§ 2.6. Функции одного случайного аргумента

Закон распределения функции случайной величины. Числовые характеристики функции случайной величины и их свойства. Линейное преобразование случайной величины. Квадрат случайной величины.

Базовые понятия и утверждения

1. Понятие функции случайной величины. Пусть на вероятностном пространстве (Ω, F, P) задана случайная величина $X = X(\omega)$, а $y = \varphi(x)$ - функция, область определения которой содержит все возможные значения величины X. Случайную величину Y, которая каждому элементарному исходу $\omega \in \Omega$ ставит в соответствие число $y = \varphi(X(\omega))$, называют *функцией случайной величины* X и обозначают $Y = \varphi(X)$.

Если X - дискретная случайная величина, то $Y = \varphi(X)$ также дискретная случайная величина, поскольку каждому значению X соответствует единственное значение Y и, значит, число значений Y не может быть большим числа значений X.

Если X - непрерывная случайная величина, то $Y = \varphi(X)$ может оказаться как непрерывной, так и дискретной случайной величиной. Например, если $X \sim R(-1,1)$, то $Y_1 = X^2$ - непрерывная (множество ее значений - $[0,1]$), а $Y_2 = [X]$ - дискретная (множество ее значений включает три числа - $\{-1,0,1\}$).

При изучении функции случайной величины (случайного аргумента) решают две основные задачи:

(1) нахождение закона распределения случайной величины $Y = \varphi(X)$ по известному распределению случайного аргумента X;

(2) нахождение основных числовых характеристик случайной величины $Y = \varphi(X)$.

Общий подход к решению первой задачи состоит в следующем. Вначале записываем цепочку равенств:

$$F_Y(y) = P\{Y < y\} = P\{\varphi(X) < y\} = P\{X \in \Delta(y)\},$$

где через $\Delta(y)$ обозначено множество решений неравенства $\varphi(x) < y$. Далее выражаем $P\{X \in \Delta(y)\}$ через функцию распределения случайной величины X. Реализация этого шага существенно зависит от структуры множества $\Delta(y)$ и конкретного вида функции $F_X(x)$. Подробное обсуждение данного вопроса изложено в разделе «Теоретические обоснования и примеры».

2. Закон распределения функции дискретной случайной величины. Пусть X - дискретная случайная величина, тогда $Y = \varphi(X)$ - также дискретная случайная величина. В этом случае удобнее работать не с функциями, а с рядами распределения.

Пусть X имеет ряд распределения x_k, p_k и $Y = \varphi(X)$. Найдем ряд распределения Y.

Вычислим $y_k = \varphi(x_k)$. Может оказаться, что все y_k различные, тогда $P\{Y = y_k\} = P\{X = x_k\} = p_k$, и случайная величина Y имеет ряд распределения y_k, p_k.

В общем случае некоторые значения $\varphi(x_1), \varphi(x_2), \ldots, \varphi(x_n)$ могут совпадать между собой, тогда из этой последовательности нужно исключить повторы (оставить по одному числу из каждой группы совпадающих значений). Получится набор возможных значений $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \ldots, \tilde{y}_m$ случайной величины Y. Для отыскания соответствующих им вероятностей следует сложить вероятности всех значений X, при которых Y принимает одинаковое значение, т.е. $P\{Y = \tilde{y}_s\} = \sum_{i:\varphi(x_i)=\tilde{y}_s} P\{X = x_i\} = \sum_{i:\varphi(x_i)=\tilde{y}_s} p_i$.

Пример 1. Пусть $X \sim B(4,1/3)$, $Y = \sin^2 \frac{\pi x}{2}$. Найти ряд распределения случайной величины Y.

◄ Поскольку X имеет биномиальное распределение с параметрами $n = 4$ и $p = 1/3$, то она принимает значения $k = 0,1,2,3,4$ с вероятностями $p_k = P\{X = x_k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$. Запишем ряд распределения в виде таблицы:

x_k	0	1	2	3	4
p_k	$1/81$	$8/81$	$24/81$	$32/81$	$16/81$

Добавим в эту таблицу вспомогательную строку из значений $y_k = \varphi(x_k)$.

x_k	0	1	2	3	4
p_k	$1/81$	$8/81$	$24/81$	$32/81$	$16/81$
y_k	0	1	0	1	0

Построим ряд распределения Y. В верхней строке таблицы перечислим в порядке возрастания и без повторов значения из вспомогательной строки «y_k» (0 и 1), а в нижней строке укажем суммы соответствующих этим значениям вероятностей из строки «p_k» ($P\{Y = 0\}$ есть сумма p_k из закрашенных столбцов, а $P\{Y = 1\}$ - из не закрашенных):

$\tilde{y}_s$	0	1
$P\{Y = \tilde{y}_s\}$	$41/81$	$40/81$

Таким образом, случайная величина Y имеет индикаторное распределение с параметром $p = 40/81$ ($Y \sim I(40/81)$). ►

3. Линейное преобразование нормально распределенной случайной величины.

Пусть $X \sim N(m,\sigma)$ ($\sigma > 0$), $Y = cX + d$. Напомним, что $F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt$.

1) Пусть $c > 0$. Для $F_Y(y)$ получаем:

$$F_Y(y) = P\{Y < y\} = P\{cX + d < y\} = P\left\{X < \frac{y-d}{c}\right\} = F_X\left(\frac{y-d}{c}\right) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\frac{y-d}{c}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt = \begin{vmatrix} u = ct + d \\ du = cdt \end{vmatrix} = \int\limits_{-\infty}^{y} \frac{1}{c\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(u-(cm+d))^2}{2(c\sigma)^2}} dt.$$

По виду $F_Y(y)$ заключаем, что $Y \sim N(cm + d, c\sigma)$.

2) Пусть $c < 0$. Для $F_Y(y)$ получаем:

$$F_Y(y) = P\{Y < y\} = P\{cX + d < y\} = P\left\{X > \frac{y-d}{c}\right\} =$$

$$= 1 - P\left\{X \le \frac{y-d}{c}\right\} = = 1 - P\left\{X < \frac{y-d}{c}\right\} = 1 - F_X\left(\frac{y-d}{c}\right) =$$

$$= 1 - \int\limits_{-\infty}^{\frac{y-d}{c}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt = \begin{vmatrix} u = ct + d \\ du = cdt \end{vmatrix} = 1 - \int\limits_{\infty}^{y} \frac{1}{c\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(u-(cm+d))^2}{2(c\sigma)^2}} dt$$

$$= 1 + \int\limits_{y}^{+\infty} \frac{1}{c\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(u-(cm+d))^2}{2(c\sigma)^2}} dt = 1 - \int\limits_{y}^{+\infty} \frac{1}{(-c\sigma)\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(u-(cm+d))^2}{2(-c\sigma)^2}} dt =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(-c\sigma)\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(u-(cm+d))^2}{2(-c\sigma)^2}} dt - \int\limits_{y}^{+\infty} \frac{1}{(-c\sigma)\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(u-(cm+d))^2}{2(-c\sigma)^2}} dt = \int\limits_{-\infty}^{y} \frac{1}{(-c\sigma)\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(u-(cm+d))^2}{2(-c\sigma)^2}} dt.$$

По виду $F_Y(y)$ заключаем, что $Y \sim N(cm + d, -c\sigma)$.

Вывод: *после линейного преобразования нормальной случайной величины вновь получается нормальная случайная величина, причем, если* $X \sim N(m,\sigma)$, $Y = cX + d$, *то* $Y \sim N(cm + d, |c|\sigma)$.

4. Числовые характеристики функции случайной величины. Перейдем к обсуждению второй задачи, которая возникает при изучении функций случайного аргумента: к поиску их числовых характеристик.

Прежде всего отметим, что если нам удалось найти закон распределения случайной величины $Y = \varphi(X)$, то для определения числовых характеристик можно воспользоваться стандартными формулами для математического ожидания и дисперсии.

Однако сама задача нахождения закона распределения случайной величины Y может оказаться достаточно сложной. К тому же на практике часто встречаются случаи, когда нет особой нужды полностью находить закон распределения функции случайной величины, а достаточно указать только его числовые характеристики. В этом случае для вычисления математического ожидания и дисперсии Y можно воспользоваться формулами, в которых используется только закон распределения X.

Утверждение 1.

1) Если X - дискретная случайная величина с рядом распределения x_k, p_k, то

$$M[Y] = M[\varphi(X)] = \sum_k \varphi(x_k) p_k \,,$$

$$D[Y] = D[\varphi(X)] = \sum_k (\varphi(x_k) - M[Y])^2 p_k \,.$$

2) Если X - непрерывная случайная величина с плотностью распределения $f_X(x)$, то

$$M[Y] = M[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f_X(x) dx \,,$$

$$D[Y] = D[\varphi(y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi(x) - M[Y])^2 f_X(x) dx \,.$$

Примем эти формулы без доказательства.

Пример 2. Пусть $X \sim Pu(\lambda)$, $Y = \cos \pi x$. Найти $M[Y]$ и $D[Y]$.

◄ $M[Y] = \sum_{k=0}^{\infty} \cos \pi k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{-\lambda} = e^{-2\lambda}$.

$$D[Y] = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\cos \pi k - e^{-2\lambda}\right)^2 \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 - 2(-1)^k e^{-2\lambda} + e^{-4\lambda}\right) \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^k}{k!} -$$

$$- 2e^{-3\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^k}{k!} + e^{-5\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} - 2e^{-4\lambda} + e^{-4\lambda} = 1 - e^{-4\lambda} \,. \blacktriangleright$$

Пример 3. Пусть $X \sim R(-1;1)$, $Y = X^2$. Найти $M[Y]$ и $D[Y]$.

◄ Выпишем для $X \sim R(-1;1)$ плотность распределения: $f_X(x) = \begin{cases} 0, \ x \notin [-1,1], \\ \frac{1}{2}, \ x \in [-1,1]. \end{cases}$

$$M[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx = \int_{-1}^{1} x^2 \cdot \frac{1}{2} dx = \frac{1}{6} x^3 \Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{3} \,.$$

$$D[Y]=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x^2-\frac{1}{3}\right)^2 f_X(x)dx=\int_{-1}^{1}\left(x^4-\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{9}\right)\cdot\frac{1}{2}dx=\left(\frac{1}{10}x^5-\frac{1}{9}x^3+\frac{1}{18}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=\frac{4}{45}. \blacktriangleright$$

5. Начальные и центральные моменты случайной величины. В первую очередь заметим, что формулы для $M[\varphi(X)]$ из Утверждения 1 позволяют:

1. Трактовать дисперсию $D[X]$ случайной величины X как $M[(X-m_X)^2]$, т.е. $D[X]=M[(X-m_X)^2]$;

2. Записать полученные ранее для дисперсии равенства $D[X]=\sum_k x_k^2 p_k - m_X^2$ и $D[X]=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)dx - m_X^2$ в единой форме $D[X]=M[X^2]-m_X^2$.

Помимо дисперсии с использованием формул для математического ожидания функций случайной величины определяется ряд дополнительных числовых характеристик самой случайной величины.

Определение. 1. *Начальным моментом k-го порядка* ($k\in\mathbf{N}$) случайной величины X называется число $\alpha_k[X]$, определяемое формулой $\alpha_k[X]=M[X^k]$.

2. *Центральным моментом k-го порядка* ($k\in\mathbf{N}$) случайной величины X называется число $\mu_k[X]$, определяемое формулой $\mu_k[X]=M[(X-m_X)^k]$.

Из определений, в частности, следует, что $\alpha_1=M[X]$, $\mu_2=D[X]$, причем $\mu_2=\alpha_2-\alpha_1^2$.

6. Изменение математического ожидания и дисперсии при линейном преобразовании случайной величины.

Утверждение 2. Для любых констант c и d и всякой случайной величины X выполняются равенства:

1. $M[cX+d]=cM[X]+d$.

2. $D[cX+d]=c^2D[X]$.

Доказательство. 1. Если X - дискретная случайная величина с рядом распределения x_k, p_k, то

$$M[cX+d]=\sum_k(cx_k+d)p_k=\sum_k cx_kp_k+\sum_k dp_k=$$
$$=c\sum_k x_kp_k+d\sum_k p_k=cM[X]+d\cdot 1=cM[X]+d.$$

Если X - непрерывная случайная величина с плотностью распределения $f_X(x)$, то

$$M[cX+d]=\int_{-\infty}^{+\infty}(cx+d)f_X(x)dx=c\int_{-\infty}^{+\infty}x f_X(x)dx+d\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)dx==cM[X]+d\cdot 1=cM[X]+d.$$

2. $D[cX+d]=M[((cX+d)-M[cX+d])^2]=M[(cX+d-cM[X]-d)^2]=$

$$= M[(cX - cM[X])^2] = M[c^2(X - M[X])^2] = c^2 M[(X - M[X])^2] = c^2 D[X]. ■$$

7. Стандартизированная случайная величина. Если математическое ожидание случайной величины равно 0, а среднее квадратичное отклонение равно 1, то случайная величина называется *стандартизированной*.

Утверждение 3. *Пусть X - случайная величина с математическим ожиданием m_X и средним квадратичным отклонением σ_X. Тогда случайная величина, полученная из X путем линейного преобразования $Y = \dfrac{X - m_X}{\sigma_X}$, является стандартизированной случайной величиной.*

Действительно,

$$M[Y] = M\left[\frac{X - m_X}{\sigma_X}\right] = \frac{1}{\sigma_X} M[X - m_X] = \frac{1}{\sigma_X}(M[X] - m_X) = 0;$$

$$D[Y] = D\left[\frac{X - m_X}{\sigma_X}\right] = \frac{1}{\sigma_X^2} D[X - m_X] = \frac{1}{\sigma_X^2} D[X] = \frac{\sigma_X^2}{\sigma_X^2} = 1. ■$$

Для стандартизированной случайной величины $Y = \dfrac{X - m_X}{\sigma_X}$ будем использовать обозначение $\overset{\circ}{X}$, т.е. $\overset{\circ}{X} = \dfrac{X - m_X}{\sigma_X}$.

Замечание. Ранее было показано, что в результате линейного преобразования нормальной случайной величины вновь образуется нормально распределенная случайная величина. Следовательно, если $X \sim N(m, \sigma)$, то $\overset{\circ}{X} = \dfrac{X - m_X}{\sigma_X} \sim N(0,1)$.

Теоретические обоснования и примеры

1°. Поиск закона распределения функции случайного аргумента в общем случае. Пусть X - случайная величина, закон распределения которой известен, и $\varphi(x)$ - непрерывная функция. Рассмотрим случайную величину Y, связанную с X функциональной зависимостью $Y = \varphi(X)$.

Поставим задачу: выразить функцию распределения случайной величины $Y = \varphi(X)$ через функцию распределения X.

Будем исходить из определения:

$$F_Y(y) = P\{Y < y\} = P\{\varphi(X) < y\} = P\{X \in \Delta(y)\}.$$

Здесь через $\Delta(y)$ обозначено множество значений x случайной величины X, для каждого из которых при фиксированном y выполняется условие $\varphi(x) < y$. Выясним, какую структуру имеет множество $\Delta(y)$. С этой целью рассмотрим неравенство $\varphi(x) < y$ с графической точки зрения. В системе координат $Ox\tilde{y}$ построим график функции $\tilde{y} = \varphi(x)$ (рис. 1) и горизонтальную прямую $\tilde{y} = y$ (на рис. 1 она проведена штрих-пунктирной линией).

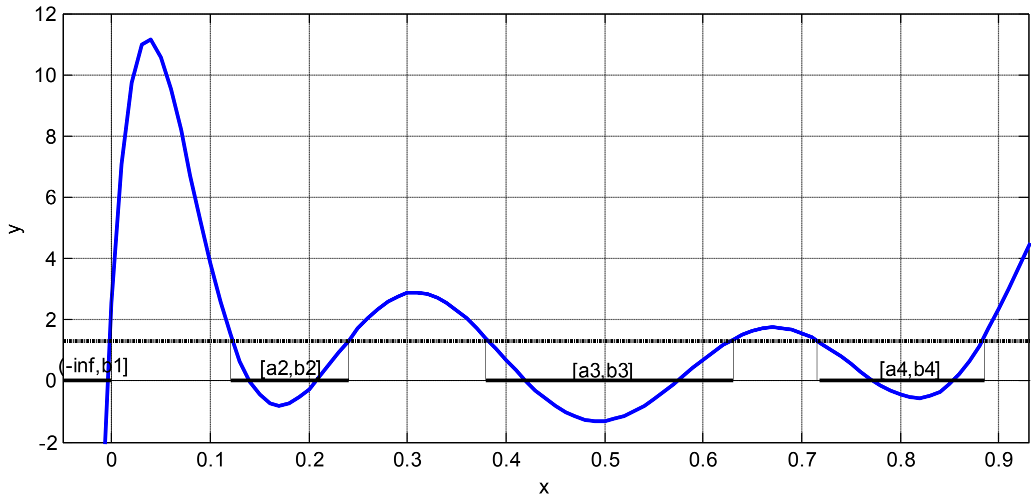

Рис. 1

Нас интересуют участки графика функции $\tilde{y} = \varphi(x)$, расположенные ниже прямой, а точнее участки оси абсцисс, им соответствующие: $\Delta_1(y)$, $\Delta_2(y)$, … (при каждом конкретном y они свои). Все $\Delta_i(y)$ представляют собой промежутки оси Ox: $\Delta_i(y) = (a_i(y); b_i(y))$, или $\Delta_i(y) = (-\infty; b_i(y))$, или $\Delta_i(y) = (a_i(y); \infty)$. Объединение этих участков и есть $\Delta(y)$. Поэтому событие $\{X \in \Delta(y)\}$ можно представить в виде суммы несовместных событий $\{X \in \Delta_1(y)\}$, $\{X \in \Delta_2(y)\}, \ldots$ и продолжить:

$$F_Y(y) = P\{Y < y\} = P\{\varphi(X) < y\} = P\{X \in \Delta(y)\} = P\{X \in \Delta_1(y) + X \in \Delta_2(y) + \ldots\} =$$

$$= P\{X \in \Delta_1(y)\} + P\{X \in \Delta_2(y)\} + \ldots = \sum_i P\{X \in \Delta_i(y)\} =$$

$$= \sum_i P\{X \in (a_i(y), b_i(y))\} = \sum_i \left(F_X(b_i(y)) - \lim_{x \to a_i(y)+0} F_X(x) \right).$$

Дальнейшая конкретизация зависит от вида функции φ и закона распределения аргумента. Далее рассмотрим несколько интересных случаев.

2º. Линейное преобразование равномерной на отрезке случайной величины. Пусть $X \sim R(a,b)$, $Y = cX + d$. Напомним, что $F_X(x) = \begin{cases} 0, \ x \le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, a < x \le b, \\ 1, \ x > b. \end{cases}$

1) Пусть $c > 0$. Для $F_Y(y)$ получаем:

$$F_Y(y) = P\{Y < y\} = P\{cX + d < y\} = P\left\{ X < \frac{y-d}{c} \right\} = F_X\left(\frac{y-d}{c} \right) =$$

$$=\begin{cases}0, \dfrac{y-d}{c}\le a,\\ \dfrac{\frac{y-d}{c}-a}{b-a}, a<\dfrac{y-d}{c}\le b,\\ 1, \dfrac{y-d}{c}>b\end{cases}=\begin{cases}0,\ y\le ca+d,\\ \dfrac{y-(ca+d)}{cb-ca}, ca+d<y\le cb+d,\\ 1,\ y>cb+d.\end{cases}$$

По виду $F_Y(y)$ заключаем, что $Y\sim R(ca+d,cb+d)$.

2) Пусть $c<0$. Для $F_Y(y)$ получаем:

$$F_Y(y)=P\{Y<y\}=P\{cX+d<y\}=P\left\{X>\frac{y-d}{c}\right\}=$$

$$=1-P\left\{X\le\frac{y-d}{c}\right\}=1-P\left\{X<\frac{y-d}{c}\right\}=1-F_X\left(\frac{y-d}{c}\right)=$$

$$=1-\begin{cases}0, \dfrac{y-d}{c}\le a,\\ \dfrac{\frac{y-d}{c}-a}{b-a}, a<\dfrac{y-d}{c}\le b,\\ 1, \dfrac{y-d}{c}>b\end{cases}=\begin{cases}1-0,\ y\ge ca+d,\\ 1-\dfrac{y-(ca+d)}{cb-ca}, cb+d\le y<ca+d,\\ 1-1,\ y<cb+d.\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}0,\ y<cb+d,\\ \dfrac{y-(cb+d)}{ca-cb}, cb+d\le y<ca+d,\\ 1,\ y\ge ca+d.\end{cases}$$

По виду $F_Y(y)$ заключаем, что $Y\sim R(cb+d,ca+d)$.

Вывод: *после линейного преобразования равномерной на отрезке случайной величины вновь получается равномерная случайная величина, причем, если* $X\sim R(a,b)$*, то* $Y\sim R(ca+d,cb+d)$, если $c>0$, и $Y\sim R(cb+d,ca+d)$*, если* $c<0$.

3°. Распределение квадрата равномерной на отрезке $[-1,1]$ случайной величины. Пусть $X\sim R(-1,1)$, и, значит, $F_X(x)=\begin{cases}0,\ x\le -1,\\ \dfrac{x+1}{2}, -1<x\le 1,\\ 1,\ x>1.\end{cases}$

Если $Y=X^2$, то для $F_Y(y)$ получаем:

$$F_Y(y)=P\{Y<y\}=P\{X^2<y\}=\begin{cases}0,\ y\le 0\\ P\{-\sqrt{y}<X<\sqrt{y}\}, y>0\end{cases}=\begin{cases}0,\ y\le 0\\ F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y}), y>0.\end{cases}$$

Если $y > 0$, то $\sqrt{y} > 0$ и $F_X\left(\sqrt{y}\right) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{y}+1}{2}, 0 < \sqrt{y} \le 1, \\ 1, \sqrt{y} > 1 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{y}+1}{2}, 0 < y \le 1, \\ 1, y > 1. \end{cases}$

Когда $-\sqrt{y} < 0$, $F_X\left(-\sqrt{y}\right) = \begin{cases} 0, -\sqrt{y} \le -1, \\ \dfrac{-\sqrt{y}+1}{2}, -1 < -\sqrt{y} < 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, y \ge 1, \\ \dfrac{-\sqrt{y}+1}{2}, 0 < y < 1. \end{cases}$

Следовательно, $F_X\left(\sqrt{y}\right) - F_X\left(-\sqrt{y}\right) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{y}+1}{2} - \dfrac{-\sqrt{y}+1}{2}, 0 < y \le 1, \\ 1-0, y > 1 \end{cases} = \begin{cases} \sqrt{y}, 0 < y \le 1, \\ 1, y > 1. \end{cases}$

Окончательно получим: $F_Y(y) = \begin{cases} 0, y \le 0 \\ \sqrt{y}, 0 < y \le 1, \\ 1, y > 1. \end{cases}$

4º. Распределение квадрата стандартизированной нормальной случайной величины. Пусть $X \sim N(0,1)$, и, значит, $f_X(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Если $Y = X^2$, то для $F_Y(y)$ получаем:

$$F_Y(y) = P\{Y < y\} = P\{X^2 < y\} = \begin{cases} 0, y \le 0, \\ P\left\{-\sqrt{y} < X < \sqrt{y}\right\}, y > 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, y \le 0, \\ \int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \end{cases} = \begin{cases} 0, y \le 0, \\ \dfrac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{\sqrt{y}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, y > 0. \end{cases}$$

Откуда, дифференцируя по y, получим

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, y \le 0, \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot y^{-1/2} \cdot e^{-y/2}, y > 0. \end{cases}$$

Следовательно, $Y = X^2 \sim \Gamma\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$, или, что тоже, $X^2 \sim \chi^2(1)$ (эскиз график плотности распределения есть на рис. 8 § 2.5).

5º. Монотонное преобразование непрерывной случайной величины. Пусть X - непрерывная случайная величина, $Y = \varphi(X)$ - монотонная непрерывная функция.

Для ясности дальнейшего изложения, напомним некоторые факты из математического анализа. Монотонная функция принимает каждое свое значение только в одной точке области определения. Иными словами, в случае монотонности различным значениям аргумента соответствуют различные значения функции, и, значит, каждому y_0 из множества значений функции $y=\varphi(x)$ можно сопоставить единственное значение x_0 из ее области определения - решение уравнения $y_0=\varphi(x)$. Определенное таким образом отображение называется обратной по отношению к $y=\varphi(x)$ функцией и обозначается $x=\varphi^{-1}(y)$. В этом случае для любого x из области определения можем записать: $x=\varphi^{-1}(y)=\varphi^{-1}(\varphi(x))$.

Если функция $y=\varphi(x)$ возрастает (убывает), то обратная функция $x=\varphi^{-1}(y)$ также возрастает (убывает). В частности, из этого следует, что, если $y=\varphi(x)$ возрастает, то для y_1,y_2 из области определения функции $x=\varphi^{-1}(y)$ неравенство $y_1<y_2$ равносильно неравенству $\varphi^{-1}(y_1)<\varphi^{-1}(y_2)$, а если $y=\varphi(x)$ убывает, то неравенству $\varphi^{-1}(y_1)>\varphi^{-1}(y_2)$.

1) Пусть $y=\varphi(x)$ возрастает. Для $F_Y(y)$ получаем:

$$F_Y(y)=P\{Y<y\}=P\{\varphi(X)<y\}=[\text{для } y \text{ из области определения } x=\varphi^{-1}(y)]=$$
$$=P\{\varphi^{-1}(\varphi(X))<\varphi^{-1}(y)\}=P\{X<\varphi^{-1}(y)\}=F_X(\varphi^{-1}(y)).$$

2) Пусть $y=\varphi(x)$ убывает. Для $F_Y(y)$ получаем:

$$F_Y(y)=P\{Y<y\}=P\{\varphi(X)<y\}=[\text{для } y \text{ из области определения } x=\varphi^{-1}(y)]=$$
$$=P\{\varphi^{-1}(\varphi(X))>\varphi^{-1}(y)\}=1-P\{X\le\varphi^{-1}(y)\}=1-P\{X<\varphi^{-1}(y)\}=1-F_X(\varphi^{-1}(y)).$$

Заметим, что если $\varphi(x)$ не строго монотонная, а неубывающая или невозрастающая функция, то переход от сравнения значений функций к сравнению ее аргументов будет несколько иным – неравенства для аргументов будут нестрогими.

Пример 1º. Если X - непрерывная случайная величина с функцией распределения $F_X(x)$, то случайная величина $Y=F_X(X)$ равномерно распределена на отрезке $[0;1]$, т.е. $Y\sim[0;1]$.

◄ Функция $F_X(x)$ неубывающая, поэтому

$$F_Y(y)=P\{Y<y\}=P\{F_X(X)<y\}=\begin{cases}0, & y\le 0,\\ P\{X\le F_X^{-1}(y)\}=F_X(F_X^{-1}(y))=y, & 0<y\le 1,\\ 1, & y>0.\end{cases}$$ ►

Рассмотрим теперь вопрос о связи плотности распределения функции $Y=\varphi(X)$ и ее аргумента. Пусть $\varphi(x)$ не только монотонна и непрерывна, но и дифференцируема. Вновь отдельно проанализируем два случая: монотонного возрастания и монотонного убывания функции.

1) Если $\varphi(x)$ возрастает, то для y из области определения $x=\varphi^{-1}(y)$ имеем $F_Y(y)=F_X(\varphi^{-1}(y))=\int\limits_{-\infty}^{\varphi^{-1}(y)}f_X(t)dt$, следовательно,

$$f_Y(y)=\frac{d\left(F_Y(y)\right)}{dy}= f_X\left(\varphi^{-1}(y)\right)\cdot\frac{d(\varphi^{-1}(y))}{dy}.$$

2) Если $\varphi(x)$ убывает, то для y из области определения $x=\varphi^{-1}(y)$ имеем $F_Y(y)=1-F_X(\varphi^{-1}(y))=1-\int\limits_{-\infty}^{\varphi^{-1}(y)} f_X(t)dt$, следовательно,

$$f_Y(y)=\frac{d\left(F_Y(y)\right)}{dy}=-f_X\left(\varphi^{-1}(y)\right)\cdot\frac{d(\varphi^{-1}(y))}{dy}= f_X\left(\varphi^{-1}(y)\right)\cdot\left(-\frac{d(\varphi^{-1}(y))}{dy}\right).$$

Сравнивая полученные формулы, замечаем, что они могут быть объединены в одну:

$$f_Y(y)=f_X\left(\varphi^{-1}(y)\right)\cdot\left|\frac{d(\varphi^{-1}(y))}{dy}\right|.$$

Действительно, когда φ возрастает, то и φ^{-1} возрастает, производная функции φ^{-1} положительна и, следовательно, верно равенство $\left|\frac{d(\varphi^{-1}(y))}{dy}\right|=\frac{d(\varphi^{-1}(y))}{dy}$.

Если φ убывает, то и φ^{-1} убывает, производная функции φ^{-1} отрицательна и, следовательно, верно равенство $\left|\frac{d(\varphi^{-1}(y))}{dy}\right|=-\frac{d(\varphi^{-1}(y))}{dy}$.

Пример 2°. Пусть $X\sim N(0,1)$, $Y=X^3$. Найти плотность распределения случайной величины Y.

◀ Если $Y=X^3$, то $X=\sqrt[3]{Y}$, т.е. $\varphi(x)=x^3$, $\varphi^{-1}(y)=\sqrt[3]{y}$ и $\frac{d(\varphi^{-1}(y))}{dy}=\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{y^2}}$. С учетом того, что φ монотонно возрастающая функция, получим:

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\sqrt[3]{y^2}}{2}}\cdot\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{y^2}},\text{ или } f_Y(y)=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{y^2}}e^{-\frac{\sqrt[3]{y^2}}{2}}.$$ ▶

Литература

1. Вся высшая математика: Учебник. Т. 5 / М. Л. Краснов [и др.]. - 3-е изд., испр. - М.: URSS. ЛКИ, 2007. - 296 с.

2. Земсков В.Н. Лекции по теории вероятностей и математической статистике. – М. МИЭТ, 2002. – 152 с

3. Вентцель Е.С. Теория вероятностей [Текст] : Учебник для вузов / Е. С. Вентцель. - 7-е стер. изд. - М.: Высшая школа, 2001. - 576 с.

4. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей: Учебник. Ид. 11-е. – М.: ЛЕНАНД, 2015. – 448 с.

5. Сборник задач по математике для втузов [Текст]: Учеб. пособие для втузов: В 4-х ч. Ч. 4: [Теория вероятностей; Математическая статистика]/Э. А. Вуколов [и др.]; Под ред. А.В. Ефимова, А.С. Поспелова. - 3-е изд., перераб. и доп. - М.: Физматлит, 2004. - 432 с. - Информация в названии части уточнена по обложке книги.