi h \rho \int_a^R r^3 dr = m \frac{R^2 + a^2}{2}$$

Учитывая, что $I_{xx} = I_{yy}$, найдем сумму

$$I_{xx} + I_{yy} = 2I = \int_{(m)} (x^2 + y^2 + 2z^2) dm = 2 \int_{(m)} z^2 dm + I_{zz}.$$

Разделив цилиндр на пластинки толщиной dz и массой $dm = \frac{m}{h} dz$, найдем

$$\int_{(m)} z^2 dm = \frac{m}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz = \frac{mh^2}{12}.$$

$$\text{Итак, } I_{zz} = m \frac{R^2 + a^2}{2}, \quad I_{xx} = I_{yy} = \frac{mh^2}{12} + m \frac{R^2 + a^2}{4}$$

Рассмотрим частные случаи.

а) Сплошной цилиндр ($a = 0$): $I_{zz} = m \frac{R^2}{2}, \quad I_{xx} = I_{yy} = \frac{mh^2}{12} + m \frac{R^2}{4}$

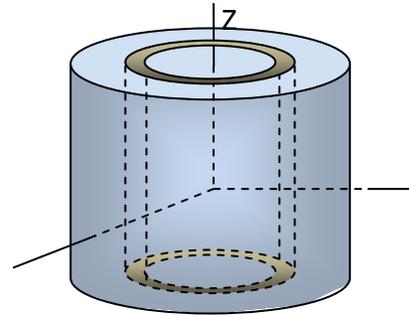
б) Оболочка ($a \rightarrow R$): $I_{zz} = mR^2, \quad I_{xx} = I_{yy} = \frac{mh^2}{12} + m \frac{R^2}{2}$

в) Пластинка ($h \rightarrow 0$): $I_{zz} = m \frac{R^2 + a^2}{2}, \quad I_{xx} = I_{yy} = m \frac{R^2 + a^2}{4}$

г) Стержень (бесконечно тонкий цилиндр) ($a \rightarrow 0, R \rightarrow 0$): $I_{zz} = 0, \quad I_{xx} = I_{yy} = \frac{mh^2}{12}$

3. Прямой круговой конус (радиус основания R , высота h , плотность $\rho = \frac{m}{V} = \frac{3m}{\pi R^2 h}$).

Найдем $I_{zz}^A = \int_{(m)} (x^2 + y^2) dm$.



Чтобы не вычислять тройной интеграл по x, y, z в декартовых координатах (или по r, φ, z в цилиндрических), разобьем конус на пластинки толщиной dz , радиуса $r = \frac{R}{h} z$ и моментом инерции $dI_{zz}^A = dm \frac{r^2}{2} = \rho \pi \frac{r^4}{2} dz = \frac{\rho \pi R^4}{2h^4} z^4 dz$,

Тогда $I_{zz}^A = \frac{\rho \pi R^4}{2h^4} \int_0^h z^4 dz = \frac{\rho \pi R^4 h}{10} = \frac{3}{10} m R^2$. Далее найдем сумму

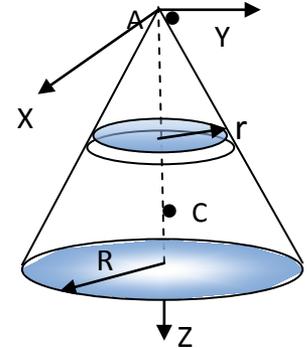
$$I_{xx}^A + I_{yy}^A = 2I = \int_{(m)} (x^2 + y^2 + 2z^2) dm = 2 \int_{(m)} z^2 dm + I_{zz}^A$$

и, вычислив интеграл $\int_{(m)} z^2 dm = \frac{\rho \pi R^2}{h^2} \int_0^h z^4 dz = \frac{3}{5} m h^2$, получим

$$I_{xx}^A = I_{yy}^A = I = \frac{3}{5} m h^2 + \frac{3}{10} m R^2.$$

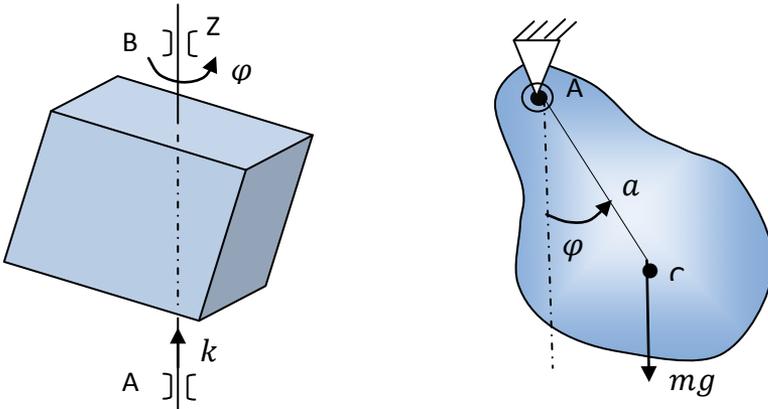
Моменты инерции относительно центральных осей вычисляются с помощью теоремы Гюйгенса-Штейнера ($AC = \frac{3}{4} h$):

$$I_{zz}^C = I_{zz}^A = \frac{3}{10} m R^2, \quad I_{xx}^C = I_{yy}^C = I - m \left(\frac{3}{4} h\right)^2 = \frac{3}{80} m h^2 + \frac{3}{20} m R^2$$



5.2.7. Дифференциальное уравнение вращения вокруг неподвижной оси. Физический маятник.

Пусть твердое тело вращается вокруг неподвижной оси Z.



Уравнение второго фундаментального закона имеет вид

$$\dot{K}_A = \underline{M}_A^{ext}, \quad \text{или} \quad \left(\underline{J}^A \cdot \underline{\omega} \right) \dot{\quad} = \underline{M}_A^{ext},$$

где точка A - любая точка на оси вращения, $\underline{\omega} \stackrel{\text{def}}{=} \dot{\varphi} \underline{k}$ - вектор угловой скорости.

Если нас интересует только угол поворота $\varphi(t)$, достаточно найти одну лишь проекцию на ось Z, для чего умножим скалярно обе части уравнения на \underline{k} и внесем его в производную:

$$\left[\left(\underline{k} \cdot \underline{J}^A \cdot \underline{k} \right) \dot{\varphi} \right] \dot{\quad} = \underline{k} \cdot \underline{M}_A^{ext}.$$

По определению, $\underline{k} \cdot \underline{J}^A \cdot \underline{k} = I_{zz}^A$ - осевой момент инерции, причем постоянный, а $\underline{k} \cdot \underline{M}_A^{ext}$ - момент относительно оси Z. Таким образом, получили дифференциальное уравнение вращения вокруг неподвижной оси:

$$I_{ZZ}^A \ddot{\varphi} = M_{AZ}^{ext} \quad (5.32)$$

Если ось подвеса горизонтальна и внешними воздействиями являются сила тяжести и, разумеется, опорные воздействия, с которыми ось подвеса действует на тело, то тело называют физическим маятником. В этом случае уравнение (5.32) принимает вид нелинейного уравнения

$$I_{ZZ}^A \ddot{\varphi} = -mga \sin \varphi,$$

которое может быть проинтегрировано либо численно, либо в так называемых эллиптических функциях. Уравнение малых колебаний, под которыми будут пониматься движения, описываемые линейными дифференциальными уравнениями, получим, положив $\sin \varphi \approx \varphi$:

$$\ddot{\varphi} + \lambda^2 \varphi = 0, \quad (5.33)$$

где обозначение $\lambda^2 \equiv \frac{mga}{I_{ZZ}^A}$ – квадрат собственной частоты.

Решение уравнения (5.33) имеет вид $\varphi = D_1 \sin \lambda t + D_2 \cos \lambda t$

где константы D_1 и D_2 определяются из начальных условий $\varphi(0) = \varphi_0, \dot{\varphi}(0) = \omega_0$.

Ясно, что измеряя собственную частоту λ (или период $T = \frac{2\pi}{\lambda}$), можно экспериментально найти момент инерции I_{ZZ}^A .

5.2.8. Дифференциальные уравнения произвольного движения твердого тела. Замена опорной точки во втором фундаментальном законе.

Уравнения первого и второго законов полностью описывают трансляционное и вращательное движения твердого тела:

$$\begin{cases} \underline{\dot{Q}} = \underline{F}^{ext} \\ \underline{\dot{K}}_A = \underline{M}_A^{ext} \end{cases} \quad (5.34)$$

Второму уравнению можно придать более удобный для решения вид.

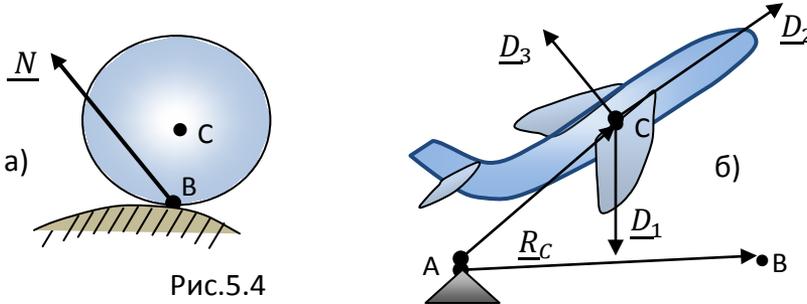


Рис.5.4

Кинетический момент относительно неподвижной точки А можем выразить через кинетический момент относительно какой – либо подвижной точки В (см. (5.17)):

$$\underline{K}_A = \underline{K}_B + \underline{AB} \times \underline{Q} = \underline{K}_B + \underline{AB} \times (m\underline{V}_C).$$

Аналогично $\underline{M}_A^{ext} = \underline{M}_B^{ext} + \underline{AB} \times \underline{F}^{ext}$.

Подставляя эти выражения во второе уравнение (5.34), получим с учетом $\underline{\dot{AB}} = \underline{V}_B, \underline{\dot{Q}} = \underline{F}^{ext}$

$$\underline{K}_B = \underline{M}_B^{ext} - \underline{V}_B \times (m\underline{V}_C). \quad (5.35)$$

В некоторых случаях уравнение (5.35) проще и удобнее применять.

1. В качестве подвижной точки можем взять не принадлежащую телу точку, например, точку касания поверхности катящегося (или скользящего) тела (рис.5.4а). В этом случае $\underline{V}_B \parallel (m\underline{V}_C)$, поэтому уравнение (5.35) упрощается:

$$\underline{\dot{K}}_B = \underline{M}_B^{ext},$$

и, кроме того, в уравнение *не войдут неизвестные реакции*, поскольку их момент относительно точки В равен нулю.

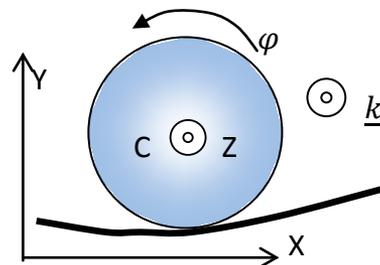
2. Если в качестве подвижной точки В взять центр масс, уравнение (5.35) примет вид

$$\underline{\dot{K}}_C = \underline{M}_C^{ext},$$

или, вспоминая (см.5.20), что $\underline{K}_C = \underline{J}^C \cdot \underline{\omega}$,

$$\left(\underline{J}^C \cdot \underline{\omega} \right)^{\bullet} = \underline{M}_C^{ext}.$$

(5.36)



Это уравнение полностью описывает вращательное движение и не отличается от уравнения, описывающего вращение вокруг неподвижной точки.

Таким образом, удобной в большинстве случаев системой уравнений, описывающих произвольное движение твердого тела является

$$\begin{cases} m \underline{\ddot{R}}_C = \underline{F}^{ext} & \text{(трансляционное движение)} \\ \left(\underline{J}^C \cdot \underline{\omega} \right)^{\bullet} = \underline{M}_C^{ext} & \text{(вращательное движение)} \end{cases} \quad (5.37)$$

Плоское движение.

Если тело совершает плоское движение, то $\underline{\omega} \stackrel{\text{def}}{=} \dot{\phi} \underline{k}$, где \underline{k} —единичный вектор, перпендикулярный плоскости движения.

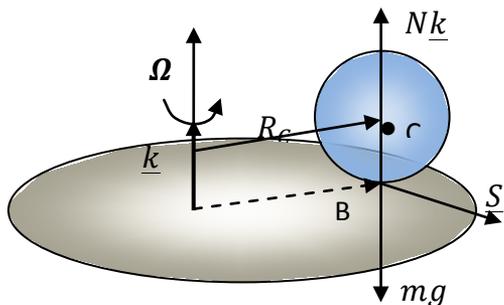
Первое уравнение в (5.37) проецируется на оси X и Y в плоскости движения, а второе скалярным умножением на \underline{k} проецируется на ось Z, проходящую через центр масс:

$$\left[\left(\underline{k} \cdot \underline{J}^C \cdot \underline{k} \right) \dot{\phi} \right]^{\bullet} = \underline{k} \cdot \underline{M}_C^{ext}.$$

С учетом $\underline{k} \cdot \underline{J}^C \cdot \underline{k} = I_{ZZ}^C$ имеем

$$\begin{cases} m \ddot{x}_C = F_x^{ext} \\ m \ddot{y}_C = F_y^{ext} \\ I_{ZZ}^C \ddot{\phi} = M_{CZ}^{ext} \end{cases} \quad (5.38)$$

Пример 1. Качение шара по вращающейся плоскости.



По вращающейся с угловой скоростью Ω платформе катится шарик массы m и радиуса r . Запишем уравнения динамики (5.36)

$$\begin{cases} m \underline{\ddot{R}}_C = \underline{F}^{ext} & \text{(трансляционное движение),} \\ \left(\underline{J}^C \cdot \underline{\omega} \right)^{\bullet} = \underline{M}_C^{ext} & \text{(вращательное движение).} \end{cases}$$

С учетом того, что тензор инерции шаровой $\underline{J}^C = I \underline{E}$, уравнения принимают вид

$$m\dot{\underline{V}}_C = \underline{F}^{ext} = \underbrace{m\underline{g} + N\underline{k}}_0 + \underline{S} \equiv \underline{S}, \quad (1)$$

$$I \dot{\underline{\omega}} = \underline{M}_C^{ext} = (-r\underline{k}) \times \underline{S}, \quad (2)$$

где \underline{S} – горизонтальная составляющая реакции платформы.

Добавим к (1),(2) условие отсутствия проскальзывания в точке касания В:

$$\underline{V}_C + \underline{\omega} \times (-r\underline{k}) = \underline{\Omega} \times \underline{R}_C \quad (3)$$

Исключим из уравнений все неизвестные, оставив только \underline{V}_C . Подставим \underline{S} из первого уравнения во второе, умножим его векторно справа на \underline{k} и, раскрывая двойное векторное произведение, получим

$$I [\underline{\omega} \times \underline{k}]^\bullet = -mr(\underline{k} \times \dot{\underline{V}}_C) \times \underline{k} \equiv -mr\dot{\underline{V}}_C.$$

Подставив в это уравнение найденное из (3) выражение $\underline{\omega} \times \underline{k} = \frac{1}{r}(\underline{V}_C - \underline{\Omega} \times \underline{R}_C)$, получим

$$\left(1 + \frac{mr^2}{I}\right) \dot{\underline{V}}_C = \underline{\Omega} \times \underline{V}_C \quad \text{или, обозначив} \quad \lambda = \frac{I \Omega}{I + mr^2}$$

$$\dot{\underline{V}}_C = \lambda \underline{k} \times \underline{V}_C$$

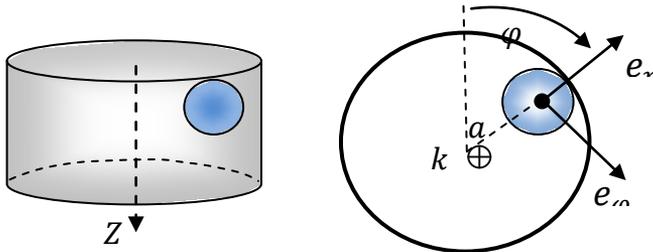
Подобное уравнение уже встречалось в (5.1.2) и решение его проще всего записать с помощью тензора поворота (напомним формулу Пуассона $\dot{\underline{P}} = \underline{\omega} \times \underline{P}$):

$$\underline{V}_C(t) = \underline{P}(\lambda t \underline{k}) \cdot \underline{V}_C(0)$$

Таким образом, постоянный по величине вектор скорости «вращается» с постоянной угловой скоростью λ вокруг \underline{k} ; нетрудно понять, что это возможно, только если центр масс движется по окружности, радиус которой можно найти, если проинтегрировать $\underline{V}_C(t)$ и подставить начальные условия

Пример 2. Качение шара по внутренней поверхности вертикального цилиндра.

Чтобы предотвратить проскальзывание, шарик массы m и радиуса r катится с достаточно большой окружной скоростью. Кажется правдоподобным, что траектория будет иметь вид спирали увеличивающейся крутизны.



Скорость и ускорение центра масс шарика в цилиндрической системе координат

$$\underline{V} = a\dot{\phi}\underline{e}_\phi + \dot{z}\underline{k}, \quad \underline{W} = \dot{\underline{V}} = -a\dot{\phi}^2\underline{e}_r + a\ddot{\phi}\underline{e}_\phi + \ddot{z}\underline{k} \quad (\dot{\underline{e}}_r = \dot{\phi}\underline{e}_\phi, \quad \dot{\underline{e}}_\phi = -\dot{\phi}\underline{e}_r). \quad (1)$$

Уравнения движения

$$m\dot{\underline{V}} = \underline{F}^{ext} = m\underline{g} + N\underline{e}_r + \underline{S}, \quad \underline{S} \perp \underline{e}_r, \quad (2)$$

$$I \dot{\underline{\omega}} = \underline{M}_C^{ext} = (r\underline{e}_r) \times \underline{S}, \quad (3)$$

где \underline{S} – лежащая в касательной плоскости в точке касания составляющая реакции.

Условие отсутствия проскальзывания

$$\underline{V} + \underline{\omega} \times (r\underline{e}_r) = 0, \quad (\text{в координатном виде} \quad \dot{z} = r\omega_\phi, \quad a\dot{\phi} = -r\omega_z) \quad (4)$$

дополним его производной

$$\dot{\underline{V}} + \dot{\underline{\omega}} \times (r\underline{e}_r) + \underline{\omega} \times (r\dot{\phi}\underline{e}_\phi) = 0. \quad (5)$$

Выразим из (2) $\underline{S} = m\underline{\dot{V}} - m\underline{g} - N\underline{e}_r$, подставим его в (3) и найдем $\underline{\dot{\omega}} = \frac{mr}{I} \underline{e}_r \times (\underline{\dot{V}} - \underline{g})$.

Подставляя полученное выражение в (5), с учетом

$$(\underline{e}_r \times \underline{\dot{V}}) \times \underline{e}_r = \underline{\dot{V}} - (\underline{\dot{V}} \cdot \underline{e}_r)\underline{e}_r, (\underline{e}_r \times \underline{g}) \times \underline{e}_r = \underline{g}$$

получим

$$\underline{\dot{V}} \left(1 + \frac{mr^2}{I}\right) - \frac{mr^2}{I} (\underline{\dot{V}} \cdot \underline{e}_r)\underline{e}_r - \frac{mr^2}{I} \underline{g} + r\dot{\varphi}(\underline{\omega} \times \underline{e}_\varphi) = 0. \quad (6)$$

Умножая скалярно уравнение (6) на $\underline{e}_\varphi, \underline{k}$, получим (проекция на \underline{e}_r равна нулю):

$$a\ddot{\varphi} \left(1 + \frac{mr^2}{I}\right) = 0 \quad (7)$$

$$\ddot{z} \left(1 + \frac{mr^2}{I}\right) - \frac{mgr^2}{I} + r\dot{\varphi} \underline{k} \cdot (\underline{\omega} \times \underline{e}_\varphi) = 0 \quad (8)$$

Из (7) следует немедленно $\dot{\varphi} = \lambda = const$, а в (8) величину $\underline{k} \cdot (\underline{\omega} \times \underline{e}_\varphi) = \underline{\omega} \cdot \underline{e}_r$ найдем через ее же производную: $(\underline{\omega} \cdot \underline{e}_r)^\bullet = \underline{\dot{\omega}} \cdot \underline{e}_r + \underline{\omega} \cdot \underline{e}_\varphi \dot{\varphi}$.

Первое слагаемое в силу (3) равно нулю, а второе с учетом (4) равно $\frac{\dot{z}}{r} \dot{\varphi} = \frac{\dot{z}}{r} \lambda$, так что

$\underline{\omega} \cdot \underline{e}_r = \frac{\dot{z}}{r} \lambda + C$ (константу можем принять равной нулю). Окончательно получим

$$\ddot{z} + \Omega^2 z = D, \text{ где обозначено } \Omega^2 = \frac{I\lambda^2}{I+mr^2}, D = \frac{mgr^2}{I+mr^2}$$

Решение этого уравнения имеет вид $z = A \sin(\Omega t + \alpha) + B$, (A, α – постоянные, определяемые из начальных условий) и показывает, что шарик совершает гармонические колебания по высоте (!). Игрокам в гольф и баскетболистам не так уж «не везет», когда шарик (мяч) выкатывается из лунки (из кольца).

5.2.9. Динамические реакции оси вращающегося тела. Пример

Пусть твердое тело вращается вокруг неподвижной оси Z под действием момента $M_{AZ} \equiv M$. Поскольку нас интересуют только реакции, возникающие при вращении тела (динамические реакции) и которые, собственно, и принуждают тело совершать плоское движение, прочие воздействия не рассматриваются. Уравнения первого и второго законов имеют вид

$$\begin{cases} \underline{\dot{Q}} = \underline{F}^{ext}, \text{ или } m\underline{\ddot{R}}_C = \underline{N}_A + \underline{N}_B \\ \underline{\dot{K}}_A = \underline{M}_A^{ext}, \text{ или } (\underline{J}^A \cdot \underline{\omega})^\bullet = \underline{R}_B \times \underline{N}_B \end{cases} \quad (5.39)$$

Найдем проекции (5.39) на оси X, Y, Z, связанные с телом. Имеем

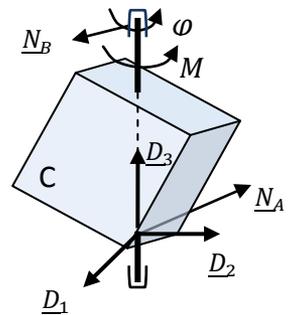
$$\underline{\omega} = \dot{\varphi} \underline{D}_3, \underline{\varepsilon} = \ddot{\varphi} \underline{D}_3, \underline{R}_C = x_C \underline{D}_1 + y_C \underline{D}_2 + z_C \underline{D}_3, \underline{R}_B = a \underline{D}_3,$$

$$\underline{\ddot{R}}_C = \underline{\varepsilon} \times \underline{R}_C + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{R}_C) = \underline{D}_1(-\ddot{\varphi} y_C - \dot{\varphi}^2 x_C) + \underline{D}_2(\ddot{\varphi} x_C - \dot{\varphi}^2 y_C),$$

$$\underline{\dot{D}}_1 = \underline{\omega} \times \underline{D}_1 = \dot{\varphi} \underline{D}_2, \underline{\dot{D}}_2 = \underline{\omega} \times \underline{D}_2 = -\dot{\varphi} \underline{D}_1,$$

$$(\underline{J}^A \cdot \underline{\omega})^\bullet = [(I_{xz}^A \underline{D}_1 + I_{yz}^A \underline{D}_2 + I_{zz}^A \underline{D}_3)\dot{\varphi}]^\bullet = \underline{D}_1(I_{xz}^A \ddot{\varphi} - I_{yz}^A \dot{\varphi}^2) + \underline{D}_2(I_{yz}^A \ddot{\varphi} + I_{xz}^A \dot{\varphi}^2) + I_{zz}^A \underline{D}_3 \ddot{\varphi},$$

$$\underline{R}_B \times \underline{N}_B = \underline{D}_1(-aN_{By}) + \underline{D}_2(aN_{Bx})$$



$$\left\{ \begin{array}{l} m(-\ddot{\varphi}y_C - \dot{\varphi}^2x_C) = N_{Ax} + N_{Bx} \\ m(\ddot{\varphi}x_C - \dot{\varphi}^2y_C) = N_{Ay} + N_{By} \\ 0 = N_{Az} + N_{Bz} \\ \begin{cases} I_{xz}^A \ddot{\varphi} - I_{yz}^A \dot{\varphi}^2 = -aN_{By} \\ I_{yz}^A \ddot{\varphi} + I_{xz}^A \dot{\varphi}^2 = aN_{Bx} \\ I_{zz}^A \ddot{\varphi} = M \end{cases} \end{array} \right. \quad (5.40)$$

Последнее уравнение – уравнение вращения вокруг неподвижной оси, третье уравнение содержит только сумму реакций, но не позволяет их найти. Первое, второе, четвертое и пятое уравнение – система, из которой определяются динамические реакции N_{Ax} , N_{Bx} , N_{Ay} , N_{By} и из нее же, разумеется, можем найти условия, при которых они равны нулю

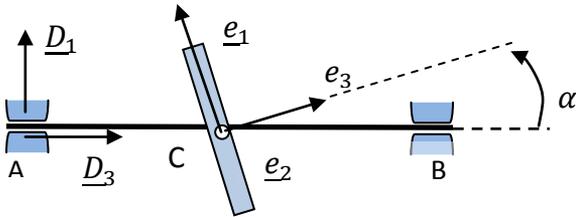
$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}y_C + \dot{\varphi}^2x_C &= 0 \\ \ddot{\varphi}x_C - \dot{\varphi}^2y_C &= 0 \\ I_{xz}^A \ddot{\varphi} - I_{yz}^A \dot{\varphi}^2 &= 0 \\ I_{yz}^A \ddot{\varphi} + I_{xz}^A \dot{\varphi}^2 &= 0 \end{aligned}$$

Так как движение произвольное, то выполнение этих равенств возможно только когда

$$\begin{aligned} x_C = y_C = 0 & \text{ - статическая уравновешенность и} \\ I_{xz}^A = I_{yz}^A = 0 & \text{ - динамическая уравновешенность,} \end{aligned}$$

т.е. динамические реакции равны нулю, если ось вращения является главной центральной.

Пример. Ось вращения диска составляет с перпендикуляром к плоскости диска угол α . Диск статически уравновешен, т.е. центр масс лежит на оси вращения: $x_C = y_C = 0$. Масса диска $m = 10 \text{ kg}$, радиус $R = 0,2 \text{ м}$, диск совершает 12000 об/мин , расстояние между подшипниками $a = 1 \text{ м}$.



Первые два уравнения системы (5.40) дают $N_{Ax} = -N_{Bx}$, $N_{Ay} = -N_{By}$, а из четвертого и пятого

находим $N_{By} = \frac{I_{yz}^A \dot{\varphi}^2}{a}$, $N_{Bx} = \frac{I_{xz}^A \dot{\varphi}^2}{a}$

Центробежные моменты инерции найдем из теоремы Гюйгенса- Штейнера

$$\begin{aligned} \underline{\underline{I}}^A &= \underline{\underline{I}}^C + m \left[AC^2 \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{AC}} \underline{\underline{AC}} \right] = \underline{\underline{I}}^C + m \left(\frac{a}{2} \right)^2 \left[\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{D}}_3 \underline{\underline{D}}_3 \right], \\ \underline{\underline{I}}^C &= I_3 \underline{\underline{e}}_3 \underline{\underline{e}}_3 + I (\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{e}}_3 \underline{\underline{e}}_3), \text{ где } I_3 = \frac{mR^2}{2}, \quad I = \frac{mR^2}{4}. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Из (5.41) имеем

$$I_{yz}^A = \underline{\underline{D}}_2 \cdot \underline{\underline{I}}^A \cdot \underline{\underline{D}}_3 = 0, \quad I_{xz}^A = \underline{\underline{D}}_1 \cdot \underline{\underline{I}}^A \cdot \underline{\underline{D}}_3 = (I_3 - I) \sin \alpha \cos \alpha = \frac{(I_3 - I)}{2} \sin 2\alpha$$

Таким образом, $N_{Ay} = -N_{By} = 0$, $N_{Ax} = -N_{Bx} = -\frac{(I_3 - I)}{2a} \dot{\varphi}^2 \sin 2\alpha$

Для данных условий задачи и весьма незначительного угла $\alpha = 1^\circ$ получим $N_{Ax} = -N_{Bx} \cong 281 \text{ кГ}$, что значительно превышает статическую реакцию 5 кГ .

Глава 6. Третий фундаментальный закон механики (закон баланса энергии).

6.1. Кинетическая энергия материальной точки и твердого тела. Теорема Кенига.

Кинетическая энергия материальной точки $T \stackrel{\text{def}}{=} \frac{mv^2}{2}$,
 тела, состоящего из материальных точек $T \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{(k)} \frac{m_k V_k^2}{2}$, (6.1)

континуального тела $T \stackrel{\text{def}}{=} \int_{(m)} \frac{V^2}{2} dm = \frac{1}{2} \int_{(m)} \underline{V} \cdot \underline{V} dm$. (6.2)

Для твердого тела $\underline{V} = \underline{V}_A + \underline{\omega} \times \underline{\rho}$. Подставим это выражение в (6.2):

$$T = \frac{1}{2} \int_{(m)} (\underline{V}_A + \underline{\omega} \times \underline{\rho}) \cdot (\underline{V}_A + \underline{\omega} \times \underline{\rho}) dm = \\ = \frac{1}{2} m V_A^2 + \underline{V}_A \cdot (\underline{\omega} \times \int_{(m)} \underline{\rho} dm) + \frac{1}{2} \int_{(m)} (\underline{\omega} \times \underline{\rho}) \cdot (\underline{\omega} \times \underline{\rho}) dm.$$

Второе слагаемое равно $\int_{(m)} \underline{\rho} dm \stackrel{\text{def}}{=} m \underline{AC}$, а подынтегральное выражение в третьем преобразуем, чтобы вынести из интеграла постоянный множитель $\underline{\omega}$:

$$(\underline{\omega} \times \underline{\rho}) \cdot (\underline{\omega} \times \underline{\rho}) = [(\underline{\omega} \times \underline{\rho}) \times \underline{\omega}] \cdot \underline{\rho} = [\underline{\omega} \times (\underline{\rho} \times \underline{\omega})] \cdot \underline{\rho} = \\ = \omega^2 \underline{\rho} \cdot \underline{\rho} - \underline{\omega} \cdot \underline{\rho} \underline{\rho} \cdot \underline{\omega} = \underline{\omega} \cdot [\rho^2 \underline{E} - \underline{\rho} \underline{\rho}] \cdot \underline{\omega}.$$

$$\text{Имеем } \frac{1}{2} \int_{(m)} (\underline{\omega} \times \underline{\rho}) \cdot (\underline{\omega} \times \underline{\rho}) dm = \frac{1}{2} \underline{\omega} \cdot [\int_{(m)} (\rho^2 \underline{E} - \underline{\rho} \underline{\rho}) dm] \cdot \underline{\omega} = \frac{1}{2} \underline{\omega} \cdot \underline{I}^A \cdot \underline{\omega}.$$

Таким образом,

$$T = \frac{1}{2} m V_A^2 + \underline{V}_A \cdot (\underline{\omega} \times m \underline{AC}) + \frac{1}{2} \underline{\omega} \cdot \underline{I}^A \cdot \underline{\omega} \quad (6.3)$$

Рассмотрим частные случаи.

а) Тело вращается вокруг неподвижной точки: $\underline{V}_A = 0$

$$T = \frac{1}{2} \underline{\omega} \cdot \underline{I}^A \cdot \underline{\omega} \quad (6.4)$$

б) В качестве полюса взят центр масс: $(\cdot)A \rightarrow (\cdot)C$

$$T = \frac{1}{2} m V_C^2 + \frac{1}{2} \underline{\omega} \cdot \underline{I}^C \cdot \underline{\omega} \quad (6.5)$$

Формула (6.5) представляет собой частный случай (для твердого тела) теоремы Кенига:

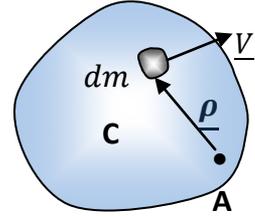
Кинетическая энергия складывается из кинетической энергии поступательного движения со скоростью центра масс и энергии относительного движения относительно системы отсчета, движущейся поступательно со скоростью центра масс (для твердого тела относительное движение - вращение вокруг центра масс).

Для плоского движения $\underline{\omega} = \dot{\varphi} \underline{k}$ и формулы (6.4), (6.5) примут вид

$$T = \frac{1}{2} \underline{\omega} \cdot \underline{I}^A \cdot \underline{\omega} = \frac{1}{2} \underline{k} \cdot \underline{I}^A \cdot \underline{k} \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} I_{zz}^A \dot{\varphi}^2 \text{ — вращение вокруг неподвижной оси,} \quad (6.4a)$$

$$T = \frac{1}{2} m V_C^2 + \frac{1}{2} \underline{\omega} \cdot \underline{I}^C \cdot \underline{\omega} = \frac{1}{2} m V_C^2 + \frac{1}{2} I_{zz}^C \dot{\varphi}^2 \text{ — общий случай плоского движения,} \quad (6.5a)$$

где осевые моменты инерции I_{zz}^A, I_{zz}^C — постоянные величины.

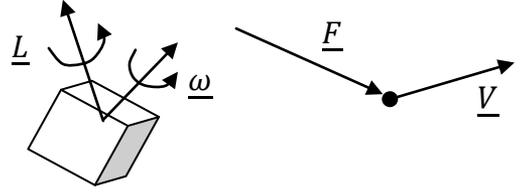


6.2. Мощность, работа. Потенциальные воздействия.

Мощность силы $N \stackrel{\text{def}}{=} \underline{F} \cdot \underline{V}$,

мощность момента $N \stackrel{\text{def}}{=} \underline{L} \cdot \underline{\omega}$

Элементарная работа $d^*A \stackrel{\text{def}}{=} N dt$



Символ d^*A означает, что элементарная работа не является в общем случае дифференциалом функции A ввиду произвольности сил и моментов. Для силы элементарная работа вычисляется по хорошо знакомой из курса физики формуле

$d^*A \stackrel{\text{def}}{=} \underline{F} \cdot \underline{V} dt = \underline{F} \cdot \frac{d\underline{R}}{dt} dt = \underline{F} \cdot d\underline{R} \stackrel{\text{def}}{=} F dR \cos(\underline{F}, d\underline{R})$, а вот для момента известная формула $d^*A = L_z d\varphi$ имеет место только для плоского движения, когда $\underline{\omega} = \dot{\varphi} \underline{k}$, поэтому определение мощности как работы в единицу времени при произвольном движении тела становится весьма затруднительным.

Найдем мощность сил \underline{F}_k и моментов \underline{L}_n , приложенных к твердому телу.

По определению $N \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{(k)} \underline{F}_k \cdot \underline{V}_k + [\sum_{(n)} \underline{L}_n] \cdot \underline{\omega}$. Подставив $\underline{V}_k = \underline{V}_A + \underline{\omega} \times \underline{\rho}_k$ и, переставив сомножители в смешанном произведении, получим

$$N \stackrel{\text{def}}{=} (\sum_{(k)} \underline{F}_k) \cdot \underline{V}_A + [\sum_{(k)} \underline{\rho}_k \times \underline{F}_k + \sum_{(n)} \underline{L}_n] \cdot \underline{\omega} \equiv \underline{F}^{ext} \cdot \underline{V}_A + \underline{M}_A^{ext} \cdot \underline{\omega}. \quad (6.6)$$

Ясно, что мощность (6.6) не зависит от выбора полюса A .

Потенциальные воздействия.

Существует довольно узкий класс сил и моментов, мощность которых равна полной производной по времени от некоторой функции положения Π :

$$N = -\dot{\Pi}(\text{положение}).$$

Такие воздействия называются потенциальными, а Π - потенциальной энергией (знак (-) принято ставить для удобства).

Если рассматривается сила, то аргументом функции Π является вектор положения \underline{R} точки приложения силы, т.е. $\Pi = \Pi(\underline{R})$, а если момент, то аргументом являются параметры, задающие ориентацию, например, углы Эйлера, т.е. $\Pi = \Pi(\varphi, \theta, \psi)$.

Для потенциальных сил и моментов элементарная работа является дифференциалом функции $(-\Pi)$: $d^*A = -\dot{\Pi} dt = -d\Pi$; отсюда следует равносильное определение потенциальных воздействий: для них работа не зависит от пути перехода из первого положения во второе:

$$A_{1,2} = \int_{t_1}^{t_2} N dt = \int_{(1)}^{(2)} (-d\Pi) = \Pi_1 - \Pi_2;$$

и, как следствие, работа по замкнутому контуру равна нулю: $\oint N dt = 0$.

Если вектор силы известен, то условия его потенциальности можем получить, приравнявая

$$d^*A = \underline{F} \cdot d\underline{R} = -d\Pi(\underline{R}) = -d\underline{R} \cdot \nabla\Pi,$$

где $\nabla\Pi \equiv \text{grad}\Pi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial\Pi}{\partial x} \underline{i} + \frac{\partial\Pi}{\partial y} \underline{j} + \frac{\partial\Pi}{\partial z} \underline{k}$ - оператор Гамильтона (набла-оператор, градиент). Ви-

дим, что $\underline{F} = -\nabla\Pi$, т.е. $F_x = -\frac{\partial\Pi}{\partial x}$, $F_y = -\frac{\partial\Pi}{\partial y}$, $F_z = -\frac{\partial\Pi}{\partial z}$ и, поскольку смешанные производные не зависят от порядка дифференцирования, для потенциальной силы должны выполняться равен-

ства $\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$, $\frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x}$, $\frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}$, которые на языке дифференциальных операций векторного анализа равносильны равенству нулю ротора силы $\text{rot } \underline{F} \stackrel{\text{def}}{=} \nabla \times \underline{F} = 0$.

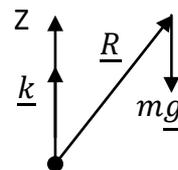
6.3. Примеры потенциальных воздействий

Пример 1. Однородное поле тяготения: $\underline{F} = m\underline{g}$, $\underline{g} = \text{const.}$

$$N \stackrel{\text{def}}{=} \underline{F} \cdot \underline{V} = m\underline{g} \cdot \frac{d\underline{R}}{dt} = -\frac{d}{dt}(-m\underline{g} \cdot \underline{R}),$$

$$\Rightarrow \Pi = -m\underline{g} \cdot \underline{R} + C,$$

или, если записать $\underline{g} = -g \underline{k}$, то $\Pi = -m\underline{g} \cdot \underline{R} + C = mgz + C$



Пример 2. Энергия гравитации

Обозначим для краткости $\underline{R} = \underline{R}_2 - \underline{R}_1$.

Действующая на первое тело со стороны второго сила

$$\underline{F}_{12} = \frac{Gm_1m_2}{R^2} \frac{\underline{R}}{R} = -\underline{F}_{21}$$

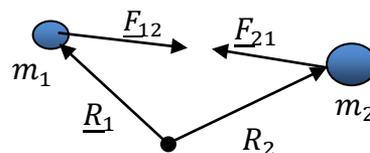
Мощность $N = \underline{F}_{12} \cdot \dot{\underline{R}}_1 + \underline{F}_{21} \cdot \dot{\underline{R}}_2 = \underline{F}_{12} \cdot (\dot{\underline{R}}_1 - \dot{\underline{R}}_2) =$

$$-\underline{F}_{12} \cdot \dot{\underline{R}} = -\frac{Gm_1m_2}{R^2} \frac{\underline{R} \cdot \dot{\underline{R}}}{R}$$

Дифференцируя равенство $\underline{R} \cdot \underline{R} = R^2$, получим $2\underline{R} \cdot \dot{\underline{R}} = 2R\dot{R}$, поэтому

$$N = -\frac{Gm_1m_2}{R^2} \dot{R} \equiv -\frac{d}{dt} \left(-\frac{Gm_1m_2}{R} \right), \text{ следовательно, } \Pi = -\frac{Gm_1m_2}{R} + C.$$

Принимая, что при бесконечном удалении тел $\Pi = 0$, получим $C=0$.



Пример 3. Потенциальная энергия пружины

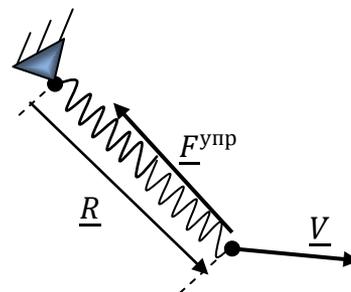
А) Линейная пружина:

$$\underline{F}^{\text{упр}} = -K(R - l_0) \frac{\underline{R}}{R},$$

где l_0 — длина недеформированной пружины

$$N \stackrel{\text{def}}{=} \underline{F}^{\text{упр}} \cdot \underline{V} = -K(R - l_0) \frac{\underline{R}}{R} \cdot \dot{\underline{R}} = -\frac{d}{dt} \left(\frac{K(R - l_0)^2}{2} \right) \Rightarrow$$

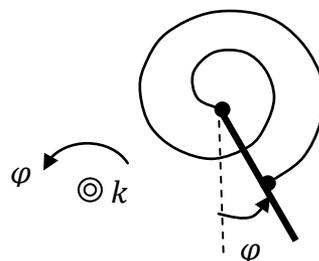
$$\Pi = \frac{K(R - l_0)^2}{2} + C$$



В) Спиральная пружина:

$$\underline{M}^{\text{упр}} = -C\varphi \underline{k}, \quad \underline{\omega} = \dot{\varphi} \underline{k},$$

$$N \stackrel{\text{def}}{=} \underline{M} \cdot \underline{\omega} = -C\varphi \dot{\varphi} = -\frac{d}{dt} \left(\frac{C\varphi^2}{2} \right) \Rightarrow \Pi = \frac{C\varphi^2}{2} + C$$



6.4. Теорема об изменении кинетической энергии.

Скорость изменения кинетической энергии равна мощности внешних и внутренних воздействий:

$$\dot{T} = N^{\text{ext}} + N^{\text{int}}. \quad (6.7)$$

Эта теорема является следствием первого и второго фундаментальных законов механики. Рассмотрим (для простоты) тело, состоящее из материальных точек. Дифференцируя по времени кинетическую энергию $T \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{(k)} \frac{m_k V_k^2}{2} = \frac{1}{2} \sum_{(k)} m_k \underline{V}_k \cdot \underline{V}_k$, получим с учетом первого ФЗМ для точки (второго закона Ньютона) $m_k \dot{\underline{V}}_k = \underline{F}_k^{\text{ext}} + \underline{F}_k^{\text{int}}$

$$\dot{T} = \sum_{(k)} m_k \dot{\underline{V}}_k \cdot \underline{V}_k = \sum_{(k)} (\underline{F}_k^{\text{ext}} + \underline{F}_k^{\text{int}}) \cdot \underline{V}_k \equiv N^{\text{ext}} + N^{\text{int}}$$

Форма записи теоремы (6.7) называется *дифференциальной*; проинтегрировав ее, получим *интегральную* форму $\int_{t_1}^{t_2} \dot{T} dt = \int_{t_1}^{t_2} (N^{\text{ext}} + N^{\text{int}}) dt$ или

$$T(t_2) - T(t_1) = A_{1,2}^{\text{ext}} + A_{1,2}^{\text{int}} \quad (6.8)$$

Если все внутренние воздействия потенциальные, т.е. $N^{\text{int}} = -\dot{\Pi}^{\text{int}}$, то (6.7) принимает вид

$$(\dot{T} + \dot{\Pi}^{\text{int}})^{\bullet} = N^{\text{ext}}, \quad (6.9)$$

Сумма $T + \Pi^{\text{int}} \stackrel{\text{def}}{=} E_M$ называется полной механической энергией тела.

Если потенциальны и внешние воздействия $N^{\text{ext}} = -\dot{\Pi}^{\text{ext}}$, то имеем закон сохранения энергии *расширенной системы* (в энергию включается Π^{ext} – потенциальная энергия воздействия на тело внешнего окружения):

$$(\dot{T} + \dot{\Pi}^{\text{int}} + \dot{\Pi}^{\text{ext}})^{\bullet} = 0, \quad \Rightarrow \quad T + \Pi^{\text{int}} + \Pi^{\text{ext}} = \text{Const} \quad (6.10)$$

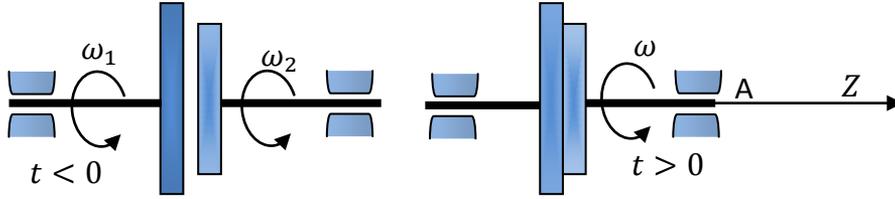
Системы (тела), где все воздействия потенциальны, называются консервативными.

6.5. Третий фундаментальный закон механики (закон баланса энергии).

Приведенная выше модель окружающего мира, описываемая двумя фундаментальными законами механики и их следствием- теоремой об изменении кинетической энергии, явно недостаточна. Во - первых, мы мало что знаем о внутренних воздействиях, да и повседневный опыт показывает, что причинами движения тел являются не только силы и моменты, созданные окружающими телами, но и но и подвод энергии того или иного немеханического вида (тепловой, электрической и др.).

Рассмотрим простую задачу:

два диска с осевыми моментами инерции I_1 и I_2 , вращающиеся соосно с разными угловыми скоростями ω_1 и ω_2 , в момент $t = 0$ приводятся в зацепление и далее вращаются вместе с неизвестной угловой скоростью ω .



Проекция второго закона на ось вращения Z имеет вид $\dot{K}_{Az} = M_{Az}^{ext} = 0$, т.е. проекция кинетического момента на ось Z постоянна, отсюда находим

$$I_1\omega_1 + I_2\omega_2 = (I_1 + I_2)\omega, \Rightarrow \omega_K = \frac{I_1\omega_1 + I_2\omega_2}{(I_1 + I_2)} \quad (\text{А})$$

Найдем теперь угловую скорость с помощью теоремы об изменении кинетической энергии, тем более что она и вывелась из двух законов механики. Имеем

$$\dot{T} = N^{ext} + N^{int} = 0,$$

поскольку $N^{ext} = 0$ изначально, а равенство нулю N^{int} следует из того, что скорости точек касания сцепляющихся дисков одинаковы, а силы $\underline{F}_{12} = -\underline{F}_{21}$. Таким образом, $T = const$ и

$$\frac{1}{2}I_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 = \frac{1}{2}(I_1 + I_2)\omega^2 \Rightarrow \omega_T = \sqrt{\frac{I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2}{(I_1 + I_2)}}. \quad (\text{Б})$$

Разумеется, правильным результатом является формула (А). Найдем разность кинетических энергий после и до сцепления. Опуская несложные выкладки, получим

$$T(+0) - T(-0) = \frac{1}{2}(I_1 + I_2)\omega_K^2 - \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 - \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 = -\frac{I_1I_2}{2(I_1 + I_2)}(\omega_1 - \omega_2)^2 < 0.$$

«Потерянная» энергия превратилась либо в тепловую энергию, либо стала энергией деформации дисков, причем часть ее могла быть отведена в виде, скажем, тепла. Все эти (и другие) варианты определяются свойствами тел.

В любом случае необходимо ввести в механику понятия внутренней энергии и подвода энергии в тело:

$$(T + U)^{\bullet} = N^{ext} + \frac{\delta e}{\delta t} \quad (6.11)$$

Скорость изменения полной энергии тела равна сумме мощности внешних воздействий и скорости подвода энергии в тело.

В (6.11) T — кинетическая энергия, U — внутренняя энергия, $E = T + U$ — полная энергия, N^{ext} — мощность внешних воздействий, $\frac{\delta e}{\delta t}$ — скорость подвода энергии в тело. Если тело не обменивается энергией со своим окружением ($\frac{\delta e}{\delta t} = 0$), оно называется *замкнутым*.

Понятие внутренней энергии успешно используется в механике деформируемых тел, в частности, для корректного введения векторов и тензоров деформации; в нашем же курсе внутренняя энергия встречается только как внутренняя потенциальная энергия Π^{int} .

Глава 7. Механика Лагранжа

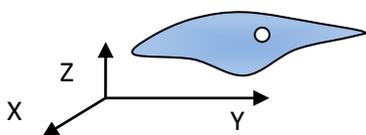
7.1.Обобщенные координаты, связи, число степеней свободы.

Обобщенные координаты- параметры любой размерности $x \triangleq (x_1, x_2, \dots, x_n)$, которые точно (либо с достаточной степенью точности) описывают положение тела.

Так, положение точки задается тремя координатами, твердого тела – шестью.

Обобщенными скоростями называются производные $\dot{x} \triangleq (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n)$.

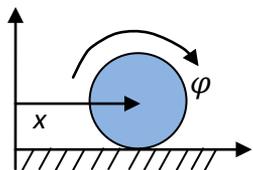
Ограничения, налагаемые на положения и скорости точек тела окружающими телами, называются соответственно позиционными (геометрическими) и кинематическими **связями**.



Связями называют и сами тела, обеспечивающие ограничения. Аналитические выражения, описывающие ограничения, называют **уравнениями связей**.

Если уравнения связей содержат только координаты, связи называются **голономными**; разумеется, голономными являются и интегрируемые кинематические связи.

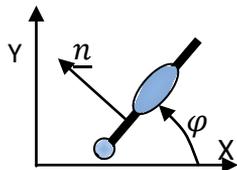
Неинтегрируемые кинематические связи называются **неголономными**.



Число независимых обобщенных координат (x_1, x_2, \dots, x_n) называется числом степеней свободы по положению, а число независимых обобщенных скоростей – числом степеней свободы по скоростям. Рассмотрим некоторые простые примеры.

1. Точка движется по поверхности

Три обобщенные координаты (x, y, z) , одно уравнение голономной связи (уравнение поверхности)



$$F(x, y, z) = 0.$$

$$\text{Число степеней свободы } 3 - 1 = 2$$

2. Качение диска.

Две обобщенные координаты (x, φ) , одно уравнение кинематической связи - условие отсутствия проскальзывания

$$\dot{x} - R\dot{\varphi} = 0.$$

Уравнение связи интегрируется: $x - R\varphi = 0$, следовательно связь голономная и число степеней свободы $2 - 1 = 1$.

3. Движение конька

Считаем, что лезвие конька касается льда в одной точке А и скорость точки касания направлена вдоль лезвия: -----

Три обобщенные координаты (x_A, y_A, φ) , т.е. три степени свободы по положению; одна кинематическая неинтегрируемая, то есть неголономная связь - условие отсутствия бокового скольжения :

$$\underline{V}_A \cdot \underline{n} = (\dot{x}_A \underline{i} + \dot{y}_A \underline{j}) \cdot (-\sin \varphi \underline{i} + \cos \varphi \underline{j}) = -\dot{x}_A \sin \varphi + \dot{y}_A \cos \varphi = 0$$

или $\dot{y}_A = \dot{x}_A \operatorname{tg} \varphi$.

Таким образом, конек имеет две степени свободы по скоростям.

4. Изгиб стержня с шарнирными опорами.

Стержень - деформируемое тело с бесконечным числом степеней свободы. Для описания его изгиба можно взять в качестве обобщенных координат коэффициенты u_k в представлении $y \approx \sum_{k=1}^n u_k \sin \frac{k\pi x}{l}$, которое удовлетворяет краевым условиям – равенству нулю прогибов и моментов в шарнирных опорах. Разумеется, этот подход приближенный и соответствует описанию положения «с достаточной степенью точности».

7.2. Уравнения Лагранжа (второго рода).

Традиционно уравнения Лагранжа выводятся из уравнений Даламбера–Лагранжа для тел, состоящих из материальных точек, взаимодействие между которыми описываются только силами; хотя уравнения без какого–либо обоснования применяются для описания движения и твердых тел и твердых деформируемых тел, действие на тела–точки которых описывается силами и моментами, что влечет за собой необходимость введения наряду с возможными (виртуальными) перемещениями и возможных поворотов $\delta \varphi$. Это нетрудно сделать только для плоских движений, когда $\delta \varphi = \underline{m} \delta \varphi$, где единичный вектор \underline{m} перпендикулярен плоскости движения.

Вместе с тем следует заметить, что принцип Даламбера, опирающийся на первый фундаментальный закон изменения импульса (для точек–второй закон Ньютона) и на его обобщение для твердых тел–точек - на второй (закон изменения кинетического момента) требует введения совершенно новых понятий - возможных, виртуальных и действительных перемещений и поворотов. Подобный подход способен создать у изучающего механику впечатление, что, кроме фундаментальных законов, необходимы еще какие-то добавочные «принципы».

Мы покажем, что уравнения Лагранжа следуют из записанной в обобщенных координатах теоремы об изменении кинетической энергии, которая на основе первого и второго законов легко доказывается для систем, состоящих из материальных точек и твердых тел, воздействия на которые описываются силами и моментами; она же, разумеется, является частным случаем третьего фундаментального закона баланса энергии.

Принимается следующее утверждение: нестационарных связей в общепринятой со времен Лагранжа форме $\underline{R} = \underline{R}(x, t)$ нет; явное присутствие времени в описании положения тела объясняется тем, что некоторые обобщенные координаты по необъяснимым причинам объявляются известными функциями времени.

Обозначим все обобщенные координаты (в том числе и зависимости которых от времени объявляются известными) через $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Линейные скорости и угловые скорости являются **однородными** линейными функциями обобщенных скоростей

$$\underline{v} = \frac{\partial \underline{R}}{\partial \underline{x}_s} \dot{x}_s; \quad \underline{\omega} = \underline{p}_s \dot{x}_s, \quad \underline{p}_s = \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \underline{P}}{\partial \underline{x}_s} \cdot \underline{P}^T \right) \right]_x$$

и, поскольку общий вид кинетической энергии для тел-точек имеет вид

$$T = \frac{1}{2} m \underline{v}_c \cdot \underline{v}_c + \frac{1}{2} \underline{\omega} \cdot \underline{I}^c \cdot \underline{\omega}, \text{ то кинетическая энергия всей}$$



системы будет **однородной квадратичной формой** обобщенных скоростей $T = T(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} a_{sk}(x) \dot{x}_s \dot{x}_k$.

$$\text{Тогда } \dot{T} = \frac{\partial T}{\partial x_s} \dot{x}_s + \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_s} \ddot{x}_s = \frac{\partial T}{\partial x_s} \dot{x}_s + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_s} \dot{x}_s \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_s} \right) \dot{x}_s.$$

По теореме Эйлера об однородных функциях $\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_s} \dot{x}_s = 2T$, следовательно

$$\dot{T} = \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_s} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_s} \right] \dot{x}_s$$

Мощность внешних и внутренних воздействий для тела-точки является однородной линейной формой обобщенных скоростей $N = \underline{F} \cdot \underline{v}_c + \underline{M}^c \cdot \underline{\omega} \stackrel{\text{def}}{=} Q_s \cdot \dot{x}_s$,

где коэффициенты при обобщенных скоростях **по определению** называются обобщенными силами. Теорема об изменении кинетической энергии $\dot{T} = N^{ext} + N^{int}$ принимает вид

$$\left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_s} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_s} - Q_s \right] \cdot \dot{x}_s = 0 \quad (\Sigma_s !)$$
 (7.1)

Вследствие того, что теорема верна для **всех** движений, которые определяются произвольными начальными условиями и произвольными же обобщенными силами и из-за независимости обобщенных скоростей (для голономных систем) все коэффициенты при скоростях равны нулю:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_s} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_s} = Q_s, \quad s = (1, 2 \dots n)$$
 (7.2)

Это и есть система уравнений Лагранжа, которая определяет **действительное** движение.

На первый взгляд может показаться, что перечисленных факторов произвольности и независимости скоростей недостаточно, чтобы каждая из скобок в сумме (7.1) была равна нулю, поскольку внутри скобок имеются те же скорости.

Заметим, что уравнение (7.1) получено на основе первых двух фундаментальных законов, а внутри скобок стоят скалярные произведения *уравнений этих законов на независимые для голономных систем базисные векторы* $\frac{\partial R}{\partial x_s}$ и \underline{p}_s множества векторов положения материальных точек и тензоров поворота твердых тел, входящих в систему.

Рассмотрим для простоты тело, состоящее из материальных точек. Умножим каждое уравнение скалярно на $\frac{\partial R_k}{\partial x_s}$ и просуммируем их:

$$m_k \frac{dv_k}{dt} \cdot \frac{\partial R_k}{\partial x_s} = \underline{F}_k \cdot \frac{\partial R_k}{\partial x_s}, \quad (\Sigma_k!), \quad (s=1, 2 \dots n).$$
 (7.3)

Справа в (7.3) стоит обобщенная сила Q_s , а левая часть стандартным образом (см. например [6]) преобразуется с использованием тождеств Лагранжа, которые в нашем подходе ввиду отсутствия времени в описании положения $\underline{R}_k = \underline{R}_k(x)$ совершенно очевидны:

$$\underline{v}_k = \dot{\underline{R}}_k = \frac{\partial R_k}{\partial x_s} \dot{x}_s, \Rightarrow \frac{\partial v_k}{\partial \dot{x}_s} = \frac{\partial R_k}{\partial x_s},$$

$$\text{и } \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial R_k}{\partial x_s} \right) = \frac{\partial v_k}{\partial x_s} \text{ ввиду изменения порядка дифференцирования.}$$

$$\text{Имеем } m_k \frac{dv_k}{dt} \cdot \frac{\partial R_k}{\partial x_s} = \frac{d}{dt} \left(m_k v_k \cdot \frac{\partial R_k}{\partial x_s} \right) - m_k v_k \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial R_k}{\partial x_s} \right) =$$

$$= \frac{d}{dt} \left(m_k v_k \cdot \frac{\partial v_k}{\partial \dot{x}_s} \right) - m_k v_k \cdot \frac{\partial v_k}{\partial x_s} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_s} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_s},$$
 (7.4)

что и требовалось показать.

Такой же результат получим и для твердого тела, умножая уравнение второго закона $(\underline{I}^c \cdot \underline{\omega})' = \underline{M}_c$ на \underline{p}_s :

$$(\underline{I}^c \cdot \underline{\omega}) \cdot \underline{p}_s = \frac{d}{dt} [(\underline{I}^c \cdot \underline{\omega}) \cdot \underline{p}_s] - (\underline{I}^c \cdot \underline{\omega}) \cdot \frac{d\underline{p}_s}{dt}. \quad (7.5)$$

С помощью тождеств типа Лагранжа для вращательных движений

$$\underline{p}_s = \frac{\partial \omega}{\partial \dot{x}_s}, \quad \dot{\underline{p}}_s = \frac{\partial \omega}{\partial x_s} + \underline{\omega} \times \underline{p}_s \quad (7.6)$$

(7.5) также приводится (см. приложение) к виду (7.4), где $T = \frac{1}{2} \underline{\omega} \cdot \underline{I}^c \cdot \underline{\omega}$.

Замечание 1. Вычисление обобщенных сил для потенциальных воздействий.

Если воздействия потенциальные, т.е. $N = -\dot{\Pi}(x) = (-\frac{\partial \Pi}{\partial x_s}) \dot{x}_s$ то обобщенные силы вычисляются через потенциальную энергию:

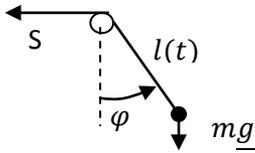
$$Q_S^{\text{пот}} \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{\partial \Pi}{\partial x_s}$$

Замечание 2. Принцип возможных скоростей

Поскольку уравнения равновесия (покоя) являются частным случаем уравнений динамики и получаются из них приравнением нулю скоростей и ускорений, т.е. левых частей уравнений (7.2),

то в положении равновесия обобщенные силы равны нулю; отсюда в соответствии с их определением следует утверждение:

необходимым условием равновесия является равенство нулю мощности воздействий, вычисляемых на произвольных скоростях, сообщаемых телу в положении равновесия. Это утверждение называется принципом возможных скоростей (перемещений)».



Замечание 3. Обобщенные силы, обеспечивающие постулируемую зависимость координат от времени. Примеры.

Следует подчеркнуть, что изложенный выше подход позволяет вычислять обобщенные силы (воздействия), которые обеспечивают постулируемую ранее зависимость некоторых координат от времени.

Пример 1. Математический маятник с изменяющейся длиной.

Материальная точка массы m подвешена на нити, длина которой изменяется по закону $l(t)$. Система имеет две обобщенные координаты - l и φ . Кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{l}^2 + l^2 \dot{\varphi}^2),$$

$$\text{мощность } N = (\underline{m\underline{g}} + \underline{S}) \cdot \underline{v} = (mg \cos \varphi - S) \dot{l} + (-mgl \sin \varphi) \dot{\varphi}$$

Уравнения Лагранжа

$$m(\ddot{l} - l\dot{\varphi}^2) = mg \cos \varphi - S; \quad m \frac{d}{dt}(l^2 \dot{\varphi}) = -mgl \sin \varphi$$

Из первого уравнения определяется натяжение нити S .

Пример 2. Движение тележки по вращающемуся стержню (строительному крану).

Пренебрежем (для простоты) массой и размерами самой тележки, обозначим через m массу всех колес, которые будем считать дисками радиуса r , осевой момент инерции крана J , жесткость пружины C .

Система имеет две степени свободы x, φ . Запишем уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi.$$

Сообщим находящейся в актуальном (т.е. произвольном) положении системе скорости $\dot{x}, \dot{\varphi}$ и напишем кинетическую энергию

$$T = \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2 + \left(\frac{1}{2} m V^2 + \frac{1}{2} \underline{\underline{\Theta}} \cdot \underline{\underline{\omega}} \cdot \underline{\underline{\omega}} \right),$$

где V - скорость центра колеса, $\underline{\underline{\Theta}}$ - центральный тензор инерции, $\underline{\underline{\omega}}$ - угловая скорость колеса.

Приняв кран за подвижную систему отсчета, найдем

$$\underline{V} = \underline{V}_e + \underline{V}_r = (\dot{\varphi} D_3) \times (x D_1) + \dot{x} D_1, \quad V^2 = \underline{V} \cdot \underline{V} = \dot{\varphi}^2 x^2 + \dot{x}^2,$$

$$\underline{\omega} = \underline{\omega}_e + \underline{\omega}_r = \dot{\varphi} D_3 + \dot{\psi} D_2 = \dot{\varphi} D_3 + \frac{\dot{x}}{r} D_2, \quad \underline{\underline{\Theta}} = \theta_2 D_2 D_2 + \theta (D_1 D_1 + D_3 D_3)$$

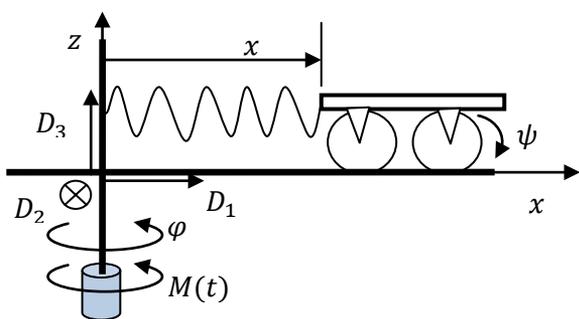
$$T = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 [J + mx^2 + \theta] + \frac{1}{2} \dot{x}^2 \left[m + \frac{\theta}{r^2} \right].$$

Обобщенные силы найдем «по определению» из мощности $N \stackrel{\text{def}}{=} Q_\varphi \cdot \dot{\varphi} + Q_x \cdot \dot{x}$, причем ввиду независимости обобщенных скоростей можно для упрощения вычислений считать нулями все скорости кроме одной.

1. Положим $\dot{\varphi} \neq 0, \dot{x} = 0$: $N = M \cdot \dot{\varphi}, \Rightarrow Q_\varphi = M$.

2. Положим $\dot{x} \neq 0, \dot{\varphi} = 0$: $N = -C(x - l_0) \dot{x}, \Rightarrow Q_x = -C(x - l_0)$,

где l_0 - длина недеформированной пружины.



Уравнения Лагранжа будут иметь вид

$$\begin{aligned} [J + mx^2 + \theta] \ddot{\varphi} + mx \dot{\varphi} &= M(t) \\ \left[m + \frac{\theta}{r^2} \right] \ddot{x} - mx \dot{\varphi}^2 &= -C(x - l_0) \end{aligned}$$

Рассмотрим частный случай движения, при котором кран вращается с постоянной угловой скоростью $\dot{\varphi} = \Omega$ (именно этот случай чаще всего встречается в учебных задачах).

Второе уравнение запишем в виде:

$$\ddot{x} + \left[\frac{C - m\Omega^2}{m + \frac{\theta}{r^2}} \right] x = \frac{Cl_0}{m + \frac{\theta}{r^2}}.$$

Для достаточно жесткой пружины $C > m\Omega^2$ это уравнение описывает гармонические колебания

$$x = A \sin(\lambda t + \alpha) + B, \quad \text{где } \lambda^2 = \left[\frac{C - m\Omega^2}{m + \frac{\theta}{r^2}} \right].$$

Первое уравнение дает нам значение момента, который необходим для вращения с постоянной угловой скоростью: $M(t) = mx \dot{\varphi} \Omega$.

Замечание 4. О неголономных системах. Пример.

Заметим, что запись теоремы в виде (7.1) позволяет получать уравнения и для неголономных систем с линейными связями между скоростями вида

$$b_{mk}(x) \dot{x}_k = 0, \quad m = 1, 2 \dots q. \quad (7.7)$$

Для этого необходимо выразить из (7.7) q скоростей через $(n-q)$ «независимых» \dot{x}_s , подставить их в (7.1) и привести к аналогичной записи

$$[F_s(\ddot{x}, \dot{x}, x)] \dot{x}_s = 0, \quad s = 1, 2 \dots n - q,$$

откуда следуют уравнения $F_s(\ddot{x}, \dot{x}, x) = 0, s = 1, 2 \dots n - q$, последние совместно с уравнениями связей (7.7), которые, разумеется, дифференцируются, и замыкают задачу.

Пример 3. Движение стержня в вертикальной плоскости.

Скорость центра масс направлена вдоль стержня. Масса стержня m , момент инерции относительно горизонтальной центральной оси J .

Обобщенные координаты – декартовы координаты центра масс x, y и угол поворота φ .

Кинетическая энергия $T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} J\dot{\varphi}^2$, мощность $N = (m\underline{g} + \underline{S}) \cdot \underline{v} = (-mg \sin\varphi) \dot{y}$, где перпендикулярная к стержню сила $\underline{S} = S\underline{n}$ обеспечивает выполнение уравнения связи $\underline{v} \cdot \underline{n} = -\dot{x} \sin\varphi + \dot{y} \cos\varphi = 0$.

Уравнение (7.1) имеет вид $(m\ddot{x})\dot{x} + (m\dot{y} + mg \sin\varphi)\dot{y} + (J\ddot{\varphi})\dot{\varphi} = 0$.

Подставляя в него уравнение связи $\dot{y} = tg\varphi \dot{x}$ и $\dot{y} = \dot{x} tg\varphi + \frac{1}{\cos^2\varphi} \dot{x}\dot{\varphi}$, получим

$$\left[m\ddot{x}(1 + tg^2\varphi) + m\dot{x}\dot{\varphi} \frac{\sin\varphi}{\cos^3\varphi} + mg tg\varphi \right] \dot{x} + [J\ddot{\varphi}]\dot{\varphi} = 0,$$

$$\text{откуда } \begin{cases} \ddot{x} + \dot{x}\dot{\varphi} tg\varphi + g \sin\varphi \cos\varphi = 0 \\ J\ddot{\varphi} = 0 \end{cases}$$

Второе уравнение сразу дает $\varphi = \omega t + \alpha$, а первое заменой $\dot{x} = u, \ddot{x} = \frac{du}{d\varphi} \omega$ приводится к линейному уравнению $\frac{du}{d\varphi} + utg\varphi + \frac{g}{\omega} \sin\varphi \cos\varphi = 0$, решение которого имеет вид

$$u = A \cos\varphi + \frac{g}{\omega} \cos^2\varphi, \text{ откуда находим } x(t), \text{ а из уравнения связи } y(t).$$

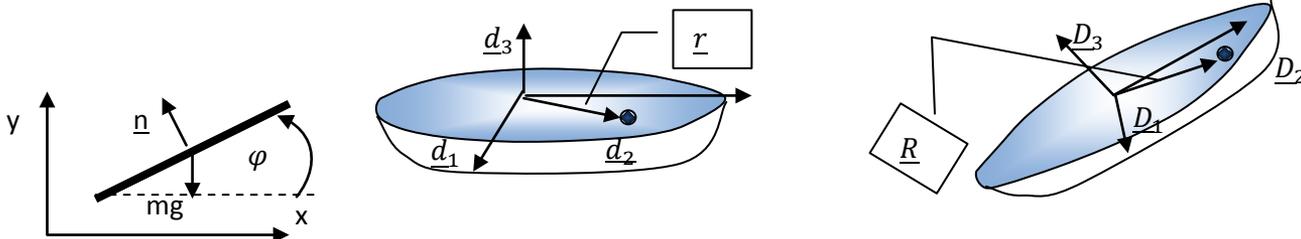
$$x(t) = \frac{A}{\omega} \sin\varphi + \frac{g}{2\omega} t + \frac{g}{4\omega^2} \sin 2\varphi + B,$$

$$y(t) = -\frac{A}{\omega} \cos\varphi - \frac{g}{4\omega^2} \cos 2\varphi + C; \quad \varphi = \omega t + \alpha.$$

Эта задача приводится в книге [7], где она решалась методом неопределенных коэффициентов Лагранжа и с помощью уравнений Аппеля.

Пример 4. Движение точки по качающейся поверхности.

По палубе раскачивающегося судна скользит материальная точка. Ориентация палубы задается углами крена φ и дифферента θ . Надо составить уравнения движения Лагранжа.



Ориентацию палубы проще всего описать тензором поворота

$$\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{P}}(\theta \underline{d}_1) \cdot \underline{\underline{P}}(\varphi \underline{d}_2),$$

который переводит отсчетные \underline{d}_k в актуальные \underline{D}_k : $\underline{D}_k = \underline{\underline{P}} \cdot \underline{d}_k$. В матричном виде

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ \sin\theta \cdot \sin\varphi & \cos\theta & -\sin\theta \cdot \cos\varphi \\ -\cos\theta \sin\varphi & \sin\theta & \cos\theta \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Угловая скорость $\underline{\omega} = \dot{\theta} \underline{d}_1 + \underline{P}(\theta \underline{d}_1) \cdot \underline{d}_2 \dot{\varphi} = \dot{\theta} \underline{d}_1 + \dot{\varphi} \underline{D}_2$, положение точки $\underline{R}(t) = \underline{P} \cdot \underline{r}(t)$, скорость $\underline{v} = \underline{\omega} \times \underline{R} + \underline{P} \cdot \dot{\underline{r}}$, $\underline{r} = x \underline{d}_1 + y \underline{d}_2$. Слагаемое $\underline{\omega} \times \underline{R}$ – переносная скорость, $\underline{P} \cdot \dot{\underline{r}} = \dot{x} \underline{D}_1 + \dot{y} \underline{D}_2$ – относительная.

Запишем все величины в актуальном базисе \underline{D}_k :

$$\underline{D}_1 = \cos \varphi \underline{d}_1 + \sin \theta \cdot \sin \varphi \underline{d}_2 + (-\cos \theta \sin \varphi) \underline{d}_3$$

$$\underline{D}_2 = \cos \theta \underline{d}_2 + \sin \theta \underline{d}_3$$

$$\underline{D}_3 = \sin \varphi \underline{d}_1 + (-\sin \theta \cdot \cos \varphi) \underline{d}_2 + \cos \theta \cos \varphi \underline{d}_3$$

$$\underline{\omega} = \dot{\theta} \cos \varphi \underline{D}_1 + \dot{\varphi} \underline{D}_2 + \dot{\theta} \sin \varphi \underline{D}_3$$

$$\underline{v} = (\dot{x} - y \dot{\theta} \sin \varphi) \underline{D}_1 + (\dot{y} + x \dot{\theta} \sin \varphi) \underline{D}_2 + (y \dot{\theta} \cos \varphi - x \dot{\varphi}) \underline{D}_3$$

$$\text{Кинетическая энергия } T = \frac{1}{2} m \left[(\dot{x} - y \dot{\theta} \sin \varphi)^2 + (\dot{y} + x \dot{\theta} \sin \varphi)^2 + (y \dot{\theta} \cos \varphi - x \dot{\varphi})^2 \right],$$

$$\text{мощность } N = (\underline{m} \underline{g} + S \underline{D}_3) \cdot \underline{v} = (S \underline{D}_3 - m \underline{g} \underline{d}_3) \cdot \underline{v} = [m g \cos \theta \cos \varphi] \dot{x} + [-m g \sin \theta] \dot{y} + [S y \cos \varphi - m g (x \sin \theta \sin \varphi + y \cos \theta)] \dot{\theta} + [m g x \cos \theta \cos \varphi - S x] \dot{\varphi},$$

Где S – сила, с которой палуба действует на точку, а выражения в квадратных скобках – обобщенные силы. Уравнения Лагранжа для координат x и y имеют вид

$$m(\ddot{x} - 2\dot{y}\dot{\theta} \sin \varphi - y\ddot{\theta} \sin \varphi - x\dot{\theta}^2 \sin^2 \varphi - x\dot{\varphi}^2) = m g \cos \theta \cos \varphi \quad (1)$$

$$m(\ddot{y} + 2\dot{x}\dot{\theta} \sin \varphi + 2x\dot{\theta}\dot{\varphi} \cos \varphi + x\ddot{\theta} \sin \varphi - y\dot{\theta}^2) = -m g \sin \theta \quad (2)$$

Уравнения для $\theta(t)$ и $\varphi(t)$ имеют вид

$$m \frac{d}{dt} [(y^2 + x^2 \sin^2 \varphi) \dot{\theta} + (x\dot{y} - y\dot{x}) \sin \varphi - xy \dot{\varphi} \cos \varphi] = Sy \cos \varphi - m g (x \sin \theta \sin \varphi + y \cos \theta) \quad (3)$$

$$m(x\ddot{\varphi} - y\ddot{\theta} \cos \varphi - x\dot{\theta}^2 \sin \varphi \cos \varphi + 2\dot{x}\dot{\varphi} - 2\dot{y}\dot{\theta} \cos \varphi) = m g \cos \theta \cos \varphi - S \quad (4)$$

Уравнения (1), (2) и (4) – проекции уравнения $m \ddot{\underline{R}} = m \underline{g} + S \underline{D}_3$ на $\underline{D}_1, \underline{D}_2, \underline{D}_3$, а уравнение (3) является их следствием – это проекция закона (для точки – теоремы) об изменении кинетического момента $(\underline{R} \times (m \underline{v}))' = \underline{R} \times (m \underline{g} + S \underline{D}_3)$ на \underline{D}_1 .

Задавая $\theta(t)$ и $\varphi(t)$, из (1) и (2) можем найти движение точки по палубе, а из уравнений для $\theta(t)$ (или $\varphi(t)$) определим и реакцию S .

Строго говоря, постулирование $\theta(t)$ и $\varphi(t)$ имеет физический смысл только при задании момента $M = M_1 \underline{d}_1 + M_2 \underline{D}_2$, приложенного к даже лишенной массе палубе.

Приложение: Тожждества типа Лагранжа для вращательных движений и их применение для получения уравнений.

Первое тождество следует из формулы Пуассона :

$$\underline{\dot{P}} = \frac{\partial \underline{P}}{\partial x_s} \dot{x}_s = (\underline{p}_s \dot{x}_s) \times \underline{P} = \underline{\omega} \times \underline{P} \Rightarrow \underline{p}_s = \frac{\partial \underline{\omega}}{\partial \dot{x}_s}$$

Второе получим, приравнявая смешанные производные от тензора поворота по координате x_s и по времени t :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \underline{P}}{\partial x_s} \right] = \frac{\partial}{\partial x_s} \left[\frac{d \underline{P}}{dt} \right] \Rightarrow \frac{d}{dt} (\underline{p}_s \times \underline{P}) = \frac{\partial}{\partial x_s} (\underline{\omega} \times \underline{P}) \Rightarrow$$

$$\dot{\underline{p}}_s \times \underline{P} + \underline{p}_s \times (\underline{\omega} \times \underline{P}) = \frac{\partial \underline{\omega}}{\partial x_s} \times \underline{P} + \underline{\omega} \times (\underline{p}_s \times \underline{P}).$$

Умножим (для удобства) это равенство справа на \underline{P}^T ($\underline{P} \cdot \underline{P}^T = \underline{E}$)

$$\dot{\underline{p}}_s \times \underline{E} + \underline{p}_s \times (\underline{\omega} \times \underline{E}) = \frac{\partial \underline{\omega}}{\partial x_s} \times \underline{E} + \underline{\omega} \times (\underline{p}_s \times \underline{E})$$

и с помощью тождеств $\underline{a} \times \underline{E} = \underline{E} \times \underline{a}$ и $\underline{a} \times \underline{E} \times \underline{b} = \underline{b} \underline{a} - (\underline{b} \cdot \underline{a}) \underline{E}$

$$\text{получим } \dot{\underline{p}}_s \times \underline{E} = \frac{\partial \underline{\omega}}{\partial x_s} \times \underline{E} + \underline{p}_s \underline{\omega} - \underline{\omega} \underline{p}_s.$$

Последние два слагаемых – кососимметрический тензор, представимый в виде $(\underline{\omega} \times \underline{p}_s) \times \underline{E}$, откуда и следует второе тождество (7.6)

$$\dot{\underline{p}}_s = \frac{\partial \underline{\omega}}{\partial x_s} + \underline{\omega} \times \underline{p}_s.$$

С помощью этих тождеств покажем справедливость преобразования

$$(\underline{I}^c \cdot \underline{\omega}) \cdot \underline{p}_s = \frac{d}{dt} [(\underline{I}^c \cdot \underline{\omega}) \cdot \underline{p}_s] - (\underline{I}^c \cdot \underline{\omega}) \cdot \frac{d\underline{p}_s}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_s} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_s}.$$

для вращательной составляющей энергии $T = \frac{1}{2} \underline{\omega} \cdot \underline{I}^c \cdot \underline{\omega}$.

С учетом симметричности тензора инерции и первого тождества имеем

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_s} = (\underline{I}^c \cdot \underline{\omega}) \cdot \frac{\partial \underline{\omega}}{\partial \dot{x}_s} = (\underline{I}^c \cdot \underline{\omega}) \cdot \underline{p}_s.$$

Вычислим теперь $\frac{\partial T}{\partial x_s} = (\underline{I}^c \cdot \underline{\omega}) \cdot \frac{\partial \underline{\omega}}{\partial x_s} + \frac{1}{2} \underline{\omega} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_s} \underline{I}^c \right) \cdot \underline{\omega}$.

$$\begin{aligned} \text{Имеем } \frac{\partial}{\partial x_s} \underline{I}^c &= \frac{\partial}{\partial x_s} \left[\underline{P} \cdot \underline{I}_0^c \cdot \underline{P}^T \right] = \frac{\partial \underline{P}}{\partial x_s} \cdot \underline{I}_0^c \cdot \underline{P}^T + \underline{P} \cdot \underline{I}_0^c \cdot \frac{\partial \underline{P}^T}{\partial x_s} = \\ &= \underline{p}_s \times \underline{P} \cdot \underline{I}_0^c \cdot \underline{P}^T + \underline{P} \cdot \underline{I}_0^c \cdot \left(\underline{p}_s \times \underline{P} \right)^T = \underline{p}_s \times \underline{I}^c - \underline{I}^c \times \underline{p}_s. \end{aligned}$$

$$\text{Теперь } \frac{1}{2} \underline{\omega} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_s} \underline{I}^c \right) \cdot \underline{\omega} = \underline{\omega} \cdot \left[\underline{p}_s \times (\underline{I}^c \cdot \underline{\omega}) \right] = (\underline{I}^c \cdot \underline{\omega}) \cdot (\underline{\omega} \times \underline{p}_s)$$

и, с учетом второго тождества

$$\frac{\partial T}{\partial x_s} = (\underline{I}^c \cdot \underline{\omega}) \cdot \left[\frac{\partial \underline{\omega}}{\partial x_s} + \underline{\omega} \times \underline{p}_s \right] = (\underline{I}^c \cdot \underline{\omega}) \cdot \dot{\underline{p}}_s.$$

Глава 8. Колебания систем

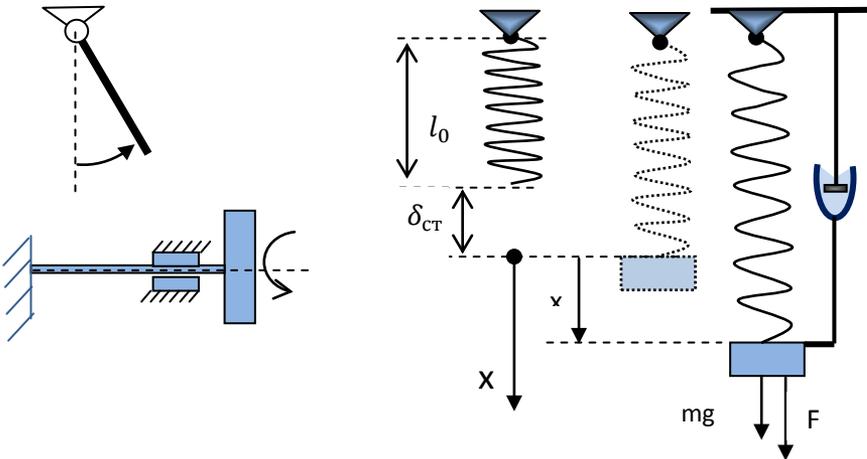
В этом мире колеблется все – колеблются атомы и молекулы, механизмы и сооружения.

Аналитическому исследованию поддаются, как правило, только *малые* колебания, под которыми мы будем понимать движения, описываемые *линейными* дифференциальными уравнениями, даже если движение и не носит колебательного характера.

8.1. Колебания системы с одной степенью свободы.

Все реальные тела ввиду их деформируемости обладают бесконечным числом степеней свободы, однако в качестве расчетной схемы можно выбрать систему с одной или несколькими степенями свободы.

Так, например, плоское движение маятника может быть описано только углом поворота, если пренебречь его деформацией, а вращение диска на упругом вале также задается одним углом поворота, если пренебречь массой вала по сравнению с диском.



Наглядной моделью тела с одной степенью свободы, с помощью которой изучаются колебания, является грузик на пружине жесткости K , на который действуют сила тяжести $m\vec{g}$, возмущающая сила $\underline{F}(t)$, сила упругости $F_{\text{упр}} = K|l - l_0|$ и пропорциональная скорости сила так называемого вязкого трения $\underline{F}_{\text{тр}} = -\beta\underline{V}$, которая моделируется *демпфером*.

Координату x удобно отсчитывать из положения статического равновесия, в котором упругий элемент (пружина) уже имеет деформацию $\delta_{\text{ст}}$. Для безошибочного составления уравнений движения в качестве актуального следует взять состояние, при котором тело смещено в положительном направлении x и имеет положительную же скорость \dot{x} .

Запишем уравнение первого фундаментального закона (второго закона Ньютона) в проекции на ось X :

$$m\ddot{x} = mg + F(t) - \beta\dot{x} - K(x + \delta_{\text{ст}}).$$

В положении равновесия $x \equiv 0, F \equiv 0$ имеем $0 = mg - K\delta_{\text{ст}}$ и уравнение принимает вид

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + Kx = F(t).$$

Наконец, разделив на массу, получим каноническую запись

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega^2x = f(t), \quad (1)$$

где обозначено $\omega^2 = \frac{K}{m}$, $2n = \frac{\beta}{m}$, $f(t) = \frac{F(t)}{m}$.

8.1.1. Свободные колебания без сопротивления.

В отсутствии вязкого сопротивления и возмущающей силы уравнение (1) принимает вид

$$\ddot{x} + \omega^2x = 0. \quad (2)$$

Общее решение этого уравнения – сумма $x = B \cos \omega t + D \sin \omega t$, где постоянные B и D определяются из начальных условий $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$.

$$\begin{cases} x(0) = B = x_0 \\ \dot{x}(0) = D\omega = v_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = x_0 \\ D = \frac{v_0}{\omega} \end{cases} \text{ и } x = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t.$$

Последнее выражение можно записать в виде

$$x = A \sin(\omega t + \alpha),$$

где *собственная частота* ω , *амплитуда* A и *начальная фаза* α колебаний определяются по формулам

$$\omega = \sqrt{K/m}, \quad A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}, \quad \sin \alpha = \frac{x_0}{A}, \quad \cos \alpha = \left(\frac{v_0}{\omega}\right)/A.$$

8.1.2. Вынужденные колебания без сопротивления при гармоническом воздействии. Резонанс.

На тело действует гармоническая сила $F \sin pt$ с частотой p и амплитудой F .

Уравнение (1) принимает вид

$$\ddot{x} + \omega^2 x = f_0 \sin pt \quad (3)$$

Общее решение неоднородного уравнения складывается, как известно, из решения однородного уравнения (2) и частного решения, то есть любой функции, удовлетворяющей уравнению (3). В данном случае частное решение нетрудно угадать: $x_* = a \sin pt$. Подставляя его в (3), получим

$$a(\omega^2 - p^2) \sin pt = f_0 \sin pt, \text{ откуда } a = \frac{f_0}{\omega^2 - p^2}.$$

Итак, общее решение $x = B \cos \omega t + D \sin \omega t + \frac{f_0}{\omega^2 - p^2} \sin pt$. (3a).

Колебания с частотой вынуждающей силы называются *чисто вынужденными колебаниями*, поскольку при учете трения колебания с собственной частотой со временем затухают.

В данном случае вынужденные колебания - частное решение $x_* = a \sin pt = \frac{f_0}{\omega^2 - p^2} \sin pt$.

Зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты возмущающей силы (*амплитудно-частотная характеристика (АЧХ)*) представлена на рис.1.

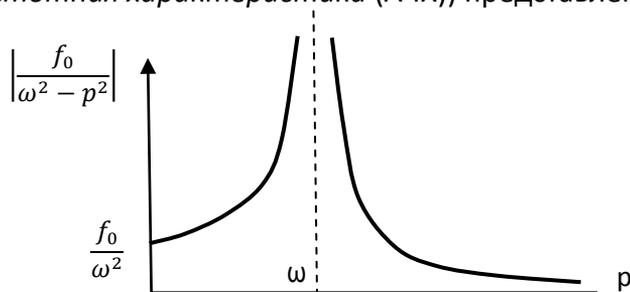


Рис.1. АЧХ

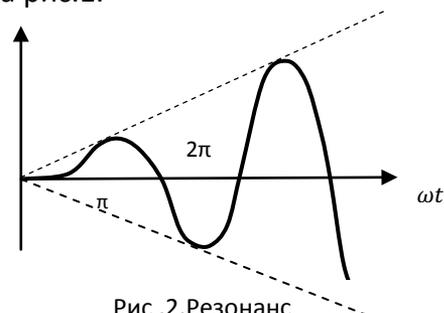


Рис.2.Резонанс

При частоте возмущающей силы, равной собственной частоте, амплитуда колебаний стремится к бесконечности – это явление называют *резонансом*.

Решение при резонансе получим как предел общего решения (3a) при $p \rightarrow \omega$, найдя предварительно из начальных условий значения постоянных B и D . Имеем:

$$\begin{cases} x(0) = B = x_0 \\ \dot{x}(0) = D\omega + \frac{f_0 p}{\omega^2 - p^2} = v_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = x_0 \\ D = \frac{v_0}{\omega} - f_0 \frac{p}{\omega} \cdot \frac{1}{\omega^2 - p^2} \end{cases}$$

и общее решение $x = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t + \frac{f_0}{\omega^2 - p^2} (\sin pt - \frac{p}{\omega} \sin \omega t)$.

Вычисляя при помощи правила Лопиталья предел при $p \rightarrow \omega$, получим

$$x = x_0 \cos \omega t + \left(\frac{v_0}{\omega} + \frac{f_0}{2\omega^2} \right) \sin \omega t - \frac{f_0}{2\omega} t \cos \omega t$$

Подчеркнутое слагаемое показывает рост размаха колебаний пропорционально времени (рис.2)..

8.1.3. Вынужденные колебания без сопротивления при произвольном воздействии. Интеграл Дюамеля.

Дифференциальное уравнение имеет вид

$$\ddot{x} + \omega^2 x = f(t) \quad (4)$$

Частное решение можем найти методом вариации произвольных постоянных: решение ищется в виде решения однородного уравнения, в котором коэффициенты являются неизвестными функциями времени

$$x = B(t) \cos \omega t + D(t) \sin \omega t. \quad (4a)$$

Дифференцируя это выражение, получим

$$\dot{x} = \dot{B}(t) \cos \omega t + \dot{D}(t) \sin \omega t + (-B(t) \sin \omega t + D(t) \cos \omega t) \omega$$

Подчеркнутые слагаемые приравниваются нулю; это можно сделать, поскольку искомое частное решение представлено через две функции $B(t)$ и $D(t)$.

Дифференцируя еще раз и подставляя результат в уравнение (4), получим систему

$$\begin{cases} \dot{B}(t) \cos \omega t + \dot{D}(t) \sin \omega t = 0 \\ \dot{B}(t)(-\sin \omega t) + \dot{D}(t) \cos \omega t = \frac{f(t)}{\omega} \end{cases},$$

откуда находим

$$\dot{B}(t) = -\frac{1}{\omega} f(t) \sin \omega t, \quad \dot{D}(t) = \frac{1}{\omega} f(t) \cos \omega t,$$

и $B(t)$ и $D(t)$ можем записать в виде

$$B(t) = -\frac{1}{\omega} \int_0^t f(\theta) \sin \omega \theta d\theta, B(0) = 0; \quad D(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^t f(\theta) \cos \omega \theta d\theta, D(0) = 0.$$

Подставляя $B(t)$ и $D(t)$ в (4a) и внося $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$ в подинтегральное выражение, получим

$$x(t) = \int_0^t \frac{\sin \omega(t-\theta)}{\omega} f(\theta) d\theta, \quad x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0 \quad (5)$$

Интеграл (5) называется интегралом Дюамеля; его смысл выходит за рамки рассмотренной задачи.

В интеграле (5) $X(t-\theta) \equiv \frac{\sin \omega(t-\theta)}{\omega}$ - координата тела в актуальный момент времени t при действии в момент θ *единичного импульса*, то есть импульса, сообщаемого системе *единичную скорость*. Действительно, решение уравнения $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ при начальных условиях $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 1$ имеет вид $x(t) \equiv X(t) = \frac{1}{\omega} \sin \omega t$. Поэтому (5) представляет собой суперпозицию движений линейной системы под действием элементарных *импульсов силы* $f(\theta)d\theta$.

В любой линейной задаче движение при произвольном воздействии $f(t)$ и нулевых начальных условиях может быть найдено в виде

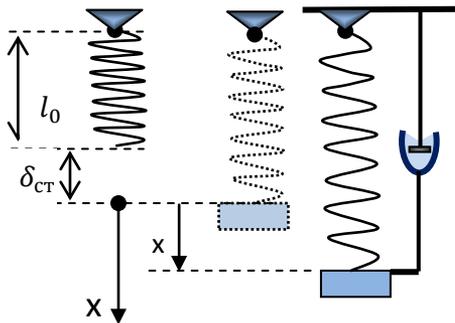
$$x(t) = \int_0^t X(t-\theta) f(\theta) d\theta, \quad x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0, \quad (6)$$

где $X(t)$ - реакция системы на *единичный импульс*.

8.1.4. Свободные колебания с учетом сопротивления.

Дифференциальное уравнение имеет вид

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega^2 x = 0. \quad (7)$$



По методу Эйлера решение будем искать в виде $x = A e^{\lambda t}$. Подставляя его в (7), получим *характеристическое уравнение*

$$A e^{\lambda t} (\lambda^2 + 2n\lambda + \omega^2) = 0,$$

откуда определяются собственные числа $\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - \omega^2}$.

Общее решение имеет вид

$$x = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} = e^{-nt} (A_1 e^{\sqrt{n^2 - \omega^2} t} + A_2 e^{-\sqrt{n^2 - \omega^2} t}), \quad (7a)$$

где A_1 и A_2 определяются из начальных условий. Рассмотрим три возможных случая.

А) Большое сопротивление $n > \omega$.

В этом случае собственные числа λ_1 и λ_2 вещественные и решение имеет вид (7a), которое для удобства часто записывают в виде:

$$x = e^{-nt} (B_1 ch \sqrt{n^2 - \omega^2} t + B_2 sh \sqrt{n^2 - \omega^2} t), \quad (7b)$$

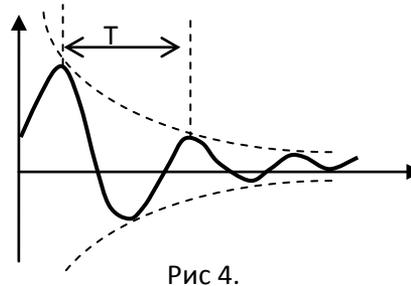
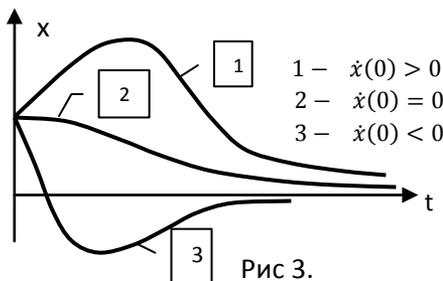
где $sh(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} (e^\theta - e^{-\theta})$, $ch(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} (e^\theta + e^{-\theta})$ – гиперболические функции, удобные для определения постоянных из начальных условий, поскольку

$$sh(0) = 0, \quad ch(0) = 1, \quad \dot{sh}(0) = ch(0) = 1, \quad \dot{ch}(0) = sh(0) = 0$$

$$\text{Имеем } \begin{cases} x(0) = x_0 = B_1 \\ \dot{x}(0) = v_0 = -nB_1 + \sqrt{n^2 - \omega^2} B_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_1 = x_0 \\ B_2 = \frac{v_0 + nx_0}{\sqrt{n^2 - \omega^2}} \end{cases} \text{ и}$$

$$x = e^{-nt} \left(x_0 ch \sqrt{n^2 - \omega^2} t + \frac{v_0 + nx_0}{\sqrt{n^2 - \omega^2}} sh \sqrt{n^2 - \omega^2} t \right), \quad (7c)$$

Эскизы графиков движения в зависимости от начальных условий могут иметь вид (рис. 3). Эти движения принято называть *апериодическими* (непериодическими) колебаниями, хотя они и не имеют колебательного характера.



В) Предельно-апериодическое движение $n = \omega$.

В этом случае собственные числа $\lambda_{1,2} = -n$ – кратные и, как известно из математики, частные решения имеют вид e^{-nt} и te^{-nt} , так что общее решение

$$x = e^{-nt} (C_1 + C_2 t).$$

Впрочем, это решение, как и в случае резонанса (см.8.1.2), получается предельным переходом при $\omega \rightarrow n$ из общего решения (7c). Замечая, что $sh(\theta) = \theta + O(\theta^3)$, получим:

$$x = e^{-nt} (x_0 + (v_0 + nx_0)t)$$

Характер движения вполне описывается эскизами на рис. 3.

С) Малое сопротивление $n < \omega$ (затухающие периодические колебания)

Собственные числа $\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - \omega^2} = -n \pm i\sqrt{\omega^2 - n^2}$ – комплексные и формально записанное решение $x = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$ тоже комплексное. С помощью формулы Эйлера $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ оно принимает вид

$$x = e^{-nt}((A_1 + A_2) \cos \sqrt{\omega^2 - n^2}t + i(A_1 - A_2) \sin \sqrt{\omega^2 - n^2}t).$$

Разумеется, если найти постоянные из *вещественных* начальных условий, мнимая часть решения «исчезнет» (станет равной нулю). Имеем

$$\begin{cases} x(0) = A_1 + A_2 = x_0 \\ \dot{x}(0) = -n(A_1 + A_2) + i\sqrt{\omega^2 - n^2}(A_1 - A_2) = v_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 + A_2 = x_0 \\ i(A_1 - A_2) = (v_0 + nx_0)/\sqrt{\omega^2 - n^2} \end{cases}$$

Таким образом,

$$x = e^{-nt} \left(x_0 \cos(\sqrt{\omega^2 - n^2}t) + \frac{(v_0 + nx_0)}{\sqrt{\omega^2 - n^2}} \sin(\sqrt{\omega^2 - n^2}t) \right). \quad (7d)$$

Обычно это вещественное решение сразу записывают в виде суммы вещественной и мнимой частей, умноженных на константы, определяемые из начальных условий:

$$x = e^{-nt} (C_1 \cos \sqrt{\omega^2 - n^2}t + C_2 \sin \sqrt{\omega^2 - n^2}t).$$

Действительно, если комплексная функция является решением линейного уравнения с вещественными коэффициентами, то решениями являются ее вещественная и мнимая части.

Решение может быть записано в виде одной гармонике

$$x = A e^{-nt} \sin(\sqrt{\omega^2 - n^2}t + \alpha); \quad A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = C_1/C_2.$$

Это движение, несмотря на неточность, называют затухающими периодическими колебаниями (рис. 4). Частота колебаний $\omega_* = \sqrt{\omega^2 - n^2}$, «период» $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - n^2}}$.

8.1.5. Вынужденные колебания с учетом вязкого сопротивления.

Дифференциальное уравнение имеет вид (1)

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega^2 x = f(t).$$

А. Произвольное воздействие (интеграл Дюамеля).

Возьмем для определенности случай малого сопротивления ($n < \omega$). Полагая в решении (7d) предыдущего параграфа $x_0 = 0, v_0 = 1$, получим движение с единичной начальной скоростью (реакцию системы на единичный импульс)

$$X(t) = e^{-nt} \frac{1}{\sqrt{\omega^2 - n^2}} \sin(\sqrt{\omega^2 - n^2}t).$$

Движение при воздействии $f(t)$ описывается интегралом Дюамеля

$$x(t) = \int_0^t X(t - \theta) f(\theta) d\theta = \int_0^t e^{-n(t-\theta)} \frac{\sin(\sqrt{\omega^2 - n^2}(t-\theta))}{\sqrt{\omega^2 - n^2}} f(\theta) d\theta.$$

В. Гармоническое воздействие.

Дифференциальное уравнение имеет вид

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega^2 x = f_0 \sin pt. \quad (8)$$

Частное решение, описывающее установившиеся колебания с частотой возмущающей силы, будем искать в виде $x = B \sin pt + D \cos pt$ или, что одно и то же, в виде

$$x = A \sin(pt - \alpha),$$

где A – амплитуда колебаний, α – фаза.

Подставляя это выражение в (8) и преобразовывая правую часть

$$f_0 \sin pt = f_0 \sin((pt - \alpha) + \alpha), \text{ получим}$$

$$A(\omega^2 - p^2) \sin(pt - \alpha) + A \cdot 2np \cos(pt - \alpha) = f_0 \sin(pt - \alpha) \cos \alpha + f_0 \cos(pt - \alpha) \sin \alpha.$$

Приравнявая коэффициенты при $\sin(pt - \alpha)$ и $\cos(pt - \alpha)$, получим систему

$$\begin{cases} (\omega^2 - p^2)A = f_0 \cos \alpha \\ 2np \cdot A = f_0 \sin \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega^2 - p^2)^2 + (2np)^2}} \\ \operatorname{tg} \alpha = \frac{2np}{(\omega^2 - p^2)} \end{cases} \quad (9)$$

Зависимость амплитуды и фазы колебаний от частоты представлены на рис 5.

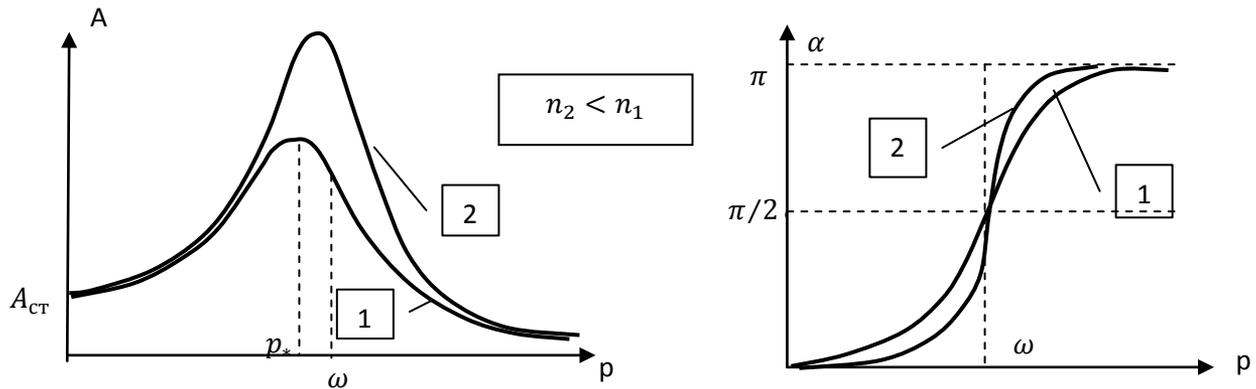
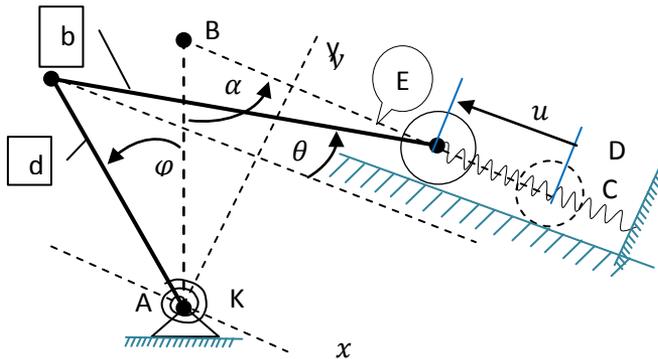


Рис.5. Амплитудно- и фазо - частотные зависимости.

Максимальная амплитуда достигается при частоте $p_* = \sqrt{\omega^2 - 2n^2}$, при которой подкоренное выражение в знаменателе формулы амплитуды (9) минимально.

Пример. Малые колебания кривошипно-шатунного механизма.



В качестве обобщенной координаты выбран угол φ . Уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_{\varphi}$$

Кинетическая энергия, как и для любой системы с одной степенью свободы, имеет вид

$$T = \frac{1}{2} \tilde{a}(\varphi) \dot{\varphi}^2, \text{ где инерционный коэффициент } \tilde{a} \text{ зависит в общем случае от координаты.}$$

Для получения уравнений малых колебаний, то есть линейных уравнений, необходимо в разложении $\tilde{a}(\varphi) = \tilde{a}(0) + \varphi \cdot \frac{1}{1!} \tilde{a}'(0) + \dots$ оставить только первый член $\tilde{a}(0) \equiv a$, что равносильно вычислению кинетической энергии в момент, когда система проходит положение равновесия (на рисунке отмечено пунктирными линиями).

Кинетическая энергия кривошипа $AB - T_1 = \frac{1}{2} m_1 \dot{\varphi}^2$, шатуна $T_2 = \frac{1}{2} J_{zz}^E \omega_2^2 + \frac{1}{2} m_2 v_E^2$, диска $T_3 = \frac{1}{2} J_{zz}^D \omega_3^2 + m_3 v_D^2$. Проецируя основную формулу кинематики твердого тела $\underline{v}_B = \underline{v}_D + \underline{\omega}_2 \times \underline{DB}$ на оси y и x , найдем угловую скорость шатуна и скорость v_D : $\omega_2 = \frac{d}{b} \dot{\varphi} \cos \alpha$, $v_D = d \dot{\varphi} \sin \alpha$ и затем

$$v_E^2 = (\underline{v}_D + \underline{\omega}_2 \times \underline{DE}) \cdot (\underline{v}_D + \underline{\omega}_2 \times \underline{DE}) = d^2 \dot{\varphi}^2 (\sin^2 \alpha + \frac{1}{4} \cos^2 \alpha). \text{ Таким образом,}$$

$$T = \frac{1}{2} a \dot{\varphi}^2, \quad a = J_{zz}^A + m_2 d^2 (\sin^2 \alpha + \frac{1}{4} \cos^2 \alpha) + J_{zz}^E (\frac{d}{b} \cos \alpha)^2 + (J_{zz}^D \frac{1}{R^2} + m_3) d^2 \sin^2 \alpha$$

Потенциальная энергия

$$\Pi = m_1 g \frac{d}{2} \cos \varphi + m_2 g \cdot \frac{1}{2} (u \cos \alpha - d(1 - \cos \varphi)) + m_3 g \cdot (u \cos \alpha) + \frac{1}{2} C (u + \delta)^2 + \frac{1}{2} K (\varphi + \Delta)^2,$$

где δ и Δ - статические деформации пружин в положении равновесия. Связь между u и φ выражается формулами

$$\begin{cases} u(\varphi) = (-d \cos \alpha + b) - (-d \cos(\alpha - \varphi) + b \cos \theta) \\ d \sin \alpha = d \sin(\alpha - \varphi) + b \sin \theta \end{cases} \quad (1)$$

Для получения уравнений малых колебаний в выражении потенциальной энергии необходимо сохранить члены порядка φ^2 или, что проще, найти значение $\Pi''(0)$.

Из (1) имеем:

$$u'(\varphi) = d \sin(\alpha - \varphi) + b \sin \theta \cdot \theta', \quad \theta' = \frac{d \cos(\alpha - \varphi)}{b \cos \theta}, \quad u'(0) = d \sin \alpha,$$

$$u''(\varphi) = -d \cos(\alpha - \varphi) + b \cos \theta \cdot (\theta')^2 + b \sin \theta \cdot \theta'', \quad u''(0) = d \cos \alpha (\frac{d}{b} \cos \alpha - 1)$$

и, дифференцируя потенциальную энергию, получим

$$\Pi'(\varphi) = -\frac{m_1 + m_2}{2} g d \sin \varphi + \left(\frac{m_2}{2} + m_3\right) g \cos \alpha \cdot u' + C(u(\varphi) + \delta)u' + K(\varphi + \Delta),$$

$$\Pi'(0) = \left(\frac{m_2}{2} + m_3\right) g \cos \alpha \cdot d \sin \alpha + C \delta \cdot d \sin \alpha + K \Delta = -Q_\varphi(0) \equiv 0. \quad (2)$$

$$\Pi''(\varphi) = -\frac{m_1 + m_2}{2} g d \cos \varphi + \left[\left(\frac{m_2}{2} + m_3\right) g \cos \alpha + C(u + \delta)\right] u''(\varphi) + C(u')^2 + K,$$

$$\Pi''(0) = \left\{K + C d^2 \sin^2 \alpha - \frac{m_1 + m_2}{2} g d\right\} + \left[\left(\frac{m_2}{2} + m_3\right) g \cos \alpha + C \delta\right] \cdot d \cos \alpha \left(\frac{d}{b} \cos \alpha - 1\right) \quad (3)$$

Формула (2), выражающая равенство нулю обобщенной силы $Q_\varphi = -\Pi'(\varphi)$ в положении равновесия, связывает статические деформации. Слагаемые в фигурной скобке в (3) соответствуют «кинематическому» подходу при вычислении перемещений для потенциальной энергии, при котором связь между перемещениями получают «интегрированием» связей между скоростями в момент прохождения системой положения равновесия, т.е. просто убирают знаки производных по времени. В данном примере это означает, что из выражения $\dot{u} = v_D = d \cdot \dot{\varphi} \sin \alpha$ следовало бы $u = d \cdot \varphi \sin \alpha$, что при подстановке в потенциальную энергию привело бы к ошибке в (3). Из (3) и (4) следует, что «кинематический» подход является верным только в следующих случаях:

$$\text{а) } \alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \text{б) статическая деформация спиральной пружины } \Delta = 0, \quad \text{в) } \frac{d}{b} \cos \alpha = 1.$$

Уравнение малых колебаний имеет вид $a \ddot{\varphi} = -C^* \varphi$, где величину $C^* \equiv \Pi''(0)$ называют обобщенной жесткостью.

8.2. Колебания системы с несколькими степенями свободы.

8.2.1. Линеаризация уравнений движения вблизи положения равновесия.

Поскольку линейные уравнения легко решать и исследовать, малые колебания являются самым разработанным отделом механики; даже во многих нелинейных задачах линейное приближение дает вполне удовлетворительный результат.

Движение тела (системы) будем описывать уравнениями Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_s} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_s} = Q_s, \quad s = (1, 2 \dots n),$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ - обобщенные координаты.

Положение (или положения) равновесия определяются либо из уравнений движения, в которых следует положить скорости и ускорения равными нулю, либо с помощью принципа возможных скоростей, который, как мы видели, является следствием уравнений Лагранжа.

В том и другом случае положения равновесия определяются из системы $Q_s = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_s} = 0$.

Не ограничивая общности, будем считать для простоты, что обобщенные координаты в положении равновесия равны нулю (всегда можно «сдвинуть» координаты).

Кинетическая энергия является однородной квадратичной формой обобщенных скоростей

$$T = T(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \tilde{a}_{sk}(x) \dot{x}_s \dot{x}_k, \quad (s, k=1, \dots, n).$$

Разложим в ряд Маклорена коэффициенты инерции и ограничимся лишь первыми членами $\tilde{a}_{sk}(x) \approx \tilde{a}_{sk}(0) \equiv a_{sk}$, поскольку удержание прочих приводит к нелинейным уравнениям Лагранжа. С практической точки зрения это соответствует тому, что кинетическую энергию надо вычислять в момент, когда система проходит положения равновесия. Таким образом,

$$T \approx \frac{1}{2} a_{sk} \dot{x}_s \dot{x}_k. \quad (1)$$

Потенциальную энергию также разложим в ряд до членов второй степени включительно

$$\Pi(x) = \Pi(0) + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x_s} \right)_{x=0} x_s + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x_s \partial x_k} \right)_{x=0} x_s x_k$$

В этом разложении линейные относительно координат слагаемые равны нулю, поскольку в положении равновесия $x = 0$ равны нулю обобщенные силы $Q_s = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_s}$, постоянное же слагаемое $\Pi(0)$ можем считать равным нулю « для красоты », т.к. Π определена с точностью до константы.

Обозначив $\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x_s \partial x_k} \right)_{x=0} \equiv c_{sk}$, получим

$$\Pi(x) \approx \frac{1}{2} c_{sk} x_s x_k, \quad Q_s = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_s} = -c_{sk} x_k \quad (2)$$

Подставляя (1) и (2) в уравнения Лагранжа, получим систему

$$a_{sk} \ddot{x}_k + c_{sk} x_k = 0, \quad s = (1, 2 \dots n). \quad (3)$$

Если ввести матрицы *инерции* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ и *жесткости* $C = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$,

то кинетическую (1) и потенциальную энергию (2) можно записать в виде квадратичных форм $T = \frac{1}{2} \dot{x}^T A \dot{x}$, $\Pi = \frac{1}{2} x^T C x$, а систему уравнений (3) в матричном виде

$$A \ddot{x} + C x = 0, \quad (4)$$

где x - вектор- столбец обобщенных координат.

Определение: симметричная матрица B называется положительно определенной (или просто положительной), если порождаемая ею квадратичная форма $F = y^T B y$ положительно определена, то есть $F(0) = 0$, $F(y) = y^T B y > 0 \forall y \neq 0$.

Согласно этому определению, матрица инерции A положительно определена ($A > 0$), поскольку кинетическая энергия положительна при любых ненулевых скоростях.

8.2.2 Устойчивость положения равновесия.

Не обращаясь к традиционному языку математики « $(\delta - \varepsilon)$ », скажем, что положение равновесия $x = x_0$ называется устойчивым по Ляпунову, если при достаточно малых начальных отклонениях и скоростях система не выйдет за пределы наперед заданной сколь угодно малой окрестности положения равновесия.

Теорема Лежен Дирихле об устойчивости.

Если в положении равновесия $x = x_0$ потенциальная энергия имеет строгий локальный минимум, то положение равновесия устойчиво по Ляпунову.

Кажется правдоподобным, что если в положении равновесия минимума $\Pi(x)$ нет, то положение равновесия неустойчиво, но это в общем случае не доказано; существует множество частных теорем, из которых приведем теорему Ляпунова:

Если в положении равновесия потенциальная энергия не имеет строгого локального минимума, причем это обстоятельство видно из разложения энергии в ряд, в котором сохранены только члены второго порядка, то положение равновесия неустойчиво.

Если потенциальная энергия имеет вид квадратичной формы $\Pi(x) = \frac{1}{2} c_{sk} x_s x_k$, то в случае ее положительной определенности положение равновесия устойчиво; если же нет – неустойчиво. Напомним, что квадратичная форма называется положительно определенной, если $\Pi(0) = 0$, $\Pi(x) > 0 \forall x \neq 0$. Ясно, что положительно определенная форма имеет в точке $x = 0$ строгий локальный минимум и, в соответствии с теоремой Дирихле, положение равновесия устойчиво; в противном случае локального минимума нет и в соответствии с теоремой Ляпунова положение равновесия неустойчиво.

Из линейной алгебры известен критерий Сильвестра:

Необходимым и достаточным условием положительной определенности квадратичной формы является положительность главных диагональных миноров и определителя матрицы, составленной из ее коэффициентов (в данном случае матрицы жесткости C)

$$c_{11} > 0, \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1n} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix} > 0.$$

8.2.3. Собственные частоты и формы малых колебаний.

Руководствуясь тем, что ожидаемое движение имеет колебательный характер, частное решение системы (3) (или (4)) будем искать в виде

$$x = u \sin(\omega t + \alpha) \text{ или } \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix} \sin(\omega t + \alpha), \quad (5)$$

где вектор u называется амплитудным вектором.

Подставляя (5) в систему (4), получим

$$\begin{aligned} (C - \omega^2 A) u \sin(\omega t + \alpha) &= 0, \text{ откуда} \\ (C - \omega^2 A) u &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Чтобы однородная система (6) имела ненулевое решение u , необходимо, чтобы определитель этой системы был равен нулю:

$\det(C - \omega^2 A) = 0$, или, раскрывая определитель по степеням ω^2 , получим так называемое частотное уравнение n -ой степени относительно ω^2

$$b_0(\omega^2)^n + b_1(\omega^2)^{n-1} + \dots + b_n = 0, \quad (7)$$

где, в частности, коэффициенты $b_0 = (-1)^n \det A$, $b_n = \det C$.

Стандартным в линейной алгебре способом, опирающимся на симметрию матриц A и C , можно показать, что все корни ω_s^2 частотного уравнения вещественны, и, более того, если матрица жесткости C положительно определена (т.е. положение равновесия устойчивое), то корни положительные. В этом случае n корней ω_s (с учетом их кратности) называются *собственными частотами*.

Ортогональность и линейная независимость форм колебаний.

Подставив простую, т.е. кратности «один», собственную частоту ω_s в систему (6), получим $(n-1)$ уравнений для n элементов амплитудного вектора u_s , поскольку при равенстве нулю определителя одно уравнение является линейной комбинацией остальных; поэтому из системы мы можем найти только отношения амплитуд к первой, например, амплитуде:

$$u_s = (1, u_{s2}, u_{s3} \dots u_{sn})^T. \quad (8)$$

Амплитудный вектор (8), элементами которого являются отношения амплитуд, называется *собственной формой колебаний*. Колебания, описываемые выражением (5) при подстановке в него собственных частот ω_s и форм u_s , называются *главными колебаниями*.

Покажем, что собственные формы колебаний, соответствующие различным частотам, ортогональны «с весом» матрицы инерции A . Выпишем систему (6) для двух частот ω_s и ω_m

$$\begin{aligned} (C - \omega_s^2 A) u_s &= 0, \\ (C - \omega_m^2 A) u_m &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Первую из систем (9) умножим слева на u_m^T , а вторую на u_s^T и вычтем:

$$u_m^T C u_s - u_s^T C u_m - \omega_s^2 u_m^T A u_s + \omega_m^2 u_s^T A u_m = 0.$$

Учитывая симметричность A и C , получим:

$$(\omega_m^2 - \omega_s^2) u_m^T A u_s = 0,$$

откуда получаем ортогональность собственных форм «с весом A » или «в метрике A »

$$u_m^T A u_s = 0, \quad m \neq s.$$

Заметим, что из ортогональности с весом A из (9) следует и ортогональность с весом C :

$$u_m^T C u_s = 0$$

В случае частоты второй (для определенности) кратности равен нулю не только определитель системы (6), но и миноры порядка $(n-1)$, т.е. имеется $(n-2)$ уравнений для n элементов амплитудного вектора, поэтому он имеет вид

$$u = (1, a, u_2, u_3 \dots u_n)^T,$$

где a - произвольное число. Это обстоятельство позволяет для частоты *второй* кратности построить две собственные формы u_1 и u_2 с числами $a_1 = 1$ и a_2 и найти a_2 из условия ортогональности $u_1^T A u_2 = 0$.

Из ортогональности форм следует их линейная независимость, то есть равенство

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i = 0$$

возможно тогда и только тогда, когда все $\alpha_i = 0$. Действительно, умножив эту сумму на матрицу A слева и потом на u_j^T , получим с учетом ортогональности только одно слагаемое

$$(u_j^T A u_j) \alpha_j = 0, \Rightarrow \alpha_j = 0.$$

8.2.4. Общее решение задачи о свободных колебаниях.

Общее решение строится как сумма главных колебаний с произвольными фазами, умноженных на произвольные постоянные :

$$x = \sum_{s=1}^n C_s u_s \sin(\omega_s t + \alpha_s),$$

или

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{s=1}^n C_s \begin{pmatrix} u_{s1} \\ u_{s2} \\ \dots \\ u_{sn} \end{pmatrix} \sin(\omega_s t + \alpha_s).$$

В общем решении $2n$ произвольных постоянных C_s и α_s , которые можем найти из $2n$ начальных условий $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0$:

$$\begin{cases} \sum_{s=1}^n C_s \sin(\alpha_s) u_s = x_0 \\ \sum_{s=1}^n C_s \cos(\alpha_s) \omega_s u_s = v_0 \end{cases}$$

Обозначим $a_s = C_s \sin(\alpha_s)$, $b_s = C_s \cos(\alpha_s) \omega_s$ и перепишем систему в виде

$$\begin{cases} \sum_{s=1}^n a_s u_s = x_0 \\ \sum_{s=1}^n b_s u_s = v_0 \end{cases}$$

Определитель каждой из подсистем не равен нулю, поскольку его столбцы – линейно независимые формы колебаний. Постоянные C_s и α_s выражаются через a_s и b_s :

$$C_s = \sqrt{a_s^2 + \left(\frac{b_s}{\omega_s}\right)^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha_s = \frac{a_s \omega_s}{b_s}.$$

Пример:

К концу вертикального стержня длиной a и массой m_1 на тросе длиной b подвешен груз массой m_2 . Устойчивость вертикального положения равновесия обеспечивается спиральной пружиной жесткостью K .

$$\text{Потенциальная энергия } \Pi = \frac{1}{2} K \varphi^2 + \frac{1}{2} m_1 g a \cos \varphi + m_2 g (a \cos \varphi - b \cos \psi).$$

Раскладывая ее в ряд до второй степени включительно, получим

$$\Pi = \frac{1}{2} \varphi^2 C_{11} + \frac{1}{2} \psi^2 C_{22}, \quad \text{где } C_{11} = K - \left(\frac{1}{2} m_1 g a + m_2 g a\right), \quad C_{22} = m_2 g b.$$

$$\text{Обобщенные силы } Q_\varphi = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = -C_{11} \varphi, \quad Q_\psi = -\frac{\partial \Pi}{\partial \psi} = -C_{22} \psi$$

Кинетическая энергия, как уже отмечалось, записывается в момент прохождения системой положения равновесия:

$$T = \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_2 (a \dot{\varphi} + b \dot{\psi})^2 = \frac{1}{2} a_{11} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} a_{22} \dot{\psi}^2 + a_{12} \dot{\varphi} \dot{\psi}, \quad \text{где}$$

$$a_{11} = I + m_2 a^2 = \frac{1}{3} m_1 a^2 + m_2 a^2, \quad a_{22} = m_2 b^2, \quad a_{12} = m_2 a b.$$

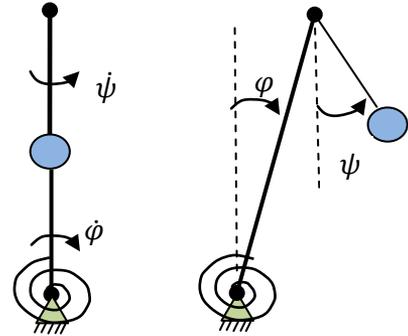
Уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \psi} = Q_\psi$$

имеют вид

$$\begin{cases} a_{11} \ddot{\varphi} + a_{12} \ddot{\psi} + C_{11} \varphi = 0, \\ a_{12} \ddot{\varphi} + a_{22} \ddot{\psi} + C_{22} \psi = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Решение системы (1) будем искать в виде



$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \sin(\omega t + \alpha), \\ A(C_{11} - \omega^2 a_{11}) + B(-\omega^2 a_{12}) = 0 \\ A(-\omega^2 a_{12}) + B(C_{22} - \omega^2 a_{22}) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Приравнявая определитель нулю, получим частотное уравнение

$$\omega^4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) - \omega^2(a_{11}C_{22} + a_{22}C_{11}) + C_{11}C_{22} = 0$$

Пусть $m_1 \equiv m = 3m_2$, $b = \frac{1}{2}a$, $K = \frac{11}{6}mga$. Тогда

$$a_{11} = \frac{2}{3}ma^2, \quad a_{22} = \frac{1}{12}ma^2, \quad a_{12} = \frac{1}{6}ma^2, \quad C_{11} = mga, \quad C_{22} = \frac{1}{6}mga.$$

Частотное уравнение примет вид

$$\omega^4 - 7\frac{g}{a}\omega^2 + 6\left(\frac{g}{a}\right)^2 = 0, \quad \Rightarrow \omega_1^2 = 1\frac{g}{a}, \quad \omega_2^2 = 6\frac{g}{a}.$$

Отношение амплитуд найдем из первого, например, уравнения системы (2):

$$\frac{B}{A} = \frac{(C_{11} - \omega^2 a_{11})}{\omega^2 a_{12}}. \quad \text{Для первой собственной частоты } \frac{B}{A} = 2 \text{ и главное колебание}$$

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \sin(\omega_1 t + \alpha_1), \quad \text{для второй } \frac{B}{A} = -3 \text{ и } \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \sin(\omega_2 t + \alpha_2).$$

Общее решение имеет вид

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \sin(\omega_2 t + \alpha_2), \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{g}{a}}, \quad \omega_2 = \sqrt{6\frac{g}{a}}.$$

8.2.5. Главные (нормальные) координаты

Независимость структуры уравнений Лагранжа от выбора обобщенных координат наводит на мысль о возможности введения таких координат, называемых *главными*, чтобы каждое из уравнений Лагранжа содержало бы только одну координату, или, что равносильно, чтобы матрицы жесткости и инерции были бы диагональными.

Можно было бы сослаться на теорему из линейной алгебры, которая утверждает, что две симметричные матрицы, одна из которых положительна (в данном случае это матрица инерции A), можно одним неособенным преобразованием привести к диагональному виду, но уже рассмотренные собственные формы u_s позволяют без труда это сделать.

Введем новые координаты $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ по формулам

$$x(t) = \sum_{s=1}^n \theta_s(t) u_s \quad (10)$$

$$\text{или} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{s=1}^n \theta_s(t) \begin{pmatrix} u_{s1} \\ u_{s2} \\ \dots \\ u_{sn} \end{pmatrix}$$

Имеем $T = \frac{1}{2} \dot{x}^T A \dot{x} = \frac{1}{2} \dot{\theta}_s \dot{\theta}_k u_s^T A u_k$ и, учитывая ортогональность $u_s^T A u_k = \begin{cases} 0, & s \neq k \\ a_s^* \equiv u_s^T A u_s, & s = k \end{cases}$

$$T = \frac{1}{2} \dot{\theta}_s^2 a_s^*.$$

Совершенно аналогично $\Pi = \frac{1}{2} x^T C x = \frac{1}{2} \theta_s \theta_k u_s^T C u_k = \frac{1}{2} \theta_s^2 c_s^*$, где $c_s^* \equiv u_s^T C u_s$.

Таким образом, система уравнений Лагранжа в главных координатах распадается на n уравнений вида

$$a_s^* \ddot{\theta}_s + c_s^* \theta_s = 0, \quad \text{или} \quad \ddot{\theta}_s + \omega_s^2 \theta_s = 0, \quad \omega_s^2 = \frac{c_s^*}{a_s^*}, \quad (s = 1, \dots, n), \quad (11)$$

решения которых являются *главными колебаниями* $\theta_s = A_s \sin(\omega_s t + \alpha_s)$.

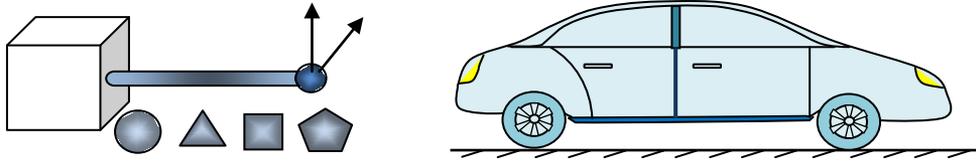
Ясно, что отыскание главных координат, по сути, означает решение исходной задачи по вычислению собственных частот и форм, поэтому главные координаты имеют, главным образом, теоретическое значение, позволяющее рассмотреть некоторые особые случаи.

1. Случай кратных частот

В общем случае система $A\ddot{x} + Cx = 0$ в случае кратных собственных чисел (частот) имеет решения, содержащие время t вне синуса (т.н. вековые члены). Так, в случае корня второй кратности, соответствующее решение должно иметь вид $x = (C + Dt) \sin \omega t$, то есть амплитуда колебаний должна неограниченно возрасти, что противоречит факту сохранения полной энергии консервативной системы.

Дело в том, что в случае симметричности матриц A и C вековых членов не возникает, что и видно из уравнений движения в главных координатах (11).

Практически же случай равных частот весьма распространен, а иногда и желателен. Так, наиболее рациональной является такая конструкция автомобиля, при которой угловые и вертикальные колебания кузова независимы и, более того, их частоты равны.



Простой пример тела с двумя равными частотами - груз на стержне с одинаковой во всех направлениях изгибной жесткостью.

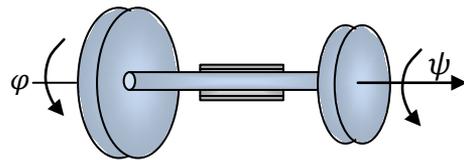
2. Случай нулевой частоты. Пример.

Если частота $\omega_k = 0$, то уравнение для этой главной координаты имеет вид $\ddot{\theta}_k = 0$ и решение $\theta_k = at + b$. Физически это решение означает, что система может совершать движение без деформации - жесткое движение.

Пример. Вал с двумя дисками [8].

Кинетическая энергия $T = \frac{1}{2}I_1 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}I_2 \dot{\psi}^2$, Потенциальная $\Pi = \frac{1}{2}C(\psi - \varphi)^2$, где C - жесткость вала на кручение. Подставляя T и Π в уравнения Лагранжа

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \psi} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \psi} \end{cases}$$



получим
$$\begin{cases} I_1 \ddot{\varphi} + C\varphi + (-C)\psi = 0 \\ I_2 \ddot{\psi} + (-C\varphi) + C\psi = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Отыскивая решение в виде $\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \sin(\omega t + \alpha)$, получим систему

$$\begin{cases} (C - I_1\omega^2)u_1 + (-C)u_2 = 0 \\ -Cu_1 + (C - I_2\omega^2)u_2 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Частотное уравнение $\det(C - \omega^2 A) = \begin{vmatrix} C - I_1\omega^2 & -C \\ -C & C - I_2\omega^2 \end{vmatrix} = 0$ имеет вид

$$\omega^2 [I_1 I_2 \omega^2 - C(I_1 + I_2)] = 0, \quad \text{откуда } \omega_1^2 = 0, \quad \omega_2^2 = C \frac{(I_1 + I_2)}{I_1 I_2}.$$

Форму колебаний для нулевой частоты найдем формальным образом, подставляя $\omega_1^2 = 0$ в любое из уравнений системы (2), полагая амплитуду u_{11} равной единице: $u_{12} = u_{11} = 1$. Эта форма «колебаний» описывает вращение дисков без деформации вала.

Форма колебаний для второй частоты $u_{21} = 1, u_{22} = -\frac{I_1}{I_2}$.

$$u_{11} = 1 \quad \boxed{} \quad u_{12} = 1 \quad u_{21} = 1 \quad \triangle \quad u_{22} = -\frac{I_2}{I_1}$$

Заметим, что форма, соответствующая нулевой частоте, ортогональна второй:

$$u_1^T A u_2 = (1 \ 1) \begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ u_{22} \end{pmatrix} = 0.$$

Общее решение задачи удобно построить, используя главные координаты

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = \theta_1 u_1 + \theta_2 u_2 \equiv \theta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \theta_2 \begin{pmatrix} 1 \\ u_{22} \end{pmatrix} \quad (3)$$

Подставляя (3) в выражения кинетической и потенциальной энергии, получим:

$$T = \frac{1}{2} \dot{\theta}_1^2 a_1^* + \frac{1}{2} \dot{\theta}_2^2 a_2^*, \quad \text{где } a_1^* = I_1 + I_2, \quad a_2^* = I_1 + I_2 u_{22}^2 = I_1 \left(1 + \frac{I_1}{I_2}\right),$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \theta_1^2 c_1^* + \frac{1}{2} \theta_2^2 c_2^*, \quad \text{где } c_1^* = 0, \quad c_2^* = C(u_{22} - 1)^2 = C \left(1 + \frac{I_1}{I_2}\right)^2.$$

Уравнения Лагранжа

$$\ddot{\theta}_1 = 0, \quad \ddot{\theta}_2 + \omega_2^2 \theta_2 = 0; \quad \omega_2^2 = \frac{c_2^*}{a_2^*} = \frac{C}{I_1} \left(1 + \frac{I_1}{I_2}\right) = C \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2}.$$

$$\text{Решение } \theta_1 = At + B, \quad \theta_2 = B \sin(\omega_2 t) + E \cos(\omega_2 t).$$

8.2.6. Вынужденные колебания системы с несколькими степенями свободы.

Система уравнений движения при наличии возмущающих воздействий имеет вид

$$A \ddot{x} + Cx = Q(t), \quad (12)$$

где $Q(t)$ – вектор-столбец обобщенных сил.

1. Разложение по формам свободных колебаний (метод главных координат)

Если обобщенные силы являются произвольными функциями времени, то аналитическое решение системы (12) весьма затруднительно. В этом случае можно применить метод разложения по формам свободных колебаний. Ищем решение в виде суммы

$$x(t) = \theta_k(t) u_k, \quad (13)$$

где u_k – собственные формы, удовлетворяющие системе $(C - \omega_k^2 A) u_k = 0$.

Подставим (13) в систему (12):

$$\ddot{\theta}_k(t) A u_k + \theta_k(t) C u_k = Q(t).$$

Умножая последовательно эту систему слева на u_s^T , ($s = 1, 2, \dots, n$) с учетом ортогональности

$$u_s^T A u_k = \begin{cases} a_s^* \equiv u_s^T A u_s^T, & s=k, \\ 0, & s \neq k \end{cases}, \quad u_s^T C u_k = \begin{cases} c_s^* \equiv u_s^T C u_s^T, & s=k, \\ 0, & s \neq k \end{cases}$$

получим n уравнений

$$a_s^* \ddot{\theta}_s + c_s^* \theta_s = F_s(t), \quad F_s(t) \equiv u_s^T Q(t),$$

или, разделив на a_s^*

$$\ddot{\theta}_s + \omega_s^2 \theta_s = f_s(t); \quad \omega_s^2 = \frac{c_s^*}{a_s^*}, \quad f_s(t) = \frac{1}{a_s^*} u_s^T Q(t), \quad (s = 1, 2, \dots, n)$$

Решения этих неоднородных уравнений, как известно, складываются из решения однородного уравнения $\theta_s^{\text{одн}} = B \sin(\omega_s t) + E \cos(\omega_s t)$ и решения θ_s^* неоднородного, которое можно получить с помощью интеграла Дюамеля

$$\theta_s^* = \int_0^t \frac{1}{\omega_s} f_s(\eta) \sin \omega_s(t - \eta) d\eta.$$

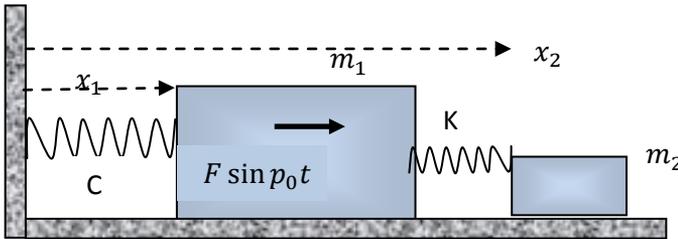
2. Случай гармонических обобщенных сил. Пример: динамический гаситель

Если вектор - столбец обобщенных сил имеет вид $Q(t) = F \sin pt$, то частное решение системы (12) можем найти в виде $x = D \sin pt$:

$(C - p^2 A)D \sin pt = F \sin pt$, откуда получаем систему линейных уравнений относительно амплитудного вектора D : $(C - p^2 A)D = F$.

Решение этой системы можем получить, например, с помощью формулы Крамера $D_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}$, где $\Delta = \det(C - p^2 A)$ – определитель системы, а Δ_k – определитель, в котором «К – й» столбец заменен столбцом F .

Пример. Динамический гаситель колебаний. Антирезонанс.



Движение тела массы m_1 , закрепленного на упругой опоре жесткости C , под действием силы $F \sin p_0 t$, описывается уравнением

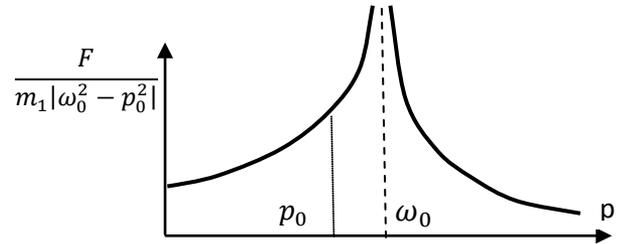
$$m_1 \ddot{x}_1 = -Cx_1 + F \sin p_0 t,$$

частное решение которого (чисто вынужденные колебания) имеет вид

$$x_1 = \frac{F}{m_1(\omega_0^2 - p_0^2)} \sin p_0 t, \text{ где } \omega_0^2 = \frac{C}{m_1} \text{ – квадрат собственной частоты.}$$

Сила $F \sin p_0 t$ моделирует, например, причину колебаний корпуса двигателя ввиду неуравновешенности его движущихся частей.

Зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы p (амплитудно-частотная характеристика) имеет вид:



Прикрепим к телу груз m_2 на пружине жесткостью K . Подставляя кинетическую и потенциальную энергии системы

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2, \quad \Pi = \frac{1}{2} C x_1^2 + \frac{1}{2} K(x_2 - x_1)^2$$

в уравнения Лагранжа $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_1} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_1} + F \sin p_0 t$, $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_2} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_2}$, получим

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (C + K)x_1 + (-K)x_2 = F \sin p_0 t \\ m_2 \ddot{x}_2 + (-K)x_1 + Kx_2 = 0 \end{cases}$$

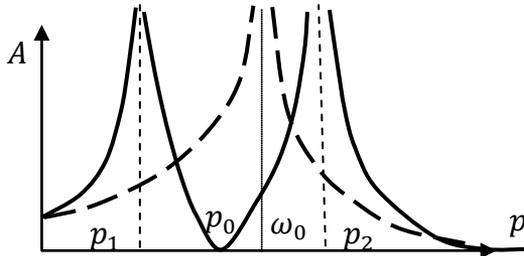
Отыскивая частное решение этой системы в виде $x_1 = A \sin p_0 t$, $x_2 = B \sin p_0 t$, получим

$$\begin{cases} A(C + K - p_0^2 m_1) + B(-K) = F \\ A(-K) + B(K - p_0^2 m_2) = 0 \end{cases}$$

Откуда $A = \frac{1}{\det} F(K - p_0^2 m_2)$, $B = \frac{1}{\det} KF$, где определитель системы

$$\det = (C + K - p_0^2 m_1)(K - p_0^2 m_2) - K^2.$$

Из выражения для A видно, что, если массу m_2 и жесткость пружины K «дополнительного» тела, называемого динамическим гасителем, подобрать так, чтобы $\frac{K}{m_2} = p_0^2$, то амплитуда колебаний «основного» тела, на которое действует сила, будет равна нулю: $A = 0$; это невозможное для статических задач свойство динамических задач называется *антирезонансом*.



Замечание. Динамический гаситель колебаний, позволяющий уменьшить вибрацию вблизи номинальной рабочей частоты p_0 , превращает защищаемый механизм в систему с двумя степенями свободы и, соответственно, с двумя резонансными частотами p_1 и p_2 , которые являются собственными частотами и определяются из уравнения

$$\det(p^2) = (C + K - p^2 m_1)(K - p^2 m_2) - K^2 = 0,$$

где $K = p_0^2 m_2$ (гаситель настроен на частоту p_0).

Это уравнение можно переписать в виде

$$\det(p^2) = m_1 m_2 [p^4 - p^2(\omega_0^2 + p_0^2(1 + \alpha)) + \omega_0^2 p_0^2] = 0,$$

где обозначено $\alpha = \frac{m_2}{m_1}$. Корни этого уравнения лежат по разные стороны от рабочей частоты p_0 и собственной резонансной частоты ω_0 (см. рисунок), поэтому при выводе механизма на рабочую частоту возникает проблема перехода через резонансную частоту p_1 .

8.3. Колебания упругих тел с распределенными параметрами.

Перемещения, деформации, внутренние силы и моменты, распределение массы в реальных телах и их моделях описываются *функциями* положения (места) и времени, поэтому число степеней свободы бесконечно. Однако в зависимости от требуемой точности и характера изучаемого движения (покоя) можно свести задачу к модели с несколькими степенями свободы (осуществить *дискретизацию*). Имеются различные способы дискретизации.

8.3.1. Метод Рэлея-Ритца

Для иллюстрации метода рассмотрим прямолинейный стержень, который может совершать продольные, крутильные, изгибные колебания. Перемещения задаются в виде ряда

$$u(z, t) = \sum_{k=1}^n x_k(t) \tilde{y}_k(z), \quad (1)$$

где $\tilde{y}_k(z)$ - задаваемые линейно-независимые функции координат, (*координатные функции*), а $x_k(t)$ - неизвестные функции времени, которые в терминах механики Лагранжа можно назвать обобщенными координатами. Если используется только одна координатная функция, метод называется методом Рэлея. Координатные функции должны, по меньшей мере, удовлетворять краевым условиям для перемещений (т.н. кинематическим условиям); разумеется, если удовлетворяются хотя бы некоторые силовые условия, результаты будут ближе к точному решению.

Кинетическая и потенциальная энергии деформации (внутренняя энергия) во всех отдельно рассматриваемых случаях имеют вид

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l a \dot{u}^2 dz, \quad \Pi = \frac{1}{2} \int_0^l c \varepsilon^2 dz, \quad (2)$$

где $a(z)$ и $c(z)$ – приведенные в таблице коэффициенты инерции и жесткости, а ε – деформация. Подставляя (1) в (2), получим

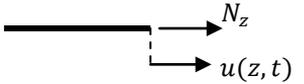
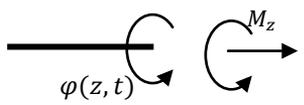
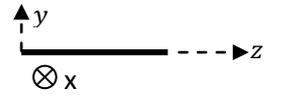
$$T = \frac{1}{2} a_{sk} \dot{x}_s \dot{x}_k, \quad \Pi = \frac{1}{2} c_{sk} x_s x_k, \quad \text{где } a_{sk} = \int_0^l a \tilde{u}_s \tilde{u}_k, \quad c_{sk} = \int_0^l \tilde{u}_s^T c(z) \tilde{u}_k dz$$

Уравнения Лагранжа для полученной системы с n степенями свободы имеют вид

$$a_{sk} \ddot{x}_k + c_{sk} x_k = Q_s^*(t), \quad s = 1, 2 \dots n,$$

где $Q_s^*(t)$ – обобщенные силы, соответствующие внешним воздействиям $F(z, t)$

$$Q_s^*(t) = \int_0^l F(z, t) \cdot \tilde{u}_s(z) dz.$$

	Пере- мещение	Деформация	Жесткость $C(z)$	Инерция $a(z)$	Усилия и Моменты
Продольные колебания 	u	$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial z}$	ES	$\rho_* S$	Продольная сила $N_z = C\varepsilon$
Крутильные колебания 	φ	$\varepsilon = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$	GI_p	$\rho_* I_p$	Крутящий момент $M_z = C\varepsilon$
Изгибные колебания 	u	$\varepsilon = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$	EI_x	$\rho_* S$	Перерезывающая сила $Q_y = \frac{\partial M_x}{\partial z}$ Изгибающий момент $M_x = C\varepsilon$

Пример 1. Свободные изгибные колебания консольного клина переменного круглого сечения

Кинетическая энергия $T = \frac{1}{2} \int_0^l \rho(z) \dot{u}^2 dz$, где $\rho(z) = \rho_* S(z)$ – масса единицы длины стержня (погонная масса), ρ_* – трехмерная плотность, $S(z) = \pi r^2(z)$ – площадь сечения, $u(z, t)$ – проекция на ось y перемещений точек оси стержня.

Потенциальная энергия $\Pi = \frac{1}{2} \int_0^l EJ(z) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)^2 dz$, где $EJ(z)$ – изгибная жесткость, E – модуль Юнга, $J(z) = \frac{\pi r^4(z)}{4}$ – момент инерции сечения относительно оси X . Введя безразмерные перемещение $v = u/l$ и координату $\xi = z/l$, будем иметь $r(z) = R \left(1 - \frac{z}{l} \right) = R(1 - \xi)$,

$$T = \rho_0 l^3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 (1 - \xi)^2 \dot{v}^2 d\xi, \quad \Pi = \frac{EJ_0}{l} \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 (1 - \xi)^4 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} \right)^2 d\xi, \quad (1)$$

$$\rho_0 = \rho_* \pi R^2, \quad J_0 = \pi R^4 / 4.$$

Полагая в методе Рэлея $v(\xi, t) = x(t) \cdot \tilde{v}(\xi)$, где функция $\tilde{v} = \xi^2$ при $\xi = 0$ удовлетворяет условиям жесткой заделки $\tilde{v}(0) = \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \xi} = 0$, получим

$$T = \frac{\rho_0 l^3}{105} \cdot \frac{1}{2} \cdot \dot{x}^2, \quad \Pi = \frac{EJ_0}{l} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot x^2.$$

Уравнение колебаний имеет вид

$$\ddot{x} + 84\nu^2 x = 0, \text{ где обозначено } \nu^2 \equiv \frac{EJ_0}{\rho_0 l^4}$$

Таким образом, частота колебаний $\omega^2 = 84\nu^2$, $\omega = \sqrt{84} \nu \approx 9,165 \nu = 4,583 \frac{R}{l^2} \sqrt{\frac{E}{\rho_*$

Этот результат на 5% отличается от приведенного в [9] точного, полученного Кирхгофом значения

$$\omega = 4,359 \frac{R}{l^2} \sqrt{\frac{E}{\rho_*}}. \quad (2)$$

Для уточнения полученного результата положим $v(\xi, t) = x_1(t) \cdot \xi^2 + x_2(t) \cdot \xi^3$. Подставляя это представление в (1), получим

$$T = \frac{1}{2} a (12 \dot{x}_1^2 + 15 \dot{x}_1 \dot{x}_2 + 5 \dot{x}_2^2), \quad \Pi = \frac{1}{2} c (7x_1^2 + 7x_1 x_2 + 3x_2^2), \text{ где обозначено}$$

$$a = \frac{\rho_0 l^3}{1260}, \quad c = \frac{EJ_0}{l} \cdot \frac{4}{35}. \text{ Отношение } c/a \text{ обозначим для удобства } \frac{c}{a} = 144\nu^2 \equiv \lambda^2.$$

Уравнения Лагранжа имеют вид

$$\begin{cases} 12\ddot{x}_1 + \frac{15}{2} \ddot{x}_2 + \lambda^2 \left(7x_1 + \frac{7}{2}x_2 \right) = 0 \\ \frac{15}{2} \ddot{x}_1 + 5 \ddot{x}_2 + \lambda^2 \left(\frac{7}{2}x_1 + 3x_2 \right) = 0 \end{cases}.$$

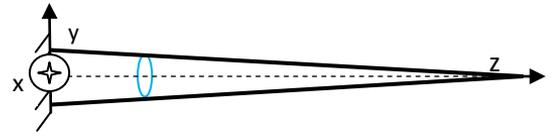
Отыскивая решение в виде $x_1 = A \sin \omega t$, $x_2 =$

$B \sin \omega t$, получим частотное уравнение

$$\begin{vmatrix} (7\lambda^2 - 12\omega^2) & (\frac{7}{2}\lambda^2 - \frac{15}{2}\omega^2) \\ (\frac{7}{2}\lambda^2 - \frac{15}{2}\omega^2) & (3\lambda^2 - 5\omega^2) \end{vmatrix} = 0 \text{ или } 15\omega^4 - 74\omega^2\lambda^2 + 35\lambda^4 = 0, \text{ откуда}$$

$$\omega_1^2 \approx 0,53\lambda^2 = 76,3 \nu^2, \quad \omega_1 \approx 8,735 \nu = 4,367 \frac{R}{l^2} \sqrt{\frac{E}{\rho_*}}, \quad (3)$$

что только на 0,2% превышает точное значение (2).



8.3.2. Метод конечных элементов (МКЭ).

В методе Рэлея-Ритца координатные функции, определенные во всем теле, должны удовлетворять кинематическим краевым условиям, что для тел сложной формы сделать практически невозможно. Кроме того, матрица системы уравнений относительно коэффициентов при координатных функциях (обобщенных координат) оказывается полностью заполненной и, как следствие, плохо обусловленной.

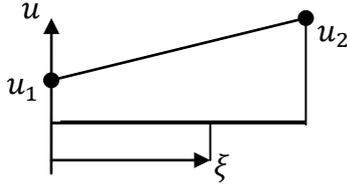
В МКЭ используются простые (как правило, полиномиальные) координатные функции, определенные лишь в одной подобласти – в *конечном элементе*, а вне него равные нулю. Поэтому даже при одинаковой степени аппроксимации искомой функции в каждом из элементов координатные функции линейно независимы.

В качестве обобщенных координат принимаются значения искомой функции в некоторых точках на границе и внутри элемента (*узлах*) и координатные функции в конечном элементе называются *функциями формы*.

Рассмотрим в качестве примера элементы для одномерных задач.

1. Элемент первого порядка (линейная аппроксимация)

$$u(\xi, t) = u_1 + (u_2 - u_1)\xi \equiv u_1(t)(1 - \xi) + u_2(t)\xi, \quad \xi = \frac{z}{l}, \quad 0 \leq \xi \leq 1.$$

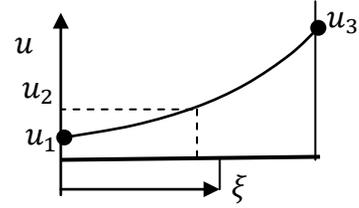


2. Элемент второго порядка (квадратичная аппроксимация)

Квадратичная функция имеет вид $u(\xi, t) = a(t) + b(t)\xi + c(t)\xi^2$.

Коэффициенты a, b, c можно найти из системы

$$\begin{cases} u(0, t) = u_1(t) \\ u\left(\frac{1}{2}, t\right) = u_2(t) \\ u(1, t) = u_3(t) \end{cases}.$$



На практике $u(\xi, t)$ записывают в виде

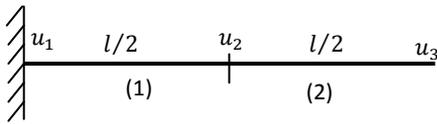
$u(\xi, t) = u_1(t)\varphi_1(\xi) + u_2(t)\varphi_2(\xi) + u_3(t)\varphi_3(\xi)$, где функции формы должны удовлетворять условиям:

$$\varphi_1(0) = 1, \quad \varphi_1\left(\frac{1}{2}\right) = \varphi_1(1) = 0 \Rightarrow \varphi_1(\xi) = 2\left(\xi - \frac{1}{2}\right)(\xi - 1)$$

$$\varphi_2\left(\frac{1}{2}\right) = 1, \quad \varphi_2(0) = \varphi_2(1) = 0 \Rightarrow \varphi_2(\xi) = -4\xi \cdot (\xi - 1)$$

$$\varphi_3(1) = 1, \quad \varphi_3(0) = \varphi_3\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow \varphi_3(\xi) = 2\xi \cdot \left(\xi - \frac{1}{2}\right)$$

Пример 2. Продольные колебания консольного стержня постоянного сечения.



Найдем матрицы инерции и жесткости для элемента первого порядка длиной b .

$$\text{Имеем } u(\xi, t) = u_1(t)(1 - \xi) + u_2(t)\xi, \quad \xi = \frac{z}{b}, \quad 0 \leq \xi \leq 1,$$

$$\dot{u}(\xi, t) = \dot{u}_1(t)(1 - \xi) + \dot{u}_2(t), \quad \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{b} \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{u_2 - u_1}{b},$$

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l a \dot{u}^2 dz = \frac{1}{2} ab \left(\frac{1}{3} \dot{u}_1^2 + 2\dot{u}_1\dot{u}_2 + \frac{1}{3} \dot{u}_2^2 \right), \quad (a = \rho_* S),$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^l c \varepsilon^2 dz = \frac{1}{2} \frac{c}{b} (u_1^2 - 2u_1u_2 + u_2^2), \quad (c = \rho_* S)$$

Разобьем стержень длиной l на два элемента длиной $b = l/2$ и, складывая кинетические и потенциальные энергии элементов, получим с учетом выполнения $u_1(0, t) = 0$

$$T = T^{(1)} + T^{(2)} = \frac{al}{12} (2\dot{u}_2^2 + \dot{u}_2\dot{u}_3 + \dot{u}_3^2), \quad \Pi = \frac{c}{l} (2u_2^2 - 2u_2u_3 + u_3^2)$$

Уравнения Лагранжа имеют вид

$$\begin{cases} \frac{al}{3}\ddot{u}_2 + \frac{al}{12}\ddot{u}_3 + 4\frac{c}{l}u_2 + \left(-2\frac{c}{l}\right)u_3 = 0 \\ \frac{al}{12}\ddot{u}_2 + \frac{al}{6}\ddot{u}_3 + \left(-2\frac{c}{l}\right)u_2 + \left(2\frac{c}{l}\right)u_3 = 0 \end{cases}$$

Отыскивая решение в виде $u_2 = B \sin \omega t$, $u_3 = D \sin \omega t$, получим

$$\begin{cases} B\left(4\frac{c}{l} - \omega^2\frac{al}{3}\right) + D\left(-2\frac{c}{l} - \omega^2\frac{al}{12}\right) = 0 \\ B\left(-2\frac{c}{l} - \omega^2\frac{al}{12}\right) + D\left(2\frac{c}{l} - \omega^2\frac{al}{6}\right) = 0 \end{cases}$$

и, приравнявая нулю определитель, получим частотное уравнение

$$\frac{7}{144}\omega^4 - \frac{5}{3}\frac{c}{al^2}\omega^2 + 4\left(\frac{c}{al^2}\right)^2 = 0,$$

$$\begin{aligned} \text{Откуда } \omega_1^2 &= 2,597 \left(\frac{c}{al^2}\right), & \omega_1 &= 1,611 \sqrt{\frac{c}{al^2}}, \\ \omega_2^2 &= 31,689 \left(\frac{c}{al^2}\right), & \omega_2 &= 5,629 \sqrt{\frac{c}{al^2}}. \end{aligned}$$

Точные значения собственных частот равны

$$\omega_k = (2k - 1)\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{c}{al^2}}, \quad \omega_1 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{c}{al^2}} = 1,571\sqrt{\frac{c}{al^2}}, \quad \omega_2 = \frac{3\pi}{2}\sqrt{\frac{c}{al^2}} = 4,712\sqrt{\frac{c}{al^2}}$$

Первая собственная частота превышает точную на 2,5 %, вторая – на 19,5 %.

В заключение заметим, что превышение приближенных значений собственных частот точных значений неслучайно – система с бесконечным числом степеней свободы всегда «мягче» построенных дискретизацией расчетных моделей.

Литература

1. Кочин Н.Е. Векторный анализ и начала тензорного исчисления. М.: Наука, 1965. 427с.
2. Маркеев А.П. Теоретическая механика. М.: Наука, 1990. 414с.
3. Жилин П.А. Векторы и тензоры второго ранга в трехмерном пространстве.- Санкт-Петербург, Изд-во «Нестор», 2001. 275с.
4. Елисеев В.В. Механика упругих тел. СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2003. 336с.
5. Жилин П.А. Теоретическая механика. Фундаментальные законы механики: Учеб. Пособие. СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2003. 340с.
6. Айзерман М.А. Классическая механика.- М., Наука, 1974. 367с.
7. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике.- М., Наука, 1966.
8. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний: Учебник для вузов. -М.: Высш.школа, 1980. – 408с.
9. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. М., 1967.
10. Лурье А.И. Аналитическая механика. М.: ГИФМЛ, 1961. 824 с.

