Федеральное агентство по образованию
Тверской государственный технический университет

Т.В. Асеева

Функции алгебры логики

Учебное пособие

Первое издание

Тверь 2006

УДК 510(075.8)

ББК22.12я7

Асеева Т.В. Функции алгебры логики: учебное пособие, 1-е изд. Тверь: ТГТУ, 2006, 12 с.

Учебное пособие является содержанием одного из разделов курса лекций по дисциплине «Дискретная математика», читаемого на кафедре Электронных вычислительных машин студентам специальности ВМКСС.

Данный раздел закладывает основы для понимания проблем и методов их решения в курсе «Математическая логика и теория алгоритмов» а также в курсе «Теория цифровых автоматов» и является теоретической основой логического проектирования цифровых устройств.

Содержание

Функции алгебры логики

Булевы векторы и единичный n-мерный куб

Вектор $\tilde{\alpha}^n = (\alpha_n \alpha_{n-1} ... \alpha_1 \alpha_0)$, координаты которого принимают значение в множестве $\{0,1\}$, называется *двоичным* или *булевым вектором*.

Множество $\{0,1\}^n = \{\tilde{\alpha}_n \mid \forall i : \alpha_i \in \{0,1\}\}$ называется единичным n-мерным кубом. Упорядоченная последовательность (кортеж) длины n называется вершиной единичного n-мерного куба. Мощность множества вершин единичного n-мерного куба равна 2^n.
На множестве вершин единичного n-мерного куба задаются следующие характеристики:

- *Вес вектора* или *норма вектора*, равный $|\tilde{\alpha}^n| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$;
- Номер вектора, равный десятичному числу, записанному в двоичной системе счисления: $\nu(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i 2^i$, если разряды двоичного вектора нумеруются справа налево, начиная с 0, т.е. $\tilde{\alpha}^n = (\alpha_n \alpha_{n-1} ... \alpha_1 \alpha_0)$.
- Расстояние Хемминга между двумя булевыми векторами, равное числу разрядов, в которых эти векторы различаются, определяемое как $\rho(\tilde{\alpha}^n, \tilde{\beta}^n) = \sum_{i=0}^{n} |\alpha_i - \beta_i|$. Два вектора $\tilde{\alpha}^n, \tilde{\beta}^n$ называются *соседними*, если расстояние Хемминга между ними равно 1, и *противоположными*, если расстояние Хемминга между ними равно n. Расстояние Хемминга является метрикой, а куб $B^n = \{0,1\}^n$ - метрическим пространством.
- На множестве булевых векторов длины n определено отношение предшествования: $\tilde{\alpha}^n \prec \tilde{\beta}^n \Leftrightarrow \forall i = \overline{1,n} : \alpha_i \le \beta_i$. Нетрудно доказать, что отношение предшествования является отношением частичного порядка на множестве вершин единичного n-мерного куба.
- Неупорядоченная пара соседних вершин единичного n-мерного куба называется *ребром куба*.
- Множество $B_k^n(\tilde{\alpha}^n) = \{\tilde{\beta}^n \mid \rho(\tilde{\alpha}^n, \tilde{\beta}^n) = k\}$ называется *сферой радиуса k с центром* $\tilde{\alpha}^n$.
- Множество $S_k^n(\tilde{\alpha}^n) = \{\tilde{\beta}^n \mid \rho(\tilde{\alpha}^n, \tilde{\beta}^n) \le k\}$ называется *шаром радиуса k с центром* $\tilde{\alpha}^n$.
- Последовательность вершин куба $(\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_1, ..., \tilde{\alpha}_k)$ называется *цепью, соединяющей вершины* $\tilde{\alpha}_0$ *и* $\tilde{\alpha}_k$, если $\forall i = \overline{1,k} : \rho(\tilde{\alpha}_{i-1}, \tilde{\alpha}_i) = 1$. Число k называется *длиной цепи.*
- Множество $B^{n\, i_1 ... i_k}_{\sigma_1 ... \sigma_k} = \{\tilde{\alpha}^n \mid \forall j = \overline{1,k} : \alpha_{ij} = \sigma_j\}$ называется *гранью куба* B^n. Множество $I = \{i_1, ... i_n\}$ называется *направлением грани*, число *k – рангом грани,* а *n-k* - *размерностью грани*. Содержательно грань единичного n-мерного куба – это множество вершин, в которых координаты с индексами $i_1, ..., i_k$ принимают одинаковые для всех вершин значения $\sigma_1, ..., \sigma_k$, а все остальные переменные принимают 2^{n-k} возможных наборов значений. Грани ранга *k* соответствует интервал ранга *k*. Например, интервал (-01-)={(0010), (0011), (1010), (1011)}. Переменные интервала, которым сопоставляются фиксированные для этого интервала значения из множества {0,1}, называются *связанными,* переменные, которым сопоставлены другие символы (например, -) называются *свободными переменными интервала.* Число связанных переменных интервала называется его *рангом*. Интервалу ранга *k* соответствует грань размерностью *n-k*, содержащая 2^{n-k} вершин куба.

Функции алгебры логики (булевы функции)

n-местной булевой функцией называется отображение $f^{(n)}:\{0,1)^n \to \{0,1\}$, где n-местность (арность) функции. Это отображение может быть иначе записано как $f(x_1, x_2,..., x_n) \in \{0,1\}$. Переменные $x_i \in \{0,1)$ называются пропозициональными переменными.

Множество всех n-местных булевых функций равна 2^{2^n}. n-местная булева функция может быть представлена таблицей, содержащей 2^n строк, расположенных по возрастанию сверху вниз номера строки. Таким образом, вектор n-местной булевой функции имеет длину 2^n. Для задания функции достаточно указать ее вектор, так как последовательность кортежей, обозначающих строку, имеет всегда один и тот же вид. Вектор функции называется логическим значением функции или интерпретацией функции. На каждом наборе значений переменных функция может принять одно из двух значений. Если обозначить множество вершин единичного n-мерного куба, в которых функция равна 1, $N_1 = \{\tilde{\alpha}^n \mid f(\tilde{\alpha}^n) = 1\}$, а множество вершин, в которых функция принимает значение 0, $N_0 = \{\tilde{\alpha}^n \mid f(\tilde{\alpha}^n) = 0\}$, то очевидно, что $N_1 \cup N_0 = \{0,1\}^n, N_1 \cap N_0 = \varnothing$. Для задания полностью определенной булевой функции достаточно указать одно из этих множеств.

Переменная x_i называется существенной, если выполняется условие: $\exists i(f(\alpha_1\alpha_2...\alpha_{i-1}0\alpha_{i+1}...\alpha_n) \neq f(\alpha_1\alpha_2...\alpha_{i-1}1\alpha_{i+1}...\alpha_n))$, т.е. существует хотя бы одна пара наборов, соседних по переменной x_i, на которых значения функции различны. В противном случае переменная x_i называется фиктивной. Фиктивную переменную можно исключить из обозначения функции. При этом длина вектора новой функции будет вдвое меньше длины исходной функции. В теории булевых функций рассматривается отношение равенства булевых функций с точностью до фиктивных переменных. Благодаря этому можно рассматривать при необходимости множество функций одинаковой местности.

Элементарные булевы функции

Элементарными булевыми функциями называются функции с арностью 0, 1 и 2. При этом нужно заметить, что множество функций двух переменных включает в себя все 0-местные и 1-местные функции, в описании которых присутствует две или одна фиктивная переменная соответственно. Множество всех элементарных булевых функций может быть представлено в виде таблицы, содержащей 4 строки и 16 столбцов. Каждый столбец определяет одну из элементарных булевых функций. Наиболее употребимыми являются двуместные функции: $\{\&,\vee,\to,\leftrightarrow,\oplus,\mid,\downarrow\}$, одноместные функции f(x)=x и f(x)= $\overline{x}$, и две 0-местные функции: константа 0 и константа 1, не имеющие ни одной существенной переменной (других таких функций в множестве элементарных булевых функций нет).

Элементарные булевы функции используются для аналитического задания булевых функций произвольной местности формулами. При этом используется принцип суперпозиции функций. Согласно этому принципу формула определяется индуктивно:

- Пропозициональная переменная есть формула.
- Если A и B формулы, то любое слово A•B – формула, если $\bullet \in \{\&,\vee,\to,\leftrightarrow,\oplus,\mid,\downarrow\}$. Слово $\overline{A}$ также является формулой.
- Других формул нет.

Для формулы может быть построена таблица истинности, которая является ее интерпретацией. Говорят, что пропозициональная формула задает булеву функцию. Соответственно, булева функция реализует ту формулу, которая задает функцию. Очевидно, формула задает единственную булеву функцию. Обратное не справедливо.

Формулы, определяемые суперпозицией функций, могут преобразовываться как алгебраические выражения с использованием множества аксиом и тождеств. Основными из них являются аксиомы тождественности (идемпотентности), коммутативности, ассоциативности, дистрибутивности, поглощения, закон двойного отрицания, правило де-Моргана. Целью преобразования формул является приведение их к каноническому виду. В теории булевых функций используются канонические представления: дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ), конъюнктивная нормальная форма (КНФ), полиномиальная нормальная форма. (ПНФ). Для выполнения преобразований используется правило подстановки, которое формулируется следующим образом: если формула образована суперпозицией функций над некоторым множеством функций, то замена вхождения какой-либо функции на равносильную ей не меняет логическое значение функции. Это можно представить как $f(g_1, g_2, ..., g_{i-1}, g_i, g_{i+1}, ..., g_n)\Big|_{g_i}^{\varphi_i} = f(g_1, g_2, ..., g_{i-1}, \varphi_i, g_{i+1}, ..., g_n)$, если $g_i = \varphi_i$ с точностью до фиктивных переменных.

Теорема Шеннона о разложении булевых функций по переменным

Первичным термом называется функция

$$x^\sigma = \begin{cases} x, \text{при } \sigma = 1 \\ \bar{x}, \text{при } \sigma = 0 \end{cases}$$

Здесь x_i - пропозициональная переменная, σ_i - пропозициональная константа.

Свойства первичного терма:

- $(x^\sigma = 1) \leftrightarrow (x = \sigma)$
- $x^\sigma = x\sigma \vee \bar{x}\bar{\sigma}$

Функция $x_1^{\sigma_1} \& x_2^{\sigma_2} \& ... \& x_r^{\sigma_r}$ называется элементарной конъюнкцией ранга r. Функция $x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \vee ... \vee x_r^{\sigma_r}$ называется элементарной дизъюнкцией ранга r. Элементарная конъюнкция ранга n над множеством всех n переменных называется минтермом или конституентой единицы. Элементарная дизъюнкция ранга n над множеством всех n переменных называется макстермом или конституентой нуля.

Произвольная булева функция n переменных может быть представлена разложением по любому числу $m = \overline{1, n}$ переменных в следующем виде:

$$f(\tilde{x}^n) = \bigvee_{\tilde{\sigma}^m} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} ... x_m^{\sigma_m} f(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_m, x_{m+1}, ..., x_n).$$

Здесь кратная дизъюнкция берется по всем наборам значений констант $\tilde{\sigma}^m$, число которых равно 2^m. Для упрощения записи разложение производится по m первым переменным функции, хотя теорема справедлива для произвольного выбора переменных.

Одним из следствий этой теоремы является разложение булевой функции по всем переменным:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \equiv \bigvee_{\sigma^n | f(\tilde{\sigma}^n) = 1} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} ... x_n^{\sigma_n}$$

Это разложение называется совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ). СДНФ есть дизъюнкция всех конституент единицы данной функции.

Теорема: Произвольная булева функция, не равная тождественно 0, может быть представлена в СДНФ.

Теорема: Произвольная булева функция, не равная тождественно 1, может быть представлена в виде совершенной конъюнктивной нормальной формы (СКНФ), которая записывается как

$$f(\tilde{x}^n) = \underset{\tilde{\sigma}^n : f(\tilde{\sigma}^n)=0}{\&} (x_1^{\overline{\sigma_1}} \vee x_2^{\overline{\sigma_2}} \vee \ldots \vee x_n^{\overline{\sigma_n}})$$

Теорема доказывается с использованием принципа двойственности.

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq 1$$

Значит,

$$f^*(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq 0$$

Следовательно, $f^*(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ можно представить СДНФ:

$$f^*(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigvee_{\sigma^n | f^*(\tilde{\sigma}^n)=1} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \ldots x_n^{\sigma_n}$$

В соответствии с принципом двойственности можно записать:

$$f(\tilde{x}^n) = (f^*)^*(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigwedge_{(\tilde{\sigma})^n | f(\tilde{\sigma}^n)=0} (x_1^{\bar{\sigma}_1} \vee x_2^{\bar{\sigma}_2} \vee \ldots \vee x_n^{\bar{\sigma}_n})$$

Правило представления булевой функции совершенной конъюнктивной нормальной формой состоит в том, что для конкретной функции нужно выписать все конституенты нуля функции, соединив их связкой &.

СКНФ есть конъюнкция всех конституент 0 данной функции.

Теорема Произвольная булева функция может быть представлена суперпозицией формул над множеством связок {&, ∨, ¬}.

Действительно, если функция не равна тождественно 0 или 1, ее можно представить в СДНФ или в СКНФ. Если функция есть константа 0, ее можно представить как $x \vee \overline{x} \equiv 0$ или как $x \,\&\, \overline{x}$, т.е формулой над тем же множеством связок. Формула над множеством связок {&, ∨, ¬} называется булевой формулой.

Кроме двух указанных формул в теории булевых функций используется также совершенная полиномиальная нормальная форма, представляющая собой сумму по модулю 2 всех конституент единицы данной функции.

Например, для трехместной булевой функции, заданной вектором $\tilde{\alpha}_f = (10110101)$,совершенные нормальные формы имеют вид:

СДНФ=$\vee\,(0,2,3,5,7) = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} \vee \overline{x_1} x_2 x_3 \vee x_1 \overline{x_2} x_3 \vee x_1 x_2 x_3$;

СКНФ=$\&\,(1,4,6) = (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \,\&\, (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3) \,\&\, (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3)$;

СПНФ=$\oplus(0,2,3,5,7) = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} \oplus \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} \oplus \overline{x_1} x_2 x_3 \oplus x_1 \overline{x_2} x_3 \oplus x_1 x_2 x_3$.

Частично определенные булевы функции

n-местно частично определенной булевой функцией называется отображение $f^{(n)} : \{0,1\}^n \to \{0,1,-\}$.

Множество частично определенных n-местных булевых функций обозначается $P_2^{'}(n)$. Его мощность равна 3^{2^m}. Частично определенная функция может быть задана указанием двух множеств из множества $\{N_1, N_0, N_{ud}\}$, где N_1 и N_0–описанные выше единичное и нулевое множества вершин единичного n-мерного куба, а N_{ud}–множество вершин, в которых функция не определена, им соответствует прочерк в векторе функции. При минимизации частично определенных булевых функций формируют единичное множество $N_1^{'} = N_1 \cup N_{ud}$, которое используют любым описанным выше способом. Затем из множества полученных максимальных интервалов отбирают неприводимые покрытия минимального ранга с помощью импликантной таблицы, в которой учитывают только единичные вершины из множества N_1. Очевидно, МДНФ частично определенной функции является полностью определенной. В вершинах из множества N_0 и N_1 значения МДНФ совпадают со значениями исходной частично определенной функции. В вершинах, в которых функция не определена, МДНФ может принимать любые значения.

Минимизация булевых функций в классе ДНФ

Сложностью формулы называется число вхождений в эту формулу переменных. Например, сложность СДНФ можно определить как $S(СДНФ) = n\cdot|N_1|$. Как правило, булеву функцию можно задать с помощью формул, имеющих меньшую сложность. Построение таких формул является предметом минимизации булевых функций. Существуют различные методы минимизации булевых функций, использующих либо аналитические преобразования СДНФ, либо основанные на обработке булевых векторов из множества N_1. В последнем случае мы имеем дело с алгоритмизируемыми процедурами, которые могут быть записаны в виде программы.

Теоретической основой минимизации булевых функций в классе дизъюнктивных нормальных форм (ДНФ) является использование правил склеивания, обобщенного склеивания и поглощения, представляемых формулами:

1. $Kx \vee K\,\overline{x} = K$,
2. $K_1x \vee K_2\,\overline{x} = K_1x \vee K_2\,\overline{x} \vee K_1K_2$,

$$K_1x \vee K_2\overline{x} \vee K_1K_2 = K_1x \vee K_2\overline{x} \vee K_1K_2x \vee K_1K_2\overline{x} = (K_1x \vee K_1K_2x) \vee (K_2\overline{x} \vee K_1K_2\overline{x}) = K_1x \vee K_2\overline{x}$$

3. $K_1K_2 \vee K_2 = K_2$,

где К, K_1, K_2, – элементарные конъюнкции произвольного ранга.

Аналитические преобразования СДНФ с использованием этих правил описывает *метод Блейка*. Правила склеивания, обобщенного склеивания и поглощения применяются к СДНФ до тех пор, пока это возможно. Результатом является множество элементарных конъюнкций, кратная дизъюнкция которых дает *сокращенную* ДНФ. Например, для функции, заданной вектором $\tilde{\alpha}_f$=(11101011), СДНФ=∨(0,1,2,4,6,7) имеет сложность 3*6=18. Сокращенная ДНФ имеет вид $x_1x_2 \vee \overline{x_1x_2} \vee \overline{x_3}$, а ее сложность равна 5.

Метод Квайна (алгоритмизируемый) состоит в следующем. Кортежи, входящие в множество N_1, записываются в столбец в порядке возрастания их весов сверху вниз. При этом кортежи с одинаковым весом объединяются в ярусы. В соответствии с правилом склеивания кортежи соседних ярусов могут склеиваться, если они являются соседними наборами. Кортежам из множества N_1 соответствуют интервалы ранга n. Результатом склеивания пар кортежей являются интервалы, ранг которых на единицу меньше ранга вершин единичного куба, так как они получаются вычеркиванием «мелькающей» переменной, по которой и происходит склеивание. Вместо этой переменной в обозначении интервала ставится прочерк или любой другой символ, отличный от 0 и 1.

Переменные интервала, которым соответствуют значения 0 и 1, называются *связанными*, а переменные, которым соответствуют прочерки, называются *свободными* переменными интервала. Если интервал содержит *k* прочерков, то ему соответствуют 2^k вершин единичного n-мерного куба. Например, (01-0)={0100,0110}, (-1-0)={0100, 0110, 1100, 1110). Число связанных переменных интервала называется *рангом* интервала. Единичному интервалу функции ранга *r* соответствует элементарная конъюнкция ранга *r*, называемая импликантом функции.

Интервалы, полученные склеиванием кортежей из множества N_1, записываются в столбец, правее первого столбца. В этом новом столбце отыскиваются смежные интервалы, которые также склеиваются, образуя новый столбец, справа от предыдущего. Если какие-либо интервалы не могут участвовать в склеивании, они переходят в правый столбец без изменения. Процедура продолжается до тех пор, пока не будут исчерпаны все возможности склеивания. Полученные в последнем столбце интервалы называются *максимальными*. Им соответствуют элементарные конъюнкции, называемые *простыми импликантами*. Дизъюнкция всех простых импликант образует сокращенную ДНФ.

Сокращенная ДНФ, вообще говоря, не является МДНФ. В ней могут присутствовать «лишние» импликанты, дублирующие покрытие некоторых единичных вершин из множества N_1.

Следующим этапом является отбор в множестве максимальных интервалов неприводимых покрытий, из которых затем выбираются все неприводимые покрытия минимального ранга. Для отыскания всех неприводимых покрытий используются *имликантные таблицы.*

Табличные методы минимизации булевых функций

В практике проектирования дискретных вычислительных устройств для минимизации булевых функций «вручную» используют специального вида таблицы, представляющие собой разложение единичного n-мерного куба на плоскости, сохраняющее отношение смежности вершин. Такие таблицы известны для $n \in \{3,4\text{-}18\}$. Очевидно, с точки зрения здравого смысла таблицы для больших значений n (скажем, n>8) использовать не целесообразно (лучше написать программу). Для n-местной булевой функции такая таблица должна содержать 2^n клеток, в каждую из которых записывается значение функции на том наборе значений переменных, номер которого совпадает с номером клетки. Нумерация клеток сохраняет отношение смежности вершин, так что любые две рядом расположенные клетки являются соседними и могут склеиваться друг с другом. В таблицах также возможно склеивание клеток, расположенных рядом по вертикали и по горизонтали, а также симметрично относительно некоторых осей симметрии таблицы. В склеивании могут участвовать 2^k клеток, в которых *k* каких-либо переменных принимают все возможные наборы значений. Эти *k* переменных являются свободными переменными интервала, который содержит *k* свободных и *n-k* связанных переменных. Интервалу соответствует множество, содержащее 2^k вершин единичного n-мерного куба $\{0,1\}^n$

Процесс минимизации в классе дизъюнктивных нормальных форм (ДНФ) сводится к визуальному отысканию максимальных интервалов функции, покрывающих наибольшее число вершин единичного n-мерного куба. При этом отпадает необходимость в использовании импликантных таблиц.

Диаграммы Вейча

При небольшом числе переменных (n=3,4) для минимизации булевых функций используют диаграммы Вейча.

Для функции трех переменных нумерация клеток диаграммы Вейча приведена на Рис. 1.

x_1

x_2

6	7	3	2
4	5	1	0

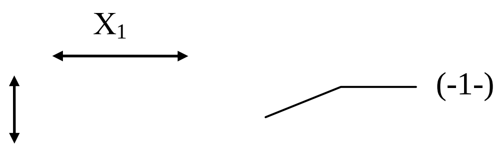
x_3

Рисунок 1 Диаграмма Вейча для 3-х переменных

Диаграмма содержит 2^3=8 клеток. В диаграмме указаны группы по 2^{3-1}=4 клеток, в которых каждая из переменных принимает значение 1.

Определим максимальные интервалы и соответствующую МДНФ для функции трех переменных, заданной вектором α_f=(0111 1011).Изображение этой функции на диаграмме Вейча показано на рис.4 в предположении, что нумерация переменных в последовательности, задающей номер клетки, производится слева направо.

Из рис.4 видно, что множество единиц данной функции покрывается тремя максимальными интервалами, которым соответствует МДНФ = $x_2 \vee x_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_3$.



x_2	1	1	1	1
(1-0)	1	0	1	0

Рисунок 2 Пример минимизации функции 3-х переменных

Обозначенные на рис. 2 максимальные интервалы покрывают множество N_1, образуя неприводимое покрытие, которому соответствует МДНФ

$f(x_1,x_2,x_3)=x_1\bar{x}_2 \vee x_2 \vee \bar{x}_1x_3$

Для четырехместной булевой функции таблица содержит 2^4=16 строк. Соответственно, диаграмма Вейча такой функции содержит 16 клеток, расположение которых показано на Рис. 3, 4. Каждой клетке сопоставлена одна из вершин единичного 4-мерного куба, описанная кортежем $(x_1x_2x_3x_4)$. Двоичные коды кортежей, соответствующие нумерации клеток, приведенной на Рис. 3, представлены на Рис. 4. Из последнего рисунка видно, что каждая переменная принимает значение 1 в 8 клетках таблицы, обозначенных соответствующим указателем.

12	13	9	8
14	15	11	10
6	7	3	2
4	5	1	0

Рисунок 3 Нумерация клеток при n=4

x_2

x_1	1100	1101	1001	1000	
	1110	1111	1011	1010	x_3
	0110	0111	0011	0010	
	0100	0101	0001	0000	

x_4

Рисунок 4 Единичные вхождения переменных при n=4

Примеры минимизации 4–местных булевых функций, заданных векторами α(f)=(1010101010101010) и α(f)=(1001100110011001) приведены на Рис. 5.

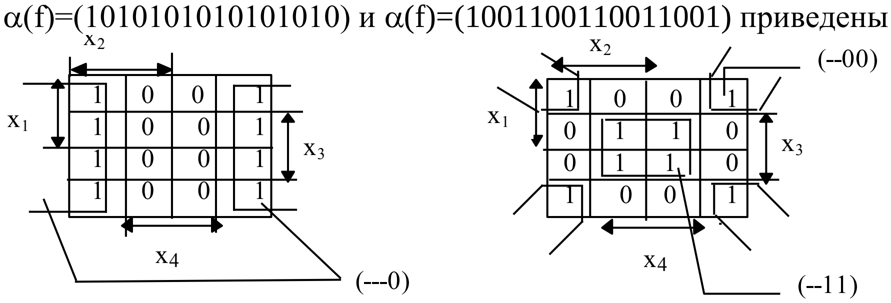


Рисунок 5 Пример определения МДНФ

При дальнейшем увеличении местности булевых функций их минимизация с использованием диаграмм Вейча становится затруднительной из-за громоздкости таблицы и уменьшения ее наглядности. Поэтому при n>4 используют метод симметричных таблиц.

Минимизация булевых функций методом симметричных таблиц

Симметричные таблицы обеспечивают наглядность процедуры минимизации булевых функций с числом переменных $2 < n \leq 18$. Громоздкость таблицы, неизбежная при увеличении местности функций, компенсируется регулярностью и наглядностью таблиц. Изложение этого метода можно найти в [2]. Симметричные таблицы позволяют:

- быстро и легко заполнять таблицу значениями минимизируемой функции благодаря восьмеричной нумерации клеток;
- легко находить максимальные интервалы функции благодаря свойству симметрии в структуре таблицы;
- автоматизировать процесс минимизации, используя большую степень формализации алгоритма склеивания клеток.

При использовании этого метода значения минимизируемой функции нумеруются восьмеричными числами. Восьмеричный номер значения функции есть восьмеричное представление его двоичного набора $x_n,...,x_1$.Двоичный набор разбивается справа налево на группы по три разряда в каждой, и каждая группа заменяется соответствующей восьмеричной цифрой. При этом x_1 имеет минимальный двоичный вес, равный 2^0, а x_n - максимальный, равный 2^{n-1}.

Базовой структурой при использовании этого метода является таблица для минимизации функций, имеющих местность $2 \le n \le 6$. Таблица, соответствующая максимальному числу переменных, содержит 2^6=64 клеток. Каждая клетка нумеруется двумя восьмеричными цифрами. Двоичный код этой последовательности при нумерации переменных справа налево(!) определяет значения шести двоичных переменных и имеет вид ($x_6x_5x_4x_3x_2x_1$). Для получения восьмеричного кода эта последовательность разбивается на тройки справа налево, и каждая тройка замещается соответствующей восьмеричной цифрой. Восьмеричный код клетки обозначим (y_2y_1). В отмеченной симметричной таблице указываются группы по 2^{n-1} клетке, в которых указанная при отметке переменная принимает единичные значения. Определение зон прямого и инверсного значений переменных осуществляется следующим образом. Снизу всю горизонтальную строку клеток делят вертикальной линией пополам. Полученные половины также делят вертикальными линиями пополам. Далее, полученные части снова делят пополам до тех пор, пока в каждой части слева и справа от вертикальной линии не останется по одной клетке. Тогда для переменной x_1 первая клетка слева представляет инверсное значение x_1, следующие две клетки (удвоенное число)- прямое значение x_1, затем чередуются по две клетки с прямым и инверсным значениями x_1. В конце строки будет одна клетка, которой приписывается инверсное значение x_1. Для переменной x_2 инверсное значение, как и для остальных переменных, начинается слева, но для двух клеток, следующее прямое значение - для четырех клеток (удвоенное число) и т.д. до конца. Затем для переменной x_3 - области инверсного и прямого вхождений удвоенной длины по сравнению с предшествующей переменной. Для трех старших переменных используется та же процедура справа от таблицы в направлении сверху вниз.

Три младшие двоичные переменные указываются снизу таблицы с возрастанием индекса в направлении сверху вниз, а три старшие переменные - справа от таблицы в направлении слева направо в порядке возрастания индекса переменной. Пример симметричной таблицы для n=6 приведен на Рис.6. Каждая клетка таблицы имеет свой восьмеричный номер (адрес) и в нее записывается значение функции из строки таблицы с тем же номером. (Стрелками указаны группы клеток с единичными значениями отмеченных переменных)

Склеивание единиц в таблице осуществляют следующим образом. Любая единица может склеиваться по горизонтали: в группе из двух клеток с другой единицей или незаданным набором, образуя интервал с одной свободной переменной; в группе из четырех клеток, образуя интервал с двумя свободными переменными; в группе из $2^к$ клеток, образуя интервалы с к свободными переменными, где $к \le 2 \le n$. Аналогично можно склеивать и клетки по вертикали. Склеиванию помогает визуальная симметрия возможных для склеивания клеток.

y_2 \ y_1	0	1	3	2	6	7	5	4	(0-1- -0)
									x_4 x_5 x_6

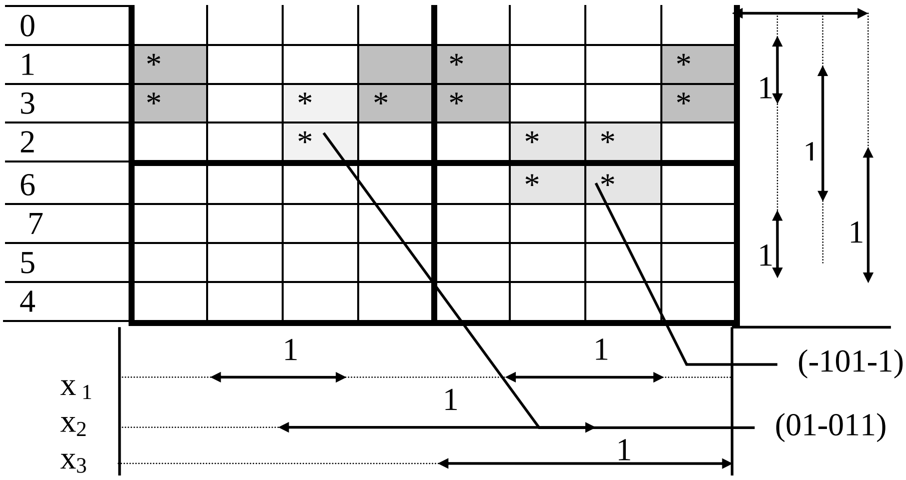


Рисунок 6 Отмеченная симметричная таблица при n=6

На рис.6 звездочками и подсветкой отмечены клетки, которые можно склеивать. Номер клетки образуют две восьмеричные цифры-(y_2y_1), где y_2 соответствует номеру строки таблицы, а y_1 - номеру столбца. Клетки с номерами 23 и 33 образуют интервал (01-011) с одной свободной переменной x_4. Клетки с номерами (25,27,65,67) - интервал (-101-1) с двумя свободными переменными x_2 и x_6. Клетки с номерами (10, 12, 14, 16, 30, 32,34,36) - интервал (0-1--0) с тремя свободными переменными x_2, x_3, x_5. Интервалы, соответствующие группам склеиваемых клеток, отмечены выносками .

Основные оси симметрии таблицы выделены жирными линиями. Склеивание $2^к$ клеток возможно только при условии их симметричного расположения относительно основных или дополнительных осей симметрии таблицы. Например, нельзя склеить четыре рядом расположенные клетки с номерами 62, 65, 66, 67.

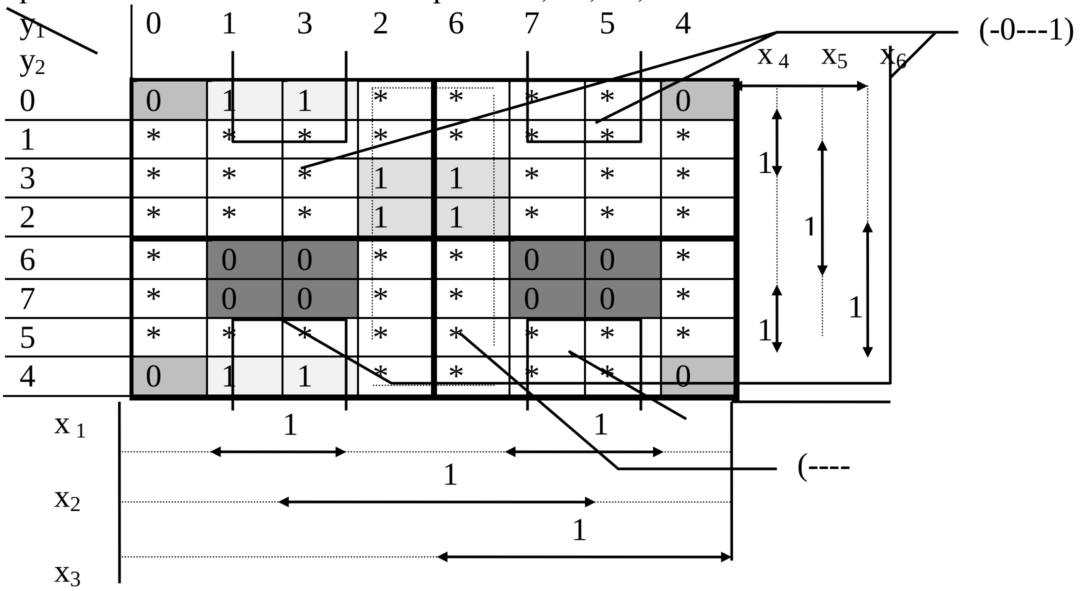


Рисунок 7 Пример минимизации частично определенной булевой функции

Пусть, например, 6-местная частично определенная функция задана следующим образом: N_1=(-000-1)$\cup$(01--10), N_0=(11---1) $\cup$(-00-00). Соответствующая симметричная таблица и процедура отыскания максимальных интервалов показаны на Рис. 7.

Исходные интервалы функции помечены заливкой: единичные - более светлой, нулевые – темнее. Для получения МДНФ склеивают клетки, в которых находятся 1 и *. Результаты склеивания отмечены контурами и выносками. Для данной функции МДНФ= $\bar{x}_1 x_4 \bar{x}_6 \vee \bar{x}_1 x_2$.

При увеличении местности функций новая симметричная таблица имеет тот же формат, что и таблица, представляющая множество вершин единичного шестимерного куба, т.е. 8х8. Но теперь каждая клетка таблицы представляет множество вершин единичного шестимерного куба, а каждая новая (старшая) переменная добавляет новые столбцы к базовой таблице для шести переменных. При этом каждая новая (старшая) переменная удваивает число клеток в уже построенной таблице. В разметке увеличенной таблицы значениями восьмеричных переменных с нечетными индексами помечаются столбцы большой таблицы, а восьмеричными переменными с четными индексами помечаются строки большой таблицы. Например, для 12-местной функции симметричной таблица будет иметь разметку переменными, представленную на рис.
(старшие) переменные строится из базовой таблицы из 64 клеток (6 переменных). При числе переменных $6<n\leq12$ каждая часть из 2^6 клеток считается одной клеткой и нумеруется той же последовательностью чисел-0,1,3,2,6,7,5,4 по горизонтали и по вертикали, но каждая цифра в последовательности означает восьмеричную цифру третьего и четвертого разрядов соответственно восьмеричного кода клетки.

y_3				0							1					
y_1 \ y_2	0	1	3	2	6	7	5	4	4	5	7	6	2	3	1	0
0	0	*	*	*	*	0	*	0	*	*	*	*	*	*	*	0
1	0	*	*	*	*	0	*	*	0	*	*	*	*	*	*	*
3	0	*	1	1	*	0	0	*	*	0	0	*	1	1	1	*
2	*	*	1	1	*	0	0	*	*	0	0	*	1	1	*	0
6	*	1	1	1	*	*	*	0	0	*	0	*	1	1	1	0
7	*	1	*	*	*	*	*	0	0	*	*	*	*	*	*	*
5	0	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	0
4	0	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	0

x_4 x_5 x_6

x_1 x_2 x_3 x_7

(----0-1)

(----11-)

Рисунок 8 Пример минимизации булевой функции 7 переменных

Для $12 <n\leq 18$ симметричная таблица строится аналогично предыдущей, но теперь базовой клеткой является таблица из 2^{12} клеток, а их нумерация той же последовательностью восьмеричных цифр теперь соответствует пятому и шестому разрядам восьмеричного кода клетки.
Прямые и инверсные вхождения переменных в таблице записывают тройками: младшие три переменные записывают снизу, следующие три - справа, следующие три - снизу, следующие три -справа, и так далее. Для обеспечения «склеиваемости» соседних клеток "больших" таблиц нумерация в каждой следующей "большой " клетке должна быть зеркальной по отношению к предыдущей.
Составление карты для n=7 показано на Рис. 8. Каждая клетка нумеруется тремя восьмеричными цифрами, обозначаемыми ($y_3y_2y_1$). В таблице обозначены основные оси симметрии и два интервала, полученные в результате склеивания клеток, содержащих 1 и *. Им соответствует МДНФ= $x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_3$.
Минимизация булевых функций большего числа переменных производится с использованием изложенных принципов.

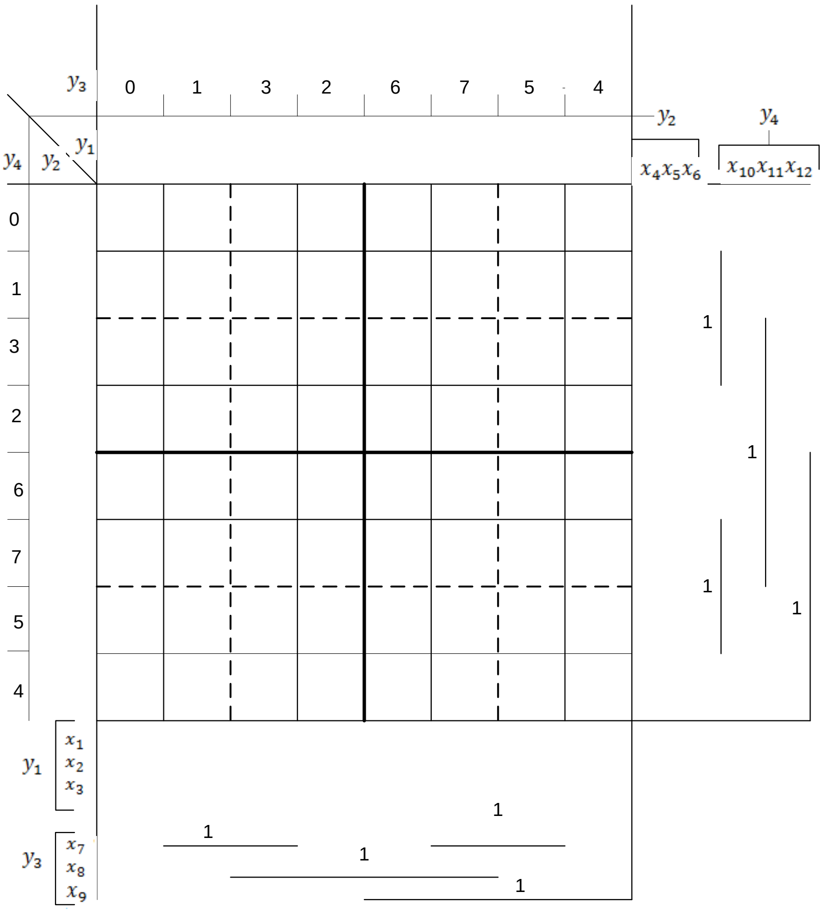


Рисунок 9 Симметричная таблица для 6<n<13

Представленная на рис. 9 симметричная таблица может использоваться для минимизации булевых функций, местность которых не превышает 12. Таблица содержит 64 клетки, каждая из которых является симметричной таблицей, предназначенной для минимизации булевых функций, местность которых не превышает 6. Таким образом, номер каждой клетки таблицы определяется четырехзначным восьмеричным числом, представленным кортежем

$$(x_{12}x_{11}x_{10}x_9x_8x_7x_6x_5x_4x_3x_2x_1) = (y_4y_3y_2y_1)$$

Здесь

$x_i \in \{0,1\}$, а $y_j \in [0,7]$

Распределение нулей и единиц для младших шести переменных не может быть изображено на этом рисунке, но расположение этих переменных можно использовать для создания таблиц минимизации семи- и восьмиместных функций.

Так же, как и в случае базовой таблицы, каждой клетке таблицы, число которых равно 4096, сопоставляется значение функции из множества значений $\{0,1,*\}$, и определяется покрытие множества единичных вершин функции максимальными интервалами, которые определяются визуально.

Нет принципиальных ограничений на значение местности функций, минимизируемых с использованием симметричных таблиц. Но нужно иметь в виду, что в случае большого числа переменных целесообразно написать программу минимизации булевых функций в классе ДНФ, реализующую алгоритмизируемый метод Квайна и затем использовать импликантные таблицы для отыскания неприводимых покрытий минимального ранга единичного множества функции максимальными интервалами функции.

Метод таблиц различий

Метод таблиц различий применяется для минимизации слабо определенных функций произвольной арности, заданных множествами N_1 и N_0. В отличие от метода симметричных таблиц этот метод является алгоритмизируемым, т.е. можно построить программу минимизации булевых функций. Как и в случае метода Квайна, результатом работы рассматриваемого метода является множество максимальных интервалов функции. Для построения МДНФ потребуется построение импликантной таблицы.

Число строк таблицы различий равно числу единичных интервалов минимизируемой функции. Число столбцов таблицы равно числу нулевых интервалов функции. В ячейках левого столбца таблицы различий, начиная со второй строки, записывают транспонированный вектор, обозначающий один из единичных интервалов функции. В ячейках верхней строки таблицы различий записывают (начиная со второго столбца слева) значения разрядов нулевых интервалов функции.

Векторы, обозначающие интервалы N_1 и N_0, определяют значения вершин единичного n-мерного куба кортежами вида (x_n, x_{n-1},…,x_2,x_1), где переменные x_i принимают значения в множестве {0,1,-}. Каждая из строк таблицы различий содержит n подстрок, соответствующих индексам переменных в обозначении интервала, Таблица 2. На пересечении i-й строки и j-го столбца записывают вектор, значения разрядов которого определяются применением к одноименным разрядам единичного и нулевого интервалов модифицированной операции суммы по модулю 2, представленной Табл. 1.

Таблица 1 Модифицированная сумма mod2

x_0 x_1	0	1	-
0	0	1	0
1	1	0	0
-	0	0	0

Единица в столбце таблицы различий означает, что значение соответствующей переменной в нулевом и единичном интервалах различны. Следовательно, данная переменная может войти в максимальный интервал данной функции с тем значением, которое эта переменная принимает в множестве N_1. Если какой-либо столбец таблицы содержит более одной единицы, это означает, что в обозначение максимального интервала может войти любая из переменных, соответствующих этим единицам, со значением, равным значению этой переменной в единичном интервале.

Таблица 2 Применение метода таблиц различий

<table>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="3">Интервалы нулевой области</td><td>Допустимые импликанты</td></tr>
<tr><td>Имена переменных</td><td>Интервалы единичной области</td><td>(1-10-)</td><td>(1-001)</td><td>(0-100)</td><td></td></tr>
<tr><td>x_5
x_4
x_3
x_2
x_1</td><td>-
0
-
1
0</td><td>0
0
0
1
0</td><td>0
0
0
1
1</td><td>0
0
0
1
0</td><td>$x_2 \,\&\, (x_2 \vee \overline{x_1}) \,\&\, x_2 = x_2$</td></tr>
<tr><td>x_5
x_4
x_3
x_2
x_1</td><td>1
0
-
1
1</td><td>0
0
0
1
0</td><td>0
0
0
1
0</td><td>1
0
0
1
1</td><td>$x_2 \,\&\, x_2 \,\&\, (x_5 \vee x_2 \vee x_1) = x_2$</td></tr>
</table>

x_5 x_4 x_3 x_2 x_1	0 - 1 0 1	1 0 0 0 0	1 0 1 0 0	0 0 0 0 1	$\overline{x_5}\ \&\ (\overline{x_5} \vee x_3)\ \&\ x_1 = \overline{x_5} x_1$

В последнем (правом) столбце таблицы различий записывают формулу вида КНФ, длина которой равна числу нулевых интервалов, и каждый дизъюнкт в которой определяется множеством переменных, отмеченных единицами в каждом столбце данной строки таблицы. Полученную КНФ затем преобразуют к ДНФ. Каждая элементарная конъюнкция, полученная при этом, определяет один из допустимых простых импликантов функции.

Когда все строки таблицы обработаны и получены все допустимые простые импликанты функции, с помощью импликантной таблицы определяют все неприводимые покрытия данной функции с последующим выбором среди них тех, которые имеют минимальный суммарный ранг.

Если среди полученных неприводимых покрытий имеется более одного покрытия с минимальным суммарным рангом, это означает, что данная функция имеет такое же число МДНФ.

Рассмотрим пример минимизации частично определенной функции методом таблиц различий. Пусть 5-местная частично определенная функция задана указанием множеств единичных и нулевых вершин:

$N_0 = (1-10-) \cup (1-001) \cup (0-100),$

$N_1 = ((-0-10) \cup (10-11) \cup (0-101)$

В последнем столбце Табл.2 перечислены все претенденты на роль простых импликант. Им соответствуют максимальные интервалы функции.

Для определения МДНФ построим импликантную таблицу, в которой столбцы будут именоваться именами единичных интервалов, которыми задана функция, а строки – именами максимальных интервалов, соответствующих простым импликантам, полученным в Табл. 2. На пересечении i-й строки и j-го столбца импликантной таблицы записывают 1, если j-й единичный интервал является подмножеством i-го максимального интервала, и прочерк в противном случае, Табл 3.

Таблица 3 Импликантная таблица

N_1 I_{max}	(-0-10)	(10-11)	(0-101)
(---1-)	1	1	-
(0---1)	-	-	1

Каждый столбец Табл. 3 содержит по одной единице. Следовательно, найденное множество максимальных интервалов образует покрытие множества N_1. Все интервалы являются обязательными. Следовательно, оба импликанта, соответствующие этим максимальным интервалам, должны войти в единственную МДНФ. Таким образом, решением данной задачи является

МДНФ=$x_2 \vee \overline{x_5} x_1$.

Функциональная полнота системы булевых функций

Определим понятие *суперпозиции булевых функций из данного множества* функций. Термином «суперпозиция» обозначают способ получения новых функций из заданного множества функций путем

a) отождествления переменных,

b) подстановкой имеющихся и вновь полученных функций в качестве аргументов имеющихся и вновь полученных функций до тех пор, пока это приводит к получению новых функций.

Множество всех функций, полученных применением операции суперпозиции к функциям данного множества F, называется *замыканием* $F = \{f(\tilde{x}^n)\}$ и обозначается $[F]$.

Система булевых функций называется функционально полной в *P_2, если суперпозициями функций этой системы можно задать любую булеву функцию из P_2.*

Естественной заведомо функционально полной системой является система {&, ∨, ¬}, которая позволяет представить любую функцию, заданную таблицей в виде СДНФ или СКНФ. Константы 0 и 1 также имеют представление в этой системе. Спрашивается, является ли эта система функций единственной функционально полной системой. Интуитивно можно ожидать, что нет. Действительно, как будет видно из дальнейшего рассмотрения, существует счетное множество таких систем. Используются два критерия, позволяющих судить о функциональной полноте системы булевых функций.

Первый основан на сравнении произвольной системы функций с заведомо функционально полной системой и основан на следующей теореме.

Пусть G и F подмножества P_2, известно, что система F функционально полна в P_2, и любая функция из F может быть задана суперпозицией функций из G. Тогда система G также функционально полна в P_2.

♠ Пусть $F = \{f_i(\tilde{x}^n) \mid i = \overline{1,n}\}$, $G = \{g_j(\tilde{x}^n) \mid j = \overline{1,m}\}$, $h(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in P_2(n)$. Представим функцию $h(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ суперпозицией функций из F:

$h(x_1,x_2,\ldots,x_n)=f(f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n), f_2(x_1,x_2,\ldots,x_n),\ldots,f_m(x_1,x_2,\ldots,x_n))$.Согласно условию, каждую из функций полученной суперпозиции можно выразить суперпозицией функций из G:

$f=g(g_1(x_1,x_2,\ldots,x_n), g_2(x_1,x_2,\ldots,x_n),\ldots,g_k(x_1,x_2,\ldots,x_n))$,

$f_1 =g_{1i}(g_1(x_1,x_2,\ldots,x_n), g_2(x_1,x_2,\ldots,x_n),\ldots,g_k(x_1,x_2,\ldots,x_n))$,

……………………………………………………………

$f_m=g_{mi} (g_1(x_1,x_2,\ldots,x_n), g_2(x_1,x_2,\ldots,x_n),\ldots,g_k(x_1,x_2,\ldots,x_n))$.

Объединяя полученные записи, получим для h суперпозицию

$h(x_1,x_2,\ldots,x_n)=g_h(g_1(x_1,x_2,\ldots,x_n), g_2(x_1,x_2,\ldots,x_n),\ldots,g_k(x_1,x_2,\ldots,x_n))$. ♦

Используя эту теорему легко доказать функциональную полноту систем {&,¬}, {∨,¬}, {→,0}, {0,⊕,&}, {|}, {↓}.

Примеры:

1. Пусть D={&, ∨, ¬} – заведомо функционально полная система, и G={&, ¬}. Докажем, что система G функционально полна в P_2. Так как функции &, ¬ уже имеются в G, остается показать, что функция ∨ может быть определена суперпозицией над G. Воспользовавшись правилом де Моргана, получаем сразу $x \vee y = \overline{\overline{x} \,\&\, \overline{y}}$, т.е. представляем дизъюнкцию суперпозицией над G.
2. Доказать, что система G={0, →} функционально полна в P_2.

Выберем в качестве заведомо функционально полной системы множество D={&, ¬}. Для доказательства необходимо определить конъюнкцию и отрицание формулами над G. Целесообразная последовательность действий состоит в определении вначале ¬, а затем &. Поскольку константа 0 – нульместная функция, ее можно использовать только для подстановки в качестве аргумента в другие функции. Импликация – двуместная функция, в которой можно выполнить вначале отождествление переменных, а затем подстановку константы вместо одного из аргументов. Учитывая, что $x \to y = \overline{x} \vee y$, и выполняя подстановку $x{\to}y|_{\ y\ \leftarrow\ 0} = \overline{x} \vee 0 = \overline{x}$. Далее используем правило де Моргана для получения конъюнкции. $x \,\&\, y = \overline{\overline{x} \vee \overline{y}} = \overline{x \to \overline{y}} = (x \to (y \to 0)) \to 0$.

Доказанная теорема дает универсальный способ доказательства функциональной полноты системы булевых функций. Однако если в проверяемое множество входят функции, более сложные, чем элементарные, процедура может оказаться достаточно трудоемкой. А учитывая отсутствие критерия, определяющего возможность получения требуемых функций из имеющихся, и невыполнимой.

Другой критерий функциональной полноты основан на критерии Поста. Прежде чем сформулировать этот критерий рассмотрим операцию замыкания и замкнутые классы булевых функций.

Операция замыкания и предполные классы

Замыканием множества М $\subseteq$P$_2$, обозначается [М], называется множество всех булевых функций, полученных суперпозициями из М.

Например, [{&,→,¬}]=P$_2$, так как согласно доказанной ранее теореме произвольная булева функция может быть представлена булевой формулой, являющейся суперпозицией над множеством {&,→,¬}. Замыкание одноэлементного множества {¬x} определим единственной возможной подстановкой:

$$\overline{x}\Big|_{\{x \leftarrow \overline{x}\}} = \overline{\overline{x}} = x$$

Таким образом, замыкание рассматриваемого множества содержит ровно две функции: тождественную функцию x и саму функцию отрицания $\overline{x}$: $[\{\overline{x}\}] = \{x, \overline{x}\}$.

Замыкание двухэлементного множества {0,1} не содержит никаких новых функций кроме констант 0 и 1, поскольку это нульместные функции и никакие подстановки не возможны. Поэтому [{0,1}]={0,1};

Замыкание двухэлементного множества $\{0, \overline{x}\}$ может быть получено подстановками:

$$\overline{x}\Big|_{\{x \leftarrow \overline{x}\}} = x \text{ и } \overline{x}\Big|_{\{x \leftarrow 0\}} = 1.$$

Тогда $[\{0, \overline{x}\}] = \{0,1, x, \overline{x}\}$.

Пусть М $\subseteq$P$_2$. Операция получения множества [М] из М называется операцией замыкания. Множество М называется *функционально замкнутым классом*, если [М]=М. Множество P$_2$ всех булевых функций является функционально замкнутым классом или просто *замкнутым классом*.

Основные свойства замыкания:

- М$\subseteq$[М],
- М$_1\subseteq$М$_2$, то [М$_1$]$\subseteq$[М$_2$],
- [[М]]=[М].

Пусть М – замкнутый класс в P$_2$. D$\subset$М называется *функционально полной системой в М*, если [D] = М.

Множество D называется *неприводимой системой*, если замыкание любого его собственного подмножества отлично от замыкания D. Например, множество $\{0, \overline{x}\}$ является функционально полной и неприводимой системой в классе $\{0,1, x, \overline{x}\}$, а $\{x, \overline{x}\}$ не является. Неприводимая функционально полная в М система булевых функций называется *базисом* в М.

Функции f_1 и f_2 называются *конгруэнтными,* если одна из них может быть получена из другой заменой переменных (без отождествления). Например, функции $x\&\bar{y}$ и $y\&\bar{z}$ - конгруэнтные, а функции x&y и $y\&\bar{z}$ – нет.

Множество функций $Q\subseteq P_2$ называется *предполным классом* в P_2, если $[Q]\subset P_2$, и $\forall f:(f\in P_2\setminus Q)\to([Q\cup\{f\}]=P_2)$.

Покажем, что предполный класс замкнут, т.е.. Доказываем от противного. Пусть $[Q]\neq P_2$ и пусть имеется функция $f\in[Q]\setminus Q$. Тогда $[Q\cup\{f\}]=P_2$. Но $f\in[Q]$, следовательно, $[Q]=[Q\cup\{f\}]$ т.е. $[Q]=P_2$, что противоречит определению предполного класса. Следовательно, такой функции не существует, т.е. предполный класс замкнут.

В математической логике рассматривается пять предполных классов.

Класс функций, сохраняющих 0, T_0

Класс булевых функций, сохраняющих 0, определяется как множество всех булевых функций, принимающих значение 0 на нулевом наборе значений переменных, т.е.

$$(f(\tilde{x}^n)\in T_0)\Leftrightarrow\left(f\,\underbrace{(00\ldots0)}_{n\text{ раз}}=0\right)$$

Пусть функция $\mathbf{f(\tilde{x}^n)}$ сохраняет 0. Тогда на нулевом наборе значений переменных значение функции равно 0, а на всех остальных наборах значений переменных функция может принимать произвольные значения. Поскольку число строк таблицы равно 2^n, то число строк, на которых функция может принимать произвольные значения равно 2^n-1, число n-местных булевых функций, сохраняющих 0, равно числу слов длины 2^n-1 в двоичном алфавите, те равно числу размещений с повторениями из 2 по 2^n-1. Таким образом, число n-местных булевых функций, сохраняющих 0 равно половине от числа всех n-местных булевых функций. $|T_0(n)|=B_2^{2^n-1}=2^{2^n-1}=|P_2(n)|/2$.

Приведенное выше рассуждение, определяющее мощность класса T_0 означает замкнутость класса. Докажем это явно. Пусть имеется множество $\mathbf{\{f_1(\tilde{x}^n),f_2(\tilde{x}^n),\ldots,f_k(\tilde{x}^n)\}\subseteq T_0}$. Покажем, что произвольная суперпозиция этих функций также будет сохранять 0. Пусть суперпозиция $\mathbf{F(\tilde{x}^k)=f_i(f_{i1}(\tilde{x}^n),\ldots,f_{ik}(\tilde{x}^n))}$ получена подстановкой функций из заданного множества вместо аргументов функции F. Очевидно, что на нулевом наборе значений переменных каждая из функций суперпозиции обращается в 0:

$$\forall i\left((1\le i\le k)\&\left(f_i(\tilde{0}^n)=0\right)\right)$$

Следовательно,

$$\left(f\left(f_1(\tilde{0}^n),f_2(\tilde{0}^n),\ldots,f_k(\tilde{0}^n)\right)\right)=\left(f\,\underbrace{(00\ldots0)}_{k\text{ раз}}=0\right)=0$$

Следовательно, суперпозиция функций, сохраняющих 0, также сохраняет 0. Т.е. класс функций, сохраняющих 0, замкнут и включает функции всех возможных арностей:

$$T_0=\bigcup_n T_0(n)$$

Способ построения таблицы всех n-местных булевых функций подтверждает, что мощность класса булевых функций, сохраняющих нуль, равна числу размещений с повторениями из 2 по *n*–1:

$$|T_0(n)|=B_2^{n-1}=2^{n-1}$$

Элементарные булевы функции $\{0, x, \&, \vee, \oplus\}$ сохраняют 0. Функция отрицания $\bar{x}$, импликация, эквивалентность, штрих Шеффера, стрелка Пирса нуль не сохраняют. Из существования функций, не сохраняющих 0 следует, что класс T_0 не полон в P_2.

Лемма о функции, не сохраняющей 0: Если $f \notin T_0$, то отождествлением всех ее переменных и подстановкой функций, сохраняющих 0, из нее выводится константа 1 или функция отрицания $\bar{x}$.

Пример. Получим константу 1 и функцию отрицания из импликации.

$x \to y\big|_{\{y \leftarrow 0\}} = x \to 0 = \bar{x}$.

$x \to y\big|_{\{y \leftarrow x\}} = x \to x = 1$.

$f(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in T_0(n) \Leftrightarrow f(0,0,\ldots,0)=0$.

Неполнота класса T_0 в $P_2(n)$ следует из существования функций, не сохраняющих 0.

Класс функций, сохраняющих 1, T_1

Класс булевых функций, сохраняющих 1, определяется как множество всех булевых функций, принимающих значение 1 на единичном наборе значений переменных, т.е.

$$(f(\tilde{x}^n) \in T_1) \Leftrightarrow \left(f\,\underbrace{(11\ldots1)}_{n\ \text{раз}} = 1 \right)$$

Класс функций, сохраняющих 1, определяется как объединение функций, сохраняющих 1 для всех n:

$$T_1 = \bigcup_n T_1(n)$$

Доказательство замкнутости класса T_1 аналогично доказательству замкнутости класса T_0. Мощность класса $T_1(n)=|P_2(n)|/2$. Неполнота класса T_1 следует из существования функций, не сохраняющих 1. $1, x, \&, \vee, \to, \leftrightarrow \in T_1$, а $0, \bar{x}, \oplus, |, \downarrow \notin T_1$.

Лемма о функции, не сохраняющей 1: Если $f \notin T_1$, то отождествлением всех ее переменных из нее получается константа 0 или функция отрицания $\neg x$.

Пример. Получим константу 0 и функцию отрицания из функции $\oplus$.

$x \oplus y\big|_{(x \leftarrow 1, y \leftarrow 1\}} = 1 \oplus 1 = 0$.

$x \oplus y\big|_{\{y \leftarrow 1\}} = x \oplus 1 = \bar{x}$.

Класс самодвойственных функций S

$f(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in S \Leftrightarrow f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = f^*(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \neg f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$.

$$S = \bigcup_{(n \in N)} S(\tilde{x}^n).$$

Докажем, что класс самодвойственных функций замкнут. *Замкнутость класса самодвойственных функций следует из принципа двойственности:*

Пусть $f_1(\tilde{x}^n), f_2(\tilde{x}^n), \ldots, f_k(\tilde{x}^n), f^{(k)} \in S$ и $F(\tilde{x}^n) = f(f_1(\tilde{x}^n), \ldots, f_k(\tilde{x}^n))$. Определим двойственную к F функцию:

$$F^*(\tilde{x}^n) = \overline{f}(f_1(\overline{\tilde{x}}^n), \ldots, f_k(\overline{\tilde{x}}^n)) = \overline{f}(\overline{\overline{f_1}}^*(\tilde{x}^n), \ldots, \overline{f_k}(\tilde{x}^n)) = f^*(f_1^*(\tilde{x}^n), \ldots, f_k^*(\tilde{x}^n)) =$$

$$= f(f_1(\tilde{x}^n), \ldots, f_k(\tilde{x}^n)) = F(\tilde{x}^n).$$

Следовательно, класс самодвойственных функций замкнут. Для произвольной булевой функции, заданной суперпозицией над некоторым множеством булевых функций, существует двойственная формула, имеющая то же строение, в которой все вхождения функций заменены двойственными функциями.

Чтобы определить число самодвойственных функций n переменных, рассмотрим способ их построения. Он состоит в том, что в верхней части таблицы рассматриваемых функций необходимо записать все возможные двоичные векторы длины 2^{n-1}. Число таких векторов равно числу размещений с повторениями из 2 по 2^{n-1}, т.е. $B_2^{2^{n-1}} = 2^{2^{n-1}} = \sqrt{|P_2(n)|}$. Отсюда мощность класса самодвойственных функций равна

$|S(\tilde{x}^n)| = 2^{2^{n-1}} = \sqrt{2^{2^n}}$.

Можно показать, что не существует самодвойственных элементарных булевых функций, существенно зависящих от двух переменных. К классу самодвойственных относятся функции $x, \bar{x}, maj(x,y,z), x \oplus y \oplus z \in S$.

Неполнота класса самодвойственных функций следует из существования не самодвойственных функций.

Лемма о не самодвойственной функции: Если $f(x_1,x_2,\ldots,x_n) \notin S$, то отождествлением переменных и подстановкой в нее самодвойственных функций x и $\bar{x}$ можно получить не самодвойственную функцию – константу 0 или 1.

♠ Пусть $f(\tilde{x}^n) \notin S$. Тогда найдется набор значений переменных $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ такой, что $f(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n) = f(\bar{\alpha}_1,\bar{\alpha}_2,...,\bar{\alpha}_n)$. Выполним подстановку в данную функцию самодвойственной функции $\varphi(x_i) = x^{\alpha_i}$. Полученную суперпозицию запишем в виде:

$$\Phi(\tilde{x}^n) = f(\tilde{x}^n)\Big|_{\varphi(x_i)}^{x_i} = f(x^{\alpha_1}, x^{\alpha_2},..., x^{\alpha_n}).$$

Далее определим значения Φ(x) при x=1.

$$\Phi(1) = f(1^{\alpha_1},1^{\alpha_2},...,1^{\alpha_n}) = f(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n) = f(\bar{\alpha}_1,\bar{\alpha}_2,...,\bar{\alpha}_n) = f(0^{\alpha_1},0^{\alpha_2},...,0^{\alpha_n}) = \Phi(0).$$ ♦

Таким образом, получена не самодвойственная функция – константа. Используя функцию отрицания, можно получить другую константу. Рассмотрим примеры «работы» леммы над не самодвойственной функцией.

Пример1. $x_1 \vee x_2 \notin S$, так как f(01)=f(10)=1. Произведем указанную в лемме подстановку, выбрав набор (0,1). Тогда $\Phi(x) = x^0 \vee x^1 = \bar{x} \vee x = 1$.

Пример 2. $f(\tilde{x}^2) = x_1 \to x_2$, $f(00) = f(11), \tilde{\alpha}^2 = (00)$.

Тогда $\Phi(x) = x^0 \to x^0 = 1$.

Пример 3. Пусть функция задана вектором (1011 1001). Здесь наборы с номерами 3 и 4 являются противоположными, и $f(3) = f(4)$. МДНФ для этой функции имеет вид

$f(x,y,z) = \bar{x}\bar{z} \vee \bar{y}\bar{z} \vee yz$.

Выполним подстановку значений переменных на наборах 3 и 4 в формулу.

$f(011) = \bar{0}\cdot\bar{1} \vee \bar{0}\cdot\bar{1} \vee 1\cdot 1 = 1\cdot 0 \vee 1\cdot 0 \vee 1\cdot 1 = 1 = f(100)$

Таким образом, получена константа 1. Из наборов с номерами 1 и 6 можно получить константу 0.

Класс монотонных функций M

$f(\tilde{x}^n) \in M$ тогда и только тогда, когда на наборах значений переменных, находящихся в отношении предшествования, значения функции находятся в отношении ≤:

$f(\tilde{x}^n) \in M \Leftrightarrow \forall \tilde{\alpha}^n, \tilde{\beta}^n : (\tilde{\alpha}^n \prec \tilde{\beta}^n) \to f(\tilde{\alpha}^n) < f(\tilde{\beta}^n)$.

Два булевых вектора $\tilde{\alpha}^n$ и $\tilde{\beta}^n$ находятся в отношении предшествования тогда и только тогда, когда одноименные координаты этих векторов находятся в отношении ≤:

$\tilde{\alpha}^n \prec \tilde{\beta}^n \Leftrightarrow \forall i = \overline{1,n}(\alpha_i \le \beta_i)$. например, в случае трех переменных наборы их значений имеют номера от 0 до 7. Соответственно отношение предшествования на этих наборах определяется так: $0 \prec 1,2,3,4,5,6,7; 1 \prec 3,5,7; 2 \prec 3,6,7; 3 \prec 7; 4 \prec 6,7; 5 \prec 7; 6 \prec 7$.

Отношение предшествования на множестве B^n при $n\ge 2$ является частичным порядком.

Мажоритарная функция $\alpha_{maj}(\tilde{x}^3) = (00010111)$ в соответствии с определением является монотонной, а трехместная функция XOR – нет, $\tilde{\alpha}_{(x\oplus y\oplus z)} = (01101001)$.

Множество всех монотонных функций определим как $M = \bigcup\limits_{n\in N} M(n)$.

Теорема. Класс M замкнут и неполон, т.е. $[M]=M\ne P_2$.

♠ Так как тождественная функция монотонна, для доказательства замкнутости достаточно показать, что суперпозиция монотонных функций монотонна. Пусть $\Phi \in P_2(m)$, $f_i \in P_2(n)$, $i=1,2,\ldots,m$. Докажем, что $F(\tilde{x}^n) = \Phi\Big|_{y_i \leftarrow f_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in M$.

Возьмем два произвольных набора значений переменных таких, что $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \prec (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$. Тогда

$\forall i = \overline{1,m}: f_i(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \le f_i(\beta_1 \beta_2, \ldots, \beta_n)$,

и, следовательно,

$(f_1(\tilde{\alpha}^n), f_2(\tilde{\alpha}^n), \ldots, f_m(\tilde{\alpha}^n)) \le (f_1(\tilde{\beta}^n), f_2(\tilde{\beta}^n), \ldots, f_m(\tilde{\beta}^n))$.

А так как $\Phi(\tilde{y}^m) \in M$, то монотонность $F(\tilde{x}^n)$ доказана, а значит, доказана и замкнутость класса M. Неполнота M следует из существования немонотонных функций. ♦

Лемма о немонотонной функции: из произвольной немонотонной функции с помощью подстановки констант и отождествления переменных можно получить функцию отрицания.

♠ Пусть $f(\tilde{x}^n) \notin M$. Это означает, что существуют такие наборы значений переменных, находящихся в отношении предшествования, что $\tilde{\alpha}^n \prec \tilde{\beta}^n$, а $f(\tilde{\alpha}^n) > f(\tilde{\beta}^n)$. Последнее означает, что $f(\tilde{\alpha}^n) = 1, f(\tilde{\beta}^n) = 0$. Из того, что значения функции на выбранных наборах не равны, следует, что сами наборы также не равны. Пусть расстояние Хемминга между наборами равно 1 и обусловлено различием значений переменной $x_i : \alpha_i = 0, \beta_i = 1$. Образуем функцию $\varphi(x) = f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, x, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$. Тогда $\varphi(0) = 1, \varphi(1) = 0, \varphi(x) = \bar{x}$. Так как функция не монотонна, то

$F(0) = f(\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{i-1} 0 \alpha_{i+1} \ldots \alpha_n) > f(\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{i-1} 1 \alpha_{i+1} \ldots \alpha_n) = F(1)$.

Соотношение $F(0) > F(1)$ определяет одноместную функцию отрицания.

Если $\rho(\tilde{\alpha}^n, \tilde{\beta}^n) > 1$, то следует найти в множестве промежуточных наборов два таких соседних набора, на которых происходит нарушение монотонности. После этого задача сводится к предыдущему примеру.

Пример применения леммы о немонотонной функции. Рассмотрим элементарную булеву функцию $\rightarrow$, вектор значений которой имеет вид: $\tilde{\alpha}_{\rightarrow} = (1101)$. Это двуместная функция, нулевой набор предшествует второму, расстояние Хемминга между ними равно 1 по первой переменной и $f(0) > f(2)$. Вторая переменная в обоих наборах равна 0, а первая принимает оба возможных значения (мелькает). «Работа» леммы над этой функцией представлена ниже:

$x \rightarrow y\Big|_{\{y\leftarrow 0\}} = x \rightarrow 0 = \bar{x}$.

В соответствии с леммой из немонотонной функции получена одноместная функция отрицания.

♦

Класс линейных функций L

Произвольная булева функция может быть представлена полиномом по mod2 в виде суммы по mod2 монотонных конъюнкций (полинома Жегалкина). Пусть $f(\tilde{x}^n) \in P_2(n)$. Говорят, что функция f линейна, если ее полином Жегалкина не содержит конъюнкций, ранг которых превышает 1 и имеет вид
$P(\tilde{x}^n) = \alpha_0 \oplus \alpha_1 x_1 \oplus \alpha_2 x_2 \oplus ... \oplus \alpha_n x_n$, где коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \{0,1\}$. Такая функция называется *симметрической*.

Множество всех линейных функций обозначается $L = \bigcup_{n=0}^{\infty} L(n)$. $0, 1, \oplus, \leftrightarrow \in L$, $\&, \vee, \to, \downarrow, | \notin L$

Терема. Класс L замкнут и неполон, т.е. $[L]=L \neq P_2$.

♠ Так как тождественная функция линейна, то для доказательства замкнутости класса L достаточно показать, что суперпозиция линейных функций есть линейная функция. Доказывается записью соответствующей суперпозиции. Неполнота L следует из существования нелинейных функций. ♦

Очевидно, что мощность класса n-местных линейных функций равна $|L(n)|=2^{n+1}$.

Лемма о нелинейной функции. Из произвольной нелинейной функции с помощью подстановки констант, тождественной функции и функции отрицания и, возможно, навешиванием отрицания на всю функцию, можно получить конъюнкцию и дизъюнкцию.

Пусть $f(\tilde{x}^n) \notin L$. Тогда ее полином по mod2 содержит монотонные элементарные конъюнкции ранга выше 1. Выберем среди этих элементарных конъюнкций конъюнкцию минимального ранга (>=2). Для удобства рассуждений положим, что выбранная конъюнкция содержит переменные x_1 и x_2. Выполним следующие подстановки: всем переменным, участвующим в выбранной конъюнкции, кроме переменных x_1 и x_2, присвоим значение1. А всем переменным, не вошедшим в выбранную конъюнкцию, присвоим значение 0. В силу единственности полинома, представляющего данную функцию, после выполнения равносильных преобразований полином примет вид:
$P(x_1, x_2) = \alpha_0 \oplus \alpha_1 x_1 \oplus \alpha_2 x_2 \oplus x_1 x_2$.

Полином содержит три коэффициента $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$. Каждому набору значений коэффициентов соответствует своя собственная функция. Следовательно, таких функций будет восемь. Для определения всех функций, порождаемых нелинейной функцией заданного вида, построим таблицу.

$\alpha_0\ \alpha_1\ \alpha_2$	Полином	Функция
000	$x_1 x_2$	$F(x_1 x_2)=x_1 x_2$
001	$x_2 \oplus x_1 x_2 = \overline{x_1} x_2$	$F(\overline{x}_1 x_2) = x_1 x_2$
010	$x_1 \oplus x_1 x_2 = x_1 \overline{x}_2$	$F(x_1 \overline{x}_2) = x_1 x_2$
011	$x_1 \oplus x_2 \oplus x_1 x_2 = 1 \oplus \overline{x}_1 \overline{x}_2 = x_1 \vee x_2$	$F(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$
100	$1 \oplus x_1 x_2 = \overline{x}_1 \vee \overline{x}_2$	$F(\overline{x}_1 \overline{x}_2) = x \ \vee x_2$
101	$1 \oplus x_2 \oplus x_1 x_2 = 1 \oplus \overline{x}_1 x_2 = x_1 \vee \overline{x}_2$	$F(x_1 \overline{x}_2) = x_1 \vee x_2$
110	$1 \oplus x_1 \oplus x_1 x_2 = 1 \oplus x_1 \overline{x}_2 = \overline{x}_1 \vee x_2$	$F(\overline{x}_1 x_2) = x_1 \vee x_2$
111	$1 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_1 x_2 = \overline{x}_1 \overline{x}_2$	$F(\overline{x}_1 \overline{x}_2) = x_1 x_2$ $\overline{F(x_1 x_2)} = x_1 \vee x_2$

Доказано, что из нелинейной функции могут быть получены конъюнкция и дизъюнкция.

Теорема Поста

Теорема. Чтобы множество $D \subseteq P_2$ было функционально полным в P_2, необходимо и достаточно, чтобы среди функций этого множества нашлась хотя бы одна функция, не сохраняющая 0, хотя бы одна функция, не сохраняющая 1, хотя бы одна не самодвойственная функция, хотя бы одна немонотонная и хотя бы одна нелинейная функции.

Следствие 1. В любом функционально полном в P2 множестве существует функционально полное подмножество, состоящее не более, чем из пяти функций.

Следствие 2. В любом функционально полном множестве существует функционально полное подмножество, состоящее не более чем из четырех функций.

Для доказательства функциональной полноты системы булевых функций по критерию Поста необходимо построить таблицу Поста, строки которой именуются функциями исследуемой системы, а столбцам присваиваются имена предполных классов. На пересечении i-й строки и j-го столбца таблицы ставится 1, если i-я функция принадлежит j-му классу, и 0 – в противном случае. Система функций полна, если в каждом столбце таблицы имеется хотя бы один 0. В противном случае система не является функционально полной в P_2, так как входит целиком в один из предполных классов.

Пусть имеется система функций $D=\{(x_1\oplus x_2\oplus x_3), (x_1\to x_2), (x_1\& \overline{x_2}), 1\}$. Таблица Поста для нее будет иметь вид:

	T_0	T_1	S	M	L
$f_1=\{(x_1\oplus x_2\oplus x_3)$	1	1	1	0	1
$f_2=(x_1\to x_2)$	0	1	0	0	0
$f_3=(x_1\& \overline{x_2})$	1	0	0	0	0
$f_4=1$	0	1	0	1	1

Согласно критерию Поста система функций D функционально полна, так как в каждом столбце имеется хотя бы один 0. Критерии вхождения функции в предполные классы описаны выше.

Другой вопрос, связанный с использованием теоремы Поста, состоит в определении минимально необходимого набора функций из множества D, образующих функционально полную систему. Система функций $D \subseteq P_2$ называется базисом в P_2, если она функционально полна в P_2, но при исключении из нее любой функции, она перестает быть функционально полной, т.е. $[D]=P_2$, и $\forall f:((f\in D)\to([D\backslash\{f\}]\subset P_2))$. Для определения базиса, соответствующего данной системе D, используют метод Петрика, состоящий в следующем. Рассматривая функции системы D как переменные, строим из них конъюнктивную нормальную форму, содержащую пять (по числу предполных классов) элементарных дизъюнкций, включая в каждую элементарную дизъюнкцию только те функции системы, которые принадлежат данному предполному классу, и соединяя полученные дизъюнкции связкой &. Затем преобразуем полученное выражение к ДНФ, использую аксиомы и тождества логики высказываний. Каждая из конъюнкций в полученной ДНФ содержит все функции, образующие базис. Длина ДНФ соответствует числу базисов, соответствующих данной системе. Для рассмотренного примера применение метода Петрика состоит в следующем:

$(f_2\vee f_4)\&f_3\&(f_2\vee f_3\vee f_4)\&(f_1\vee f_2\vee f_3)\&(f_2\vee f_3)=(f_2\vee f_4)\&f_3=f_2f_3 \vee f_3f_4$.

Таким образом, данная система содержит два базиса: $D1=\{f_2,f_3\}$, $D2=\{f_3, f_4\}$.

Теорема Поста позволяет также определить, можно ли из данного множества булевых функций получить некоторую функцию методом суперпозиций. Рассмотрим, например, можно ли получить симметрическую функцию трех переменных суперпозициями над мажоритарной функцией трех переменных. Построив таблицу Поста, убедимся в невозможности этого, так как $m(x^3)$ сохраняет 0, 1, самодвойственная, монотонная и нелинейная, а симметрическая трехместная функция сохраняет 0, 1, самодвойственная, не монотонная и линейная. В тоже время, добавив к мажоритарной функции функцию голосования, получим функционально полную в P_2 систему, позволяющую согласно теореме Поста получить любую булеву функцию, в том числе и искомую. В этом можно убедиться, выполнив соответствующие преобразования.

Список литературы

1. Ерусалимский Я.М. Дискретная математика: теория задачи, приложения. – М.: «Вузовская книга», 1999. – 280 с.
2. Лавров И.А., Л.Л. Максимова. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. – М.: издательство «Наука», 1975. – 240 с. (и более поздние издания этой книги).
3. Г.П. Гаврилов, А.А. Сапоженко. Сборник задач по дискретной математике. М.: издательство «Наука», главная редакция физико-математической литературы. 1977 г. 368 с.
4. С.П. Плеханов. Симметричные карты - мощное средство минимизации булевых функций при проектировании цифровых устройств больших размерностей.// Электронная техника. Сер. 10. Микроэлектронные устройства. Вып. 4(88), 1991