

## 1. Комплексные числа

*Комплексное число* — это выражение вида  $a + bi$ , где  $a, b$  — действительные числа, а  $i$  — так называемая *мнимая единица*, символ, квадрат которого равен  $-1$ , то есть  $i^2 = -1$ .

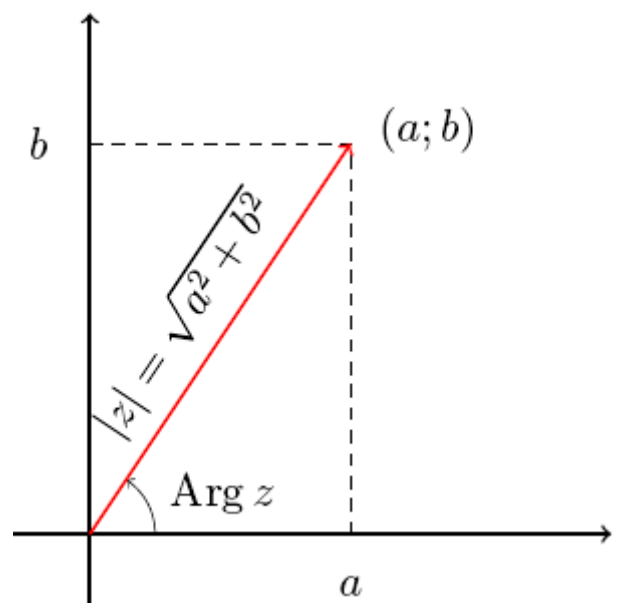
Число  $a$  называется *действительной частью*, а число  $b$  — *мнимой частью* комплексного числа  $z = a + bi$ . Если  $b = 0$ , то вместо  $a + 0i$  пишут просто  $a$ . Видно, что действительные числа — это частный случай комплексных чисел.

Арифметические действия над комплексными числами те же, что и над действительными: их можно складывать, вычитать, умножать и делить друг на друга. Сложение и вычитание происходят по правилу  $(a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)i$ , а умножение — по правилу  $(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$  (здесь как раз используется, что  $i^2 = -1$ ). Число  $\bar{z} = a - bi$  называется *комплексно-сопряженным* к  $z = a + bi$ . Равенство  $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$  позволяет понять, как делить одно комплексное число на другое (ненулевое) комплексное число:

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi) \cdot (c-di)}{(c+di) \cdot (c-di)} = \frac{(ac+bd) + (bc-ad)i}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

(Например,  $\frac{3+4i}{1+2i} = \frac{11}{5} - \frac{2}{5}i$ .)

У комплексных чисел есть удобное и наглядное геометрическое представление: число  $z = a + bi$  можно изображать вектором с координатами  $(a; b)$  на декартовой плоскости (или, что



почти то же самое, точкой — концом вектора с этими координатами). При этом сумма двух комплексных чисел изображается как сумма соответствующих векторов (которую можно найти по правилу параллелограмма). По теореме Пифагора длина вектора с координатами  $(a; b)$  равна  $\sqrt{a^2 + b^2}$ . Эта величина называется *модулем* комплексного числа  $z = a + bi$  и обозначается  $|z|$ . Угол, который этот вектор образует с положительным направлением оси абсцисс (отсчитанный против часовой стрелки), называется *аргументом* комплексного числа  $z$  и обозначается  $\text{Arg } z$ . Аргумент определен не однозначно, а лишь с точностью до прибавления величины, кратной  $2\pi$  радиан (или  $360^\circ$ , если считать в градусах) — ведь ясно, что поворот на такой угол вокруг начала

координат не изменит вектор. Но если вектор длины  $r$  образует угол  $\varphi$  с положительным направлением оси абсцисс, то его координаты равны  $(r \cdot \cos \varphi; r \cdot \sin \varphi)$ . Отсюда получается *тригонометрическая форма записи* комплексного числа:  $z = |z| \cdot (\cos(\text{Arg } z) + i \sin(\text{Arg } z))$ . Часто бывает удобно записывать комплексные числа именно в такой форме, потому что это сильно упрощает выкладки. Умножение комплексных чисел в тригонометрической форме выглядит очень просто:  $z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos(\text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2) + i \sin(\text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2))$  (при умножении двух комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются). Отсюда следуют *формулы Муавра*:  $z^n = |z|^n \cdot (\cos(n \cdot (\text{Arg } z)) + i \sin(n \cdot (\text{Arg } z)))$ . С помощью этих формул легко научиться извлекать корни любой степени  $n \in \mathbb{Z}$  из комплексных чисел. *Корень  $n$ -й степени из числа  $z$*  — это такое комплексное число  $w$ , что  $w^n = z$ . Видно, что  $|w| = \sqrt[n]{|z|}$ , а  $\text{Arg } w = \frac{1}{n} \text{Arg } z + \frac{2\pi k}{n}$ , где  $k$  может принимать любое значение из множества  $\{0, 1, \dots, n-1\}$ . Это означает, что всегда есть ровно  $n$  корней  $n$ -й степени из комплексного числа

(на плоскости они располагаются в вершинах правильного  $n$ -угольника)

- Если  $x = 0$ , то  $z$  называется **мнимым** или **чисто мнимым**.

## Свойства комплексно сопряженных чисел

1) Если  $z = \bar{z}$ , то можно сделать вывод, что рассматриваемое число  $z$  является действительным.

Например.  $z = 2 \in R \Rightarrow \bar{z} = 2$  и  $z = \bar{z}$

2) Для любого комплексного числа  $z$  сумма  $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re} z$  - действительное число.

Например. Пусть  $z = 2 - 3i$ , тогда  $\bar{z} = 2 + 3i$ , а тогда

$$z + \bar{z} = 2 - 3i + (2 + 3i) = 2 - 3i + 2 + 3i = 2 + 2 = 4 \in R$$

3) Для произвольного комплексного числа  $z = a + bi$  произведение  $z \cdot \bar{z} = |z|^2 \in R$ .

Например. Пусть  $z = 2 - 3i$ , комплексно сопряженное к нему число  $\bar{z} = 2 + 3i$ , тогда произведение

$$\begin{aligned} z \cdot \bar{z} &= (2 - 3i)(2 + 3i) = 2^2 - (3i)^2 = 2^2 - 3^2 \cdot i^2 = \\ &= 2^2 - 3^2 \cdot (-1) = 2^2 + 3^2 = \sqrt{2^2 + 3^2}^2 = |z|^2 = 13 \in R \end{aligned}$$

4) Модули комплексно сопряженных чисел равны:  $|z| = |\bar{z}|$ , а аргументы отличаются знаком (рис. 1).

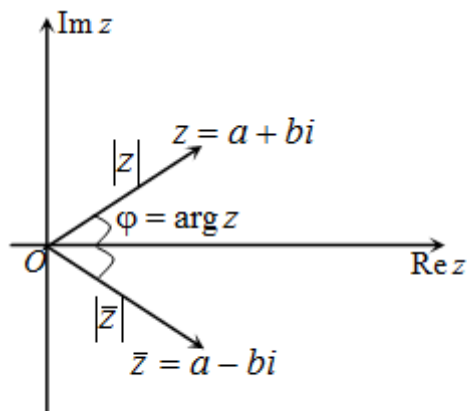


Рис. 1

5)  $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$

6)  $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

7)  $\frac{\overline{z_1}}{z_2} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

8)  $\overline{(\bar{z})} = z$

9) Если  $z = a + bi$  и  $\bar{z} = a - bi$  - комплексно сопряженные числа, то

$$a = \operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad b = \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

## 2. Корни многочлена

### §6 МНОГОЧЛЕН В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

**Теорема Безу. Основная теорема алгебры.**

Многочленом  $n$ -й степени в комплексной области называется функция вида

$$P_n(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n = \sum_{k=0}^n a_k z^k, \quad (14)$$

где  $a_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, n$  - коэффициенты многочлена ( действительные или комплексные числа);  $z$  - комплексная переменная  $z = x + iy$ ,  $x, y \in R$ .

Если  $a_k$  - действительные числа, многочлен (14) называется многочленом в комплексной области с действительными коэффициентами. Область определения многочлена (14) - все комплексные числа, т.е. множество  $C$ .

Любому числу  $z_0 \in C$  соответствует число  $P_n(z_0)$ . Если  $P_n(z_0) = 0$ , то  $z_0$  называется корнем или нулем многочлена  $P_n(z)$ .

Два многочлена  $P_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$  и  $Q_n(z) = \sum_{k=0}^n b_k z^k$  называются равными, если выполняется равенство  $a_k = b_k$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots, n$ .

**Безу Этьен** (Bezout Etienne ) 31.3.1730 - 27.9.1783 - французский математик. Основные труды по алгебре (исследование свойств систем алгебраических уравнений высших степеней и исключения неизвестных в таких системах).

**Теорема (Безу)** Для того, чтобы многочлен  $P_n(z)$  имел комплексный корень  $z_0$ , необходимо и достаточно, чтобы он делился на двучлен  $z - z_0$ , т.е. чтобы справедливым было представление

$$P_n(z) = (z - z_0)P_{n-1}(z), \quad (15)$$

где  $P_{n-1}(z)$  - многочлен степени  $n-1$ .

▷ **Необходимость** Пусть  $z_0$  корень многочлена  $P_n(z)$ , тогда  $P_n(z_0) = 0$ . По формуле Тейлора для многочлена

$$P_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k (z - z_0)^k,$$

т.е. многочлен  $P_n(z)$  представлен в виде (15).

**Достаточность** Если для многочлена справедливо представление в виде (15), т.е.  $P_n(z) = (z - z_0)P_{n-1}(z)$ , то при  $z = z_0$  многочлен  $P_n(z_0) = 0$ , а это означает, что  $z_0$  - корень уравнения. ◁

Из теоремы Безу не следует существование корней. Вопрос о существовании корней многочлена решает другая теорема.

**Теорема 3 (основная теорема алгебры)** Всякий многочлен  $P_n(z)$ ,  $n \in N$ , имеет по крайней мере один комплексный корень.

Число  $z_0$  называется простым корнем многочлена  $P_n(z)$ , если этот многочлен делится на  $(z - z_0)$  и не делится на  $(z - z_0)^2$ .

Число  $z_0$  называется  $k$ -кратным корнем многочлена  $P_n(z)$ , если  $P_n(z)$  делится на  $(z - z_0)^k$  и не делится  $(z - z_0)^{k+1}$ , т.е.  $P_n(z)$  представим в виде

$$P_n(z) = (z - z_0)^k P_{n-k}(z),$$

где  $P_{n-k}(z)$  не делится на  $(z - z_0)$ .

**Пример** Показать, что  $z_1 = 0, z_2 = -1$  являются корнями многочлена  $P_3(z) = z^3 + 2z^2 + z$ , и определить их кратность.

При  $z_1 = 0$   $P_3(z_1) = 0$ . Разделим  $P_3(z)$  на  $z$ , получим  $P_2(z) = z^2 + 2z + 1$ , причем  $P_2(z_1) \neq 0$ . Следовательно  $z_1 = 0$  является простым (однократным) корнем многочлена  $P_3(z) = z^3 + 2z^2 + z$ .

При  $z_2 = -1$   $P_3(z_2) = -1 + 2 - 1 = 0$ . Представим  $P_3(z) = z(z^2 + 2z + 1) = z(z + 1)^2$ . Отсюда делаем вывод, что  $z_2 = -1$  является корнем кратности два для многочлена  $P_3(z) = z^3 + 2z^2 + z$ .

**Следствие** Многочлен  $P_n(z)$  имеет  $n$  комплексных корней с учетом их кратности, т.е.

$$P_n(z) = a_n(z - z_1)^{n_1} (z - z_2)^{n_2} \dots (z - z_s)^{n_s},$$

где  $z_1, z_2, z_3, \dots, z_s$  - различные корни  $P_n(z)$ , а  $n_1, n_2, \dots, n_s$  - их кратности, причем  $n_1 + n_2 + \dots + n_s = n$

**Многочлен с действительными коэффициентами. Разложение его на линейные и квадратные множители.**

Рассмотрим многочлен  $n$ -й степени

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = \sum_{k=0}^n a_k x^k,$$

где  $a_k \in R, k = 0, 1, 2, \dots, n; z \in C$ .

Для такого многочлена справедливы следующие две теоремы.

**Теорема 4** Если многочлен  $P_n(z)$  с действительными коэффициентами, то

$$P_n(\bar{z}) = \overline{P_n(z)},$$

т.е. если  $P_n(z) = A + iB, A, B \in R$ , то  $P_n(\bar{z}) = A - iB$ .

▷ Для комплексных чисел справедливы следующие равенства

$$\bar{z}_1 \pm \bar{z}_2 = \overline{z_1 \pm z_2}, \quad \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = \overline{z_1 \cdot z_2};$$

(доказываются непосредственной проверкой)

Для действительных чисел  $\bar{a}_k = a_k$ . Следовательно,

$$P_n(\bar{z}) = \sum_{k=0}^n a_k \bar{z}^k = \sum_{k=0}^n \bar{a}_k \bar{z}^k = \sum_{k=0}^n \overline{a_k z^k} = \overline{\sum_{k=0}^n a_k z^k} = \overline{P_n(z)}$$

т.е. если  $P_n(z) = A + iB, A, B \in R$ , то  $P_n(\bar{z}) = A - iB$ . ◁

**Теорема 5** Если многочлен  $P_n(z)$  с действительными коэффициентами имеет комплексный корень  $\bar{z}_0 = a + ib$ , то он имеет и сопряженный корень  $\bar{z}_0 = a - ib$ .

▷ Пусть  $z_0 = a + ib$  - корень многочлена  $P_n(z)$ . Тогда  $P_n(z_0) = A + iB = 0$ ,  $A, B \in \mathbb{R}$ .

Комплексное число равно нулю, если равны нулю его действительная и мнимые части, следовательно,  $A = 0, B = 0$ .

Вычислим  $P_n(\bar{z}_0)$ ,  $\bar{z}_0 = a - ib$ . Согласно теореме 4,  $P_n(\bar{z}_0) = A - iB$ , учитывая, что  $A = 0, B = 0$ , тогда и  $P_n(\bar{z}_0) = 0$ , т.е.  $\bar{z}_0$  корень многочлена  $P_n(z)$ . ◁

Из теоремы 5 следует, что если многочлен с действительными коэффициентами  $P_n(z)$  имеет комплексные корни, то они входят в его разложение попарно сопряженными.

Рассмотрим произведение линейных множителей для попарно сопряженных корней  $(z - z_0)(z - \bar{z}_0)$ , где  $z_0 = a + ib$

$$\begin{aligned} (z - z_0)(z - \bar{z}_0) &= (z - a - ib)(z - a + ib) = ((z - a) - ib)((z - a) + ib) = \\ &= (z - a)^2 + b^2 = z^2 - 2az + a^2 + b^2. \end{aligned}$$

Обозначим  $a^2 + b^2 = q, -2a = p$ , тогда  $(z - a - ib)(z - a + ib) = z^2 + pz + q$  т.е. получили квадратный трехчлен с действительными коэффициентами.

Если число  $z_0 = a + ib$  является корнем кратности  $k$  многочлена  $P_n(z)$  с действительными коэффициентами, то  $\bar{z}_0 = a - ib$  является многочленом той же кратности.

Из всего сказанного следует, что многочлен с действительными коэффициентами  $P_n(z)$  разложим на множители с действительными коэффициентами первой и второй степени соответствующей кратности :

$$P_n(z) = a_n(z - a_1)^{k_1}(z - a_2)^{k_2} \dots (z - a_s)^{k_s} (z^2 + p_1z + q_1) \dots (z^2 + p_lz + q_l),$$

где

$$k_1 + k_2 + \dots + k_s + 2m_1 + \dots + 2m_l = n$$

**Пример** Разложить на множители следующие многочлены

$$1) P_3(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6;$$

Найдем подбором один корень среди делителей 6. Это  $x=1$ . Остальные два можно найти, решая квадратное уравнение  $x^2 + 5x + 6 = 0$ , левая часть которого получается после деления многочлена  $P_3(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$  на  $x-1$ . Таким образом получаем еще два корня  $x_2 = 2, x_3 = 3$ . Тогда

$$P_3(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3).$$

$$2) P_4(x) = x^4 - 1.$$

Воспользовавшись формулами сокращенного умножения, получим

$$P_4(x) = x^4 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2 + 1).$$

### 3. Определение линейного пространства. Примеры линейных пространств. Размерность и базис линейного пространства.

**Определение 1.1.** Множество  $R$  элементов  $x, y, z, \dots$  любой природы называется линейным (или векторным) пространством, если выполнены следующие три требования:

1. Существует правило, посредством которого любым двум элементам  $x$  и  $y$  множества  $R$  ставится в соответствие третий элемент  $z$  этого множества, называемый суммой элементов  $x$  и  $y$  и обозначаемый  $z=x+y$ .
2. Существует правило, посредством которого любому элементу  $x$  множества  $R$  и любому вещественному числу  $\alpha$  ставится в соответствие элемент  $w$  этого множества, называемый произведением элемента  $x$  на число  $\alpha$  и обозначаемый  $w=\alpha x$  или  $w=x\alpha$ .
3. Представленные два правила подчинены следующим восьми аксиомам:
  1.  $x+y=y+x$  (переместительное свойство суммы);
  2.  $(x+y)+z=x+(y+z)$  (сочетательное свойство суммы);
  3. существует нулевой элемент  $0$  такой, что  $x+0=x$  для любого элемента  $x$ .
  4. для любого элемента  $x$  существует противоположный элемент элемент  $x'$  такой, что  $x+x'=0$ ;
  5.  $1 \cdot x=x$  для любого  $x$ ;
  6.  $\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x$  (сочетательное свойство относительно числового множителя);
  7.  $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$  (распределительное свойство относительно числовых множителей);
  8.  $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$  (распределительное свойство относительно суммы элементов).

Элементы линейного (векторного) пространства называются векторами.

## 2. Базис линейного пространства

**Определение 2.1.** Совокупность линейно

независимых элементов  $e_1, e_2, \dots, e_n$  пространства  $R$  называется базисом этого пространства, если для каждого элемента  $x$  пространства  $R$  существуют вещественные

числа  $x_1, x_2, \dots, x_n$  такие, что выполнено равенство

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \mathbf{e}_n \quad (2.1)$$

Равенство (2.1) называется разложением элемента  $\mathbf{x}$  по базису  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$  а числа  $x_1, x_2, \dots, x_n$  называются координатами элемента  $\mathbf{x}$  (относительно базиса  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ ).

Докажем, что любой элемент  $\mathbf{x}$  линейного пространства  $R$  может быть разложен по базису  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$  единственным образом.

Пусть существует и другое разложение  $\mathbf{x}$ :

$$\mathbf{x} = x_1' \mathbf{e}_1 + x_2' \mathbf{e}_2 + \dots + x_n' \mathbf{e}_n \quad (2.2)$$

Вычитая (2.1) из (2.2) имеем:

$$(x_1' - x_1) \mathbf{e}_1 + (x_2' - x_2) \mathbf{e}_2 + \dots + (x_n' - x_n) \mathbf{e}_n = \mathbf{0}. \quad (2.3)$$

Так как базисные элементы  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$  линейно независимы из соотношения (2.3) следует, что

$$x_1' - x_1 = 0, \dots, x_n' - x_n = 0$$

или

$$x_1' = x_1, \dots, x_n' = x_n.$$

Следовательно каждый элемент линейного пространства  $R$  может быть разложен по базису  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$  единственным образом.

**Теорема 2.2.** При сложении произвольных двух элементов линейного пространства  $R$  их координаты (относительно любого базиса пространства  $R$ ) складываются, а при умножении любого элемента  $\mathbf{x}$  на любое число  $\alpha$  все координаты  $\mathbf{x}$  умножаются на  $\alpha$ .

Доказательство следует из аксиом 1-8 определения 1.1.

### 3. Размерность линейного пространства

Рассмотрим произвольное вещественное пространство  $R$ .

**Определение 3.1.** Линейное пространство  $R$  называется  $n$ -мерным, если в нем существует  $n$  линейно независимых элементов, а любые  $(n+1)$  элементов уже являются линейно зависимыми. При этом число  $n$  называется размерностью пространства  $R$ .

Размерность пространства обозначают символом  $\dim$ .

**Определение 3.2.** Линейное пространство  $R$  называется бесконечномерным, если в нем существует любое число линейно независимых элементов.

**Теорема 3.3.** Пусть  $R$  является линейным пространством размерности  $n$  ( $\dim R = n$ ). Тогда любые  $n$  линейно независимых элементов этого пространства образуют его базис.

Доказательство. Так как  $R$  является  $n$ -мерным пространством, то из определения 2.1 следует, что в нем существует

совокупность из  $n$  линейно независимых элементов  $e_1, e_2, \dots, e_n$ .

Пусть  $x$  - любой элемент из  $R$ . Тогда согласно определению

3.1  $x, e_1, e_2, \dots, e_n$  линейно зависимы, т.е. существуют

числа  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  (не все равные нулю) такие, что справедливо равенство

$$\lambda_0 x + \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n = 0. \quad (3.1)$$

Заметим, что  $\lambda_0 \neq 0$  т.к. в противном случае из равенства (3.1) следовало, что элементы  $e_1, e_2, \dots, e_n$  линейно зависимы.

Поделив равенство (3.1) на  $\lambda_0$  и положив

$$x_1 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_0}, \quad x_2 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_0}, \quad \dots, \quad x_n = -\frac{\lambda_n}{\lambda_0}, \quad (3.2)$$

получим

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n \quad (3.3)$$

Из равенства (3.3) следует, что любой вектор из пространства  $R$  может быть разложен по элементам  $e_1, e_2, \dots, e_n$  и, следовательно, они образуют базис пространства  $R$ . ■

**Теорема 3.4.** Пусть линейное пространство  $R$  имеет базис, состоящий из  $n$  элементов. Тогда размерность  $R$  равна  $n$  ( $\dim R = n$ ).

Доказательство. Пусть множество  $n$  элементов  $e_1, e_2, \dots, e_n$  является базисом пространства  $R$ . Достаточно доказать, что любые  $n+1$  элементы  $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$  этого пространства линейно зависимы. Разложив эти элементы по базису, получим:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11} e_1 + a_{12} e_2 + \dots + a_{1n} e_n, \\ x_2 &= a_{21} e_1 + a_{22} e_2 + \dots + a_{2n} e_n, \\ &\dots\dots\dots \\ x_n &= a_{n1} e_1 + a_{n2} e_2 + \dots + a_{nn} e_n, \\ x_{n+1} &= a_{n+1,1} e_1 + a_{n+1,2} e_2 + \dots + a_{n+1,n} e_n, \end{aligned} \tag{3.4}$$

где  $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{n+1,n}$  вещественные числа.

Пусть элементы  $x_1, x_2, \dots, x_n$  линейно независимы. Перепишем (3.4) в матричном виде:

$$X = A \cdot E_\sigma, \tag{3.5}$$

$$x_{n+1} = (a_{n+1,1}, a_{n+1,2}, \dots, a_{n+1,n}) \cdot E_\sigma, \tag{3.6}$$

где  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ ,  $E_\sigma = (e_1, e_2, \dots, e_n)^T$   $n \times n$ -матрицы (элементы  $x_1, \dots, x_n, e_1, \dots, e_n$  здесь являются вектор-строками),

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Так как  $x_1, x_2, \dots, x_n$  линейно независимы, матрица  $A$  имеет обратную матрицу  $A^{-1}$ . Решив матричное уравнение (3.5) относительно  $E_\delta$  получим :

$$E_\delta = A^{-1} \cdot X \quad (3.8)$$

Подставляя (3.8) в (3.6), получим:

$$x_{n+1} = (a_{n+1,1}, a_{n+1,2}, \dots, a_{n+1,n}) A^{-1} X, \quad (3.9)$$

Как видно из уравнения (3.9)  $x_{n+1}$  можно представить линейной комбинацией векторов  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Следовательно векторы  $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$  линейно зависимы. ■

## 4. Определение линейного подпространства. Примеры.

### Линейные пространства: определение и примеры

#### Аксиомы линейного пространства

**Линейным (векторным)** пространством называется множество  $V$  произвольных элементов, называемых векторами, в котором определены операции сложения векторов и умножения вектора на число, т.е. любым двум векторам  $u$  и  $v$  поставлен в соответствие вектор  $u + v$ , называемый суммой векторов  $u$  и  $v$ , любому вектору  $v$  и любому числу  $\lambda$  из поля действительных чисел  $\mathbb{R}$  поставлен в соответствие вектор  $\lambda v$ , называемый произведением вектора  $v$  на число  $\lambda$ ; так что выполняются следующие условия:

1.  $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$  (коммутативность сложения);
2.  $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$  (ассоциативность сложения);
3. существует такой элемент  $\mathbf{o} \in V$ , называемый нулевым вектором, что  $\mathbf{v} + \mathbf{o} = \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in V$ ;
4. для каждого вектора  $\mathbf{v}$  существует такой вектор  $(-\mathbf{v}) \in V$ , называемый противоположным вектору  $\mathbf{v}$ , что  $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{o}$ ;
5.  $\lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ ;
6.  $(\lambda + \mu)\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in V, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ;
7.  $\lambda(\mu\mathbf{v}) = (\lambda\mu)\mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in V, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ;
8.  $1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in V$ .

Условия 1-8 называются **аксиомами линейного пространства**. Знак равенства, поставленный между векторами, означает, что в левой и правой частях равенства представлен один и тот же элемент множества  $V$ , такие векторы называются равными.

В определении линейного пространства операция умножения вектора на число введена для действительных чисел. Такое пространство называют **линейным пространством над полем действительных (вещественных) чисел**, или, короче, **вещественным линейным пространством**. Если в определении вместо поля  $\mathbb{R}$  действительных чисел взять поле комплексных чисел  $\mathbb{C}$ , то получим **линейное пространство над полем комплексных чисел**, или, короче, **комплексное линейное пространство**. В качестве числового поля можно выбрать и поле  $\mathbb{Q}$  рациональных чисел, при этом получим линейное пространство над полем рациональных чисел. Далее, если не оговорено противное, будут рассматриваться вещественные линейные пространства. В некоторых случаях для краткости будем говорить о пространстве, опуская слово линейное, так как все пространства, рассматриваемые ниже — линейные.

### Замечания 8.1

1. Аксиомы 1-4 показывают, что линейное пространство является коммутативной группой относительно операции сложения.

2. Аксиомы 5 и 6 определяют дистрибутивность операции умножения вектора на число по отношению к операции сложения векторов (аксиома 5) или к операции сложения чисел (аксиома 6). Аксиома 7, иногда называемая законом ассоциативности умножения на число, выражает связь двух разных операций: умножения вектора на число и умножения чисел. Свойство, определяемое аксиомой 8, называется унитарностью операции умножения вектора на число.

3. Линейное пространство — это непустое множество, так как обязательно содержит нулевой вектор.

4. Операции сложения векторов и умножения вектора на число называются линейными операциями над векторами.

5. Разностью векторов  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  называется сумма вектора  $\mathbf{u}$  с противоположным вектором  $(-\mathbf{v})$  и обозначается:  $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v})$ .

6. Два ненулевых вектора  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  называются коллинеарными (пропорциональными), если существует такое число  $\lambda$ , что  $\mathbf{v} = \lambda\mathbf{u}$ . Понятие коллинеарности распространяется на любое конечное число векторов. Нулевой вектор  $\mathbf{o}$  считается коллинеарным с любым вектором.

---

## Следствия аксиом линейного пространства

1. В линейном пространстве существует единственный нулевой вектор.
2. В линейном пространстве для любого вектора  $\mathbf{v} \in V$  существует единственный противоположный вектор  $(-\mathbf{v}) \in V$ .
3. Произведение произвольного вектора пространства на число нуль равно нулевому вектору, т.е.  $0 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{o} \quad \forall \mathbf{v} \in V$ .
4. Произведение нулевого вектора на любое число равно нулевому вектору, т.е.  $\lambda\mathbf{o} = \mathbf{o}$  для любого числа  $\lambda$ .
5. Вектор, противоположный данному вектору, равен произведению данного вектора на число (-1), т.е.  $(-\mathbf{v}) = (-1)\mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in V$ .

6. В выражениях вида  $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \dots + \mathbf{z}$  (сумма конечного числа векторов) или  $\alpha \cdot \beta \cdot \dots \cdot \omega \cdot \mathbf{v}$  (произведение вектора на конечное число множителей) можно расставлять скобки в любом порядке, либо вообще не указывать.

Докажем, например, первые два свойства. Единственность нулевого вектора. Если  $\mathbf{o}$  и  $\mathbf{o}'$  — два нулевых вектора, то по аксиоме 3 получаем два равенства:  $\mathbf{o}' + \mathbf{o} = \mathbf{o}'$  или  $\mathbf{o} + \mathbf{o}' = \mathbf{o}$ , левые части которых равны по аксиоме 1. Следовательно, равны и правые части, т.е.  $\mathbf{o} = \mathbf{o}'$ . Единственность противоположного вектора. Если вектор  $\mathbf{v} \in V$  имеет два противоположных вектора  $(-\mathbf{v})$  и  $(-\mathbf{v})'$ , то по аксиомам 2, 3, 4 получаем их равенство:

Остальные свойства доказываются аналогично.

---

## Примеры линейных пространств

1. Обозначим  $\{\mathbf{o}\}$  — множество, содержащее один нулевой вектор, с операциями  $\mathbf{o} + \mathbf{o} = \mathbf{o}$  и  $\lambda \mathbf{o} = \mathbf{o}$ . Для указанных операций аксиомы 1-8 выполняются. Следовательно, множество  $\{\mathbf{o}\}$  является линейным пространством над любым числовым полем. Это линейное пространство называется нулевым.

2. Обозначим  $V_1, V_2, V_3$  — множества векторов (направленных отрезков) на прямой, на плоскости, в пространстве соответственно с обычными операциями сложения векторов и умножения векторов на число. Выполнение аксиом 1-8 линейного пространства следует из курса элементарной геометрии. Следовательно, множества  $V_1, V_2, V_3$  являются вещественными линейными пространствами. Вместо свободных векторов можно рассмотреть соответствующие множества радиус-векторов. Например, множество векторов на плоскости, имеющих общее начало, т.е. отложенных от одной фиксированной точки плоскости, является вещественным линейным пространством. Множество радиус-векторов единичной длины не

образует линейное пространство, так как для любого из этих векторов сумма  $\mathbf{v} + \mathbf{v}$  не принадлежит рассматриваемому множеству.

3. Обозначим  $\mathbb{R}^n$  — множество матриц-столбцов размеров  $n \times 1$  с операциями сложения матриц и умножения матриц на число. Аксиомы 1-8 линейного пространства для этого множества выполняются. Нулевым вектором в этом множестве служит нулевой столбец  $\mathbf{o} = (0 \ \cdots \ 0)^T$ . Следовательно, множество  $\mathbb{R}^n$  является вещественным линейным пространством. Аналогично, множество  $\mathbb{C}^n$  столбцов размеров  $n \times 1$  с комплексными элементами является комплексным линейным пространством. Множество матриц-столбцов с неотрицательными действительными элементами, напротив, не является линейным пространством, так как не содержит противоположных векторов.

4. Обозначим  $\{Ax = \mathbf{o}\}$  — множество решений однородной системы  $Ax = \mathbf{o}$  линейных алгебраических уравнений с и неизвестными (где  $A$  — действительная матрица системы), рассматриваемое как множество столбцов размеров  $n \times 1$  с операциями сложения матриц и умножения матриц на число. Заметим, что эти операции действительно определены на множестве  $\{Ax = \mathbf{o}\}$ . Из свойства 1 решений однородной системы (см. разд. 5.5) следует, что сумма двух решений однородной системы и произведение ее решения на число также являются решениями однородной системы, т.е. принадлежат множеству  $\{Ax = \mathbf{o}\}$ . Аксиомы линейного пространства для столбцов выполняются (см. пункт 3 в примерах линейных пространств). Поэтому множество решений однородной системы является вещественным линейным пространством.

Множество  $\{Ax = \mathbf{b}\}$  решений неоднородной системы  $Ax = \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{b} \neq \mathbf{o}$ , напротив, не является линейным пространством, хотя бы потому, что не содержит нулевого элемента ( $\mathbf{x} = \mathbf{o}$  не является решением неоднородной системы).

5. Обозначим  $M_{m \times n}$  — множество матриц размеров  $m \times n$  с операциями сложения матриц и умножения матриц на число. Аксиомы 1-8 линейного пространства для этого множества выполняются. Нулевым вектором является нулевая матрица  $\mathbf{O}$  соответствующих размеров. Следовательно, множество  $M_{m \times n}$  является линейным пространством.

6. Обозначим  $P(\mathbb{C})$  — множество многочленов одной переменной с комплексными коэффициентами. Операции сложения многочленов и умножения многочлена на число,

рассматриваемое как многочлен нулевой степени, определены и удовлетворяют аксиомам 1-8 (в частности, нулевым вектором является многочлен, тождественно равный нулю). Поэтому множество  $P(\mathbb{C})$  является линейным пространством над полем комплексных чисел. Множество  $P(\mathbb{R})$  многочленов с действительными коэффициентами также является линейным пространством (но, разумеется, над полем действительных чисел). Множество  $P_n(\mathbb{R})$  многочленов степени не выше, чем  $n$ , с действительными коэффициентами также является вещественным линейным пространством. Заметим, что операция сложения много членов определена на этом множестве, так как степень суммы многочленов не превышает степеней слагаемых.

Множество многочленов степени  $n$  не является линейным пространством, так как сумма таких многочленов может оказаться многочленом меньшей степени, не принадлежащим рассматриваемому множеству. Множество всех многочленов степени не выше, чем  $n$ , с положительными коэффициентами также не является линейным пространством, поскольку при умножении такого многочлена на отрицательное число получим многочлен, не принадлежащий этому множеству.

7. Обозначим  $C(\mathbb{R})$  — множество действительных функций, определенных и непрерывных на  $\mathbb{R}$ . Сумма  $(f + g)$  функций  $f, g$  и произведение  $\lambda f$  функции  $f$  на действительное число  $\lambda$  определяются равенствами:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x) \text{ для всех } x \in \mathbb{R}$$

Эти операции действительно определены на  $C(\mathbb{R})$ , так как сумма непрерывных функций и произведение непрерывной функции на число являются непрерывными функциями, т.е. элементами  $C(\mathbb{R})$ . Проверим выполнение аксиом линейного пространства. Из коммутативности сложения действительных чисел следует справедливость равенства  $f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$  для любого  $x \in \mathbb{R}$ . По этому  $f + g = g + f$ , т.е. аксиома 1 выполняется. Аксиома 2 следует аналогично из ассоциативности сложения. Нулевым вектором служит функция  $o(x)$ , тождественно равная нулю, которая, разумеется, является непрерывной. Для любой функции  $f$  выполняется равенство  $f(x) + o(x) = f(x)$ , т.е. справедлива аксиома 3. Противоположным вектором для вектора  $f$  будет функция  $(-f)(x) = -f(x)$ . Тогда  $f + (-f) = o$  (аксиома 4 выполняется). Аксиомы 5, 6 следуют из дистрибутивности операций сложения и умножения действительных чисел, а аксиома 7 — из ассоциативности умножения чисел. Последняя аксиома выполняется, так как умножение на единицу не изменяет функцию:  $1 \cdot f(x) = f(x)$  для любого  $x \in \mathbb{R}$ , т.е.  $1 \cdot f = f$ . Таким образом, рассматриваемое множество  $C(\mathbb{R})$  с введенными операциями является вещественным линейным пространством. Аналогично доказывается,

что  $C^1(\mathbb{R}), C^2(\mathbb{R}), \dots, C^m(\mathbb{R})$  — множества функций, имеющих непрерывные производные первого, второго и т.д. порядков соответственно, также являются линейными пространствами.

Обозначим  $T_\omega(\mathbb{R})$  — множество тригонометрических двучленов (часто ты  $\omega \neq 0$ ) с действительными коэффициентами, т.е. множество функций вида  $f(t) = a \sin \omega t + b \cos \omega t$ , где  $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$ . Сумма таких двучленов и произведение двучлена на действительное число являются тригонометрическим двучленом. Аксиомы линейного пространства для рассматриваемого множества выполняются (так как  $T_\omega(\mathbb{R}) \subset C(\mathbb{R})$ ). Поэтому множество  $T_\omega(\mathbb{R})$  с обычными для функций операциями сложения и умножения на число является вещественным линейным пространством. Нулевым элементом служит двучлен  $o(t) = 0 \cdot \sin \omega t + 0 \cdot \cos \omega t$ , тождественно равный нулю.

Множество действительных функций, определенных и монотонных на  $\mathbb{R}$ , не является линейным пространством, так как разность двух монотонных функций может оказаться немонотонной функцией.

8. Обозначим  $\mathbb{R}^X$  — множество действительных функций, определенных на множестве  $X$ , с операциями:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x) \quad \forall x \in X$$

Оно является вещественным линейным пространством (доказательство такое же, как в предыдущем примере). При этом множество  $X$  может быть выбрано произвольно. В частности, если  $X = \{1, 2, \dots, n\}$ , то  $f(X)$  — упорядоченный набор чисел  $f_1, f_2, \dots, f_n$ , где  $f_i = f(i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Такой набор можно считать матрицей-столбцом размеров  $n \times 1$ , т.е. множество  $\mathbb{R}^{\{1,2,\dots,n\}}$  совпадает с множеством  $\mathbb{R}^n$  (см. пункт 3 примеров линейных пространств). Если  $X = \mathbb{N}$  (напомним, что  $\mathbb{N}$  — множество натуральных чисел), то получаем линейное пространство  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  — множество числовых последовательностей  $\{f(i)\}_{i=1}^{\infty}$ . В частности, множество сходящихся числовых последовательностей также образует линейное пространство, так как сумма двух сходящихся последовательностей сходится, и при умножении всех членов сходящейся последовательности на число получаем сходящуюся последовательность. Напротив, множество расходящихся последовательностей не является линейным пространством, так как, например, сумма расходящихся последовательностей может иметь предел.

9. Обозначим  $\mathbb{R}^+$  — множество положительных действительных чисел, в котором сумма  $a \oplus b$  и произведение  $\lambda * a$  (обозначения в этом примере отличаются от обычных) определены равенствами:  $a \oplus b = ab$ ,  $\lambda * a = a^\lambda$ , другими словами, сумма элементов понимается как произведение чисел, а умножение элемента на число — как возведение в степень. Обе операции действительно определены на множестве  $\mathbb{R}^+$ , так как произведение положительных чисел есть положительное число и любая действительная степень положительного числа есть положительное число. Проверим справедливость аксиом. Равенства

$$a \oplus b = ab = ba = b \oplus a, \quad a \oplus (b \oplus c) = a(bc) = (ab)c = (a \oplus b) \oplus c$$

показывают, что аксиомы 1, 2 выполняются. Нулевым вектором данного множества является единица, так как  $a \oplus 1 = a \cdot 1 = a$ , т.е.  $o = 1$ . Противоположным для  $a$  вектором является вектор  $\frac{1}{a}$ , который определен, так как  $a \neq o$ . В самом деле,  $a \oplus \frac{1}{a} = a \cdot \frac{1}{a} = 1 = o$ . Проверим выполнение аксиом 5, 6, 7, 8:

Все аксиомы выполняются. Следовательно, рассматриваемое множество является вещественным линейным пространством.

10. Пусть  $V$  — вещественное линейное пространство. Рассмотрим множество определенных на  $V$  линейных скалярных функций, т.е. функций  $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ , принимающих действительные значения и удовлетворяющих условиям:

$$f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V \text{ (аддитивность);}$$

$$f(\lambda \mathbf{v}) = \lambda \cdot f(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ (однородность).}$$

Линейные операции над линейными функциями задаются также, как в пункте 8 примеров линейных пространств. Сумма  $f + g$  и произведение  $\lambda \cdot f$  определяются равенствами:

Выполнение аксиом линейного пространства подтверждается также, как в пункте 8. Поэтому множество линейных функций, определенных на линейном пространстве  $V$ , является линейным пространством. Это пространство называется сопряженным к пространству  $V$  и обозначается  $V^*$ . Его элементы называют коекторами.

Например, множество линейных форм  $n$  переменных, рассматриваемых как множество скалярных функций векторного аргумента, является линейным пространством, сопряженным к пространству  $\mathbb{R}^n$ .

Множество  $L$  называется *линейным* или *векторным пространством*, если для всех элементов (векторов) этого множества определены операции сложения и умножения на число и справедливо:

1. Каждой паре элементов  $x$  и  $y$  из  $L$  отвечает элемент  $x + y$  из  $L$ , называемый *суммой*  $x$  и  $y$ , причём:

$x + y = y + x$  – сложение коммутативно;

$x + (y + z) = (x + y) + z$  – сложение ассоциативно;

$x + 0 = x$  – существует единственный *нулевой* элемент  $0$  ( $x + 0 = x$  для любого  $x$  из  $L$ );

$x + (-x) = 0$  – для каждого элемента  $x$  из  $L$  существует единственный *противоположный* элемент  $-x$  ( $x + (-x) = 0$  для любого  $x$  из  $L$ ).

2. Каждой паре  $x$  и  $\alpha$ , где  $\alpha$  – число, а  $x$  элемент из  $L$ , отвечает элемент  $\alpha \cdot x$ , называемый *произведением*  $\alpha$  и  $x$ , причём:

$\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x$  – умножение на число ассоциативно: ;

$1 \cdot x = x$  – для любого элемента  $x$  из  $L$ .

3. Операции сложения и умножения на число связаны соотношениями:

$\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$  – умножение на число дистрибутивно относительно сложения элементов;

$(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$  – умножение на вектор дистрибутивно относительно сложения чисел.

Арифметическим вектором называется упорядоченная совокупность  $n$  чисел.

Обозначается  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ;

числа  $x_1, x_2, \dots, x_n$  называются компонентами арифметического вектора.

Для арифметических векторов определены линейные операции — сложение арифметических векторов и умножение вектора на число:

для любых  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  и любого числа  $\alpha$  справедливо:  $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$ ;  $\alpha\mathbf{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$ .

Множество арифметических векторов, для которых определены операции сложения и умножения на число называется **пространством арифметических векторов  $\mathbf{R}^n$** .

Вектор  $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$  называется *нулевым* вектором  **$\mathbf{R}^n$** ,

а вектор  $-\mathbf{x} = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$  — *противоположным* вектором для вектора  $\mathbf{x}$  в  **$\mathbf{R}^n$** .

Система векторов  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k$  линейного пространства  **$L$**  называется *линейно независимой* системой, если равенство  $C_1 \cdot \mathbf{e}_1 + C_2 \cdot \mathbf{e}_2 + \dots + C_k \cdot \mathbf{e}_k = \mathbf{0}$  возможно только когда все коэффициенты  $C_1, C_2, \dots, C_k$  равны нулю.

Здесь  $\mathbf{0}$  — нулевой вектор линейного пространства  **$L$** ,  $C_1, C_2, \dots, C_k$  — числовые коэффициенты.

Если система векторов  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k$  линейного пространства  **$L$**  *не является* линейно независимой системой, то она называется *линейно зависимой* системой векторов.

1. Любая система векторов  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k$  линейного пространства, содержащая нулевой вектор, линейно зависима.

2. Любая система векторов  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k$  линейного пространства, содержащая пару взаимно противоположных векторов, линейно зависима.

3. Любая подсистема векторов линейно независимой системы векторов линейного пространства линейно независима.

4. Любая система векторов линейного пространства, содержащая линейно зависимую подсистему векторов, линейно зависима.

5. Система векторов линейного пространства линейно зависима тогда и только тогда, когда хотя бы один из векторов системы линейно выражается через остальные векторы системы (представлен в виде разложения по векторам системы).

6. Система векторов линейного пространства линейно независима любая её подсистема векторов.

6. Система векторов, состоящая из одного ненулевого вектора линейного пространства, линейно независима.

Для того, чтобы система векторов линейного пространства была линейно зависима, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы один из векторов системы линейно выражался через остальные векторы системы (мог быть представлен в виде разложения по векторам системы).

Система векторов линейного пространства  **$L$**  образует *базис* в  **$L$**  если эта система векторов упорядочена, линейно независима и любой вектор из  **$L$**  линейно выражается через векторы системы.

Иными словами, линейно независимая упорядоченная система векторов  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  образует базис в  **$L$**  если любой вектор  $\mathbf{x}$  из  **$L$**  может быть представлен в виде

$$\mathbf{x} = C_1 \cdot \mathbf{e}_1 + C_2 \cdot \mathbf{e}_2 + \dots + C_n \cdot \mathbf{e}_n.$$

Число  $k$  называется *размерностью* линейного пространства  $L$ , если в  $L$  существует система из  $k$  линейно независимых векторов, а любая система из  $k+1$  вектора — линейно зависима.

Обозначается  $\dim L = k$ . Пространство  $L$  называется  $k$ -мерным. Иногда обозначается  $L_k$ .

Если система векторов  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$   $n$ -мерного линейного пространства  $L_n$  образует базис в  $L_n$ , то любой вектор  $\mathbf{x}$  из  $L_n$  может быть представлен в виде

$$\mathbf{x} = C_1 \cdot \mathbf{e}_1 + C_2 \cdot \mathbf{e}_2 + \dots + C_n \cdot \mathbf{e}_n.$$

Выражение  $\mathbf{x} = C_1 \cdot \mathbf{e}_1 + C_2 \cdot \mathbf{e}_2 + \dots + C_n \cdot \mathbf{e}_n$  называется разложением вектора по базису  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ , а числа  $C_1, C_2, \dots, C_n$  называются *координатами вектора  $\mathbf{x}$*  в базисе  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ .

Координаты вектора принято обозначать тем же символом, что и сам вектор:

$$\mathbf{x} = x_1 \cdot \mathbf{e}_1 + x_2 \cdot \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \cdot \mathbf{e}_n.$$

Взаимно однозначное соответствие  $\mathbf{x} = x_1 \cdot \mathbf{e}_1 + x_2 \cdot \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \cdot \mathbf{e}_n \iff \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

— изоморфизм  $L_n$  и  $\mathbf{R}_n$ .

Пусть системы векторов  $e = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  и  $f = \{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n\}$  — два базиса  $n$ -мерного линейного пространства  $L_n$ .

Обозначим  $\mathbf{x}_e = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  и  $\mathbf{x}_f = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$  — координаты вектора  $\mathbf{x} \in L_n$  соответственно в базисах  $e$  и  $f$ .

Справедливо следующее  $\mathbf{x}_e = C_{e \rightarrow f} \cdot \mathbf{x}_f$ :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

Здесь  $C_{e \rightarrow f}$  — матрица перехода от базиса  $e$  к базису  $f$ , это матрица, столбцами которой являются координаты базисных векторов  $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n$  в базисе  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ :  $\mathbf{f}_1 = c_{11} \cdot \mathbf{e}_1 + c_{21} \cdot \mathbf{e}_2 + \dots + c_{n1} \cdot \mathbf{e}_n$ ,  $\mathbf{f}_2 = c_{12} \cdot \mathbf{e}_1 + c_{22} \cdot \mathbf{e}_2 + \dots + c_{n2} \cdot \mathbf{e}_n$ , ...,  $\mathbf{f}_n = c_{1n} \cdot \mathbf{e}_1 + \dots + c_{nn} \cdot \mathbf{e}_n$ .

Формулу преобразования координат вектора при изменении базиса принято записывать в виде

$$\mathbf{x}_f = (C_{e \rightarrow f})^{-1} \cdot \mathbf{x}_e$$

Множество  $K$  векторов из линейного пространства  $L$  называется *линейным подпространством пространства  $L$* , если сумма  $\mathbf{x} + \mathbf{y}$  любых двух векторов  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  из  $L$  принадлежит  $K$  и произведение  $\alpha \cdot \mathbf{x}$  любого любого числа  $\alpha$  и любого вектора  $\mathbf{x}$  из  $L$  принадлежит  $K$ :

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in K \rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{y} \in K, \alpha \cdot \mathbf{x} \in K, K \subset L.$$

Два линейных пространства  $M$  и  $N$  называется *изоморфными*, если между их элементами установлено такое взаимно однозначное соответствие, при котором сумме любых двух элементов одного пространства отвечает сумма соответствующих элементов другого, а произведению элемента одного пространства на число отвечает произведение соответствующего элемента другого пространства на то же число:

$x \in M, y \in M, x \longleftrightarrow x' \in N, y \longleftrightarrow y' \in N$ , и при этом  
 $x + y \in M, x + y \longleftrightarrow x' + y' \in N, \alpha \cdot x \in M, \alpha \cdot x \longleftrightarrow \alpha \cdot x' \in N$ .

## 5. Преобразование координат вектора при переходе к другому базису.

### 4. Замена базиса и преобразование координат

Пусть в пространстве  $R$  наряду с исходным

базисом  $e_1, e_2, \dots, e_n$  имеется другой базис  $e_1', e_2', \dots, e_n'$ .

Векторы этого базиса можно выразить через линейную комбинацию векторов исходного базиса следующим образом:

$$\begin{aligned} e_1' &= p_{11} e_1 + p_{12} e_2 + \dots + p_{1n} e_n, \\ e_2' &= p_{21} e_1 + p_{22} e_2 + \dots + p_{2n} e_n, \\ &\dots\dots\dots \\ e_n' &= p_{n1} e_1 + p_{n2} e_2 + \dots + p_{nm} e_n. \end{aligned} \quad (4.1)$$

или

$$E_{\delta'} = P \cdot E_{\delta}, \quad (4.2)$$

где  $E_{\delta}$  и  $E_{\delta'}$  матрицы составленные из векторов

строк  $e_1, e_2, \dots, e_n$  и  $e_1', e_2', \dots, e_n'$  соответственно (

$E_{\delta} = (e_1, e_2, \dots, e_n)^T$   $E_{\delta'} = (e_1', e_2', \dots, e_n')^T$ ), а матрица  $P$  имеет вид:

$$P = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nm} \end{vmatrix} \quad (4.3)$$

Матрица  $P$  называется **матрицей замены**

**базиса**  $e_1, e_2, \dots, e_n$  на  $e_1', e_2', \dots, e_n'$ .

В свою очередь, векторы исходного базиса выражаются через векторы нового следующим соотношением:

$$E_{\delta} = Q \cdot E_{\delta}', \quad (4.4)$$

где

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \dots & q_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{n1} & q_{n2} & \dots & q_{nm} \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

Подставляя (4.2) в (4.4) имеем:

$$E_{\delta} = Q \cdot P \cdot E_{\delta}', \quad (4.6)$$

Из (4.6) следует, что  $QP = E$ , где  $E$  - единичная матрица, а матрицы  $Q$  и  $P$  взаимно обратные матрицы.

Рассмотрим как изменяются координаты векторов при замене базиса.

Пусть вектор  $\mathbf{x}$  имеет координаты  $x_1, x_2, \dots, x_n$  в базисе  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$  и координаты  $x_1', x_2', \dots, x_n'$  в базисе  $\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \dots, \mathbf{e}_n'$ , тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \mathbf{e}_n, \\ \mathbf{x} &= x_1' \mathbf{e}_1' + x_2' \mathbf{e}_2' + \dots + x_n' \mathbf{e}_n' \end{aligned} \quad (4.7)$$

или

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot E_{\delta}, \quad \mathbf{x} = (x_1', x_2', \dots, x_n') \cdot E_{\delta}' \quad (4.8)$$

Из (4.8) и из (4.2) имеем:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot E_{\delta} = (x_1', x_2', \dots, x_n') \cdot P \cdot E_{\delta} \quad (4.9)$$

Так как  $E_6$  квадратная матрица полного ранга, она имеет обратную матрицу. Умножив левые и правые части уравнения (4.9) на обратную к  $E_6$  матрицу получим:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1', x_2', \dots, x_n') \cdot P$$

или

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = P^T \cdot \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \dots \\ x_n' \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

Матрица  $P^T$  называется **матрицей преобразования координат**. Она транспонирована с матрицей замены базиса. Обратная матрица  $(P^T)^{-1}$  дает выражения новых координат через старые.

Матрица, обратная к транспонированной для некоторой матрицы, называется **контраградиентной** с ней.

## 6. Линейный оператор, его свойства. Матрица линейного оператора. Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к другому базису.

Пусть заданы линейные пространства  $X$  и  $Y$ . Правило, по которому каждому элементу  $x \in X$  ставится в соответствие единственный элемент  $y \in Y$ , называется *оператором*, действующим в линейных пространствах  $X, Y$ . Результат действия оператора  $A$  на элемент  $x$  обозначают  $y = Ax$  или  $y = A(x)$ .

Если элементы  $x$  и  $y$  связаны соотношением  $y = Ax$ , то  $y$

называют *образом* элемента  $x$ ; элемент  $x$  *прообразом* элемента  $y$ .

Множество элементов линейного пространства  $X$ , для которых определено действие оператора  $A$ , называют *областью определения* оператора и обозначают  $D(A)$ .

Множество элементов линейного пространства  $Y$ , которые являются образами элементов из области определения оператора  $A$ , называют *образом* оператора и обозначают  $Im(A)$ . Если  $y = Ax$ , то  $x \in D(A)$ ,  $y \in Im(A)$ .

Оператор  $A$ , действующий в линейных пространствах  $X, Y$  называется *линейным оператором*, если

$A(u+v) = A(u) + A(v)$  и  $A(au) = aA(u)$  и для любых  $u, v \in X$  и для любого числа  $a$ .

Если пространства  $X$  и  $Y$  совпадают, то говорят, что оператор действует в пространстве  $X$ . В дальнейшем ограничимся рассмотрением линейных операторов, действующих в линейном пространстве  $X$ .

### Линейный оператор и его матрица. Переход к другому базису

Рассмотрим линейный оператор  $A$ , действующий в конечномерном линейном пространстве  $X$ ,  $\dim(X)=n$  и пусть  $e_1, e_2, \dots, e_n$  - базис в  $X$ . Обозначим через  $A e_1 = (a_{11}, \dots, a_{n1})$ , ...,  $A e_n = (a_{1n}, \dots, a_{nn})$  образы базисных векторов  $e_1, e_2, \dots, e_n$ .

### Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

столбцами которой являются координаты образов базисных векторов, называется *матрицей линейного оператора* в заданном базисе.

Доказано, что каждому линейному оператору, действующему в  $n$ -мерном линейном пространстве, отвечает единственная квадратная матрица порядка  $n$ ; и наоборот каждая квадратная матрица порядка  $n$  задает единственный линейный оператор, действующий в этом пространстве. При этом соотношения

$$y = A x, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

с одной стороны, связывают координаты образа  $y = A x$  с координатами прообраза  $x$ , с другой стороны, описывают действие оператора, заданного матрицей  $A$ .

При изменении базиса линейного пространства матрица оператора, очевидно, изменяется. Пусть в пространстве  $X$  произошел переход от базиса  $e = \{e_1, \dots, e_n\}$  к базису  $e' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$ . Связь между матрицей  $A_e$  оператора  $A$  в базисе  $e$  и матрицей  $A_{e'}$  этого оператора в базисе  $e'$  задается формулой

$$A_{e'} = P_{e \rightarrow e'}^{-1} A_e P_{e \rightarrow e'}, \quad A_e = P_{e \rightarrow e'} A_{e'} P_{e \rightarrow e'}^{-1}$$

Здесь  $P_{e \rightarrow e'}$ ,  $P_{e \rightarrow e'}^{-1}$  - матрица перехода от базиса  $e$  к базису  $e'$  и обратная к ней.

другие сведения

## Линейные операторы. [\[ править \]](#)

Оператор  $A : X \rightarrow Y$  называется линейным, если:

1.  $A(\vec{x} + \vec{y}) = A(\vec{x}) + A(\vec{y})$ ;
2.  $A(\lambda\vec{x}) = \lambda A(\vec{x})$ .

$\Theta : \forall \vec{x} : \Theta\vec{x} = \vec{0}_y$  - нулевой оператор.

$I : X \rightarrow X; \forall \vec{x} : I\vec{x} = \vec{x}$  - тождественный оператор.

$(A_1 + A_2)\vec{x} \stackrel{def}{=} A_1\vec{x} + A_2\vec{x}$  - сумма двух операторов.

$A^2\vec{x} \stackrel{def}{=} A(A(\vec{x}))$ ;  $A^k\vec{x} = A(A^{k-1}(\vec{x}))$  - степень оператора.

$A : X \rightarrow Y, B : Y \rightarrow Z$ ;  $(AB)\vec{x} \stackrel{def}{=} B(A\vec{x})$  - умножение операторов.

### Матрица линейного оператора. [\[ править \]](#)

$$A : X \rightarrow Y, \dim(X) = m, \dim(Y) = n.$$

Возьмём базис  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m$  в  $X$ ,  $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$  базис в  $Y$ .

Покажем, что если известны результаты действия оператора  $A$  на базис, то оператор  $A$  полностью определён:

$$A(\vec{e}_i) = \vec{h}_i \in Y, i = 1 \dots m.$$

$$\forall \vec{x} \in X : \vec{x} = \sum_{j=1}^m x_j \vec{e}_j \Rightarrow A(\vec{x}) = A\left(\sum_{j=1}^m x_j \vec{e}_j\right) = \sum_{j=1}^m x_j A(\vec{e}_j) = \sum_{j=1}^m x_j \vec{h}_j.$$

$$\text{Матрица оператора } A_{ef} = \|a_{ij}\|_{n \times m} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

$$A\vec{e}_1 = a_{11}\vec{f}_1 + \dots + a_{n1}\vec{f}_n$$

...

$$A\vec{e}_m = a_{1m}\vec{f}_1 + \dots + a_{nm}\vec{f}_n$$

**Утверждение.** Если матрица  $B = \|b_{ij}\|_{m \times n}$  осуществляет действие оператора  $A$ , то  $B$  является матрицей оператора  $A$ .

**Доказательство.** в базисе  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$  вектору  $\vec{e}_1$  соответствует  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{первый столбец } B \text{ совпадает с первым столбцом } A_{ef}.$$

аналогично все остальные тоже совпадают  $\Rightarrow B = A_{ef}$

**Утверждение.** Если оператор  $C = A + B$ .  $\forall (A : L \rightarrow M; B : L \rightarrow M; C : L \rightarrow M)$ , то  $C_{ef} = A_{ef} + B_{ef}$  (матрица оператора  $C$  равна сумме матриц оператора  $A$  и  $B$ )

**Доказательство.**

$$(A_{ef} + B_{ef}) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A_{ef} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + B_{ef} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A(\vec{x}) + B(\vec{x}) = (A + B)(\vec{x}) = C(\vec{x}) = C_{ef} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

## Матрично-векторное представление

## Матрица л.л. оператора

Пусть  $\hat{A}: L \rightarrow L$ ,  $S = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$  - базис пр-ва  $L$

Подскажем операторам на базисные векторы

$$\hat{A}t_1 = a_{11}t_1 + a_{21}t_2 + \dots + a_{n1}t_n = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$$

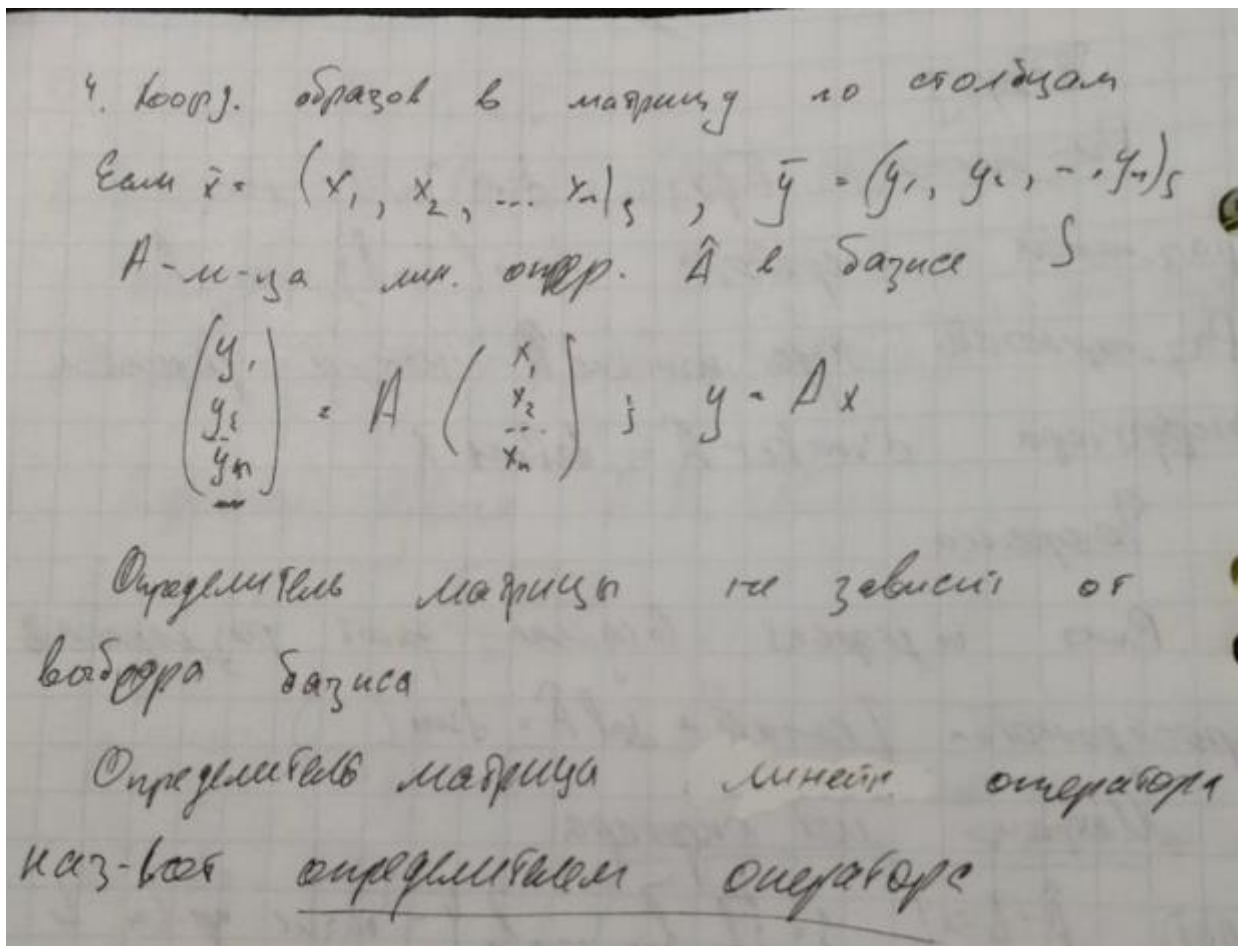
$$\hat{A}t_2 = a_{12}t_1 + a_{22}t_2 + \dots + a_{n2}t_n = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{pmatrix}$$

$$\hat{A}t_n = a_{1n}t_1 + a_{2n}t_2 + \dots + a_{nn}t_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$$

Координаты  
образов  
базисных  
векторов  
в  
базисе  $S$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ матрица оператора } \hat{A} \text{ в базисе } S$$

1. Выбираем базис
2. Действуем оператором на базисные векторы (или их образы)
3. Коор. образов в выбранном базисе



## 7. Ядро и образ линейного оператора. Обратный оператор. Матрица обратного оператора. Критерий обратимости линейного оператора.

Рассмотрим линейный оператор  $A$ , действующий в конечномерном линейном пространстве  $X$ .

Доказано, что образ  $\text{Im}(A)$  линейного оператора — линейное пространство. Размерность образа линейного оператора называется *рангом оператора*,

обозначается  $\text{Rg}(A) = r = \dim(\text{Im}(A))$ .

*Ядром линейного оператора* называется множество элементов из  $X$ , образом которых является нулевой элемент. Ядро оператора обозначают  $\text{Ker}(A)$

:  $\text{Ker}(A) = \{x \in X : A(x) = \mathbf{0}\}$ . Ядро линейного оператора — линейное пространство; размерность ядра линейного оператора называется *дефектом оператора*, обозначается  $\text{Def}(A)$ :  $d = \text{Def}(A) = \dim(\text{Ker}(A))$ .

Для линейного оператора, действующего в  $n$ -мерном линейном пространстве  $X$ , справедливы следующие утверждения:

сумма ранга и дефекта оператора равно размерности пространства, в котором действует

оператор:  $\text{Def}(A) + \text{Rg}(A) = n$ ;

ранг оператора равен рангу его матрицы;

ядро оператора совпадает с множеством решений линейной однородной системы с матрицей  $A$ , размерность пространства решений этой системы равна дефекту оператора, а ее фундаментальная система решений образует базис в ядре оператора; столбцы, входящие в базисный минор матрицы оператора образуют базис в образе оператора. Сформулированные утверждения позволяют описать структуру образа и ядра линейного оператора, заданного матрицей, используя язык матричных преобразований и общей теории линейных систем.

### Обратный оператор [\[ править \]](#)

$$A : L \rightarrow M$$

Если  $A$  - изоморфизм, то:  $\vec{y} \rightarrow \vec{x}, \forall \vec{y} \in M \exists! \vec{x} : A\vec{x} = \vec{y} \Rightarrow$  возникает некоторое отображение  $A^{-1} : A^{-1}(\vec{y}) = \vec{x}$ .

Покажем, что  $A^{-1}$  линейный оператор:

$$1) A^{-1}(\vec{y}) \rightarrow \vec{x}; A^{-1}(\vec{y}_1) \rightarrow \vec{x}_1$$

$$A^{-1}(\vec{y} + \vec{y}_1) = \vec{x} + \vec{x}_1 = A^{-1}(\vec{y}) + A^{-1}(\vec{y}_1), (\text{т.к. } A(\vec{x} + \vec{x}_1) = A(\vec{x}) + A(\vec{x}_1) = \vec{y} + \vec{y}_1).$$

$$2) A^{-1}(\lambda\vec{y}) = \lambda\vec{x} = \lambda A^{-1}(\vec{y}), (\text{т.к. } A(\lambda\vec{x}) = \lambda A(\vec{x}) = \lambda\vec{y}).$$

Условие обратимости:  $A : L \rightarrow M$  - оператор обратим  $\Leftrightarrow$  оператор  $A$  осуществляет изоморфизм.

### Матрица обратного оператора

$A : L \rightarrow M$  осуществляет изоморфизм (Ограниченный линейный оператор  $A$  между нормированными пространствами называется изоморфизмом, если существует положительное вещественное число  $c$  такое, что  $\|Ax\| \geq c\|x\|$  для всех векторов  $x$ ) ( $n = m$ ) тогда  $\exists A^{-1} : M \rightarrow L$ .

Возьмём  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$  - базис в  $L$ ,  $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$  - базис в  $M$ , тогда:

$$\forall \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i; \forall \vec{y} = A(\vec{x}) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n y_i \vec{f}_i$$

$Y = A_{ef} X \Leftrightarrow A_{ef}^{-1} Y = A_{ef}^{-1} A_{ef} X \Leftrightarrow A_{ef}^{-1} Y = X \Rightarrow$  матрица  $A_{ef}^{-1}$  осуществляет действие оператора  $A^{-1} \Rightarrow A_{ef}^{-1}$  - матрица обратного оператора.

## Линейные операторы

**Определение:** Отображение  $\hat{A}$  пространства  $V_n$  называется линейным оператором в этом пространстве, если:

- 1) Отображение  $\hat{A}$  переводит пространство  $V_n$  в себя:  $\forall \vec{x} \in V_n : \hat{A}\vec{x} \in V_n$  (вектор в вектор)
- 2) Линейность:
  - a.  $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V_n : \hat{A}(\vec{x} + \vec{y}) = \hat{A}\vec{x} + \hat{A}\vec{y}$  (образ суммы равен сумме образов)
  - b.  $\forall \vec{x} \in V_n$  и  $\forall \alpha \in R : \hat{A}(\alpha\vec{x}) = \alpha \cdot \hat{A}\vec{x}$  (постоянный множитель можно вынести за знак линейного оператора)

Свойства линейного оператора:

- 1) Всякий линейный оператор переводит ноль-вектор в ноль-вектор.
- 2) Под действием линейного оператора любая линейная комбинация системы векторов отображается в линейную комбинацию образов этих векторов.
- 3) Линейный оператор переводит линейно зависимую систему векторов в линейно зависимую систему. То есть всякий линейный оператор сохраняет линейную зависимость. Но линейно независимая система не обязательно отображается в линейно независимую систему.

Способы задания линейного оператора:

- 1) Словесное описание действия линейного оператора
- 2) При помощи матрицы линейного оператора в фиксированном базисе

Матрица линейного оператора в базисе состоит из координат образов базисных векторов в этом же базисе, записанных по столбцам.

✓ Как написать матрицу  $A$  линейного оператора  $\hat{A}$ ?

- 1) Фиксируем базис
- 2) Находим образы базисных векторов под действием линейного оператора (в векторном виде)
- 3) Находим координаты образов базисных векторов в этом же базисе
- 4) Записываем координаты образов в матрицу по столбцам

✓ Для чего нужна матрица линейного оператора? Ответ: Для нахождения образа произвольного вектора в

координатном виде. Если  $\vec{x} = x_1 \cdot \vec{e}_1 + x_2 \cdot \vec{e}_2 + x_3 \cdot \vec{e}_3$ , то  $\hat{A}\vec{x} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ , где  $y_1, y_2, y_3$  – координаты образа вектора  $\vec{x}$

в базисе  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ .

✓ Как связаны матрицы линейного оператора в разных базисах? Формула связи:  $A_{\vec{b}_2} = P^{-1} \cdot A_{\vec{b}_1} \cdot P$ , где  $P = P_{\vec{b}_1 \rightarrow \vec{b}_2}$

✓ Что такое матрица перехода от базиса к базису?

$$P_{\vec{b}_1 \rightarrow \vec{b}_2} = \begin{pmatrix} \text{координаты векторов} \\ \text{второго базиса в} \\ \text{первом базисе (по столбцам)} \end{pmatrix}$$

### Оператор простого типа

**Определение:** Оператор  $\hat{A}$  называется оператором простого типа, если его собственные векторы образуют базис в пространстве  $V_n$ . Т.е. собственных векторов ровно  $n$ -штук и они линейно независимы.

### Ядро и образ линейного оператора

**Определение:** Ядро линейного оператора – это множество всех векторов, переходящих в ноль-вектор.

$\ker \hat{A} = \{ \vec{x} \in V_n : \hat{A}\vec{x} = \vec{0} \}$  Ядро оператора образует линейное пространство.

**Определение:** Образ линейного оператора – это множество всех векторов, для которых есть прообразы:

$\text{Im } \hat{A} = \{ \vec{y} \in V_n : \exists \vec{x} \in V_n : \hat{A}\vec{x} = \vec{y} \}$ . Образ линейного оператора образует линейное пространство.

- Чтобы найти ядро линейного оператора, надо решить ОСЛУ с матрицей  $A \Rightarrow \dim \ker A = n - rA$ , где  $n$  – размерность всего пространства.
- Чтобы найти образ линейного оператора, надо матрицу линейного оператора умножить на произвольный вектор.

$$\dim V_n = \dim(\ker A) + \dim(\text{Im } A)$$

### Обратимость линейного оператора

**Определение:** Оператор  $\hat{A}^{-1}$  называется обратным для  $\hat{A}$ , если  $\forall x \in V_n : (\hat{A} \cdot \hat{A}^{-1})(\vec{x}) = (\hat{A}^{-1} \cdot \hat{A})(\vec{x}) = \vec{x}$

Критерий обратимости линейного оператора в терминах его матрицы:

**Оператор  $\hat{A}$  обратим  $\Leftrightarrow$  обратима его матрица  $A \Leftrightarrow |A| \neq 0$**

Матрицей обратного линейного оператора  $\hat{A}^{-1}$  будет  $A^{-1}$ .

✓ Схема нахождения обратной матрицей:

1)  $|A| \neq 0 \Rightarrow A$  – невырожденная, обратима

$$2) A \rightarrow A^T = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \Leftrightarrow M_{ij} \Leftrightarrow A^* = \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

$$3) A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^*$$

Связь обратимости линейного оператора  $\hat{A}$  с ядром и образом линейного оператора:

1) Критерий обратимости в терминах его ядра:

**линейный оператор  $\hat{A}$  - обратим  $\Leftrightarrow \ker \hat{A} = \{ \vec{0} \}$  (ядро нулевое),  $rA = \dim V_n$**

2) Критерий обратимости в терминах его образа:

**линейный оператор  $\hat{A}$  - обратим  $\Leftrightarrow \text{Im } \hat{A} = V_n$  (образ совпадает со всем пространством)**

Размерность ядра:  $\dim \ker \hat{A} = \dim V_n - rA$

Размерность образа:  $\dim \text{Im } \hat{A} = rA$

## 8. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора.

### Собственные значения (СЗ) и собственные векторы (СВ) линейного оператора.

**Определение:** Ненулевой вектор  $\vec{a} (\vec{a} \neq \vec{0})$  называется собственным вектором линейного оператора  $\hat{A}$ , отвечающим собственному значению  $\lambda$ , если  $\hat{A}\vec{a} = \lambda\vec{a}$

Замечания:

- 1) Собственный вектор не может быть нулевым, собственное значение может быть равно нулю
- 2) Собственный вектор пропорционален своему образу. Коэффициент пропорциональности и есть собственное значение.

✓ Как найти СЗ и СВ? Ответ:

СЗ находятся с помощью характеристического уравнения:  $|A - \lambda E| = 0$ .

СВ для СЗ  $\lambda_k$  - это решение однородной системы линейных уравнений с матрицей  $(A - \lambda_k E)$ .

Для собственных значений и собственных векторов линейного оператора справедливы следующие утверждения:

характеристический многочлен оператора, действующего в  $n$ -мерном линейном пространстве является многочленом  $n$ -й степени относительно  $\lambda$ ;

линейный оператор, действующий в  $n$ -мерном линейном пространстве имеет не более  $n$  различных собственных значений;

собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, линейно независимы;

если линейный оператор, действующий в  $n$ -мерном линейном пространстве  $X$ , имеет  $n$  различных собственных значений, то собственные векторы оператора образуют базис в пространстве  $X$ ; этот базис называют *собственным базисом* оператора;

матрица оператора в базисе из его собственных векторов имеет диагональную форму с собственными значениями на диагонали.

## 9. Линейные операторы простого типа. Достаточное условие оператора простого типа. Матрица оператора простого типа

### Оператор простого типа

**Определение:** Линейный оператор  $\hat{A}$  называется оператором простого типа, если он обладает базисом из собственных векторов в пространстве  $V_n$ . Т.е. собственных векторов ровно  $n$ -штук и они линейно независимы.

**Достаточное условие оператора простого типа:** Линейный оператор  $\hat{A}$ , действующий в линейном пространстве  $V_n$  является оператором простого типа, если он имеет  $n$  различных собственных значений, где  $n = \dim V_n$ .

### Диагонализуемость матрицы

Матрица линейного оператора  $\hat{A}$  диагонализуема  $\Leftrightarrow$  оператор  $\hat{A}$  - простого типа, т.е. имеет базис из собственных векторов. В собственном базисе матрица линейного оператора будет диагональной, по главной диагонали стоят собственные значения линейного оператора:

$$A_{\text{соб. базис}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Чтобы привести матрицу оператора к диагональному виду, надо найти собственные значения (с помощью характеристического уравнения), найти собственные векторы, убедиться, что они образуют базис и вычислить матрицу оператора в собственном базисе с помощью формулы связи матриц в разных базисах.

# 10. Квадратичные формы. Матрица квадратичной формы. Преобразование матрицы квадратичной формы при замене базиса.

## КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

**Определение.** Квадратичной формой  $n$  переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , принимающих числовые значения, называется числовая функция вида

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j = a_{11} x_1^2 + a_{12} x_1 x_2 + \dots + a_{1n} x_1 x_n + a_{21} x_2 x_1 + a_{22} x_2^2 + \dots + a_{2n} x_2 x_n + \dots + a_{n1} x_n x_1 + a_{n2} x_n x_2 + \dots + a_{nn} x_n^2,$$

где  $a_{ij}$  - числа, называемые коэффициентами квадратичной формы.

**Определение.** Матрицей квадратичной формы  $n$  переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , называется симметрическая матрица порядка  $n$ , элементы главной диагонали которой совпадают с коэффициентами при квадратах переменных, а каждый недиагональный элемент, расположенный в  $i$ -ой строке  $j$ -ом столбце, равен половине коэффициента при  $x_i x_j$  в квадратичной форме.

**Определение.** Рангом квадратичной формы называется ранг её матрицы. Квадратичная форма может быть записана в матричном виде  $f(x) = x^T A x$ , где  $A$  - матрица квадратичной формы и  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

**Квадратичная форма.**

Опр.  $A(x, y)$  - симметрич. билинейн. форма  
 Числовая ф-ция  $A(\bar{x}, \bar{x})$  наз-ся  
 квадратичн. формой, которая получается  
 из  $A(x, y)$  при  $y = x$

Обознач:  $f(x) \quad [f(x_1, x_2, \dots, x_n); Q(x_1, x_2, x_3)]$

$f(\bar{x}) = (x_1, x_2, \dots, x_n) A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$  - векторно-матрич. запись

$f(x) = x^T A x$

$f(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j, \quad a_{ij} = a_{ji}$

- 1) М-ца квадратичной формы симметрич.
- 2) любая симметрич. м-ца является м-цей единствен. квадратич. формы в заданном базисе

Рангом квадратичн. формы наз-ся ранг её м-цы в произвольном базисе.  
 Ранг м-цы в квадр. форме не измен-ся при переходе к друг. базису.

Если  $\text{rang } A < \dim L$  квадрат. форма наз-ся вырожденная

Пусть в  $L$  базис  $S = \{l_1, l_2, \dots, l_n\}$  и базис  $S' = \{l'_1, l'_2, \dots, l'_n\}$

$P_{S \rightarrow S'}$  - матрица перехода от  $S$  к  $S'$

$X_S = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$      $X_{S'} = P^{-1} X_S$      $X_S = P X_{S'}$

$\varphi(\bar{x}) = X^T A_S X = (P X')^T A_S P \cdot X' = (X')^T P^T A_S P \cdot X' =$   
 $A_{S'} = P^T A_S P$

## 11. Канонический вид квадратичной формы. Метод Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду. Закон инерции квадратичных форм.

Рассмотрим некоторое линейное преобразование  $A$  с матрицей  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ . Это симметрическое преобразование можно записать в виде:

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \quad y_2 = a_{12}x_1 + a_{22}x_2.$$

где  $y_1$  и  $y_2$  координаты вектора  $A\bar{x}$  в базисе  $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ . Очевидно, что квадратичная форма может быть записана в виде

$$\Phi(x_1, x_2) = x_1 y_1 + x_2 y_2.$$

Геометрический смысл числового значения квадратичной формы  $\Phi$  в точке с координатами  $x_1$  и  $x_2$  суть скалярное произведение  $\bar{x} \cdot A\bar{x} = \Phi$ .

Если взять другой ортонормированный базис на плоскости, то в нем квадратичная форма  $\Phi$  будет выглядеть иначе, хотя ее числовое значение в каждой геометрической точке не изменится. Если найти такой базис, в котором квадратичная форма не будет содержать координат в первой степени, а только координаты в квадрате, то квадратичную форму можно будет привести к каноническому виду.

Если в качестве базиса взять совокупность собственных векторов линейного преобразования, то в этом базисе матрица линейного преобразования имеет вид:

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

При переходе к новому базису от переменных  $x_1$  и  $x_2$  перейти к переменным  $x'_1$  и  $x'_2$ . Тогда:

$$\Phi = x_1' y_1' + x_2' y_2', \quad y_1' = a_{11}' x_1' + a_{12}' x_2', \quad y_2' = a_{21}' x_1' + a_{22}' x_2'.$$

Следовательно,  $y_1' = \lambda_1 x_1', \quad y_2' = \lambda_2 x_2'.$

Выражение  $\Phi(x_1', x_2') = \lambda_1 (x_1')^2 + \lambda_2 (x_2')^2$  называется *каноническим* *видом*  
*квадратичной формы*. Аналогично можно привести к каноническому виду квадратичную форму с большим числом переменных.

**Теорема (Лагранжа).** Для всякой квадратичной формы существует такой базис, в котором квадратичная форма имеет канонический вид.

**Теорема (закон инерции).** Положительный и отрицательный индексы формы не зависят от выбора базиса.

Доказательство. Пусть в каноническом базисе  $e_1, \dots, e_n$  квадратичная

форма имеет вид  $q(x) = \sum_{i=1}^r \lambda_i x_i^2 - \sum_{i=r+1}^s \mu_i x_i^2$ , причем  $\lambda_i > 0, \mu_j \geq 0$ . Пусть в

другом каноническом базисе  $e'_1, \dots, e'_n$  квадратичная форма имеет другой

вид  $q(x) = \sum_{i=1}^r \lambda'_i x_i^2 - \sum_{i=r+1}^s \mu'_i x_i^2$ ,  $\lambda'_i > 0, \mu'_j \geq 0$ .

Докажем независимость от базиса положительного индекса формы.

Предположим, что  $s \neq t$ , например,  $s > t$ . Рассмотрим множество

векторов  $e_1, \dots, e_r, e'_{r+1}, \dots, e'_s$ . Этим векторов в сумме больше, чем  $n$ ,

поэтому они линейно зависимы. Существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов, равная нулю:

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i e_i + \sum_{j=r+1}^s \beta_j e'_j = 0,$$

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i e_i = - \sum_{j=r+1}^s \beta_j e'_j = v.$$

Заметим, что вектор  $v$  не может быть нулевым, поскольку

векторы  $e_1, \dots, e_r$  линейно независимы и векторы  $e'_{r+1}, \dots, e'_s$  линейно независимы. Однако,

$$q(v) = q\left(\sum_{i=1}^r \alpha_i e_i\right) = \sum_{i=1}^r \lambda_i \alpha_i^2 > 0.$$

С другой стороны,

$$q(v) = q\left(\sum_{j=1}^n \beta_j e_j\right) = -\sum_{j=1}^n \mu_j \beta_j^2 \leq 0$$

Мы получили противоречие. Значит,  $s = t$ .

Аналогично можно получить, что отрицательный индекс не зависит от выбора базиса. Теорема доказана.

Если в каноническом виде квадратичной формы все коэффициенты положительны, то для любого ненулевого вектора  $v \in V$   $q(x) > 0$ . Такая форма называется положительно определенной. Отрицательно определенной называют форму, значения которой на каждом ненулевом векторе пространства отрицательны. Возникает вопрос, как определить знакоопределенность формы, не приводя ее к каноническому базису.

## 12. Знакоопределенные квадратичные формы. Их канонический вид, индексы и ранг. Критерий Сильвестра.

**Определение 6.11.** Квадратичная форма  $L(\bar{x})$  называется:

– *положительно определенной*, если для всякого ненулевого вектора  $\bar{x}$  :  $L(\bar{x}) > 0$  ;

– *отрицательно определенной*, если для всякого ненулевого вектора  $\bar{x}$  :  $L(\bar{x}) < 0$  ;

– *неположительно определенной (отрицательно полуопределенной)*, если для всякого ненулевого вектора  $\bar{x}$  :  $L(\bar{x}) \leq 0$  ;

– *неотрицательно определенной (положительно полуопределенной)*, если для всякого ненулевого вектора  $\bar{x}$  :  $L(\bar{x}) \geq 0$  ;

– *знакопеременной*, если существуют ненулевые векторы  $\bar{x}, \bar{x}'$  :  $L(\bar{x}) > 0, L(\bar{x}') < 0$  .

**Определение 6.12.** Положительно (отрицательно) определенные квадратичные формы называются *знакоопределенными*.

Неположительно (неотрицательно) определенные квадратичные формы называются *знакопостоянными*.

Тип квадратичной формы можно легко определить, приведя ее к каноническому (или нормальному) виду. Справедливы следующие две теоремы.

**Теорема 6.6.** Пусть квадратичная форма  $L(\bar{x})$  приведена к каноническому виду и имеет сигнатуру  $[p, q]$  ( $p+q=r$ ,  $r = \text{rang}(L)$ ). Тогда:

- $L(\bar{x})$  является *положительно определенной*  $\Leftrightarrow p=n$  ;
- $L(\bar{x})$  является *отрицательно определенной*  $\Leftrightarrow q=n$  ;
- $L(\bar{x})$  является *неположительно определенной*  $\Leftrightarrow p=0, q < n$  ;
- $L(\bar{x})$  является *неотрицательно определенной*  $\Leftrightarrow q=0, p < n$  ;
- $L(\bar{x})$  является *знакопеременной*  $\Leftrightarrow p > 0, q > 0$  .

Из теоремы в частности следует, что всякая знакоопределенная форма является невырожденной ( $p+q=n$ ,  $n = \text{rang}(L)$ ), всякая знакопостоянная форма является вырожденной ( $p+q=r$ ,  $r = \text{rang}(L) < n$ ). Знакопеременная форма может являться как невырожденной, так и вырожденной.

Ниже в таблице указаны примеры квадратичных форм ( $n=4$ ), записанных в каноническом (или нормальном) виде, их тип и сигнатуры.

№	Квадратичная форма	Сигнатура	Тип формы
	$L(\bar{x}) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 4x_4^2$	$[4, 0]$	Положительно определенная
	$L(\bar{x}) = -x_1^2 - 2x_2^2 - x_3^2 - 3x_4^2$	$[0, 4]$	Отрицательно определенная
	$L(\bar{x}) = -2x_1^2 - x_2^2 - 3x_4^2$	$[0, 3]$	Неположительно определенная

	$L(\bar{x}) = x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$	$[3, 0]$	Неотрицательно определенная
	$L(\bar{x}) = 2x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 3x_4^2$	$[2, 2]$	Знакопеременная, невырожденная
	$L(\bar{x}) = 2x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$	$[2, 1]$	Знакопеременная, вырожденная

**Теорема 6.7.** Пусть квадратичная форма  $L(\bar{x})$  приведена к каноническому виду  $K(y_1, y_2, \dots, y_n) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$  методом ортогональных преобразований ( $\lambda_i \in \mathbf{R}$  ( $i = \overline{1, n}$ ) – собственные значения матрицы формы  $L(\bar{x})$ ). Тогда:

- $L(\bar{x})$  является *положительно определенной*  $\Leftrightarrow$  при всех  $i = \overline{1, n}$   $\lambda_i > 0$  ;
- $L(\bar{x})$  является *отрицательно определенной*  $\Leftrightarrow$  при всех  $i = \overline{1, n}$   $\lambda_i < 0$  ;
- $L(\bar{x})$  является *неположительно определенной*  $\Leftrightarrow$  при всех  $i = \overline{1, n}$   $\lambda_i \leq 0$  ;
- $L(\bar{x})$  является *неотрицательно определенной*  $\Leftrightarrow$  при всех  $i = \overline{1, n}$   $\lambda_i \geq 0$  ;
- $L(\bar{x})$  является *знакопеременной*  $\Leftrightarrow$  среди собственных чисел есть как положительные, так и отрицательные.

## Критерий Сильвестра

Тип квадратичной формы можно определить, не приводя ее к каноническому виду. Следующий ниже критерий Сильвестра позволяет определить тип квадратичной формы по знакам угловых миноров ее матрицы.

Рассмотрим угловые миноры  $D_k = \det A^{(k)}$  ( $k = \overline{1, n}$ ), являющиеся определителями подматриц  $A^{(k)} = (a_{ij})_{i,j=1}^k$  матрицы  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$  квадратичной формы:

$$D_1 = \det A^{(1)} = a_{11}, D_2 = \det A^{(2)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \dots, D_n = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

**Теорема 6** (критерий Сильвестра знакоопределенности квадратичной формы). Квадратичная форма  $L(\bar{x}) = x^T Ax$  является:

1) положительно определенной тогда и только тогда, когда все угловые миноры  $D_k$  матрицы  $A$  положительны:

$$D_k > 0 (k = \overline{1, n})$$

2) отрицательно определенной тогда и только тогда, когда все угловые миноры  $D_k$  матрицы  $A$  отличны от нуля и их знаки чередуются, начиная со знака минус:

$$D_1 < 0, D_2 > 0, \dots, (-1)^n D_n > 0.$$

В заключение приведем таблицу оценки знакоопределенности квадратичных форм по двум основным критериям.

Квадратичная форма	Обозначение	Оценка знакоопределенности формы	
		по главным минорам матрицы квадратичной формы	по собственным значениям матрицы квадратичной формы
положительно определенная	$L(\bar{x}) > 0$	если все угловые миноры $D_k$ матрицы положительны: $D_k > 0 (k = \overline{1, n})$	если все собственные значения положительны
отрицательно определенная	$L(\bar{x}) < 0$	если все угловые миноры $D_k$ матрицы отличны от нуля и их знаки чередуются, начиная со знака минус: $D_1 < 0, D_2 > 0, \dots, (-1)^n \cdot D_n > 0$	если все собственные значения отрицательны
неотрицательно определенная	$L(\bar{x}) \geq 0$	если все угловые миноры $D_k$ матрицы неотрицательны: $D_k \geq 0 (k = \overline{1, n})$	если все собственные значения неотрицательны
неположительно определенная	$L(\bar{x}) \leq 0$	если в угловых минорах $D_k$ матрицы чередуются знаки, причем: $D_1 \leq 0, D_2 \geq 0, \dots, (-1)^n \cdot D_n \leq 0$	если все собственные значения неположительны
знакопеременная			среди собственных значений имеются как положительные, так и отрицательные

### 13. Определение евклидова пространства. Скалярное произведение в евклидовом пространстве. 14. Неравенство Коши-Буняковского. Длины векторов и углы между векторами в евклидовом пространстве.

Если каждой паре векторов  $x, y$  линейного пространства  $L$  поставлено в соответствие действительное число  $(x, y)$ , так, что для любых  $x, y$  и  $z$  из  $L$  и любого действительного числа  $\alpha$  справедливы следующие аксиомы:

$$\begin{aligned}
 (x, y) &= (y, x), \\
 (\alpha \cdot x, y) &= \alpha \cdot (x, y), \\
 (x + y, z) &= (x, z) + (y, z), \\
 (x, x) &> 0 \text{ при } x \neq 0, (0, 0) = 0,
 \end{aligned}$$

то в пространстве  $L$  определено *скалярное произведение*  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ .

Если в линейном пространстве определено скалярное произведение, то такое пространство называется *евклидовым пространством*.

Для любых трёх векторов  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  и  $\mathbf{z}$  евклидова пространства  $E$  со скалярным произведением  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  и любого действительного числа  $\alpha$  справедливо:

$$\begin{aligned}(\mathbf{x}, \alpha \mathbf{y}) &= \alpha (\mathbf{x}, \mathbf{y}), \\(\mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z}) &= (\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{x}, \mathbf{z}), \\(\mathbf{x}, \mathbf{0}) &= 0, \\(\mathbf{0}, \mathbf{x}) &= 0,\end{aligned}$$

если  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ , для любого  $\mathbf{y} \in E$ , то  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

Для любых векторов  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  евклидова пространства  $E$  со скалярным произведением  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  справедливо неравенство:

$$|(\mathbf{x}, \mathbf{y})|^2 \leq (\mathbf{x}, \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y}, \mathbf{y}).$$

Это неравенство называется *неравенство Коши-Буняковского*.

Иногда это неравенство называют *неравенством Шварца*.

Для любого вектора  $\mathbf{x}$  евклидова пространства  $E$  со скалярным произведением  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  определена *длина вектора*:

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}.$$

Для любых двух ненулевых векторов  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  евклидова пространства  $E$  со скалярным произведением  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  определен *угол между векторами  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$* :

$$\cos\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}|}$$

Для любых двух ненулевых векторов  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  евклидова пространства  $E$  со скалярным произведением  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  определено *расстояние между векторами  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$* :

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y})}.$$

Если скалярное произведение двух ненулевых векторов  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  евклидова пространства  $E$  равно нулю, то векторы называются *ортогональными векторами*:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \longleftrightarrow \mathbf{x} \perp \mathbf{y}.$$

Если длина вектора равна единице, он называется *нормированным вектором*:  $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 1$ ,  $|\mathbf{x}| = 1$ .

Если все векторы системы векторов нормированы, то система векторов называется *нормированной системой*.

Если векторы системы векторов  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$  попарно ортогональны и нормированы, то система векторов называется *ортонормированной системой*:  $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = 0$ , если  $i \neq j$ ,  $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) = 1$ .

Если  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$  — *ортонормированная система* и  $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \mathbf{e}_n$  — разложение вектора  $\mathbf{x}$  по этой системе, то  $x_i = (\mathbf{x}, \mathbf{e}_i)$ .

Ортонормированная система, состоящая из  $n$  векторов  $n$ -мерного евклидова пространства, образует базис этого пространства. Такой базис называется *ортонормированным базисом*.

Если  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$  — *ортонормированный базис*  $n$ -мерного евклидова пространства и

$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n$  — разложение вектора  $\mathbf{x}$  по этому базису, то координаты  $x_i$  вектора  $\mathbf{x}$  в ортонормированном базисе вычисляются по формулам  $x_i = (\mathbf{x}, \mathbf{e}_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Пусть  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$  — ортонормированный базис  $n$ -мерного евклидова пространства

и пусть  $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n$ ,  $\mathbf{y} = y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + \dots + y_n\mathbf{e}_n$  — разложения векторов  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  по этому базису.

Тогда скалярное произведение векторов  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  вычисляется по формуле:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \dots + x_n \cdot y_n.$$

В конечномерном евклидовом пространстве со скалярным произведением  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  и с ортонормированным базисом  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  иногда могут быть полезны следующие соотношения.

Для любых векторов  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  и  $\mathbf{z}$  справедливо неравенство треугольника

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{z}| + |\mathbf{z} - \mathbf{y}|$$

Для любых векторов  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  и  $\mathbf{z}$  справедливо тождество параллелограмма

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 + |\mathbf{x} + \mathbf{y}|^2 = 2 \cdot (|\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2).$$

Для любых векторов  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  и  $\mathbf{z}$  справедливо тождество косинусов

$$\cos^2\{\mathbf{x}, \mathbf{e}_1\} + \cos^2\{\mathbf{x}, \mathbf{e}_2\} + \dots + \cos^2\{\mathbf{x}, \mathbf{e}_n\} = 1.$$

Если  $\mathbf{x}$  — вектор-столбец координат вектора в ортонормированном базисе, то скалярное произведение скалярное произведение  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  векторов  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  можно записать в матричной форме:  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}^T$ .

Заметим, что если  $\mathbf{A}$  — квадратная матрица соответствующего размера, то  $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{y}^T$ .

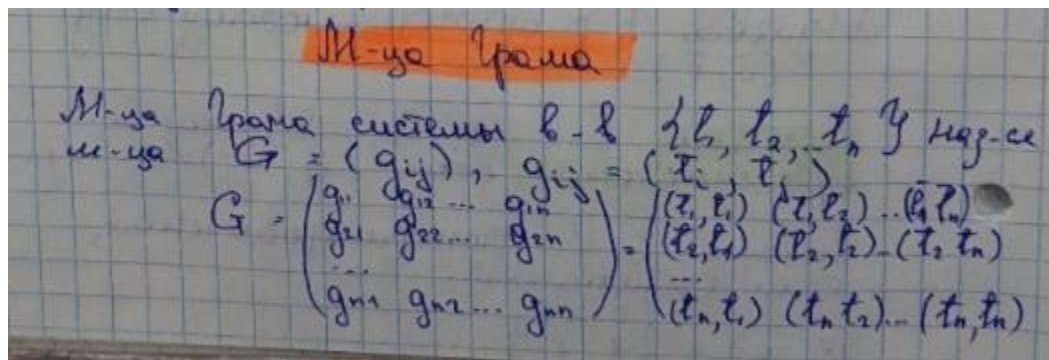
Квадратная матрица называется *ортгональной матрицей*, если её столбцы образуют ортонормированную систему векторов пространства арифметических векторов соответствующей размерности.

Строки ортгональной матрицы также образуют ортонормированную систему векторов.

Матрица  $\mathbf{H}$  ортгональна тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{H}^T \cdot \mathbf{H} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^T = \mathbf{E}, \mathbf{E} \text{ — единичная матрица.}$$

## 15. Матрица Грама скалярного произведения. Критерий матрицы Грама. Преобразование матрицы Грама при замене базиса. Процесс ортгонализации базиса.



Пусть  $E$  - евкл. пр-во

$S = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$  - базис  $E$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad G = (g_{ij})$$

м-ца Грэмма в баз.  $S$   
коорс. в-в. в баз.  $S$

$$(\bar{x}, \bar{y}) = (x_1, x_2, \dots, x_n) G \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = X^T G Y$$

Критерий м-цы Грэмма:

- 1) симметрическая
- 2) соответствующая квадратич. форма должна быть положит. определенной  
 $M_1 > 0, M_2 > 0, \dots, M_n > 0$   
( $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0$ )

Пр. 1)  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$  - нет

2)  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$  -  $M_1 = 1 > 0$   
 $M_2 < 0$  - нет

3)  $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$  -  $M_1 > 0$   
 $M_2 > 0$  - да

$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$  задана в баз.  $\{t_1, t_2\}$

Найти длины баз. в-в и угол между ними.

$$(t_1, t_1) = 1 \quad |t_1| = \sqrt{(t_1, t_1)} = 1$$

$$(t_2, t_2) = 2 \quad |t_2| = \sqrt{2}$$

$$(t_1, t_2) = (t_2, t_1) = -1$$

$$\cos(t_1, t_2) = \frac{(t_1, t_2)}{|t_1| \cdot |t_2|} = \frac{-1}{1 \cdot \sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$(t_1, t_2) = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 3\pi/4$$

Допустим, в евклидовом пространстве  $V$  заданы два базиса  $e_1, \dots, e_n$  и  $f_1, \dots, f_n$ . Обозначим через  $P$  матрицу перехода, связывающие координаты вектора в разных базисах. Пусть для определённости  $[x]_e = P[x]_f$ . Скалярное произведение не зависит от выбора базиса, поэтому  $(x, y) = [x]_f^T G_f [y]_f = [x]_e^T G_e [y]_e$ . Подставим в правую часть равенства вместо координат вектора в базисе  $e$  их выражение через координаты в базисе  $f$ . В результате придём к равенству  $[x]_f^T G_f [y]_f = [x]_f^T P^T G_e P [y]_f$ . Поскольку полученное равенство справедливо для любых векторов  $x$  и  $y$ , то выводим  $G_f = P^T G_e P$ .

## 2. Процесс ортогонализации базиса

Пусть даны  $n$  линейно независимых векторов  $f_1, f_2, \dots, f_n$ . Для построения по этим векторам  $n$  попарно ортогональных векторов  $e_1, e_2, \dots, e_n$  необходимо провести следующую процедуру ортогонализации. Положим вначале  $e_1 = f_1$ . Затем вектор  $e_2$  будем искать в виде  $e_2 = f_2 + \alpha \cdot e_1$ .

По условию ортогональности  $(e_1, e_2) = 0$ . Следовательно,  $(f_2, e_1) + \alpha \cdot (e_1, e_1) = 0$ , откуда  $\alpha = -\frac{(f_2, e_1)}{(e_1, e_1)} = -\frac{(f_2, f_1)}{(f_1, f_1)}$ . Предположим, что уже построено  $k - 1$  ортогональных векторов  $e_1, e_2, \dots, e_{k-1}$ . Будем искать  $e_k$  в виде

$$e_k = f_k + \lambda_1 \cdot e_1 + \lambda_2 \cdot e_2 + \dots + \lambda_{k-1} \cdot e_{k-1}.$$

По условию вектор  $e_k$  должен быть ортогонален  $e_1, e_2, \dots, e_{k-1}$ , что даёт  $k - 1$  уравнений для определения  $k - 1$  неизвестных  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k-1}$ . Выпишем эти уравнения с учётом ортогональности векторов  $e_1, e_2, \dots, e_{k-1}$ :

$$(f_k, e_i) + \lambda_i \cdot (e_i, e_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, (k - 1),$$

откуда получим

$$\lambda_i = -\frac{(f_k, e_i)}{(e_i, e_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, (k - 1).$$