

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

Обыкновенные дифференциальные уравнения
Учебно-методическое пособие для вузов

Составители:
Е.П. Белоусова,
И.Д. Коструб,
Т.И. Смагина

Издательско-полиграфический центр
Воронежского государственного университета
2009

Утверждено научно-методическим советом факультета ПММ 26 мая 2009 г., протокол № 9

Рецензент доцент кафедры функционального анализа и операторных уравнений канд. физ.-мат. наук И.Ф. Леженина

Учебное пособие подготовлено на кафедре нелинейных колебаний факультета ПММ Воронежского государственного университета.

Рекомендуется для студентов второго курса факультета ПММ.

Для специальности 010501 – Прикладная математика и информатика

Задания предназначены студентам 2 курса дневного и вечернего отделений для самостоятельной работы по дифференциальным уравнениям. Кроме задач, приведены контрольные вопросы, позволяющие студентам проверить себя и выяснить качество усвоения материала.

В каждом разделе дается ссылка на соответствующие разделы учебной литературы.

ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1]. Тихонов А.Н. Дифференциальные уравнения / А.Н. Тихонов, А.Б. Васильева, А.Г. Свешников. – М. : Физматлит, 2002. – 232 с.

[2]. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л.С. Понтрягин. – М. : Наука, 1982. – 332 с.

[3]. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям / А.Ф. Филиппов. – М. : Наука, 2000. – 176 с.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

[4]. Боровских А.В. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений / А.В. Боровских, А.И. Перов. – М. – Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, 2004. – 540 с.

[5]. Краснов М.Л. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. – М. : Высш. шк., 1978. – 287 с.

[6]. Самойленко А.М. Дифференциальные уравнения : примеры и задачи / А.М. Самойленко, С.А. Кривошея, Н.А. Перестюк – М. : Высш. шк., 1989. – 383 с.

Задание 1. С помощью изоклин начертить приближенно решения данных уравнений. Выделить области возрастания (убывания) решений ([3, § 1], [5, § 2]).

- | | |
|------------------------------|------------------------------|
| 1. $y' = 2x(1 - y)$; | 2. $y' = 2y$; |
| 3. $y' = y - x$; | 4. $y' = y - x^2 + 2x - 2$; |
| 5. $y' = (y - 1)^2$; | 6. $y' = (y - 1)x$; |
| 7. $y' = x^2 - y^2$; | 8. $y' = 2(2x - y)$; |
| 9. $y' = y - x^2$; | 10. $y' = x^2 + 2x - y$; |
| 11. $y' = 1 - y$; | 12. $y' = 2 - x$; |
| 13. $y' = x^2 + y$; | 14. $y' = x^2$; |
| 15. $y' = x + y$; | 16. $y' = x - 2y$; |
| 17. $y' = \cos(x - y)$; | 18. $y' = (y - x)/(y + x)$; |
| 19. $y' = (y + 1)/(x - 1)$; | 20. $y' = (x + y)/(x - y)$; |
| 21. $y' = (x - 1)/y$; | 22. $y' = (2x - y)/x$; |
| 23. $y' = -x/(4y)$; | 24. $y' = (x - 2y + 3)/2$; |
| 25. $y' = -y/x$; | 26. $y' = 2/x - 1$. |

Задание 2. Составить математические модели прикладных задач и решить их ([3, § 3], [5, § 5], [6]).

При выполнении данного задания возможно применение двух методов: 1) метода приращений и 2) с использованием физического смысла производной как скорости протекания неравномерного процесса.

В первом методе приращение функции $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x)$ на малом промежутке изменения аргумента $[x, x + \Delta x]$ следует выразить через данные задачи. После предельного перехода при $\Delta x \rightarrow 0$ возникает дифференциальное уравнение, которое требуется решить.

При применении второго метода следует воспользоваться известными физическими законами. Ниже приводятся некоторые из них.

1. Второй закон Ньютона, согласно которому уравнение движения точки массы m со скоростью v под действием силы F имеет вид

$$m \frac{dv}{dt} = F.$$

2. Закон излучения Ньютона, согласно которому скорость остывания или нагревания тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды.

3. Закон теплопроводности Фурье для стационарного режима, при котором количество тепла, проходящее через какую-либо площадку, постоянно, то есть температура T каждой точки не зависит от времени и меняется только с расстоянием точек от некоторой оси. В этом случае количество тепла dq , проходящее через бесконечно малую площадку, перпендикулярную к некоторой оси, в направлении этой оси за промежуток времени dt , пропорционально площади площадки ds , длительности промежутка dt и скорости падения температуры в этом направлении, то есть

$$dq = -\lambda \frac{dT}{dn} ds dt,$$

где λ – коэффициент теплопроводности. Знак минус указывает, что поток тепла движется в сторону падения температуры.

4. Закон Кирхгофа, согласно которому сумма падений напряжения на всех участках цепи равна электродвижущей силе. При этом падение напряжения на сопротивлении R подсчитывается по формуле $u_R = Ri$, где i – величина тока. Падение напряжения на индуктивности L вычисляется по формуле $u_L = -L \frac{di}{dt}$.

Пример 1. В помещении цеха вместимостью $10\,800\text{ м}^3$ воздух содержит $0,12\%$ углекислоты. Вентиляторы доставляют свежий воздух, содержащий $0,04\%$ углекислоты, в количестве $a\text{ м}^3$ в минуту. Предполагая, что концентрация углекислоты во всех частях помещения в каждый момент одна и та же (смешение чистого воздуха с загрязненным происходит немедленно), рассчитать, какова должна быть мощность вентиляторов, чтобы по истечении 10 минут содержание углекислоты не превышало $0,06\%$.

Решение. Обозначим через $x(t)(\%)$ содержание углекислоты в воздухе в момент времени t . Проследим, как изменится процентное содержание углекислоты в воздухе $\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t)$ за промежуток от t до $t + \Delta t$. За время Δt вентиляторы доставят $a\Delta t\text{ м}^3$ воздуха, в котором содержится $0,04\%$ углекислоты, то есть за время Δt добавится $0,04a\Delta t/100\text{ м}^3$ углекислоты. За это же время уйдет $a\Delta t\text{ м}^3$ воздуха, в котором содержится $a\Delta tx(t)/100\text{ м}^3$ углекислоты. Выражая Δx в м^3 , получим уравнение баланса углекислоты

$$\frac{\Delta x}{100} 10800 = \frac{0,04 a\Delta t}{100} - \frac{ax \Delta t}{100},$$

или

$$\frac{dx}{dt} = \frac{a(0,04 - x)}{10800}.$$

Отсюда

$$x(t) = 0,04 + ce^{-at/10800}.$$

Из начального условия $x(0) = 0,12$ найдем, что $c = 0,08$. Следовательно,

$$x(t) = 0,04 + 0,08e^{-at/10800}.$$

Для определения мощности вентиляторов a воспользуемся условием $x(10) = 0,06$. Имеем $0,06 = 0,04 + 0,08e^{-a/1080}$, откуда

$$a = 1080 \ln 4 \approx 1500 \text{ (м}^3/\text{мин)}.$$

Пример 2. Сосуд, площадь $S = S(h)$ поперечного сечения которого есть известная функция высоты h , наполнен жидкостью до уровня H . В дне сосуда имеется отверстие площади ω , через которое жидкость вытекает. Известна скорость $v = v(h)$ изменения объема V жидкости в сосуде от уровня h жидкости в сосуде (напора). Определить время t , за которое уровень жидкости понизится от начального положения H до произвольного h и время T полного опорожнения сосуда.

Решение. Пусть высота жидкости в сосуде в момент времени t равна h . Количество жидкости ΔV , вытекающее из сосуда за промежуток времени от t до $t + \Delta t$, можно подсчитать как объем цилиндра с площадью основания ω и высотой $v(h)$. Таким образом, $\Delta V = \omega v(h)\Delta t$. Этот же объем жидкости может быть вычислен другим способом. Вследствие утечки воды уровень h жидкости в сосуде понизится на величину Δh , следовательно, $dV = -S(h)\Delta h$ (знак минус берется потому, что $\Delta h < 0$). Приравнивая друг другу оба выражения для ΔV , составим уравнение

$$\omega v(h)\Delta t = -S(h)\Delta h.$$

Переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$ и разделяя переменные, получим

$$dt = -\frac{S(h)}{\omega v(h)}dh,$$

откуда

$$t = \frac{1}{\omega} \int_h^H \frac{S(h)}{v(h)}dh.$$

Время T полного опорожнения сосуда определится по формуле

$$T = \frac{1}{\omega} \int_0^H \frac{S(h)}{v(h)}dh.$$

Если истечение происходит через малый патрубок, то $v = \mu\sqrt{2gh}$, где g — ускорение силы тяжести, μ — коэффициент расхода. Для воды $\mu = 0,6$.

Пример 3. Влага, содержащаяся в свежеспеченном хлебе, испаряется в окружающую среду со скоростью, пропорциональной количеству влаги в хлебе, а также разности между влажностью насыщенного и окружающего воздуха. Некоторое количество свежеспеченного хлеба, содержащего 3 кг влаги, положено в помещение объемом 100 м^3 , воздух которого первоначально имел влажность 25 %. Насыщенный воздух при той же температуре содержит 0,12 кг влаги на 1 м^3 . Если в течение первых суток хлеб потерял половину своей влаги, то сколько влаги в нем останется по истечении вторых суток?

Решение. Пусть $x(t)$ кг — количество влаги в хлебе в момент времени t . Влажность насыщенного воздуха равна

$$\frac{0,12 \text{ кг} \cdot 100 \text{ м}^3}{1 \text{ м}^3} = 12 \text{ кг};$$

первоначальная влажность воздуха

$$\frac{12 \text{ кг} \cdot 25 \%}{100 \%} = 3 \text{ кг}.$$

Следовательно, влажность воздуха в момент времени t равна $(3+3-x)$ кг. Согласно условию задачи имеем уравнение

$$\frac{dx}{dt} = kx(x+6).$$

Откуда

$$\frac{x}{x+6} = Ce^{6kt}.$$

Из начального условия $x(0) = 3$ находим, что $C = 1/3$. Так как $x(1) = 3/2$, то $e^{6k} = 3/5$. Поэтому

$$x(t) = [x(t) + 6] \frac{1}{3} \left(\frac{3}{5}\right)^t$$

и, следовательно,

$$x(2) = 0,82 \text{ кг}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. а) Цилиндрический бак высотой 6 м и диаметром основания 4 м поставлен вертикально и наполнен водой. За какое время вода, заполняющая бак, вытечет из него через круглое отверстие радиуса $1/12$ м, сделанное в баке?

Ответ: $t \approx 17,7$ мин.

б) Ветер, проходя через лес, испытывая сопротивление деревьев, теряет скорость. На бесконечно малом пути эта потеря пропорциональна скорости ветра в начале пути и длине этого пути. Найти скорость ветра, прошедшего в лесу 150 м, зная, что начальная его скорость была 12 м/с, после прохождения в лесу пути в 1 м скорость уменьшилась до 11,8 м/с.

Ответ: $v \approx 0,93$ м/с.

2. а) В сосуд, содержащий 30 л воды, непрерывно со скоростью 5 л/мин поступает раствор, в каждом литре которого содержится 0,3 кг соли. Смесь вытекает из сосуда с той же скоростью. Сколько соли будет в сосуде через 5 мин?

Ответ: $x(5) \approx 5,05$ кг.

б) Материальная точка массой 2 г без начальной скорости медленно погружается в жидкость. Найти её скорость через 2 секунды, считая, что при медленном погружении сила сопротивления жидкости пропорциональна скорости погружения (коэффициент погружения 1).

Ответ: $v \approx 12,36$ м/с.

3. а) Популяция бактерий увеличивается таким образом, что скорость роста в момент t (время выражается в часах) составляет величину $1/(1 + 2t)$. Начальной популяции соответствует 500 особей. Какой будет популяция после 6 часов роста? после 8,5 часов?

Ответ: $\approx 578; 706$.

б) Парашютист прыгнул с высоты 1,5 км, а раскрыл парашют на высоте 0,5 км. Сколько времени он падал до раскрытия парашюта? Изменением плотности с высотой пренебречь. Сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости. Известно, что предельная скорость падения человека в воздухе нормальной плотности 50 м/с.

Ответ: $v(t) = 50 \operatorname{th} t/5$; $t = (4 + \ln 2) \approx 23$ с.

4. а) Цилиндрический бак длиной 6 м и диаметром 4 м расположен горизонтально. За какое время вода вытечет из бака, если отверстие радиуса $1/12$ м находится на уровне самой нижней из образующих цилиндра?

Ответ: $t \approx 18,4$ мин.

б) Парашютист спускается на парашюте, имеющем форму полусферы радиуса 4 м. Его масса вместе с массой парашюта равна 82 кг. Найти скорость парашютиста через 2 с после начала спуска и путь, пройденный за время t . Считать, что сила сопротивления воздуха $F_1 = 0,00081Sv^2$, где S — площадь наибольшего сечения, перпендикулярного направлению движения, v — скорость движения.

Ответ: $v = \sqrt{g/\alpha} \operatorname{th}(\sqrt{\alpha g} t)$; $v(2) \approx 4,43$; $S = 1/\alpha \ln(\operatorname{ch} t(\sqrt{\alpha g} t))$; $\alpha = 0,00081S/m$.

5. а) Найти время, в течение которого вся вода вытечет из конической воронки высотой 20 см с отверстием площадью $0,1 \text{ см}^2$ и углом 90° при вершине конуса, если известно, что половина воды вытекает за 2 мин.

Ответ: $t \approx 4,6$ мин.

б) Метеорит, находящийся под влиянием земного притяжения, из состояния покоя начинает прямолинейно падать на Землю с высоты h . Какой была бы скорость метеорита при достижении им поверхности Земли, если бы отсутствовала земная атмосфера? Радиус Земли $R = 6377 \text{ км}$.

Ответ: $v(h) = \sqrt{2gR(1 - R/h)}$, $v \approx 11,2 \text{ км/с}$ при $h \rightarrow \infty$.

6. а) В сосуд, содержащий 20 л воды, непрерывно со скоростью 5 л/мин поступает раствор, в каждом литре которого содержится 0,2 кг соли. В сосуде раствор перемешивается, и смесь вытекает из сосуда с той же скоростью. Сколько соли будет в растворе через 4 мин?

Ответ: $m(4) \approx 2,4 \text{ кг}$.

б) Моторная лодка движется в спокойной воде со скоростью 10 км/ч. На полном ходу ее мотор был выключен, и через 20 с скорость лодки уменьшилась до 6 км/ч. Определить скорость лодки через 2 мин после остановки мотора, если сопротивление воды пропорционально скорости лодки.

Ответ: $v \approx 0,466 \text{ км/ч}$.

7. а) Круглый цилиндрический бак с вертикальной осью, диаметром 2 м и высотой 2,25 м наполнен водой. Определить время опорожнения бака через круглое отверстие диаметром 0,1 м в дне бака.

Ответ: $t \approx 452 \text{ с}$.

б) Ветер, проходя через лес, испытывая сопротивление деревьев, теряет скорость. На бесконечно малом пути эта потеря пропорциональна скорости ветра в начале пути и длине этого пути. Найти скорость ветра, прошедшего в лесу 150 м, зная, что начальная его скорость была 12 м/с, после прохождения в лесу пути в 1 м скорость уменьшилась до 11,8 м/с.

Ответ: $v \approx 0,93 \text{ м/с}$.

8. а) Пустой железный шар находится в стационарном тепловом

состоянии (т. е. температура в каждой точке с течением времени не меняется). Внутренний радиус шара 6 см, внешний — 10 см, температура внутренней поверхности 200° , внешней 20° . Найти температуру в точках, находящихся на расстоянии 9 см от центра шара. Коэффициент теплопроводности железа 0,14.

Ответ: $T(9) = 50^\circ$.

б) Материальная точка массой 1 г движется прямолинейно под действием силы, прямо пропорциональной времени, отсчитываемому от момента $t = 0$, и обратно пропорционально скорости движения точки. Через 10 с скорость равнялась 50 м/с, а сила — 4 динам. Какова будет скорость спустя минуту после начала движения?

Ответ: $v = 10\sqrt{725}$ см/с.

9. а) Глюкоза вводится в кровь больного с постоянной скоростью C г/мин. В то же время глюкоза разлагается и выводится из кровеносной системы со скоростью, пропорциональной имеющемуся количеству глюкозы. Зная первоначальное количество глюкозы в крови, найти равновесное количество глюкозы.

Ответ: C/k , где k — коэффициент пропорциональности.

б) Футбольный мяч весом 0,4 кг брошен вверх со скоростью 20 м/с. Сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости и равно 0,48 г при скорости 1 м/с. Вычислить время подъема мяча и наибольшую высоту подъема. Как изменятся эти результаты, если сопротивлением воздуха пренебречь?

Ответ: $t = 17,5$ с, $h_{max} \approx 16,3$ м; $t = 2$ с, $h_{max} \approx 20$ м.

10. а) Поглощение светового потока тонким слоем воды пропорционально толщине слоя и потоку, падающему на его поверхность. При прохождении через слой толщины 1 м поглощается $1/4$ первоначального светового потока. Какая часть светового потока дойдет до глубины 4 м?

Ответ: $Q(4) = Q_0 0,75^4$.

б) Вес летчика с парашютом равен 80 кг. Сопротивление воздуха при спуске парашюта пропорционально квадрату его скорости (коэффициент пропорциональности 400). Определить скорость спуска в зависимости от времени и установить максимальную скорость спуска.

Ответ: $v(t) = \sqrt{mg/k} (e^{2\alpha t} - 1) / (e^{2\alpha t} + 1)$; $v_{max} = \sqrt{mg/k} \approx 4,4$ м/с.

11. а) Кирпичная стена имеет 30 см толщины. Найти зависимость температуры от расстояния точки от наружного края стены, если температура 20°C на внутренней и 0°C на внешней поверхности стены. Найти также количество тепла, которое стена (на 1 м^3) отдает наружу в течение

суток. Коэффициент теплопроводности $k = 0,0015$.

Ответ: $T(x) = (2/3)x$; $Q = 864\,000$ кал.

б) Корабль массой 10 000 т движется с начальной скоростью 16 м/с. Сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости корабля и равно 30 т при скорости 1 м/с. Какое расстояние пройдет корабль с выключенным двигателем прежде, чем его скорость станет равной 4 м/с? За какое время корабль пройдет это расстояние?

Ответ: $S = 462$ м за 62,5 с.

12. а) В результате химической реакции между веществами А и В образуется вещество С. Найти зависимость количества вещества С от времени, если в момент вступления в реакцию количества веществ А и В были равны соответственно a и b . Скорость реакции пропорциональна произведению реагирующих масс.

Ответ: $x(t) = ab(1 - e^{-k(b-a)t}) / (b - ae^{-k(b-a)t})$.

б) Пуля, двигаясь со скоростью 400 м/с, пробивает стену толщиной 20 см и вылетает из нее со скоростью 100 м/с. Считая силу сопротивления стены пропорциональной квадрату скорости движения пули, найти время движения пули к стене.

Ответ: $t = 3/(20 \ln 4)$ с.

13. а) Скорость увеличения площади листа виктории-регии, имеющего форму круга, пропорциональна радиусу листа и количеству солнечного света, падающего на него. Количество солнечного света пропорционально площади листа и косинусу угла между направлением лучей и вертикалью к листу. Найти зависимость между площадью S листа и временем t , если в 6 часов утра эта площадь составляла 1600 см^2 , а в 18 часов того же дня — 2500 см^2 . Принять, что угол между направлением луча Солнца и вертикалью в 6 часов утра и в 18 часов равен 90° , а в полдень — 0° .

Ответ: $S(t) = 160000 [9 - \sin \pi(t - 6)/12]^{-2}$.

б) Найти закон убывания лекарственного препарата в организме человека, если через 1 час после введения 10 мг препарата его масса уменьшилась вдвое. Какое количество препарата останется в организме через 2 часа?

Ответ: 2,5 мг.

14. а) В бак, в котором имеется 100 л 10 %-го раствора соли, каждую минуту вливается 30 л воды и из него вытекает 20 л смеси. Какое количество соли останется в баке через 10 мин?

Ответ: 2,5 кг.

б) В эксперименте с голоданием масса испытуемого за 30 дней уменьшилась со 140 до 110 кг. Ежедневные потери массы, согласно наблюдениям,

были пропорциональны массе испытуемого. Найти массу испытуемого через 15 дней голодания.

Ответ: $m = 140 \sqrt{11/14}$ кг.

15. а) Трубопровод тепловой магистрали (диаметр 20 см) защищен изоляцией толщиной 10 см; коэффициент теплопроводности равен 0,00017; температура трубы 160°C , а температура внешнего покрова 30°C . Найти распределение температуры внутри изоляции и количество тепла, отдаваемое одним погонным метром трубы.

Ответ: $T(x) = 591,8 - 431,8 \lg x$; $Q \approx 20,027$ кал.

б) Скорость роста популяции в расчете на одну особь представляет собой разность между средней рождаемостью β и средней смертностью γ . Средняя рождаемость не зависит от времени и размерности популяции. Средняя смертность пропорциональна размеру популяции с положительным коэффициентом пропорциональности δ . Увеличение смертности с ростом популяции может происходить благодаря эффектам скученности или усиливающейся конкуренции за доступные пищевые ресурсы. Показать, что размер равновесной популяции прямо пропорционален средней рождаемости и обратно пропорционален средней смертности на одну особь популяции.

16. а) В закрытом помещении объемом V м³ находится открытый сосуд с водой. Скорость испарения воды пропорциональна разности между количеством q_1 водяного пара, насыщающего 1 м³ воздуха при данной температуре, и количеством q водяного пара, имеющегося в 1 м³ воздуха в рассматриваемый момент (считается, что температура воздуха и воды, а также величина площади, с которой происходит испарение, остаются неизменными). В начальный момент в сосуде было m_0 г воды, а в 1 м³ воздуха q_0 г пара. Сколько воды останется в сосуде через промежуток времени t ?
Ответ: $m(t) = m_0 - V(q_1 - q_0)(1 - e^{-kt/v})$.

б) Электрическая цепь состоит из сопротивления R и самоиндукции L . Считая известной электродвижущую силу $E = E(t)$, рассчитать силу тока $i = i(t)$ в цепи. Рассмотреть случай, когда $E = E_0 = \text{const}$ и $i(0) = i_0$.

Ответ: $i(t) = E_0/R + (i_0 - E_0/R)e^{-Rt/L}$.

17. а) В баке находится 100 л водяного раствора, содержащего 10 кг соли. Вода вливается в бак со скоростью 3 л/мин, причем концентрация поддерживается равномерной посредством перемешивания. Сколько соли будет содержать бак по истечении часа? (Концентрацией c вещества называется количество его, заключенное в единице объема. Если концентрация

равномерна, то количество вещества в объеме V равно cV). Смесь из бака вытекает со скоростью 2 л/мин.

Ответ: $\approx 3,9$ кг.

б) Тело, находившееся в начальный момент в жидкости, погружается в нее под действием собственного веса без начальной скорости. Сопротивление жидкости пропорционально скорости. Найти закон движения тела, если его масса m .

Ответ: $S(t) = m^2g/k^2 (e^{-kt/m} - 1) + mgt/k$.

18. а) Найти зависимость давления воздуха от высоты, если известно, что это давление равно 1 кг на 1 см^3 на уровне моря и 0,92 кг на 1 см^3 на высоте 500 м. (Использовать закон Бойля – Мариотта).

Ответ: $p = e^{-0,000167 h}$.

б) Ракета пущена вертикально вверх с начальной скоростью 100 м/с. Сопротивление воздуха замедляет её движение, сообщая ракете отрицательное ускорение, пропорциональное квадрату её скорости. Определить время достижения ракетой наивысшего положения.

Ответ: $t = \text{arctg}(31,62\sqrt{k}) / (3,162\sqrt{k})$, $k > 0$.

19. а) В модели эпидемии один зараженный индивидуум вводится в сообщество, состоящее из n индивидуумов, восприимчивых к заболеванию. Инфекция распространяется со скоростью, пропорциональной численности зараженных к моменту времени t индивидуумов и численности индивидуумов, восприимчивых к заболеванию в этот момент времени. Определить зависимость числа зараженных индивидуумов от времени.

Ответ: $(n + 1)/(1 + ne^{-k(n+1)t})$.

б) Материальная точка движется по прямой со скоростью, обратно пропорциональной пройденному пути. В начальный момент движения точка находилась на расстоянии 5 м от начала отсчета пути и имела скорость 20 м/с. Определить пройденный путь и скорость точки через 10 с после начала движения.

Ответ: $S = 45$ м; $v = 20/9$ м/с.

20. а) Дно сосуда покрыто смесью соли и нерастворимого вещества. Допуская, что скорость растворения соли пропорциональна разности между концентрацией в данный момент и концентрацией насыщенного раствора (1 кг соли на 30 л воды) и что данное количество чистой воды растворяет $1/3$ кг соли в 1 мин, найти, сколько соли будет содержать раствор по истечении 1 часа. Вместимость сосуда 300 л.

Ответ: $x(1) \approx 18,1$ кг.

б) Ускорение локомотива, начальная скорость которого V_0 , прямо пропор-

ционально силе тяги F и обратно пропорционально массе поезда m . Сила тяги локомотива $F(t) = b - kV(t)$, где $V(t)$ скорость его в момент t , а b и k — постоянные величины. Найти зависимость силы тяги локомотива от времени.

Ответ: $F(t) = (b - kV_0) e^{-kt/m}$.

21. а) Некоторое количество нерастворимого вещества содержит в своих порах 10 кг соли. Подвергая его действию 90 л воды, нашли, что в течение одного часа растворилась половина содержащейся в нем соли. Сколько соли растворилось бы в течение того же времени, если бы количество воды было удвоено? Скорость растворения пропорциональна количеству нерастворенной соли и разности между концентрацией раствора в данный момент и концентрацией насыщенного раствора (1 кг на 3 л).

Ответ: $x(t) = 5,2$ кг.

б) Моторная лодка движется по озеру со скоростью 20 км/ч. Через 40 с после выключения мотора ее скорость уменьшается до 8 км/ч. Сопротивление воды пропорционально скорости движения лодки. Какова скорость лодки через 2 мин после остановки мотора?

Ответ: $v = 32/25$ км/ч.

22. а) Некоторое количество вещества, содержащее 3 кг влаги, было помещено в комнате объемом 100 м^3 , воздух которой имел влажность 25 %. Насыщенный воздух при той же температуре содержит 0,12 кг влаги на 1 м^3 . Если в течение первых суток вещество потеряло половину своей влаги, то сколько влаги в ней останется по истечении вторых суток? (Влага, содержащаяся в пористом веществе, испаряется в окружающую среду со скоростью, пропорциональной количеству влаги в данном веществе, а также разности между влажностью окружающего воздуха и влажностью воздуха насыщенного).

Ответ: $x(t) = 0,82$ кг.

б) При брожении скорость прироста действующего фермента пропорциональна его наличному количеству. Найти зависимость массы фермента от времени, если в начальный момент времени было y_0 кг фермента. Чему равно первоначальное количество фермента при брожении, если через 3 часа после брожения количество фермента составляло 0,5 кг, а через 7 часов — 2 кг?

Ответ: $m(t) = m_0 e^{kt}$ ($k > 0$); $m(t) = 2^{(t-5)/2}$; $m(0) = 0,125\sqrt{2}$ кг.

23. а) В популяцию большого размера внесено инфекционное заболевание. Доля людей, перенесших заболевание, возрастает со временем со скоростью $[1 - x(t)]/3$, где $x(t)$ доля людей, переболевших этой болезнью

за t лет после ее возникновения в популяции. За сколько лет доля переболевших достигнет 90 %?

Ответ : $t = 3 \ln |(x_0 - 1) / (x - 1)|$.

б) В помещение вместимостью $10\,000\text{ м}^3$ втекает через вентиляторы $1\,000\text{ м}^3$ свежего воздуха в 1 мин, содержащего 0,04 % CO_2 . В 9 часов утра в помещение входят служащие и через 30 мин содержание CO_2 в воздухе повышается до 0,12 %. Какого процента CO_2 можно ожидать в воздухе к двум часам дня?

Ответ: $x(t) = 0,124\%$.

24. а) Некоторое вещество преобразуется в другое со скоростью, пропорциональной количеству непреобразованного вещества. Известно, что количество первого вещества равно 31,4 г по истечении 1 часа и 9,7 г по истечении 3 часов. Определить: 1) сколько вещества было в начале процесса; 2) через сколько времени после начала процесса останется 1 % от первоначального количества.

Ответ: $m_0 \approx 56,6\text{ г}$, $t \approx 7,84\text{ час}$.

б) Материальная точка массой 5 г без начальной скорости медленно погружается в жидкость. Найти ее скорость через 3 с, считая что при медленном погружении сила сопротивления жидкости пропорциональна скорости погружения (коэффициент погружения 1).

Ответ: $v(3) = 4,55\text{ м/с}$.

25. а) Стальная шаровая оболочка с внутренним радиусом 6 см и внешним радиусом 10 см находится в стационарном тепловом состоянии. Температура на внутренней поверхности равна 200° , а на внешней 20° . Найти температуру на расстоянии r от центра и количество теплоты, которое отдает шар наружу в течение 1 секунды (теплопроводность стали 0,14).

Ответ: $T = 2700/r - 250$; $Q \approx 4750\text{ кал}$.

б) Цилиндрический резервуар с вертикальной осью высотой 4,5 м и диаметром 2 м имеет на дне круглое отверстие радиусом $1/8\text{ м}$. Установить зависимость уровня воды в резервуаре от времени t , а также определить время, в течение которого вытечет вся вода.

Ответ: $T \approx 1\text{ мин } 65\text{ с}$.

26. а) Некоторое вещество преобразуется в другое со скоростью, пропорциональной количеству непреобразованного вещества. Известно, что количество первого вещества равно 31,4 г по истечении 1 часа и 9,7 г по истечении 3 часов. Определить: 1) сколько вещества было в начале процесса? 2) через сколько времени после начала процесса останется 1 %

от первоначального количества?

Ответ: $m_0 \approx 56,6$ г; $t \approx 7,84$ час.

б) В цилиндрическом сосуде объемом V_0 атмосферный воздух адиабатически (без обмена теплотой с окружающей средой) сжимается до объема V_1 . Вычислить работу сжатия, если давление воздуха $P = P_0(V_0/V_1)^k$ (закон Пуассона), где k постоянная для данного газа величина.

Ответ: $A = (P_0 V_0 / (k - 1))(V_0^{k-1} / V_1^{k-1} - 1)$.

Задание 3. Найти общее решение дифференциального уравнения первого порядка ([3, §§ 2, 4 – 6], [5, §§ 4 – 7]).

1. $y'x^3 \sin y + 2y = xy'$;
2. $y' = (y + 2)/(x + 1) + \operatorname{tg}((y - 2x)/(x + 1))$;
3. $y' + y \cos x = e^{-\sin x}$;
4. $y' = \cos(x - y - 1)$;
5. $y'x^3 = y^2(y - xy')$;
6. $y' + \cos((x + y)/2) = \cos((x - y)/2)$;
7. $y' = (y + \sqrt{x^2 - y^2})/x$;
8. $xdx/(xdy + ydx) = \sqrt{1 + x^2}$;
9. $xyy' = \sqrt{x^4 - y^4} + y^2$;
10. $(2x + 3y - 1)dx = (5 - 4x - 6y)dy$;
11. $(1 + x^2)y' - 2xy = 4\sqrt{y(1 + x^2)} \operatorname{arctg} x$;
12. $(2xe^y + y^4)y' = ye^y$;
13. $(2x^2y \ln y - x)y' = y$;
14. $y' - y^2e^x = -2y$;
15. $yy' + x = (x^2 + y^2)/2x$;
16. $(y + 2)dx = (2x + y - 4)dy$;
17. $dx/(\sqrt{x^2 - y}) = dy/(2x(1 + \sqrt{x^2 - y}))$;
18. $xy^2y' - y^3 = x^4/3$;
19. $(xchy + shx)y' + shy + ychx = 0$;
20. $(y' + 1) \ln((y + x)/(x + 3)) = (y + x)/(x + 3)$;
21. $y' = 3x + \sqrt{y - x^2}$;
22. $(4xy - 3)y' + y^2 = 1$;
23. $y' - 8x\sqrt{y} = 4yx/(x^2 - 1)$;
24. $y' + \operatorname{tg} y = x \sec y$;
25. $(1/x - y^2/(x - y)^2)dx = (1/y - x^2/(x - y)^2)dy$;
26. $y' = 1/2\sqrt{x} + \sqrt[3]{y}$.

Задание 4. Найти частное решение уравнения, удовлетворяющее заданному условию ([3, §§ 4 – 6], [5, §§ 4 – 7]).

1. $(x - 1)xy' + y = x^2(2x - 1), \quad y(2) = 4;$
2. $y' = 1/(x \cos y + \sin 2y), \quad y(1) = 0;$
3. $4y^6 + x^3 = 6xy^5y', \quad y(1) = 1;$
4. $(x + 1)y' = y - 1, \quad y$ ограничено при $x \rightarrow +\infty;$
5. $y' = 2x(\pi + y), \quad y$ ограничено при $x \rightarrow +\infty;$
6. $dy = (2y + x^2 + x)dx, \quad y(0) = 0;$
7. $y' + y = e^{-x} - xe^{2x}, \quad y(0) = -2;$
8. $y' + 2y = e^{-2x} + \sin x, \quad y(0) = 1;$
9. $2xy'(x - y^2) + y^3 = 0, \quad y(1) = 1;$
10. $y' + 2xy = 2xy^2, \quad y(0) = 1;$
11. $y' \sin x - y \cos x = -\sin^2 x/x^2, \quad y \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty;$
12. $y' \sin 2x = 2(y + \cos x), \quad y$ ограничено при $x \rightarrow \pi/2;$
13. $y' + y \operatorname{tg} x = 1/\cos x, \quad y(0) = 1;$
14. $y' - 2xy = 3x^2 - 2x^4, \quad y(0) = 2;$
15. $y' + y = e^x + xe^{2x}, \quad y(0) = -1;$
16. $y' + x = x^2 - 3y, \quad y(0) = 1;$
17. $y' - x = y + \sin x, \quad y(0) = 2;$
18. $y' - x \sin x = y, \quad y(0) = 0;$
19. $dy = (y - 2e^{-x})dx, \quad y \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty;$
20. $3y^2y' + y^3 = 1, \quad y(0) = 2;$
21. $2xy' - 3y = 3x^2y^{1/3}, \quad y(1) = 0;$
22. $(x + 2y)y' = 1, \quad y(0) = -1;$
23. $xy' - y = x \operatorname{tg} y/x, \quad y(1) = \pi/2;$
24. $y' - y = 2x - 3, \quad y(0) = 3;$
25. $(2e^y - x)y' = 1, \quad y(2) = 0;$
26. $[2x - \ln(y + 1)]dx - \frac{x+y}{y+1}dy = 0, \quad y(1) = 0.$

Задание 5. Найти общее решение дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Частное решение неоднородного уравнения искать методом вариации произвольных постоянных ([3, § 11], [5, § 15]).

1. $y'' - y' = 2e^{2x} \cos e^x;$
2. $y'' - y' = e^{2x} \sqrt{1 - e^{2x}};$
3. $y'' - y = 2e^x/(1 - e^x);$
4. $y'' - y' = e^x/(1 + e^x);$
5. $y'' - 2y' + y = e^x/(x^2 + 3);$
6. $y^{(3)} + y' = \sin x/\cos^2 x;$
7. $y'' - y = 1/(e^x + 2);$
8. $y'' + 2y' + 2y = e^{-x} \operatorname{cosec} x;$
9. $y'' + 2y' + y = e^{-x}/x;$
10. $y'' + 4y = 1/\sin 2x;$
11. $y'' + y = 1/(1 + \cos^2 x);$
12. $y'' + y = \sin x + 1/\sin x;$

13. $y'' - 2y' + y = e^x/x$; 14. $y'' - 2y' + y = e^x/(2x^2)$;
 15. $y'' + y = \sec x$; 16. $y'' - 6y' + 9y = 2e^{3x}/x$;
 17. $y'' - 10y' + 25y = e^{5x}/x^2$; 18. $y'' + y = 2 - \operatorname{cosec} x$;
 19. $y'' + 2y' + y = xe^x + 1/(xe^x)$; 20. $y'' - 2y' + y = (x^2 + 2x + 2)/x^3$;
 21. $y'' + 2y' + y = 4e^{-x}(1+x)^{1/3}$; 22. $y'' + y = \cos x + 1/\sin x$;
 23. $y'' + 4y = 2 \operatorname{tg} 2x$; 24. $y'' + y = 2 \operatorname{cosec}^2 x$;
 25. $y'' - y' - 2y = 3e^x/(e^x + 1)$; 26. $y'' + y = 2/\sin^3 x$.

Задание 6. Найти общее решение дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Частное решение неоднородного уравнения выписать с неопределёнными коэффициентами. Числовые значения коэффициентов найти для одного из слагаемых правой части ([3, § 11], [5, § 15]).

1. $y^{(4)} - y = xe^x + \cos x + 3x^3 - 1$;
2. $y'' + 2y' + 2y = e^{-x}(\cos x + x)$;
3. $y'' + 2y' + 5y = e^{-x} \cos 2x - 3x^2 - xe^{-x} + 4x$;
4. $y'' - 2y' + 2y = xe^x - 3e^x \cos x - 1 + x^2$;
5. $y^{(4)} - 4y^{(3)} = e^x + 3 \sin 2x + 2$;
6. $y^{(4)} + 2y^{(3)} + y'' = 2x^2 - x + 4e^{-x} + \sin x$;
7. $y^{(3)} + 2y'' + 5y' = 2 \cos x + x - x^2e^{-x}$;
8. $y'' - 4y' = xe^{2x} - \sin x + 3x^2$;
9. $y^{(3)} - 2y' + 4y = e^{-x} \cos x - x^2 + \sin 2x$;
10. $y^{(3)} - 6y'' + 11y' - 6y = 12x^2e^{3x} - e^{2x} + \sin x$;
11. $y^{(3)} - 4y' = xe^{2x} + \sin x - x^2$;
12. $y^{(4)} - 4y^{(3)} = e^{2x} + 3 \sin 2x - 2 + x^2$;
13. $y^{(4)} + 2a^2y'' + a^4y = x^2 - 2e^{ax}$, $a > 0$;
14. $y^{(4)} + 8y'' + 16y = \cos 2x + 6x - e^{2x}$;
15. $y^{(4)} - 2y^{(3)} + y'' = e^{3x} + 3x$;
16. $y^{(3)} - 2y' + 4y = \cos x + x^2 + e^x \sin x$;
17. $y^{(4)} + y'' = x^2 - x + 2 \sin 2x + xe^x$;
18. $y^{(3)} - 3y'' + 3y' - y = 7x - 2 + \cos 2x + e^x$;
19. $y'' + y' = x^2e^{-x} + 1$;
20. $y^{(4)} - a^4y = 5a^4 \sin ax + (2x + 3)a^4$, $a > 0$;
21. $y^{(3)} + y'' = x^2 - 2 - 3xe^x + \sin x$;
22. $y'' - 6y' + 8y = 5xe^{2x} + 2e^{4x} \sin x$;
23. $y^{(4)} + y'' = 7x - 3 \cos 2x$;
24. $y^{(4)} - y'' = (5 + e^x) + \sin x$;
25. $y'' + 4y' + 4y = xe^{2x}$;
26. $y'' - 2y' + 4y = e^x + 2x + \cos x$.

Задание 7. Решить задачу Коши ([3, § 11], [5, § 16]).

1. $y^{(4)} - y = -8e^{-x} + x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = -4$, $y^{(3)}(0) = 6$;
2. $y'' + y = 4e^x$, $y(0) = 4$, $y'(0) = -3$;
3. $y^{(3)} + 2y'' + y' + 2e^{-2x} = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = y''(0) = 1$;
4. $y^{(3)} + y'' = x^2 + 2 + 3e^x$, $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$;
5. $y'' + n^2y = 5 \sin 2x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$;
6. $y^{(3)} - y' = 3(2 - x^2)$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$;
7. $y'' + 3y' = 3e^{-3x}$, $y(0) = y'(0) = 0$;
8. $y'' + 4y = \cos 2x$, $y(0) = y'(0) = 0$;
9. $y'' + 6y' + 9y = 10 \sin x$, $y(0) = y'(0) = 0$;
10. $y^{(3)} - y'' - y' + y = 3x - 4e^x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = 0$;
11. $y'' - 2y' = e^x(x - 3)$, $y(0) = y'(0) = 2$;
12. $y'' - 2y' + 2y = 4 \cos x$, $y(\pi) = -4$, $y'(\pi) = 0$;
13. $y^{(4)} - y = 8e^{2x}$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$, $y^{(3)}(0) = 0$;
14. $y'' - 2y' = 2e^x$, $y(1) = -1$, $y'(1) = 0$;
15. $y'' - 2y' + y = e^x/(1 + x^2)$, $y(0) = y'(0) = 1$;
16. $y'' - 2y' + 2y = -4x \sin x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$;
17. $y'' + 4y' + 4y = 3e^{-2x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$;
18. $y'' + y = 2 + \cos 2x$, $y(\pi/2) = y'(\pi/2) = 0$;
19. $y^{(3)} - 3y' - 2y = 9e^{2x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -3$, $y''(0) = 3$;
20. $y'' - 3y' + 2y = (x^2 + x)e^{3x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$;
21. $y'' + 16y' + 15y = 4e^{-3x/2}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -5, 5$;
22. $y'' - 3y' + 2y = 2x - 3$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$;
23. $y^{(3)} - y' = -2x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 2$;
24. $y'' - y = x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$;
25. $y'' - 5y' + 4y = 4x^2e^{2x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;
26. $y'' + 2y' - 3y = e^x$, $y(0) = y'(0) = 0$.

Задание 8. Построить функцию Грина ([3, § 13]) и выписать решение краевой задачи для уравнения

$$ay'' + by' + cy = f(x) :$$

№ вар.	a	b	c	Краевые условия
1.	1	1	0	$y'(0) = y(1) = 0$
2.	1	0	-4	$y(0) = y'(1) = 0$
3.	x	-1	0	$y(1) = y'(2) = 0$

№ вар.	a	b	c	Краевые условия
4.	1	0	4	$y(0) = y(1) = 0$
5.	1	-1	0	$y(0) = y'(1) = 0$
6.	1	0	-1	$y(0) = y'(1) = 0$
7.	1	0	3	$y(0) = y'(1) = 0$
8.	1	0	4	$y(0) = y'(1) = 0$
9.	1	9	0	$y(0) = y'(1) = 0$
10.	1	-6	5	$y(0) = y(1) = 0$
11.	1	0	9	$y(0) = y'(1) = 0$
12.	x	-1	0	$y'(1) = y(2) = 0$
13.	1	0	a^2	$y(0) = y(\pi/4) = 0$
14.	1	0	9	$y(0) = y'(\pi) = 0$
15.	x^2	$2x$	0	$y(1) = y'(3) = 1$
16.	x^2	0	-2	$y(1) = 0, y(2) - 2y'(2) = 0$
17.	1	1	0	$y'(0) = 0, y(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$
18.	x^2	$2x$	-2	$y(1) = y(2) = 0$
19.	1	0	-1	$y'(0) = 0, y'(2) + y(2) = 0$
20.	x	1	0	$y(1) = 0, y(x)$ ограничено при $x \rightarrow +\infty$
21.	1	0	9	$y(0) = y'(1) = 0$
22.	1	1	-2	$y(0) = y(1) = 0$
23.	1	0	-4	$y(0) = y'(1) = 0$
24.	1	4	-12	$y'(0) = y(1) = 0$
25.	1	2	2	$y(0) = y'(1) = 0$
26.	x^2	$2x$	-2	$y(1) = 0, y(x)$ ограничено при $x \rightarrow 0$

Задание 9. ([1, гл. 3, § 7], [3, § 14], [6, § 22, § 23], [7, § 22, § 23]). Решить систему линейных дифференциальных уравнений двумя способами (методом Лагранжа и методом неопределенных коэффициентов).

$$\begin{array}{ll}
1. & \begin{cases} \dot{x} = 2x + 4y - \cos t, \\ \dot{y} = -x - 2y + 3 \sin t. \end{cases} & 2. & \begin{cases} \dot{x} = x + y + 1 + e^t, \\ \dot{y} = 3x - y. \end{cases} \\
3. & \begin{cases} \dot{x} = 4x + 3y - 11t - 2, \\ \dot{y} = 3x + 4y - 14t - 6. \end{cases} & 4. & \begin{cases} \dot{x} = 2y - 5x + 40e^t, \\ \dot{y} = x - 6y + 9e^{-t}. \end{cases} \\
5. & \begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y - 2 - 8t, \\ \dot{y} = 3x + 2y + 8e^t - 7t. \end{cases} & 6. & \begin{cases} \dot{x} = 2x + y + \sin t, \\ \dot{y} = 4x + 2y + \cos t. \end{cases} \\
7. & \begin{cases} \dot{x} = 2y - 5x + e^t, \\ \dot{y} = x - 6y + e^{2t}. \end{cases} & 8. & \begin{cases} \dot{x} = x - y + 3t^2, \\ \dot{y} = 5x - y + 8t + 2. \end{cases}
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
9. \quad \begin{cases} \dot{x} = -3x + y + 5t - 1, \\ \dot{y} = 8x - y + 6 - t + 10e^{-2t}. \end{cases} \\
11. \quad \begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = x + y + e^{5t}. \end{cases} \\
13. \quad \begin{cases} \dot{x} = 2y, \\ \dot{y} = 2x - 3y + e^{2t}. \end{cases} \\
15. \quad \begin{cases} \dot{x} + 5y = \cos 5t, \\ \dot{y} + 5x = \sin 5t. \end{cases} \\
17. \quad \begin{cases} \dot{x} = 2x - y - 2e^t, \\ \dot{y} = 3x - 2y + 4. \end{cases} \\
19. \quad \begin{cases} \dot{x} = x - 2y, \\ \dot{y} = 2x - 3y + 1. \end{cases} \\
21. \quad \begin{cases} \dot{x} = -x - y + \sin t, \\ \dot{y} = x - 3y - \cos t. \end{cases} \\
23. \quad \begin{cases} \dot{x} = x - 2y + 2t, \\ \dot{y} = 2x - 3y + 1. \end{cases} \\
25. \quad \begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y + 2 \cos t, \\ \dot{y} = 4x - 3y + \cos t - \sin t. \end{cases}
\end{array}
\quad
\begin{array}{l}
10. \quad \begin{cases} \dot{x} = 2x - y + 4, \\ \dot{y} = x + 2t. \end{cases} \\
12. \quad \begin{cases} \dot{x} = 25e^t - 5x - y, \\ \dot{y} = x - 3y - 36e^{2t}. \end{cases} \\
14. \quad \begin{cases} \dot{x} = 6x - y - 6t^2 - t + 3, \\ \dot{y} = 2y - 2t - 1. \end{cases} \\
16. \quad \begin{cases} \dot{x} = 2x + y - 2 \sin t, \\ \dot{y} = -2x + \sin t. \end{cases} \\
18. \quad \begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = -x + 2y - 10 \cos t. \end{cases} \\
20. \quad \begin{cases} \dot{x} = -x - 5y + 2 \sin t, \\ \dot{y} = x + y + 4. \end{cases} \\
22. \quad \begin{cases} \dot{x} = x + 2y - \cos t - 3 \sin t, \\ \dot{y} = 4x - y - 3 \cos t + \sin t. \end{cases} \\
24. \quad \begin{cases} \dot{x} = -x - 2y + 2e^{-t}, \\ \dot{y} = 3x + 4y + e^{-t}. \end{cases} \\
26. \quad \begin{cases} \dot{x} = 2y - x + 1, \\ \dot{y} = 3y - 2x - t. \end{cases}
\end{array}$$

Задание 10. Решить задачу Коши ([3, § 14], [6, § 22, § 23]).

$$\begin{array}{l}
1. \quad \begin{cases} \dot{x} = e^t - y, \\ \dot{y} = x + e^{-t}, \\ x(0) = y(0) = 1. \end{cases} \\
3. \quad \begin{cases} \dot{x} = 2x + y + \cos t, \\ \dot{y} = -x + 2 \sin t, \\ x(0) = y(0) = 2. \end{cases} \\
5. \quad \begin{cases} \dot{x} = 4x - 5y - 2t^2 + 5t, \\ \dot{y} = -2y + 2t + 1, \\ x(0) = y(0) = 0. \end{cases} \\
7. \quad \begin{cases} \dot{x} = -3x - 4y + 2t, \\ \dot{y} = x + y + t - 1, \\ x(0) = y(0) = 0. \end{cases} \\
9. \quad \begin{cases} \dot{x} = -y + 2x, \\ \dot{y} = -x + 2y - 5e^t \sin t, \\ x(0) = 2, y(0) = 3. \end{cases} \\
11. \quad \begin{cases} \dot{x} = x + y - t^2 + t - 2, \\ \dot{y} = -2x + 4y + 2t^2 - 4t - 7, \\ x(0) = 0, y(0) = 2. \end{cases}
\end{array}
\quad
\begin{array}{l}
2. \quad \begin{cases} \dot{x} = 2y + 4, \\ \dot{y} = -2x + 3t - 2e^t, \\ x(0) = 3, y(0) = 2. \end{cases} \\
4. \quad \begin{cases} \dot{x} = x - y + 3t^2/2, \\ \dot{y} = -4x - 2y + 4t + 1, \\ x(0) = y(0) = 0. \end{cases} \\
6. \quad \begin{cases} \dot{x} = 4x - 5y + 6t - 3, \\ \dot{y} = 4y + 2 - 8t, \\ x(0) = 1, y(0) = 0. \end{cases} \\
8. \quad \begin{cases} \dot{x} = y - x + e^t, \\ \dot{y} = x - y + e^t, \\ x(0) = y(0) = 1. \end{cases} \\
10. \quad \begin{cases} \dot{x} = 4x + y + 36t, \\ \dot{y} = -2x + y + 2e^t, \\ x(0) = 0, y(0) = 1. \end{cases} \\
12. \quad \begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = -2x - y + t, \\ x(0) = 0, y(0) = 1. \end{cases}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
13. \begin{cases} \dot{x} = 4x - 5y + 4t - 1, \\ \dot{y} = x - 2y + t, \\ x(0) = 1, y(0) = 0. \end{cases} & 14. \begin{cases} \dot{x} = -2x + 2y - 20e^t, \\ \dot{y} = -x - 5y - 13e^t, \\ x(0) = 0, y(0) = 1. \end{cases} \\
15. \begin{cases} \dot{x} = y - 7x + 7, \\ \dot{y} = -2x - 5y + 2, \\ x(0) = 4, y(0) = 0. \end{cases} & 16. \begin{cases} \dot{x} = -2y + 3t, \\ \dot{y} = -2x + 4, \\ x(0) = 2, y(0) = 3. \end{cases} \\
17. \begin{cases} \dot{x} = x - y + 2\sin^2 t, \\ \dot{y} = 2x - y, \\ x(0) = y(0) = 0. \end{cases} & 18. \begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y - \cos t, \\ \dot{y} = 6x + 4y + 7\sin t, \\ x(0) = -2, y(0) = 1. \end{cases} \\
19. \begin{cases} \dot{x} = 2x - 4y - 1 - 2t, \\ \dot{y} = -x + 5y - 1 + 4t, \\ x(0) = 1, y(0) = 0. \end{cases} & 20. \begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + 1/\cos t, \\ x(0) = 2, y(0) = 3. \end{cases} \\
21. \begin{cases} \dot{x} = x + e^t - y, \\ \dot{y} = 2x + 4y - 2, \\ x(0) = y(0) = 1. \end{cases} & 22. \begin{cases} \dot{x} = 3x + y + e^t, \\ \dot{y} = x + 3y - e^t, \\ x(0) = -1, y(0) = 2. \end{cases} \\
23. \begin{cases} \dot{x} = x + 2y + 16e^t, \\ \dot{y} = 2x - 2y, \\ x(0) = -13, y(0) = -6. \end{cases} & 24. \begin{cases} \dot{x} = x + 2y, \\ \dot{y} = x - 5\sin t, \\ x(0) = -1, y(0) = 2. \end{cases} \\
25. \begin{cases} \dot{x} = -x + 2e^t - 2y, \\ \dot{y} = 1 - y - z, \\ \dot{z} = 1 - z, \\ x(0) = y(0) = z(0) = 1. \end{cases} & 26. \begin{cases} \dot{x} = 2x + y - 2z - t + 2, \\ \dot{y} = 1 - x, \\ \dot{z} = x + y - z + 1 - t \\ x(0) = y(0) = z(0) = 0. \end{cases}
\end{array}$$

Задание 11. ([3, § 14], [6, § 22, § 23]). Решить систему дифференциальных уравнений $\dot{x} = Ax$, где x — вектор-столбец, A — заданная матрица. Найти фундаментальную матрицу e^{At} , экспоненциал e^A матрицы A и его определитель $\det e^A$.

$$\begin{array}{ll}
1. A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} & 2. A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
3. A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix} & 4. A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
5. A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -4 \\ -12 & 5 & 12 \\ 10 & -3 & -9 \end{pmatrix} & 6. A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ -6 & 2 & 6 \\ 6 & -2 & -6 \end{pmatrix}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
7. & A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 12 & -4 & -12 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix} & 8. & A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \\
9. & A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & 10. & A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 3 & -4 & -3 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \\
11. & A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} & 12. & A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\
13. & A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} & 14. & A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\
15. & A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} & 16. & A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
17. & A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} & 18. & A = \begin{pmatrix} 3 & 12 & -4 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & -12 & 6 \end{pmatrix} \\
19. & A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} & 20. & A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \\
21. & A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & 22. & A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\
23. & A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} & 24. & A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -6 & 2 & 6 \\ 4 & -1 & -4 \end{pmatrix} \\
25. & A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} & 26. & A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Задание 12. Пользуясь определением устойчивости по Ляпунову, выяснить, устойчивы ли решения данных уравнений и систем с указанными начальными условиями ([1, § 15], [3, гл. 5, § 1], [5, гл. 5, § 1]).

1. $t^2 \dot{x} = -3tx + 2, \quad x(1) = 1;$
2. $\dot{x} = t(x - 1), \quad x(1) = 2;$
3. $\dot{x} = t^2 - x, \quad x(1) = 1;$
4. $\dot{x} = 2tx + 2t, \quad x(0) = 0;$
5. $\dot{x} = 2x - t^2, \quad x(0) = 0;$
6. $\dot{x} = t^2 + 2x, \quad x(0) = 3;$

- | | | | |
|-----|--|-----|--|
| 7. | $\dot{x} = t + x, \quad x(0) = 1;$ | 8. | $\dot{x} = 2 + t, \quad x(0) = 1;$ |
| 9. | $t\dot{x} - x = 2t^2e^{-2t}, \quad x(1) = e^{-2};$ | 10. | $\dot{x} = (2 - t^3)x, \quad x(0) = 0;$ |
| 11. | $\begin{cases} \dot{x} = -y, & x(0) = 0, \\ \dot{y} = x, & y(0) = 0; \end{cases}$ | 12. | $\begin{cases} \dot{x} = 4y, & x(0) = 0, \\ \dot{y} = -x, & y(0) = 0; \end{cases}$ |
| 13. | $\begin{cases} \dot{x} = -x - 3y, & x(0) = 0, \\ \dot{y} = 3x - y, & y(0) = 0; \end{cases}$ | 14. | $\begin{cases} \dot{x} = x - 7y, & x(0) = 0, \\ \dot{y} = 2x - 8y, & y(0) = 0; \end{cases}$ |
| 15. | $\begin{cases} 2\dot{x} + \dot{y} = -5y, & x(0) = 0, \\ \dot{x} - 2\dot{y} = -5x, & y(0) = 0; \end{cases}$ | 16. | $\begin{cases} \dot{x} + \dot{y} = x - y, & x(0) = 0, \\ \dot{y} - \dot{x} = x + y, & y(0) = 0; \end{cases}$ |
| 17. | $\begin{cases} \dot{x} = y, & x(0) = 0, \\ \dot{y} = -5x - 2y, & y(0) = 0; \end{cases}$ | 18. | $\begin{cases} \dot{x} = y, & x(0) = 0, \\ \dot{y} = -x - 2y, & y(0) = 0; \end{cases}$ |
| 19. | $\begin{cases} \dot{x} = 2y, & x(0) = 0, \\ \dot{y} = -4(x + y), & y(0) = 0; \end{cases}$ | 20. | $\begin{cases} \dot{x} = 8y, & x(0) = 0, \\ \dot{y} = -2x, & y(0) = 0; \end{cases}$ |
| 21. | $\begin{cases} \dot{x} = 4x - y, & x(0) = 0, \\ \dot{y} = -2(x + 3y), & y(0) = 0; \end{cases}$ | 22. | $\begin{cases} \dot{x} = 3y, & x(0) = 0, \\ \dot{y} = -x - 4y, & y(0) = 0; \end{cases}$ |
| 23. | $\begin{cases} \dot{x} = y, & x(0) = 0, \\ \dot{y} = -2x - 2y, & y(0) = 0; \end{cases}$ | 24. | $\dot{x} = 2x - t^2x, \quad x(0) = 0;$ |
| 25. | $\dot{x} = 4x - t^2x, \quad x(0) = 0;$ | 26. | $\dot{x} = x - 2t^3x, \quad x(0) = 0.$ |

Задание 13. ([1, § 15], [3, гл. 4, §§ 27 – 28], [4, § 26], [5, гл. 5, § 2]). С помощью теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению исследовать на устойчивость нулевое решение систем:

- | | | | |
|-----|--|-----|---|
| 1. | $\begin{cases} \dot{x} = 2e^x + 5y - 2 + x^4, \\ \dot{y} = x + 6 \cos y - 6 - y^2; \end{cases}$ | 2. | $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 22 \sin y + x^2 - y^3, \\ \dot{y} = \ln(1 - 4y) + 2e^{-9x} - 2; \end{cases}$ |
| 3. | $\begin{cases} \dot{x} = x^2 + e^{x+2y} - \cos 2x, \\ \dot{y} = 2\sqrt{1+2x} - 2e^y - 3y; \end{cases}$ | 4. | $\begin{cases} \dot{x} = -3x + 4y + \sin^2 y - y^2, \\ \dot{y} = -2x + \sin y + xe^y; \end{cases}$ |
| 5. | $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 4e^x - 4 \cos(y^2), \\ \dot{y} = 2y - 1 + \sqrt[3]{1-6x}; \end{cases}$ | 6. | $\begin{cases} \dot{x} = 5y^2 - 3 \cos(x^2 + y) + 3e^{3x}, \\ \dot{y} = x - e^{y^2} + \sqrt{1+2x}; \end{cases}$ |
| 7. | $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y - \sin(y^2), \\ \dot{y} = x(e^{x^2/2} - 1) - x - 3y; \end{cases}$ | 8. | $\begin{cases} \dot{x} = 5x + \frac{3}{2} \sin 2y - y^2x, \\ \dot{y} = y^5 - 2x + 3e^{-x-y} - 3 - y; \end{cases}$ |
| 9. | $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 22 \sin y + x^2 - y^5, \\ \dot{y} = y + \cos x + 2x - e^{2y}; \end{cases}$ | 10. | $\begin{cases} \dot{x} = x^2 - 4x\sqrt{1-x} + \cos y - 1, \\ \dot{y} = 2e^{x+y} - 2 + y^3; \end{cases}$ |
| 11. | $\begin{cases} \dot{x} = x - y + xe^x - x^3y, \\ \dot{y} = 2x - x \cos x + 7y - y^5; \end{cases}$ | 12. | $\begin{cases} \dot{x} = x^2 - e^x + 3y + \cos y, \\ \dot{y} = \sin(x - 2y) + \ln(1 + xy); \end{cases}$ |
| 13. | $\begin{cases} \dot{x} = 3e^{x-y^2} - 3 \cos(x - y), \\ \dot{y} = \sin(x^2 - y) - 4x + 15y^3; \end{cases}$ | 14. | $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + x \sin y - y \cos y, \\ \dot{y} = x - 3y + xe^x; \end{cases}$ |
| 15. | $\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{4+2y} - 1 - \cos^2 x, \\ \dot{y} = e^{x+y} - 1 - 2x; \end{cases}$ | 16. | $\begin{cases} \dot{x} = e^{x^2+y} + \sin y - \cos(x + y), \\ \dot{y} = 2 \sin x - \ln(1 + y^2) - y^3; \end{cases}$ |

$$\begin{array}{ll}
17. \begin{cases} \dot{x} = 3x + 4 \cos y - 4e^x, \\ \dot{y} = 2 \sin x - \ln(1 + y^2) - y^3; \end{cases} & 18. \begin{cases} \dot{x} = 7x + 3 \sin y - y^2, \\ \dot{y} = e^x - 3y - 1 + 2,5x^2; \end{cases} \\
19. \begin{cases} \dot{x} = x + e^y - \cos y, \\ \dot{y} = 3x - y - \sin(x - 2y^2); \end{cases} & 20. \begin{cases} \dot{x} = -x + 3y - \sin y + x^2, \\ \dot{y} = -x - 4y + 1 - \cos(y^2); \end{cases} \\
21. \begin{cases} \dot{x} = 2 \sin(x - 5y) + e^{3y} - 1, \\ \dot{y} = \cos x + 3e^{x+y} - 4y - 4; \end{cases} & 22. \begin{cases} \dot{x} = 4e^y - 10x - 4 \cos y, \\ \dot{y} = 2e^x - 2 - y + x^5; \end{cases} \\
23. \begin{cases} \dot{x} = 2x - e^y + \sqrt{1 + 3x - y^2}, \\ \dot{y} = y - 2 \sin y + 3e^y - 3; \end{cases} & 24. \begin{cases} \dot{x} = e^{2x+y} - \cos 5y, \\ \dot{y} = \ln(1 + 2x) - \sqrt{1 + 8y}; \end{cases} \\
25. \begin{cases} \dot{x} = 4 \sin x + \ln(1 + y), \\ \dot{y} = x + y + x^2y; \end{cases} & 26. \begin{cases} \dot{x} = -x + 1 - \cos y, \\ \dot{y} = \sin^2 x + 1 - e^y. \end{cases}
\end{array}$$

Задание 14. Исследовать, при каких значениях параметров α и β нулевое решение асимптотически устойчиво ([1, § 15], [4, § 9]).

$$\begin{array}{ll}
1. x^{IV} + \alpha x^{III} + 2\ddot{x} + \beta\dot{x} + x = 0; & 2. x^{IV} + \alpha x^{III} + 2\ddot{x} + \dot{x} + 3x = 0; \\
3. x^{III} + \alpha\ddot{x} + \beta\dot{x} + 3x = 0; & 4. x^{III} + 2\ddot{x} + \alpha\dot{x} + 3x = 0; \\
5. x^{IV} + 3x^{III} + \alpha\ddot{x} + 2\dot{x} + \beta x = 0; & 6. x^{IV} + 3x^{III} + \alpha\ddot{x} + 2\dot{x} + x = 0; \\
7. x^{IV} + 2x^{III} + \alpha\ddot{x} + \beta\dot{x} + x = 0; & 8. x^{IV} + \beta x^{III} + \alpha\ddot{x} + \dot{x} + 2x = 0; \\
9. x^{IV} + 2x^{III} + \alpha\ddot{x} + \dot{x} + x = 0; & 10. x^{IV} + 3x^{III} + 4\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \beta x = 0; \\
11. x^{IV} + \alpha x^{III} + \ddot{x} + 2\dot{x} + x = 0; & 12. x^{III} + 3\ddot{x} + 3\dot{x} + \alpha x = 0; \\
13. \alpha x^{IV} + x^{III} + \ddot{x} + \dot{x} + \beta x = 0; & 14. x^{III} + \alpha\ddot{x} + \dot{x} + 2x = 0; \\
15. x^{IV} + \alpha x^{III} + 2\ddot{x} + \dot{x} + x = 0; & 16. x^{III} + 3\ddot{x} + \alpha\dot{x} + 2x = 0; \\
17. \ddot{x} + (\alpha - 1)\dot{x} + (4 - \alpha^2)x = 0; & 18. 2x^{IV} + \alpha x^{III} + \ddot{x} + \dot{x} + \beta x = 0; \\
19. x^{III} + 2\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \beta x = 0; & 20. x^{IV} + 2x^{III} + 4\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \beta x = 0; \\
21. x^{IV} + \alpha x^{III} + 4\ddot{x} + \beta\dot{x} + x = 0; & 22. x^{IV} + 2x^{III} + \alpha\ddot{x} + \beta\dot{x} + x = 0; \\
23. \begin{cases} \dot{x} = y + \sin x, \\ \dot{y} = \alpha x + \beta y; \end{cases} & 24. \begin{cases} \dot{x} = -x + \alpha y + \beta z, \\ \dot{y} = -\alpha x - y + \alpha z, \\ \dot{z} = -\beta x - \alpha y - z; \end{cases} \\
25. \begin{cases} \dot{x} = 2x + \alpha z, \\ \dot{y} = y + \beta z, \\ \dot{z} = \beta x + \alpha y + 3z; \end{cases} & 26. \begin{cases} \dot{x} = \alpha x + \alpha y, \\ \dot{y} = y + 2z, \\ \dot{z} = \beta x + \beta y + \alpha z; \end{cases}
\end{array}$$

Задание 15. ([1, гл.3, § 7], [3, § 14], [6, § 22, § 23], [7, § 22, § 23]). Найдти все особые точки (положения равновесия) системы дифференциальных уравнений. Исследовать их на устойчивость и определить типы особых точек. Начертить на фазовой плоскости траектории системы

$$1. \begin{cases} \dot{x} = xy + 12, \\ \dot{y} = x^2 + y^2 - 25; \end{cases} \quad 2. \begin{cases} \dot{x} = 1 - y + x(y - 1), \\ \dot{y} = xy - 2; \end{cases}$$

3.	$\begin{cases} \dot{x} = y - x - 1, \\ \dot{y} = \ln(x^2 - y); \end{cases}$	4.	$\begin{cases} \dot{x} = -2xy, \\ \dot{y} = y - x^2 + y^2 + 4; \end{cases}$
5.	$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\sin x; \end{cases}$	6.	$\begin{cases} \dot{x} = 4x^2 - y^2, \\ \dot{y} = 2x(y - 2) - 8; \end{cases}$
7.	$\begin{cases} \dot{x} = 2y + \sqrt{1 - 3y - \sin x}, \\ \dot{y} = -\sin x; \end{cases}$	8.	$\begin{cases} \dot{x} = 2xy, \\ \dot{y} = x^2 + y^2 - 4; \end{cases}$
9.	$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y^2 + 12, \\ \dot{y} = x^2 + y^2 - 20; \end{cases}$	10.	$\begin{cases} \dot{x} = y(y - x), \\ \dot{y} = \ln(x - y^2 - 1); \end{cases}$
11.	$\begin{cases} \dot{x} = (2x - y)(x - 2), \\ \dot{y} = xy - 2; \end{cases}$	12.	$\begin{cases} \dot{x} = y - x^2 - x, \\ \dot{y} = 3x - x^2 - y; \end{cases}$
13.	$\begin{cases} \dot{x} = y^2 - x^2, \\ \dot{y} = \ln((1 - x + x^2)/3); \end{cases}$	14.	$\begin{cases} \dot{x} = -2xy + 2y^2, \\ \dot{y} = 2x - y^2; \end{cases}$
15.	$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y, \\ \dot{y} = x^2 - (y - 2)^2 \end{cases}$	16.	$\begin{cases} \dot{x} = e^y - e^x, \\ \dot{y} = \ln(5 - x^2); \end{cases}$
17.	$\begin{cases} \dot{x} = (y - 1)(3x + y - 5), \\ \dot{y} = x^2 + y^2 - 5; \end{cases}$	18.	$\begin{cases} \dot{x} = x(x^2 - 2) + y, \\ \dot{y} = x(3x^4 - 1) - 2y; \end{cases}$
19.	$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y^2 - 1, \\ \dot{y} = 2y; \end{cases}$	20.	$\begin{cases} \dot{x} = \ln(1 - y + y^2), \\ \dot{y} = 3 - \sqrt{x^2 + 8y}; \end{cases}$
21.	$\begin{cases} \dot{x} = x(x + y - 3), \\ \dot{y} = y(2 - x); \end{cases}$	22.	$\begin{cases} \dot{x} = y^2 - x, \\ \dot{y} = \ln(1 - y + y^2) - \ln 3; \end{cases}$
23.	$\begin{cases} \dot{x} = \arctan(xy + y^2), \\ \dot{y} = y^2 - 4x; \end{cases}$	24.	$\begin{cases} \dot{x} = -2x - 2xy, \\ \dot{y} = x^4 - y^3; \end{cases}$
25.	$\begin{cases} \dot{x} = x + 2xy^2, \\ \dot{y} = -2y + 4x^2y; \end{cases}$	26.	$\begin{cases} \dot{x} = y - 3x - x^3, \\ \dot{y} = 6x - 2y; \end{cases}$

Контрольные вопросы

Теория дифференциальных уравнений первого порядка

1. Дать определение решения, общего решения ДУ, задачи Коши, интегральной кривой.
2. В чем заключается геометрический смысл ДУ $y' = f(x, y)$?
3. Какой угол наклона имеет интегральная кривая уравнения

$$xy' + y = y^2 \ln x$$

в точке $[-1, 1]$?

4. Что такое изоклина ДУ $y' = f(x, y)$? Какой угол наклона имеют интегральные кривые уравнения $y' = 2x(1 - y)$ в точках гиперболы

$$y = 1 - 1/2x?$$

5. Как выделить области возрастания (убывания) решения ДУ $y' = f(x, y)$? Как найти их точки экстремума? Сделать это для уравнения

$$y' = y - x^2 + 2x - 2.$$

6. Как выделить области выпуклости вверх (вниз) решения ДУ $y' = f(x, y)$? Как найти их точки перегиба? Сделать это для уравнения

$$y' = y - x^2 + 2x - 2.$$

7. Сформулируйте теорему существования и единственности решения задачи Коши для ДУ первого порядка. Укажите область единственности (т. е. множество точек (x_0, y_0) таких, что данное уравнение имеет единственное решение, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$) для уравнения:

а) $y' = xy + e^{-y}$; б) $y' = \sqrt{x - y}$; в) $y' = x/y$; г) $y' = (y + 1)/(x - y)$.

8. Показать, что для уравнения $y' = |y|^{1/2}$ в каждой точке оси абсцисс нарушается единственность решения.

9. Показать, что задача $y' = y^\alpha$ имеет по крайней мере два решения для $0 < \alpha < 1$ и одно для $\alpha = 1$. Построить интегральные кривые для $\alpha = 1$ и $\alpha = 1/2$.

10. Показать, что ДУ $y' = y/x$ при начальном условии $y(0) = y_0$ имеет бесконечно много решений вида $y = cx$, если $y_0 = 0$ и не имеет ни одного решения, если $y_0 \neq 0$.

11. При каких условиях задача Коши для ДУ с разделяющимися переменными имеет единственное решение?

12. Какие решения теряются при разделении переменных в ДУ:

а) $y' = xy^2 + 2xy$; б) $xy' = y(x^2 + 1)$; в) $x dy - y(x^2 - 1) dx = 0$?

13. Какие решения теряются при разделении переменных в уравнении $y' = 2\sqrt{y}$? Найдите все решения этого ДУ, изобразите интегральные кривые.

14. Каков общий вид и метод интегрирования однородного ДУ первого порядка?

15. Каков общий вид и метод интегрирования линейного ДУ первого порядка? При каких условиях задача Коши для такого уравнения имеет единственное решение?

16. Каков общий вид и методы решения ДУ: а) Бернулли? б) Риккати?

17. Как интегрируется ДУ в полных дифференциалах? Что такое интегрирующий множитель?

18. Привести пример: а) ДУ с разделяющимися переменными; б) однородного ДУ; в) линейного ДУ первого порядка; г) ДУ Бернулли; д) ДУ Риккати; е) ДУ в полных дифференциалах.

Теория дифференциальных уравнений высокого порядка

1. Как формулируется задача Коши для ДУ n -го порядка?
2. Могут ли графики двух решений ДУ касаться друг друга в некоторой точке x_0, y_0 для ДУ: а) $y' = x + y^2$; б) $y'' = x + y^2$; в) $y^{(3)} = x + y^2$?
3. Могут ли графики двух решений ДУ пересекаться в некоторой точке x_0, y_0 для ДУ: а) $y' = x + y^2$; б) $y'' = xy^2$?
4. Сколько существует решений ДУ $y^{(n)} = x + y^2$, удовлетворяющих условиям $y(0) = 0, y'(0) = 0$? Рассмотреть случаи $n = 1, 2, 3$.
5. Являются ли линейно независимыми на \mathbb{R} следующие системы функций: а) $1, \sin x, \cos 2x$; б) $1, x, x^2$; в) $x + 1, 2x^2 - 3, 2x^2 - 2x - 1$?
6. Выпишите уравнение гармонических колебаний частоты ω при наличии вынуждающей силы $f(x)$. Выпишите уравнение колебания маятника в среде с трением без вынуждающей силы. При каких условиях возникают затухающие собственные колебания?

Линейные системы с постоянными коэффициентами

Устойчивость

1. Что называется линейной системой дифференциальных уравнений в (ДУ) нормальной форме? Как ставится задача Коши для такой системы? Как формулируется для нее теорема существования и единственности?
2. Как определяется линейная зависимость (независимость) системы вектор-функций на некотором промежутке? Будут ли линейно зависимы на прямой системы:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \right\}; & \text{b) } \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 2t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 3t \end{pmatrix} \right\}; \\ \text{c) } \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t^2 \\ t^2 \end{pmatrix} \right\}; & \text{d) } \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^t, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t \right\}? \end{array}$$

3. В чем заключается принцип суперпозиции для линейных систем ДУ? Как он проявляется в случае однородных систем?
4. Что называется фундаментальной системой решений (ФСР) для линейной системы n уравнений первого порядка?
5. Пусть $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица для системы $x' = Ax$. Будут ли являться фундаментальными для этой системы матрицы $\Psi_1(t) = \Phi(t)C, \Psi_2(t) = C\Phi(t)$, где C – произвольная постоянная матрица. Ответ обоснуйте.
6. Какова структура общего решения однородной системы ДУ первого порядка? Тот же вопрос для неоднородной системы.

7. Как найти частное решение неоднородной системы ДУ, зная ФСР для однородной системы?

8. Как определяется матричная экспонента? Как с помощью матричной экспоненты построить ФСР для системы $x' = Ax$? Как записать с ее помощью общее решение этой системы? Как найти решение, удовлетворяющее условию $x(0) = x_0$?

9. Пусть $A = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ – диагональная матрица. Показать, что $e^{At} = \text{diag}\{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}\}$.

10. Пусть $X(t)$ – решение матричного уравнения $X' = AX$ с постоянной матрицей A , а $Y(t) = C^{-1}X(t)C$, где C – постоянная матрица, для которой $\det C \neq 0$. Показать, что $Y(t)$ удовлетворяет уравнению $Y'(t) = (C^{-1}AC)Y$. Вывести отсюда, что

$$e^{At} = Ce^{C^{-1}ACt}C^{-1}.$$

11. Пусть A – диагонализуемая матрица, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – ее собственные значения, C – матрица перехода к базису из собственных векторов. Показать, что

$$e^{At} = C \text{diag}\{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}\} C^{-1}.$$

12. Привести пример матриц A и B таких, что $e^{(A+B)t} \neq e^{At}e^{Bt}$.

13. Доказать, что если система ДУ $x' = Ax$ имеет ненулевое стационарное решение $x(t) = x_0$, то у матрицы A есть нулевое собственное значение.

14. Доказать, что если система ДУ $x' = Ax$ имеет ненулевые ограниченные на всей оси решения, то среди собственных значений матрицы A есть хотя бы одно чисто мнимое.

15. Чем отличается понятие устойчивости по Ляпунову от понятия непрерывной зависимости решения от начальных данных?

16. Обязательно ли для исследования устойчивости линейной системы с постоянными коэффициентами знать все ее решения?

17. Сформулируйте теорему Ляпунова об устойчивости по первому приближению. В каком случае эта теорема не дает ответ на вопрос об устойчивости нулевого решения?

18. Что такое функция Ляпунова? Как она используется при исследовании устойчивости нулевого решения нелинейной системы ДУ первого порядка?

19. Что такое интегральная кривая, фазовая траектория для нормальной системы ДУ? Что является интегральной кривой и фазовой траекто-

рией системы ДУ двух уравнений, имеющих решение

$$\text{a) } x_1(t) = \cos t, x_2(t) = \sin t; \quad \text{b) } x_1(t) = 2 \cos t, x_2(t) = 3 \sin t.$$

20. Что такое точка покоя системы $x' = f(x)$? Какая фазовая траектория ей отвечает?

21. Каков критерий асимптотической устойчивости точек покоя для линейной системы ДУ с постоянными коэффициентами?

22. Что такое особая точка? Перечислите типы особых точек на плоскости.

23. Является ли точка покоя «устойчивый узел» устойчивым по Ляпунову решением? Асимптотически устойчивым? Как определить направление движения по прямолинейным фазовым траекториям? Те же вопросы для других типов особых точек.

Учебное издание

**Белоусова Елена Петровна,
Коструб Ирина Дмитриевна,
Смагина Тамара Ивановна**

Обыкновенные дифференциальные уравнения

Учебно-методическое пособие для вузов

Редактор Валынкина И.Г.