Министерство образования Российской Федерации
Московский государственный институт электронной техники
(технический университет)

**С.Г. Кальней, А.И. Литвинов, А.А. Прокофьев,
Е.В. Ржавинская, В.А. Филиппов, Б.И. Фридлендер,
Е.В. Щелыкова**

Сборник заданий для самостоятельной работы по курсу "Линейная алгебра"

Под редакцией
кандидата физико-математических наук, доцента **С.Г. Кальнея**

Утверждено редакционно-издательским советом института
в качестве методических указаний

Москва 2004

УДК 512.64/076.1

Рецензент доц. *Т.А. Олейник*

Кальней С.Г., Литвинов А.И., Прокофьев А.А., Ржавинская Е.В., Филиппов В.А., Фридлендер Б.И., Щелыкова Е.В.

Сборник заданий для самостоятельной работы по курсу "Линейная алгебра" / Под ред. *С.Г. Кальнея*. - М.: МИЭТ, 2004. - 84 с.

Содержит систематизированную подборку задач по всем основным разделам линейной алгебры, изучаемой в техническом вузе, сгруппированную по 30 однотипных задач на определенную тему или раздел. Из задач сборника могут формироваться индивидуальные задания для самостоятельной работы студентов, варианты контрольных и самостоятельных работ. Кроме задач алгоритмического характера, в сборник включено много задач, направленных на проверку усвоения студентами понятий линейной алгебры.

Кальней *Сергей Григорьевич*
Литвинов *Александр Иванович*
Прокофьев *Александр Александрович*
Ржавинская *Елена Владимировна*
Филиппов *Виталий Андреевич*
Фридлендер *Борис Ильич*
Щелыкова *Елена Валентиновна*
Сборник заданий для самостоятельной работы по курсу "Линейная алгебра".
В авторской редакции.
Подписано в печать с оригинал-макета 20.04.04. Формат 60×84 1/16. Печать офсетная. Бумага офсетная. Гарнитура Times New Roman. Усл. печ. л. 4,87.
Уч.-изд. л. 4,2. Тираж 600 экз. Заказ 94.

Отпечатано в типографии ИПК МИЭТ.
124498, Москва, Зеленоград, проезд 4806, д. 5, МИЭТ.

Введение

О степени овладения студентом вуза определенным разделом математики чаще всего судят на основе его умений решать задачи по данному разделу. Научиться же решать задачи можно только при самостоятельном их решении. Одной из эффективных форм организации самостоятельной работы студентов по овладению навыками решения задач являются индивидуальные семестровые домашние задания по отдельным дисциплинам или разделам высшей математики. Выполнение индивидуальных семестровых домашних заданий (называемых также типовыми расчетами) рекомендовано научно-методическим советом по математике Министерства образования Российской Федерации.

Настоящий сборник заданий по линейной алгебре содержит задачи по следующим разделам: векторная алгебра, аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве, определители, матрицы, системы линейных уравнений, линейные пространства, линейные операторы, квадратичные формы, евклидовы пространства, кривые и поверхности второго порядка.

Весь материал разбит на десять разделов. Задания разделов содержат по 30 задач с однородным содержанием, что позволяет преподавателю формировать 30 вариантов семестровых заданий равной трудности. Каждый студент решает одну задачу задания в соответствии со своим вариантом семестрового домашнего задания. Номер варианта определяется преподавателем, ведущим практические занятия. Число различных заданий сборника является большим. Поэтому не предполагается, что семестровое задание содержит все задания сборника. Номера заданий, которые в данном учебном году на данном потоке должны решить студенты, определяются лектором потока.

Задачи решаются студентом самостоятельно по мере прохождения соответствующих тем и их решения сдаются на проверку преподавателю. Неверно решенные задачи возвращаются на доработку. Порядок защиты всего семестрового задания определяется преподавателем. Сдача студентом семестрового задания является необходимым условием выполнения семестрового учебного плана (получения зачета или допуска к сдаче экзамена).

Выполнение большей части заданий требует лишь знания студентом алгоритмов, основных формул и вычислительных навыков, излагаемых на лекциях и в учебниках по линейной алгебре. В сборник заданий эти сведения не помещены.

Вместе с тем, ряд разделов сборника содержит дополнительные задачи, требует для решения более глубокого понимания материала и изобретательности.

Опыт преподавания показывает, что студентами трудно усваиваются такие понятия линейной алгебры как линейное пространство, линейное преобразование. Поэтому в сборник включены задачи теоретического характера, решение которых позволяет овладеть этими понятиями.

1. Векторы

1.1. Даны координаты векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{x}$ в правом ортонормированном базисе $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$. Показать, что векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ тоже образуют базис и найти координаты вектора $\bar{x}$ в базисе $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$.

1) $\bar{x} = (-2; 4; 7)$, $\bar{a} = (3; 1; 2)$, $\bar{b} = (1; 3; 1)$, $\bar{c} = (-1; 2; 4)$;

2) $\bar{x} = (6; 12; -1)$, $\bar{a} = (1; 3; 0)$, $\bar{b} = (2; -1; 1)$, $\bar{c} = (1; -1; 2)$;

3) $\bar{x} = (1; -4; 4)$, $\bar{a} = (2; 1; -1)$, $\bar{b} = (4; 3; 2)$, $\bar{c} = (1; -1; 1)$;

4) $\bar{x} = (-9; 5; 5)$, $\bar{a} = (4; 1; 1)$, $\bar{b} = (2; -1; -3)$, $\bar{c} = (-1; 2; 1)$;

5) $\bar{x} = (-5; -5; 5)$, $\bar{a} = (-2; 3; 1)$, $\bar{b} = (1; 3; -1)$, $\bar{c} = (2; 4; 1)$;

6) $\bar{x} = (13; 2; 7)$, $\bar{a} = (5; 1; 1)$, $\bar{b} = (2; -1; 3)$, $\bar{c} = (1; 2; -1)$;

7) $\bar{x} = (-9; -1; 7)$, $\bar{a} = (3; 2; 1)$, $\bar{b} = (-2; 2; 1)$, $\bar{c} = (3; 1; -1)$;

8) $\bar{x} = (3; -3; 4)$, $\bar{a} = (3; 1; 2)$, $\bar{b} = (2; 1; 1)$, $\bar{c} = (2; -1; 4)$;

9) $\bar{x} = (3; 3; -1)$, $\bar{a} = (4; 2; 1)$, $\bar{b} = (-1; 2; 1)$, $\bar{c} = (-1; 1; 2)$;

10) $\bar{x} = (-1; 7; 4)$, $\bar{a} = (-1; 2; 1)$, $\bar{b} = (2; 1; 3)$, $\bar{c} = (1; 1; -1)$;

11) $\bar{x} = (6; 5; -14)$, $\bar{a} = (1; 1; 4)$, $\bar{b} = (0; -3; 2)$, $\bar{c} = (2; 1; -1)$;

12) $\bar{x} = (6; -1; 7)$, $\bar{a} = (1; -2; 0)$, $\bar{b} = (1; 1; 3)$, $\bar{c} = (1; 1; 4)$;

13) $\bar{x} = (5; 15; 0)$, $\bar{a} = (1; 0; 5)$, $\bar{b} = (-1; 3; 2)$, $\bar{c} = (1; -1; 1)$;

14) $\bar{x} = (2; -1; 11)$, $\bar{a} = (1; 3; -2)$, $\bar{b} = (0; -1; 2)$, $\bar{c} = (3; 3; 4)$;

15) $\bar{x} = (11; 5; -3)$, $\bar{a} = (1; -1; 2)$, $\bar{b} = (-1; 0; 1)$, $\bar{c} = (2; 5; -3)$;

16) $\bar{x} = (8; 0; 5)$, $\bar{a} = (2; 3; 1)$, $\bar{b} = (2; 2; 3)$, $\bar{c} = (4; 1; 2)$;

17) $\bar{x} = (3; 1; 8)$, $\bar{a} = (4; 2; 3)$, $\bar{b} = (3; 2; -1)$, $\bar{c} = (4; 1; 2)$;

18) $\bar{x} = (8; 1; 12)$, $\bar{a} = (1; 2; -1)$, $\bar{b} = (3; 0; 2)$, $\bar{c} = (-1; 1; 1)$;

19) $\bar{x} = (-9; -8; -3)$ $\bar{a} = (1; 4; 1)$, $\bar{b} = (-3; 2; 0)$, $\bar{c} = (1; -1; 2)$;

20) $\bar{x} = (-5; 9; -13)$ $\bar{a} = (2; 1; -2)$, $\bar{b} = (3; -1; 1)$, $\bar{c} = (4; 1; 0)$;

21) $\bar{x}=(-15;5;6)$, $\bar{a}=(0;5;1)$ $\bar{b}=(3;2;-1)$, $\bar{c}=(-1;1;0)$;

22) $\bar{x}=(8;9;4)$, $\bar{a}=(2;2;-1)$, $\bar{b}=(0;-2;1)$, $\bar{c}=(1;3;1)$;

23) $\bar{x}=(3;-4;0)$, $\bar{a}=(2;2;1)$, $\bar{b}=(1;-2;0)$, $\bar{c}=(-3;2;5)$;

24) $\bar{x}=(3;1;3)$, $\bar{a}=(2;1;3)$, $\bar{b}=(3;5;3)$, $\bar{c}=(4;2;1)$;

25) $\bar{x}=(-1;7;0)$, $\bar{a}=(2;3;1)$, $\bar{b}=(1;-1;2)$, $\bar{c}=(2;-1;0)$;

26) $\bar{x}=(11;-1;4)$, $\bar{a}=(1;-1;2)$, $\bar{b}=(3;2;0)$, $\bar{c}=(-1;1;1)$;

27) $\bar{x}=(1;3;-1)$, $\bar{a}=(-1;1;2)$, $\bar{b}=(0;3;2)$, $\bar{c}=(1;-1;1)$;

28) $\bar{x}=(4;1;3)$, $\bar{a}=(2;1;3)$, $\bar{b}=(-1;0;4)$, $\bar{c}=(3;2;4)$;

29) $\bar{x}=(3;-2;0)$, $\bar{a}=(-3;2;4)$, $\bar{b}=(-2;0;1)$, $\bar{c}=(2;3;1)$;

30) $\bar{x}=(1;1;1)$, $\bar{a}=(5;1;3)$, $\bar{b}=(0;1;2)$, $\bar{c}=(-1;1;1)$.

1.2.Даны координаты точек *A*, *B*, *C*, *D* в правой прямоугольной системе координат. Вычислить с точностью 0,001:

а) проекцию вектора $\overline{AB}$ на вектор $\overline{AD}$;

б) площадь треугольника *ABC*;

в) объем тетраэдра *ABCD*.

1) $A(1;3;6)$, $B(2;2;1)$, $C(-1;0;1)$, $D(-4;6;3)$;

2) $A(-4;2;6)$, $B(2;-3;0)$, $C(-10;5;8)$, $D(-5;2;4)$;

3) $A(7;4;2)$, $B(7;-1;-2)$, $C(3;3;1)$, $D(-4;2;1)$;

4) $A(2;1;4)$, $B(-1;5;-2)$, $C(-7;3;2)$, $D(-6;-3;6)$;

5) $A(-1;-5;2)$, $B(-6;0;3)$, $C(3;6;-3)$, $D(-10;6;7)$;

6) $A(0;-1;-1)$, $B(-2;3;5)$, $C(1;5;-9)$, $D(-1;-6;3)$;

7) $A(5;2;0)$, $B(2;5;0)$, $C(1;2;4)$, $D(-1;1;1)$;

8) $A(2;-1;-2)$, $B(1;2;1)$, $C(5;0;-6)$, $D(-10;9;-7)$;

9) $A(-2;0;-4)$, $B(-1;7;1)$, $C(4;-8;-4)$, $D(1;-4;6)$;

10) $A(4;4;5)$, $B(-5;-3;2)$, $C(-2;-6;-3)$, $D(-2;2;-1)$;

11) $A(1;2;0)$, $B(3;0;-3)$, $C(5;2;6)$, $D(8;4;-9)$;

12) $A(2;-1;2)$, $B(1;2;-1)$, $C(3;2;1)$, $D(-4;2;5)$;

13) $A(1;1;2)$, $B(-1;1;3)$, $C(2;-2;4)$, $D(-1;0;-2)$;

14) $A(2;3;1)$, $B(4;1;-2)$, $C(6;3;7)$, $D(7;5;-3)$;

15) $A(1;1;-1)$, $B(2;3;1)$, $C(3;2;1)$, $D(5;9;-8)$;

16) $A(1;5;-7)$, $B(-3;6;3)$, $C(-2;7;3)$, $D(-4;8;-12)$;

17) $A(-3;4;-7)$, $B(1;5;-4)$, $C(-5;-2;0)$, $D(2;5;4)$;

18) $A(-1;2;-3)$, $B(4;-1;0)$, $C(2;1;-2)$, $D(3;4;5)$;

19) $A(4;-1;3)$, $B(-2;1;0)$, $C(0;-5;1)$, $D(3;2;-6)$;

20) $A(1;-1;1)$, $B(-2;0;3)$, $C(2;1;-1)$, $D(2;-2;4)$;

21) $A(1;2;0)$, $B(1;-1;2)$, $C(0;1;-1)$, $D(-3;0;1)$;

22) $A(1;0;2)$, $B(1;2;-1)$, $C(2;-2;1)$, $D(2;1;0)$;

23) $A(1;2;-3)$, $B(1;0;1)$, $C(-2;-1;6)$, $D(0;-5;-4)$;

24) $A(3;10;-1)$, $B(-2;3;-5)$, $C(-6;0;-3)$, $D(1;-1;2)$;

25) $A(-1;2;4)$, $B(-1;-2;-4)$, $C(3;0;-1)$, $D(7;-3;1)$;

26) $A(0;-3;1)$, $B(-4;1;2)$, $C(2;-1;5)$, $D(3;1;-4)$;

27) $A(-1;0;3)$, $B(4;2;1)$, $C(-3;-1;0)$, $D(4;1;5)$;

28) $A(2;4;-2)$, $B(0;1;-3)$, $C(1;4;7)$, $D(-3;0;5)$;

29) $A(-1;0;2)$, $B(3;7;1)$, $C(1;2;5)$, $D(-4;0;1)$;

30) $A(2;3;4)$ $B(-5;1;0)$, $C(2;7;1)$, $D(-3;0;5)$.

Дополнительные задачи

1.3. Доказать, что медианы треугольника пересекаются в одной точке.

1.4. Доказать, что диагонали ромба взаимно перпендикулярны.

1.5. Дан параллелограмм *ABCD.* Показать, что площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{AC}$ и $\overline{BD}$, в два раза больше площади параллелограмма *ABCD*.

1.6. Дан параллелепипед. Показать, что объем параллелепипеда, построенного на выходящих из одной вершины диагоналях граней данного параллелепипеда, равен удвоенному объему данного параллелепипеда.

1.7. Найти угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если вектор $2\overline{a}+\overline{b}$ перпендикулярен вектору $\overline{a}-2\overline{b}$, а вектор $\overline{a}+2\overline{b}$ перпендикулярен вектору $\overline{a}-\overline{b}$ (вектор $\overline{a}$ - ненулевой).

1.8. Найти острый угол между медианами прямоугольного равнобедренного треугольника, проведенными из вершин острых углов.

1.9. Доказать, что для любых векторов $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ векторы $\overline{a}-\overline{b}$, $\overline{b}-\overline{c}$ и $\overline{c}-\overline{a}$ компланарны.

1.10. Какому условию должен удовлетворять векторы $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$, чтобы из них можно было составить треугольник?

1.11. Доказать, что можно построить треугольник, стороны которого равны и параллельны медианам данного треугольника. Найти отношение площадей этих треугольников.

1.12. Доказать равенство $1+\cos\frac{2\pi}{n}+\cos\frac{4\pi}{n}+\ldots+\cos\frac{2\pi(n-1)}{n}=0,\ n=2,3\ldots$

1.13. Доказать, что радиус – вектор центра правильного многоугольника есть среднее арифметическое радиусов – векторов его вершин.

1.14. Доказать, что если диагонали выпуклого четырехугольника делят друг друга пополам, то четырехугольник – параллелограмм.

1.15. Найти координаты центра тяжести однородной пластины, имеющей форму четырехугольника *ABCD* с вершинами в точках *A*(3; 1), *B*(7; 3), *C*(0; 4), *D*(-1; 2).

1.16. Из одной точки проведены векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Найти координаты единичного вектора $\overline{c}$, который делит пополам угол между $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если $\overline{a}=(-3;0;4), \overline{b}=(5;-2;-14)$.

1.17. Длины сторон параллелограмма относятся как 1:2, а угол между ними равен $\frac{\pi}{4}$. Найти острый угол между диагоналями параллелограмма.

1.18. Доказать, что векторы $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ компланарны, если $\overline{a}\times\overline{b}+\overline{b}\times\overline{c}+\overline{c}\times\overline{a}=\overline{0}$.

Доказать тождества.

1.19. $\left[\bar{a},\left[\bar{b},\bar{c}\right]\right]=\bar{b}\left(\bar{a},\bar{c}\right)-\bar{c}\left(\bar{a},\bar{b}\right)$;

1.20. $\left[\bar{a},\bar{b}\right]\left[\bar{c},\bar{d}\right]=\left(\bar{a}\ \bar{c}\right)\left(\bar{b}\ \bar{d}\right)-\left(\bar{a}\ \bar{d}\right)\left(\bar{b}\ \bar{c}\right)$;

1.21. $\left[\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right]+\left[\vec{b},\left[\vec{c},\vec{a}\right]\right]+\left[\vec{c},\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right]=0$;

1.22. $\left[\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right]=\vec{b}\left(\vec{a}\,\vec{c}\right)-\vec{a}\left(\vec{b}\,\vec{c}\right)$;

1.23. $\left[\left[\vec{a},\vec{b}\right],\left[\vec{c},\vec{d}\right]\right]=\vec{c}<\vec{a},\vec{b},\vec{d}>-\vec{d}<\vec{a},\vec{b},\vec{c}>$;

1.24. $<\left[\vec{a},\vec{b}\right],\left[\vec{b},\vec{c}\right],\left[\vec{c},\vec{a}\right]>=<\vec{a},\vec{b},\vec{c}>^2$;

1.25. $\left[\vec{a},\vec{b}\right]\left[\vec{c},\vec{d}\right]+\left[\vec{a},\vec{c}\right]\left(\vec{d}\ \vec{b}\right)+\left[\vec{a}\ \vec{d}\right]\left[\vec{b}\ \vec{c}\right]=0$;

1.26. $\left[\vec{a},\left[\vec{b},\left[\vec{c},\vec{d}\right]\right]\right]=\left[\vec{a},\vec{c}\right]\left(\vec{b}\,\vec{d}\right)-\left[\vec{a},\vec{d}\right]\left(\vec{b}\,\vec{c}\right)$;

1.27. $\left[\vec{a},\vec{b}\right]^2\left[\vec{a},\vec{c}\right]^2-\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right]\left[\vec{a},\vec{c}\right]\right)^2=\vec{a}^2<\vec{a},\vec{b},\vec{c}>_2$;

1.28. $<\vec{a},\vec{b},\vec{c}><\vec{a},\vec{d},\vec{e}>=<\vec{a},\vec{b},\vec{d}><\vec{a},\vec{c},\vec{e}>-<\vec{a},\vec{b},\vec{e}><\vec{a},\vec{c},\vec{d}>$;

2. Прямая на плоскости

2.1. Даны уравнения двух прямых. Показать, что один из образованных ими смежных углов – острый, и найти уравнение биссектрисы этого угла. Сделать чертеж.

1) $3x–4y–2=0$, $8x–6y+15=0$;
2) $2x+3y+9=0$, $3x+2y–10=0$;
3) $5x–12y–24=0$, $5x+12y–4=0$;
4) $2x+y+5=0$, $x+2y+9=0$;
5) $3x–2y+10=0$, $3x+2y+9=0$;
6) $x–7y+5=0$, $5x+5y+3=0$;
7) $7x+y=0$, $–x+y=0$;
8) $2x–3y–5=0$, $6x–4y+7=0$;
9) $x–3y+5=0$, $3x–y+8=0$;
10) $3x+4y+2=0$, $8x+6y–15=0$;
11) $2x–3y–9=0$, $3x–2y+10=0$;
12) $5x+12y+24=0$, $5x–12y+4=0$;
13) $2x–y–5=0$, $x–2y–6=0$;
14) $3x+2y–10=0$, $3x–2y–9=0$;
15) $x+7y–5=0$, $5x–5y–3=0$;
16) $2x+3y+5=0$, $6x+4y–7=0$;
17) $x+3y–5=0$, $3x+y–8=0$;

Даны координаты вершин *A* и *B* треугольника *ABC* и точки M пересечения его высот. Найти координаты вершины *C*. Сделать чертеж.

18) *A* (–10; 2), *B* (6; 4), *M* (5; 2);
19) *A* (–6; 2), *B* (2;–2), *M* (1; 2);
20) *A* (3;–1), *B* (5; 7), *M* (4;–1);
21) *A* (2;6), *B* (3;–1), *M* (–1; 2);
22) *A* (–2; 1), *B* (2; 5), *M* (0,5; 0,5);
23) *A* (5; 2), *B* (5; –2), *M* (17/6; 20/3);
24) *A* (3; 2), *B* (2; 3), *M* (–7; –13);
25) *A* (9; –3), *B* (–5; –5), *M* (0; 0);
26) *A* (–1; 3), *B* (7; 5), *M* (–1; 4);
27) *A* (10;–2), *B* (–6; –4), *M* (–5;–2);

28) A (6; –2), B (–2; 2), M (–1; –2);

29) A (–3; 1), B (–5; –7), M (–4; 1);

30) A (–2;–6), B (–3;1), M (1;–2).

2.2. Даны координаты вершин треугольника ABC. Найти уравнение стороны BC, а также уравнения биссектрисы, медианы и высоты, проведенных из вершины A. Все уравнения прямых дать в канонической форме.

1) A(1; 1), B(4; –3), C(7; 9);

2) A(1; 1), B(5; –2), C(7; 9);

3) A(1; 3), B(4; 7), C(5; 0);

4) A(0; –1), B(–6; –9), C(–4; 2);

5) A(6; –1), B(9; 3), C(–2; 5);

6) A(4; –1), B(7; –5), C(10; 7);

7) A(1; 2), B(–5; –6), C(–3; 5);

8) A(–1; 2), B(3; –1), C(–9; –4);

9) A(3; –1), B(7; –4), C(6; 3);

10) A(1; –1), B(–5; –9), C(–3; 2);

11) A(3; 8), B(7; 5), C(–5; 2);

12) A(2; 1), B(–1; 5), C(10; 7);

13) A(–1; 1), B(–7; –7), C(–5; 4);

14) A(1; 3), B(5; 0), C(–7; –3);

15) A(3; 2), B(0; 6), C(11; 8);

16) A(1; –1), B(4; 3), C(–7; 5);

17) A(4; –2), B(8; –5), C(–4; –8);

18) A(4; 1), B(1; 5), C(12; 7);

19) A(–1; 1), B(2; 3), C(–9; 5);

20) A(1; –2), B(4; –6), C(7; 6);

21) A(6; 2), B(3; 6), C(14; 8);

22) A(–3; 2), B(0; 6), C(–12; 8);

23) $A(6; 1)$, $B(9; –3)$, $C(12; 9)$;

24) $A(1; 5)$, $B(5; 2)$, $C(4; 9)$;

25) $A(–1;–1)$, $B(–4;–3)$, $C(–7; 9)$;

26) $A(–6; 1)$, $B(–9;–3)$, $C(2;–5)$;

27) $A(–4; 1)$, $B(–7; 5)$, $C(–10;–7)$;

28) $A(–1;–2)$, $B(5; 6)$, $C(3;–5)$;

29) $A(–3;–8)$, $B(–7;–5)$, $C(5;–2)$;

30) $A(–2;–1)$, $B(1;–5)$, $C(–10;–7)$.

Дополнительные задачи

2.3. В треугольнике с вершинами $A(–2; 0)$, $B(6; 6)$ и $C(1;–4)$ найти длину биссектрисы AE.

2.4. Показать, что точки $A(–4; –3)$, $B(–5; 0)$, $C(5; 6)$ и $D(1; 0)$ служат вершинами трапеции, и найти ее высоту.

2.5. На оси Ox найти точку C, сумма расстояний которой до точек $A(–1; 8)$ и $B(5; 4)$ была бы наименьшей.

2.6. Точка $A(2;–5)$ является вершиной квадрата, одна из сторон которого лежит на прямой $x–2y–7=0$. Найти площадь этого квадрата.

2.7. Найти прямую, которая проходит через точку $P(12; 6)$ и отсекает от координатного угла треугольник, площадь которого равна 150 кв.ед. Сколько имеется решений?

2.8. Вершинами треугольника являются точки $A(20; 15)$, $B(–16; 0)$, $C(–8; –6)$. Найти радиусы и координаты центров вписанной и описанной окружностей.

2.9. Доказать, что через точку $P(2; 5)$ можно провести две прямые так, чтобы их расстояния от точки $Q(5; 1)$ были равны 3. Составить уравнения этих прямых.

2.10. Доказать, что через точку $C(7;–2)$ можно провести только одну прямую так, чтобы ее расстояние от точки $A(4; –6)$ было равно 5. Составить уравнение этой прямой.

2.11. Доказать, что через точку $B(4;–5)$ невозможно провести прямую так, чтобы расстояние ее от точки $C(–2; 3)$ было равно 12.

2.12. Определить, лежит начало координат внутри или вне треугольника, стороны которого даны уравнениями $7x–5y–11=0$, $8x+3y+31=0$, $x+8y–19=0$.

2.13. Луч света направлен по прямой $x–2y+5=0$. Дойдя до прямой $3x–2y+7=0$, луч от нее отразился. Составить уравнение прямой, на которой лежит отраженный луч.

2.14. Составить уравнения сторон треугольника, если даны координаты одной из вершин $A(1; 3)$ и уравнения двух медиан $x–2y+5=0$ и $y–1=0$.

2.15. Определить острый угол, образованный при пересечении прямой $3x–y–1=0$ и окружности $(x-2)^2+y^2=5$.

3. Плоскость и прямая в пространстве

3.1. Даны координаты точки M и уравнение плоскости. Найти координаты точки, симметричной точке M относительно плоскости.

1) M (1; 0; 1), $4x+6y+4z-25=0$;
2) M (–1; 0;–1), $2x+6y-2z+11=0$;
3) M (0; 2; 1), $2x+4y-3=0$;
4) M (2; 1; 0), $y+z+2=0$;
5) M (–1; 2; 0), $4x-5y-z-7=0$;
6) M (2; –1; 1), $x-y+2z-2=0$;
7) M (1; 1; 1), $x+4y+3z+5=0$;
8) M (1; 2; 3), $2x+10y+10z-1=0$;
9) M (0;–3;–2), $2x+10y+10z-1=0$;
10) M (1; 0;–1), $2y+4z-1=0$;
11) M (3;–3;–1), $2x-4y-4z-13=0$;
12) M (–2;–3; 0), $x+5y+4=0$;
13) M (2;–2;–3), $y+z+2=0$;
14) M (–1; 0; 1), $2x+4y-3=0$;
15) M (3; 3; 3), $8x+6y+8z-25=0$;
16) M (–2; 0; 3), $2x-2y+10z+1=0$.

Даны координаты точки M и уравнения прямой. Найти координаты точки, симметричной точке M относительно прямой.

17) M (0;–3;–2), $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1{,}5}{-1}=\dfrac{z}{1}$;

18) M (2; –1; 1), $\dfrac{x-4{,}5}{2}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z-2}{2}$;

19) M (1; 1; 1), $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1{,}5}{-2}=\dfrac{z-1}{1}$;

20) M (1; 2; 3), $\dfrac{x-0{,}5}{0}=\dfrac{y+1{,}5}{-1}=\dfrac{z-1{,}5}{1}$;

21) M (1; 0;–1), $\dfrac{x-3{,}5}{2}=\dfrac{y-1{,}5}{2}=\dfrac{z}{0}$;

22) M (2; 1; 0), $\dfrac{x-2}{0}=\dfrac{y+1{,}5}{-1}=\dfrac{z+0{,}5}{1}$;

23) M (–2;–3; 0), $\frac{x+0,5}{1}=\frac{y+1,5}{0}=\frac{z-0,5}{1}$;

24) M (–1; 0;–1), $\frac{x}{-1}=\frac{2y-3}{0}=\frac{z-2}{1}$;

25) M (0; 2; 1), $\frac{2x-3}{4}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{1}$;

26) M (3;–3;–1), $\frac{x-6}{5}=\frac{2y-7}{8}=\frac{2z+1}{0}$;

27) M (0; 3; 2), $\frac{x+1}{1}=\frac{y-1,5}{-1}=\frac{z}{1}$;

28) M (0; 2;–1), $\frac{x+4,5}{2}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+2}{2}$;

29) M (–1;–1;–1), $\frac{x+2}{1}=\frac{y-1,5}{-1}=\frac{z-1}{1}$;

30) M (2; 3; 0), $\frac{x-0,5}{1}=\frac{y-1,5}{0}=\frac{z-0,5}{1}$.

3.2. Даны уравнения двух прямых. Установить, скрещиваются, пересекаются или параллельны эти прямые; если прямые параллельны или пересекаются, написать уравнение содержащей их плоскости; если прямые скрещиваются, написать уравнение плоскости, содержащей первую прямую и параллельной второй прямой.

1) $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{1}$, $\frac{x}{3}=\frac{y-18}{1}=\frac{z}{2}$;

2) $\frac{x+2}{3}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z+3}{4}$, $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-1}{4}$;

3) $\frac{x-3}{5}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+2}{3}$, $\frac{x+2}{1}=\frac{y-5}{3}=\frac{z+2}{2}$;

4) $\frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{4}$, $\frac{x}{2}=\frac{2y-13}{2}=\frac{z}{3}$;

5) $\frac{x+4}{0}=\frac{y+2}{5}=\frac{z}{4}$, $\frac{x+1}{0}=\frac{y-7}{5}=\frac{z-3}{4}$;

6) $\frac{x+1}{-2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{3}$, $\frac{x-3}{3}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+1}{5}$;

7) $\frac{x+1}{-2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{3}$, $\frac{x-3}{3}=\frac{y+2}{1}=\frac{2z-1}{10}$;

8) $\frac{x-3}{1}=\frac{y}{0}=\frac{2z-1}{3}$, $\frac{x+4}{2}=\frac{y-3}{0}=\frac{z+2}{5}$;

9) $\frac{x-3}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z+1}{1}$, $\frac{x-1}{2}=\frac{y+5}{3}=\frac{z+10}{-2}$;

10) $\frac{x-5}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+1}{3}$, $\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{1}$;

11) $\frac{x+4}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-2}{4}$, $\frac{x-2}{1}=\frac{2y+3}{3}=\frac{z+1}{2}$;

12) $\frac{x-1}{-2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-3}{2}$, $\frac{x-3}{-1}=\frac{y+5}{3}=\frac{z+1}{1}$;

13) $\frac{x-4}{3}=\frac{y-2}{5}=\frac{z+1}{1}$, $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{5}=\frac{z+5}{2}$;

14) $\frac{3x-6}{4}=\frac{y-1}{4}=\frac{z}{1}$, $\frac{x+2}{4}=\frac{y-5}{12}=\frac{z-2}{3}$;

15) $\frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+2}{-2}$, $\frac{x+7}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{-3}$;

16) $\frac{x+2}{-1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{2}$, $\frac{x-1}{-2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-6}{1}$;

17) $\frac{x-3}{7}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+5}{-1}$, $\frac{x+3}{7}=\frac{y+4}{2}=\frac{z-3}{-1}$;

18) $\frac{x+5}{2}=\frac{y+3}{5}=\frac{z+4}{-3}$, $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{-1}$;

19) $\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+1}{7}$, $\frac{x-2}{1}=\frac{y+4}{2}=\frac{z-8}{3}$;

20) $\frac{x+1}{2}=\frac{5y-1}{2}=\frac{z}{3}$, $\frac{x-2}{10}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{15}$;

21) $\frac{x-3}{-3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-5}{4}$, $\frac{x-1}{2}=\frac{y+5}{3}=\frac{z-1}{4}$;

22) $\frac{x+4}{-2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{2}$, $\frac{x+5}{7}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-1}{3}$;

23) $\frac{4x-3}{2}=\frac{y-5}{1}=\frac{z+1}{3}$, $\frac{x+2}{1}=\frac{y+4}{2}=\frac{z+2}{6}$;

24) $\frac{x-2}{5}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-7}{3}$, $\frac{x+7}{3}=\frac{y-3}{5}=\frac{z-4}{-2}$;

25) $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{5}=\frac{z+2}{-2}$, $\frac{x-7}{3}=\frac{y}{-3}=\frac{z}{2}$;

26) $\frac{x-5}{7}=\frac{y+3}{3}=\frac{z-1}{4}$, $\frac{x+1}{7}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+3}{4}$;

27) $\frac{x+2}{3}=\frac{y+1}{0}=\frac{z-3}{2}$, $\frac{x+3}{0}=\frac{y+2}{3}=\frac{3z+14}{15}$;

28) $\frac{x-1}{-2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+5}{3}$, $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{0}$;

29) $\frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{-3}=\frac{z-4}{4}$, $\frac{x+2}{2}=\frac{y+3}{-3}=\frac{z+4}{4}$;

30) $\frac{x+3}{2}=\frac{y-3}{3}=\frac{z+3}{0}$, $\frac{x-9}{-2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{2}$.

Дополнительные задачи

3.3. Ребро куба равно 1. Найти кратчайшее расстояние между диагональю куба и непересекающей ее диагональю грани.

3.4. Даны вершины тетраэдра $A(0;\ 0;\ 2)$, $B(3;\ 0;\ 5)$, $C(1;\ 1;\ 0)$, $D(4;\ 1;\ 2)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC.

3.5. Найти кратчайшее расстояние между прямыми $\frac{x+1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{2}$ и $\frac{x}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{4}$.

3.6. Вычислить кратчайшее расстояние от точки $P(10;\ 0;\ 25)$ до точек прямой $\begin{cases} 2x+2y+z+25=0, \\ 3x+2y+2z=0. \end{cases}$

3.7. Найти кратчайшее расстояние между точками прямой $\frac{x+1}{2}=\frac{y+5}{2}=\frac{z+8}{3}$ и плоскости $2x+y-2z-13=0$.

3.8. На плоскости Oxy найти точку C, сумма расстояний которой до точек $A(-1;\ 2;\ 5)$ и $B(11;\ -16;\ 10)$ была бы наименьшей.

3.9. Боковые стороны равнобедренного треугольника имеют общую вершину $A(3,\ 4,\ 5)$, две другие вершины лежат на осях Ox и Oy, а плоскость треугольника параллельна оси Oz. Найти углы треугольника.

3.10. Вершинами треугольника являются точки $A(1;\ 2;\ 3)$, $B(1;\ 5;-1)$, $C(5;\ 3;-5)$. Найти радиусы и координаты центров вписанной и описанной окружностей.

3.11. Вершинами тетраэдра являются точки $A(1;\ 2;\ 3)$, $B(-2;\ 8;\ 9)$, $C(3;\ 4;\ 2)$. Найти радиусы и координаты центров вписанной и описанной сфер.

3.12. При каких значениях a плоскости $x+ay+z-1=0$ и $ax+9y+\frac{a^3}{9}z+3=0$:

1) пересекаются; 2) параллельны; 3) совпадают?

3.13. При каких значениях a прямая $\frac{x}{1}=\frac{y}{a}=\frac{z-2}{-1}$:

1) пересекает плоскость $3a^2x+ay+z4a=0$;
2) параллельна этой плоскости; 3) лежит в этой плоскости?

3.14. Составить уравнения движения точки $M(x,\ y,\ z)$, которая, имея начальное положение $M_0(3;-1;-5)$, движется прямолинейно и равномерно в направлении вектора $\bar{S}=(-2;6;3)$ со скоростью $v=21$.

3.15. На сфере $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=25$ найти точку M, ближайшую к плоскости $3x-4z+19=0$, и вычислить расстояние от точки M до этой плоскости.

4. Определители

4.1. Вычислить определители:

а) разложением по строке или столбцу;

б) приведением к треугольному виду.

1) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$;   2) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$;   4) $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$;

5) $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$;   6) $\begin{vmatrix} -3 & -5 & 4 & 7 \\ 9 & 8 & -5 & -8 \\ 3 & 2 & -3 & -4 \\ 6 & 7 & -2 & -5 \end{vmatrix}$;

7) $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}$;   8) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$;

9) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}$;   10) $\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$;

11) $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$;   12) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$;

13) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 4 & 3 \\ -4 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; 14) $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$;

15) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -3 & -4 \\ -3 & -5 & 4 & 7 \\ 6 & 7 & -2 & -5 \\ 9 & 8 & -5 & -8 \end{vmatrix}$; 16) $\begin{vmatrix} 2 & -5 & -7 & 5 \\ 3 & -3 & -5 & 8 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \\ 2 & 5 & 7 & 5 \end{vmatrix}$;

17) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$; 18) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 10 & 6 & 3 & 6 \end{vmatrix}$;

19) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 3 \\ -1 & 4 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$; 20) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & -3 \\ -5 & -4 & -9 & 2 \\ 4 & 7 & 8 & -5 \\ 3 & 5 & 5 & 3 \end{vmatrix}$;

21) $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 10 & 7 & 10 & 8 \end{vmatrix}$; 22) $\begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 & -2 \\ -4 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & -9 & -3 & 7 \\ 2 & -6 & -3 & 2 \end{vmatrix}$;

23) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 4 \\ 9 & 8 & 13 & 12 \\ 4 & 3 & 8 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$; 24) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$;

25) $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$; 26) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \\ 4 & -1 & -3 & 1 \end{vmatrix}$;

27) $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$; 28) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 6 & 10 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \\ 3 & -1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 6 \end{vmatrix}$;

29) $\begin{vmatrix} 7 & 3 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & -5 & 8 & 6 \\ -4 & 2 & 9 & 1 \end{vmatrix}$; 30) $\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & 4 & 5 \\ 4 & 8 & -2 & 5 \\ 5 & 0 & 3 & 5 \end{vmatrix}$.

Дополнительные задачи

4.2. Вычислить определители n-го порядка:

1.а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 5 & \dots & n-1 & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 2n-3 & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & 2n-1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} b & b & \dots & b & a \\ b & b & \dots & a & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & a & \dots & b & b \\ a & b & \dots & b & b \end{vmatrix}$;

2.а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2-x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 3-x & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n-x \end{vmatrix}$;

3.а) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} x & y & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & y & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x & y \\ y & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}$;

4.а) $a_{ij} = \min\limits_{(1 \le i,\ j \le n)} (i, j)$; б) $\begin{vmatrix} b & b & b & b & \dots & b & a \\ b & b & b & b & \dots & a & b \\ b & b & b & b & \dots & b & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & a & b & b & \dots & b & b \\ b & b & b & b & \dots & b & b \end{vmatrix}$;

5.а) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 0 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & n-1 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ n & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \end{vmatrix}$;

6.а) $a_{ij} = \max\limits_{(1 \le i,\ j \le n)} (i, j)$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & a \end{vmatrix}$;

7.а) $\begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n & n \\ n & 2 & n & \dots & n & n \\ n & n & 3 & \dots & n & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & n & \dots & n-1 & n \\ n & n & n & \dots & n & n \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ -x & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -x & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -x & x \end{vmatrix}$;

8.а) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & \dots & 2 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 3 & 3 & 3 & \dots & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & \dots & 3 & 0 \end{vmatrix}$;

б) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & n-3 & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & \dots & n-4 & n-3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n-2 & n-3 & n-4 & \dots & 0 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$;

9.а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b & b \\ b & a & b & \dots & b & b \\ b & b & a & \dots & b & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & a & b \\ b & b & b & \dots & b & a \end{vmatrix}$;

10.а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & -n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & -n & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & -n & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -n & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & \dots & x & x \\ 1 & x & 0 & \dots & x & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x & x & \dots & 0 & x \\ 1 & x & x & \dots & x & 0 \end{vmatrix}$.

5. Матрицы

5.1. Найти обратную матрицу.

1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

7) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$; 8) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 9) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$;

10) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; 11) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; 12) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

13) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; 14) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; 15) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

16) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; 17) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -4 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$; 18) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

19) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 20) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; 1) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & -2 \end{pmatrix}$;

22) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; 23) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; 24) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

25) $\begin{pmatrix} -25 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; 26) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & -24 \end{pmatrix}$; 27) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -22 \end{pmatrix}$;

28) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 26 \end{pmatrix}$; 29) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & -14 \end{pmatrix}$; 30) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$.

5.2. Найти ранг матрицы:
а) методом окаймляющих миноров;

б) приведением к ступенчатому виду.

1) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -3 & 4 \\ 1 & 4 & 10 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & 17 & 3 & 4 \\ -5 & 2 & 8 & 7 & -25 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 0 & -4 \\ 4 & 4 & 3 & 6 & 5 \\ 6 & 6 & 1 & 2 & 3 \\ -6 & -7 & -1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 8 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 & -3 \\ 2 & 5 & 5 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 1 \\ 9 & 4 & 4 & 6 & -3 \\ 3 & 3 & 3 & 2 & 5 \\ -3 & -3 & -7 & 2 & -5 \end{pmatrix}$;

7) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 1 & 6 \\ 4 & -1 & 3 & 0 & 5 \\ 3 & 3 & 4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$; 8) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 6 & -2 & -1 \end{pmatrix}$;

9) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & -7 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & -4 & 6 \\ 2 & 3 & 2 & -3 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; 10) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 7 & 2 & 10 \\ 3 & 5 & 11 & 3 & 16 \\ 4 & 7 & 13 & 4 & 18 \end{pmatrix}$;

11) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & -2 & 3 \\ 6 & 6 & 5 & -7 & 2 \\ 4 & 3 & 4 & -8 & 1 \end{pmatrix}$; 12) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & -2 & -3 \\ 1 & 9 & -11 & 16 & 4 \\ 5 & 10 & -6 & 17 & 13 \end{pmatrix}$;

13) $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 11 & 1 \\ 4 & -1 & -3 & 9 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 4 & 7 & -1 \end{pmatrix}$; 14) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 5 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$;

15) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & -1 & -1 \\ 5 & 1 & 3 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; 16) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & 4 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -8 & 7 & -2 & 3 \end{pmatrix}$;

17) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -3 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & -3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$; 18) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 3 & 7 \\ 3 & -2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & -1 & 3 & 0 & -1 \\ -5 & -4 & 1 & -10 & -19 \end{pmatrix}$;

19) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 & -4 & 2 \\ 4 & -1 & 1 & -1 & 6 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; 20) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 5 & -1 & -6 & -1 \\ 2 & 3 & -2 & -5 & -2 \end{pmatrix}$;

21) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 11 & 5 & 3 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$; 22) $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 7 & 4 & 8 \\ 5 & 9 & 8 & 7 & 7 \\ 1 & -2 & -3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$;

23) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 & 4 & 3 \\ 5 & 1 & -1 & 7 & 8 \\ 7 & 7 & 9 & 1 & 22 \end{pmatrix}$; 24) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 6 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 9 & 7 & 5 & 5 & 9 \end{pmatrix}$;

25) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & -2 & -1 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -7 & 1 & -7 & 4 \end{pmatrix}$; 26) $\begin{pmatrix} 2 & -6 & 2 & 4 & 5 \\ -1 & -3 & 0 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & 9 \\ -3 & -9 & 5 & 6 & -7 \end{pmatrix}$;

27) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & -1 & 2 \\ -5 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ 8 & -5 & 3 & 4 & -3 \\ 2 & 2 & -5 & -10 & 7 \end{pmatrix}$; 28) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & -2 & -3 \\ 2 & -3 & 1 & -4 & -2 \\ 1 & 9 & 8 & -2 & 2 \end{pmatrix}$;

29) $\begin{pmatrix} 6 & -8 & -7 & 13 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 15 \\ 2 & -1 & 0 & 5 & 9 \\ 1 & 10 & -6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; 30) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 9 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & -3 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 3 & -1 & -5 \end{pmatrix}$.

5.3.Решить матричное уравнение.

1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

2) $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$;

4) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$;

6) $X\cdot\begin{pmatrix}2 & 4 & 3\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 3 & 1 & -1\\ 0 & 4 & -2\end{pmatrix}$;

7) $\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1 & -1 & 4\\ -2 & 0 & 7\\ -1 & 3 & -4\end{pmatrix}$;

8) $X\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 3 & -2\\ 1 & -4 & 1\end{pmatrix}$;

9) $\begin{pmatrix}-1 & 2 & 4\\ 0 & 2 & 3\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ -1 & 3 & 0\\ 2 & -2 & 5\end{pmatrix}$;

10) $X\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ -4 & 2 & 5\\ 2 & -1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 3 & -1 & 2\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$;

11) $\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}3 & 0 & -1\\ 2 & -4 & 1\\ -1 & -3 & 2\end{pmatrix}$;

12) $X\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -3 & -2 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ -1 & 3 & -2\end{pmatrix}$;

13) $\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ -3 & 0 & 1\\ -1 & 3 & -2\end{pmatrix}$;

14) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$;

15) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

16) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$;

17) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$;

18) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$;

19) $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$;

20) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$;

21) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$;

22) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$;

23) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$;

24) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$;

25) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

26) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}$;

27) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 4 & -2 & 2 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$;

28) $X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}$;

29) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$;

30) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

6. Системы линейных уравнений

6.1. Решить системы линейных уравнений по правилу Крамера. Сделать проверку.

1) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 1, \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 = -5. \end{cases}$

2) $\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = -1. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$

4) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$

6) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 29, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10. \end{cases}$

7) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 13, \\ x_1 - x_2 = -1, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$

8) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ -x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -1, \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 2. \end{cases}$

9) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4, \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$

10) $\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4, \\ -x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 1. \end{cases}$

11) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = -8, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = -9, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -9. \end{cases}$

12) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 6, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 18, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 3. \end{cases}$

13) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 3, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -7. \end{cases}$

14) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = -2. \end{cases}$

15) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = -1, \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 = -7, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

16) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 13, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = -1, \\ x_1 - 5x_2 - 7x_3 = -31. \end{cases}$

17) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ 4x_1 + 5x_2 + 8x_3 = 6, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$

18) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 7, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = -6, \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$

19) $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 17, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 7, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 17. \end{cases}$

20) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 13, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 7. \end{cases}$

21) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 15, \\ 5x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 24, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = -2. \end{cases}$

22) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 11, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 11, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 11. \end{cases}$

23) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = -6, \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = -8. \end{cases}$

24) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 9, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 14, \\ 4x_1 - 5x_2 - x_3 = -12. \end{cases}$

25) $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + x_3 = -6, \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 6, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$

26) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -2, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -2, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -4. \end{cases}$

27) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 1, \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -3, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 12. \end{cases}$

28) $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 12, \\ 2x_1 - 7x_2 + 3x_3 = 8, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 19. \end{cases}$

29) $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -3, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 15. \end{cases}$

30) $\begin{cases} 2x_1 - 8x_2 + 3x_3 = -7, \\ -3x_1 + 4x_2 - x_3 = 9, \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 = 4. \end{cases}$

6.2. Решить системы линейных уравнений методом Гаусса. Сделать проверку.

1) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 5x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 3, \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 + x_4 = -2. \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = -4, \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 = -2, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -2, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 2, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = -5. \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 = -3, \\ 5x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 6x_4 = -4, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = -1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

6) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$

7) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 = -1, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 7, \\ 5x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 7x_1 + 7x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 3. \end{cases}$

8) $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 2, \\ 6x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 9x_4 = 5. \end{cases}$

9) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$

10) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = -1, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = -3, \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -7, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -2. \end{cases}$

11) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = -1, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = -1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3. \end{cases}$

12) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 7x_4 = 5, \\ 3x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 9. \end{cases}$

13) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 2, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 1, \\ 6x_1 + 8x_2 + x_3 + 5x_4 = 2, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 7. \end{cases}$

14) $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ 9x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 12, \\ 4x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 2x_4 = 2. \end{cases}$

15) $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + x_4 = -3, \\ 3x_1 - 7x_2 + 3x_3 - x_4 = -5, \\ 5x_1 - 9x_2 + 6x_3 + 2x_4 = -3, \\ 4x_1 - 6x_2 + 3x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

16) $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ 9x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 9. \end{cases}$

17) $\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 3, \\ x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 4x_4 = 8, \\ 5x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 7x_4 = 7, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 4. \end{cases}$

18) $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 1. \end{cases}$

19) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 11x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 1, \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 = -1. \end{cases}$

20) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -3, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -2, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = -6, \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -5. \end{cases}$

21) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 3, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$

22) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 7, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 4x_2 + x_3 - 3x_4 = 1, \\ x_1 - 8x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$

23) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2, \\ -2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = -3, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 11x_4 = 3, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 + 18x_4 = 4. \end{cases}$

24) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 = 2, \\ 5x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_4 = 4. \end{cases}$

25) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 5, \\ 5x_1 + 3x_2 + 10x_3 + 8x_4 = 9, \\ 4x_1 + 2x_2 + 9x_3 + 9x_4 = 8, \\ x_1 + x_2 + 7x_3 + 2x_4 = -2. \end{cases}$

26) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 2, \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 3. \end{cases}$

27) $\begin{cases} 4x_1+3x_2-3x_3-x_4=4, \\ 3x_1-x_2+3x_3-2x_4=1, \\ 3x_1+x_2-x_4=2, \\ 2x_1-3x_2+6x_3-2x_4=-1. \end{cases}$ 28) $\begin{cases} x_1+x_2-x_3+x_4=2, \\ 2x_1+3x_2+2x_3-3x_4=0, \\ x_1-2x_2-3x_3-4x_4=0, \\ 3x_1+x_2-x_3-7x_4=0. \end{cases}$

29) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=0, \\ 2x_1+3x_2+7x_3+10x_4=2, \\ 3x_1+5x_2+11x_3+16x_4=3, \\ 4x_1+7x_2+13x_3+18x_4=4. \end{cases}$ 30) $\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3+x_4=4, \\ 3x_1+4x_2+2x_3-2x_4=3, \\ 6x_1+6x_2+5x_3-7x_4=2, \\ 4x_1+3x_2+4x_3-8x_4=1. \end{cases}$

6.3. Найти фундаментальную систему решений и, используя ее, записать общее решение. Сделать проверку.

1) $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+x_4=0, \\ -x_1+x_2+2x_4=0, \\ x_1+3x_2-4x_3+2x_4=0, \\ \qquad x_2-x_3+x_4=0. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1-x_2-2x_3-3x_4=0, \\ 2x_1+3x_2+x_3-x_4=0, \\ 4x_1+x_2-3x_3-7x_4=0, \\ 3x_1+2x_2-x_3-4x_4=0. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+3x_4=0, \\ x_1-x_2+2x_4=0, \\ 3x_1-5x_2+2x_3+8x_4=0, \\ 2x_1-3x_2+x_3+5x_4=0. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} -x_1+x_2-3x_3+2x_4=0, \\ -x_1+2x_2-5x_3+x_4=0, \\ 3x_1-5x_2+13x_3-4x_4=0, \\ -2x_1+3x_2-8x_3+3x_4=0. \end{cases}$

5) $\begin{cases} x_1+x_2=0, \\ -x_1-2x_2+x_3-x_4=0, \\ x_1+x_3-x_4=0, \\ -x_2+x_3-x_4=0. \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 2x_1+x_2-4x_3-x_4=0, \\ x_1+x_2-3x_3-x_4=0, \\ 3x_1+x_2-5x_3-x_4=0, \\ x_1-x_3=0. \end{cases}$

7) $\begin{cases} x_1-x_2-2x_3-2x_4=0, \\ 3x_1-3x_3-3x_4=0, \\ -2x_1-x_2+x_3+x_4=0, \\ 4x_1-x_2-5x_3-5x_4=0. \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 2x_1-x_2-3x_3-x_4=0, \\ x_1+x_2-2x_4=0, \\ 2x_1+x_2-x_3-3x_4=0, \\ x_1-x_3-x_4=0. \end{cases}$

9) $\begin{cases} x_1 - 2x_3 - x_4 = 0, \\ -x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 0, \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

10) $\begin{cases} x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$

11) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_4 = 0, \\ x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$

12) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 - x_3 - x_4 = 0, \\ 4x_1 - x_2 - 5x_3 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - 4x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

13) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ -x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

14) $\begin{cases} x_2 - x_4 = 0, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

15) $\begin{cases} -x_1 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 0, \\ x_2 - x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

16) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

17) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0, \\ -x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 - x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

18) $\begin{cases} -x_2 + x_4 = 0, \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ -x_1 + x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$

19) $\begin{cases} -x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

20) $\begin{cases} x_1 + x_3 = 0, \\ -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ -x_2 + 2x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

21) $\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ -x_1 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ -3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$

22) $\begin{cases} -x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 6x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

23) $\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3+x_4=0, \\ x_1-x_2+x_3-4x_4=0, \\ x_1+x_2-x_3-2x_4=0, \\ 2x_1+x_2-x_3-5x_4=0. \end{cases}$

24) $\begin{cases} x_1+x_2-3x_4=0, \\ 2x_1-x_2-3x_3+3x_4=0, \\ 3x_1+x_2-x_3-3x_4=0, \\ x_1-x_3=0. \end{cases}$

25) $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3-2x_4=0, \\ -x_1+x_2-4x_3+x_4=0, \\ x_1+x_2-2x_3-x_4=0, \\ x_1+2x_2-5x_3-x_4=0. \end{cases}$

26) $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+3x_4=0, \\ -x_1+3x_2-4x_3+5x_4=0, \\ 2x_1-5x_2+5x_3-2x_4=0, \\ x_2-x_3+8x_4=0. \end{cases}$

27) $\begin{cases} 3x_1+2x_2-4x_3+x_4=0, \\ x_1+x_2+3x_3+4x_4=0, \\ -2x_1-x_2+7x_3+3x_4=0, \\ 4x_1+3x_2-x_3+5x_4=0. \end{cases}$

28) $\begin{cases} 5x_1-4x_2-3x_3+2x_4=0, \\ -x_1+x_2-2x_3+3x_4=0, \\ 6x_1-5x_2-x_3-x_4=0, \\ 4x_1-3x_2-5x_3+5x_4=0. \end{cases}$

29) $\begin{cases} -2x_1-x_2+7x_3-x_4=0, \\ 3x_1+2x_2+2x_3-4x_4=0, \\ 5x_1+3x_2-5x_3-3x_4=0, \\ x_1+x_2+9x_3-5x_4=0. \end{cases}$

30) $\begin{cases} -5x_1+2x_2-x_3+3x_4=0, \\ 3x_1-x_2+3x_3-6x_4=0, \\ 8x_1-3x_2+4x_3-9x_4=0, \\ -2x_1+x_2+2x_3-3x_4=0. \end{cases}$

6.4. Исследовать совместность системы с помощью теоремы Кронекера. Если система совместна, найти ее общее решение и представить его в виде суммы общего решения соответствующей однородной системы и частного решения неоднородной системы. Общее решение однородной системы представить в виде линейной комбинации фундаментальной системы решений.

1) $\begin{cases} x_1-2x_2-2x_3-x_4=-2, \\ 3x_1-6x_2+5x_3-3x_4=5, \\ 4x_1-8x_2-3x_3-4x_4=-3. \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x_1+5x_2+15x_3+16x_4=23, \\ 2x_1-7x_2+7x_3+6x_4=2, \\ x_1+4x_2+5x_3+3x_4=10. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3+x_4=1, \\ x_1+3x_2+x_3+x_4=3, \\ x_1+x_2+3x_3+x_4=4. \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x_1-x_2+5x_3+7x_4=6, \\ 4x_1-2x_2+7x_3+5x_4=6, \\ 2x_1-x_2+3x_3+13x_4=2. \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3+2x_4=3, \\ 6x_1+8x_2+2x_3+5x_4=7, \\ 9x_1+12x_2+3x_3+10x_4=13. \end{cases}$

6) $\begin{cases} 3x_1-2x_2+5x_3+4x_4=2, \\ 6x_1-4x_2+4x_3+3x_4=3, \\ 9x_1-6x_2+3x_3+2x_4=4. \end{cases}$

7) $\begin{cases} 9x_1-3x_2+5x_3+6x_4=4, \\ 6x_1-2x_2+3x_3+x_4=5, \\ 3x_1-x_2+3x_3+14x_4=-8. \end{cases}$

8) $\begin{cases} 6x_1+4x_2+5x_3+2x_4=1, \\ 3x_1+2x_2+4x_3+x_4=3, \\ 3x_1+2x_2-2x_3+x_4=-7. \end{cases}$

9) $\begin{cases} 9x_1+x_2+4x_3-5x_4=1, \\ 2x_1+2x_2+3x_3+4x_4=5, \\ 7x_1+x_2+6x_3-x_4=7. \end{cases}$

10) $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3-7x_4=5, \\ 6x_1-3x_2+x_3-4x_4=7, \\ 4x_1-2x_2+14x_3-31x_4=18. \end{cases}$

11) $\begin{cases} 2x_1+7x_2+3x_3+x_4=6, \\ 3x_1+5x_2+2x_3+2x_4=4, \\ 9x_1+4x_2+x_3+7x_4=2. \end{cases}$

12) $\begin{cases} 2x_1+7x_2+4x_3+5x_4=3, \\ 4x_1+4x_2+8x_3+5x_4=5, \\ x_1-9x_2-3x_3-5x_4=0. \end{cases}$

13) $\begin{cases} 2x_1-3x_2+5x_3+7x_4=1, \\ 4x_1-6x_2+2x_3+3x_4=2, \\ 2x_1-3x_2-11x_3-15x_4=1. \end{cases}$

14) $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3-3x_4=3, \\ 3x_1-2x_2-x_3-2x_4=5, \\ 2x_1-5x_2+x_3+2x_4=2. \end{cases}$

15) $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+x_4=2, \\ 2x_1+x_2-x_3-3x_4=1, \\ 2x_1-5x_2+x_3+2x_4=2. \end{cases}$

16) $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3-x_4=-1, \\ 2x_1+x_2-x_3+2x_4=4, \\ 3x_1-2x_2-x_3+x_4=1. \end{cases}$

17) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+x_4=4, \\ 3x_1+6x_2+5x_3+3x_4=5, \\ x_1+2x_2+7x_3+x_4=11. \end{cases}$

18) $\begin{cases} 4x_1+2x_2+x_3+3x_4=4, \\ 4x_1+2x_2+3x_3+x_4=0, \\ 2x_1+x_2+7x_3+2x_4=1. \end{cases}$

19) $\begin{cases} 2x_1-5x_2+3x_3+2x_4=4, \\ 5x_1-8x_2+5x_3+4x_4=5, \\ x_1-7x_2+4x_3+2x_4=4. \end{cases}$

20) $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+4x_4=-2, \\ -2x_1-3x_2+2x_3-x_4=2, \\ x_1+3x_2-x_3+11x_4=-10. \end{cases}$

21) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

22) $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, \\ 3x_1 - 11x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 3, \\ 5x_1 - 7x_2 - 3x_3 - 8x_4 = 5. \end{cases}$

23) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ 9x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 1. \end{cases}$

24) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 3, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 1. \end{cases}$

25) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$

26) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 1. \end{cases}$

27) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 8x_2 + 7x_3 - 7x_4 = -8, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases}$

28) $\begin{cases} 2x_1 - 10x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3, \\ 4x_1 - 7x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -10. \end{cases}$

29) $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = -1, \\ 9x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 2, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 3. \end{cases}$

30) $\begin{cases} 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -1, \\ 6x_1 - 8x_3 + 7x_4 = 3, \\ 2x_1 - 10x_2 + 12x_3 - 13x_4 = -5. \end{cases}$

7. Линейные пространства

7.1. Найти базис пересечения подпространств $H_1 \cap H_2$, если H_1 натянуть на векторы a_1, a_2, а H_2 - на векторы b_1 и b_2.

1) $a_1 = (1, 2, 1, 0)$, $a_2 = (-1, 1, 1, 1)$;

$b_1 = (2, -1, 0, 1)$, $b_2 = (1, -1, 3, 7)$;

2) $a_1 = (2, 1, 0, 3)$, $a_2 = (1, 1, -1, 3)$;

$b_1 = (1, 0, -2, 3)$, $b_2 = (-1, 3, 1, 1)$;

3) $a_1 = (2, 3, -2, 2)$, $a_2 = (1, 1, -1, 1)$;

$b_1 = (1, 0, 2, 1)$, $b_2 = (2, 3, 1, 2)$;

4) $a_1 = (1, 1, 1, 1)$, $a_2 = (1, 2, 1, 2)$;

$b_1 = (1, 1, 2, 1)$, $b_2 = (1, 2, 2, 2)$;

5) $a_1 = (3, 4, -3, 3)$, $a_2 = (2, 1, 1, 2)$;

$b_1 = (2, 0, 4, 2)$, $b_2 = (1, 3, -1, 1)$;

6) $a_1 = (1, 3, 5, 7)$, $a_2 = (1, 0, 2, 1)$;

$b_1 = (-3, 4, 1, 1)$, $b_2 = (0, 6, 9, 8)$;

7) $a_1 = (0, 1, 0, 1)$, $a_2 = (1, 0, 1, 0)$;

$b_1 = (1, 1, 0, 0)$, $b_2 = (0, 0, 1, 1)$;

8) $a_1 = (1, 1, 1, 0)$, $a_2 = (0, 0, 1, 1)$;

$b_1 = (1, 0, 0, 1)$, $b_2 = (0, 1, 1, -1)$;

9) $a_1 = (1, -2, 1, 1)$, $a_2 = (2, -1, 1, -1)$;
$b_1 = (1, 4, 1, 1)$, $b_2 = (2, 1, 0, -4)$

10) $a_1 = (-2, 1, 1, 1)$, $a_2 = (2, -1, 1, -1)$;
$b_1 = (4, 1, 1, 1)$, $b_2 = (1, 2, 0, 2)$;

11) $a_1 = (1, 1, -2, 1)$, $a_2 = (-1, 1, 2, -1)$;
$b_1 = (1, 1, 4, 1)$, $b_2 = (1, 0, 2, 1)$;

12) $a_1 = (2, 1, 1, -2)$, $a_2 = (-1, 2, 2, -1)$;
$b_1 = (2, 1, 4, 1)$, $b_2 = (2, 1, 0, -3)$;

13) $a_1=(1,2,1,-2)$, $a_2=(2,-1,2,2)$;
$b_1=(1,2,4,1)$, $b_2=(1,2,0,-3)$;

14) $a_1=(1,0,1,-2)$, $a_2=(2,1,0,1)$;
$b_1=(1,2,0,1)$, $b_2=(0,3,6,-13)$;

15) $a_1=(1,1,0,-2)$, $a_2=(0,2,1,2)$;
$b_1=(0,1,2,2)$, $b_2=(0,6,6,8)$;

16) $a_1=(2,1,1,0)$, $a_2=(2,0,2,1)$;
$b_1=(1,0,2,1)$, $b_2=(1,2,0,-1)$;

17) $a_1=(1,2,2,0)$, $a_2=(-1,0,2,2)$;
$b_1=(1,1,1,0)$, $b_2=(0,2,3,1)$;

18) $a_1=(1,0,2,2)$, $a_2=(-1,0,2,0)$;
$b_1=(0,1,1,1)$, $b_2=(0,4,2,3)$;

19) $a_1=(2,1,0,2)$, $a_2=(0,-1,2,1)$;
$b_1=(2,0,1,0)$, $b_2=(2,0,2,3)$;

20) $a_1=(1,2,1,0)$, $a_2=(1,0,-1,2)$;
$b_1=(1,2,0,1)$, $b_2=(2,2,0,2)$;

21) $a_1=(2,1,2,0)$, $a_2=(0,1,-1,2)$;
$b_1=(-1,1,0,1)$, $b_2=(0,10,5,8)$;

22) $a_1=(3,0,1,0)$, $a_2=(2,1,-2,3)$;
$b_1=(1,-1,0,3)$, $b_2=(2,1,0,-1)$;

23) $a_1=(0,3,3,-1)$, $a_1=(3,2,1,2)$,
$b_1=(1,0,-1,0)$, $b_2=(0,3,0,5)$;

24) $a_1=(1,0,1,0)$, $a_2=(0,0,1,1)$;
$b_1=(1,1,1,0)$, $b_2=(0,1,1,1)$;

25) $a_1=(0,1,1,-1)$, $a_2=(1,0,0,1)$;
$b_1=(0,1,0,1)$, $b_2=(0,1,2,-3)$;

26) $a_1=(1,2,0,2)$, $a_2=(1,0,2,1)$;
$b_1=(2,1,0,3)$, $b_2=(3,3,0,5)$;

27) $a_1=(-3,2,1,0)$, $a_2=(1,2,1,4)$;
$b_1=(-2,2,1,1)$, $b_2=(-1,-1,2,2)$;

28) $a_1=(-2,1,2,1)$, $a_2=(2,2,-1,2)$;
$b_1=(1,1,2,4)$, $b_2=(-3,1,2,0)$;

29) $a_1 = (-2,1,1,0)$, $a_2 = (2,0,2,1)$;
$b_1 = (2,0,1,2)$, $b_2 = (8,0,6,6)$;

30) $a_1 = (0,1,2,2)$, $a_2 = (2,-1,0,2)$;
$b_1 = (0,1,1,1)$, $b_2 = (1,0,2,3)$.

7.2. Проверить являются ли следующие множества векторов линейными подпространствами.

1) Множество векторов, концы которых лежат на данной прямой (начала векторов совпадают с началом системы координат).
2) Множество векторов, концы которых лежат в первой четверти системы координат (начала векторов совпадают с началом системы координат).
3) Множество векторов, концы которых лежат в первой или третьей четверти системы координат (начала векторов совпадают с началом системы координат).
4) Множество векторов, концы которых лежат в первой или второй четверти системы координат (начала векторов совпадают с началом системы координат).
5) Множество n-мерных векторов $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, у которых $x_1 = x_2$.
6) Множество n-мерных векторов $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, у которых координаты с четными номерами равны нулю.
7) Множество n-мерных векторов $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, у которых координаты с четными номерами делятся на 3.
8) Множество квадратных матриц, у которых элементами главной диагонали являются нули.
9) Множество квадратных матриц, у которых элементы главной диагонали равны между собой.
10) Множество векторов плоскости L_1, параллельных некоторой прямой l_1.
11) Множество векторов $L_1 \cup L_2$, где L_1 - множество векторов плоскости, параллельных прямой l_1, L_2 - векторов параллельных прямой l_2.
12) Множество векторов, образующих с данным ненулевым вектором $\bar{a}$ угол φ.
13) Множество всех многочленов $f(t)$, удовлетворяющих условию $f(0)=1$, относительно обычных операций сложения многочленов и умножения многочлена на число.
14) Множество всех многочленов $f(t)$, удовлетворяющих условию $f(0)=0$, относительно обычных операций сложения многочленов и умножения многочлена на число.
15) Множество всех многочленов $f(t)$, удовлетворяющих условию $2f(0)–3f(1)=0$, относительно обычных операций сложения многочленов и умножения многочлена на число.

16) Рассмотрим бесконечные последовательности действительных чисел $x = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots)$, над которыми введены операции сложения и умножения на число:

а) если $x = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots)$, $y = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \ldots)$,

то $x + y = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n, \ldots)$;

б) если λ - действительное число:

$\lambda x = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \ldots, \lambda\alpha_n, \ldots)$.

Из данного множества последовательностей выделено подмножество, элементы которого удовлетворяют соотношению $\alpha_k = \alpha_{k-1} + \alpha_{k-2}, k = 3,4,\ldots$. Является ли оно линейным под пространством?

17) Пусть имеем многочлены n-й степени $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0,\ a_n \neq 0$, над которыми определены обычным образом операции сложения многочленов и умножения на число.

Из множества многочленов степени не выше n выделено подмножество многочленов степени $k \leq n$. Является ли выделенное множество линейным над пространством?

18) При условии задачи 17 выделено множество многочленов степени не выше k. Является ли выделенное множество линейным пространством?

19) Пусть имеем множество непрерывных функций с обычными операциями сложения функций и умножения функций на число.

Из множества непрерывных функций выделено множество многочленов степени n. Является ли выделенное множество линейным подпространством?

20) При условии задачи 19 выделено множество многочленов степени не выше k. Является ли выделенное множество линейным пространством?

21) Пусть имеем множество квадратных матриц n-го порядка, над которыми определены операции:

а) $c_{ij} = \alpha_{ij} + \beta_{ij},\ i, j = 1, 2, \ldots, n$;

б) $c_{ij} = \lambda\alpha_{i,j},\ i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Из множества выделены матрицы 2-го порядка. Является ли выделенное множество линейным подпространством?

22) Множество всех многочленов $f(x)$, удовлетворяющих условию $f(1)+f(2)+\ldots+f(k)=0$, относительно обычных операций сложения многочленов и умножения на число.

23) Множество векторов, параллельных какой-либо плоскости.

24) Является ли множество рациональных чисел подпространством линейного пространства вещественных чисел над полем вещественных чисел?

25) Является ли множество рациональных чисел подпространством линейного пространства вещественных чисел над полем рациональных чисел?

26) Дана однородная система m линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Решение системы будем записывать в виде вектор - столбца. Является ли множество всех решений данной системы под подпространством пространства n-мерных векторов?

27) Множество функций, с обычными операциями сложения их элементов на вещественные числа, n раз дифференцируемых на сегменте $[a, b]$.

28) Множество многочленов степени, не превосходящей n, с неотрицательными коэффициентами.

29) Множество натуральных чисел, для которых сумма чисел m и n определена как их произведение $m \cdot n$, а произведение элемента n на вещественное число α - как степень n^{α}.

30) Множество положительных вещественных чисел относительно операций сложения чисел и умножения на число как в задаче 29.

7.3. Даны векторы $\bar{a}, \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$. Доказать, что векторы $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ образуют базис и найти координаты вектора $\bar{a}$ в базисе $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$.

1) $\bar{a}=(1;3;-1)$	2) $\bar{a}=(2;-3;4)$	3) $\bar{a}=(1;1;-1)$
$\bar{v}_1=(-2;2;1)$	$\bar{v}_1=(-1;0;1)$	$\bar{v}_1=(74;47;7)$
$\bar{v}_2=(1;-1;0)$	$\bar{v}_2=(1;-2;2)$	$\bar{v}_2=(-42;27;-4)$
$\bar{v}_3=(1;0;-1)$	$\bar{v}_3=(0;1;-1)$	$\bar{v}_3=(11;7;1)$
4) $\bar{a}=(1;2;-1)$	5) $\bar{a}=(3;2;1)$	6) $\bar{a}=(2;1;-2)$
$\bar{v}_1=(1;2;2)$	$\bar{v}_1=(1;2;0)$	$\bar{v}_1=(-44;19;6)$
$\bar{v}_2=(2;2;1)$	$\bar{v}_2=(2;2;1)$	$\bar{v}_2=(66;-28;9)$
$\bar{v}_3=(0;1;1)$	$\bar{v}_3=(4;3;2)$	$\bar{v}_3=(-7;3;-1)$

7) $\bar{a}=(1;3;-1)$
$\bar{v}_1=(-2;2;1)$
$\bar{v}_2=(1;-1;0)$
$\bar{v}_3=(1;0;-1)$

8) $\bar{a}=(2;1;1)$
$\bar{v}_1=(2;3;1)$
$\bar{v}_2=(1;2;1)$
$\bar{v}_3=(2;3;2)$

9) $\bar{a}=(3;2;1)$
$\bar{v}_1=(1;2;0)$
$\bar{v}_2=(2;2;1)$
$\bar{v}_3=(4;3;2)$

10) $\bar{a}=(2;5;1)$
$\bar{v}_1=(1;2;0)$
$\bar{v}_2=(2;-2;1)$
$\bar{v}_3=(2;1;1)$

11) $\bar{a}=(3;1;1)$
$\bar{v}_1=(2;3;1)$
$\bar{v}_2=(1;2;1)$
$\bar{v}_3=(2;3;2)$

12) $\bar{a}=(4;2;-1)$
$\bar{v}_1=(2;1;2)$
$\bar{v}_2=(3;2;3)$
$\bar{v}_3=(1;1;2)$

13) $\bar{a}=(3;-1;-1)$
$\bar{v}_1=(1;-4;2)$
$\bar{v}_2=(0;2;-1)$
$\bar{v}_3=(-2;5;-2)$

14) $\bar{a}=(4;-1;1)$
$\bar{v}_1=(2;-2;-1)$
$\bar{v}_2=(-1;1;1)$
$\bar{v}_3=(-1;2;0)$

15) $\bar{a}=(5;-1;2)$
$\bar{v}_1=(-1;2;-7)$
$\bar{v}_2=(4;-8;29)$
$\bar{v}_3=(-10;21;-73)$

16) $\bar{a}=(-1;2;-3)$
$\bar{v}_1=(1;2;1)$
$\bar{v}_2=(0;1;-1)$
$\bar{v}_3=(-1;2;1)$

17) $\bar{a}=(1;-1;4)$
$\bar{v}_1=(-1;0;-1)$
$\bar{v}_2=(2;2;1)$
$\bar{v}_3=(4;3;2)$

18) $\bar{a}=(34;-1;2)$
$\bar{v}_1=(74;47;7)$
$\bar{v}_2=(-42;-27;-4)$
$\bar{v}_3=(11;7;1)$

19) $\bar{a}=(2;1;-3)$
$\bar{v}_1=(1;2;2)$
$\bar{v}_2=(2;2;1)$
$\bar{v}_3=(0;1;1)$

20) $\bar{a}=(-1;3;-2)$
$\bar{v}_1=(1;2;0)$
$\bar{v}_2=(2;2;1)$
$\bar{v}_3=(4;3;2)$

21) $\bar{a}=(2;-1;-3)$
$\bar{v}_1=(-44;19;-6)$
$\bar{v}_2=(66;-28;9)$
$\bar{v}_3=(-7;3;-1)$

22) $\bar{a}=(2;-3;1)$
$\bar{v}_1=(2;1;2)$
$\bar{v}_2=(3;2;3)$
$\bar{v}_3=(1;1;2)$

23) $\bar{a}=(1;4;-3)$
$\bar{v}_1=(-1;0;1)$
$\bar{v}_2=(1;-2;2)$
$\bar{v}_3=(1;1;-2)$

24) $\bar{a}=(2;-2;2)$
$\bar{v}_1=(17;-46;4)$
$\bar{v}_2=(-29;80;-7)$
$\bar{v}_3=(4;-11;1)$

25) $\bar{a}=(2;2;-4)$
$\bar{v}_1=(2;2;1)$
$\bar{v}_2=(1;1;1)$
$\bar{v}_3=(0;2;0)$

26) $\bar{a}=(1;-4;3)$
$\bar{v}_1=(1;0;-1)$
$\bar{v}_2=(-1;1;1)$
$\bar{v}_3=(0;-1;1)$

27) $\bar{a}=(2;1;4)$
$\bar{v}_1=(-30;8;7)$
$\bar{v}_2=(43;-11;-10)$
$\bar{v}_3=(4;-1;-1)$

28) $\bar{a} = (4;1;-2)$

$\bar{v}_1 = (1;-3;2)$

$\bar{v}_2 = (0;2;-1)$

$\bar{v}_3 = (-2;3;-2)$

29) $\bar{a} = (-3;-2;1)$

$\bar{v}_1 = (-1;1;1)$

$\bar{v}_2 = (0;-2;1)$

$\bar{v}_3 = (1;2;-2)$

30) $\bar{a} = (2;3;-1)$

$\bar{v}_1 = (-23;11;9)$

$\bar{v}_2 = (13;-6;-5)$

$\bar{v}_3 = (2;-1;-1)$

8. Линейные операторы (преобразования)

8.1. Составить в базисе $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ матрицу оператора проектирования векторов пространства на плоскость, заданную уравнением:

1) $2x+y+z=0$; 2) $2x+y-3z=0$; 3) $x+2y-2z=0$;

4) $3x+y-z=0$; 5) $3x+y+2z=0$; 6) $x+2y+3z=0$;

7) $x-2y+4z=0$; 8) $4x-y+z=0$; 9) $3x+y-2z=0$;

10) $3x-y-3z=0$;

Составить в базисе $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ матрицу оператора поворота векторов пространства вокруг вектора $\bar{u}$ на угол φ (направление положительное относительно вектора $\bar{u}$):

11) $\bar{u}=(1;1;1), \varphi=90°$; 16) $\bar{u}=(1;1;1), \varphi=30°$;

12) $\bar{u}=(1;1;1), \varphi=120°$; 17) $\bar{u}=(1;1;1), \varphi=45°$;

13) $\bar{u}=(1;1;1), \varphi=45°$; 18) $\bar{u}=(1;1;1), \varphi=90°$;

14) $\bar{u}=(1;1;1), \varphi=60°$; 19) $\bar{u}=(1;1;1), \varphi=60°$;

15) $\bar{u}=(1;1;1), \varphi=30°$; 20) $\bar{u}=(1;1;1), \varphi=120°$.

Составить в базисе $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ матрицу оператора проектирования векторов пространства на вектор $\bar{a}$, заданный координатами в базисе $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$:

21) (1;–3;2); 25) (4; 5;–2); 29) (6; 1;–1);
22) (0;1;–4); 26) (–3; 2;4); 30) (4;–3; 1).
23) (1; 3;–5); 27) (3;0;–2);
24) (–3; 1; 1); 28) (2; 1;–5);

8.2. Проверить являются ли указанные ниже преобразования линейными операторами.

1) Оператор поворота плоскости на угол φ вокруг начала координат.
2) Оператор проектирования векторов плоскости на прямую, лежащую в плоскости.
3) Оператор, ставящий в соответствие элементу линейного пространства нулевой элемент этого же пространства.
4) Оператор, переводящий элементы линейного пространства в себя.
5) Оператор **подобия** P с коэффициентом подобия λ, ставящий в соответствие каждому элементу x линейного пространства элемент λx, т.е. $Px=\lambda x$.
6) Оператор **дифференцирования** D в пространстве многочленов степени не выше n.

7) Интегральный оператор J^b на отрезке функций, действующий по правилу: $Jx=y$, где $y(t)=\int_a^b (t-\xi)x(\xi)d\xi$, $x(t)$ - непрерывная функция.
8) Оператор A в линейном пространстве E, $Ax=x+a$, где a - некоторый фиксированный элемент из E, отличный от нулевого.
9) Преобразование, ставящее в соответствие векторам трехмерного пространства фиксированный вектор этого же пространства.
10) Пусть V_3 трехмерное пространство геометрических векторов. Является ли линейным преобразованием оператор $Ax=\alpha x$, где α - фиксированное число $x\in V_3$?
11) Пусть V_3 трехмерное пространство геометрических векторов, a - фиксированный вектор из V_3. Является ли линейным преобразованием оператор A: $A: Ax=\alpha\cdot a$, где $x\in V_3, \alpha$ равно скалярному произведению векторов x и a?
12) Пусть V_3 трехмерное пространство геометрических векторов, x - произвольный вектор V_3, a, b - фиксированные вектора V_3. Является ли линейным преобразованием оператор $Ax=(x, a)\, b$, где (a, x) - скалярное произведение векторов a и x?
13) Пусть V_3 трехмерное пространство геометрических векторов, x - произвольный вектор V_3, a - и фиксированный вектор V_3. Является ли линейным преобразованием оператор $Ax=(x, a)\, x$, где (a, x) - скалярное произведение векторов a и x?
14) Пусть V_3 трехмерное пространство геометрических векторов, x - произвольный вектор V_3, a - фиксированный вектор V_3. Является ли линейным преобразованием оператор $Ax=[x, a]$, где $[x, a]$ - векторное произведение векторов x и a?
15) Пусть V_{03} - трехмерное арифметическое пространство. Является ли линейным оператор $Ax=\left(x_1, x_2, x_3^2\right)$, где x_1, x_2, x_3 - компоненты вектора?
16) Пусть V_{03} - трехмерное арифметическое пространство. Является ли линейным оператор $Ax=\left(x_3, x_1, x_2\right)$, где x_1, x_2, x_3 - компоненты вектора?
17) Пусть V_{03} - трехмерное арифметическое пространство. Является ли линейным оператор $Ax=\left(x_3, x_1, x_2-1\right)$, где x_1, x_2, x_3 - компоненты вектора?
18) Пусть M_n - пространство многочленов степени не выше n от действительного переменного t. Является линейным оператор: $Af(t)=f(-t)$, где $f(t)$ - произвольный многочлен?

19) Пусть M_n - пространство многочленов степени не выше n от действительного переменного t и $f(t)$ - произвольный многочлен. Является ли линейным оператор $Af(t) = f(t+1)$?

20) Пусть M_n - пространство многочленов степени не выше n от действительного переменного t и $f(t)$ - произвольный многочлен. Является ли линейным оператор $Af(t) = f(at+b)$, a и b фиксированные числа, причем $a \neq 0$?

21) Является ли проектирование трехмерного пространства на координатную ось вектора $\overline{e}_1$ параллельно координатной плоскости векторов $\overline{e}_2$ и $\overline{e}_3$ линейным преобразованием?

22) Является ли проектирование пространства на координатную плоскость векторов $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$ параллельно оси координат вектора $\overline{e}_3$ линейным преобразованием?

23) Является ли ортогональное проектирование трехмерного пространства на ось, образующую равные углы с осями прямоугольной степени координат, линейным преобразованием?

24) Пусть V_{03} - трехмерное арифметическое пространство. Является ли линейным оператор $Ax = (x_2 + x_3, 2x_1 + x_3, 3x_1 - x_2 + x_3)$, где x_1, x_2, x_3 - компоненты вектора?

25) Пусть V_{03} - трехмерное арифметическое пространство. Является ли линейным оператор $Ax = (x_1, x_2 + 1, x_3 + 2)$?

26) Пусть V_{03} - трехмерное арифметическое пространство. Является ли линейным оператор $Ax = \left(2x_1 + x_2, x_1 + x_3, x_3^2\right)$, где x_1, x_2, x_3 - компоненты вектора?

27) Пусть A – поворот трехмерного пространства на угол φ вокруг оси Oz. Является ли преобразование A линейным оператором?

28) Является ли линейным оператор, ставящий вектору трехмерного пространства геометрических векторов вектор, симметричный относительно плоскости, проходящий через начало координат?

29) Пусть V_{03} - трехмерное арифметическое пространство. Является ли линейным оператор $Ax = (3x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3)$?

30) Пусть V_{03} - трехмерное арифметическое пространство. Является ли линейным оператор $Ax = (x_1 - 1, x_2, x_3 + x_2)$?

8.3. В линейном пространстве многочленов $f(x)$ степени не выше 3 задан оператор A. Проверить, что A - линейный оператор, и найти его матрицы в двух базисах:

а) $1, x, x^2, x^3$ и б) $1, x-a, (x-a)^2, (x-a)^3$.

1) $A\,f(x) = x\,f'(x+1),$ $a = -1.$

2) $A\,f(x) = x^2\,f''(x),$ $a = 1.$

3) $A\,f(x) = x\,f''(x),$ $a = -2.$

4) $A\,f(x) = f'(x+1) - f'(x-1),$ $a = -1.$

5) $A\,f(x) = f(2-x) + f'(x),$ $a = 2.$

6) $A\,f(x) = f''(2x+1),$ $a = -0{,}5.$

7) $A\,f(x) = (x+2)\,f'(-x),$ $a = -2.$

8) $A\,f(x) = x^2\,f''(x-1),$ $a = 1.$

9) $A\,f(x) = (x-2)\,f'(x-1),$ $a = 2.$

10) $A\,f(x) = (x+2)\,f''(x) + f(2),$ $a = -2.$

11) $A\,f(x) = (x-2) + f'(3),$ $a = 2.$

12) $A\,f(x) = 2\,f(x) - x\,f'(x),$ $a = 1.$

13) $A\,f(x) = f'(x+1) - f(x-1),$ $a = -1.$

14) $A\,f(x) = x\,f''(x+2) + f(x),$ $a = -2.$

15) $A\,f(x) = 2\,f''(x) - f(-x),$ $a = 3.$

16) $A\,f(x) = f''(2x-1),$ $a = 0{,}5.$

17) $A\,f(x) = x\,f'(x-1),$ $a = 1.$

18) $A\,f(x) = (x+1) + f'(x),$ $a = -1.$

19) $A\,f(x) = (x+3)\,f''(x),$ $a = -3.$

20) $A\,f(x) = f'(x+2) - f'(x-2),$ $a = 2.$

21) $A\,f(x) = f(1-x) + f'(x),$ $a = 1.$

22) $A\,f(x) = x\,f''(2x-1),$ $a = 0{,}5.$

23) $A\,f(x) = (x-2)\,f'(-x),$ $a = 2.$

24) $A\,f(x) = x^2\,f''(x+1),$ $a = -1.$

25) $A\,f(x) = (x+2)\,f'(x+1),$ $a = -2.$

26) $A\,f(x) = (x-2)\,f''(x) - f(5),$ $a = 2.$

27) $A\,f(x) = -2\,f(x) + x\,f'(-x),$ $a = 1.$

28) $A\,f(x) = f'(x-1) - f(x+1),$ $a = 1.$

29) $A\,f(x) = x\,f''(x-2) - f(x),$ $a = 2.$

30) $A\,f(x) = 2\,f'(x) + f(2x),$ $a = -3.$

8.4. A - матрица оператора в базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$. Найти матрицу этого оператора в базисе $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3$, если известно разложение векторов $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3$ в базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$.

1) $A = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix},$ $\quad f_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3,$ $f_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3,$ $f_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3.$

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$ $\quad f_1 = 2e_1 + e_2,$ $f_2 = -e_1 + e_2 + e_3,$ $f_3 = -e_1 + e_3.$

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix},$ $\quad f_1 = e_1 - 2e_3,$ $f_2 = e_1 + e_2 - e_3,$ $f_3 = -e_1 + e_2 + e_3.$

4) $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\quad f_1 = 2e_1 - 2e_2 + 3e_3,\ f_2 = e_1 - e_2 + e_3,\ f_3 = e_1 + 2e_2.$

5) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\quad f_1 = e_1 + e_2 + e_3,\ f_2 = 2e_1 + e_2 + 2e_3,\ f_3 = e_1 + e_3.$

6) $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $\quad f_1 = e_1 - 3e_2 - e_3,\ f_2 = 2e_1 + e_2 + e_3,\ f_3 = 2e_1 - 2e_2.$

7) $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad f_1 = -e_1 + 3e_2 - e_3,\ f_2 = e_1 + 2e_2,\ f_3 = e_1 - 2e_2 + e_3.$

8) $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -4 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $\quad f_1 = 2e_1 + e_2 + e_3,\ f_2 = 2e_1 + 3e_2 + e_3,\ f_3 = e_1 + e_2.$

9) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\quad f_1 = e_1 - e_2,\ f_2 = -2e_1 + e_2 - 2e_3,\ f_3 = -e_2 + e_3.$

10) $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad f_1 = -e_1 + e_2 - e_3,\ f_2 = e_1 + e_2 - 2e_3,\ f_3 = e_1 + e_2 - e_3.$

11) $A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad f_1 = e_1 + e_2 + e_3,\ f_2 = -e_1 + e_2 - e_3,\ f_3 = 2e_1 - e_3.$

12) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\quad f_1 = e_1 - 2e_2 + e_3,\ f_2 = -e_1 + 2e_2 + e_3,\ f_3 = -e_1 + 3e_2 + e_3.$

13) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\quad f_1 = -2e_1 + e_2 + e_3,\ f_2 = -e_1 + 2e_2 - e_3,\ f_3 = -3e_1 + e_3.$

14) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\quad f_1 = -2e_1 + e_2 + 2e_3,\ f_2 = 2e_1 + 2e_2 - e_3,\ f_3 = e_1 + 4e_2 + 2e_3.$

15) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}$, $\qquad f_1=-2e_1+e_2,\quad f_2=e_1+e_3,\quad f_3=e_1+2e_3.$

16) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$, $\qquad f_1=-2e_1+e_2-e_3,\quad f_2=2e_1+2e_2-2e_3,\quad f_3=2e_1+2e_2-e_3.$

17) $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 2\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}$, $\qquad f_1=e_2+e_3,\quad f_2=e_1+2e_2+e_3,\quad f_3=-e_1+2e_3.$

18) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ -1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $\qquad f_1=e_1+3e_2+2e_3,\quad f_2=e_2+e_3,\quad f_3=2e_1+2e_2.$

19) $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 2\\ -1 & 0 & 2\\ 4 & 2 & 3\end{pmatrix}$, $\qquad f_1=2e_1+2e_2,\quad f_2=2e_2,\quad f_3=e_1+e_2+e_3.$

20) $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 2\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $\qquad f_1=e_1+2e_2-e_3,\quad f_2=e_1+2e_3,\quad f_3=3e_1+2e_2.$

21) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}$, $\qquad f_1=e_2+2e_3,\quad f_2=2e_1-e_2,\quad f_3=e_1+2e_3.$

22) $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $\qquad f_1=2e_2+e_3,\quad f_2=-2e_1-e_2+e_3,\quad f_3=3e_1-2e_3.$

23) $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 2 & 1 & -2\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$, $\qquad f_1=3e_1-2e_2+e_3,\quad f_2=-e_1+e_3,\quad f_3=3e_1-e_2-e_3.$

24) $A=\begin{pmatrix}0 & 3 & 3\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$, $\qquad f_1=-e_1+3e_2+2e_3,\quad f_2=2e_1+e_2+2e_3,\quad f_3=-2e_1+3e_2.$

25) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $\qquad f_1=e_1+e_3,\quad f_2=e_2+e_3,\quad f_3=e_1+e_2.$

26) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & -3\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $\quad f_1=e_1+e_2-e_3,\ f_2=e_1+2e_2-2e_3,\ f_3=2e_1-e_3.$

27) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 3\\ 3 & 0 & 5\end{pmatrix}$, $\quad f_1=e_1-2e_2-3e_3,\ f_2=2e_1-3e_2,\ f_3=2e_1+e_3.$

28) $A=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}$, $\quad f_1=2e_1+e_2+4e_3,\ f_2=-e_1+2e_2+2e_3,\ f_3=e_1-e_2-e_3.$

29) $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & -1\\ -3 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $\quad f_1=e_1+2e_2-e_3,\ f_2=2e_1-e_2+2e_3,\ f_3=e_1+2e_2.$

30) $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $\quad f_1=e_2-2e_3,\ f_2=2e_1+e_2,\ f_3=-e_1-2e_2+e_3.$

8.5. Линейный оператор в базисе $\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{a}_3$ задан матрицей A. Найти его матрицу B в базисе $\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3$, если известно разложение векторов a_1,a_2,a_3 по базису e_1,e_2,e_3.

1) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$, $\quad \bar{a}_1=2e_1+3e_2+e_3,\ \bar{a}_2=3e_1+4e_2+e_3,\ \bar{a}_3=e_1+2e_2+2e_3.$

2) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $\quad \bar{a}_1=-e_1+e_3,\ \bar{a}_2=-e_1+e_2+e_3,\ \bar{a}_3=e_1+2e_2.$

3) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 3 & 2 & -2\end{pmatrix}$, $\quad \bar{a}_1=-e_1+e_2+e_3,\ \bar{a}_2=e_1+e_2-e_3,\ \bar{a}_3=e_1-e_2+e_3.$

4) $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 0\\ -2 & -1 & 2\end{pmatrix}$, $\quad \bar{a}_1=2e_1+e_2,\ \bar{a}_2=e_1-2e_3,\ \bar{a}_3=e_1+2e_2.$

5) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $\quad \bar{a}_1=e_1+e_3,\ \bar{a}_2=2e_1-2e_2,\ \bar{a}_3=e_1-2e_2+e_3.$

6) $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\quad$ $\bar{a}_1 = 2e_1 + e_2 + 2e_3,$
$\bar{a}_2 = 2e_1 + e_2 + e_3,$
$\bar{a}_3 = e_1 + 2e_2.$

7) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad$ $\bar{a}_1 = -e_1 + 3e_2 - e_3,$
$\bar{a}_2 = e_1 - 3e_2 - e_3,$
$\bar{a}_3 = e_1 + e_2 + e_3.$

8) $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 0 \\ -1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$, $\quad$ $\bar{a}_1 = e_1 + e_2,$
$\bar{a}_2 = -e_1 + e_3,$
$\bar{a}_3 = e_1 + e_2 - e_3.$

9) $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\quad$ $\bar{a}_1 = 2e_1 - e_3,$
$\bar{a}_2 = -e_1 + e_2 - e_3,$
$\bar{a}_3 = e_1 + e_2.$

10) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad$ $\bar{a}_1 = 2e_1 + e_2 + e_3,$
$\bar{a}_2 = e_1 - e_2,$
$\bar{a}_3 = -e_1 + e_2 - e_3.$

11) $A=\begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad$ $\bar{a}_1 = e_1 + e_2 + e_3,$
$\bar{a}_2 = e_1 - 2e_2 + e_3,$
$\bar{a}_3 = -2e_1 + e_2 + e_3.$

12) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\quad$ $\bar{a}_1 = -e_1 + e_2 - e_3,$
$\bar{a}_2 = -e_1 + 2e_2 + e_3,$
$\bar{a}_3 = -e_1 + 3e_2 + e_3.$

13) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\quad$ $\bar{a}_1 = 2e_1 - e_3,$
$\bar{a}_2 = -e_1 + 3e_2 + e_3,$
$\bar{a}_3 = -3e_1 + e_3.$

14) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\quad$ $\bar{a}_1 = -2e_1 + e_2 + 2e_3,$
$\bar{a}_2 = -2e_1 + e_2,$
$\bar{a}_3 = -e_1 + e_2 - e_3.$

15) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad$ $\bar{a}_1 = -e_1 + e_3,$
$\bar{a}_2 = e_1 + e_2 + 2e_3,$
$\bar{a}_3 = e_1 + 2e_3.$

16) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\quad$ $\bar{a}_1 = -2e_1 + e_2 - e_3,$
$\bar{a}_2 = e_1 + e_3,$
$\bar{a}_3 = e_1 + 3e_2 + 2e_3.$

17) $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\bar{a}_1 = e_2 + e_3$, $\bar{a}_2 = 2e_1 + 2e_2$, $\bar{a}_3 = e_1 + 2e_2 - e_3$.

18) $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\bar{a}_1 = e_1 + 2e_2 + e_3$, $\bar{a}_2 = e_2 + e_3$, $\bar{a}_3 = 2e_2$.

19) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\bar{a}_1 = -e_1 + 2e_3$, $\bar{a}_2 = 2e_1 + e_3$, $\bar{a}_3 = e_1 + e_2 + e_3$.

20) $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\bar{a}_1 = e_1 - e_3$, $\bar{a}_2 = 2e_1 + e_3$, $\bar{a}_3 = e_1 + 2e_2 - e_3$.

21) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\bar{a}_1 = e_1 + 2e_3$, $\bar{a}_2 = 2e_1 + e_2$, $\bar{a}_3 = -2e_1 - e_2 + e_3$.

22) $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\bar{a}_1 = e_1 + 2e_3$, $\bar{a}_2 = 3e_1 - 2e_3$, $\bar{a}_3 = 3e_1 - e_2 - e_3$.

23) $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $\bar{a}_1 = 3e_1 - e_2 + e_3$, $\bar{a}_2 = -e_1 + e_2 + 2e_3$, $\bar{a}_3 = e_1 + e_3$.

24) $A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\bar{a}_1 = -2e_1 + 3e_3$, $\bar{a}_2 = 3e_1 - e_2 - e_3$, $\bar{a}_3 = 3e_1 - 2e_3$.

25) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\bar{a}_1 = e_1 - e_3$, $\bar{a}_2 = e_1 + e_2 - e_3$, $\bar{a}_3 = e_1 - 2e_2 - 3e_3$.

26) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, $\bar{a}_1 = e_2 + e_3$, $\bar{a}_2 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$, $\bar{a}_3 = 2e_1 - 3e_3$.

27) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, $\bar{a}_1 = e_1 + e_2$, $\bar{a}_2 = 2e_1 - e_3$, $\bar{a}_3 = 2e_1 + e_3$.

28) $A=\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\bar{a}_1 = 2e_1 + e_2 + e_3$, $\bar{a}_2 = e_1 + 2e_2 - e_3$, $\bar{a}_3 = e_2 - 2e_3$.

29) $A=\begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\bar{a}_1 = -e_1 + 2e_2 + 2e_3$, $\bar{a}_2 = -2e_1 - e_2 + 2e_3$, $\bar{a}_3 = 2e_1 + e_2$.

30) $A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\bar{a}_1 = -e_1 + 2e_2 + 2e_3$, $\bar{a}_2 = -2e_1 - e_2 + 2e_3$, $\bar{a}_3 = 2e_1 + e_2$.

8.6. Линейный оператор в базисе $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ задан матрицей *A*. Найти его матрицу в базисе $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3$ (координаты векторов даны в некотором базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$):

1) $A=\begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 15 \\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix}$, $\bar{a}_1 = (8,-6,7)$, $\bar{a}_2 = (-16,7,-13)$, $\bar{a}_3 = (9,-3,7)$, $\bar{b}_1 = (1,-2,1)$, $\bar{b}_2 = (3,-1,2)$, $\bar{b}_3 = (2,1,2)$.

2) $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\bar{a}_1 = (2,3,1)$, $\bar{a}_2 = (3,4,1)$, $\bar{a}_3 = (1,2,2)$, $\bar{b}_1 = (1,1,1)$, $\bar{b}_2 = (1,-2,1)$, $\bar{b}_3 = (-2,1,1)$.

3) $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\bar{a}_1 = (2,1,0)$, $\bar{a}_2 = (-1,1,1)$, $\bar{a}_3 = (-1,0,1)$, $\bar{b}_1 = (-1,1,-1)$, $\bar{b}_2 = (-1,2,1)$, $\bar{b}_3 = (-1,3,1)$.

4) $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\bar{a}_1 = (1,0,-2)$, $\bar{a}_2 = (1,1,-1)$, $\bar{a}_3 = (-1,1,1)$, $\bar{b}_1 = (2,0,-1)$, $\bar{b}_2 = (-1,3,1)$, $\bar{b}_3 = (-3,0,1)$.

5) $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\bar{a}_1 = (2,-2,3)$, $\bar{a}_2 = (1,-1,1)$, $\bar{a}_3 = (1,2,0)$, $\bar{b}_1 = (-2,1,2)$, $\bar{b}_2 = (-2,1,0)$, $\bar{b}_3 = (-1,1,-1)$.

6) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\bar{a}_1 = (1,1,1)$, $\bar{a}_2 = (2,1,2)$, $\bar{a}_3 = (1,0,1)$, $\bar{b}_1 = (-1,0,1)$, $\bar{b}_2 = (1,1,2)$, $\bar{b}_3 = (1,0,2)$.

7) $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\bar{a}_1 = (1,-3,-1)$, $\bar{a}_2 = (2,1,1)$, $\bar{a}_3 = (2,-2,0)$, $\bar{b}_1 = (-2,1,-1)$, $\bar{b}_2 = (0,1,1)$, $\bar{b}_3 = (1,3,2)$.

8) $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -3 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\bar{a}_1=(-1,3,-1)$, $\bar{a}_2=(1,2,0)$, $\bar{a}_3=(1,-2,1)$, $\bar{b}_1=(0,1,1)$, $\bar{b}_2=(2,2,0)$, $\bar{b}_3=(1,2,-1)$.

9) $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$, $\bar{a}_1=(1,-1,0)$, $\bar{a}_2=(-2,1,-2)$, $\bar{a}_3=(0,-1,1)$, $\bar{b}_1=(1,2,1)$, $\bar{b}_2=(0,1,1)$, $\bar{b}_3=(0,2,0)$.

10) $A=\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\bar{a}_1=(-1,1,-1)$, $\bar{a}_2=(1,1,-2)$, $\bar{a}_3=(1,1,-1)$, $\bar{b}_1=(1,0,-1)$, $\bar{b}_2=(2,0,1)$, $\bar{b}_3=(1,2,-1)$.

11) $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\bar{a}_1=(1,1,1)$, $\bar{a}_2=(-1,1,-1)$, $\bar{a}_3=(2,0,-1)$, $\bar{b}_1=(1,0,2)$, $\bar{b}_2=(2,1,0)$, $\bar{b}_3=(-2,-1,1)$.

12) $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\bar{a}_1=(1,-2,1)$, $\bar{a}_2=(-1,2,1)$, $\bar{a}_3=(-1,3,1)$, $\bar{b}_1=(1,0,2)$, $\bar{b}_2=(3,0,-2)$, $\bar{b}_3=(3,-1,-1)$.

13) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\bar{a}_1=(-2,1,1)$, $\bar{a}_2=(-1,2,-1)$, $\bar{a}_3=(-3,0,1)$, $\bar{b}_1=(3,-1,1)$, $\bar{b}_2=(-1,1,2)$, $\bar{b}_3=(1,0,1)$.

14) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\bar{a}_1=(-2,1,2)$, $\bar{a}_2=(2,2,-1)$, $\bar{a}_3=(1,4,2)$, $\bar{b}_1=(-2,0,3)$, $\bar{b}_2=(3,-1,-1)$, $\bar{b}_3=(3,0,-2)$.

15) $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\bar{a}_1=(-2,1,0)$, $\bar{a}_2=(1,0,1)$, $\bar{a}_3=(1,0,2)$, $\bar{b}_1=(1,0,-1)$, $\bar{b}_2=(1,1,-1)$, $\bar{b}_3=(1,-2,-3)$.

16) $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\bar{a}_1=(-2,1,-1)$, $\bar{a}_2=(2,2,-2)$, $\bar{a}_3=(2,2,-1)$, $\bar{b}_1=(0,1,1)$, $\bar{b}_2=(1,2,2)$, $\bar{b}_3=(2,0,-3)$.

17) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\bar{a}_1=(0,1,1)$, $\bar{a}_2=(1,2,1)$, $\bar{a}_3=(-1,0,2)$, $\bar{b}_1=(1,1,0)$, $\bar{b}_2=(2,0,-1)$, $\bar{b}_3=(2,0,1)$.

18) $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\bar{a}_1=(1,3,2)$, $\bar{a}_2=(0,1,1)$, $\bar{a}_3=(2,2,0)$, $\bar{b}_1=(2,1,1)$, $\bar{b}_2=(1,2,-1)$, $\bar{b}_3=(0,1,-2)$.

19) $A=\begin{pmatrix}0&0&2\\2&-1&4\\2&2&3\end{pmatrix}$, $\bar{a}_1=(2,2,0)$, $\bar{a}_2=(0,2,0)$, $\bar{a}_3=(1,1,1)$, $\bar{b}_1=(-1,2,2)$, $\bar{b}_2=(-2,-1,2)$, $\bar{b}_3=(2,1,0)$.

20) $A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&0&2\\0&2&1\end{pmatrix}$, $\bar{a}_1=(1,2,-1)$, $\bar{a}_2=(1,0,2)$, $\bar{a}_3=(3,2,0)$, $\bar{b}_1=(-1,2,2)$, $\bar{b}_2=(-2,-1,2)$, $\bar{b}_3=(2,1,0)$.

21) $A=\begin{pmatrix}2&0&2\\1&1&1\\1&-1&0\end{pmatrix}$, $\bar{a}_1=(0,1,2)$, $\bar{a}_2=(2,-1,0)$, $\bar{a}_3=(1,0,2)$, $\bar{b}_1=(2,3,1)$, $\bar{b}_2=(3,4,1)$, $\bar{b}_3=(1,2,2)$.

22) $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&0&-1\\2&-1&0\end{pmatrix}$, $\bar{a}_1=(0,2,1)$, $\bar{a}_2=(-2,-1,1)$, $\bar{a}_3=(3,0,-2)$, $\bar{b}_1=(-1,0,1)$, $\bar{b}_2=(-1,1,1)$, $\bar{b}_3=(1,2,0)$.

23) $A=\begin{pmatrix}0&1&-1\\3&2&1\\1&-2&0\end{pmatrix}$, $\bar{a}_1=(3,-2,1)$, $\bar{a}_2=(-1,0,1)$, $\bar{a}_3=(3,-1,-1)$, $\bar{b}_1=(-1,1,1)$, $\bar{b}_2=(1,1,-1)$, $\bar{b}_3=(1,-1,1)$.

24) $A=\begin{pmatrix}3&2&0\\0&3&1\\3&1&-1\end{pmatrix}$, $\bar{a}_1=(-1,3,2)$, $\bar{a}_2=(2,1,2)$, $\bar{a}_3=(-2,3,0)$, $\bar{b}_1=(2,1,0)$, $\bar{b}_2=(1,0,-2)$, $\bar{b}_3=(1,2,0)$.

25) $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$, $\bar{a}_1=(1,0,1)$, $\bar{a}_2=(0,1,1)$, $\bar{a}_3=(1,1,0)$, $\bar{b}_1=(1,0,1)$, $\bar{b}_2=(2,-2,0)$, $\bar{b}_3=(1,-2,1)$.

26) $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&1&0\\-1&-3&1\end{pmatrix}$, $\bar{a}_1=(1,1,-1)$, $\bar{a}_2=(1,2,-2)$, $\bar{a}_3=(2,0,-1)$, $\bar{b}_1=(2,1,2)$, $\bar{b}_2=(2,1,1)$, $\bar{b}_3=(1,2,0)$.

27) $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&3\\0&3&5\end{pmatrix}$, $\bar{a}_1=(1,-2,-3)$, $\bar{a}_2=(2,-3,0)$, $\bar{a}_3=(2,0,1)$, $\bar{b}_1=(-1,3,-1)$, $\bar{b}_2=(1,-3,-1)$, $\bar{b}_3=(1,1,1)$.

28) $A=\begin{pmatrix}2&2&-1\\-3&1&-1\\1&1&2\end{pmatrix}$, $\bar{a}_1=(2,1,4)$, $\bar{a}_2=(-1,2,2)$, $\bar{a}_3=(1,-1,-1)$, $\bar{b}_1=(1,1,0)$, $\bar{b}_2=(-1,0,1)$, $\bar{b}_3=(1,1,-1)$.

29) $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\-2&2&-3\\2&-1&2\end{pmatrix}$, $\bar{a}_1=(1,2,-1)$, $\bar{a}_2=(2,-1,2)$, $\bar{a}_3=(1,2,0)$, $\bar{b}_1=(2,0,-1)$, $\bar{b}_2=(-1,1,-1)$, $\bar{b}_3=(1,1,0)$.

30) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\bar{a}_1=(0,1,-2)$, $\bar{a}_2=(2,1,0)$, $\bar{a}_3=(-1,-2,1)$, $\bar{b}_1=(2,1,1)$, $\bar{b}_2=(1,-1,0)$, $\bar{b}_3=(-1,1,-1)$.

8.7. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного матрицей в некотором базисе. Найти матрицу оператора в базисе из собственных векторов.

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$; 7) $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; 8) $\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$;

9) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; 10) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$; 11) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$; 12) $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$;

13) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$; 14) $\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$; 15) $\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$; 16) $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;

17) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$; 18) $\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$; 19) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$; 20) $\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;

21) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$; 22) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; 23) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$; 24) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$;

25) $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$; 26) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; 27) $\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$; 28) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$;

29) $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$; 30) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

8.8. Найти собственные числа и собственные векторы линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей. Найти матрицу оператора в базисе из собственных векторов.

1) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 0 & -4 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ 3 & 5 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} -2 & -3 & -3 \\ 3 & 4 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 4 & -8 & 8 \\ 6 & -7 & 6 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$;

7) $\begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ -3 & -9 & -4 \\ 3 & 13 & 5 \end{pmatrix}$; 8) $\begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$; 9) $\begin{pmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$;

10) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; 11) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$; 12) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$;

13) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$; 14) $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 \\ -3 & -8 & -7 \\ 4 & 8 & 6 \end{pmatrix}$; 15) $\begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$;

16) $\begin{pmatrix} -4 & 2 & 10 \\ -4 & 3 & 7 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$; 17) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 18) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$;

19) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; 20) $\begin{pmatrix} 8 & 10 & 12 \\ -12 & -18 & -24 \\ 6 & 10 & 14 \end{pmatrix}$; 21) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

22) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & -4 & 0 \\ 2 & 5 & 5 \end{pmatrix}$; 23) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; 24) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -3 & -7 & -7 \\ 4 & 8 & 7 \end{pmatrix}$;

25) $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ -5 & -7 & -9 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; 26) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; 27) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

28) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$; 29) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$; 30) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8.9. Собственным значениям λ_1 и λ_2 линейного оператора соответствуют собственные векторы $\overline{h}_1$ и $\overline{h}_2$. Найти координаты образа вектора $\overline{x}$ в базисе $\vec{h}_1$ и $\vec{h}_2$ и базисе, в котором заданы координаты векторов $\overline{h}_1$, $\vec{h}_2$, $\overline{x}$.

1) $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3,\quad \overline{h}_1 = (2;1),\ \overline{h}_2 = (1;2),\ \overline{x} = (4;-3)$;

2) $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 5,\quad \overline{h}_1 = (-2;1), \overline{h}_2 = (1;-2), \overline{x} = (2;3)$;

3) $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 2,\quad \overline{h}_1 = (3;2),\ \overline{h}_2 = (2;1),\ \overline{x} = (-1;2)$;

4) $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = -2,\quad \overline{h}_1 = (-3;2), \overline{h}_2 = (3;1),\ \overline{x} = (5;4)$;

5) $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 1,\quad \overline{h}_1 = (2;1),\ \overline{h}_2 = (1;-2),\ \overline{x} = (6;5)$;

6) $\lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = -1,\quad \overline{h}_1 = (1;2),\ \overline{h}_2 = (-2;1),\ \overline{x} = (2;2)$;

7) $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -3,$ $\bar{h}_1 = (3;1),\ \bar{h}_2 = (1;1),\ \bar{x} = (4;5);$

8) $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 1,$ $\bar{h}_1 = (2;3),\ \bar{h}_2 = (-2;1),\ \bar{x} = (4;3);$

9) $\lambda_1 = -4, \lambda_2 = 3,$ $\bar{h}_1 = (-2;3), \bar{h}_2 = (2;3),\ \bar{x} = (5;-2);$

10) $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3,$ $\bar{h}_1 = (1;2),\ \bar{h}_2 = (-2;1),\ \bar{x} = (7;3);$

11) $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 5,$ $\bar{h}_1 = (2;-3), \bar{h}_2 = (-3;1), \bar{x} = (4;3);$

12) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2,$ $\bar{h}_1 = (3;-1), \bar{h}_2 = (2;-1), \bar{x} = (-5;2);$

13) $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 4,$ $\bar{h}_1 = (2;3),\ \bar{h}_2 = (1;-2),\ \bar{x} = (3;7);$

14) $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2,$ $\bar{h}_1 = (-2;3), \bar{h}_2 = (-1;3),\ \bar{x} = (3;6);$

15) $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 1,$ $\bar{h}_1 = (1;3),\ \bar{h}_2 = (2;1),\ \bar{x} = (4;3);$

16) $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 2,$ $\bar{h}_1 = (4;1),\ \bar{h}_2 = (3;1),\ \bar{x} = (7;6);$

17) $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2,$ $\bar{h}_1 = (3;1),\ \bar{h}_2 = (2;3),\ \bar{x} = (4;5);$

18) $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 1,$ $\bar{h}_1 = (3;4),\ \bar{h}_2 = (1;1),\ \bar{x} = (7;-6);$

19) $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 1,$ $\bar{h}_1 = (4;-1), \bar{h}_2 = (2;1), \bar{x} = (6;4);$

20) $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1,$ $\bar{h}_1 = (3;2),\ \bar{h}_2 = (1;1),\ \bar{x} = (5;3);$

21) $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 3,$ $\bar{h}_1 = (1;1),\ \bar{h}_2 = (-3;1),\ \bar{x} = (4;7);$

22) $\lambda_1 = -5, \lambda_2 = -1,$ $\bar{h}_1 = (3;4),\ \bar{h}_2 = (1;2),\ \bar{x} = (7;1);$

23) $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 4,$ $\bar{h}_1 = (5;3),\ \bar{h}_2 = (2;1),\ \bar{x} = (3;5);$

24) $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2,$ $\bar{h}_1 = (2;5),\ \bar{h}_2 = (1;2),\ \bar{x} = (7;4);$

25) $\lambda_1 = -4, \lambda_2 = -3,$ $\bar{h}_1 = (3;4), \bar{h}_2 = (1;2), \bar{x} = (3;1);$

26) $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 5,$ $\bar{h}_1 = (5;3),\ \bar{h}_2 = (2;-1), \bar{x} = (1;2);$

27) $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1,$ $\bar{h}_1 = (-5;3), \bar{h}_2 = (2;3),\ \bar{x} = (2;1);$

28) $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 4,$ $\bar{h}_1 = (4;3),\ \bar{h}_2 = (2;3),\ \bar{x} = (7;-2);$

29) $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 1,$ $\bar{h}_1 = (7;4),\ \bar{h}_2 = (2;1),\ \bar{x} = (2;5);$

30) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2,$ $\bar{h}_1 = (6;5),\ \bar{h}_2 = (1;1),\ \bar{x} = (5;6).$

Дополнительные задачи

8.10. Доказать, что существует единственный линейный оператор, переводящий векторы $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3$, и найти его матрицу в базисе $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3$:

1) $\bar{a}_1 = \{2, 0, -1\}$, $\bar{b}_1 = \{2, -1, -3\}$, $\bar{c}_1 = \{0, -5, 1\}$,
$\bar{a}_2 = \{3, -1, 1\}$, $\bar{b}_2 = \{4, 1, -5\}$, $\bar{c}_2 = \{1, 0, 1\}$,
$\bar{a}_3 = \{1, -3, 2\}$, $\bar{b}_3 = \{1, 3, 1\}$, $\bar{c}_3 = \{2, -1, 11\}$.

2) $\bar{a}_1 = \{0, 1, -1\}$, $\bar{b}_1 = \{3, -1, 0\}$, $\bar{c}_1 = \{1, 2, -1\}$,
$\bar{a}_2 = \{1, -2, 5\}$, $\bar{b}_2 = \{0, 0, 1\}$, $\bar{c}_2 = \{0, 2, 1\}$,
$\bar{a}_3 = \{1, 2, -3\}$, $\bar{b}_3 = \{-9, 0, 4\}$, $\bar{c}_3 = \{1, 0, 3\}$.

3) $\bar{a}_1 = \{1, 0, -3\}$, $\bar{b}_1 = \{-2, 0, 1\}$, $\bar{c}_1 = \{2, 1, -4\}$,
$\bar{a}_2 = \{1, 2, 4\}$, $\bar{b}_2 = \{0, 3, 8\}$, $\bar{c}_2 = \{3, 1, 0\}$,
$\bar{a}_3 = \{1, 1, 2\}$, $\bar{b}_3 = \{7, 0, 1\}$, $\bar{c}_3 = \{3, 2, -1\}$.

4) $\bar{a}_1 = \{1, -3, 5\}$, $\bar{b}_1 = \{0, -2, 1\}$, $\bar{c}_1 = \{-1, 0, 1\}$,
$\bar{a}_2 = \{0, 1, -1\}$, $\bar{b}_2 = \{-1, 3, 4\}$, $\bar{c}_2 = \{2, 0, -3\}$,
$\bar{a}_3 = \{1, 4, 3\}$, $\bar{b}_3 = \{-4, 3, -1\}$, $\bar{c}_3 = \{1, 1, -2\}$.

5) $\bar{a}_1 = \{1, 0, -3\}$, $\bar{b}_1 = \{-2, 0, 1\}$, $\bar{c}_1 = \{2, 1, -4\}$,
$\bar{a}_2 = \{1, 2, 4\}$, $\bar{b}_2 = \{0, 3, 8\}$, $\bar{c}_2 = \{3, 1, 0\}$,
$\bar{a}_3 = \{1, 1, 2\}$, $\bar{b}_3 = \{7, 0, 1\}$, $\bar{c}_3 = \{3, 2, -1\}$.

6) $\bar{a}_1 = \{-3, 1, 0\}$, $\bar{b}_1 = \{2, -1, 1\}$, $\bar{c}_1 = \{-1, 0, 2\}$,
$\bar{a}_2 = \{0, 1, -1\}$, $\bar{b}_2 = \{-3, 0, 1\}$, $\bar{c}_2 = \{-5, 1, 1\}$,
$\bar{a}_3 = \{1, 1, 1\}$, $\bar{b}_3 = \{6, -2, 5\}$, $\bar{c}_3 = \{2, 1, -1\}$.

7) $\bar{a}_1 = \{-3, 1, 0\}$, $\bar{b}_1 = \{-5, 0, 1\}$, $\bar{c}_1 = \{-5, 2, 2\}$,
$\bar{a}_2 = \{0, 1, -1\}$, $\bar{b}_2 = \{-4, 1, 1\}$, $\bar{c}_2 = \{1, 0, -1\}$,
$\bar{a}_3 = \{1, 1, 1\}$, $\bar{b}_3 = \{-2, 8, 3\}$, $\bar{c}_3 = \{-1, 0, 2\}$.

8) $\bar{a}_1=\{-1,4,3\}$, $\bar{b}_1=\{6,-2,4\}$, $\bar{c}_1=\{3,2,0\}$,
$\bar{a}_2=\{0,-2,-3\}$, $\bar{b}_2=\{-1,0,0\}$, $\bar{c}_2=\{1,1,-1\}$,
$\bar{a}_3=\{1,0,-1\}$, $\bar{b}_3=\{1,4,-4\}$, $\bar{c}_3=\{-3,2,1\}$.

9) $\bar{a}_1=\{1,0,2\}$, $\bar{b}_1=\{4,0,3\}$, $\bar{c}_1=\{-1,0,2\}$,
$\bar{a}_2=\{0,3,1\}$, $\bar{b}_2=\{-3,0,1\}$, $\bar{c}_2=\{-1,1,0\}$,
$\bar{a}_3=\{-1,2,2\}$, $\bar{b}_3=\{-2,9,-5\}$, $\bar{c}_3=\{0,2,1\}$.

10) $\bar{a}_1=\{0,2,-1\}$, $\bar{b}_1=\{-3,3,1\}$, $\bar{c}_1=\{1,1,-1\}$,
$\bar{a}_2=\{1,0,1\}$, $\bar{b}_2=\{-1,4,4\}$, $\bar{c}_2=\{-2,0,1\}$,
$\bar{a}_3=\{-2,0,3\}$, $\bar{b}_3=\{3,3,2\}$, $\bar{c}_3=\{-1,0,3\}$.

8.11. В двумерном линейном пространстве геометрических векторов с базисом $(\bar{i},\bar{j})$ заданы пять линейных операторов:

φ_1 - поворот плоскости угол α относительно начала координат;

φ_2 - зеркальное отображение пространства относительно прямой $y = kx$;

φ_3 - равномерное растяжение векторов в n раз;

φ_4 - проектирование на прямую $y=\mathrm{tg}\beta\cdot x$;

φ_5 - растяжение (или сжатие) векторного пространства в направлении координатных осей соответственно в a_1 и a_2 равны;

Для заданных двух операторов φ_p,φ_m найти их матрицы в базисе $(\bar{i},\bar{j})$, матрицу оператора $\psi=\varphi_m\cdot\varphi_p$ и координаты образа вектора $\bar{x}$ от действия ψ;

Проверьте, обладает ли произведение операторов $\varphi_m\varphi_p$ свойством коммутативности.

1) $\varphi_m=\varphi_1,\alpha=-90°$; $\varphi_p=\varphi_5,a_1=\dfrac{1}{2},a_2=4$; $\psi=\varphi_1\varphi_5,\bar{x}=(3;1)$.
2) $\varphi_m=\varphi_2,k=-1$; $\varphi_p=\varphi_4,\beta=-45°$; $\psi=\varphi_2\varphi_4,\bar{x}=(2;-3)$.
3) $\varphi_m=\varphi_3,n=2$; $\varphi_p=\varphi_2,k=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\psi=\varphi_3\varphi_2,\bar{x}=(1;-3)$.
4) $\varphi_m=\varphi_5,a_1=2,a_2=3$; $\varphi_p=\varphi_4,\beta=-60°$; $\psi=\varphi_5\varphi_4,\bar{x}=(-1;2)$.
5) $\varphi_m=\varphi_2,k=1$; $\varphi_p=\varphi_1,\alpha=-30°$; $\psi=\varphi_2\varphi_1,\bar{x}=(1;2)$.
6) $\varphi_m=\varphi_4,\beta=-45°$; $\varphi_p=\varphi_3,n=3$; $\psi=\varphi_4\varphi_3,\bar{x}=(6;2)$.

9. Квадратичные формы

9.1. Найти канонический вид квадратичной формы методом Лагранжа:

1) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$;

2) $x_1^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$;

3) $x_1^2 + 2x_2^2 + x_4^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$;

4) $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;

5) $x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$;

6) $x_3^2 - 3x_2^2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3 - 6x_2x_1$;

7) $2x_1^2 + x_4^2 + x_3^2 + 4x_4x_1 + 4x_4x_2 + 2x_4x_3 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;

8) $x_2^2 - 3x_1^2 - 2x_2x_3 + 2x_2x_1 - 6x_1x_3$;

9) $x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$;

10) $4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$;

11) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$;

12) $2x_1^2 + 18x_2^2 + 8x_3^2 - 12x_1x_2 + 8x_1x_3 - 27x_2x_3$;

13) $12x_1x_2 - 12x_1^2 - 3x_2^2 - 12x_3^2 - 24x_1x_3 + 8x_2x_3$;

14) $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$;

15) $3x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 - 2x_4^2 - 2x_1x_2 - 4x_2x_3 + 2x_2x_4$;

16) $2x_2^2 + 18x_3^2 + 8x_1^2 - 12x_2x_3 + 8x_1x_2 - 27x_1x_3$;

17) $x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1^2 + 2x_2x_3 - 4x_1x_2$;

18) $2x_3^2 + 18x_1^2 + 8x_2^2 - 12x_3x_1 - 8x_2x_3 - 27x_1x_2$;

19) $2x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_2^2 - 8x_3^2$;

20) $x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1^2 + 2x_2x_3 - 4x_1x_2$;

21) x_1x_2;

22) $2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$;

23) $3x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 3x_1x_3 - x_2x_3$;

24) $x_1^2 + 4x_2^2 + 6x_4^2 - 2x_1x_2 + 2x_2x_3 - 2x_3x_4$;

25) $3x_1^2-8x_2^2+2x_3^2+8x_1x_2-3x_1x_3-2x_2x_3$;

26) $x_1^2-5x_3^2-4x_1^2+2x_2x_3-8x_1x_2$;

27) $4x_1^2+4x_2^2-8x_1x_2+x_1^3-x_2x_3$;

28) $x_1^2+2x_2^2+x_3^2-x_1x_2+4x_3x_2$;

29) $x_1^2+4x_2^2-x_1x_2+4x_2x_3$;

30) $x_2^2+5x_1^2-x_3^2+2x_2x_3-4x_1x_2$.

9.2. Определенный тип квадратичной формы (положительно определенная, отрицательно определенная, неотрицательная, неположительная, знакопеременная).

1) $x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-2x_1x_2-4x_2x_3$;

2) $-2x_1^2-5x_2^2-6x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$;

3) $x_1^2+3x_2^2+2x_1x_2+5x_3^2-2x_1x_3-4x_2x_3$;

4) $2x_1x_2+4x_1x_3-3x_1^2-2x_2^2-9x_3^2-8x_2x_3$;

5) $2x_1^2+5x_2^2+x_3^2+6x_1x_2+2x_1x_3+4x_2x_3$;

6) $2x_1x_2-2x_1^2-4x_1x_3-x_2^2+4x_2x_3-4x_3^2$;

7) $3x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2-2x_1x_3-2x_2x_3+x_3^2$;

8) $4x_1x_3-2x_1^2-x_2^2-3x_3^2-2x_1x_2+2x_2x_3$;

9) $x_1^2+2x_1x_2-2x_2^2+4x_1x_3-4x_3^2+2x_2x_3$;

10) $2x_1x_3-x_1^2-4x_1x_2+2x_2x_3-5x_2^2-3x_3^2$;

11) $2x_1^2+2x_1x_2+x_2^2+6x_3^2+6x_1x_3+4x_2x_3$;

12) $x_1^2+x_2^2+4x_1x_3-2x_2x_3+6x_3^2$;

13) $x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2+4x_1x_3-2x_2x_3-13x_3^2$;

14) $2x_1x_2-x_1^2-x_2^2-2x_1x_3+4x_2x_3-2x_3^2$;

15) $4x_1^2-2x_1x_2+x_2^2+4x_1x_3+2x_2x_3+3x_3^2$;

16) $6x_1^2+8x_1x_2+4x_1x_3+x_2x_3+4x_2^2+x_3^2$;

17) $2x_1x_2-5x_1^2-4x_1x_3+2x_2x_3-3x_3^2$;

18) $3x_1^2+4x_1x_2+x_2^2+2x_1x_3+4x_2x_3+x_3^2$;

19) $4x_1x_2-x_1^2-x_2^2+4x_1x_3-4x_2x_3+2x_3^2$;

20) $2x_1x_3-5x_1^2-4x_1x_2-x_2^2+2x_2x_3-3x_3^2$

21) $2x_1x_2 - 3x_1^2 - x_2^2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3 - 5{,}5x_3^2$;

22) $x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2 - 8x_1x_2 - 4x_2x_3 + x_3^2$;

23) $2x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_2^2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3 + 3x_3^2$;

24) $3x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 4x_2x_3 - x_3^2$;

25) $2x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$;

26) $x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + 2x_3^2$;

27) $x_1^2 + x_2^2 + 6x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3 + 5x_3^2$;

28) $4x_1x_2 - x_1^2 - 5x_2^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 - 10x_3^2$;

29) $2x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_2^2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3 + 3x_3^2$;

30) $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + 3x_3^2$;

10. Евклидовы пространства.

Кривые и поверхности второго порядка

10.1. Используя процесс ортогонализации, перейти от базиса $\vec{a}, \bar{b}, \bar{c}$ к ортонормированному базису.

1) $\bar{a}=(3;1;2)$, $\bar{b}=(1;3;1)$, $\bar{c}(-1;2;4)$;

2) $\bar{a}=(1;3;0)$, $\bar{b}=(2;-1;1)$, $\bar{c}(1;-1;2)$;

3) $\bar{a}=(2;1;-1)$, $\bar{b}=(4;3;2)$, $\bar{c}(1;-1;1)$;

4) $\bar{a}=(4;1;1)$, $\bar{b}=(2;-1;-3)$, $\bar{c}(-1;2;-1)$;

5) $\bar{a}=(-2;3;1)$, $\bar{b}=(1;3;-1)$, $\bar{c}(2;4;1)$;

6) $\bar{a}=(1;2;-1)$, $\bar{b}=(5;1;1)$, $\bar{c}(2;-1;3)$;

7) $\bar{a}=(3;2;1)$, $\bar{b}=(-2;2;1)$, $\bar{c}(3;1;-1)$;

8) $\bar{a}=(3;1;2)$, $\bar{b}=(2;1;1)$, $\bar{c}(2;-1;4)$;

9) $\bar{a}=(4;2;1)$, $\bar{b}=(-1;2;1)$, $\bar{c}(-1;1;2)$;

10) $\bar{a}=(-1;2;1)$, $\bar{b}=(2;1;3)$, $\bar{c}(1;1;-1)$;

11) $\bar{a}=(1;1;4)$, $\bar{b}=(0;-3;2)$, $\bar{c}(2;1;-1)$;

12) $\bar{a}=(1;-2;0)$, $\bar{b}=(1;1;3)$, $\bar{c}(1;1;4)$;

13) $\bar{a}=(1;0;5)$, $\bar{b}=(-1;3;2)$, $\bar{c}(1;-1;1)$;

14) $\bar{a}=(1;3;-2)$, $\bar{b}=(0;-1;2)$, $\bar{c}(3;3;4)$;

15) $\bar{a}=(2;3;1)$, $\bar{b}=(-1;0;1)$, $\bar{c}(2;5;-3)$;

16) $\bar{a}=(2;3;1)$, $\bar{b}=(2;2;3)$, $\bar{c}(4;1;2)$;

17) $\bar{a}=(4;2;3)$, $\bar{b}=(3;2;-1)$, $\bar{c}(4;1;2)$;

18) $\bar{a}=(1;2;-1)$, $\bar{b}=(3;0;2)$, $\bar{c}(-1;1;1)$;

19) $\bar{a}=(1;4;1)$, $\bar{b}=(-3;2;0)$, $\bar{c}(1;-1;2)$;

20) $\bar{a}=(2;1;-2)$, $\bar{b}=(3;-1;1)$, $\bar{c}(4;1;0)$;

21) $\bar{a}=(0;5;1)$, $\bar{b}=(3;2;1)$, $\bar{c}(-1;1;0)$;

22) $\bar{a}=(2;2;-1)$, $\bar{b}=(0;-2;1)$, $\bar{c}(1;3;1)$;

23) $\bar{a}=(2;2;1)$, $\bar{b}=(1;-2;0)$, $\bar{c}(-3;2;5)$

24) $\bar{a}=(2;1;3)$, $\bar{b}=(3;5;3)$, $\bar{c}(4;2;1)$;

25) $\bar{a}=(2;3;1)$, $\bar{b}=(1;-1;2)$, $\bar{c}(2;-1;0)$;

26) $\bar{a}=(1;-1;2)$, $\bar{b}=(3;2;0)$, $\bar{c}(-1;1;1)$

27) $\bar{a}=(1;3;6)$, $\bar{b}=(2;2;1)$, $\bar{c}(-1;0;1)$;

28) $\bar{a}=(-1;2;6)$, $\bar{b}=(2;-3;0)$, $\bar{c}(-1;5;8)$;

29) $\bar{a}=(4;7;2)$, $\bar{b}=(7;-1;-2)$, $\bar{c}(3;3;1)$;

30) $\bar{a}=(2;2;1)$, $\bar{b}=(1;2;3)$, $\bar{c}(4;1;0)$.

10.2. Привести уравнения кривой 2 – го порядка к каноническому виду с помощью поворота системы координат и параллельного переноса. Отметить в старой системе координат центр кривой и направления осей новой системы координат. Построить кривую.

1) а) $17x^2-12xy+8y^2-20=0$;
б) $9x^2+y^2+6xy-12x-4y+3=0$.

2) а) $35x^2-30xy-5y^2+4=0$;
б) $4x^2-4xy+y^2+8x-4y+3=0$.

3) а) $4x^2+y^2-4xy+4x+8y=0$;
б) $9x^2+4y^2-12xy+6x-4y+1=0$.

4) а) $7x^2+60xy+32y^2-52=0$;
б) $5x^2-2xy+y^2+6x-2y+2=0$.

5) а) $16x^2+8xy+y^2-6x+24y=0$;
б) $x^2-6xy+9y^2+4x-12y-51=0$.

6) а) $37x^2+32xy+13y^2-45=0$;
б) $9x^2+12xy+4y^2-3x-2y-2=0$.

7) а) $9x^2+6xy+y^2-8x+24y=0$;
б) $9x^2+12xy+4y^2-12x-8y+4=0$.

8) а) $37x^2-18xy+13y^2-40=0$;

б) $5x^2-24xy+10y^2+2x+2y+1=0$.

9) а) $3y^2+4xy+4=0$;

б) $x^2+2xy+y^2-4x-4y+3=0$.

10) а) $13x^2-32xy+37y^2-45=0$;

б) $x^2-10xy+25y^2+x-5y-6=0$.

11) а) $5x^2+4xy+8y^2-32x-56y+80=0$;

б) $x^2-4xy+4y^2-1=0$;

12) а) $9x^2+24xy+16y^2-230x+110y-475=0$;

б) $x^2+4xy+y^2-9=0$.

13) а) $5x^2+12xy-22x-12y-19=0$;

б) $x^2-5xy+4y^2+x+2y-2=0$.

14) а) $x^2+2xy+y^2-10x-6y+25=0$;

б) $x^2+2xy+y^2+x+y=0$;

15) а) $5x^2+8xy+5y^2-18x-18y+9=0$;

б) $4x^2-12xy+9y^2-2x+3y-2=0$;

16) а) $5x^2+6xy+5y^2-16x-16y-16=0$;

б) $9x^2-12xy+4y^2-1=0$.

17) а) $6xy+8y^2-12x-26y+11=0$;

б) $x^2+6xy+9y^2-4=0$.

18) а) $7x^2+16xy-23y^2-14x-16y-218=0$;

б) $9x^2+6xy+y^2-1=0$.

19) а) $7x^2-24xy-38x+24y+175=0$;

б) $4x^2+12xy+9y^2-4=0$.

20) а) $9x^2+24xy+16y^2-40x+30y=0$;

б) $16x^2-8xy+y^2-1=0$.

21) а) $x^2+2xy+y^2-8x+4=0$;

б) $4x^2+12xy+9y^2-9=0$.

22) а) $4x^2-4xy+y^2-2x-14y+7=0$;

б) $x^2+4xy+4y^2-9=0$.

23) а) $4x^2+3xy+4y^2-5x+2y-7=0$;

б) $6xy+10y^2+3x+y-2=0$.

24) а) $4x^2-4xy+y^2-8x+6y-2=0$;

б) $2x^2-5xy-12y^2-x+26y-10=0$.

25) а) $4xy-3y^2+6x+6y+1=0$;

б) $3x^2+xy-2y^2-5x+5y-2=0$.

26) а) $x^2+2xy+y^2+y=0$;

б) $4x^2+16xy+15y^2-8x-22y-5=0$.

27) а) $x^2-4xy+y^2-4x+2y-2=0$;

б) $4x^2-4xy+y^2-6x+3y-4=0$.

28) а) $x^2+4xy+4y^2-6x-8y=0$;

б) $x^2+4xy+4y^2+3x+6y-4=0$.

29) а) $10x^2-8xy+10y^2-28x+20y+65=0$;

б) $x^2-y^2+2x+4y-3=0$.

30) а) $x^2-2xy+y^2-2x-2y+4=0$;

б) $3x^2-8xy-3y^2+8x+6y-3=0$.

10.3. Привести уравнение поверхности второго порядка к каноническому виду с помощью поворота системы координат и параллельного переноса. Сделать схематический рисунок поверхности в новой системе координат.

1) $x^2+y^2+5z^2-6xy+2xz-2yz=0$;

2) $2xy+2xz+2yz-2x-6y=0$;

3) $x^2+y^2-6xy+2y+2z=0$;

4) $3y^2+3z^2+4xy+4xz-2yz+2x+6z=0$;

5) $2x^2+y^2+2z^2-2xy+2yz+4x-2y=0$;

6) $5x^2+8z^2+4xz-32x-56z=0$;

7) $2x^2+2y^2+3z^2+4xy+2xz+2yz-4x-6y-2z=0$;

8) $y^2+2xy+4xz+2yz-4x-2y=0$;

9) $2xy-2xz+2yz+4x+6z=0$;

10) $6x^2+5y^2+7z^2-4xy+4xz+6x+2z=0$;

11) $x^2+z^2+2xz+4x=0$;

12) $2x^2+6y^2+2z^2-2xy+6xz-2yz+2x+6y+2z=0$;

13) $x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz+4x-4z=0$;

14) $x^2+y^2+4z^2+2xy+4xz+4yz-6z=0$;

15) $x^2-2y^2+z^2+4xy+4yz-10zx+2x+4y-10z-1=0$;

16) $2x^2+5y^2+2z^2-4xy-2xz+4yz-8x=0$;

17) $2x^2+2y^2+2z^2+2xy+2xz+2yz-3y=0$;

18) $x^2+y^2+z^2+4xy+2x+2z=0$;

19) $-x^2+y^2-5z^2+6xz+4yz-14y=0$;

20) $2x^2+y^2+z^2+6yz+8x=0$;

21) $13x^2+27y^2-48xy+2z=0$;

22) $5y^2+8z^2+4yz-32y-56z=0$;

23) $5x^2+9z^2+12xy-22x-12y+6z=0$;

24) $3x^2+2y^2+3z^2-2xy+2yz=0$;

25) $x^2+3y^2-3z^2+6xz+4yz-10x=0$;

26) $2x^2+2y^2-5z^2+2xy-2x-4y-4z=0$;

27) $2x^2+2y^2+3z^2+4xy+2yz+2zx-4x+6y-2z+3=0$;

28) $x^2+5y^2+z^2+2xy+2yz+6zx-2x+6y+2z=0$;

29) $2x^2+5y^2+2z^2-2xy-4xz+2yz+2x-10y-2z-1=0$;

30) $x^2-2y^2+z^2+4xy+4yz-10zx+2x+4y-10z=0$.