Ю.А. Чаповский

Лекции по функциональному анализу

Группы: КА – 63, 64

III курс, семестр 5

Киев—2018

Оглавление

Глава 1

Линейные нормированные пространства

1.1 Определение. Примеры

E — линейное пространство над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, которое обозначается через $\mathbb{K}$. Также используются обозначения $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ и $\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

Определение 1.1.1. *Преднормой* или *полунормой* на линейном пространстве E называется функция $\|\cdot\| \colon E \to \mathbb{R}$, которая удовлетворяет следующим свойствам:

(i) $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$ для всех $\boldsymbol{x} \in E$;

(ii) $\|\lambda \boldsymbol{x}\| = |\lambda|\, \|\boldsymbol{x}\|$ для всех $\boldsymbol{x} \in E$ и $\lambda \in \mathbb{K}$;

(iii) (неравенство треугольника) $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$ для любой пары элементов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in E$.

Если выполнено также условие, что

(iv) $\|\boldsymbol{x}\| = 0$ только для $\boldsymbol{x} = 0$,

то преднорма $\|\cdot\|$ называется *нормой*. Линейное пространство E с заданной на нем нормой $\|\cdot\|$ называется *линейным нормированным пространством* и обозначается $(E, \|\cdot\|)$.

Пример 1.1.2. Для линейного пространства $E = \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) над полем $\mathbb{K}$

$$\|x\| = |x|$$

является нормой.

◀ Рассмотрим случай $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. (Все остается верно и для $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

(i) Очевидно, что $|x| \geq 0$ для всех $x \in \mathbb{K}$.

(ii) Если $\lambda \in \mathbb{R}$ и $x \in \mathbb{R}$, то $|\lambda x| = |\lambda|\, |x|$.

(iii) Для $x, y \in \mathbb{R}$ имеем $|x + y| \leq |x| + |y|$.

(iv) Очевидно, что, если $|x| = 0$, то $x = 0$.

►

Пример 1.1.3. $\mathbb{K}_2^n$. Для $\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n$, $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)^t$, $x_s \in \mathbb{K}$ для всех $s = 1, \dots, n$, положим

$$\|\boldsymbol{x}\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2}.$$

Тогда $\|\cdot\|_2$ является нормой на $\mathbb{K}^n$. Линейное нормированное пространство $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ обозначается $\mathbb{K}_2^n$.

Если $N_0 \subset \{1, \dots, n\}$, $N_0 \neq \emptyset$, то

$$\|\boldsymbol{x}\|_{2,N_0} = \sqrt{\sum_{k \in \mathbb{N}_0} |x_k|^2}$$

является полунормой.

Если $N_0 = \{1, \dots, n\}$, то для всех $\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n$ имеем, что

$$\|\boldsymbol{x}\|_{2,N_0} = \|\boldsymbol{x}\|_2$$

является нормой.

◄ Рассмотрим случай $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. (Все остается верно и для $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Докажем, что $\|\cdot\|_2$ является нормой.

(i) Очевидно, что для всех $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)^t$

$$\|\boldsymbol{x}\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2} \geq 0.$$

(ii) Если $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)^t$ и $\lambda \in \mathbb{R}$, то $\lambda\boldsymbol{x} = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)^t$, и

$$\|\lambda\boldsymbol{x}\|_2 = \sqrt{|\lambda x_1|^2 + \ldots + |\lambda x_n|^2} = \sqrt{|\lambda|^2\big(|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2\big)} = \\ = |\lambda|\sqrt{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2} = |\lambda|\,\|\boldsymbol{x}\|_2.$$

(iii) Пусть $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^t$, $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)^t$. Тогда $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)^t$, и, используя то, что $|x_s + y_s| \leq |x_s| + |y_s|$ для всех $x_s, y_s \in \mathbb{R}$ неравенство Коши-Буняковского, имеем

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_2 &= \sqrt{|x_1 + y_1|^2 + \ldots + |x_n + y_n|^2} \leq \\
&\leq \sqrt{\big(|x_1| + |y_1|\big)^2 + \ldots + \big(|x_n| + |y_n|\big)^2} = \\
&= \sqrt{|x_1|^2 + 2|x_1|\,|y_1| + |y_1|^2 + \ldots + |x_n|^2 + 2|x_n|\,|y_n| + |y_n|^2} = \\
&= \Big(|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2 + |y_1|^2 + \ldots + |y_n|^2 + \\
&\qquad + 2\big(|x_1|\,|y_1| + \ldots + |x_n|\,|y_n|\big)\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \\
&\leq \Big(|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2 + |y_1|^2 + \ldots + |y_n|^2 + \\
&\qquad + 2\sqrt{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2}\sqrt{|y_1|^2 + \ldots + |y_n|^2}\Big)^{\frac{1}{2}} = \\
&= \big(\|\boldsymbol{x}\|_2^2 + \|\boldsymbol{y}\|_2^2 + 2\|\boldsymbol{x}\|_2\,\|\boldsymbol{y}\|_2\big)^{\frac{1}{2}} = \|\boldsymbol{x}\|_2 + \|\boldsymbol{y}\|_2.
\end{aligned}$$

(iv) Очевидно, что, если

$$\|\boldsymbol{x}\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2} = 0,$$

то $x_1 = \ldots = x_n = 0$, т.е. $\boldsymbol{x} = 0$.

Рассмотрим теперь функцию $\|\cdot\|_{2,N_0}$. Пусть, например, $N_0 = \{1, \ldots, n-1\}$. Тогда для $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)^t$ имеем, что

$$\|\boldsymbol{x}\|_{2,N_0} = \sqrt{|x_1|^2 + \ldots + |x_{n-1}|^2}.$$

Очевидно, что все свойства (i)—(iii) имеют место (надо во всех формулах положить $x_n = 0$). Однако для $\boldsymbol{x}^0 = (0, \ldots, 0, 1)^t$ имеем, что

$$\|\boldsymbol{x}^0\|_{2,N_0} = \sqrt{0^2 + \ldots + 0^2} = 0,$$

при этом $\boldsymbol{x}^0 \neq \mathbf{0}$. Таким образом, $\|\cdot\|_{2,N_0}$ не является нормой, а только полунормой. ▶

Пример 1.1.4. $\mathbb{K}_1^n$: Для линейного пространства $E = \mathbb{K}^n$ над полем $\mathbb{K}$ функция

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 = |x_1| + \ldots + |x_n|$$

задает норму.

Если $N_0 \subset \{1, \ldots, n\}$, $N_0 \neq \emptyset$, то

$$\|\boldsymbol{x}\|_{1,N_0} = \sum_{k \in N_0} |x_k|$$

является полунормой. Если $N_0 = \{1, \ldots, n\}$, то $\| \cdot \|_{1,N_0} = \| \cdot \|_1$ является нормой.

◀ Докажем, что $\| \cdot \|_1$ является нормой.

(i) Действительно, для $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^t$ имеем

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 = |x_1| + \ldots + |x_n| \geq 0.$$

(ii) Если $\lambda \in \mathbb{K}$, то $\lambda\boldsymbol{x} = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)^t$, и

$$\|\lambda\boldsymbol{x}\|_1 = |\lambda x_1| + \ldots + |\lambda x_n| = |\lambda|\big(|x_1| + \ldots + |x_n|\big) = |\lambda|\, \|\boldsymbol{x}\|_1.$$

(iii) Для $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^t$ и $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)^t$ имеем, что $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)^t$, и

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|_1 &= |x_1 + y_1| + \ldots + |x_n + y_n| \leq \\ &\leq |x_1| + |y_1| + \ldots + |x_n| + |y_n| = \\ &= \big(|x_1| + \ldots + |x_n|\big) + \big(|y_1| + \ldots + |y_n|\big) = \\ &= \|\boldsymbol{x}\|_1 + \|\boldsymbol{y}\|_1. \end{aligned}$$

(iv) Если

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 = |x_1| + \ldots + |x_n| = 0,$$

то $x_1 = \ldots = x_n = 0$, т.е. $\boldsymbol{x} = 0$.

Рассмотрим теперь $\|\cdot\|_{1,N_0}$. Очевидно, что эта функция удовлетворяет свойствам (i) — (iii) (надо положить $x_k = 0$, $y_k = 0$ для всех $k \notin N_0$ в всех предыдущих формулах). Однако, если $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, причем $x_k = 0$ для всех $k \in N_0$, то

$$\|\boldsymbol{x}\|_{1,N_0} = 0 + \ldots + 0 = 0.$$

Если при этом $x_{k_0} \neq 0$ хотя бы для одного $k_0 \notin N_0$, то тогда $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$, т.е. (iv) не выполняется и $\|\cdot\|_{1,N_0}$, являясь полунормой, не является нормой. ▶

Пример 1.1.5. $\mathbb{K}^n_\infty$: Пусть $E = \mathbb{K}^n$ над полем $\mathbb{K}$. Тогда

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max_{1\le k\le n} |x_k|$$

является нормой на E.

Если $N_0 \subset \{1, \ldots, n\}$, $N_0 \neq \emptyset$, то

$$\|\boldsymbol{x}\|_{\infty,N_0} = \max_{k\in N_0} |x_k|$$

является полунормой.

◀ Докажем, что $\|\cdot\|_\infty$ является нормой.

(i) Очевидно, что для произвольного $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^t$

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max\bigl\{|x_1|, \ldots, |x_n|\bigr\} \ge 0.$$

(ii) Для $\lambda \in \mathbb{K}$ имеем $\lambda\boldsymbol{x} = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)^t$ и

$$\begin{aligned}\|\lambda\boldsymbol{x}\|_\infty &= \max\bigl\{|\lambda x_1|, \ldots, |\lambda x_n|\bigr\} = \\ &= \max\bigl\{|\lambda|\,|x_1|, \ldots, |\lambda|\,|x_n|\bigr\} = \\ &= |\lambda|\,\max\bigl\{|x_1|, \ldots, |x_n|\bigr\} = \\ &= |\lambda|\,\|\boldsymbol{x}\|_\infty.\end{aligned}$$

(iii) Пусть $\boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_n)^t$. Тогда $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)^t$. Прежде всего заметим, что для произвольного s, $1 \le s \le n$,

$$|x_s| \le \max\bigl\{|x_1|, \dots, |x_n|\bigr\} = \|\boldsymbol{x}\|_\infty.$$

Поэтому, для каждого такого s

$$|x_s + y_s| \le |x_s| + |y_s| \le \|\boldsymbol{x}\|_\infty + \|\boldsymbol{y}\|_\infty,$$

и

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|_\infty = \max\bigl\{|x_1 + y_1|, \dots, |x_n + y_n|\bigr\} \le \|\boldsymbol{x}\|_\infty + \|\boldsymbol{y}\|_\infty.$$

(iv) Если

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max\bigl\{|x_1|, \dots, |x_n|\bigr\} = 0,$$

то $|x_s| = 0$, т.е. $x_s = 0$ для всех s, и, следовательно, $\boldsymbol{x} = 0$.

Случай функции $\|\cdot\|_{\infty, N_0}$ рассматривается аналогично примерам 1.1.3 и 1.1.5. ▶

Утверждение 1.1.6. *Пусть $\|\cdot\|$ — преднорма на линейном пространстве E.*

(a) *Имеем, что* $\|\mathbf{0}\| = 0$.

(b) *Для всех* $\boldsymbol{x}^1, \dots, \boldsymbol{x}^m \in E$*:*

$$\|\boldsymbol{x}^1 + \ldots + \boldsymbol{x}^m\| \le \|\boldsymbol{x}^1\| + \ldots + \|\boldsymbol{x}^m\|.$$

(c) *для любой пары* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in E$*:*

$$\bigl|\|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{y}\|\bigr| \le \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|.$$

Доказательство. **(a)** Действительно,

$$\|\mathbf{0}\| = \|0 \cdot \mathbf{0}\| = 0 \cdot \|\mathbf{0}\| = 0.$$

(b) Используя последовательно неравенство треугольника, имеем

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}^1+\boldsymbol{x}^2+\ldots+\boldsymbol{x}^m\| &= \|\boldsymbol{x}^1+(\boldsymbol{x}^2+\ldots+\boldsymbol{x}^m)\| \le \\ &\le \|\boldsymbol{x}^1\|+\|\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{x}^3+\ldots+\boldsymbol{x}^m\| = \\ &= \|\boldsymbol{x}^1\|+\|\boldsymbol{x}^2+(\boldsymbol{x}^3+\ldots+\boldsymbol{x}^m)\| \le \\ &\le \|\boldsymbol{x}^1\|+\|\boldsymbol{x}^2\|+\|\boldsymbol{x}^3+\ldots+\boldsymbol{x}^m\| \le \ldots \\ &\le \|\boldsymbol{x}^1\|+\|\boldsymbol{x}^2\|+\ldots+\|\boldsymbol{x}^m\|.\end{aligned}$$

(c) Требуется доказать, что

$$-\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| \le \|\boldsymbol{x}\|-\|\boldsymbol{y}\| \le \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|.$$

Используя неравенство треугольника, получим

$$\|\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y}\| \le \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|+\|\boldsymbol{y}\|.$$

Таким образом,

$$\|\boldsymbol{x}\|-\|\boldsymbol{y}\| \le \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|,$$

что есть правая часть доказываемого неравенства. Меняя местами $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, получаем

$$\|\boldsymbol{y}\|-\|\boldsymbol{x}\| \le \|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|,$$

или, умножая обе части на -1, имеем

$$-\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| \le \|\boldsymbol{x}\|-\|\boldsymbol{y}\|.$$

□

Утверждение 1.1.7. *Пусть функция* $\|\cdot\|_1 \colon \mathbb{K}^\infty \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *определена на* $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots)\in\mathbb{K}^\infty$ *как*

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|.$$

Тогда подмножество

$$\ell_1 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^\infty : \|\boldsymbol{x}\|_1 < \infty\}$$

является линейным пространством над $\mathbb{K}$, *и ограничение* $\|\cdot\|_1$ *на* ℓ_1 *является нормой.*

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots)$ и $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \ell_1$, т.е.

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| < \infty, \qquad \|\boldsymbol{y}\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |y_k| < \infty.$$

Поскольку для каждого $k \in \mathbb{N}$

$$|x_k + y_k| \le |x_k| + |y_k|,$$

то для произвольного $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k| \le \sum_{k=1}^{n} \big(|x_k| + |y_k|\big) = \sum_{k=1}^{n} |x_k| + \sum_{k=1}^{n} |y_k| \le$$
$$\le \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| + \sum_{k=1}^{\infty} |y_k| = \|\boldsymbol{x}\|_1 + \|\boldsymbol{y}\|_1.$$

Поскольку это верно для всех n, то, переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем, что

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k| = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k| \le \lim_{n\to\infty} \big(\|\boldsymbol{x}\|_1 + \|\boldsymbol{y}\|_1\big) =$$
$$= \|\boldsymbol{x}\|_1 + \|\boldsymbol{y}\|_1.$$

Это доказывает свойство (iii) определения 1.1.1, а также то, что

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|_1 < \infty,$$

если $\|\boldsymbol{x}\|_1 < \infty$ и $\|\boldsymbol{y}\|_1 < \infty$, т.е. $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in \ell_1$ для $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \ell_1$.

Для $\lambda \in \mathbb{K}$ и $\boldsymbol{x} \in \ell_1$ имеем $\lambda\boldsymbol{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots)$ и

$$\begin{aligned}\|\lambda\boldsymbol{x}\|_1 &= \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda x_k| = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |\lambda x_k| = \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |\lambda|\,|x_k| = \lim_{n\to\infty} |\lambda| \sum_{k=1}^{n} |x_k| = \\ &= |\lambda| \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |x_k| = |\lambda| \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| = \\ &= |\lambda|\,\|\boldsymbol{x}\|_1,\end{aligned}$$

что доказывает свойство (ii) определения 1.1.1. Отсюда следует, что $\|\lambda\boldsymbol{x}\|_1 < \infty$, если $\|\boldsymbol{x}\|_1 < \infty$, т.е. $\lambda\boldsymbol{x} \in \ell_1$ для $\boldsymbol{x} \in \ell_1$.

Таким образом, ℓ_1 является линейным пространством над $\mathbb{K}$, и $\|\cdot\|_1$ является полунормой на ℓ_1.

Наконец, если

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| = 0,$$

то $x_k = 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$, и $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, т.е $\|\cdot\|_1$ является нормой. $\square$

Замечание 1.1.8. Пусть $N_0 \subset \mathbb{N}$ и рассмотрим функцию $\|\cdot\|_{1,N_0} \colon \mathbb{K}^\infty \to \overline{\mathbb{R}}_+$, заданную для $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots)^t \in \mathbb{K}^\infty$ как

$$\|\boldsymbol{x}\|_{1,N_0} = \sum_{k\in N_0} |x_k|.$$

Тогда

$$\ell_{1,N_0} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^\infty : \|\boldsymbol{x}\|_{1,N_0} < \infty\}$$

является линейным пространством над $\mathbb{K}$ и $\|\cdot\|_{1,N_0}$ является на нем полунормой.

Утверждение 1.1.9. *Пусть функции* $\|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty \colon \mathbb{K}^\infty \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *заданы как*

$$\|\boldsymbol{x}\|_2 = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2\Big)^{\frac{1}{2}}, \qquad \|\boldsymbol{x}\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k|.$$

Тогда подмножества

$$\ell_2 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^\infty : \|\boldsymbol{x}\|_2 < \infty\}, \qquad \ell_\infty = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^\infty : \|\boldsymbol{x}\|_\infty < \infty\}$$

являются линейными пространствами над $\mathbb{K}$, *а* $(\ell_2, \|\cdot\|_2)$ *и* $(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ *линейными нормированными пространствами.*

Доказательство. Доказательство проводится аналогично доказательству утверждения 1.1.7 с использованием результатов, полученных в примерах 1.1.3 и 1.1.5.

Рассмотрим случай $\|\cdot\|_2$. Пусть $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots)$ и $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots)$, и $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \ell_2$, т.е.

$$\|\boldsymbol{x}\|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty \qquad \text{и} \qquad \|\boldsymbol{y}\|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2 < \infty.$$

Зафиксируем произвольное $n \in \mathbb{N}$. Тогда, как в примере 1.1.3, имеем, что

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^2} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |y_k|^2} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2} =$$
$$= \|\boldsymbol{x}\|_2 + \|\boldsymbol{y}\|_2.$$

Таким образом,

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^2} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^2} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^2} \le \lim_{n\to\infty} \big(\|\boldsymbol{x}\|_2 + \|\boldsymbol{y}\|_2\big) =$$
$$= \|\boldsymbol{x}\|_2 + \|\boldsymbol{y}\|_2.$$

Это доказывает, что $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|_2 < \infty$, и $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \ell_2$, а также свойство (iii) определения 1.1.1.

Пусть теперь $\lambda \in \mathbb{K}$ и $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots) \in \ell_2$. Имеем

$$\begin{aligned}\|\lambda \boldsymbol{x}\|_2 &= \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda x_k|^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda|^2 \, |x_k|^2} = \\ &= \sqrt{|\lambda|^2 \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2} = |\lambda| \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2} = |\lambda| \, \|\boldsymbol{x}\|_2.\end{aligned}$$

Это доказывает, что $\|\lambda \boldsymbol{x}\|_2 < \infty$, т.е. $\lambda \boldsymbol{x} \in \ell_2$. Таким образом, ℓ_2 является линейным пространством.

Из последнего равенства также следует выполнение (ii) определения 1.1.1. Выполнение (i) и (iv) очевидно.

Случай $\| \cdot \|_\infty$ рассматривается аналогично. □

Утверждение 1.1.10. *Пусть для* $p \in [1, +\infty)$ *функция* $\| \cdot \|_p \colon \mathbb{K}^\infty \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *задана как*

$$\|\boldsymbol{x}\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Тогда подмножество

$$\ell_p = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^\infty : \|\boldsymbol{x}\|_p < \infty\},$$

является линейным пространством над $\mathbb{K}$, *а* $(\ell_p, \| \cdot \|_p)$ *линейным нормированным пространством.*

Доказательство. Без доказательства. □

Утверждение 1.1.11. *На линейном пространстве* $\mathcal{F}(\Omega; \mathbb{K})$ *всех функций на некоторм множестве* Ω *со значениями в* $\mathbb{K}$ *определим функцию* $\| \cdot \|_\infty : \mathcal{F}(\Omega; \mathbb{K}) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *как*

$$\|f\|_\infty = \sup_{\omega \in \Omega} |f(\omega)|, \qquad f \in \mathcal{F}(\Omega; \mathbb{K}),$$

и пусть

$$\mathcal{F}_b(\Omega; \mathbb{K}) = \{f \in \mathcal{F}(\Omega; \mathbb{K}) : \|f\|_\infty < \infty\}.$$

Тогда $\mathcal{F}_b(\Omega;\mathbb{K})$ является линейным нормированным пространством над $\mathbb{K}$, а $\|\cdot\|_\infty$ является нормой на $\mathcal{F}_b(\Omega;\mathbb{K})$.

Доказательство. Докажем, что $\mathcal{F}_b(\Omega;\mathbb{K})$ является линейным пространством (подпространством пространства $\mathcal{F}(\Omega;\mathbb{K})$).

Пусть $f, g \in \mathcal{F}_b(\Omega;\mathbb{K})$, т.е. существуют $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ такие, что $|f(\omega)| \le C_1$ и $|g(\omega)| \le C_2$ для всех $\omega \in \Omega$. Тогда

$$|(f+g)(\omega)| = |f(\omega)+g(\omega)| \le |f(\omega)| + |g(\omega)| \le C_1 + C_2$$

для всех $\omega \in \Omega$. Поэтому $f+g \in \mathcal{F}_b(\Omega;\mathbb{K})$.

Аналогично доказывается, что $\lambda f \in \mathcal{F}_b(\Omega;\mathbb{K})$, если $f \in \mathcal{F}_b(\Omega;\mathbb{K})$, и $\lambda \in \mathbb{K}$.

Докажем, что $\|\cdot\|_\infty$ является нормой на $\mathcal{F}_b(\Omega;\mathbb{K})$.

Свойство (i) в определении 1.1.1 имеет место, поскольку $0(\omega) = 0$ для всех $\omega \in \Omega$ по определению нулевой функции.

Проверим выполнение свойства (ii). Имеем

$$\|\lambda f\|_\infty = \sup_{\omega\in\Omega} |\lambda f|(\omega) = \sup_{\omega\in\Omega} |\lambda f(\omega)| = |\lambda| \sup_{\omega\in\Omega} |f(\omega)| = |\lambda|\, \|f\|_\infty.$$

Наконец, для (iii) имеем, что

$$|f(\omega)| \le \sup_{\omega\in\Omega} |f(\omega)|, \qquad |g(\omega)| \le \sup_{\omega\in\Omega} |g(\omega)|$$

для всех $\omega \in \Omega$. Поэтому

$$|f(\omega)| + |g(\omega)| \le \sup_{\omega\in\Omega} |f(\omega)| + \sup_{\omega\in\Omega} |g(\omega)|$$

для всех $\omega \in \Omega$, и, следовательно,

$$\sup_{\omega\in\Omega}\bigl(|f(\omega)| + |g(\omega)|\bigr) \le \sup_{\omega\in\Omega} |f(\omega)| + \sup_{\omega\in\Omega} |g(\omega)|.$$

Таким образом,

$$\|f+g\|_\infty = \sup_{\omega\in\Omega} |(f+g)(\omega)| = \sup_{\omega\in\Omega} |f(\omega)+g(\omega)| \le$$

$$\leq \sup_{\omega\in\Omega}\bigl(|f(\omega)|+|g(\omega)|\bigr) \leq \sup_{\omega\in\Omega}|f(\omega)|+\sup_{\omega\in\Omega}|g(\omega)| =$$
$$= \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

Наконец, если

$$\|f\|_\infty = \sup_{\omega\in\Omega}|f(\omega)| = 0,$$

то $f(\omega) = 0$ для всех $\omega \in \Omega$, и, следовательно, f является нулевой функцией, откуда следует выполнение (iv). $\square$

Замечание 1.1.12. Пусть $\Omega_0 \subset \Omega$. Для линейного пространства $\mathcal{F}(\Omega;\mathbb{K})$ определим $\|\cdot\|_{\infty,\Omega_0}\colon \mathcal{F}_b(\Omega;\mathbb{K}) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ как

$$\|f\|_{\infty,\Omega_0} = \sup_{\omega\in\Omega_0}|f(\omega)|.$$

Тогда

$$\mathcal{F}_{b,\Omega_0} = \{f \in \mathcal{F}(\Omega;\mathbb{K}) : \|f\|_{\infty,\Omega_0} < \infty\}$$

является линейным подпространством $\mathcal{F}(\Omega;\mathbb{K})$, а $\|\cdot\|_{\infty,\Omega_0}$ является полунормой на $\mathcal{F}_{b,\Omega_0}(\Omega;\mathbb{K})$.

Утверждение 1.1.13. *Пусть $(E, \|\cdot\|)$ — линейное нормированное пространство над полем $\mathbb{K}$, и $E' \subset E$ — линейное подпространство E. Для каждого $\boldsymbol{x}' \in E'$ положим $\|\boldsymbol{x}'\|' = \|\boldsymbol{x}'\|$ (функция $\|\cdot\|'$ является ограничением функции $\|\cdot\|$ на E'). Тогда $(E', \|\cdot\|')$ является линейным нормированным пространством.*

Доказательство. Функция $\|\cdot\|'$ обладает всеми свойствами нормы, поскольку ими обладает функция $\|\cdot\|$. $\square$

Следствие 1.1.14. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{K}^n$ является компактным подмножеством $\mathbb{K}^n$, и для $E = \mathcal{C}(\Omega;\mathbb{K})$, линейного пространства над $\mathbb{K}$ всех непрерывных функций на Ω со значениями в $\mathbb{K}$, положим*

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in\Omega}|f(t)|.$$

Тогда $\|\cdot\|_\infty$ является нормой на $\mathcal{C}(\Omega;\mathbb{K})$.

Доказательство. Поскольку сумма непрерывных функций является непрерывной, и непрерывная функция, умноженная на число, также непрерывна, то $\mathcal{C}(\Omega;\mathbb{K})$ образуют линейное подпространство в линейном пространстве $\mathcal{F}(\Omega;\mathbb{K})$. А, поскольку по теореме II.12.2.1 непрерывная функция на компактном множестве является ограниченной, то $\mathcal{C}(\Omega;\mathbb{K}) \subset \mathcal{F}_b(\Omega;\mathbb{K})$. Поэтому $\mathcal{C}(\Omega;\mathbb{K})$ является линейным подпространством $\mathcal{F}_b(\Omega;\mathbb{K})$, и, согласно утверждению 1.1.13, $(\mathcal{C}(\Omega;\mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$ является линейным нормированным пространством. $\square$

Утверждение 1.1.15. *Для линейного пространства $\mathcal{C}([a,b];\mathbb{K})$ всех непрерывных функций на $[a,b] \subset \mathbb{R}$ со значениями в $\mathbb{K}$ положим*

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

Тогда $\|\cdot\|_1$ является нормой на $\mathcal{C}([a,b];\mathbb{K})$.

Доказательство. Поскольку $|f(t)| \geq 0$ для всех $t \in [a,b]$, то $\|f\|_1 \geq 0$, т.е. (i) в определении 1.1.1 выполнено.

Рассмотрим $\|\lambda f\|_1$ для $\lambda \in \mathbb{K}$ и $f \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{K})$:

$$\|\lambda f\|_1 = \int_a^b |\lambda f(t)|\,dt = \int_a^b |\lambda|\,|f(t)|\,dt = |\lambda| \int_a^b |f(t)|\,dt = |\lambda|\,\|f\|_1,$$

таким образом, (ii) выполнено.

Для $f, g \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{K})$ имеем, что $|f(t)+g(t)| \leq |f(t)| + |g(t)|$ для всех $t \in [a,b]$. Поэтому,

$$\|f+g\|_1 = \int_a^b |f(t)+g(t)|\,dt \leq \int_a^b \big(|f(t)| + |g(t)|\big)\,dt = \\ = \int_a^b |f(t)|\,dt + \int_a^b |g(t)|\,dt = \|f\|_1 + \|g\|_1.$$

Следовательно, свойство (iii) также имеет место.

Наконец, проверим свойство (iv). Пусть $f \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{K})$ и

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\,dt = 0.$$

Если f не является нулевой функцией, то существует $t_0 \in [a,b]$, в которой $f(t_0) \neq 0$. Тогда $|f(t_0)| > 0$. Так как функция f непрерывна, то и функция $|f|$ непрерывна, и, следовательно, существует такое $\delta > 0$, что $f(t) > \frac{f(t_0)}{2}$ для всех $t \in I = (t_0-\delta, t_0+\delta)\cap[a,b]$. Учитывая то, что $|f(t)| \geq 0$ для всех $t \in [a,b]$, имеем

$$\begin{aligned}\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\,dt \geq \int_I |f(t)|\,dt \geq \int_I \frac{f(t_0)}{2}\,dt = \frac{f(t_0)}{2}\int_I dt =\\ = \frac{f(t_0)}{2}\text{длина}(I) \geq \frac{f(t_0)}{2}\delta > 0,\end{aligned}$$

что противоречит условию, что $\|f\|_1 = 0$. Таким образом, предположение, что $f \neq 0$ не верно, т.е. $f = 0$, и имеет место (iv), а, значит, $\|\cdot\|_1$ является нормой. $\square$

Определение 1.1.16. Пусть E — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$. Две нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ на E называются *эквивалентными*, если существуют такие $C_1, C_2 \in \mathbb{R}_+$, что

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 \leq C_1\,\|\boldsymbol{x}\|_2, \qquad \|\boldsymbol{x}\|_2 \leq C_2\,\|\boldsymbol{x}\|_1$$

для всех $\boldsymbol{x} \in E$.

Пример 1.1.17. Нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_\infty$ на $\mathbb{R}^2$ эквивалентны.

◀ Пусть $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^t$. Тогда

$$|x_1| \leq \max\{|x_1|, |x_2|\} = \|\boldsymbol{x}\|_\infty, \qquad |x_2| \leq \max\{|x_1|, |x_2|\} = \|\boldsymbol{x}\|_\infty.$$

Поэтому,

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 = |x_1| + |x_2| \leq \|\boldsymbol{x}\|_\infty + \|\boldsymbol{x}\|_\infty = 2\|\boldsymbol{x}\|_\infty.$$

Таким образом, можно положить $C_1 = 2$.

С другой стороны,

$$|x_i| \leq |x_1| + |x_2| = \|\boldsymbol{x}\|_1, \qquad i = 1, 2.$$

Поэтому,

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max\big\{|x_1|, |x_2|\big\} \leq \|\boldsymbol{x}\|_1,$$

и можно взять $C_2 = 1$. ▶

Лемма 1.1.18. *На линейном пространстве* $\mathbb{K}^n$, $n \in \mathbb{N}$, *произвольная норма* $\|\cdot\|$ *эквивалентна норме* $\|\cdot\|_2$, *где*

$$\|\boldsymbol{x}\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2}, \qquad \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^t.$$

Доказательство. Будем доказывать для случая $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Пусть

$$\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)^t, \quad \boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)^t, \quad \ldots, \quad \boldsymbol{e}_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)^t.$$

Для вектора

$$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) = x_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n$$

имеем, что

$$\|\boldsymbol{x}\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2}.$$

Используя свойства нормы (iii) и (ii), а также неравенство Коши-Буняковского, имеем:

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x}\| &= \|x_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n\| \leq \|x_1\boldsymbol{e}_1\| + \ldots + \|x_n\boldsymbol{e}_n\| = \\
&= |x_1|\,\|\boldsymbol{e}_1\| + \ldots + |x_n|\,\|\boldsymbol{e}_n\| \leq \\
&\leq \sqrt{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2}\sqrt{\|\boldsymbol{e}_1\|^2 + \ldots + \|\boldsymbol{e}_n\|^2} = \\
&= \|\boldsymbol{x}\|_2\sqrt{\|\boldsymbol{e}_1\|^2 + \ldots + \|\boldsymbol{e}_n\|^2}.
\end{aligned}$$

Полагая $C_1 = \sqrt{\|\boldsymbol{e}_1\|^2 + \ldots + \|\boldsymbol{e}_n\|^2} > 0$, из последнего неравенства получаем, что

$$\|\boldsymbol{x}\| \leq C_1 \|\boldsymbol{x}\|_2. \tag{1.1}$$

Для доказательства второго неравенства в определении 1.1.16, докажем вначале, что функция $\|\cdot\|\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ является непрерывной на $\mathbb{R}^n$. Пусть $\boldsymbol{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ — произвольная фиксированная точка. Для $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, используя утверждение 1.1.6 (c), имеем

$$\big|\,\|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{x}^0\|\,\big| \leq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0\| \leq C_1 \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0\|_2,$$

где последнее неравенство следует из (1.1). Следовательно для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \frac{\varepsilon}{C_1}$ такое, что

$$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0\|_2 < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \big|\,\|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{x}^0\|\,\big| < \varepsilon,$$

т.е. норма является непрерывной функцией в точке $\boldsymbol{x}^0$ относительно стандартной нормы в $\mathbb{R}^n$.

Рассмотрим множество

$$S = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n : \|\boldsymbol{y}\|_2 = 1\}.$$

Это множество является ограниченным и замкнутым в $\mathbb{R}^n$, и поэтому компактным. Так как функция $\|\cdot\|\colon S \to \mathbb{R}$ непрерывна, то она достигает свой минимум на S (теорема II.12.2.2), т.е. существует точка $\boldsymbol{y}_* \in S$ для которой

$$\|\boldsymbol{y}_*\| \leq \|\boldsymbol{y}\|$$

для всех $\boldsymbol{y} \in S$. Поскольку $\boldsymbol{y}_* \in S$, то $\boldsymbol{y}_* \neq \boldsymbol{0}$, откуда следует, что $\|\boldsymbol{y}_*\| > 0$.

Пусть теперь $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$. Заметим, что $\frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|_2} \in S$, поскольку

$$\left\|\frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|_2}\right\|_2 = \frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|_2}\|\boldsymbol{x}\|_2 = 1,$$

Но тогда

$$\|\boldsymbol{x}\| = \left\|\|\boldsymbol{x}\|_2 \frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|_2}\right\| = \|\boldsymbol{x}\|_2 \left\|\frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|_2}\right\| \geq \|\boldsymbol{x}\|_2 \|\boldsymbol{y}_*\|, \tag{1.2}$$

поскольку $\boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|_2} \in S$, а значит $\|\boldsymbol{y}\| \geq \|\boldsymbol{y}_*\|$.

Таким образом, из (1.2) следует, что

$$\|\boldsymbol{x}\|_2 \leq \frac{1}{\|\boldsymbol{y}_*\|}\|\boldsymbol{x}\|$$

и, полагая $C_2 = \frac{1}{\|\boldsymbol{y}_*\|}$, получаем вторую часть неравенства для $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$. Если $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, то доказуемое неравенство очевидно.

$\square$

Теорема 1.1.19. *Любые две нормы на $\mathbb{K}^n$, $n \in \mathbb{N}$, эквивалентны.*

Доказательство. Пусть $\|\cdot\|'$ и $\|\cdot\|''$ — две произвольные нормы на $\mathbb{K}^n$. Согласно лемме 1.1.18 каждая из них эквивалентна норме $\|\cdot\|_2$, т.е существуют такие $C_1', C_2', C_1'', C_2'' \in \mathbb{R}_+$, что

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{x}\|' &\leq C_1'\|\boldsymbol{x}\|_2, & \|\boldsymbol{x}\|_2 &\leq C_2'\|\boldsymbol{x}\|', \\ \|\boldsymbol{x}\|'' &\leq C_1''\|\boldsymbol{x}\|_2, & \|\boldsymbol{x}\|_2 &\leq C_2''\|\boldsymbol{x}\|'' \end{aligned}$$

для всех $\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n$. Но тогда имеем, что

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{x}\|' &\leq C_1'\|\boldsymbol{x}\|_2 \leq C_1'C_2''\|\boldsymbol{x}\|'', \\ \|\boldsymbol{x}\|'' &\leq C_1''\|\boldsymbol{x}\|_2 \leq C_1''C_2'\|\boldsymbol{x}\|', \end{aligned}$$

что и доказывает эквивалентность норм. $\square$

Задачи

КР: 11.1 (4), 11.1 (2), 13, 14.1, 16 (1, 2), 16.1.
ДР: 12.1 (p=1, 2), 14.2, 14.5, 17 (1, 2, 4), 16.2.

1.2 Открытые и замкнутые множества

Определение 1.2.1. Пусть $(E, \|\cdot\|)$ — линейное нормированное пространство, $\boldsymbol{x}^0 \in E$, $r > 0$.

(a) Множество

$$B(\boldsymbol{x}^0; r) = \{\boldsymbol{x} \in E : \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0\| < r\}$$

называется *открытым шаром* в E вокруг точки $\boldsymbol{x}^0$ радиуса r.

(b) Множество

$$\overset{\circ}{B}(\boldsymbol{x}^0; r) = B(\boldsymbol{x}^0; r) \setminus \{\boldsymbol{x}^0\}$$

называется *открытым выколотым шаром* в E вокруг точки $\boldsymbol{x}^0$ радиуса r.

(c) Множество

$$B[\boldsymbol{x}^0; r] = \{\boldsymbol{x} \in E : \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0\| \le r\}$$

называется *замкнутым шаром* в E вокруг точки $\boldsymbol{x}^0$ радиуса r.

(d) Множество

$$S[\boldsymbol{x}^0; r] = \{\boldsymbol{x} \in E : \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0\| = r\}$$

называется *сферой* в E вокруг точки $\boldsymbol{x}^0$ радиуса r.

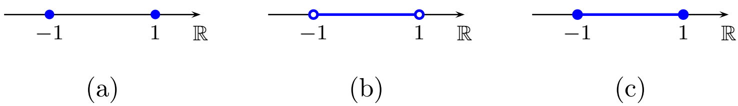


Рис. 1.1: (a) $S[0;1]$, (b) $B(0;1)$, (c) $B[0;1]$ в $\mathbb{R}$.

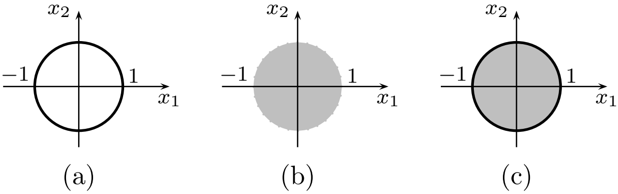


Рис. 1.2: (a) $S[0;1]$, (b) $B(0;1)$, (c) $B[0;1]$ в $\mathbb{R}^2_2$.

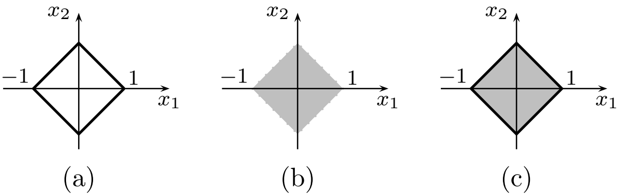


Рис. 1.3: (a) $S[0;1]$, (b) $B(0;1)$, (c) $B[0;1]$ в $\mathbb{R}^2_1$.

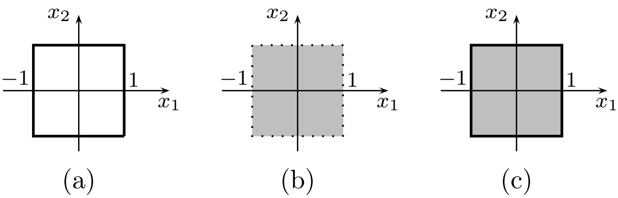


Рис. 1.4: (a) $S[0;1]$, (b) $B(0;1)$, (c) $B[0;1]$ в $\mathbb{R}^2_\infty$.

Пример 1.2.2. Сфера $S[0;1]$, открытый шар $B(0;1)$ и замкнутый шар $B[0;1]$ показаны в пространствах $\mathbb{R}$ (рис. 1.1), $\mathbb{R}^2$ с нормой $\|\cdot\|_2$ (рис. 1.2), $\mathbb{R}^2$ с нормой $\|\cdot\|_1$ (рис. 1.3), $\mathbb{R}^2$ с нормой $\|\cdot\|_\infty$ (рис. 1.4).

Графики функций, принадлежащих сфере $S[0;1]$, открытому шару $B(0;1)$ и замкнутому шару $B[0;1]$ в пространстве $\mathcal{C}([a,b];\mathbb{R})$ показаны на рис. 1.5.

Определение 1.2.3. Пусть $(E, \|\cdot\|)$ — линейное нормированное пространство, и $X \subset E$ — подмножество E.

(i) Точка $\boldsymbol{x}^0 \in X$ называется *внутренней* точкой множества X,

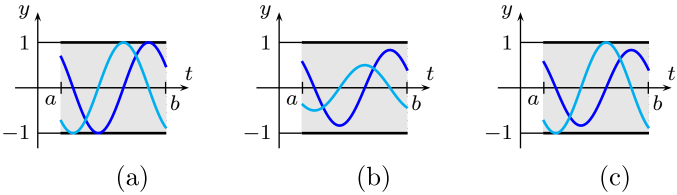


Рис. 1.5: (a) $S[0;1]$, (b) $B(0;1)$, (c) $B[0;1]$ в $\mathcal{C}([a,b];\mathbb{R})$.

если существует такое $r > 0$, что $B(\boldsymbol{x}^0; r) \subset X$. Множество всех внутренних точек множества X обозначается X°.

(ii) Точка $\boldsymbol{x}^0 \in E$ называется *предельной* точкой множества X, если $\overset{\circ}{B}(\boldsymbol{x}^0; r) \cap X \neq \emptyset$ для всех $r > 0$. Множество всех предельных точек множества X обозначается X'.

Пример 1.2.4. 1. Для $E = \mathbb{R}$ и $X = [a, b]$ имеем, что $X^\circ = (a, b)$, $X' = [a, b]$.

2. Если $E = \mathbb{R}$ и $X = \mathbb{Q}$, то $X^\circ = \emptyset$, а $X' = \mathbb{R}$.

3. Для $E = \mathbb{R}^2$ и $X = B[\mathbf{0}; 1]$ имеем, что $X^\circ = B(\mathbf{0}; 1)$, а $X' = B[\mathbf{0}; 1]$.

Определение 1.2.5. Пусть $(E, \|\cdot\|)$ — линейное нормированное пространство.

(i) Подмножество $U \subset E$ называется *открытым* в E, если каждая точка $\boldsymbol{x}^0 \in U$ является внутренней точкой U, т.е. $U = U^\circ$.

Пустое множество $\emptyset$ и все пространство являются открытыми.

(ii) Подмножество $F \subset E$ называется *замкнутым* в E, если F содержит все свои предельные точки, т.е. $F \supset F'$.

Пустое множество $\emptyset$ и все пространство являются замкнутыми.

Пример 1.2.6. 1. Открытый шар $B(\boldsymbol{x}^0; r)$ является открытым множеством, замкнутый шар $B[\boldsymbol{x}^0; r]$ является замкнутым множеством.

2. Множество $\emptyset$ является одновременно открытым и замкнутым.

3. Множество $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{R}$ не является ни открытым ни замкнутым.

Определение 1.2.7. Пусть $X \subset E$. Множество $V \subset E$ называется *окрестностью* множества X, если каждая точка $\boldsymbol{x} \in X$ является внутренней точкой множества V.

Если $X = \{\boldsymbol{x}\}$ и V является окрестностью множества X, то V называется *окрестностью* точки $\boldsymbol{x}$.

Пример 1.2.8.
1. Открытое множество является окрестностью любой своей точки.
2. Множество $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ является окрестностью любой точки из $(0, 1)$.

Теорема 1.2.9. *Множество $F \subset E$ является замкнутым тогда и только тогда, когда множество F^c является открытым.*

Доказательство. Пусть F является замкнутым. Докажем, что F^c является открытым множеством. Пусть $\boldsymbol{x} \in F^c$, и докажем, что $\boldsymbol{x}$ является внутренней точкой F^c. Поскольку $\boldsymbol{x} \notin F$, то $\boldsymbol{x}$ не может быть предельной точкой F, поскольку F содержит все свои предельные точки (F является замкнутым). Это означает, что существует такое $r > 0$, что $\mathring{B}(\boldsymbol{x}; r) \cap F = \emptyset$, т.е. $\mathring{B}(\boldsymbol{x}; r) \subset F^c$. Но тогда $\mathring{B}(\boldsymbol{x}; r) \cup \{\boldsymbol{x}\} = B(\boldsymbol{x}; r) \subset F^c$, и $\boldsymbol{x}$ является внутренней точкой F^c.

Пусть F^c открыто, и $\boldsymbol{x} \in E$ — предельная точка F. Докажем, что $\boldsymbol{x} \in F$, т.е. F содержит все свои предельные точки. Поскольку $\boldsymbol{x} \in E = F \cup F^c$, то $\boldsymbol{x} \in F$ либо $\boldsymbol{x} \in F^c$. Если $\boldsymbol{x} \in F^c$, то, поскольку F^c открыто, существует $r > 0$, для которого $B(\boldsymbol{x}; r) \subset F^c$, т.е. $B(\boldsymbol{x}; r) \cap F = \emptyset$. Но это противоречит тому, что точка $\boldsymbol{x}$ является предельной точкой множества F. Таким образом, $\boldsymbol{x} \in F$. $\square$

Утверждение 1.2.10. *Пусть E — линейное пространство, и нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ на E эквивалентны. Множество $U \subset E$ является* *открытым (соотв., замкнутым) в линейном нормированном пространстве* $E_1 = (E, \|\cdot\|_1)$ *тогда и только тогда, когда оно является открытым (соотв., замкнутым) в линейном нормированном пространстве* $E_2 = (E, \|\cdot\|_2)$.

Доказательство. Поскольку нормы эквивалентны, то согласно определению 1.1.16 существуют такие $C_1, C_2 > 0$, что

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 \leq C_1 \|\boldsymbol{x}\|_2, \qquad \|\boldsymbol{x}\|_2 \leq C_2 \|\boldsymbol{x}\|_1$$

для всех $\boldsymbol{x} \in E$.

Предположим, что U является открытым в E_1, и докажем, что U является открытым в E_2. Пусть $\boldsymbol{x}^0 \in U$. Поскольку U открыто в E_1 найдем такое $r_1 > 0$, что

$$B_1(\boldsymbol{x}^0; r_1) = \{\boldsymbol{x} \in E : \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0\|_1 < r_1\} \subset U.$$

Положим $r_2 = \frac{r_1}{C_1}$, и докажем, что для

$$B_2(\boldsymbol{x}^0; r_2) = \{\boldsymbol{x} \in E : \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0\|_2 < r_2\}$$

имеем, что $B_2(\boldsymbol{x}^0; r_2) \subset B_1(\boldsymbol{x}^0; r_1) \subset U$.

Действительно, если $\boldsymbol{x} \in B_2(\boldsymbol{x}^0; r_2)$, то $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0\|_2 < r_2$, и, следовательно,

$$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0\|_1 \leq C_1 \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0\|_2 < C_1 r_2 = C_1 \frac{r_1}{C_1} = r_1.$$

Таким образом, $\boldsymbol{x} \in B_1(\boldsymbol{x}^0; r_1)$, и, следовательно,

$$B_2(\boldsymbol{x}^0; r_2) \subset B_1(\boldsymbol{x}^0; r_1) \subset U.$$

Аналогично доказывается, что множество, открытое в E_2, является открытым в E_1.

Поскольку семейство замкнутых множеств в линейном нормированном пространстве совпадает с семейством дополнений к открытым множествам, которые совпадают в E_1 и E_2 по доказанному, семейства замкнутых множеств в E_1 и E_2 также совпадают. $\square$

Теорема 1.2.11. (a) *Пусть* $\{U_k\}_{k=1}^m$ — *конечное непустое семейство открытых множеств. Тогда множество* $U = \bigcap_{k=1}^m U_k$ *является открытым.*

(b) *Пусть* $\{U_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ — *произвольное непустое семейство открытых множеств. Тогда множество* $V = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} U_\gamma$ *является открытым.*

(c) *Пусть* $\{F_k\}_{k=1}^m$ — *конечное непустое семейство замкнутых множеств. Тогда множество* $F = \bigcup_{k=1}^m F_k$ *является замкнутым.*

(d) *Пусть* $\{F_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ — *произвольное непустое семейство замкнутых множеств. Тогда множество* $G = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} F_\gamma$ *является замкнутым.*

Доказательство. **(a)** Пусть $U = \bigcap_{k=1}^m U_k$. Если $U = \emptyset$, то оно открыто. Поэтому предположим, что $U \neq \emptyset$.

Пусть $\boldsymbol{x}^0 \in U$. Для каждого $k = 1, \ldots, m$ множество U_k является открытым, и, следовательно, существует такое $r_k > 0$, что $B(\boldsymbol{x}^0; r_k) \subset U_k$. Положим

$$r = \min\{r_1, \ldots, r_m\} > 0.$$

Поскольку $r \leq r_k$, то $B(\boldsymbol{x}^0; r) \subset B(\boldsymbol{x}^0; r_k) \subset U_k$ для всех $k = 1, \ldots, m$. Следовательно, $B(\boldsymbol{x}^0; r) \subset \bigcap_{k=1}^m U_k = U$, что значит, что U открыто.

(b) Пусть $V = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} U_\gamma$, и $\boldsymbol{x}^0 \in V$. Тогда существует такое γ^0, что $\boldsymbol{x}^0 \in U_{\gamma^0}$. Но U_{γ^0} является открытым, поэтому существует такое $r > 0$, что $B(\boldsymbol{x}^0; r) \subset U_{\gamma^0}$. Но тогда $B(\boldsymbol{x}^0; r) \subset U_{\gamma^0} \subset \bigcup_{\gamma\in\Gamma} U_\gamma = V$, и V является открытым.

(c) Пусть $F = \bigcup_{k=1}^m F_k$. Достаточно доказать, что множество

$$F^c = \left(\bigcup_{k=1}^m F_k\right)^c = \bigcap_{k=1}^m F_k^c$$

является открытым (теорема 1.2.9). Согласно теореме 1.2.9, каждое множество F_k^c, $k = 1, \dots, m$, является открытым. Поэтому, используя (a), получаем, что и F^c является открытым.

(d) Пусть $G = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} F_\gamma$. Достаточно доказать, что

$$G^c = \Big(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} F_\gamma\Big)^c = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} F_\gamma^c$$

является открытым (теорема 1.2.9). Но для каждого $\gamma \in \Gamma$ множество F_γ^c является открытым. Применяя (b) имеем, что и G^c открыто, т.е. G замкнуто.

□

Замечание 1.2.12. Бесконечное пересечение открытых множеств может не быть открыто. Например,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (-\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}) = \{0\}.$$

Аналогично, бесконечное объединение замкнутых множеств может не быть замкнутым. Например,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} [-1 + \tfrac{1}{n}, 1 - \tfrac{1}{n}] = (-1, 1).$$

1.3 Последовательности в ЛНП

Определение 1.3.1. Пусть $(E, \|\cdot\|)$ — линейное нормированное пространство, и $X \subset E$.

(a) Функция $\boldsymbol{\varphi}\colon \mathbb{N} \to X$ называется *последовательностью* в X. Последовательность также обозначается $(\boldsymbol{x}_k)_{k=1}^{\infty}$, где $\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{\varphi}(k)$.

(b) Если $\boldsymbol{\varphi}\colon \mathbb{N} \to X$ является последовательностью в X, и $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — неубывающая функция, то последовательность $\boldsymbol{\varphi}\circ\psi\colon \mathbb{N} \to X$ называется *подпоследовательностью* последовательности $\boldsymbol{\varphi}$. Если $\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{\varphi}(k)$ и $k_l = \psi(l)$, то для подпоследовательности $\boldsymbol{\varphi} \circ \psi$ используется обозначение $(\boldsymbol{x}_{k_l})_{l=1}^{\infty}$.

Пример 1.3.2. 1. $X = [-1, 1] \subset \mathbb{R}$, $x_n = (-1)^n$.

2. $X = \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{x}_n = \frac{1}{n}\left(\cos\frac{\pi}{n}, \sin\frac{\pi}{n}\right)$.
3. $X = \ell_2$, $\boldsymbol{x}_n = \frac{1}{n}\boldsymbol{e}_n$.
4. $X = \mathcal{F}_b([0, 1])$, $f_n(t) = t^n$.

Определение 1.3.3. Пусть $(E, \|\cdot\|)$ — линейное нормированное пространство. Элемент $\boldsymbol{x}_* \in E$ называется *пределом последовательности* $(\boldsymbol{x}_k)_{k=1}^{\infty}$ в E, если любая окрестность V точки $\boldsymbol{x}_*$ содержит все члены последовательности $(\boldsymbol{x}_k)_{k=1}^{\infty}$, кроме конечного их числа, т.е. существует такое $N \in \mathbb{N}$, что $\boldsymbol{x}_k \in V$ для всех $k > N$. При этом используются обозначения: $\boldsymbol{x}_k \to \boldsymbol{x}_*$ или $\boldsymbol{x}_* = \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k$.

Определение 1.3.4. Последовательность $(\boldsymbol{x}_k)_{k=1}^{\infty}$ в $X \subset E$ называется *сходящейся* в X (или просто *сходящейся*), если она имеет предел в E, и этот предел является элементом множества X.

Утверждение 1.3.5. *Пусть $(\boldsymbol{x}_k)_{k=1}^{\infty}$ — последовательность в $X \subset E$, и $\boldsymbol{x}_* \in E$. Следующие условия эквивалентны:*

(a) $\boldsymbol{x}_* = \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k$;

(b) $\lim_{k\to\infty} \|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_*\| = 0$.

Доказательство. **(a) ⇒ (b)** Пусть $\boldsymbol{x}_k \to \boldsymbol{x}_*$, $k \to \infty$, согласно определению 1.3.3. Требуется доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что $\|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_*\| < \varepsilon$ для всех $k > N$. Рассмотрим открытый шар $B(\boldsymbol{x}_*; \varepsilon)$, который является окрестностью точки $\boldsymbol{x}_*$. По определению существует $N \in \mathbb{N}$, для которого $\boldsymbol{x}_k \in B(\boldsymbol{x}_*; \varepsilon)$ для всех $k > N$. Но тогда $\|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_*\| < \varepsilon$.

(b) $\Rightarrow$ (a) Пусть V — окрестность точки $\boldsymbol{x}_*$. По определению окрестности (определение 1.2.7) точка $\boldsymbol{x}_*$ является внутренней точкой множества V, т.е. существует такое $\varepsilon > 0$, что $B(\boldsymbol{x}_*;\varepsilon) \subset V$. Поскольку $\|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_*\| \to 0$, существует такое $N \in \mathbb{N}$, что $\|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_*\| < \varepsilon$, т.е. $\boldsymbol{x}_k \in B(\boldsymbol{x}_*;\varepsilon)$ при $k > N$. Это означает, что $\boldsymbol{x}_k \in V$ для таких k.

$\square$

Утверждение 1.3.6. *Пусть* $(\boldsymbol{x}_k)_{k=1}^\infty$ *и* $(\boldsymbol{y}_k)_{k=1}^\infty$ *— сходящиеся последовательности в линейном нормированном пространстве* $(E, \|\cdot\|)$ *над полем* $\mathbb{K}$. *Тогда последовательности* $(\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{y}_k)_{k=1}^\infty$ *и* $(\lambda \boldsymbol{x}_k)_{k=1}^\infty$, *где* $\lambda \in \mathbb{K}$, *также являются сходящимися, причем*

$$\lim_{k\to\infty}(\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{y}_k) = \lim_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k + \lim_{k\to\infty}\boldsymbol{y}_k, \qquad \lim_{k\to\infty}(\lambda\boldsymbol{x}_k) = \lambda\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k.$$

Доказательство. Пусть $\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{x}_*$ и $\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{y}_k = \boldsymbol{y}_*$. Тогда

$$\big\|(\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{y}_k) - (\boldsymbol{x}_* + \boldsymbol{y}_*)\big\| = \big\|(\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_*) + (\boldsymbol{y}_k - \boldsymbol{y}_*)\big\| \le \\ \le \|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_*\| + \|\boldsymbol{y}_k - \boldsymbol{y}_*\|.$$

Используя свойства сходящихся числовых последовательностей, имеем

$$0 \le \lim_{k\to\infty}\big\|(\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{y}_k) - (\boldsymbol{x}_* + \boldsymbol{y}_*)\big\| \le \lim_{k\to\infty}\Big(\|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_*\| + \|\boldsymbol{y}_k - \boldsymbol{y}_*\|\Big) = \\ = \lim_{k\to\infty}\|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_*\| + \lim_{k\to\infty}\|\boldsymbol{y}_k - \boldsymbol{y}_*\| = 0 + 0 = 0.$$

Вторая часть утверждения доказывается аналогично. $\square$

Задачи

КР: 31.6 (1 2), 31.1, 31.3, 37.1.
ДР: 31.6 (3), 31.2, 37.2.

Утверждение 1.3.7. *Пусть E — линейное пространство и $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ — эквивалентные нормы на E. Последовательность $(\boldsymbol{x}_n)_{n=1}^{\infty}$ в E является сходящейся в линейном нормированном пространстве $(E, \|\cdot\|_1)$ тогда и только тогда, когда она является сходящейся в $(E, \|\cdot\|_2)$.*

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}_*$ в $(E, \|\cdot\|_1)$, т.е.

$$\|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}_*\|_1 \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Поскольку нормы являются эквивалентными, то $\|\boldsymbol{x}\|_2 \leq C_2\|\boldsymbol{x}\|_1$ для некоторого C_2 и всех $\boldsymbol{x} \in E$. Но тогда

$$\|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}_*\|_2 \leq C_2\|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}_*\|_1 \to 0, \qquad n \to \infty,$$

т.е. $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}_*$ относительно нормы $\|\cdot\|_2$.

Доказательство завершается заменой нормы $\|\cdot\|_1$ на $\|\cdot\|_2$ и C_2 на C_1. □

Утверждение 1.3.8. *Точка $\boldsymbol{x}_* \in E$ является предельной точкой множества X тогда и только тогда, когда существует такая последовательность $(\boldsymbol{x}_k)_{k=1}^{\infty}$ в X, что $\boldsymbol{x}_k \neq \boldsymbol{x}_*$ для всех $k \in \mathbb{N}$, и $\boldsymbol{x}_k \to \boldsymbol{x}_*$.*

Доказательство. Пусть точка $\boldsymbol{x}_*$ является предельной для множества X. Выберем произвольную последовательность $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to \infty$ (например, $\varepsilon'_k = \frac{1}{k}$). Поскольку $\boldsymbol{x}_*$ является предельной точкой множества X, то $\overset{\circ}{B}(\boldsymbol{x}_*; \varepsilon) \cap X \neq \emptyset$ для любого $\varepsilon > 0$ (определение 1.2.3). Поэтому для каждого ε_k существует точка $\boldsymbol{x}_k \in \overset{\circ}{B}(\boldsymbol{x}_*; \varepsilon_k) \cap X$, причем $\boldsymbol{x}_k \neq \boldsymbol{x}_*$. Поскольку

$$\|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_*\| < \varepsilon_k$$

по построению, и $\varepsilon_k \to 0$, то $\|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_*\| \to 0$, т.е. $\boldsymbol{x}_k \to \boldsymbol{x}_*$.

Обратно, пусть существует последовательность $(\boldsymbol{x}_k)$ в X, $\boldsymbol{x}_k \to \boldsymbol{x}_*$ и $\boldsymbol{x}_k \neq \boldsymbol{x}_*$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Докажем, что $\boldsymbol{x}_*$ является предельной точкой множества X, т.е. $\overset{\circ}{B}(\boldsymbol{x}_*; \varepsilon) \cap X \neq \emptyset$ для любого $\varepsilon > 0$.

Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Поскольку $\boldsymbol{x}_k \to \boldsymbol{x}_*$, то существует $N \in \mathbb{N}$, для которого $\boldsymbol{x}_k \in B(\boldsymbol{x}_*; \varepsilon)$ для всех $k > N$ (определение 1.3.3). А, поскольку $\boldsymbol{x}_k \neq \boldsymbol{x}_*$ для всех k, то $\boldsymbol{x}_k \in \overset{\circ}{B}(\boldsymbol{x}_*; \varepsilon)$ для $k > N$. В частности, $x_{N+1} \in \overset{\circ}{B}(\boldsymbol{x}_*; \varepsilon) \cap X$, т.е. $\overset{\circ}{B}(\boldsymbol{x}_*; \varepsilon) \cap X \neq \emptyset$. □

Теорема 1.3.9. *Пусть последовательность $(\boldsymbol{x}_k)_{k=1}^{\infty}$ имеет предел. Тогда этот предел единственен.*

Доказательство. Предположим, что последовательность $(\boldsymbol{x}_k)$ имеет два предела, $\boldsymbol{x}'_*, \boldsymbol{x}''_* \in E$, $\boldsymbol{x}'_* \neq \boldsymbol{x}''_*$. Пусть V' и V'' — окрестности $\boldsymbol{x}'_*$ и $\boldsymbol{x}''_*$, соответственно, и $V' \cap V'' = \emptyset$ (например, $V' = B(\boldsymbol{x}'_*; \delta)$ и $V'' = B(\boldsymbol{x}''_*; \delta)$, где $\delta = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{x}'_* - \boldsymbol{x}''_*\|$). Тогда, поскольку $\boldsymbol{x}'_* = \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k$, то существует такое $N' \in \mathbb{N}$, что $\boldsymbol{x}_k \in V'$ для всех $k > N'$. Поскольку и $\boldsymbol{x}''_* = \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k$, то существует $N'' \in \mathbb{N}$, для которого $\boldsymbol{x}_k \in V''$ для всех $k > N''$. Но тогда $\boldsymbol{x}_k \in V' \cap V'' = \emptyset$ для всех $k > \max\{N', N''\}$, что является противоречием. □

Теорема 1.3.10. *Пусть $(\boldsymbol{x}_k)_{k=1}^{\infty}$ сходящаяся последовательность в E, и $\boldsymbol{x}_* = \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k$. Если $(\boldsymbol{x}_{k_l})_{l=1}^{\infty}$ — произвольная подпоследовательность последовательности $(\boldsymbol{x}_k)_{k=1}^{\infty}$, то она также является сходящейся, и $\lim_{l\to\infty} \boldsymbol{x}_{k_l} = \boldsymbol{x}_*$.*

Доказательство. Пусть V — окрестность точки $\boldsymbol{x}_*$. Поскольку $\boldsymbol{x}_k \to \boldsymbol{x}_*$, то существует $N \in \mathbb{N}$, для которого $\boldsymbol{x}_k \in V$ для всех $k > N$. Если $(x_{k_l})_{l=1}^{\infty}$ — подпоследовательность последовательности $(x_k)_{k=1}^{\infty}$, то $l \leq k_l$. Поэтому, если $l > N$, то $k_l > N$, и $\boldsymbol{x}_{k_l} \in V$. Таким образом, $\boldsymbol{x}_{k_l} \to x_*$ при $l \to \infty$. □

Утверждение 1.3.11. (a) *Пусть E является одним из пространств ℓ_1, ℓ_2, ℓ_∞. Если $\boldsymbol{x}_k \to \boldsymbol{x}_*$ в E, где $\boldsymbol{x}_k = (x_k^1, \ldots, x_k^j, \ldots)$ и $\boldsymbol{x}_* = (x_*^1, \ldots, x_*^j, \ldots)$, то для каждого $j \in \mathbb{N}$ имеем $x_*^j = \lim_{k\to\infty} x_k^j$.*

(b) *Если $E = \mathcal{F}_b([a, b]; \mathbb{K})$, и $f_k \to f_*$ в E, то для каждого $t \in [a, b]$ имеем $f_*(t) = \lim_{k\to\infty} f_k(t)$.*

Доказательство. **(a)** Доказательство проведем для случая $E = \ell_1$. Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Пусть $\boldsymbol{x}_k \to \boldsymbol{x}_*$ в ℓ_1. Тогда для произвольного j имеем:

$$|x_k^j - x_*^j| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |x_k^i - x_*^i| = \|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_*\|_1 \to 0$$

по утверждению 1.3.5.

(b) Пусть $f_k \to f_*$ в $\mathcal{F}_b([a,b];\mathbb{K})$. Для произвольного $t \in [a,b]$ имеем

$$|f_k(t) - f_*(t)| \leq \sup_{s\in[a,b]} |f_k(s) - f_*(s)| = \|f_k - f_*\|_\infty \to 0,$$

поскольку $f_k \to f_*$.

$\square$

Пример 1.3.12. 1. Рассмотрим последовательность $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ в $\mathcal{F}_b([0,1];\mathbb{R})$ для $f_n(t) = e^{t/n}$.

Если эта последовательность является сходящейся, и f_* является ее пределом, то для каждого $t \in [0,1]$ имеем, что

$$f_*(t) = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{t}{n}} = e^0 = 1.$$

Теперь проверим действительно ли $f_n \to f_*$ в $\mathcal{F}_b([0,1];\mathbb{R})$. Для этого вычислим $\|f_n - f_*\|_\infty$. Имеем (см. рис. 1.6):

$$\|f_n - f_*\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |e^{\frac{t}{n}} - 1| = e^{\frac{1}{n}} - 1.$$

Поэтому,

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f_*\|_\infty = \lim_{n\to\infty} (e^{\frac{1}{n}} - 1) = 0,$$

и, следовательно, $f_n \to f_*$ в $\mathcal{F}_b([0,1];\mathbb{R})$.

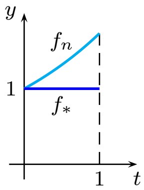


Рис. 1.6: Вычисление $\|f_n - f_*\|_\infty$.

2. Пусть теперь $f_n(t) = t^n$ в $\mathcal{F}_b([0,1];\mathbb{R})$. Предполагая, что эта последовательность является сходящейся в $\mathcal{F}_b([0,1];\mathbb{R})$, и f_* суть ее предел, для каждого $t \in [0,1]$ имеем

$$f_*(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t) = \lim_{n\to\infty} t^n = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 1, \\ 1, & t = 1. \end{cases}$$

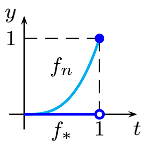


Рис. 1.7: Вычисление $\|f_n - f_*\|_\infty$.

Для $\|f_n - f\|_\infty$ имеем (см. рис. 1.7):

$$\|f_n - f_*\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f_n(t) - f_*(t)| = \sup_{t\in[0,1)} t^n = 1.$$

При этом,

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f_*\|_\infty = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0,$$

и, следовательно, $f_n \not\to f_*$ в $\mathcal{F}_b([0,1];\mathbb{R})$.

1.4 Полнота. Банаховые пространства.

Определение 1.4.1. Последовательность $(\boldsymbol{x}_k)_{k=1}^\infty$ в $X \subset E$ называется *фундаментальной* или *последовательностью Коши*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $N \in \mathbb{N}$, что

$$\|\boldsymbol{x}_{k+p} - \boldsymbol{x}_k\| < \varepsilon$$

для всех $k > N$ и $p \in \mathbb{Z}_+$.

Утверждение 1.4.2. *Сходящаяся последовательность в E является фундаментальной.*

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{x}_k \to \boldsymbol{x}_*$. Это эквивалентно тому, что $\|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_*\| \to 0$. Поэтому, для заданного $\varepsilon > 0$ существует $N \in \mathbb{N}$ для которого $\|x_k - x_*\| < \frac{\varepsilon}{2}$ для $k > N$. Поэтому, если $k > N$, то и $k + p > N$ для $p \in \mathbb{Z}_+$, и, следовательно,

$$\|\boldsymbol{x}_{k+p} - \boldsymbol{x}_k\| = \big\|(\boldsymbol{x}_{k+p} - \boldsymbol{x}_*) - (\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_*)\big\| \leq$$
$$\leq \|\boldsymbol{x}_{k+p} - \boldsymbol{x}_*\| + \|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_*\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\square$

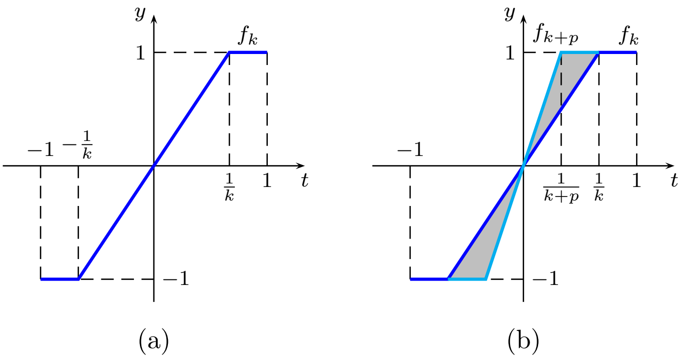


Рис. 1.8: (a) График функции f_k; (b) $\|f_{k+p} - f_k\|_1$ совпадает с площадью затемненной области.

Пример 1.4.3. Пусть $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ — последовательность функций, показанных на рис. 1.8 (a), в $\mathcal{C}([-1, 1]; \mathbb{R})$ с нормой

$$\|f\|_1 = \int_{-1}^{1} |f(t)|\, dt.$$

Тогда (см. рис. 1.8 (b))

$$\|f_{k+p} - f_k\|_1 = \int_{-1}^{1} |f_{k+p}(t) - f_k(t)|\, dt = \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+p}\right) < \frac{1}{k}.$$

Поэтому последовательность $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ является фундаментальной в $\big(\mathcal{C}([-1,1];\mathbb{R}), \|\cdot\|_1\big)$.

Определение 1.4.4. Пусть $(E, \|\cdot\|)$ — линейное нормированное пространство. Подмножество $X \subset E$ называется *ограниченным*, если существует такое $C \in \mathbb{R}_+$, что $\|\boldsymbol{x}\| \le C$ для всех $\boldsymbol{x} \in X$.

Последовательность $(\boldsymbol{x}_k)_{k=1}^{\infty}$ в E называется *ограниченной*, если множество $X = \{\boldsymbol{x}_k : k \in \mathbb{N}\}$ является ограниченным.

Пример 1.4.5.

1. Шар $B(\boldsymbol{x}_0; r)$ в E является ограниченным, поскольку для произвольного $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{x}_0; r)$ имеем:

$$\|\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{x}_0\| \le \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\| + \|\boldsymbol{x}_0\| < r + \|\boldsymbol{x}_0\| = C.$$

2. Последовательность $(k\boldsymbol{e}_k)_{k=1}^{\infty}$ в ℓ_1 не является ограниченной, поскольку

$$\|k\boldsymbol{e}_k\|_1 = k\|\boldsymbol{e}_k\|_1 = k, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

3. Рассмотрим последовательность функций f_n в $\mathcal{C}([0,1];\mathbb{R})$, показанной на рис. 1.9. Тогда $\|f_n\|_\infty = n$, и последовательность $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ не является ограниченной в $\mathcal{C}([0,1];\mathbb{R})$.

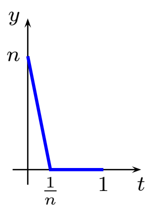


Рис. 1.9: График функции f_n.

4. Рассмотрим последовательность тех же функций (см. рис. 1.9) в пространстве $\mathcal{C}([0,1];\mathbb{R})$ с нормой $\|\cdot\|_1$,
$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt.$$
Поскольку $\|f_n\|_1 = \frac{1}{2}$ для всех $n \in \mathbb{N}$, последовательность $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ является ограниченной в линейном нормированном пространстве $\big(\mathcal{C}([0,1];\mathbb{R}), \|\cdot\|_1\big)$.

Утверждение 1.4.6. *Фундаментальная последовательность ограничена.*

Доказательство. Пусть $(\boldsymbol{x}_k)_{k=1}^{\infty}$ — фундаментальная последовательность в $(E, \|\cdot\|)$. Поскольку
$$\big|\,\|\boldsymbol{x}_{k+p}\| - \|\boldsymbol{x}_k\|\,\big| \le \|\boldsymbol{x}_{k+p} - \boldsymbol{x}_k\|$$
(утверждение 1.1.6 (c)), то последовательность $(\|\boldsymbol{x}_k\|)_{k=1}^{\infty}$ действительных чисел будет фундаментальной, а значит ограниченной (лемма I.2.4.15), т.е.
$$\|\boldsymbol{x}_k\| \le C$$
для некоторого $C \in \mathbb{R}_+$. Но это и означает ограниченность последовательности $(\boldsymbol{x}_k)_{k=1}^{\infty}$. □

Следствие 1.4.7. *Если последовательность $(\boldsymbol{x}_n)_{n=1}^{\infty}$ в E сходится, то она ограничена.*

Доказательство. Поскольку сходящаяся последовательность является фундаментальной (утверждение 1.4.2), то она ограничена согласно утверждению 1.4.6. □

Определение 1.4.8. Линейное нормированное пространство $(E, \|\cdot\|)$ называется *полным* или *банаховым*, если всякая фундаментальная последовательность в E является сходящейся.

Пример 1.4.9. 1. Пространство $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$ является полным. Для случая $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ это доказано в теореме II.10.2.12.

Если $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, то это также верно, поскольку последовательность $(\boldsymbol{z}_k)_{k=1}^{\infty}$ в $\mathbb{C}^n$,

$$\boldsymbol{z}_k = (z_k^1, \ldots, z_k^n)^t = (x_k^1 + iy_k^1, \ldots, x_k^n + iy_k^n)^t \in \mathbb{C}^n$$

сходится тогда и только тогда, когда сходится каждая из последовательностей

$$(x_k^1)_{k=1}^{\infty}, \quad (y_k^1)_{k=1}^{\infty}, \qquad \ldots, \qquad (x_k^n)_{k=1}^{\infty}, \quad (y_k^n)_{k=1}^{\infty},$$

т.е когда сходится последовательность $(\tilde{\boldsymbol{z}}_{\boldsymbol{k}})_{k=1}^{\infty}$ в $\mathbb{R}^{2n}$, где

$$\tilde{\boldsymbol{z}}_{\boldsymbol{k}} = (x_k^1, y_k^1, \ldots, x_k^n, y_k^n)^t \in \mathbb{R}^{2n}.$$

2. Пространство $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ с произвольной нормой $\|\cdot\|$ является банаховым, поскольку в конечномерном пространстве все нормы эквивалентны норме $\|\cdot\|_2$ (теорема 1.1.19), а сходимость относительно одной нормы влечет за собой сходимость в любой ей эквивалентной норме (утверждение 1.3.7).

3. Пусть $E = \mathcal{P}_n([0,1];\mathbb{R})$ — линейное пространство всех многочленов степени не выше n с действительными коэффициентами, рассмотренное как подпространство линейного нормированного пространства $\mathcal{C}([0,1];\mathbb{R})$. Тогда $(E, \|\cdot\|_\infty)$ является банаховым.

   Действительно, многочлены $f_0, \ldots, f_n$, заданные как

$$f_0(t) = 1, \qquad f_1(t) = t, \qquad \ldots, \qquad f_n(t) = t^n,$$

   образуют базис в $\mathcal{P}_n([0,1],\mathbb{R})$ над $\mathbb{R}$, поскольку

$$p(t) = a_n t^n + \ldots + a_1 t + a_0 = a_n f_n + \ldots + a_1 f_1 + a_0 f_0.$$

   Таким образом, $\mathcal{P}_n([0,1],\mathbb{R})$ может рассматриваться как $\mathbb{R}^{n+1}$, но с нормой $\|\cdot\|_\infty$ в $\mathcal{C}([0,1];\mathbb{R})$.

   Согласно примеру 2, $\mathcal{P}_n([0,1];\mathbb{R})$ является банаховым.

4. Линейное нормированное пространство $\big(\mathcal{C}([-1,1];\mathbb{R}), \|\cdot\|_1\big)$, рассмотренное в примере 1.4.3, не является банаховым. Рассмотренная в этом примере последовательность $(f_k)_{k=1}^{\infty}$, будучи фундаментальной, не является сходящейся, поскольку функции этой последовательности аппроксимируют в смысле нормы $\|\cdot\|_1$ на $\mathcal{C}([-1,1];\mathbb{R})$ любую из функций f_*^{α}, $\alpha \in \mathbb{R}$, где

$$f_*^{\alpha}(t) = \begin{cases} -1, & -1 \le t < 0, \\ \alpha, & t = 0, \\ 1, & 0 < t \le 1, \end{cases}$$

причем $f_*^{\alpha} \notin \mathcal{C}([-1,1];\mathbb{R})$ для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ (см. рис. 1.10).

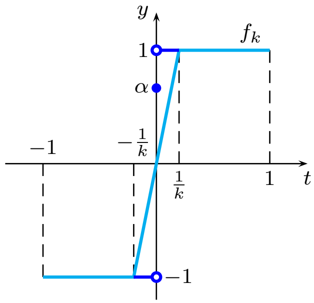


Рис. 1.10: Функции f_k аппроксимируют f_*^{α} относительно $\|\cdot\|_1$.

Теорема 1.4.10. *Линейные нормированные пространства ℓ_1 и ℓ_2 над $\mathbb{K}$ являются банаховыми.*

Доказательство. Рассмотрим пространство ℓ_1 над $\mathbb{R}$. Пусть последовательность $(\boldsymbol{x}_k)_{k=1}^{\infty}$ фундаментальна в ℓ_1. Докажем, что она сходится в ℓ_1, т.е. существует такой элемент $\boldsymbol{x}_* \in \ell_1$, что $\|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_*\|_1 \to 0$.

1. Найдем $\boldsymbol{x}_*$. Пусть

$$\boldsymbol{x}_k = (x_k^1, x_k^2, \ldots), \qquad x_k^1, x_k^2, \ldots \in \mathbb{R}.$$

Зафиксируем координату i, и рассмотрим последовательность чисел $(x_k^i)_{k=1}^\infty$ в $\mathbb{R}$. Поскольку

$$|x_{k+p}^i - x_k^i| \le \sum_{j=1}^n |x_{k+p}^j - x_k^j| = \|\boldsymbol{x}_{k+p} - \boldsymbol{x}_k\|_1$$

для любого $p \in \mathbb{Z}_+$, то последовательность $(x_k^i)_{k=1}^\infty$ элементов из $\mathbb{K}$ является фундаментальной и, следовательно, сходящейся по критерию Коши (теорема I.2.4.7). Следовательно, существует предел

$$x_*^i = \lim_{k\to\infty} x_k^i \tag{1.3}$$

для всех $i \in \mathbb{N}$.

Положим

$$\boldsymbol{x}_* = (x_*^1, x_*^2, \ldots) \in \mathbb{R}^\infty.$$

2. Докажем, что $\|\boldsymbol{x}_* - \boldsymbol{x}_k\|_1 \to 0$. Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$, и рассмотрим

$$\sum_{j=1}^n |x_{k+p}^j - x_k^j| \le \|\boldsymbol{x}_{k+p} - \boldsymbol{x}_k\|_1. \tag{1.4}$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Поскольку последовательность $(\boldsymbol{x}_k)$ является фундаментальной в ℓ_1, то существует $N \in \mathbb{N}$, для которого $\|\boldsymbol{x}_{k+p} - \boldsymbol{x}_k\|_1 < \varepsilon$ для всех $k > N$ и $p \in \mathbb{Z}_+$. Тогда для таких k и произвольных $p \in \mathbb{Z}_+$ в силу (1.4) имеем, что

$$\sum_{j=1}^n |x_{k+p}^j - x_k^j| < \varepsilon. \tag{1.5}$$

Поскольку сумма в (1.5) конечна и функция $|\cdot|$ непрерывна на $\mathbb{R}$, то, переходя к пределу в (1.5) для $p \to \infty$ и используя (1.3), получаем:

$$\lim_{p\to\infty} \sum_{j=1}^n |x_{k+p}^j - x_k^j| = \sum_{j=1}^n \lim_{p\to\infty} |x_{k+p}^j - x_k^j| =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \bigl| \lim_{p\to\infty} x_{k+p}^j - x_k^j \bigr| = \sum_{j=1}^{n} |x_*^j - x_k^j| \le \varepsilon \tag{1.6}$$

для всех $n \in \mathbb{N}$ и $k > N$. Теперь, переходя к пределу при $n \to \infty$, имеем

$$\|\boldsymbol{x}_* - \boldsymbol{x}_k\|_1 = \sum_{j=1}^{\infty} |x_*^j - x_k^j| = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} |x_*^j - x_k^j| \le \varepsilon$$

для всех $k > N$. Это и означает, что $\|\boldsymbol{x}_* - \boldsymbol{x}_k\|_1 \to 0$ при $k \to \infty$.

3. Докажем, что $\boldsymbol{x}_* \in \ell_1$. Поскольку $\|\boldsymbol{x}_* - \boldsymbol{x}_k\|_1 \to 0$, то существует такое $N \in \mathbb{N}$, что $\|\boldsymbol{x}_* - \boldsymbol{x}_k\|_1 < 1$ для всех $k > N$. В частности, $\|\boldsymbol{x}_* - \boldsymbol{x}_{N+1}\|_1 < 1$. Таким образом,

$$\|\boldsymbol{x}_*\|_1 = \|\boldsymbol{x}_* - \boldsymbol{x}_{N+1} + \boldsymbol{x}_{N+1}\|_1 \le \|\boldsymbol{x}_* - \boldsymbol{x}_{N+1}\|_1 + \|\boldsymbol{x}_{N+1}\|_1 < \infty,$$

что доказывает, что $\boldsymbol{x}_* \in \ell_1$.

Доказательство для ℓ_2 и для $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ проводится аналогично. □

Задачи

КР: 37.3, 34.1
ДР: 37 (а) $M = [c, d]$, (б) $M = (c, d)$, 34, 35, 36.

Теорема 1.4.11. *Линейное нормированное пространство $\mathcal{F}_b(\Omega; \mathbb{K})$ является банаховым.*

Доказательство. Идея доказательства та же самая, что и теоремы 1.4.10. Пусть $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ — фундаментальная последовательность в $\mathcal{F}_b(\Omega; \mathbb{K})$. Докажем, что существует такая функция $f_* \in \mathcal{F}_b(\Omega; \mathbb{K})$, что $\|f_* - f_k\|_\infty \to 0$.

1. Найдем f_*. Зафиксируем $\omega \in \Omega$, и рассмотрим последовательность $\big(f_k(\omega)\big)_{k=1}^{\infty}$ действительных чисел, если $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, или последовательность комплексных чисел, если $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Поскольку

$$|f_{k+p}(\omega) - f_k(\omega)| \leq \sup_{\tau \in \Omega} |f_{k+p}(\tau) - f_k(\tau)| = \|f_{k+p} - f_k\|_\infty,$$

то последовательность $\big(f_k(\omega)\big)_{k=1}^{\infty}$ является фундаментальной. Поэтому существует предел, который и определяет значение функции f_* в точке $\omega \in \Omega$:

$$f_*(\omega) = \lim_{k \to \infty} f_k(\omega).$$

2. Докажем, что $\|f_* - f_k\|_\infty \to 0$ при $k \to \infty$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Поскольку последовательность (f_k) фундаментальна, то существует такое $N \in \mathbb{N}$, что для любого $\omega \in \Omega$

$$|f_{k+p}(\omega) - f_k(\omega)| < \varepsilon, \tag{1.7}$$

при $k > N$ и любом $p \in \mathbb{Z}_+$, поскольку

$$|f_{k+p}(\omega) - f_k(\omega)| \leq \sup_{\tau \in \Omega} |f_{k+p}(\tau) - f_k(\tau)| = \|f_{k+p} - f_k\|_\infty < \varepsilon.$$

Переходя к пределу в (1.7) при $p \to \infty$ имеем

$$\lim_{p \to \infty} |f_{k+p}(\omega) - f_k(\omega)| = |\lim_{p \to \infty} f_{k+p}(\omega) - f_k(\omega)| = \\ = |f_*(\omega) - f_k(\omega)| \leq \varepsilon.$$

Поскольку это неравенство имеет место для всех $\omega \in \Omega$, то

$$\|f_* - f_k\|_\infty = \sup_{\tau \in \Omega} |f_*(\tau) - f_k(\tau)| \leq \varepsilon$$

для всех $k > N$. Это означает, что $\|f_* - f_k\|_\infty \to 0$ при $k \to \infty$.

3. Докажем, что $f_* \in \mathcal{F}_b(\Omega; \mathbb{K})$. Ограниченность последовательности (f_k) следует из ее фундаментальности (утверждение 1.4.6), что означает, что $\|f_k\|_\infty < C$ для некоторого $C \in \mathbb{R}$ и всех $k \in \mathbb{N}$. Из сходимости последовательности к f_* следует, что существует $N \in \mathbb{N}$, для которого $\|f_* - f_{N+1}\|_\infty < 1$. Тогда

$$\|f_*\|_\infty = \|f_* - f_{N+1} + f_{N+1}\|_\infty \leq \|f_* - f_{N+1}\|_\infty + \|f_{N+1}\|_\infty < \\ < 1 + C < \infty. \quad \square$$

Утверждение 1.4.12. *Пусть $(E, \|\cdot\|)$ — банахово пространство, а $\tilde{E}$ — замкнутое линейное подпространство пространства E. Тогда $(\tilde{E}, \|\cdot\|)$ — банахово пространство.*

Доказательство. Пусть $(\boldsymbol{x}_k)_{k=1}^\infty$ — фундаментальная последовательность в $\tilde{E}$. Тогда эта последовательность является фундаментальной в E, а поэтому сходящейся в E, поскольку E банахово. Т.е. существует такой элемент $\boldsymbol{x}_* \in E$, что $\boldsymbol{x}_k \to \boldsymbol{x}_*$. Но тогда $\boldsymbol{x}_*$ — предельная точка $\tilde{E}$ (утверждение 1.3.8). А поскольку $\tilde{E}$ замкнуто, и $\boldsymbol{x}_* \in E$ — предельная точка $\tilde{E}$, то $\boldsymbol{x}_* \in \tilde{E}$. $\square$

Утверждение 1.4.13. *Пространство $\mathcal{C}([a, b]; \mathbb{K})$ является замкнутым подпространством пространства $\mathcal{F}_b([a, b]; \mathbb{K})$.*

Доказательство. Поскольку произвольная функция $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$, будучи непрерывной на замкнутом отрезке $[a, b]$, является ограниченной на $[a, b]$ (теорема Вейерштрасса I.3.3.13), т.е. $f \in \mathcal{F}_b([a, b]; \mathbb{K})$, то $\mathcal{C}([a, b]; \mathbb{K}) \subset \mathcal{F}_b([a, b]; \mathbb{K})$. Таким образом, $\mathcal{C}([a, b]; \mathbb{K})$ является линейным подпространством $\mathcal{F}_b([a, b]; \mathbb{K})$. Докажем, что $\mathcal{C}([a, b]; \mathbb{K})$ замкнуто в $\mathcal{F}_b([a, b]; \mathbb{K})$, т.е., если $f_* \in \mathcal{F}_b([a, b]; \mathbb{K})$ — предельная точка $\mathcal{C}([a, b]; \mathbb{K})$, то $f_* \in \mathcal{C}([a, b]; \mathbb{K})$.

Пусть $t_0 \in [a, b]$ — произвольная точка $[a, b]$, и докажем, что f_* непрерывна в t_0, т.е для произвольного $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, для которого

$$|f_*(t) - f_*(t_0)| < \varepsilon$$

для всех $t \in [a, b] \cap (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$.

Зададимся $\varepsilon > 0$, и найдем нужное $\delta > 0$. Поскольку f_* является предельной точкой $\mathcal{C}([a,b];\mathbb{K})$, то существует точка $f \in \overset{\circ}{B}(f_*; \frac{\varepsilon}{3}) \cap \mathcal{C}([a,b];\mathbb{K})$, т.е. такая непрерывная на $[a,b]$ функция f, что

$$\|f_* - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Но тогда

$$|f_*(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{1.8}$$

для всех $t \in [a,b]$, поскольку

$$|f_*(t) - f(t)| \leq \sup_{s \in [a,b]} |f_*(s) - f(s)| = \|f_* - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Поскольку функция f непрерывна в точке t_0, то существует такое $\delta > 0$, что

$$|f(t) - f(t_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{1.9}$$

для всех $t \in [a,b] \cap (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$. Таким образом для таких t имеем:

$$\begin{aligned} \big|f_*(t) - f_*(t_0)\big| &= \big|f_*(t) - f(t) + f(t) - f(t_0) + f(t_0) - f_*(t_0)\big| \leq \\ &\leq \big|f_*(t) - f(t)\big| + \big|f(t) - f(t_0)\big| + \big|f(t_0) - f_*(t_0)\big| < \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

где для оценки первого и третьего слагаемого в сумме использовалась оценка (1.8), а для оценки второго слагаемого использовалось (1.9).

Это доказывает непрерывность функции f_*, а значит $f_* \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{K})$, что и завершает доказательство замкнутости $\mathcal{C}([a,b];\mathbb{K})$ в $\mathcal{F}_b([a,b];\mathbb{K})$. □

Теорема 1.4.14. *Пространство $\mathcal{C}([a,b];\mathbb{K})$ является банаховым.*

Доказательство. Согласно теореме 1.4.11, пространство $\mathcal{F}_b([a,b];\mathbb{K})$ является банаховым, а $\mathcal{C}([a,b];\mathbb{K})$ является замкнутым подпространством пространства $\mathcal{F}_b([a,b];\mathbb{K})$ (утверждение 1.4.13). Поэтому, $\mathcal{C}([a,b];\mathbb{K})$ является банаховым (утверждение 1.4.12). □

1.5 Плотные множества

Определение 1.5.1. Пусть $(E, \|\cdot\|)$ — линейное нормированное пространство, $X \subset E$, и X' — множество всех предельных точек множества X. Множество $\overline{X} = X \cup X'$ называется *замыканием* множества X.

Пример 1.5.2. 1. Пусть $E = \mathbb{R}$ и $X = (0,1]$. Поскольку $X' = [0,1]$, то
$$\overline{X} = (0,1] \cup [0,1] = [0,1].$$

2. Если $E = \mathbb{R}$, а $X = \mathbb{Q}$, то, поскольку $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$, имеем, что $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Утверждение 1.5.3. *Пусть $(E, \|\cdot\|)$ — линейное нормированное пространство, $X \subset E$ и $\overline{X}$ — замыкание X в E. Тогда $\overline{X}$ замкнуто в E.*

Доказательство. По определению, $\overline{X} = X \cup X'$, где X' — множество предельных точек X. Согласно теореме 1.2.9 достаточно доказать, что
$$\overline{X}^c = (X \cup X')^c = X^c \cap X'^c$$
является открытым. Пусть $\boldsymbol{x}^0 \in \overline{X}^c$. Поскольку $\boldsymbol{x}^0 \in X'^c$, т.е. $\boldsymbol{x}^0 \notin X'$, то $\boldsymbol{x}^0$ не является предельной точкой X, т.е. существует такое $r > 0$, что $\overset{\circ}{B}(\boldsymbol{x}^0; r) \cap X = \emptyset$, или $\overset{\circ}{B}(\boldsymbol{x}^0; r) \subset X^c$. Также $\boldsymbol{x}^0 \in X^c$. Поэтому, $B(\boldsymbol{x}^0; r) = \overset{\circ}{B}(\boldsymbol{x}^0; r) \cup \{\boldsymbol{x}^0\} \subset X^c$.

Докажем теперь, что $B(\boldsymbol{x}^0; r) \subset X'^c$, т.е. $B(\boldsymbol{x}^0; r) \cap X' = \emptyset$. Предположим, что это не так, т.е. существует $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{x}^0; r) \cap X'$. Поскольку $B(\boldsymbol{x}^0; r)$ — открытое множество, то $\boldsymbol{x}$ — внутренняя точка множества $B(\boldsymbol{x}^0; r)$. Это значит, что существует $\varepsilon > 0$, для которого $B(\boldsymbol{x}; \varepsilon) \subset B(\boldsymbol{x}^0; r)$ (можно взять $\varepsilon = r - \|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}\|$). Поскольку $B(\boldsymbol{x}^0; r) \cap X = \emptyset$, то имеем, что и $\overset{\circ}{B}(\boldsymbol{x}; \varepsilon) \cap X = \emptyset$, что противоречит тому, что $\boldsymbol{x}$ является предельной точкой множества X, поскольку $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{x}^0; r) \cap X'$ по предположению.

Таким образом, $B(\boldsymbol{x}^0; r) \subset X^c$, $B(\boldsymbol{x}^0; r) \subset (X')^c$, и, следовательно, $B(\boldsymbol{x}^0; r) \subset (\overline{X})^c$, что доказывает, что множество $\overline{X}^c$ открыто. $\square$

Утверждение 1.5.4. *Пусть $(E, \|\cdot\|)$ — линейное нормированное пространство, $X \subset E$. Тогда*

(i) *$\overline{X} = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} F_\gamma$, где $\{F_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ — семейство всех замкнутых множеств F_γ таких, что $F_\gamma \supset X$ для всех $\gamma \in \Gamma$.*

(ii) *$\overline{X}$ — наименьшее замкнутое множество, содержащее X.*

Доказательство. **(i)** Докажем, что $\overline{X} \subset \bigcap_{\gamma\in\Gamma} F_\gamma$. Пусть $\boldsymbol{x} \in \overline{X} = X \cup X'$. Если $\boldsymbol{x} \in X$, то $\boldsymbol{x} \in F_\gamma$ для всех $\gamma \in \Gamma$, поскольку $X \subset F_\gamma$ по условию, т.е. $\boldsymbol{x} \in \bigcap_{\gamma\in\Gamma} F_\gamma$. Если $\boldsymbol{x} \in X'$, т.е. $\boldsymbol{x}$ является предельной точкой X, то $\boldsymbol{x}$ также является предельной точкой F_γ для всех $\gamma \in \Gamma$, поскольку $X \subset F_\gamma$. Но F_γ замкнуто. Следовательно $x \in F_\gamma$, откуда следует, что $\boldsymbol{x} \in \bigcap_{\gamma\in\Gamma} F_\gamma$.

Теперь докажем, что $\bigcap_{\gamma\in\Gamma} F_\gamma \subset \overline{X}$. Пусть $\boldsymbol{x} \in \bigcap_{\gamma\in\Gamma} F_\gamma$. Поскольку $\overline{X}$ является замкнутым множеством (утверждение 1.5.3), содержащим X, то $\overline{X} = F_{\gamma^0}$ для некоторого $\gamma^0 \in \Gamma$. Следовательно, $\boldsymbol{x} \in F_{\gamma^0} = \overline{X}$.

(ii) Множество $G = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} F_\gamma$ является замкнутым (утверждение 1.2.11), содержит X (все F_γ содержат X), и, следовательно, является наименьшим среди всех замкнутых множеств, содержащих X.

□

Определение 1.5.5. Пусть $(E, \|\cdot\|)$ — линейное нормированное пространство. Подмножество $X \subset E$ называется *плотным* в E, если $\overline{X} = E$.

Пример 1.5.6. Для $E = \mathbb{R}$ множество $\mathbb{Q}$ является плотным в $\mathbb{R}$, поскольку $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Утверждение 1.5.7. *Линейное пространство финитных последовательностей*

$$c_{00} = \left\{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots) \in \mathbb{R}^\infty : \exists\, N \in \mathbb{N},\ x_{N+1} = x_{N+2} = \ldots = 0\right\}$$

является плотным линейным подпространством пространства ℓ_1.

Доказательство. Прежде всего заметим, что, если

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N, 0, 0, \ldots) \in c_{00}$$

для некоторого $N \in \mathbb{N}$, то

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| = \sum_{k=1}^{N} |x_k| < \infty,$$

т.е. $\boldsymbol{x} \in \ell_1$. Следовательно, c_{00} является линейным подпространством пространства ℓ_1.

Покажем теперь, что

$$\overline{c_{00}} = c_{00} \cup c_{00}' = \ell_1,$$

где c_{00}' — состоит из векторов из ℓ_1, являющимися предельными точками c_{00} в смысле нормы в ℓ_1, т.е. относительно нормы $\| \cdot \|_1$. Из этого сразу следует, что $\overline{c_{00}} \subset \ell_1$. Остается доказать, что $\ell_1 \subset \overline{c_{00}} = c_{00} \cup c_{00}'$.

Пусть $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_1$. Если существует $N \in \mathbb{N}$, для которого $x_{N+1} = x_{N+2} = \ldots = 0$, то $\boldsymbol{x} \in c_{00} \subset \overline{c_{00}}$. Если такого N не существует, то докажем, что $\boldsymbol{x}$ является предельной точкой c_{00}, т.е $\overset{\circ}{B}(\boldsymbol{x}; r) \cap c_{00} \neq \emptyset$ для произвольного $r > 0$.

Итак, пусть $r > 0$ задано. Поскольку $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_1$, то ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$$

сходится. Это означает, что существует такое $N \in \mathbb{N}$, что

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} |x_k| < r.$$

Положим

$$\boldsymbol{x}^0 = (x_1, \ldots, x_N, 0, 0, \ldots) \in c_{00}.$$

Тогда

$$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0\|_1 = \big\|(x_1, \ldots, x_N, x_{N+1}, \ldots) - (x_1, \ldots, x_N, 0, \ldots)\big\|_1 =$$
$$= \big\|(0, \ldots, 0, x_{N+1}, \ldots)\big\|_1 = \sum_{k=N+1}^{\infty} |x_k| < r$$

в силу выбора числа N. Это означает, что $\boldsymbol{x}^0 \in \overset{\circ}{B}(\boldsymbol{x}; r)$. По определению $\boldsymbol{x}^0 \in c_{00}$. Таким образом, $\boldsymbol{x}^0 \in \overset{\circ}{B}(\boldsymbol{x}; r) \cap c_{00}$, т.е. $\overset{\circ}{B}(\boldsymbol{x}; r) \cap c_{00} \neq \emptyset$. Следовательно, $\boldsymbol{x} \in c'_{00}$, что и оканчивает доказательство. $\square$

Утверждение 1.5.8. *Линейное пространство финитных последовательностей*

$$c_{00} = \big\{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots) \in \mathbb{R}^\infty : \exists\, N \in \mathbb{N},\ x_{N+1} = x_{N+2} = \ldots = 0\big\}$$

является линейным подпространством ℓ_∞, но не является плотным в ℓ_∞.

Доказательство. Прежде всего заметим, что если

$$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_N, 0, \ldots) \in \mathbb{R}_0^\infty,$$

то

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k| = \max\big\{|x_1|, \ldots, |x_N|\big\} < \infty,$$

что означает, что $\boldsymbol{x} \in \ell_\infty$. Следовательно $c_{00} \subset \ell_\infty$.

Теперь покажем, что точка $\boldsymbol{x}^0 = (1, 1, \ldots)$, которая очевидно принадлежит ℓ_∞, не принадлежит $\overline{c_{00}}$. Действительно, для произвольной точки

$$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_N, 0, \ldots) \in c_{00}$$

имеем

$$\|\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{x}\|_\infty = \|(1, 1, \ldots) - (x_1, \ldots, x_N, 0, 0, \ldots)\|_\infty =$$
$$= \max\big\{|1 - x_1|, |1 - x_2|, \ldots, |1 - x_N|, 1\big\} \geq 1.$$

Это означает, что $\boldsymbol{x}^0 \notin \overset{\circ}{B}(\boldsymbol{x};1)$ для произвольной точки $\boldsymbol{x} \in c_{00}$. Таким образом, $\overset{\circ}{B}(\boldsymbol{x}^0;1) \cap c_{00} = \emptyset$, и $\boldsymbol{x}^0$ не является предельной точкой c_{00}. Очевидно, что $\boldsymbol{x}^0 \notin c_{00}$. Таким образом $\boldsymbol{x}^0 \notin \overline{c_{00}}$. Это означает, что $\overline{c_{00}} \neq \ell_\infty$, и c_{00} не является плотным в ℓ_∞. □

Задачи

КР: 38 (2, 1, 6, 7).
ДР: 38 (4, 5, 7, 8, 9), 37.7

1.6 Теоремы Вейерштрасса

1.6.1 Аппроксимация периодических функций тригонометрическими многочленами

В этом разделе $\mathcal{C}_{2\pi}$ обозначает множество всех действительных непрерывных 2π-периодических функций на $\mathbb{R}$.

Лемма 1.6.1. *Множество $\mathcal{C}_{2\pi}$ является линейным пространством над полем $\mathbb{R}$.*

Доказательство. По определению $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ тогда и только тогда, когда $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ и $f(t+2\pi) = f(t)$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Поэтому, если $f, g \in \mathcal{C}_{2\pi}$, то $f + g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ и

$$(f+g)(t+2\pi) = f(t+2\pi) + g(t+2\pi) = f(t) + g(t) = (f+g)(t),$$

т.е. $f + g$ суть непрерывная 2π-периодическая функция на $\mathbb{R}$, т.е. $f + g \in \mathcal{C}_{2\pi}$.

Аналогично $\lambda f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, если $\lambda \in \mathbb{R}$ и $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$. □

Теорема 1.6.2. *Линейное нормированное пространство $(\mathcal{C}_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty)$ является банаховым пространством.*

Доказательство. Докажем, что $\mathcal{C}_{2\pi}$ является замкнутым линейным подпространством пространства $(\mathcal{F}_b(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$. Тогда, согласно утверждению 1.4.12, $\mathcal{C}_{2\pi}$ будет банаховым пространством.

Вначале докажем, что $\mathcal{C}_{2\pi}$ является линейным подпространством пространства $\mathcal{F}_b(\mathbb{R})$. Действительно, если $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, то в силу 2π-периодичности f имеем, что $f(t) = f(t + 2\pi k)$ для всех $k \in \mathbb{Z}$, и, в частности, для такого $k_0 \in \mathbb{Z}$, чтобы $t + 2\pi k_0 \in [0, 2\pi]$. Поэтому

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)| = \sup_{t\in[0,2\pi]} |f(t)|.$$

Но f непрерывна на $\mathbb{R}$, поэтому она непрерывна на $[0, 2\pi]$, и следовательно, ограничена на компактном множестве $[0, 2\pi]$ по теореме Вейерштрасса. Таким образом, $\|f\|_\infty < \infty$, и $f \in \mathcal{F}_b(\mathbb{R})$.

Теперь докажем замкнутость $\mathcal{C}_{2\pi}$ в $\mathcal{F}_b(\mathbb{R})$. Предположим, что $f_* \in \mathcal{F}_b(\mathbb{R})$ является предельной точкой $\mathcal{C}_{2\pi}$, и докажем, что $f_* \in \mathcal{C}_{2\pi}$, т.е. f_* является функцией непрерывной на $\mathbb{R}$ и 2π-периодической.

Для доказательства непрерывности f_* на $\mathbb{R}$ возьмем произвольную точку $t_0 \in \mathbb{R}$, зададимся $\varepsilon > 0$, и найдем такое $\delta > 0$, что будет выполнено следующее условие:

$$\forall\, t \in \mathbb{R} \ :\quad |t - t_0| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |f_*(t) - f_*(t_0)| < \varepsilon. \tag{1.10}$$

Поскольку f_* является предельной точкой $\mathcal{C}_{2\pi}$, то существует функция $f \in B(f_*, \frac{\varepsilon}{3}) \cap \mathcal{C}_{2\pi}$. Используя эту функцию, имеем

$$\begin{aligned} |f_*(t) - f_*(t_0)| &= \big|f_*(t) - f(t) + f(t) - f(t_0) + f(t_0) - f_*(t_0)\big| \le \\ &\le \big|f_*(t) - f(t)\big| + \big|f(t) - f(t_0)\big| + \big|f(t_0) - f_*(t_0)\big| \le \\ &\le \|f_* - f\|_\infty + \big|f(t) - f(t_0)\big| + \|f - f_*\|_\infty < \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \big|f(t) - f(t_0)\big| + \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Поскольку f является непрерывной на $\mathbb{R}$, а значит и в точке t_0, то существует такое $\delta > 0$, что

$$\forall\, t \in \mathbb{R} \ :\quad |t - t_0| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |f(t) - f(t_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Для такого δ условие (1.10) выполнено в силу (1.11).

Для доказательства 2π-периодичности f_* достаточно доказать, что для для произвольного $t \in \mathbb{R}$ и любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$|f(t+2\pi) - f(t)| < \varepsilon.$$

Опять воспользуемся тем, что f_* является предельной точкой $\mathcal{C}_{2\pi}$ и возьмем произвольную функцию $f \in B(f_*, \frac{\varepsilon}{2}) \cap \mathcal{C}_{2\pi}$, для которой, в частности, имеем, что $f(t) = f(t+2\pi)$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Таким образом,

$$\begin{aligned} |f_*(t+2\pi) - f_*(t)| &= |f_*(t+2\pi) - f(t+2\pi) + f(t) - f_*(t)| \leq \\ &\leq \big|f_*(t+2\pi) - f(t+2\pi)\big| + \big|f(t) - f_*(t)\big| \leq \\ &\leq \|f_* - f\|_\infty + \|f - f_*\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом $f_* \in \mathcal{C}_{2\pi}$, что и заканчивает доказательство. □

Везде далее функции $K_n \in \mathcal{C}_{2\pi}$, $n \in \mathbb{N}$, определены как

$$K_n(t) = \Big(\frac{1+\cos t}{2}\Big)^n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Лемма 1.6.3. *Пусть*

$$c_n = \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\,dt.$$

Тогда

$$c_n > \frac{4}{n+1}. \tag{1.12}$$

Доказательство. Действительно, поскольку подынтегральная функция четная, имеем

$$c_n = \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} \Big(\frac{1+\cos t}{2}\Big)^n dt = 2\int_0^{\pi} \Big(\frac{1+\cos t}{2}\Big)^n dt.$$

Так как $0 \le \sin t \le 1$ при $t \in [0, \pi]$, для таких t

$$\Big(\frac{1+\cos t}{2}\Big)^n \ge \Big(\frac{1+\cos t}{2}\Big)^n \sin t.$$

Поэтому,

$$2\int_0^\pi \Big(\frac{1+\cos t}{2}\Big)^n dt > 2\int_0^\pi \Big(\frac{1+\cos t}{2}\Big)^n \sin t\, dt =$$
$$= -\frac{2}{2^n}\int_0^\pi (1+\cos t)^n\, d(1+\cos t) =$$
$$= -\frac{2}{2^n}\frac{(1+\cos t)^{n+1}}{n+1}\Big|_{t=0}^{t=\pi} = \frac{4}{n+1},$$

откуда и следует утверждение. □

Лемма 1.6.4. *Пусть $g \in C_{2\pi}$. Тогда для любого $a \in \mathbb{R}$*

$$\int_{-\pi+a}^{\pi+a} g(t)\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\, dt.$$

Доказательство. Действительно,

$$\int_{-\pi+a}^{\pi+a} g(t)\, dt = \int_{-\pi+a}^{-\pi} g(t)\, dt + \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\, dt + \int_{\pi}^{\pi+a} g(t)\, dt. \qquad (1.13)$$

Для первого интеграла имеем

$$\int_{-\pi+a}^{-\pi} g(t)\, dt = \left[\begin{array}{c} s = t+\pi, \\ t = s-\pi, \\ ds = dt, \\ t \to -\pi + a \Rightarrow s \to a, \\ t \to -\pi \Rightarrow s \to 0, \end{array}\right] = \int_a^0 g(s-\pi)\, ds =$$
$$= -\int_0^a g(s-\pi)\, ds.$$

Для третьего интеграла в (1.13), используя 2π-периодичность g, имеем

$$\int_{\pi}^{\pi+a} g(t)\,dt = \left[\begin{array}{c} s = t-\pi, \\ t = s+\pi, \\ ds = dt, \\ t \to \pi \Rightarrow s \to 0, \\ t \to \pi + a \Rightarrow s \to a, \end{array}\right] = \int_0^a g(s+\pi)\,ds =$$
$$= \int_0^a g(s+\pi-2\pi)\,ds = \int_0^a g(s-\pi)\,ds.$$

Таким образом из (1.13) получаем, что

$$\int_{-\pi+a}^{\pi+a} g(t)\,dt = -\int_0^a g(s-\pi)\,ds + \int_{-\pi}^{\pi} g(s)\,ds + \int_0^a g(s-\pi)\,ds =$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} g(s)\,ds.$$

□

Лемма 1.6.5. *Пусть $f, g \in \mathcal{C}_{2\pi}$. Тогда для всех $t \in \mathbb{R}$*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(s)g(t-s)\,ds = \int_{-\pi}^{\pi} g(s)f(t-s)\,ds. \tag{1.14}$$

Доказательство. Делая замену переменной, имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(s)g(t-s)\,ds = \left[\begin{array}{c} u = t-s, \\ s = t-u, \\ ds = -du, \\ s \to -\pi \;\Rightarrow\; u \to t+\pi, \\ s \to \pi \;\Rightarrow\; u \to t-\pi \end{array}\right] =$$
$$= -\int_{t+\pi}^{t-\pi} f(t-u)g(u)\,du = \int_{t-\pi}^{t+\pi} g(u)f(t-u)\,du =$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} g(u)f(t-u)\,du,$$

где в последнем равенстве использовалась лемма 1.6.4. □

Теорема 1.6.6 (Валле-Пуссен)**.** *Пусть $f \in C_{2\pi}$. Обозначим*

$$K_n(t) = \Big(\frac{1+\cos t}{2}\Big)^n, \qquad c_n = \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\,dt,$$

и положим

$$\tau_n^f(t) = \frac{1}{c_n}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)K_n(t-s)\,ds. \tag{1.15}$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \tau_n^f = f$$

в банаховом пространстве $(\mathcal{C}_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty)$.

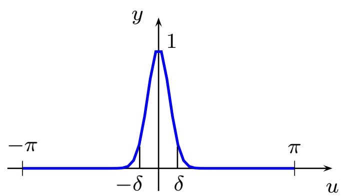


Рис. 1.11: График функции $K_n(u)$ при $n \gg 1$.

Идея доказательства теоремы 1.6.6. Используя лемму 1.6.5, имеем

$$\tau_n^f = \frac{1}{c_n}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)K_n(t-s)\,ds = \frac{1}{c_n}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(s)f(t-s)\,ds.$$

Так как f непрерывна на $[0,2\pi]$, то она равномерно непрерывна, и, следовательно, $f(t-s) \approx f(t)$ для всех $t \in [0,2\pi]$, если $|s| < \delta$ для достаточно малого $\delta > 0$. Для этого δ можно выбрать достаточно большое $n \in \mathbb{N}$ с тем, чтобы $K_n(s) \approx 0$ для $s \in [-\pi,-\delta] \cup [\delta,\pi]$ (см. рис. 1.11). Тогда

$$\tau_n^f = \frac{1}{c_n}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(s)f(t-s)\,ds \approx \frac{1}{c_n}\int_{-\delta}^{\delta} K_n(s)f(t-s)\,ds \approx$$

$$\approx \frac{1}{c_n}\int_{-\delta}^{\delta} K_n(s)f(t)\,ds = \frac{f(t)}{c_n}\int_{-\delta}^{\delta} K_n(s)\,ds \approx$$
$$\approx \frac{f(t)}{c_n}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(s)\,ds = \frac{f(t)}{c_n}c_n = f(t).$$

□

Доказательство теоремы 1.6.6. Зафиксируем $\varepsilon > 0$, и докажем, что существует такое $N \in \mathbb{N}$, что для всех $n > N$ и $t \in \mathbb{R}$:

$$|f(t) - \tau_n^f(t)| < \varepsilon.$$

Используя (1.14) и определение c_n, имеем

$$\begin{aligned}\big|f(t) - \tau_n^f(t)\big| &= \left|f(t) - \frac{1}{c_n}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(s)f(t-s)\,ds\right| = \\ &= \frac{1}{c_n}\left|f(t)c_n - \int_{-\pi}^{\pi} K_n(s)f(t-s)\,ds\right| = \\ &= \frac{1}{c_n}\left|f(t)\int_{-\pi}^{\pi} K_n(s)\,ds - \int_{-\pi}^{\pi} K_n(s)f(t-s)\,ds\right| = \\ &= \frac{1}{c_n}\left|\int_{-\pi}^{\pi} K_n(s)f(t)\,ds - \int_{-\pi}^{\pi} K_n(s)f(t-s)\,ds\right| = \\ &= \frac{1}{c_n}\left|\int_{-\pi}^{\pi} K_n(s)\big(f(t) - f(t-s)\big)\,ds\right| \le \\ &\le \frac{1}{c_n}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(s)\big|f(t) - f(t-s)\big|\,ds. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Так как функция f непрерывна на $[-\pi, \pi]$, она равномерно непрерывна на $[-\pi, \pi]$, а значит и на $\mathbb{R}$ в силу периодичности. Таким образом, существует $\delta > 0$, для которого выполнено условие

$$t', t'' \in \mathbb{R},\ |t' - t''| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |f(t') - f(t'')| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1.17}$$

Используя найденное δ, представим последний интеграл в (1.16) как

$$\frac{1}{c_n}\int_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{c_n}\int_{-\pi}^{-\delta} + \frac{1}{c_n}\int_{-\delta}^{\delta} + \frac{1}{c_n}\int_{\delta}^{\pi}, \tag{1.18}$$

и оценим каждый из них.

Для среднего интеграла, используя (1.17), имеем

$$\frac{1}{c_n}\int_{-\delta}^{\delta}\bigl|f(t)-f(t-u)\bigr|K_n(u)\,du \le \frac{1}{c_n}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{\varepsilon}{3}K_n(u)\,du =$$
$$= \frac{\varepsilon}{3}\frac{1}{c_n}\int_{-\delta}^{\delta}K_n(u)\,du < \frac{\varepsilon}{3}\frac{1}{c_n}\int_{-\pi}^{\pi}K_n(u)\,du = \frac{\varepsilon}{3}\frac{1}{c_n}c_n = \frac{\varepsilon}{3}. \quad (1.19)$$

Теперь рассмотрим последний интеграл в (1.18). Так как функция $f \in \mathcal{C}_{2\pi} \subset \mathcal{F}_b(\mathbb{R})$, то $\|f\|_\infty < \infty$, и

$$|f(t)| \le \|f\|_\infty, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Поэтому, оценивая последний интеграл в (1.18), имеем

$$\frac{1}{c_n}\int_{\delta}^{\pi}\bigl|f(t)-f(t-u)\bigr|K_n(u)\,du \le$$
$$\le \frac{1}{c_n}\int_{\delta}^{\pi}\bigl(|f(t)|+|f(t-u)|\bigr)\,K_n(u)\,du \le$$
$$\le \frac{1}{c_n}\int_{\delta}^{\pi}2\|f\|_\infty K_n(u)\,du = \frac{2\|f\|_\infty}{c_n}\int_{\delta}^{\pi}K_n(u)\,du. \quad (1.20)$$

Функция

$$K_n(u) = \Bigl(\frac{1+\cos u}{2}\Bigr)^n$$

является убывающей на $[\delta,\pi]$. Поэтому, полагая,

$$\frac{1+\cos\delta}{2} = q < 1,$$

имеем, что

$$K_n(u) \le K_n(\delta) = q^n,$$

и, продолжая оценивать последнее выражение в (1.20), получаем

$$\frac{2\|f\|_\infty}{c_n}\int_{\delta}^{\pi}K_n(u)\,du \le \frac{2\|f\|_\infty}{c_n}\int_{\delta}^{\pi}q^n\,du = \frac{2\|f\|_\infty}{c_n}q^n\int_{\delta}^{\pi}du =$$

$$= \frac{2\|f\|_\infty}{c_n} q^n(\pi - \delta) < \frac{2\|f\|_\infty}{c_n} q^n \pi < \frac{2\|f\|_\infty}{\frac{4}{n+1}} q^n \pi = \frac{\|f\|_\infty \pi}{2}(n+1)q^n,$$

где последнее неравенство получено с использованием оценки (1.12). Поскольку $q \in (0,1)$, то

$$\lim_{n\to\infty}(n+1)q^n = 0,$$

и, следовательно, существует N такое, что

$$\frac{\|f\|_\infty \pi}{2}(n+1)q^n < \frac{\varepsilon}{3}$$

для всех $n > N$. Таким образом,

$$\frac{1}{c_n}\int_\delta^\pi \big|f(t) - f(t-u)\big| K_n(u)\,du < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad n > N. \tag{1.21}$$

Те же самые оценки имеют место и для первого интеграла в правой части в (1.18) (с тем же самым N), т.е. имеем

$$\frac{1}{c_n}\int_{-\pi}^{-\delta} \big|f(t) - f(t-u)\big| K_n(u)\,du < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad n > N. \tag{1.22}$$

Суммируя оценки, полученные в (1.19), (1.21) и (1.22), получаем, что

$$\big|f(t) - \tau_n^f(t)\big| < \varepsilon$$

при $n > N$ и всех $t \in \mathbb{R}$, что и заканчивает доказательство. □

Определение 1.6.7. Функция $\tau_n \in \mathcal{C}_{2\pi}$, определенная как

$$\tau_n(t) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos kt + b_k \sin kt, \qquad a_k, b_k \in \mathbb{R},$$

где $|a_n| + |b_n| \neq 0$, называется *тригонометрическим многочленом* степени n.

Утверждение 1.6.8. *Множество $\mathcal{T}_{2\pi}$ всех тригонометрических многочленов является линейным подпространством пространства $\mathcal{C}_{2\pi}$.*

Доказательство. Очевидно. □

Утверждение 1.6.9. *Пусть $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, и $K_n(t) = \left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^n$. Тогда*

$$\tilde{\tau}_n^f = \int_{-\pi}^{\pi} f(s) K_n(t-s)\, ds$$

является тригонометрическим многочленом степени не выше n.

Доказательство. Доказательство будем проводить по индукции на n.

Рассмотрим случай $n = 1$. Имеем

$$\begin{aligned}\tilde{\tau}_1^f &= \int_{-\pi}^{\pi} f(s) K_1(t-s)\, ds = \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \frac{1+\cos(t-s)}{2}\, ds = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} f(s)\big(1 + \cos t \cos s + \sin t \sin s\big)\, ds = \\ &= \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\, ds}{2} + \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(s) \cos s\, ds}{2} \cos t + \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(s) \sin s\, ds}{2} \sin t = \\ &= a_0^f + a_1^f \cos t + b_1^f \sin t,\end{aligned}$$

где

$$a_0^f = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\, ds}{2}, \quad a_1^f = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(s) \cos s\, ds}{2}, \quad b_1^f = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(s) \sin s\, ds}{2}.$$

Пусть

$$\tilde{\tau}_n^f(t) = \int_{-\pi}^{\pi} f(s) K_n(t-s)\, ds$$

является тригонометрическим многочленом степени не выше n. Тогда, учитывая, что

$$K_{n+1}(t) = \left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^{n+1} = \frac{1+\cos t}{2} \left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^n = \frac{1+\cos t}{2} K_n(t),$$

имеем

$$\begin{aligned}
\tilde\tau_{n+1}^{f}(t) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(s)K_{n+1}(t-s)\,ds = \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f(s)\frac{1+\cos(t-s)}{2}K_n(t-s)\,ds = \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\big(1+\cos t\cos s+\sin t\sin s\big)K_n(t-s)\,ds = \\
&= \frac{1}{2}\Big(\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\,K_n(t-s)\,ds+\cos t\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\cos s\,K_n(t-s)\,ds+ \\
&\qquad\qquad +\sin t\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\sin s\,K_n(t-s)\,ds\Big) = \\
&= \frac{1}{2}\big(\tilde\tau_n^{f}(t)+\cos t\,\tilde\tau_n^{f\cdot\cos}(t)+\sin t\,\tilde\tau_n^{f\cdot\sin}(t)\big).
\end{aligned}$$

По предположению, $\tilde\tau_n^{f\cdot\cos}$ и $\tilde\tau_n^{f\cdot\sin}$ являются тригонометрическими многочленами степени не выше n. Из формул разложения произведения косинусов и синусов в суммы следует, что $\cos t\,\tilde\tau_n^{f\cdot\cos}(t)$ и $\sin t\,\tilde\tau_n^{f\cdot\sin}(t)$ являются тригонометрическими многочленами степени не выше $(n+1)$. $\square$

Теорема 1.6.10 (вторая теорема Вейерштрасса)**.** *Линейное подпространство $\mathcal{T}_{2\pi}$ всех тригонометрических многочленов плотно в банаховом пространстве $\mathcal{C}_{2\pi}$ всех непрерывных периодических функций.*

Доказательство. Действительно, если $f_* \in \mathcal{C}_{2\pi}$ и $f_* \notin \mathcal{T}_{2\pi}$, то, согласно теореме 1.6.6, в любом r-шаре $\overset{\circ}{B}(f_*; r)$ содержится тригонометрический многочлен $\tau_n^{f_*}$ для достаточно большого $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Задачи

КР: 65 (1), 67 (ℓ_2).
ДР: 65 (2), 67 (ℓ_∞), 67.1.

1.6.2 Аппроксимация непрерывных функций многочленами

Лемма 1.6.11. *Для всех $n \in \mathbb{N}$:*

$$\int_{-1}^{1} (1-t^2)^n \, dt > \frac{1}{n+1}.$$

Доказательство. Поскольку подынтегральная функция является четной, то

$$\int_{-1}^{1} (1-t^2)^n \, dt = 2\int_{0}^{1} (1-t^2)^n \, dt.$$

Для $t \in [0,1]$ имеем

$$(1-t^2)^n \geq (1-t^2)^n t,$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} (1-t^2)^n \, dt = 2\int_{0}^{1} (1-t^2)^n \, dt \geq 2\int_{0}^{1} (1-t^2)^n t \, dt = \\ = -\int_{0}^{1} (1-t^2)^n \, d(1-t^2) = \\ = -\frac{(1-t^2)^{n+1}}{n+1}\Big|_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

□

Лемма 1.6.12. *Пусть $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, удовлетворяющая условию $f(t) = 0$ для всех $t \notin [0,1]$, и $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$. Тогда для всех $t \in [0,1]$ имеем*

$$\int_{-1}^{1} f(s)g(t-s) \, ds = \int_{-1}^{1} g(s)f(t-s) \, ds.$$

Доказательство. Сделаем замену переменной в интеграле:

$$\int_{-1}^{1} f(s)g(t-s) \, ds = \left[\begin{array}{l|l} u = t-s, & s \to -1 \Rightarrow u \to t+1, \\ s = t-u, & s \to 1 \Rightarrow u \to t-1 \\ ds = -du, & \end{array} \right] =$$

$$= -\int_{t+1}^{t-1} f(t-u)g(u)\,du = \int_{t-1}^{t+1} f(t-u)g(u)\,du =$$
$$= -.\int_{-1}^{t-1} f(t-u)g(u)\,du + \int_{-1}^{1} f(t-u)g(u)\,du +$$
$$+ \int_{1}^{t+1} f(t-u)g(u)\,du.$$

Если $u \leq t-1$, то $t-u \geq 1$, и $f(t-u) = 0$ по условию, т.е.

$$\int_{-1}^{t-1} f(t-u)g(u)\,du = 0.$$

Если $u \geq 1$, то $t-u \leq t-1 \leq 0$, поскольку $t \leq 1$ и $f(t-u) = 0$ по условию. А значит,

$$\int_{1}^{t+1} f(t-u)g(u)\,du = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\int_{-1}^{1} f(s)g(t-s)\,ds = \int_{-1}^{1} f(t-u)g(u)\,du.$$

□

Теорема 1.6.13. *Пусть $f \in C(\mathbb{R})$ и $f(t) = 0$ при $t \notin [0,1]$. Положим*

$$L_n(t) = (1-t^2)^n, \qquad d_n = \int_{-1}^{1} L_n(t)\,dt,$$

и пусть

$$p_{2n}^f(t) = \frac{1}{d_n}\int_0^1 f(s)L_n(t-s)\,ds. \tag{1.23}$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} p_{2n}^f = f$$

в банаховом пространстве $\big(\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty\big)$.

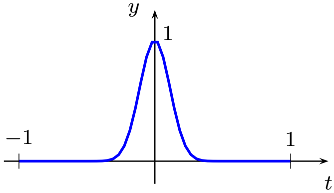


Рис. 1.12: График функции $L_n(t)$ при $n \gg 1$.

Доказательство. Идея и ход доказательства повторяет доказательство теоремы 1.6.6.

Используя лемму 1.6.12, имеем

$$p^f_{2n}(t) = \frac{1}{d_n}\int_{-1}^{1} f(t-u)L_n(u)\,du.$$

Пусть теперь $\varepsilon > 0$ задано. Покажем, что существует такое $N \in \mathbb{N}$, что

$$\left|f(t) - \frac{1}{d_n}\int_{-1}^{1} f(t-u)L_n(u)\,du\right| < \varepsilon$$

для всех $n > N$ и $t \in [0,1]$.

Рассмотрим

$$\begin{aligned}
&\left|f(t) - \frac{1}{d_n}\int_{-1}^{1} f(t-u)L_n(u)\,du\right| = \\
&\qquad = \frac{1}{d_n}\left|f(t)d_n - \int_{-1}^{1} f(t-u)L_n(u)\,du\right| = \\
&\qquad = \frac{1}{d_n}\left|\int_{-1}^{1} f(t)L_n(u)\,du - \int_{-1}^{1} f(t-u)L_n(u)\,du\right| = \\
&\qquad = \frac{1}{d_n}\left|\int_{-1}^{1} \big(f(t)L_n(u) - f(t-u)L_n(u)\big)\,du\right| = \\
&\qquad = \frac{1}{d_n}\left|\int_{-1}^{1} \big(f(t) - f(t-u)\big)L_n(u)\,du\right| \le \\
&\qquad \le \frac{1}{d_n}\int_{-1}^{1} \big|f(t) - f(t-u)\big|L_n(u)\,du. \qquad (1.24)
\end{aligned}$$

При $t \in [0,1]$ и $u \in [-1,1]$ имеем, что $t-u \in [-1,2]$. Функция f непрерывна на $[-1,2]$ поэтому она равномерно непрерывна. Т.е. существует такое $\delta > 0$, что

$$|t' - t''| < \delta \qquad |f(t') - f(t'')| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1.25}$$

Используя найденное δ представим последний интеграл в (1.24) как

$$\frac{1}{d_n}\int_{-1}^{-\delta} + \frac{1}{d_n}\int_{-\delta}^{\delta} + \frac{1}{d_n}\int_{\delta}^{1}, \tag{1.26}$$

и оценим каждый из них.

Для среднего интеграла в (1.26), используя (1.25), имеем

$$\frac{1}{d_n}\int_{-\delta}^{\delta} \big|f(t) - f(t-u)\big| L_n(u)\,du \le \frac{1}{d_n}\int_{-\delta}^{\delta} \frac{\varepsilon}{3} L_n(u)\,du =$$
$$= \frac{\varepsilon}{3}\frac{1}{d_n}\int_{-\delta}^{\delta} L_n(u)\,du < \frac{\varepsilon}{3}\frac{1}{d_n}\int_{-1}^{1} L_n(u)\,du = \frac{\varepsilon}{3}.$$

Рассмотрим теперь последний интеграл в (1.26). Так как функция f непрерывна на $[-1,2]$, то она ограничена, т.е. $\|f\|_\infty < \infty$, и

$$|f(t)| \le \|f\|_\infty, \qquad t \in [-1,2].$$

Поэтому, оценивая последний интеграл в (1.26), имеем

$$\frac{1}{d_n}\int_{\delta}^{1} \big|f(t) - f(t-u)\big| L_n(u)\,du \le$$
$$\le \frac{1}{d_n}\int_{\delta}^{1} \big(|f(t)| + |f(t-u)|\big) L_n(u)\,du \le$$
$$\le \frac{1}{d_n}\int_{\delta}^{1} 2\|f\|_\infty L_n(u)\,du = \frac{2\|f\|_\infty}{d_n}\int_{\delta}^{1} L_n(u)\,du.$$

Функция

$$L_n(u) = (1-u^2)^n$$

является убывающей на $[\delta, 1]$. Поэтому, полагая

$$1 - \delta^2 = r < 1,$$

имеем

$$L_n(u) \leq L_n(\delta) = r^n,$$

и, продолжая оценивать последний интеграл, имеем

$$\frac{2\|f\|_\infty}{d_n} \int_\delta^1 L_n(u)\, du \leq \frac{2\|f\|_\infty}{d_n} \int_\delta^1 r^n\, du < 2\|f\|_\infty \frac{r^n}{d_n}.$$

Теперь, используя оценку в лемме 1.6.11, имеем

$$\frac{1}{d_n} \int_\delta^1 \big|f(t) - f(t-u)\big|\, du \leq 2\|f\|_\infty r^n (n+1).$$

Поскольку $r \in (0,1)$, то

$$\lim_{n\to\infty} r^n(n+1) = 0,$$

и, следовательно, существует N такое, что

$$2M\pi r^n(n+1) < \frac{\varepsilon}{3}$$

для всех $n > N$.

Те же самые рассуждения применительно к первому интегралу в (1.26) приводят к такой же оценке.

Таким образом, для $n > N$ имеем, что

$$\frac{1}{d_n} \int_{-1}^1 \big|f(t) - f(t-u)\big| L_n(u)\, du < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

что и заканчивает доказательство. □

Лемма 1.6.14. *Пусть $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ такая, что $f(t) = 0$ для $t \neq [0,1]$, и $L_n(t) = (1-t^2)^n$, $t \in [-1,1]$. Тогда*

$$p_{2n}^f = \int_{-1}^1 f(s) L_n(t-s)\, ds$$

является многочленом степени не выше $2n$.

Доказательство. Доказательство проведем по индукции на n.

Для $n = 1$ имеем

$$\begin{aligned} p_2^f(t) &= \int_{-1}^{1} f(s)L_1(t-s)\,ds = \int_{-1}^{1} f(s)\bigl(1-(t-s)^2\bigr)\,ds = \\ &= \int_{-1}^{1} f(s)(1-t^2+2ts-s^2)\,ds = \\ &= \int_{-1}^{1} f(s)(1-s^2)\,ds + t\int_{-1}^{1} f(s)2s\,ds - t^2\int_{-1}^{1} f(s)\,ds. \end{aligned}$$

Предположим, что p_{2n}^f является многочленом степени не выше $2n$ для любой функции $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, удовлетворяющей условию $f(t) = 0$ для $t \notin [0,1]$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} p_{2(n+1)}^f(t) &= \int_{-1}^{1} f(s)L_{n+1}(t-s)\,ds = \\ &= \int_{-1}^{1} f(s)L_n(t-s)\bigl(1-(t-s)^2\bigr)\,ds = \\ &= \int_{-1}^{1} f(s)L_n(t-s)\bigl(1-t^2+2ts-s^2\bigr)\,ds = \\ &= \int_{-1}^{1} f(s)(1-s^2)L_n(t-s)\,ds + 2t\int_{-1}^{1} f(s)sL_n(t-s)\,ds - \\ &\qquad - t^2\int_{-1}^{1} f(s)L_n(t-s)\,ds = \\ &= p_{2n}^{f_2} + 2tp_{2n}^{f_1} - t^2p_{2n}^f, \end{aligned}$$

где функции $f_2(s) = f(s)(1-s^2)$ и $f_1(s) = f(s)s$ удовлетворяют условию $f_2(t) = f_1(t) = 0$ при $t \notin [0,1]$. Очевидно, что $p_{2(n+1)}$ является многочленом степени не выше $2n+2$. □

Теорема 1.6.15 (первая теорема Вейерштрасса)**.** *Линейное пространство $\mathcal{P}([a,b])$ всех многочленов, рассматриваемых как непрерывные функции на $[a,b]$, является плотным линейным подпространством банахова пространства $\bigl(\mathcal{C}([a,b]),\|\cdot\|_\infty\bigr)$.*

Доказательство. Пусть $g \in \mathcal{C}([a,b])$. Рассмотрим функцию $f \in \mathcal{C}([0,1])$, заданную как

$$f(t) = g\big(a + (b-a)t\big).$$

Заметим, что при $t \in [0,1]$ переменная

$$s = a + (b-a)t \tag{1.27}$$

пробегает отрезок $[a,b]$. Определим теперь функцию $f_0 \in \mathcal{C}([0,1])$ как

$$f_0(t) = f(t) - \alpha - \beta t, \tag{1.28}$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ такие, что $f_0(0) = f_0(1) = 0$, т.е.

$$f(0) - \alpha = 0, \qquad f(1) - \alpha - \beta = 0.$$

Отсюда находим, что

$$\alpha = f(0), \qquad \beta = f(1) - f(0).$$

Наконец, рассмотрим функцию $\tilde{f}_0 \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, определенную как

$$\tilde{f}_0(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ f_0(t), & 0 \le t \le 1, \\ 0, & 1 < t, \end{cases}$$

Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Используя теорему 1.6.13, найдем многочлен $p^{\tilde{f}_0}$ такой, что

$$\sup_{t\in[0,1]} |\tilde{f}_0(t) - p^{\tilde{f}_0}(t)| = \sup_{t\in[0,1]} |f_0(t) - p^{\tilde{f}_0}(t)| < \varepsilon. \tag{1.29}$$

Используя определение функции f_0 в (1.28) имеем, что

$$f_0(t) - p^{\tilde{f}_0}(t) = f(t) - \alpha - \beta t - p^{\tilde{f}_0}(t) = f(t) - p^f(t),$$

где

$$p^f(t) = p^{\tilde{f}_0} + \beta t + \alpha$$

является многочленом. Поэтому из (1.29) имеем, что

$$\sup_{t\in[0,1]} |f(t) - p^f(t)| < \varepsilon.$$

Из (1.27) находим, что

$$t = -\frac{a}{b-a} + \frac{s}{b-a},$$

и определим многочлен p^g как

$$p^g(s) = p^f\big(-\frac{a}{b-a} + \frac{s}{b-a}\big).$$

Тогда имеем, что

$$p^g\big(a + (b-a)t\big) = p^f\big(-\frac{a}{b-a} + \frac{1}{b-a}(a + (b-a)t)\big) = p^f(t),$$

и, следовательно,

$$\sup_{s\in[a,b]} |g(s) - p^g(s)| = \sup_{t\in[0,1]} \big|g\big(a - (b-a)t\big) - p^g\big(a + (b-a)t\big)\big| =$$
$$= \sup_{t\in[0,1]} |f(t) - p^f(t)| < \varepsilon,$$

что и заканчивает доказательство. $\square$

1.7 Компактные множества

1.7.1 Общие положения

Определение 1.7.1. Пусть $(E, \|\cdot\|)$ — линейное нормированное пространство, и $X \subset E$.

Семейство $\{U_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ подмножеств E, где Γ — некоторое множество индексов, называется *покрытием* множества X, если $\cup_{\gamma\in\Gamma} U_\gamma \supset X$.

Если семейство $\{U_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ является покрытием X, $\Gamma_0 \subset \Gamma$, и $\{U_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma_0}$ также является покрытием X, то семейство $\{U_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma_0}$ называется *подпокрытием* покрытия $\{U_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$.

Покрытие $\{U_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ называется *открытым*, если каждое U_γ, $\gamma \in \Gamma$, является открытым подмножеством E,

Пример 1.7.2. Пусть $E = \mathbb{R}$, $X = (0,1)$, $U_n = \left(\frac{1}{n}, 1\right)$, $n \in \mathbb{N} = \Gamma$. Поскольку

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\tfrac{1}{n}, 1\right) = \bigcup_{n\in 2\mathbb{N}} \left(\tfrac{1}{n}, 1\right) = (0,1),$$

Семейство $\mathcal{U} = \{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ является открытым покрытием X, а семейство $\{U_n\}_{n\in 2\mathbb{N}}$ является открытым подпокрытием покрытия $\mathcal{U}$.

Определение 1.7.3. Пусть $(E, \|\cdot\|)$ — линейное нормированное пространство. Подмножество $X \subset E$ называется *компактным*, если произвольное открытое покрытие X имеет конечное подпокрытие.

Пример 1.7.4. Пусть $(E, \|\cdot\|)$ — линейное нормированное пространство.

1. Одноточечное множество $X = \{\boldsymbol{a}\}$ является компактным.

   Действительно, если $X \subset \cup_{\gamma\in\Gamma} U_\gamma$, то существует такое $\gamma_0 \in \Gamma$, что $\boldsymbol{a} \in U_{\gamma_0}$. Поэтому для $\Gamma_0 = \{\gamma_0\}$ покрытие $\{U_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma_0}$ является конечным подпокрытием покрытия $\{U_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$.

2. Множество $X = \{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m\}$ также является компактным, поскольку, если $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m\} \subset \cup_{\gamma\in\Gamma} U_\gamma$, то существуют $\gamma_1, \ldots, \gamma_m \in \Gamma$, для которых

$$\boldsymbol{a}_1 \in U_{\gamma_1}, \qquad \ldots, \qquad \boldsymbol{a}_m \in U_{\gamma_m}.$$

Поэтому, полагая $\Gamma_0 = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$, имеем, что $\{U_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma_0}$ является конечным подпокрытием.

3. Для $E = \mathbb{R}$ множество $X = (0,1)$ не является компактным, поскольку покрытие $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ не имеет конечного подпокрытия.

   Действительно, пусть $M \subset \mathbb{N}$ и количество элементов $|M| < \infty$. Тогда
$$\bigcup_{n\in M} \left(\tfrac{1}{n}, 1\right) = \left(\tfrac{1}{\max M}, 1\right) \neq (0,1).$$

Утверждение 1.7.5. *Множество $X = [0,1]$ является компактным в линейном нормированном пространстве $E = \mathbb{R}$.*

Доказательство. Пусть $\{U_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ — произвольное открытое покрытие отрезка $[0,1]$. Определим множество
$$\tilde{X} = \left\{x \in [0,1] : \exists\, \Gamma_0 \subset \Gamma,\ |\Gamma_0| < \infty,\ [0,x] \subset \cup_{\gamma\in\Gamma_0} U_\gamma\right\}.$$

Множество $\tilde{X}$ не является пустым. Действительно, так как $\{U_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ является покрытием отрезка $[0,1]$, то $0 \in U_{\gamma_0}$ для некоторого $\gamma_0 \in \Gamma$. А, поскольку U_{γ_0} является открытым множеством, то точка 0 является внутренней точкой U_{γ_0}, т.е. существует такое $\delta > 0$, что $(-\delta, \delta) \subset U_{\gamma_0}$. Поэтому $[0, \frac{\delta}{2}] \subset U_{\gamma_0}$, и для $\Gamma_0 = \{\gamma_0\}$ отрезок $[0, \frac{\delta}{2}]$ имеет конечное подпокрытие, а именно, $\{U_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma_0}$. Таким образом $\frac{\delta}{2} \in \tilde{X}$.

Также заметим, что, если $x_1 \in \tilde{X}$, то $x \in \tilde{X}$ для всех $x \le x_1$, что следует непосредственно из определения $\tilde{X}$ (для таких x конечное подпокрытие $\{U_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma_0}$ отрезка $[0, x_1]$ также является конечным подпокрытием отрезка $[0, x]$).

Пусть $x^* = \sup X$. Покажем, что $x^* \in \tilde{X}$ и $x^* = 1$, т.е. $\tilde{X} = [0,1]$.

Поскольку $\{U_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ является покрытием $[0,1]$ и $x^* \in [0,1]$ по определению, то $x^* \in U_{\gamma^*}$ для некоторого $\gamma^* \in \Gamma$. Множество U_{γ^*} является открытым, и, следовательно, существует такое $\delta^* > 0$, что $(x^* - \delta^*, x^* + \delta^*) \subset U_{\gamma^*}$, а значит и $[x^* - \frac{\delta^*}{2}, x^* + \frac{\delta^*}{2}] \subset U_{\gamma^*}$.

Поскольку $x^* - \frac{\delta^*}{2} < x^*$, то $x^* - \frac{\delta^*}{2} \in \tilde{X}$, т.е. существует такое $\Gamma_0 \subset \Gamma$, $|\Gamma_0| < \infty$, что $\{U_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma_0}$ является конечным открытым подпокрытием отрезка $[0, x^* - \frac{\delta^*}{2}]$. Но тогда для $\Gamma_0^* = \Gamma_0 \cup \{\gamma^*\}$ семейство $\{U_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma_0^*}$ является конечным подпокрытием отрезка $[0, x^* + \frac{\delta^*}{2}]$. Поэтому $x^* + \frac{\delta^*}{2} \in \tilde{X}$, а значит, в частности $x^* \in \tilde{X}$. Кроме того, если $x^* < 1$, то, поскольку $x^* + \frac{\delta^*}{2} > x^*$, x^* не может быть супремумом $\tilde{X}$. Следовательно, $x^* = 1$, и $\tilde{X} = [0, 1]$, т.е. существует такое конечное $\Gamma_0 \subset \Gamma$, что $\{U_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma_0}$ является конечным подпокрытием отрезка $[0, 1]$. □

Определение 1.7.6. Пусть $(E, \|\cdot\|)$ — линейное нормированное пространство.

Семейство $\{F_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ подмножеств E называется *центрированным* (соотв., *центрированным в* X), если для произвольного конечного $\Gamma_0 \subset \Gamma$ имеем, что $\cap_{\gamma \in \Gamma_0} F_\gamma \neq \emptyset$ (соотв., $X \cap \big(\cap_{\gamma \in \Gamma_0} F_\gamma\big) \neq \emptyset$).

Пример 1.7.7. Семейство $\big\{\big(0, \frac{1}{n}\big)\big\}_{n \in \mathbb{N}}$ является центрированным в $(0, 1)$. Действительно, для произвольного конечного $M \subset \mathbb{N}$ имеем, что

$$(0,1) \cap \Big(\bigcap_{n \in M} \big(0, \tfrac{1}{n}\big)\Big) = (0,1) \cap \big(0, \tfrac{1}{\max M}\big) = \big(0, \tfrac{1}{\max M}\big) \neq \emptyset.$$

Утверждение 1.7.8. *Пусть $(E, \|\cdot\|)$ — линейное нормированное пространство, и $X \subset E$. Следующие условия эквивалентны.*

(i) *Множество X компактно.*

(ii) *Любое центрированное в X семейство $\{F_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ замкнутых множеств имеет непустое пересечение в X, т.е,*

$$X \cap \big(\cap_{\gamma \in \Gamma} F_\gamma\big) \neq \emptyset.$$

Доказательство. **(i) ⇒ (ii)** Пусть X является компактным, а $\{F_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ — произвольное семейство таких замкнутых множеств, что

$$X \cap \Big(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} F_\gamma\Big) = \emptyset, \tag{1.30}$$

и докажем, что семейство $\{F_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ не является центрированным в X.

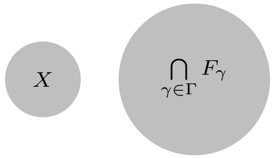


Рис. 1.13: $X \cap \big(\bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} F_\gamma\big) = \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad X \subset \big(\bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} F_\gamma\big)^c$.

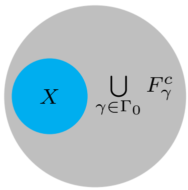


Рис. 1.14: $X \subset \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma_0} F_\gamma^c \quad \Longleftrightarrow \quad X \cap \big(\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma_0} F_\gamma^c\big)^c = \emptyset$.

Действительно, см. рис. 1.13, из (1.30) следует, что

$$X \subset \big(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} F_\gamma\big)^c = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} F_\gamma^c. \tag{1.31}$$

Поскольку F_γ является замкнутым множеством по предположению, то F_γ^c является открытым. Тогда (1.31) означает, что $\{F_\gamma^c\}$ является открытым покрытием компактного множества X, и, следовательно, имеет конечное подпокрытие $\{F_\gamma^c\}_{\gamma\in\Gamma_0}$, $|\Gamma_0| < \infty$, т.е.

$$X \subset \bigcup_{\gamma\in\Gamma_0} F_\gamma^c,$$

и, следовательно, см. рис. 1.14,

$$X \cap \big(\bigcup_{i=1}^n F_{\gamma_i}^c\big)^c = X \cap \big(\bigcap_{i=1}^n F_{\gamma_i}^{cc}\big) = X \cap \big(\bigcap_{i=1}^n F_{\gamma_i}\big) = \emptyset,$$

что и доказыывает, что семейство $\{F_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ не является центрированным в X.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Предположим, что выполнено условие в (ii), и докажем, что X является компактным множеством. Пусть $\{U_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ — открытое покрытие X, т.е U_γ являтся открытым множеством для каждого $\gamma\in\Gamma$, и

$$X \subset \bigcup_{\gamma\in\Gamma} U_\gamma.$$

Но тогда

$$X \cap \Big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} U_\gamma\Big)^c = X \cap \Big(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} U_\gamma^c\Big) = \emptyset.$$

Из условия (ii) следует, что что система замкнутых множеств $\{U_\gamma^c\}$ не может быть центрированной в X, т.е. существует конечная подсистема $\{U_\gamma^c\}_{\gamma\in\Gamma_0}$, $|\Gamma_0|<\infty$, для которой

$$X \cap \Big(\bigcap_{\gamma\in\Gamma_0} U_\gamma^c\Big) = \emptyset,$$

т.е.

$$X \subset \Big(\bigcap_{\gamma\in\Gamma_0} U_\gamma^c\Big)^c = \bigcup_{\gamma\in\Gamma_0} U_\gamma^{cc} = \bigcup_{\gamma\in\Gamma_0} U_\gamma.$$

Следовательно, система $\{U_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma_0}$ является конечным открытым подпокрытием. Теперь компактность X следует из произвольности открытого покрытия $\{U_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$.

□

Следствие 1.7.9. *Замкнутый ограниченный шар $B[\mathbf{0};1]\subset\ell_\infty$ не является компактным.*

Доказательство. Для каждого $n\in\mathbb{N}$ положим

$$\boldsymbol{e}_n = (\underbrace{0,\ldots,0,1}_{n},0,\ldots),$$

и
$$F = \{\boldsymbol{e}_n : n \in \mathbb{N}\} \subset B[\mathbf{0}; 1].$$
Покажем, что F является замкнутым, доказав, что $F' = \emptyset$. Действительно, если $\boldsymbol{x}^* \in F'$, то существуют $\boldsymbol{e}_{n_1}, \boldsymbol{e}_{n_2} \in \overset{\circ}{B}(\boldsymbol{x}^*; \frac{1}{2}) \cap F$, $n_1 < n_2$. Но тогда
$$\|\boldsymbol{e}_{n_1} - \boldsymbol{e}_{n_2}\|_\infty = \|\boldsymbol{e}_{n_1} - \boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{e}_{n_2}\|_\infty \leq$$
$$\leq \|\boldsymbol{e}_{n_1} - \boldsymbol{x}^*\|_\infty + \|\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{e}_{n_2}\|_\infty < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$
что противоречит тому, что
$$\|\boldsymbol{e}_{n_1} - \boldsymbol{e}_{n_2}\|_\infty = \big\|(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots .0, -1, 0, \ldots)\big\|_\infty = 1.$$

Теперь для каждого $n \in \mathbb{N}$ положим $F_n = F \setminus \{\boldsymbol{e}_n\}$. Поскольку $F_n \subset F$, то $F_n' \subset F' = \emptyset$, т.е F_n является замкнутым для каждого $n \in \mathbb{N}$.

Система замкнутых множеств $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ является центрированной в $B[\mathbf{0}; 1]$, поскольку для любого конечного $M \subset \mathbb{N}$ имеем
$$B[\mathbf{0}; 1] \cap \big(\bigcap_{n\in M} F_n\big) = \bigcap_{n\in M} F_n \supset \{\boldsymbol{e}_{\max M+1}, \boldsymbol{e}_{\max M+2}, \ldots\} \neq \emptyset.$$
Однако,
$$B[\mathbf{0}; 1] \cap \big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n\big) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \emptyset,$$
что и доказывает в силу утверждения 1.7.8, что $B[\mathbf{0}; 1]$ не является компактным. □

Утверждение 1.7.10. *Пусть $(E, \|\cdot\|)$ — линейное нормированное пространство. Если $X \subset E$ компактно, то X замкнуто и ограничено.*

Доказательство. Докажем вначале, что X является ограниченным. Система $\big\{B(\mathbf{0}; n)\big\}_{n\in\mathbb{N}}$ является открытым покрытием X, поскольку
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B(\mathbf{0}; n) = E \supset X.$$

В силу компактности X это открытое покрытие имеет конечное подпокрытие $\big\{B(\mathbf{0};n)\big\}_{n\in M}$, $M\subset\mathbb{N}$, $|M|<\infty$, т.е.

$$X\subset\bigcup_{n\in M}B(\mathbf{0};n)=B(\mathbf{0};\max M),$$

что и доказывает ограниченность X.

Докажем, что X является замкнутым, доказав, что X^c является открытым. Заметим, что в силу ограниченности, $X^c\neq\emptyset$. Пусть $\boldsymbol{x}_0\in X^c$, и докажем, что $\boldsymbol{x}_0$ является внутренней точкой X^c, т.е. существует $\delta>0$, для которого $B(\boldsymbol{x}_0;\delta)\subset X^c$.

Множества $B[\boldsymbol{x}_0;\frac{1}{n}]$ являются замкнутыми, и

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}}B[\boldsymbol{x}_0;\tfrac{1}{n}]=\{\boldsymbol{x}_0\}.$$

Поэтому, для открытых множеств $B[\boldsymbol{x}_0;\frac{1}{n}]^c$ имеем

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}B\big[\boldsymbol{x}_0;\tfrac{1}{n}\big]^c=\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}B[\boldsymbol{x}_0;\tfrac{1}{n}]\Big)^c=E\setminus\{\boldsymbol{x}_0\}\supset X.$$

Таким образом, система $\big\{B[\boldsymbol{x}_0;\frac{1}{n}]^c\big\}_{n\in\mathbb{N}}$ является открытым покрытие X, и, в силу компактности X, имеем конечное подпокрытие X, т.е. существует $M\subset\mathbb{N}$, $|M|<\infty$ и

$$X\subset\bigcup_{n\in M}B[\boldsymbol{x}_0;\tfrac{1}{n}]^c=B[\boldsymbol{x}_0;\tfrac{1}{\max M}]^c.$$

Поэтому $X\cap B[\boldsymbol{x}_0;\frac{1}{\max M}]=\emptyset$, а значит и $X\cap B(\boldsymbol{x}_0;\frac{1}{\max M})=\emptyset$, т.е. $B(\boldsymbol{x}_0;\frac{1}{\max M})\subset X^c$. Таким образом, $\boldsymbol{x}_0$ является внутренней точкой X^c. □

Лемма 1.7.11. *Пусть $X\subset E$ и $\mathcal{F}=\{F_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ семейство множеств центрированных в X. Если*

$$X=\bigcup_{k=1}^{m}X_k,$$

то существует такое k_0, что семейство $\mathcal{F}$ является центрированной в X_{k_0}.

Доказательство. Действительно, если $\mathcal{F}$ не является центрированной ни в одном из множеств X_k, $k = 1, \ldots, m$, то для каждого k существует такое $\Gamma_k \subset \Gamma$, $|\Gamma_k| < \infty$, что

$$\Big(\bigcap_{\gamma\in\Gamma_k} F_\gamma\Big) \cap X_k = \emptyset.$$

Положим $\Gamma_0 = \bigcup_{k=1}^m \Gamma_k$. Имеем, что $|\Gamma_0| < \infty$, и

$$\big(\bigcap_{\gamma\in\Gamma_0} F_\gamma\big) \cap X = \big(\bigcap_{\gamma\in\Gamma_0} F_\gamma\big) \cap \big(\bigcup_{k=1}^m X_k\big) = \bigcup_{k=1}^m \Big(\big(\bigcap_{\gamma\in\Gamma_0} F_\gamma\big) \cap X_k\Big) \subset$$
$$\subset \bigcup_{k=1}^m \Big(\big(\bigcap_{\gamma\in\Gamma_k} F_\gamma\big) \cap X_k = \emptyset,$$

что противоречит центрированности $\mathcal{F}$ в X. □

Теорема 1.7.12 (Гейне–Борель). *Множество $X \subset \mathbb{R}^n$ компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.*

Доказательство. Если множество X компактно, то оно замкнуто и ограничено (утверждение 1.7.10).

Пусть X замкнуто и ограничено. Докажем, что оно компактно для $n = 2$. При произвольном n доказательство аналогично.

Пусть $\mathcal{F} = \{F_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ — произвольное центрированное в X семейство замкнутых множеств. Докажем, что

$$\big(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} F_\gamma\big) \cap X \neq \emptyset.$$

Поскольку множество X ограничено, то существует квадрат Π со стороной a, который полностью содержит X (см. рис. 1.15 (a)).

Разделим квадрат Π на четыре равные части Π_k^1 линиями, параллельными сторонам, положим $X_k^1 = X \cap \Pi_k^1$. Поскольку $X = \cup_{k=1}^4 X_k^1$, и семейство $\mathcal{F}$ является центрированным в X, то существует $X_{k_1}^1$ ($X_{k_1}^1 = X^1$ на рис. 1.15 (a)), на котором система $\mathcal{F}$ является

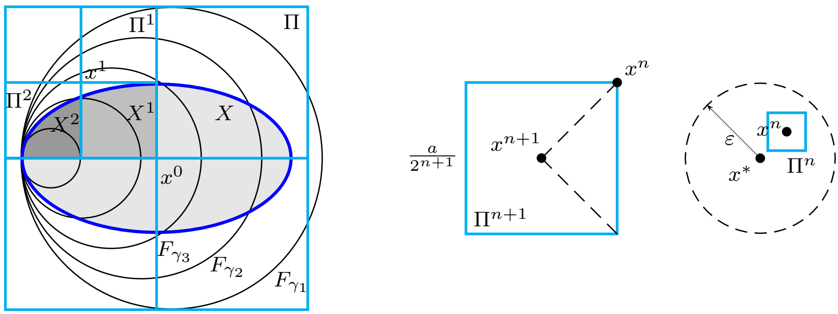


Рис. 1.15: Доказательство теоремы 1.7.12.

центрированной. Обозначим $X^1_{k_1} = X^1$, $\Pi^1 = \Pi^1_{k_1}$, а центр квадрата Π^1 через x^1. Квадрат Π^1 имеет сторону длиной $\frac{a}{2}$.

Разделим квадрат Π^1 на четыре равные части Π^2_k. Рассмотрим множества $X^2_k = X \cap \Pi^2_k$. Среди них существует множество $X^2_{k_2}$, на котором семейство $\mathcal{F}$ является центрированным (X^2 на рис. 1.15 (a)). Положим $\Pi^2 = \Pi^2_{k_2}$ и $X^2 = X^2_{k_2}$. Длина стороны прямоугольника Π^2 равна $\frac{a}{2^2}$, и пусть x^2 — его центр.

Продолжая аналогичным образом получаем последовательность квадратов Π^n, у которых длины сторон равны $\frac{a}{2^n}$, их центров $(x^n)_{n=1}^\infty$, и подмножеств $X^n = \Pi^n \cap X$ множества X, на каждом из которых семейство $\mathcal{F}$ является центрированным.

Рассмотрим последовательность $(x^n)_{n=1}$ в $\mathbb{R}^2$, и докажем, что она является фундаментальной, а значит сходящейся, поскольку $\mathbb{R}^2$ банахово.

Действительно, x^n по построению является вершиной квадрата Π^{n+1} со стороной, длина которой равна $\frac{a}{2^{n+1}}$, а x^{n+1} является центром этого квадрата. Таким образом (см. рис. 1.15 (b)),

$$\|x^n - x^{n+1}\|_2 < \frac{a}{2^{n+1}}.$$

Поэтому, для произвольного $p \in \mathbb{Z}_+$ имеем

$$\begin{aligned}
\|x^n - x^{n+p}\|_2 &= \|x^n - x^{n+1} + x^{n+1} - x^{n+2} + \ldots + x^{n+p-1} - x^{n+p}\|_2 \leq \\
&\leq \|x^n - x^{n+1}\|_2 + \|x^{n+1} - x^{n+2}\|_2 + \ldots \\
&\qquad + \|x^{n+p-1} - x^{n+p}\|_2 < \\
&< \frac{a}{2^{n+1}} + \frac{a}{2^{n+2}} + \ldots + \frac{a}{2^{n+p}} = \\
&= \frac{a}{2^{n+1}}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{p-1}}\right) = \frac{a}{2^{n+1}} \frac{1 - \frac{1}{2^p}}{1 - \frac{1}{2}} < \\
&< \frac{a}{2^{n+1}} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{a}{2^n}.
\end{aligned}$$

Итак, существует $x^* = \lim_{n\to\infty} x^n$. Кроме этого,

$$\|x^n - x^*\|_2 = \lim_{p\to\infty} \|x^n - x^{n+p}\|_2 \leq \frac{a}{2^n},$$

а для произвольной точки $x \in \Pi^n$ имеем

$$\begin{aligned}
\|x - x^*\|_2 &= \|x - x^n + x^n - x^*\|_2 \leq \|x - x^n\|_2 + \|x^n - x^*\|_2 \leq \\
&\leq \frac{a}{2^n} + \frac{a}{2^n} = \frac{a}{2^{n-1}}.
\end{aligned} \tag{1.32}$$

Докажем теперь, что

$$x^* \in \Big(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} F_\gamma\Big) \cap X.$$

Для этого докажем, что $x^* \in X$ и $x^* \in F_\gamma$ для произвольного $\gamma \in \Gamma$. Поскольку множества X и F_γ, $\gamma \in \Gamma$, замкнуты, то достаточно доказать, что x^* является предельной точкой каждого из множеств.

Пусть $\varepsilon > 0$ задано, и возьмем n такое, что $\frac{a}{2^{n-1}} < \varepsilon$. Тогда в силу (1.32) имеем, что $\Pi^n \subset B(x^*;\varepsilon)$, см. рис. 1.15 (c). Следовательно,

$$B(x^*;\varepsilon) \supset \Pi^n \supset \Pi^n \cap X = X^n \supset X^n \cap F_\gamma.$$

Однако, семейство $\mathcal{F}$ является центрированным на X^n по построению, и, следовательно, $X^n \cap F_\gamma \neq \emptyset$ (Надо взять $\Gamma_0 = \{\gamma\}$). Отсюда следует, что $B(x^*;\varepsilon)\cap X \neq \emptyset$, и $B(x^*;\varepsilon)\cap F_\gamma \neq \emptyset$ для произвольного $\gamma \in \Gamma$, Это означает, что x^* является предельной точкой X и F_γ, что и заканчивает доказательство. □

Замечание 1.7.13. Как показывает следствие 1.7.9, замкнутое ограниченное множество в бесконечномерном пространстве не обязательно компактно.

Определение 1.7.14. Подмножество $X \subset E$ называется *предкомпактным*, если множество $\overline{X}$ является компактным.

Утверждение 1.7.15. *Пусть X — компактное подмножество линейного нормированного пространства E, и $Y \subset X$ замкнуто в E. Тогда множество Y компактно.*

Доказательство. Пусть $\{V_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ — открытое покрытие множества Y. Поскольку $Y \subset X$, то Y^c вместе с $\{V_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ покрывает X. Так как Y замкнуто, то Y^c открыто. Таким образом, $\{Y^c, V_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ является открытым покрытием компактного множества X, а значит имеет конечное подпокрытие $\{Y^c, V_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma_0}$, где Γ_0 — конечное множество. Поскольку $Y \subset X$, то $\{Y^c, V_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma_0}$ также является покрытием Y, т.е.

$$Y \subset Y^c \cup \Big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma_0} V_\gamma\Big).$$

А так как $Y \cap Y^c = \emptyset$, то $Y \subset \cup_{\gamma\in\Gamma_0} V_\gamma$. Таким образом $\{V_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma_0}$ является конечным подпокрытием покрытия $\{V_\gamma\}$. □

Следствие 1.7.16. *Пусть X — компактное подмножество линейного нормированного пространства E, и $Y \subset X$. Тогда множество Y предкомпактно.*

Доказательство. Поскольку X компактно, то оно замкнуто (утверждение 1.7.10). Поэтому $\overline{Y} \subset X$ (утверждение 1.5.4). Теперь из замкнутости $\overline{Y}$ и компактности X следует компактность $\overline{Y}$ (утверждение 1.7.15), т.е. предкомпактность Y. □

Определение 1.7.17. Пусть $(E, \|\cdot\|)$ — линейное нормированное пространство. Подмножество $X \subset E$ называется *вполне ограниченным*, если для каждого $r > 0$ существует такое конечное семейство точек $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_m \in E$, что $X \subset \bigcup_{k=1}^{m} B(\boldsymbol{a}_k; r)$.

При этом множество $A = \{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_m\}$ называется *конечной r-сеткой.*

Пример 1.7.18. 1. $[a, b]$, $[a, b)$ — вполне ограничены.

2. $B(\boldsymbol{x}_0; R) \subset \mathbb{R}^n$ вполне ограничено.

Утверждение 1.7.19. *Пусть E — линейное нормированное пространство, и $X \subset E$ — вполне ограничено. Если $Y \subset X$, то Y также является вполне ограниченным.*

Доказательство. Если $A = \{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_m\}$ является конечной ε-сетью для X, то A также является ε-сетью для Y. □

Утверждение 1.7.20. *Вполне ограниченное множество является ограниченным.*

Доказательство. Пусть X является вполне ограниченным. Пусть $\{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_m\} \subset E$ — конечная 1-сетка для X, т.е.

$$X \subset \bigcup_{i=1}^{m} B(\boldsymbol{a}_i; 1). \tag{1.33}$$

Положим $R = \max\{\|\boldsymbol{a}_1\|, \dots, \|\boldsymbol{a}_m\|\} + 1$, и докажем, что

$$\bigcup_{i=1}^{m} B(\boldsymbol{a}_i; 1) \subset B(\mathbf{0}; R).$$

Действительно, если $\boldsymbol{x} \in \cup_{i=1}^{m} B(\boldsymbol{a}_i; 1)$, то $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{a}_{i_0}; 1)$ для некоторого i_0. Но тогда

$$\|\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}_{i_0} + \boldsymbol{a}_{i_0}\| \le \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}_{i_0}\| + \|\boldsymbol{a}_{i_0}\| < 1 + \max_{i=1,\dots,m} \|\boldsymbol{a}_i\| = R,$$

т.е. $\boldsymbol{x} \in B(\mathbf{0}; R)$. Вследствие (1.33) имеем, что $X \subset B(\mathbf{0}; R)$, т.е. является ограниченным. □

Утверждение 1.7.21. *Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$. Множество X вполне ограничено тогда и только тогда, когда X ограничено.*

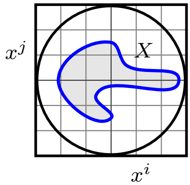


Рис. 1.16: Доказательство утверждения 1.7.21

Доказательство. Если множество X вполне ограничено, то оно ограничено (утверждение 1.7.20).

Предположим теперь, что X ограничено, и докажем, что X вполне ограничено. Рассмотрим случай $n = 2$ (для произвольного $n \in \mathbb{N}$ доказательство аналогично).

Поскольку X ограничено, то существует $R > 0$ такое, что $X \subset B(\mathbf{0}; R)$. Поэтому для $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in X$ имеем, что

$$|x_i| \leq \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2} = \|\boldsymbol{x}\| < R, \qquad i = 1, 2,$$

т.е.

$$X \subset \Pi = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_i| \leq R,\ i = 1, 2\} = [-R, R] \times [-R, R].$$

Для заданного $\varepsilon > 0$ разделим отрезок $[-R, R]$ точками

$$-R = x^0 < x^1 < \ldots < x^p = R$$

так, чтобы $|x^i - x^{i-1}| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ для всех $i = 1, \ldots, p$, и положим $\boldsymbol{a}_{ij} = (x^i, x^j)$, $i, j = 0, \ldots, p$ (см. рис. 1.16). Очевидно, что

$$\Pi = \bigcup_{i,j=0}^{p-1} \Pi^{ij},$$

где $\Pi^{ij} = [x^i, x^{i+1}] \times [x^j, x^{j+1}]$. Если $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \Pi^{ij}$, то

$$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}_{ij}\| = \sqrt{|x_1 - x^i|^2 + |x_2 - x^j|^2} < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2}} = \varepsilon.$$

Таким образом, $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{a}_{ij}, \varepsilon)$. Поскольку

$$X \subset \Pi = \bigcup_{i,j=0}^{p-1} \Pi^{ij},$$

то множество $A = \{\boldsymbol{a}_{ij} : i, j = 0, \ldots, p-1\}$ образуют конечную ε-сеть. $\square$

Утверждение 1.7.22. *Единичный замкнутый шар в ℓ_∞ не является вполне ограниченным.*

Доказательство. Рассмотрим множество $E = \{\boldsymbol{e}_i : i \in \mathbb{N}\}$, где

$$\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots), \quad \boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots), \quad \ldots.$$

Очевидно, что $E \subset B[\mathbf{0}; 1]$ (для произвольного $\boldsymbol{e}_n \in E$ имеем $\|\boldsymbol{e}_n\|_\infty = 1$). Если $B[\mathbf{0}; 1]$ вполне ограничено в ℓ_∞, то пусть $A = \{\boldsymbol{a}_i : i = 1, \ldots, s\} \subset \ell_\infty$ является конечной $\frac{1}{2}$-сеткой для множества $B[\mathbf{0}; 1]$, т.е

$$B[\mathbf{0}; 1] \subset \bigcup_{i=1}^{s} B(\boldsymbol{a}_i; \tfrac{1}{2}).$$

Тогда A также является конечной $\frac{1}{2}$-сеткой для E. Поскольку количество шаров $B(\boldsymbol{a}_i; \frac{1}{2})$ конечно, а количество точек в E бесконечно, то какой-то шар содержит по крайней мере две точки множества E, т.е. существует такой $B(\boldsymbol{a}_{i_0}, \frac{1}{2})$, что $\boldsymbol{e}_{k_1}, \boldsymbol{e}_{k_2} \in B(\boldsymbol{a}_{i_0}, \frac{1}{2})$ для $k_1 < k_2$. С одной стороны,

$$\|\boldsymbol{e}_{k_1} - \boldsymbol{e}_{k_2}\|_\infty = \|(\underbrace{0, \ldots, 0, 1}_{k_1}, 0, \ldots) - (\underbrace{0, \ldots, 0, 1}_{k_2}, 0, \ldots)\|_\infty =$$
$$= \|(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0, -1, 0, \ldots)\|_\infty = 1.$$

С другой стороны,

$$\|\boldsymbol{e}_{k_1} - \boldsymbol{e}_{k_2}\|_\infty = \big\|(\boldsymbol{e}_{k_1} - \boldsymbol{a}_{i_0}) + (\boldsymbol{a}_{i_0} - \boldsymbol{e}_{k_2})\big\| \leq$$
$$\leq \|\boldsymbol{e}_{k_1} - \boldsymbol{a}_{i_0}\| + \|\boldsymbol{a}_{i_0} - \boldsymbol{e}_{k_2}\| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Таким образом получили противоречие, что $1 < 1$, и, следовательно, $B[\mathbf{0}; 1]$ не является вполне ограниченным в ℓ_∞. □

Утверждение 1.7.23. *Пусть E — линейное нормированное пространство. Подмножество $X \subset E$ является вполне ограниченным тогда и только тогда, когда $\overline{X}$ — вполне ограничено.*

Доказательство. Пусть X — вполне ограничено, и докажем, что $\overline{X}$ также вполне ограничено.

Пусть $\varepsilon > 0$ задано, и найдем конечную ε-сетку для $\overline{X}$. Так как X вполне ограничено, то оно имеет конечную $\frac{\varepsilon}{2}$-сетку $A = \{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m\}$.

Докажем, что множество A образует конечную ε-сетку для $\overline{X}$, т.е. $\overline{X} \subset \cup_{k=1}^m B(\boldsymbol{a}_k; \varepsilon)$.

Так как $B(\boldsymbol{a}_k; \frac{\varepsilon}{2}) \subset B[\boldsymbol{a}_k; \frac{\varepsilon}{2}]$, то

$$X \subset \bigcup_{k=1}^m B(\boldsymbol{a}_k; \tfrac{\varepsilon}{2}) \subset \bigcup_{k=1}^m B[\boldsymbol{a}_k; \tfrac{\varepsilon}{2}],$$

а поскольку $B[\boldsymbol{a}_k; \frac{\varepsilon}{2}]$ замкнуто, то, будучи конечным объединением, $\cup_{k=1}^m B[\boldsymbol{a}_k; \frac{\varepsilon}{2}]$ также является замкнутым. А, поскольку $\overline{X}$ — минимальное замкнутое множество, содержащее X (утверждение 1.5.4), то

$$\overline{X} \subset \bigcup_{k=1}^m B[\boldsymbol{a}_k; \tfrac{\varepsilon}{2}] \subset \bigcup_{k=1}^m B(\boldsymbol{a}_k; \varepsilon),$$

поскольку $B[\boldsymbol{a}_k; \frac{\varepsilon}{2}] \subset B(\boldsymbol{a}_k; \varepsilon)$. Таким образом, A является конечной ε-сеткой для $\overline{X}$.

Если предположить, что $\overline{X}$ является вполне ограниченным, то, поскольку $X \subset \overline{X}$, вполне ограниченность X следует из утверждения 1.7.19. □

Определение 1.7.24. Пусть E — линейное нормированное пространство. Множество $X \subset E$ называется *счетно компактным*, если всякое бесконечное подмножество $\tilde{X} \subset X$ имеет в X предельную точку.

Пример 1.7.25.

1. Множество $[0,1] \subset \mathbb{R}$ является счетно компактным.
2. Множество $(0,1]$ не является счетно компактным, поскольку $\tilde{X} = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ не имеет в $(0,1]$ предельной точки.
3. Множество $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ не является счетно компактным, поскольку не имеет предельных точек в $\mathbb{R}$. Поэтому любое его подмножество $\tilde{X}$ также не будет иметь предельных точек в $\mathbb{R}$, а тем более в $\mathbb{N}$.

Утверждение 1.7.26. *Пусть $X \subset E$ является счетно компактным. Тогда X замкнуто.*

Доказательство. Если X не является замкнутым, то существует $\boldsymbol{x}_* \in X' \setminus X$, и, следовательно, существует последовательность $(\boldsymbol{x}_n)_{n=1}^{\infty}$ в X, для которой имеем, что $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{x}_*$. Рассмотрим множество

$$\tilde{X} = \{\boldsymbol{x}_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Поскольку последовательность $(\boldsymbol{x}_n)$ является сходящейся в E, то множество $\tilde{X}$ имеет единственную предельную точку в E, и это ее предел $\boldsymbol{x}_* \notin X$. Т.е. в X множество $\tilde{X}$ предельных точек не имеет, что противоречит счетной компактности X. □

Теорема 1.7.27. *Пусть E — банахово пространство, и $X \subset E$. Следующие условия эквивалентны.*

(i) *Множество X является компактным.*

(ii) *Множество X является счетно компактным.*

(iii) *Множество X замкнуто и вполне ограничено.*

Замечание 1.7.28. Эквивалентность (i) и (iii) называется *критерием Фреше–Хаусдорфа.*

Доказательство. Доказательство теоремы проведем по циклу.

(i) ⇒ (ii) Пусть X является компактным, и подмножество $\tilde{X}$ множества X является бесконечным.

Покажем от противного, что $\tilde{X}$ имеет предельные точки в E. Предположим, что $\tilde{X}$ не имеет предельных точек в E, т.е. $\tilde{X}' = \emptyset$. Это означает, что $\tilde{X}$ замкнуто. Для каждого $\tilde{\boldsymbol{x}} \in \tilde{X}$ множество $F_{\tilde{\boldsymbol{x}}} = \tilde{X} \setminus \{\tilde{\boldsymbol{x}}\}$ также является замкнутым. Кроме того, в силу бесконечности $\tilde{X}$, имеем, что множества $F_{\tilde{\boldsymbol{x}}}$ являются бесконечными, и, поэтому, для любого конечного $\tilde{X}_0 \subset \tilde{X}$

$$\Big(\bigcap_{\tilde{\boldsymbol{x}} \in \tilde{X}_0} F_{\tilde{\boldsymbol{x}}}\Big) \cap X = \bigcap_{\tilde{\boldsymbol{x}} \in \tilde{X}_0} F_{\tilde{\boldsymbol{x}}} \neq \emptyset.$$

Это означает, что семейство $\{F_{\tilde{\boldsymbol{x}}}\}_{\tilde{\boldsymbol{x}} \in \tilde{X}}$ является центрированным, и, в то же самое время,

$$\bigcap_{\tilde{\boldsymbol{x}} \in \tilde{X}} F_{\tilde{\boldsymbol{x}}} = \emptyset.$$

Это противоречит компактности X.

Следовательно $\tilde{X}$ имеет предельную точку $\boldsymbol{x}_*$ в E. Но, в силу замкнутости X (утверждение 1.7.10), эта предельная точка должна принадлежать X. Таким образом, $\tilde{X}$ имеет предельные точки в X.

(ii) ⇒ (iii) Пусть X является счетно компактным. В силу утверждения 1.7.26, X является замкнутым. Предположим, что X не является вполне ограниченным, и придем к противоречию.

Поскольку условием вполне ограниченности является следующее условие:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \exists \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \in E : \qquad X \subset \bigcup_{k=1}^{n} B(\boldsymbol{a}_k; \varepsilon),$$

то условием того, что X не является вполне ограниченным будет следующее:

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \in E: \qquad X \setminus \bigcup_{k=1}^{n} B(\boldsymbol{a}_k; \varepsilon) \neq \emptyset. \tag{1.34}$$

Используя это ε, построим бесконечное подмножество $\tilde{X} \subset X$, которое не будет иметь предельных точек.

Возьмем произвольное $\tilde{\boldsymbol{x}}_1 \in X$. Из условия (1.34) следует, что существует

$$\tilde{\boldsymbol{x}}_2 \in X \setminus B(\tilde{\boldsymbol{x}}_1; \varepsilon).$$

Заметим, что $\|\tilde{\boldsymbol{x}}_1 - \tilde{\boldsymbol{x}}_2\| \geq \varepsilon$. Продолжая по индукции, берем произвольные точки

$$\tilde{\boldsymbol{x}}_{n+1} \in X \setminus \bigcup_{k=1}^{n} B(\tilde{\boldsymbol{x}}_n; \varepsilon), \qquad n \in \mathbb{N},$$

что можно сделать в силу условия (1.34). При этом для $n_1 < n_2$ имеем, что

$$\|\tilde{\boldsymbol{x}}_{n_1} - \tilde{\boldsymbol{x}}_{n_2}\| \geq \varepsilon, \tag{1.35}$$

поскольку $\tilde{\boldsymbol{x}}_{n_2} \notin B(\tilde{\boldsymbol{x}}_{n_1}; \varepsilon)$ по построению. Полагая

$$\tilde{X} = \{\tilde{\boldsymbol{x}}_n : n \in \mathbb{N}\}$$

имеем, что подмножество $\tilde{X}$ множества X бесконечно, но не имеет предельных точек в силу условия (1.35). Это противоречит счетной компактности X.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Предположим теперь, что X вполне ограниченное и замкнутое множество, и докажем, что произвольное центрированное в X семейство $\mathcal{F} = \{F_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ замкнутых множеств имеет непустое пересечение в X. (Идея доказательства та же, что и доказательства теоремы 1.7.12).

Возьмем произвольную конечную $\frac{1}{2}$-сетку $\{\boldsymbol{a}_k^1\}_{k=1}^{m_1}$ для множества X. Тогда

$$X \subset \bigcup_{k=1}^{m_1} B(\boldsymbol{a}_k^1; \tfrac{1}{2}),$$

и, следовательно,

$$X = \bigcup_{k=1}^{m_1} X_k^1,$$

где $X_k^1 = X \cap B(\boldsymbol{a}_k^1; \frac{1}{2})$. Поскольку семейство $\mathcal{F}$ центрировано на X, то оно центрировано на некотором $X_{k_1}^1$. Положим $X^1 = X_{k_1}^1$ и $\boldsymbol{a}^1 = \boldsymbol{a}_{k_1}^1$.

Поскольку множество $X^1 \subset X$, то оно также вполне ограничено (утверждение 1.7.19). Поэтому существует конечная $\frac{1}{2^2}$-сетка $\{\boldsymbol{a}_k^2\}_{k=1}^{m_2}$ для X^1. Следовательно,

$$X^1 \subset \bigcup_{k=1}^{m_2} B(\boldsymbol{a}_k^2; \tfrac{1}{2^2}),$$

и, значит,

$$X^1 = \bigcup_{k=1}^{m_2} X_k^2,$$

где $X_k^2 = X^1 \cap B(\boldsymbol{a}_k^2; \frac{1}{2^2})$. Поскольку семейство $\mathcal{F}$ центрировано на X^1 по построению, то существует k_2, для которого семейство $\mathcal{F}$ будет центрировано на $X_{k_2}^2$. Обозначим $X^2 = X_{k_2}^2$, и $\boldsymbol{a}^2 = \boldsymbol{a}_{k_2}^2$. Заметим, что, поскольку

$$B(\boldsymbol{a}^1; \tfrac{1}{2}) \supset X \cap B(\boldsymbol{a}^1; \tfrac{1}{2}) = X^1 \supset X^1 \cap B(\boldsymbol{a}^2; \tfrac{1}{2^2}) = X^2,$$

то $B(\boldsymbol{a}^1; \frac{1}{2}) \cap B(\boldsymbol{a}^2; \frac{1}{2^2}) \neq \emptyset$. Следовательно,

$$\|\boldsymbol{a}^1 - \boldsymbol{a}^2\| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Поскольку $X^2 \subset X$ вполне ограничено, то для него существует конечная $\frac{1}{2^3}$-сетка $\{\boldsymbol{a}_k^3\}_{k=1}^{m_3}$,

$$X^2 \subset \bigcup_{k=1}^{m_3} B(\boldsymbol{a}_k^3; \tfrac{1}{2^3}).$$

Используя представление

$$X^2 = \bigcup_{k=1}^{m_3} X_k^3,$$

где $X_k^3 = X^2 \cap B(\boldsymbol{a}_k^3; \frac{1}{2^3})$, выбираем $X_{k_3}^3$, на котором семейство $\mathcal{F}$ является центрированным. Обозначим $X^3 = X_{k_3}^3$, $\boldsymbol{a}^3 = \boldsymbol{a}_{k_3}^3$. Имеем,

$$B(\boldsymbol{a}^2; \tfrac{1}{2^2}) \supset X^2 \supset X^2 \cap B(\boldsymbol{a}^3; \tfrac{1}{2^3}) = X^3.$$

Следовательно, $B(\boldsymbol{a}^2; \frac{1}{2^2}) \cap B(\boldsymbol{a}^3; \frac{1}{2^3}) \neq \emptyset$, и, следовательно,

$$\|\boldsymbol{a}^2 - \boldsymbol{a}^3\| \leq \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} < \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2}.$$

Продолжая таким образом, получим последовательность множеств X^n и точек $\boldsymbol{a}^n$, причем

$$\|\boldsymbol{a}^n - \boldsymbol{a}^{n+1}\| < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Последовательность точек $(\boldsymbol{a}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ является фундаментальной, поскольку для $p \in \mathbb{Z}_+$ имеем

$$\begin{aligned}
&\|\boldsymbol{a}^n - \boldsymbol{a}^{n+p}\| = \\
&\quad = \|\boldsymbol{a}^n - \boldsymbol{a}^{n+1} + \boldsymbol{a}^{n+1} - a^{n+2} + \ldots + \boldsymbol{a}^{n+p-1} - \boldsymbol{a}^{n+p}\| \leq \\
&\quad \leq \|\boldsymbol{a}^n - \boldsymbol{a}^{n+1}\| + \ldots + \|\boldsymbol{a}^{n+p-1} - \boldsymbol{a}^{n+p}\| < \\
&\quad < \frac{1}{2^{n-1}} + \ldots + \frac{1}{2^{n+p-2}} = \frac{1}{2^{n-1}}\Big(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{p-1}}\Big) = \\
&\quad = \frac{1}{2^{n-1}} \frac{1 - \frac{1}{2^p}}{1 - \frac{1}{2}} < \frac{1}{2^{n-2}}.
\end{aligned}$$

Поскольку E банахово, то последовательность $(\boldsymbol{a}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ является сходящейся, т.е. существует $\boldsymbol{a}^* = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{a}^n \in E$, причем для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\|\boldsymbol{a}^n - \boldsymbol{a}^*\| = \lim_{p\to\infty} \|\boldsymbol{a}^n - \boldsymbol{a}^{n+p}\| \leq \frac{1}{2^{n-2}}. \tag{1.36}$$

Докажем, что $\boldsymbol{a}^* \in X$ и $\boldsymbol{a}^* \in F_\gamma$ для каждого $\gamma \in \Gamma$. Поскольку множества X и F_γ замкнуты, то достаточно доказать, что $\boldsymbol{a}^*$ является предельной точкой X и F_γ.

Поэтому для произвольного $\varepsilon > 0$ рассмотрим $B(\boldsymbol{a}^*; \varepsilon)$. Выберем $n \in \mathbb{N}$, для которого $\frac{1}{2^{n-2}} < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда, для $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{a}^n; \frac{1}{2^n})$, используя (1.36), имеем

$$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}^*\| \leq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}^n\| + \|\boldsymbol{a}^n - \boldsymbol{a}^*\| < \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-2}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

т.е. $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{a}^*; \varepsilon)$, и, следовательно, $B(\boldsymbol{a}^n; \frac{1}{2^n}) \subset B(\boldsymbol{a}^*; \varepsilon)$. Но по построению

$$X^n \subset B(\boldsymbol{a}^n; \tfrac{1}{2^n}).$$

Таким образом, $X^n \subset B(\boldsymbol{a}^*; \varepsilon)$, и, так как $X^n \subset X$ и $X^n \cap F_\gamma \neq \emptyset$, имеем, что

$$B(\boldsymbol{a}^*; \varepsilon) \cap X \neq \emptyset, \qquad B(\boldsymbol{a}^*; \varepsilon) \cap F_\gamma \neq \emptyset,$$

что и оканчивает доказательство.

$\square$

Теорема 1.7.29. *Пусть E — банахово пространство, и $X \subset E$. Следующие условия эквивалентны.*

(i) *Множество X является предкомпактным.*

(ii) *Множество X вполне ограничено.*

Доказательство. **(i) $\Rightarrow$ (ii)** Если X предкомпактно, то это означает, что множество $\overline{X}$ является компактным. Следовательно, по теореме 1.7.27 оно является вполне ограниченным. А это означает, что и X также будет вполне ограниченным (утверждение 1.7.23).

(ii) $\Rightarrow$ (i) Если X вполне ограничено, то и $\overline{X}$ также будет вполне ограниченным (утверждение 1.7.23). А, поскольку $\overline{X}$ также замкнуто, то по теореме 1.7.27, множество $\overline{X}$ является компактным, что по определению означает, что X предкомпактно.

$\square$

1.7.2 Компактные подмножества $\mathcal{C}([a,b])$

Определение 1.7.30. Семейство функций $\Phi = \{f_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} \subset \mathcal{C}([a,b])$ называется *равномерно ограниченным*, если существует такое $C \in \mathbb{R}_+$, что $\|f_\gamma\|_\infty \leq C$ для всех $\gamma \in \Gamma$.

Замечание 1.7.31. Равномерная ограниченность множества функций $\Phi = \{f_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ эквивалентна тому, что множество Φ ограниченно в банаховом пространстве $\mathcal{C}([a,b])$.

Пример 1.7.32.

1. Семейство $\{\sin\gamma t : \gamma \in \mathbb{R}\}$, $t \in [-\pi,\pi]$, равномерно ограниченно.

2. Семейство $\{\gamma x : \gamma \in \mathbb{R}_+\}$, $x \in [0,1]$, не является равномерно ограниченным.

Определение 1.7.33. Семейство функций $\Phi = \{f_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} \subset \mathcal{C}([a,b])$ называется *равностепенно непрерывным*, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $t', t'' \in [a,b]$ и всех $\gamma \in \Gamma$ выполняется условие

$$|t' - t''| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |f_\gamma(t') - f_\gamma(t'')| < \varepsilon. \tag{1.37}$$

Пример 1.7.34. 1. Семейство функций $f_\gamma(t) = \sin(t+\gamma)$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $t \in [0,1]$ является равностепенно непрерывным, поскольку

$$\begin{aligned}|f_\gamma(t') - f_\gamma(t'')| &= |\sin(t'+\gamma) - \sin(t''+\gamma)| = \\ &= 2\Big|\sin\frac{t'-t''}{2}\cos\frac{t'+t''+2\gamma}{2}\Big| = \\ &= 2\Big|\sin\frac{t'-t''}{2}\Big|\,\Big|\cos\frac{t'+t''+2\gamma}{2}\Big| \le \\ &\le 2\Big|\frac{t'-t''}{2}\Big| = |t'-t''|.\end{aligned}$$

2. Семейство $f_\gamma = \gamma t$, $\gamma \in \mathbb{R}_+$, не является равностепенно непрерывным на $[0,1]$, поскольку

$$|f_\gamma(t') - f_\gamma(t'')| = |\gamma t' - \gamma t''| = \gamma|t'-t''|,$$

и очевидно, что условие (1.37) не может иметь место для $\varepsilon = 1$, произвольном фиксированном $\delta > 0$, $t' \ne t''$ и всех $\gamma \in \mathbb{R}_+$.

Теорема 1.7.35 (Арцела). *Семейство $\Phi = \{f_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} \subset \mathcal{C}([a,b])$ является предкомпактным подмножеством $\mathcal{C}([a,b])$ тогда и только тогда, когда оно равномерно ограниченно и равностепенно непрерывно.*

Доказательство. Предположим, что семейство Φ предкомпактно в $\mathcal{C}([a,b])$, и докажем, что оно равномерно ограничено и равностепенно непрерывно.

Предкомпактность Φ означает, что это множество вполне ограничено (теорема 1.7.29). Отсюда следует, что оно ограничено как подмножество в банаховом пространстве $\mathcal{C}([a,b])$ (утверждение 1.7.20), что означает его равномерную ограниченность (определение 1.7.17).

Докажем теперь равностепенную непрерывность Φ. Для заданного $\varepsilon > 0$, используя снова вполне ограниченность множества Φ, имеем, что

$$\Phi \subset \bigcup_{k=1}^{m} B(f_k; \tfrac{\varepsilon}{3})$$

для некоторого конечного множества $\{f_k\}_{k=1}^m$ непрерывных функций. Отсюда следует, что для произвольной функции $f_0 \in \Phi$ существует такое k_0, что $f_0 \in B(f_{k_0}; \frac{\varepsilon}{3})$, что означает, что

$$\|f_0 - f_{k_0}\| = \sup_{x\in[a,b]} |f_0(x) - f_{k_0}(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{1.38}$$

Рассмотрим функцию f_k, $k = 1, \ldots, m$. Эта функция непрерывна, а множество $[a, b]$ является компактным. Поэтому функция f_k является равномерно непрерывна на $[a, b]$ (теорема II.12.2.5), что означает, что существует такое $\delta_k > 0$, что

$$|x - y| < \delta_k \qquad \Longrightarrow \qquad |f_k(x) - f_k(y)| < \tfrac{\varepsilon}{3} \tag{1.39}$$

для всех $x, y \in [a, b]$. Положим теперь

$$\delta = \min_{k=1,\ldots,m} \delta_k > 0. \tag{1.40}$$

Тогда (1.39) будет иметь место для всех $k = 1, \ldots, m$ и всех $x, y \in [a, b]$, если $|x - y| < \delta$.

Теперь, если $f_0 \in \Phi$ произвольна и $f_0 \in B(f_{k_0}; \frac{\varepsilon}{3})$, а $|x - y| < \delta$, то

$$\begin{aligned}
|f_0(x) - f_0(y)| &= \big|(f_0(x) - f_{k_0}(x)) + (f_{k_0}(x) - f_{k_0}(y)) + \\
&\qquad + (f_{k_0}(y) - f_0(y))\big| \le \\
&\le |f_0(x) - f_{k_0}(x)| + |f_{k_0}(x) - f_{k_0}(y)| + \\
&\qquad + |f_{k_0}(y) - f_0(y)| \le \\
&\le \|f_0 - f_{k_0}\| + |f_{k_0}(x) - f_{k_0}(y)| + \|f_{k_0} - f_0\| < \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

где для оценки первого и третьего слагаемых использовалась оценка (1.38), а для второго слагаемого — оценка (1.39). Это оканчивает доказательство равностепенной непрерывности множества Φ.

Обратно, предположим, что семейство Φ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно, и докажем, что оно вполне ограничено в банаховом пространстве $\mathcal{C}([a, b])$, а, значит, и предкомпактно (теорема 1.7.29).

Пусть $\varepsilon > 0$ задано, и найдем конечную ε-сетку для Φ.

Поскольку Φ равномерно ограничено, то существует такое $C > 0$, что

$$|f(x)| < C$$

для всех $f \in \Phi$ и $x \in [a, b]$. Это означает, что график Γ_f произвольной функции $f \in \Phi$ лежит в прямоугольнике Π, см. рис. 1.17 (a).

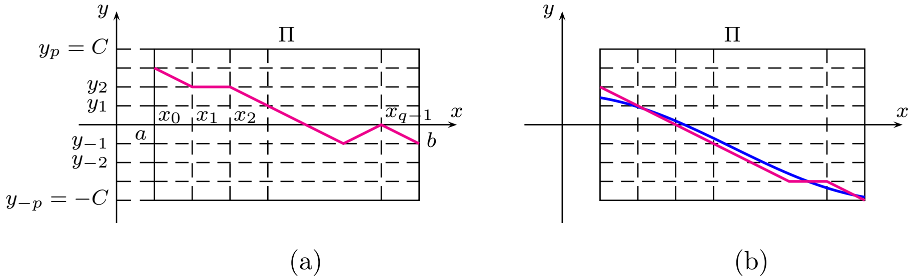


Рис. 1.17: Построение ε-сетки: (a) график типичной функции f_γ, $\gamma \in \Gamma$; (b) ε-аппроксимация функции f_0 (голубой) функцией f_{γ_0} (красный).

Разделим прямоугольник Π горизонтальными прямыми $y = y_k$, $k = -p, \dots, p$, так, чтобы $y_k - y_{k-1} = \varepsilon$ для всех k, и вертикальными прямыми $x = x_l$, $l = 0, \dots, q$, так, чтобы $0 < x_l - x_{l-1} < \delta$ для всех l, где δ найдено по заданному ε из условия равностепенной непрерывности множества Φ так, чтобы

$$|x' - x''| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{1.41}$$

для произвольной функции $f \in \Phi$.

Пусть $L = \{f_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ — множество всех непрерывных кусочно линейных функций, определенных на $[a, b]$, графики которых проходят через узлы полученной сетки $x = x_l$, $l = 0, \dots, q$, и $y = y_k$, $k = -p, \dots, p$, см. рис. 1.17 (a). Количество элементов в L конечно. Докажем, что L является ε-сеткой.

При заданном f_0 для построения функции f_{γ_0}, для которой $\|f_0 - f_{\gamma_0}\| < \varepsilon$, т.е. $f_0 \in B(f_{\gamma_0}; \varepsilon)$, заметим следующее.

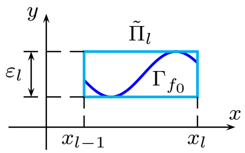


Рис. 1.18: Прямоугольник $\tilde{\Pi}_l$, содержащий график функции f_0, $x_{l-1} \leq x \leq x_l$.

Поскольку f_0 удовлетворяет условию равномерной непрерывности (1.41), то на каждом отрезке $[x_{l-1}, x_l]$ график Γ_{f_0} функции f_0 содержится в прямоугольнике $\tilde{\Pi}_l$ со стороной длины $x_l - x_{l-1}$ и высотой ε_l, причем $\varepsilon_l \leq \frac{\varepsilon}{2}$, см. рис. 1.18. Теперь значения $f_{\gamma_0}(x_l)$ строятся индуктивно по уже построенным значениям $f_{\gamma_0}(x_{l-1})$.

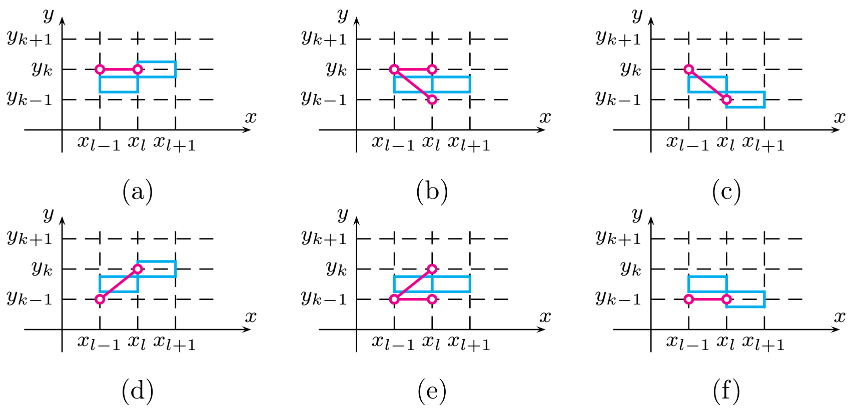
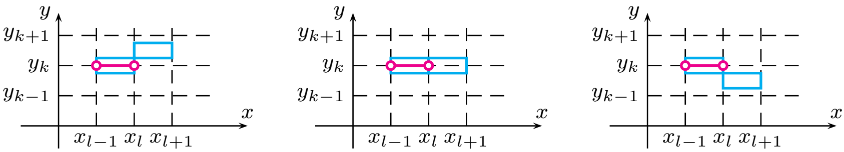


Рис. 1.19: Варианты построения $f_{\gamma_0}(x_l)$ и функции $f_{\gamma_0}(x)$, $x \in [x_{l-1}, x_l]$, при уже построенном $f_{\gamma_0}(x_{l-1})$ в случае $\tilde{\Pi}_l \subset \Pi_{lk}$.

Значение $f_{\gamma_0}(x_l)$ строится в зависимости от того содержится ли прямоугольник $\tilde{\Pi}_l$ в каком-нибудь Π_{lk} или нет, взаимному расположению прямоугольников $\tilde{\Pi}_l$ и $\tilde{\Pi}_{l+1}$, а также от того, где по отношению к прямоугольнику $\tilde{\Pi}_l$ находится построенное значение $f_{\gamma_0}(x_{l-1})$. Все варианты приведены на рис. 1.19 и 1.20. Значения $f_{\gamma_0}(x_0)$ и $f_{\gamma_0}(x_q)$ выбираются произвольным образом согласно рис. 1.19 или 1.20.



(a) (b) (c)

Рис. 1.20: Варианты построения $f_{\gamma 0}(x_l)$ при построенном $f_{\gamma 0}(x_{l-1})$ в случае $\tilde{\Pi}_l \not\subset \Pi_{lk}$.

Вертикальное расстояние между точкой на графике функции $f_{\gamma 0}$ при $x \in [x_{l-1}, x_l]$ и произвольной точкой прямоугольника, содержащего график функции f_0, а значит и точкой на графике f_0, по построению будет меньше, чем ε. $\square$

1.7.3 Приложение: теорема Пеано

Определение 1.7.36. Пусть D — область в $\mathbb{R}^2$, $f\colon D \to \mathbb{R}$ и $(x_0, y_0) \in D$. Система

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{1.42}$$

называется *задачей Коши* для дифференциального уравнения первого порядка. Условие $y(x_0) = y_0$ называется *начальным условием.*

Определение 1.7.37. Пусть $I = [x_0 - h, x_0 + h]$, $h > 0$. Функция $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ называется *решением* задачи Коши (1.53) на отрезке I, если:

(a) функция φ является непрерывно дифференцируемой на I;

(b) график Γ_φ функции φ лежит в D и содержит точку (x_0, y_0);

(c) для всех $x \in I$ имеет место равенство

$$\varphi'(x) = f\bigl(x, \varphi(x)\bigr).$$

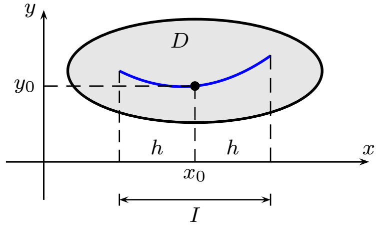


Рис. 1.21: Существование решения задачи Коши.

Теорема 1.7.38 (Пеано). *Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ — замкнутая ограниченная область, (x_0, y_0) — внутренняя точка D, и функция $f\colon D \to \mathbb{R}$ непрерывна на D. Тогда существует такое $h > 0$, что задача Коши (1.53) имеет решение φ на $I = [x_0 - h, x_0 + h]$ (см. рис 1.21).*

Замечание 1.7.39. Решение задачи Коши, существование которого гарантируется теоремой 1.7.38, не обязательно единственно.

Пример 1.7.40. Рассмотрим задачу Коши

$$y' = \frac{3}{2} y^{1/3}, \qquad y(0) = 0 \tag{1.43}$$

на $D = \mathbb{R}^2$.

Непосредственно проверяется, что три функции φ_0, φ_- и φ_+, заданные на $I = [-1, 1]$ как

$$\varphi_0(x) = 0, \qquad \varphi_\pm(x) = \begin{cases} 0, & -1 \le x \le 0, \\ \pm x^{3/2}, & 0 < x \le 1, \end{cases}$$

являются решением задачи Коши (1.43) (см. рис 1.22).

Проверим, например, что функция φ_- является решением задачи Коши (1.43). Очевидно, что она удовлетворяет начальному условию. Докажем, что она является решением дифференциального уравнения.

Поскольку $\varphi_-(x) = 0$ при $x < 0$, то $\varphi_-'(x) = 0 = \frac{3}{2}(\varphi_-(x))^{1/3}$, $x < 0$.

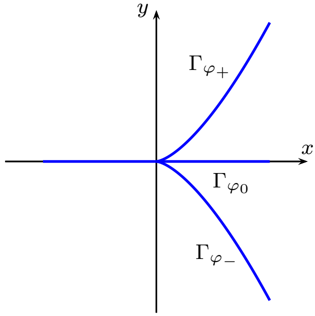


Рис. 1.22: Решения задачи Коши (1.43).

Если $x > 0$, то $\varphi_-(x) = -x^{3/2}$ и

$$\varphi_-'(x) = -\frac{3}{2}x^{1/2} = \frac{3}{2}\left(-x^{3/2}\right)^{1/3} = \frac{3}{2}(\varphi_-(x))^{1/3}$$

Для $x = 0$ вычисляем левую и правую производные:

$$\begin{aligned}(\varphi_-)'_-(0) &= \lim_{x\to 0-0} \tfrac{\varphi_-(x)-\varphi_-(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0-0} \tfrac{0-0}{x} = 0,\\ (\varphi_-)'_+(0) &= \lim_{x\to 0+0} \tfrac{\varphi_-(x)-\varphi_-(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0+0} \tfrac{-x^{3/2}-0}{x} = 0,\end{aligned}$$

т.е. производная

$$\varphi_-'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0}$$

существует и равна 0. Таким образом, φ_- удовлетворяет уравнению в (1.43) на I и, следовательно, является решением задачи Коши.

Идея доказательства теоремы 1.7.38. Поскольку D является замкнутым и ограниченным множество, а функция f непрерывна на D, то она ограничена на D, т.е. существует $M \in \mathbb{R}$ такое, что

$$|f(x,y)| \le M$$

для всех $(x,y) \in D$.

Через внутреннюю точку (x_0, y_0) проведем прямые под углами $\pm\alpha$, где $\operatorname{tg}\alpha = M$, и выберем $h > 0$ таким образом, чтобы вертикальные прямые $x = x_0 \pm h$ образовывали с уже проведенными прямыми треугольники, полностью лежащие в D (рис. 1.23 (а)).

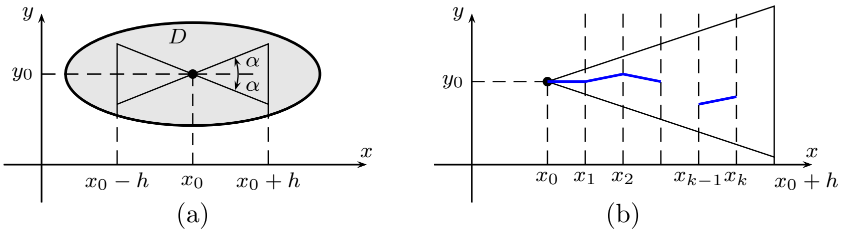


Рис. 1.23: Построение решения задачи Коши.

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ строим кусочно линейную функцию φ_n на $I = [x_0 - h, x_0 + h]$. Построения на $[x_0, x_0 + h]$ проводятся следующим образом (на $[x_0 - h, x_0]$ построения аналогичны).

Делим отрезок $[x_0, x_0 + h]$ на равные отрезки длиной $\frac{h}{n}$ точками $x_k = x_0 + k\frac{h}{n}$, $k = 0, \dots, n$, см. рис. 1.23 (b).

На $[x_0, x_1]$ определим φ_n как функцию, график которой является отрезком прямой, проходящей через точку (x_0, y_0) с угловым коэффициентом $k_0 = f(x_0, y_0)$, т.е.

$$\varphi_n(x) = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0), \qquad x \in [x_0, x_1].$$

Далее положим $y_1 = \varphi_n(x_1)$ и продолжим функцию φ_n на отрезок $[x_1, x_2]$ так, чтобы её график совпадал с отрезком, проходящим через точку (x_1, y_1) и лежащим на прямой с угловым коэффициентом $k_1 = f(x_1, y_1)$, т.е.

$$\varphi_n(x) = y_1 + f(x_1, y_1)(x - x_1), \qquad x \in [x_1, x_2].$$

Продолжая эту процедуру, получим функцию φ_n, определенную на всем отрезке $[x_0, x_0 + h]$. При этом,

$$\varphi_n(x) = y_0 + \sum_{k=0}^{m-1} f(x_k, y_k)(x_{k+1} - x_k) + f(x_m, y_m)(x - x_m),$$

$$x \in [x_m, x_{m+1}]. \quad (1.44)$$

Рассмотрим множество функций $\Phi = \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ и докажем следующее.

(i) Для произвольного $n \in \mathbb{N}$ график Γ_{φ_n} функции φ_n принадлежит D, точнее, правому замкнутому треугольнику (см. рис. 1.23 (a)), и, следовательно, множество Φ ограничено в $\mathcal{C}([x_0, x_0+h])$.

(ii) Семейство Φ является равностепенно непрерывным.

(i) Достаточно доказать, что

$$|\varphi_n(x) - y_0| \leq M(x - x_0), \qquad x \in [x_0, x_0+h].$$

Для $x \in [x_m, x_{m+1}]$, используя (1.44) и то, что $|f(x_k, y_k)| \leq M$ для всех k по определению M, имеем

$$\begin{aligned}
|\varphi_n(x) - y_0| &= \Big|\sum_{k=0}^{m-1} f(x_k, y_k)(x_{k+1} - x_k) + f(x_m, y_m)(x - x_m)\Big| \leq \\
&\leq \sum_{k=0}^{m-1} |f(x_k, y_k)|\,|x_{k+1} - x_k| + |f(x_m, y_m)|\,|x - x_m| \leq \\
&\leq \sum_{k=0}^{m-1} M(x_{k+1} - x_k) + M(x - x_m) = \\
&= M\Big(\sum_{k=0}^{m-1} x_{k+1} - \sum_{k=0}^{m-1} x_k - x_m + x\Big) = \\
&= M\Big(\sum_{k=1}^{m} x_k - \sum_{k=0}^{m-1} x_k - x_m + x\Big) = \\
&= M(x - x_0).
\end{aligned}$$

(ii) Докажем теперь равностепенную непрерывность семейства Φ. Пусть $\varepsilon > 0$ задано, и найдем такое $\delta > 0$, что

$$|x' - x''| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |\varphi_n(x') - \varphi_n(x'')| < \varepsilon \tag{1.45}$$

для всех $x', x'' \in [x_0, x_0 + h]$ и $n \in \mathbb{N}$. Пусть $x' \in [x_{m_1}, x_{m_1+1}]$, а $x'' \in [x_{m_2}, x_{m_2+1}]$, и $m_1 \leq m_2$. Рассмотрим

$$
\begin{aligned}
|\varphi_n(x') - \varphi_n(x'')| = \Big| \sum_{k=0}^{m_1-1} f(x_k, y_k)(x_{k+1} - x_k) + \\
+ f(x_{m_1}, y_{m_1})(x' - x_{m_1}) - \\
- \sum_{k=0}^{m_2-1} f(x_k, y_k)(x_{k+1} - x_k) - \\
- f(x_{m_2}, y_{m_2})(x'' - x_{m_2})\Big| = \\
= \Big| f(x_{m_1}, y_{m_1})(x' - x_{m_1}) - \sum_{k=m_1}^{m_2-1} f(x_k, y_k)(x_{k+1} - x_k) - \\
- f(x_{m_2}, y_{m_2})(x'' - x_{m_2})\Big| = \\
= \Big| f(x_{m_1}, y_{m_1})(x' - x_{m_1}) - f(x_{m_1}, y_{m_1})(x_{m_1+1} - x_{m_1}) - \\
- \sum_{k=m_1+1}^{m_2-1} f(x_k, y_k)(x_{k+1} - x_k) - f(x_{m_2}, y_{m_2})(x'' - x_{m_2})\Big| = \\
= \Big| -f(x_{m_1}, y_{m_1})(x_{m_1+1} - x') - \\
- \sum_{k=m_1+1}^{m_2-1} f(x_k, y_k)(x_{k+1} - x_k) - \\
- f(x_{m_2}, y_{m_2})(x'' - x_{m_2})\Big| \leq \\
\leq |f(x_{m_1}, y_{m_1})| (x_{m_1+1} - x') + \\
+ \sum_{k=m_1+1}^{m_2-1} |f(x_k, y_k)| (x_{k+1} - x_k) + \\
+ |f(x_{m_2}, y_{m_2})| (x'' - x_{m_2}) \leq \\
\leq M(x_{m_1+1} - x') + \sum_{k=m_1+1}^{m_2-1} M(x_{k+1} - x_k) + M(x'' - x_{m_2}) = \\
= M(x'' - x').
\end{aligned}
$$

Поэтому условие (1.45) выполнено для всех $n \in \mathbb{N}$ и $x', x'' \in [x_0, x_0 + h]$, если $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$.

Таким образом, семейство Φ является равномерно ограниченным и равностепенно непрерывным подмножеством $\mathcal{C}([x_0, x_0 + h])$, а, значит, предкомпактным (теорема Арцела 1.7.35).

Пусть φ_* — предельная точка множества $\overline{\Phi}$. Тогда очевидно, что $\Gamma_{\varphi_*} \subset D$ и содержит точку (x_0, y_0), и можно доказать[1], что φ_* является непрерывно дифференцируемой на $[x_0, x_0 + h]$ и удовлетворяет дифференциальному уравнению в (1.53), т.е. является решением задачи Коши (1.53). □

[1]Петровский, И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во МГУ, 1984. — 296 с.

1.8 Непрерывные отображения

1.8.1 Общие положения

Определение 1.8.1. Пусть $(E_1, \|\cdot\|_1)$ и $(E_2, \|\cdot\|_2)$ — линейные нормированные пространства, и $X \subset E_1$. Отображение $\boldsymbol{\varphi}\colon X \to E_2$ называется *непрерывным* в точке $\boldsymbol{x}_* \in X$, если для каждой окрестности $U_2 \subset E_2$ точки $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_*)$ существует такая окрестность $U_1 \subset E_1$ точки $\boldsymbol{x}_*$, что $\boldsymbol{\varphi}(U_1 \cap X) \subset U_2$.

Определение 1.8.2. Если $E_2 = \mathbb{K}$, $\|\cdot\|_2 = |\cdot|$ и $X \subset E$, то отображение $\varphi\colon X \to \mathbb{K}$ называется *функционалом на E*.

Утверждение 1.8.3. *Пусть $(E_1, \|\cdot\|_1)$, $(E_2, \|\cdot\|_2)$ — линейные нормированные пространства, $X \subset E_1$, $\boldsymbol{\varphi}\colon X \to E_2$, и $\boldsymbol{x}_* \in X$ — предельная точка X. Следующие условия эквивалентны.*

(i) *Отображение $\boldsymbol{\varphi}$ непрерывно в точке $\boldsymbol{x}_*$.*

(ii) *Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $\boldsymbol{x} \in X$*

$$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_*\|_1 < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \|\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_*)\|_2 < \varepsilon. \tag{1.46}$$

(iii) *Для любой последовательности $(\boldsymbol{x}_n)_{n=1}^{\infty}$ в X имеем:*

$$\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}_* \qquad \Longrightarrow \qquad \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_n) \to \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_*). \tag{1.47}$$

Доказательство. Будем доказывать по циклу: (i) ⇒ (ii) ⇒ (iii) ⇒ (i).

(i) ⇒ (ii) Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Рассмотрим шар $B(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_*); \varepsilon)$, который является окрестностью точки $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_*)$. По условию существует окрестность $U_1 \subset E_1$ точки $\boldsymbol{x}_*$, для которой

$$\boldsymbol{\varphi}(X \cap U_1) \subset B(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_*); \varepsilon).$$

Поскольку U_1 — окрестность точки $\boldsymbol{x}_*$, что означает, что точка $\boldsymbol{x}_*$ является внутренней точкой U_1, то существует такое $\delta > 0$, что $B(\boldsymbol{x}_*;\delta) \subset U_1$. Но тогда

$$\boldsymbol{\varphi}(X \cap B(\boldsymbol{x}_*;\delta)) \subset \boldsymbol{\varphi}(X \cap U_1) \subset B(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_*);\varepsilon),$$

что в точности означает выполнение условия в (ii).

(ii) ⇒ (iii) Пусть $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}_*$ в X, и докажем, что $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_n) \to \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_*)$. Пусть $\varepsilon > 0$ и найдем $N \in \mathbb{N}$, для которого $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_n) \in B(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_*);\varepsilon)$ для всех $n > N$. Используя условие (ii), найдем $\delta > 0$, для которого выполнено (1.46). Для найденного $\delta > 0$ найдем такое $N \in \mathbb{N}$, что $x_n \in B(\boldsymbol{x}_*;\delta)$ при $n > N$. Но тогда из условия (1.46) будет следовать, что

$$\|\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_n) - \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_*)\|_2 < \varepsilon,$$

т.е. $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_n) \in B(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_*);\varepsilon)$ при $n > N$.

(iii) ⇒ (i) Обозначим через $\mathcal{N}(\boldsymbol{x}_*)$ и $\mathcal{N}(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_*))$ системы окрестностей точек $\boldsymbol{x}_*$ и $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_*)$, соответственно. Тогда условие непрерывности в определении 1.8.1 запишется как

$$\forall\, U_2 \in \mathcal{N}(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_*)) \quad \exists\, U_1 \in \mathcal{N}(\boldsymbol{x}_*): \qquad \boldsymbol{\varphi}(U_1 \cap X) \subset U_2.$$

Доказательство будем проводить от противного, т.е., предполагая, что

$$\exists\, U_2 \in \mathcal{N}(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_*)) \quad \forall\, U_1 \in \mathcal{N}(\boldsymbol{x}_*): \qquad \boldsymbol{\varphi}(U_1 \cap X) \setminus U_2 \neq \emptyset.$$

Для U_2, удовлетворяющему этому условию, можно найти такое $\varepsilon > 0$, что $B(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_*));\varepsilon) \subset U_2$. И взяв последовательность $B(\boldsymbol{x}_*;\frac{1}{n})$, $n \in \mathbb{N}$, в качестве U_1, получим, что

$$\exists\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}: \qquad \boldsymbol{\varphi}\big(B(\boldsymbol{x}_*;\tfrac{1}{n}) \cap X\big) \setminus B(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_*);\varepsilon) \neq \emptyset.$$

Поэтому для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует такая точка $\boldsymbol{x}_n \in B(\boldsymbol{x}_*;\frac{1}{n}) \cap X$, что $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_n) \notin B(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_*);\varepsilon)$. Но тогда приходим к противоречию, поскольку $\boldsymbol{x}_n \in X$, $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}_*$, но $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_n) \not\to \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_*)$. $\square$

Определение 1.8.4. Пусть $(E_1, \|\cdot\|_1)$ и $(E_2, \|\cdot\|_2)$ — линейные нормированные пространства, $X \subset E_1$. Отображение $\boldsymbol{\varphi}\colon X \to E_2$ называется *непрерывным на* X, если оно непрерывно в каждой точке X.

Пример 1.8.5. Пусть $E_1 = E_2 = \mathbb{R}$, $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = x^2$. Тогда функционал φ непрерывен на $\mathbb{R}$

Пример 1.8.6. Пусть $E_1 = E_2 = \mathcal{C}([a,b])$, и $F \in \mathcal{C}\big([a,b] \times [c,d]\big)$. Положим

$$X = \big\{x \in \mathcal{C}([a,b]) : x(t) \in (c,d)\ \forall\, t \in [a,b]\big\},$$

и докажем, что отображение $\boldsymbol{\varphi}\colon X \to \mathcal{C}([a,b])$, заданное как

$$\boldsymbol{\varphi}(x)(t) = \int_a^t F(\tau, x(\tau))\, d\tau, \qquad t \in [a,b],$$

является непрерывным на X.

Пусть $x_* \in X$ произвольная функция. Используя (1.46), докажем, что отображение $\boldsymbol{\varphi}$ непрерывно в x_*. Пусть $x \in X$, и оценим разность

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{\varphi}(x) - \boldsymbol{\varphi}(x_*)\|_\infty &= \sup_{t\in[a,b]} |\boldsymbol{\varphi}(x)(t) - \boldsymbol{\varphi}(x_*)(t)| = \\
&= \sup_{t\in[a,b]} \Big|\int_a^t F(\tau, x(\tau))\, d\tau - \int_a^t F(\tau, x_*(\tau))\, d\tau\Big| = \\
&= \sup_{t\in[a,b]} \Big|\int_a^t \big(F(\tau, x(\tau)) - F(\tau, x_*(\tau))\big)\, d\tau\Big| \le \\
&\le \sup_{t\in[a,b]} \int_a^t \big|F(\tau, x(\tau)) - F(\tau, x_*(\tau))\big|\, d\tau = \\
&= \int_a^b \big|F(\tau, x(\tau)) - F(\tau, x_*(\tau))\big|\, d\tau.
\end{aligned}$$

Зададимся $\varepsilon > 0$. Поскольку множество $[a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$ является компактным, а функция F непрерывной, то на этом множестве она является равномерно непрерывной, и, следовательно, существует такое $\delta > 0$, что

$$\|(\tau_1, \sigma_1) - (\tau_2, \sigma_2)\|_2 < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |F(\tau_1, \sigma_1) - F(\tau_2, \sigma_2)| < \frac{\varepsilon}{b-a}. \tag{1.48}$$

Если теперь

$$\|x - x_*\|_\infty = \sup_{\tau \in [a,b]} |x(\tau) - x_*(\tau)| < \delta,$$

то тогда для всех $\tau \in [a, b]$ имеем, что $|x(\tau) - x_*(\tau)| < \delta$, а значит

$$\|(\tau, x(\tau)) - (\tau, x_*(\tau))\|_2 = \left\|\big(0, x(\tau) - x_*(\tau)\big)\right\|_2 = |x(\tau) - x_*(\tau)| < \delta,$$

и

$$\big|F(\tau, x(\tau)) - F(\tau, x_*(\tau))\big| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

для всех $\tau \in [a, b]$. Таким образом,

$$\int_a^b \big|F(\tau, x(\tau)) - F(\tau, x_*(\tau))\big| \, d\tau \le \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} \, d\tau = \frac{\varepsilon}{b-a} \tau \Big|_{\tau=a}^{\tau=b} = \varepsilon.$$

Итак, для произвольного $\varepsilon > 0$ необходимое $\delta > 0$ находится из условия (1.48).

1.8.2 Непрерывные отображения на компактах

Теорема 1.8.7. *Пусть $(E_1, \|\cdot\|_1)$ и $(E_2, \|\cdot\|_2)$ — банаховы пространства. Пусть $X \subset E_1$ — компактное подмножество E_1, и отображение $\boldsymbol{\varphi}\colon X \to E_2$ непрерывно на X. Тогда $\boldsymbol{\varphi}(X)$ является компактным подмножеством E_2.*

Доказательство. Докажем, что $\boldsymbol{\varphi}(X)$ является счетно компактным, что, в силу теоремы 1.7.27, будет означать его компактность.

Пусть $Y \subset \boldsymbol{\varphi}(X)$ — произвольное бесконечное множество, и докажем, что Y имеет предельную точку в $\boldsymbol{f}(X)$.

Рассмотрим множество $\boldsymbol{\varphi}^{-1}(Y) \subset X$. Оно также будет бесконечным множеством, поскольку количество элементов в $\boldsymbol{\varphi}^{-1}(Y)$ не меньше, чем количество элементов в Y. А, поскольку X является компактным и, следовательно, счетно компактным, то существует $\boldsymbol{x}_* \in X$, являющийся предельной точкой $\boldsymbol{\varphi}^{-1}(Y)$. Так как $\boldsymbol{x}_*$ является предельной точкой $\boldsymbol{\varphi}^{-1}(Y)$, то существует такая последовательность $(\boldsymbol{x}_k)_{k=1}^{\infty}$, $\boldsymbol{x}_k \in \boldsymbol{\varphi}^{-1}(Y)$, для которой $\boldsymbol{x}_k \to \boldsymbol{x}_*$. Но тогда $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_k) \in Y$, $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_*) \in \boldsymbol{f}(X)$, и $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_k) \to \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_*)$ в силу непрерывности $\boldsymbol{\varphi}$ в точке $\boldsymbol{x}_*$. Таким образом $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_*)$ является предельной точкой Y в $\boldsymbol{\varphi}(X)$. □

Теорема 1.8.8 (Вейерштрасс). *Пусть E — банахово пространство, и $X \subset E$ — компактное подмножество E. Пусть $f\colon X \to \mathbb{R}$ непрерывное на X отображение. Тогда*

(a) *отображение f ограничено на X, т.е. существует $C \in \mathbb{R}$, для которого*
$$|f(\boldsymbol{x})| \le C$$
для всех $\boldsymbol{x} \in X$;

(b) *отображение f достигает на X своих минимального и максимального значений, т.е. существуют такие $\boldsymbol{x}_*, \boldsymbol{x}^* \in X$, что*
$$\inf_{\boldsymbol{x}\in X} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_*), \qquad \sup_{\boldsymbol{x}\in X} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}^*).$$

Доказательство. Применяя теорему 1.8.7 к отображению f, имеем, что $f(X) \subset \mathbb{R}$ является компактным подмножеством $\mathbb{R}$. Таким образом, множество $f(X)$ является ограниченным и замкнутым (теорема 1.7.12). Из его ограниченности следует (a), а из замкнутости (b), поскольку значения
$$\inf_{\boldsymbol{x}\in X} f(\boldsymbol{x}) = \inf f(X), \qquad \sup_{\boldsymbol{x}\in X} f(\boldsymbol{x}) = \sup f(X)$$
являются предельными точками $f(X)$. □

Определение 1.8.9. Пусть $(E_1, \|\cdot\|_1)$, $(E_2, \|\cdot\|_2)$ — линейные нормированные пространства, и $X \subset E_1$. Отображение $\boldsymbol{\varphi}\colon X \to E_2$

называется *равномерно непрерывным на* X, если выполнено следующее условие

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,\delta > 0 \quad \forall\,\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}'' \in X : \\ \|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}''\|_1 < \delta \quad \Longrightarrow \quad \|\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}') - \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}'')\|_2 < \varepsilon. \quad (1.49)$$

Замечание 1.8.10. Из условия (1.49) сразу следует, что отображение равномерно непрерывное на X является непрерывным на X.

Теорема 1.8.11. *Пусть* $(E_1, \|\cdot\|_1)$ *— банахово пространство, а* $(E_2, \|\cdot\|_2)$ *— линейное нормированное пространство,* $X \subset E_1$*, и отображение* $\boldsymbol{\varphi}\colon X \to E_2$ *непрерывно на* X*. Если* X *компактно, то отображение* $\boldsymbol{\varphi}$ *является равномерно непрерывным на* X*.*

Доказательство. Доказательство проведем от противного. Пусть $\boldsymbol{\varphi}$ не является равномерно непрерывным, т.е. выполняется следующее условие:

$$\exists\,\varepsilon > 0 \quad \forall\,\delta > 0 \quad \exists\,\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}'' \in X : \\ \|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}''\|_1 < \delta \quad \text{и} \quad \|\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}') - \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}'')\|_2 \geq \varepsilon. \quad (1.50)$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$, удовлетворяющее условию (1.50), и для каждого $\delta_n = \frac{1}{n}$ найдем соответствующие пары точек $\boldsymbol{x}'_n, \boldsymbol{x}''_n \in X$, удовлетворяющие условию (1.50). Последовательность $(\boldsymbol{x}'_n)_{n=1}^{\infty}$ имеет предельную точку $\boldsymbol{x}_* \in X$, поскольку X является счетно компактным, и, следовательно, существует подпоследовательность $(\boldsymbol{x}'_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ последовательности $(\boldsymbol{x}'_n)_{n=1}^{\infty}$, сходящаяся к $\boldsymbol{x}_*$.

Докажем, что подпоследовательность $(\boldsymbol{x}''_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ последовательности $(\boldsymbol{x}''_n)_{n=1}^{\infty}$ также сходится к $\boldsymbol{x}_*$. Действительно, для произвольного $\tilde{\delta} > 0$, используя сходимости $(\boldsymbol{x}_{n_k})$ к $\boldsymbol{x}_*$ и $(\frac{1}{n_k})$ к 0, выберем $N \in \mathbb{N}$ таким, чтобы

$$\|\boldsymbol{x}'_{n_k} - \boldsymbol{x}_*\|_1 < \frac{\tilde{\delta}}{2} \qquad \text{и} \qquad \frac{1}{n_k} < \frac{\tilde{\delta}}{2}$$

для всех $k > N$. Тогда для $k > N$ имеем, что

$$\|\boldsymbol{x}''_{n_k} - \boldsymbol{x}_*\|_1 = \|\boldsymbol{x}''_{n_k} - \boldsymbol{x}'_{n_k} + \boldsymbol{x}'_{n_k} - \boldsymbol{x}_*\|_1 \leq$$

$$\begin{aligned}
&\le \|\boldsymbol{x}''_{n_k} - \boldsymbol{x}'_{n_k}\|_1 + \|\boldsymbol{x}'_{n_k} - \boldsymbol{x}_*\|_1 \le \\
&\le \frac{1}{n_k} + \|\boldsymbol{x}'_{n_k} - \boldsymbol{x}_*\|_1 \le \frac{\tilde\delta}{2} + \frac{\tilde\delta}{2} = \tilde\delta,
\end{aligned}$$

что и доказывает сходимость $(\boldsymbol{x}''_{n_k})$ к $\boldsymbol{x}_*$.

Теперь, используя зафиксированное $\varepsilon > 0$ и непрерывность отображения $\boldsymbol{\varphi}$ в точке $\boldsymbol{x}_*$ выберем такое $\delta > 0$, что

$$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_*\|_1 < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \|\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_*)\|_2 < \frac{\varepsilon}{2},$$

а, поскольку последовательности $(\boldsymbol{x}'_{n_k})$ и $(\boldsymbol{x}''_{n_k})$ сходятся к $\boldsymbol{x}_*$, то для найденного δ выберем $k_0 \in \mathbb{N}$ таким образом, чтобы

$$\|\boldsymbol{x}'_{n_{k_0}} - \boldsymbol{x}_*\|_1 < \delta, \qquad \|\boldsymbol{x}''_{n_{k_0}} - \boldsymbol{x}_*\|_1 < \delta,$$

и, следовательно, будем иметь, что

$$\|\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}'_{n_{k_0}}) - \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_*)\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \|\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}''_{n_{k_0}}) - \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_*)\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда, с одной стороны,

$$\|\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}'_n) - \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}''_n)\|_2 \ge \varepsilon$$

для всех $n \in \mathbb{N}$ по предполагаемому условию, а, с другой стороны,

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}'_{n_{k_0}}) - \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}''_{n_{k_0}})\|_2 &= \|\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}'_{n_{k_0}}) - \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_*) + \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_*) - \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}''_{n_{k_0}})\|_2 \le \\
&\le \|\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}'_{n_{k_0}}) - \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_*)\|_2 + \|\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_*) - \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}''_{n_{k_0}})\|_2 < \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

что приводит к противоречию. □

1.8.3 Сжатия. Теорема Банаха о неподвижной точке

Определение 1.8.12. Пусть $(E, \|\cdot\|)$ — линейное нормированное пространство и $X \subset E$. Отображение $\boldsymbol{\varphi}\colon X \to X$ называется *сжатием на* X, если существует такое $q \in (0,1)$, что

$$\|\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}') - \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}'')\| \le q\, \|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}''\|$$

для всех $\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}'' \in X$.

Пример 1.8.13. Пусть $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задано как $\varphi(t) = \frac{1}{2}\sin t$. Тогда φ является сжатием на $X = \mathbb{R}$.

Действительно, для произвольных $t', t'' \in \mathbb{R}$ имеем:

$$\begin{aligned}
|\varphi(t') - \varphi(t'')| &= \Big|\frac{1}{2}\sin t' - \frac{1}{2}\sin t''\Big| = \frac{1}{2}|\sin t' - \sin t''| = \\
&= \frac{1}{2}\Big|2\sin\frac{t'-t''}{2}\cos\frac{t'+t''}{2}\Big| = \Big|\sin\frac{t'-t''}{2}\Big|\,\Big|\cos\frac{t'+t''}{2}\Big| \le \\
&\le \Big|\sin\frac{t'-t''}{2}\Big| \le \frac{1}{2}\,|t'-t''|.
\end{aligned}$$

Таким образом, имеем, что $q = \frac{1}{2} < 1$, и φ является сжатием.

Пример 1.8.14. Пусть $E = \mathcal{C}\big([a,b]\big)$, $k \in \mathcal{C}\big([a,b]\times[a,b]\big)$, $b \in \mathcal{C}\big([a,b]\big)$ — фиксированные непрерывные функции, $X = E$ и $\varphi\colon X \to X$ задано как

$$\varphi(x)(t) = \int_a^t k(t,s)x(s)\,ds + b(t), \qquad x \in X.$$

Возьмем произвольные $x', x'' \in X$, и рассмотрим $\|\varphi(x') - \varphi(x'')\|$. Имеем

$$\begin{aligned}
\|\varphi(x') - \varphi(x'')\| &= \sup_{t\in[a,b]}\big|\varphi(x')(t) - \varphi(x'')(t)\big| = \\
&= \sup_{t\in[a,b]}\Big|\Big(\int_a^t k(t,s)x'(s)\,ds + b(t)\Big) - \\
&\qquad - \Big(\int_a^t k(t,s)x''(s)\,ds + b(t)\Big)\Big| = \\
&= \sup_{t\in[a,b]}\Big|\int_a^t \big(k(t,s)x'(s) - k(t,s)x''(s)\big)\,ds\Big| = \\
&= \sup_{t\in[a,b]}\Big|\int_a^t k(t,s)\big(x'(t) - x''(t)\big)\,ds\Big| \le \\
&\le \sup_{t\in[a,b]}\int_a^t |k(t,s)|\,|x'(s) - x''(s)|\,ds \le
\end{aligned}$$

$$\leq \sup_{t\in[a,b]} \int_a^t |k(t,s)|\, \|x' - x''\|\, ds =$$

$$= \|x' - x''\| \sup_{t\in[a,b]} \int_a^t |k(t,s)|\, ds \leq$$

$$\leq \|x' - x''\| \int_a^b \sup_{t\in[a,b]} |k(t,s)|\, ds.$$

Таким образом, если

$$q = \int_a^b \sup_{t\in[a,b]} |k(t,s)|\, ds < 1,$$

то φ является сжатием.

Утверждение 1.8.15. *Пусть $(E, \|\cdot\|)$ — линейное нормированное пространство и $X \subset E$. Если $\boldsymbol{\varphi}\colon X \to X$ является сжатием на X, то $\boldsymbol{\varphi}$ равномерно непрерывно на X.*

Доказательство. Действительно, в силу определения сжатия 1.8.12 для произвольного $\varepsilon > 0$ в определении (1.49) достаточно положить $\delta = \varepsilon$. □

Определение 1.8.16. Пусть X — множество, и $\boldsymbol{\varphi}\colon X \to X$. Элемент $\boldsymbol{x}_* \in X$ называется *неподвижной точкой* относительно φ, если

$$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_*) = \boldsymbol{x}_*.$$

Теорема 1.8.17 (Банах)**.** *Пусть E — банахово пространство, $X \subset E$ — замкнутое подмножество E, и $\boldsymbol{\varphi}\colon X \to X$ является сжатием на X. Тогда $\boldsymbol{\varphi}$ имеет в X неподвижную точку, и эта неподвижная точка единственна для $\boldsymbol{\varphi}$ в X.*

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{x}_0 \in X$ — произвольная точка. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ определим по индукции

$$\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_{n-1}).$$

Тогда, в силу того, что $\boldsymbol{\varphi}$ является сжатием, для $n \in \mathbb{N}$ имеем, что

$$\|\boldsymbol{x}_{n+1} - \boldsymbol{x}_n\| = \|\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_n) - \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_{n-1}\| \leq q\|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}_{n-1}\|.$$

Обозначив $d = \|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0\|$, по индукции получим

$$\begin{gathered}\|\boldsymbol{x}_{n+1} - \boldsymbol{x}_n\| \leq q\,\|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}_{n-1}\| \leq q^2\|\boldsymbol{x}_{n-1} - \boldsymbol{x}_{n-2}\| \leq \\ \leq \ldots \leq q^n\|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0\| = q^n d.\end{gathered}$$

Докажем, что последовательность $(\boldsymbol{x}_n)_{n=1}^{\infty}$ является фундаментальной в банаховом пространстве E, а, значит, сходящейся. Для $n \in \mathbb{N}$ и $p \in \mathbb{Z}_+$ имеем

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}_{n+p} - \boldsymbol{x}_n\| &= \|\boldsymbol{x}_{n+p} - \boldsymbol{x}_{n+p-1} + \boldsymbol{x}_{n+p-1} - \boldsymbol{x}_{n+p-2} + \\ &\qquad + \boldsymbol{x}_{n+p-2} - \boldsymbol{x}_{n+p-3} + \ldots + \boldsymbol{x}_{n+1} - \boldsymbol{x}_n\| \leq \\ &\leq \|\boldsymbol{x}_{n+p} - \boldsymbol{x}_{n+p-1}\| + \|\boldsymbol{x}_{n+p-1} - \boldsymbol{x}_{n+p-2}\| + \\ &\qquad + \|\boldsymbol{x}_{n+p-2} - \boldsymbol{x}_{n+p-3}\| + \ldots + \|\boldsymbol{x}_{n+1} - \boldsymbol{x}_n\| \leq \\ &\leq q^{n+p-1}d + q^{n+p-2}d + q^{n+p-3}d \ldots + q^n d = \\ &= q^n(q^{p-1} + q^{p-2} + \ldots + 1)d = q^n\frac{1-q^p}{1-q}d < q^n\frac{1}{1-q}d.\end{aligned}$$

Поскольку $q < 1$, то $q^n \to 0$ при $n \to \infty$, что и доказывает фундаментальность $(\boldsymbol{x}_n)_{n=1}^{\infty}$, а значит и существование предела

$$\boldsymbol{x}_* = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n.$$

Так как $\boldsymbol{x}_n \in X$ для всех n, и X замкнуто, то $\boldsymbol{x}_* \in X$.

Докажем теперь, что $\boldsymbol{x}_*$ является неподвижной точкой для $\boldsymbol{\varphi}$. Поскольку отображение $\boldsymbol{\varphi}$ является сжатием, то оно равномерно непрерывно (утверждение 1.8.15), и, в частности, непрерывно в точке $\boldsymbol{x}_*$. Поэтому

$$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_*) = \boldsymbol{\varphi}(\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n) = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_n) = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_{n+1} = \boldsymbol{x}_*.$$

Наконец, покажем, что $\boldsymbol{\varphi}$ имеет единственную неподвижную точку. Если их две, $\boldsymbol{x}'_*$ и $\boldsymbol{x}''_*$, и $\boldsymbol{x}'_* \neq \boldsymbol{x}''_*$, то

$$\|\boldsymbol{x}'_* - \boldsymbol{x}''_*\| = \|\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}'_*) - \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}''_*)\| \leq q\,\|\boldsymbol{x}'_* - \boldsymbol{x}''_*\|,$$

т.е.

$$(1-q)\|\boldsymbol{x}'_* - \boldsymbol{x}''_*\| \le 0,$$

что не возможно, поскольку $q < 1$. □

Следствие 1.8.18. *Пусть E — банахово пространство, $X \subset E$ является замкнутым подмножеством, и $\boldsymbol{\varphi}\colon X \to X$. Если существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что*

$$\boldsymbol{\varphi}^{n_0} = \underbrace{\boldsymbol{\varphi} \circ \boldsymbol{\varphi} \circ \ldots \circ \boldsymbol{\varphi}}_{n_0 \text{ раз}}$$

является сжатием на X, то $\boldsymbol{\varphi}$ имеет неподвижную точку в X, и она единственна.

Доказательство. В силу теоремы 1.8.17 отображение $\boldsymbol{\varphi}^{n_0}$ имеет неподвижную точку $\boldsymbol{x}_*$, и она единственна. Но для $\boldsymbol{x}'_* = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_*)$ имеем, что

$$\boldsymbol{\varphi}^{n_0}(\boldsymbol{x}'_*) = \boldsymbol{\varphi}^{n_0}(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_*)) = \boldsymbol{\varphi}^{n_0+1}(\boldsymbol{x}_*) = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\varphi}^{n_0}(\boldsymbol{x}_*)) = \boldsymbol{\varphi}(x_*) = \boldsymbol{x}'_*.$$

Таким образом, $\boldsymbol{x}'_*$ также является неподвижной точкой отображения $\boldsymbol{\varphi}^{n_0}$. В силу единственности неподвижной точки имеем, что $\boldsymbol{x}'_* = \boldsymbol{x}_*$, то есть

$$\boldsymbol{\varphi}(x_*) = \boldsymbol{x}_*,$$

и $\boldsymbol{x}_*$ является неподвижной точкой отображения $\boldsymbol{\varphi}$.

Единственность неподвижной точки для $\boldsymbol{\varphi}$ сразу следует из того, что любая неподвижная точка для $\boldsymbol{\varphi}$ также является неподвижной точкой для отображения $\boldsymbol{\varphi}^{n_0}$, которое имеет единственную неподвижную точку. □

Теорема 1.8.19 (Брауэр)**.** *Пусть $X = B[\mathbf{0}; R] \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутый шар радиуса R в $\mathbb{R}^n$, и отображение $\boldsymbol{\varphi}\colon X \to X$ непрерывно на X. Тогда $\boldsymbol{\varphi}$ имеет в X неподвижную точку (не обязательно единственную).*

Доказательство. Без доказательства. □

Пример 1.8.20. Пусть $n = 2$, и $\boldsymbol{\varphi}\colon X \to X$ задано как

$$\boldsymbol{\varphi}(x_1, x_2) = (x_1, -x_2).$$

Тогда все точки множества

$$\bigl\{(x, 0) : |x| \le R\bigr\}$$

являются неподвижными относительно $\boldsymbol{\varphi}$.

Определение 1.8.21. Пусть E — линейное нормированное пространство. Множество $X \subset E$ называется *выпуклым*, если для произвольных $\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}'' \in X$ имеем, что

$$[\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}''] = \bigl\{(1-t)\boldsymbol{x}' + t\boldsymbol{x}'' : t \in [0,1]\bigr\} \subset X.$$

Теорема 1.8.22 (Шаудер–Тихонов)**.** *Пусть E — линейное нормированное пространство, и $X \subset E$ — выпуклое компактное подмножество E. Если отображение $\boldsymbol{\varphi}\colon X \to X$ непрерывно на X, то оно имеет в X неподвижную точку.*

Доказательство. Без доказательства. □

1.8.4 Приложение: теорема Пикара

В этом разделе $D \subset \mathbb{R}^2$ является замкнутой ограниченной областью, и (x_0, y_0) — внутренняя точка D, $f\colon D \to \mathbb{R}$ — некоторая функция. *Промежуток* $I \subset \mathbb{R}$ будет пониматься как конечный или бесконечный интервал, полуинтервал или отрезок.

Определение 1.8.23. Уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1.51}$$

называется *скалярным дифференциальным уравнением первого порядка, разрешенным относительно производной.*

Решением дифференциального уравнения (1.51) на промежутке $I \subset \mathbb{R}$ называется функция $g\colon I \to \mathbb{R}$, которая удовлетворяет следующим условиям:

1) g имеет производную в каждой точке промежутка I;
2) график функции g принадлежит D при $x \in I$, т.е. $(x, g(x)) \in D$ для всех $x \in I$;
3) имеет место равенство
$$\frac{dg}{dx} = f(x, g(x)) \tag{1.52}$$
для всех $x \in I$.

Определение 1.8.24. Система
$$\begin{cases} y' &= f(x, y), \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases} \tag{1.53}$$
называется *задачей Коши* для дифференциального уравнения первого порядка. Условие $y(x_0) = y_0$ называется *начальным условием.*

Функция $g\colon I \to \mathbb{R}$ называется *решением* задачи Коши (1.53) на промежутке $I \subset \mathbb{R}$, если $x_0 \in I$, функция g является решением дифференциального уравнения в (1.53) и $g(x_0) = y_0$.

Утверждение 1.8.25. *Непрерывно дифференцируемая функция $g(x)$, $x \in I$, является решением задачи Коши (1.53) тогда и только тогда, когда g является решением интегрального уравнения*
$$g(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, g(t))\, dt, \qquad x, x_0 \in I. \tag{1.54}$$

Доказательство. Пусть g является решением интегрального уравнения (1.54). Тогда
$$g(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} f(t, g(t))\, dt = y_0,$$
поскольку интеграл от произвольной непрерывной функции на отрезке $[x_0, x_0]$ равен 0. Далее,
$$g'(x) = \Big(y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, g(t))\, dt\Big)'_x = f(x, g(x)).$$

Таким образом, $g(x)$ является решением задачи Коши (1.53).

Обратно, пусть g является решением задачи Коши. Из этого, в частности, следует, что

$$g'(t) = f(t, g(t)), \qquad t \in I.$$

Пусть $x_0, x \in I$. Проинтегрируем предыдущее равенства по отрезку $[x_0, x]$:

$$\int_{x_0}^{x} g'(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} f(t, g(t))\,dt.$$

Отсюда имеем, что

$$g(x) - g(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(t, g(t))\,dt.$$

Используя начальное условие $g(x_0) = y_0$, видим, что g удовлетворяет интегральному уравнению (1.54). □

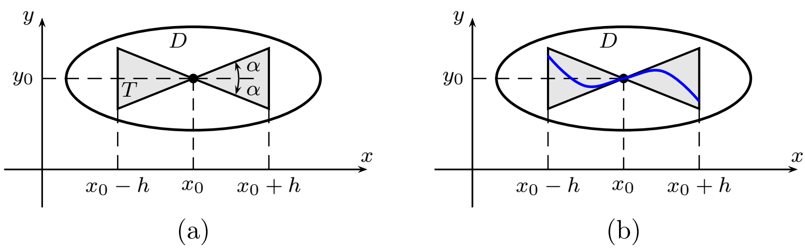


Рис. 1.24: Выбор величины h, $\operatorname{tg}\alpha = M$.

Лемма 1.8.26. *Пусть $f\colon D \to \mathbb{R}$ непрерывна на D, и положим*

$$M = \sup_{(x,y)\in D} |f(x, y)|.$$

Пусть $h > 0$ такое, что

$$T = \big\{(x, y) \in D : |x - x_0| \le h,\ |y - y_0| \le M|x - x_0|\big\} \subset D,$$

см. рис. 1.21 (a). Пусть X — множество всех непрерывных функций на $I_h = [x_0 - h, x_0 + h]$, графики которых лежат в T (и проходят через точку (x_0, y_0)) (рис. 1.21 (b)), т.е.

$$X = \{y \in \mathcal{C}(I_h; \mathbb{R}) : |y(x) - y_0| \le M|x - x_0|, \ x \in I_h\}. \tag{1.55}$$

Определим отображение $\varphi : X \to \mathcal{C}(I_h; \mathbb{R})$ как

$$\varphi(g)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, g(t))\, dt, \qquad g \in X. \tag{1.56}$$

Тогда множество X является замкнутым в $\mathcal{C}(I_h, \mathbb{R})$, и $\varphi(X) \subset X$.

Доказательство. Докажем замкнутость X.

Пусть $g_* = \lim_{n\to\infty} g_n$ в $\mathcal{C}(I_h; \mathbb{R})$, и $g_n \in X$, т.е

$$|g_n(x) - y_0| \le M|x - x_0| \tag{1.57}$$

для всех $x \in I_h$. Поскольку $\|g_n - g_*\|_\infty \to 0$ при $n \to \infty$, то для каждого $x \in I_h$ имеем, что

$$g_*(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x).$$

Поэтому для каждого фиксированного $x \in I_h$, переходя к пределу в (1.57), получим:

$$\begin{aligned}|g_*(x) - y_0| = |\lim_{n\to\infty} g_n(x) - y_0| = \lim_{n\to\infty} |g_n(x) - y_0| \le \\ \le \lim_{n\to\infty} M|x - x_0| = M|x - x_0|.\end{aligned}$$

Это доказывает, что $g_* \in X$.

Докажем инвариантность X относительно φ, т.е., что $\varphi(X) \subset X$.

Пусть $g \in X$. Докажем, что функция $\varphi(g)$ удовлетворяет неравенству

$$|\varphi(g)(x) - y_0| \le M|x - x_0|.$$

Поскольку $g \in X$, то ее график лежит в $T \subset D$, и, следовательно,

$$|f(t, g(t))| \leq \sup_{(x,y)\in D} |f(x, y)| = M, \qquad t \in I_h.$$

Поэтому для $x \in [x_0, x_0 + h]$ имеем

$$|\varphi(g)(x) - y_0| = \left|y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, g(t))\, dt - y_0\right| = \left|\int_{x_0}^{x} f(t, g(t))\, dt\right| \leq$$
$$\leq \int_{x_0}^{x} |f(t, g(t))|\, dt \leq \int_{x_0}^{x} M\, dt = M|x - x_0|.$$

Для $x \in [x_0 - h, x_0]$ доказательство аналогично. Следовательно, $\varphi(g) \in X$. $\square$

Определение 1.8.27. Функция $f \in \mathcal{F}(D; \mathbb{R})$ удовлетворяет *условию Липшица* по y на D, если существует постоянная L такая, что

$$|f(x, y') - f(x, y'')| \leq L|y' - y''| \tag{1.58}$$

для всех $(x, y'), (x, y'') \in D$. Неравенство (1.58) называется *условием Липшица*, а число L — *постоянной Липшица.*

Лемма 1.8.28. *Пусть f является непрерывной на D и удовлетворяет условию Липшица по y на D. Пусть φ, h и I_h будут как в лемме 1.8.26. Тогда для всех $g', g'' \in X$ и $x \in I_h$ имеем*

$$|\varphi(g')(x) - \varphi(g'')(x)| \leq L\left|\int_{x_0}^{x} |g'(t) - g''(t)|\, dt\right| \tag{1.59}$$

Доказательство. Используя условие Липшица (1.58), имеем для $x \in [x_0, x_0 + h]$:

$$|\varphi(g')(x) - \varphi(g'')(x)| = \left|y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, g'(t))\, dt - y_0 - \int_{x_0}^{x} f(t, g''(t))\, dt\right| =$$
$$= \left|\int_{x_0}^{x} \big(f(t, g'(t)) - f(t, g''(t))\big)\, dt\right| \leq \int_{x_0}^{x} \big|f(t, g'(t)) - f(t, g''(t))\big|\, dt \leq$$
$$\leq \int_{x_0}^{x} L|g'(t) - g''(t)|\, dt = L \int_{x)}^{x} |g'(t) - g''(t)|\, dt.$$

Для $x \in [x_0 - h, x_0]$ доказательство аналогично. $\square$

Лемма 1.8.29. *В обозначениях следствия 1.8.18 и леммы 1.8.28 и при выполнении условий леммы 1.8.28 имеем*

$$|\varphi^n(g')(x) - \varphi^n(g'')(x)| \leq L^n \|g' - g''\|_\infty \frac{|x - x_0|^n}{n!}. \tag{1.60}$$

Доказательство. Доказательство произведем по индукции для $x \in [x_0, x_0 + h]$. При $n = 1$ необходимую оценку дает лемма 1.8.28. А именно,

$$|\varphi(g')(x) - \varphi(g'')(x)| \leq L \int_{x_0}^{x} |g'(t) - g''(t)|\, dt \leq L \int_{x_0}^{x} \|g' - g''\|_\infty \, dt =$$
$$= L\|g' - g''\|_\infty \int_{x_0}^{x} dt = L\|g' - g''\|_\infty (x - x_0).$$

Пусть имеет место оценка (1.60) для $(n-1)$, т.е.

$$|\varphi^{n-1}(g')(x) - \varphi^{n-1}(g'')(x)| \leq L^{n-1} \|g' - g''\|_\infty \frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!}. \tag{1.61}$$

Тогда, используя лемму 1.8.28 и оценку (1.61), имеем:

$$|\varphi^n(g')(x) - \varphi^n(g'')(x)| = \left|\varphi(\varphi^{n-1}(g'))(x) - \varphi(\varphi^{n-1}(g''))(x)\right| \leq$$
$$\leq L \int_{x_0}^{x} \left|\varphi^{n-1}(g')(t) - \varphi^{n-1}(g'')(t)\right| dt \leq$$
$$\leq L \int_{x_0}^{x} L^{n-1} \|g' - g''\|_\infty \frac{(t - x_0)^{n-1}}{(n-1)!}\, dt =$$
$$= L^n \|g' - g''\|_\infty \frac{1}{(n-1)!} \int_{x)}^{x} (t - x_0)^{n-1}\, dt =$$
$$= L^n \|g' - g''\|_\infty \frac{1}{(n-1)!} \frac{(t - x_0)^n}{n} \Big|_{t=x_0}^{t=x} =$$
$$= L^n \|g' - g''\|_\infty \frac{(x - x_0)^n}{n!}. \qquad \square$$

Теорема 1.8.30 (Пикар)**.** *Пусть D — замкнутая, ограниченная область в $\mathbb{R}^2$, (x_0, y_0) — внутренняя точка D. Пусть функция f*

непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по y на D. Положим

$$M = \max_{(x,y)\in D} |f(x,y)|,$$

и выберем h таким, чтобы $T \subset D$ (см. рис. 1.24).

Тогда задача Коши (1.53) имеет решение $y = g(x)$ на промежутке $I_h = [x_0 - h, x_0 + h]$, и это решение единственно.

Доказательство. Определим $X \subset \mathcal{C}(I_h;\mathbb{R})$ и $\varphi\colon X \to X$ как в лемме 1.8.26. Согласно лемме 1.8.29 для $g', g'' \in X$ имеем, что

$$\begin{aligned} \|\varphi^n(g') - \varphi(g'')\|_\infty &= \sup_{x\in I_h}\bigl|\varphi^n(g')(x) - \varphi^n(g'')(x)\bigr| = \\ &= \sup_{x\in I_h} L^n\|g' - g''\|_\infty \frac{|x-x_0|^n}{n!} = \\ &= L^n\|g' - g''\|_\infty \frac{h}{n!}. \end{aligned}$$

Поскольку

$$q_n = \|g' - g''\|_\infty \frac{L^n h^n}{n!} \to 0,$$

то существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что $q_{n_0} < 1$. Но тогда φ^{n_0} будет сжатием на X, и по следствию 1.8.18 отображение φ имеет единственную неподвижную точку $g_* \in X$, т.е. имеем, что

$$g_*(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\bigl(t, g_*(t)\bigr)\, dt,$$

и, согласно утверждению 1.8.25, g_* является решением задачи Коши. $\square$

Приложение A

Дополнительные задачи

A.1 Линейные нормированные пространства

1.1. (2 б.) **Пространства ℓ_p.**
Пусть $p, q > 0$ такие, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $n \in \mathbb{N}$ и $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, \dots n$.

1. (a) Доказать неравенство Гёльдера:

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leq \Big(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\Big)^{\frac{1}{q}}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

   (b) Доказать неравенство Минковского:

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \Big(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}}$$

2. Пусть $p \in [1, +\infty)$. Рассмотрим функцию $\| \cdot \|_p \colon \mathbb{R}^\infty \to \overline{\mathbb{R}}$, заданную на $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots)$ как

$$\|\boldsymbol{x}\| = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}},$$

и положим

$$\ell_p = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^\infty : \|\boldsymbol{x}\|_p < \infty\}.$$

Доказать, что ℓ_p является линейным нормированным пространством над $\mathbb{R}$.
Литература: [3, стр. 58, 61].

1.2. (1 б.) **Теорема о вложенных шарах.**
Линейное нормированное пространство E является полным тогда и только тогда, когда произвольная последовательность замкнутых вложенных шаров, радиусы которых стремятся к 0, имеет непустое пересечение.
Литература: [3, стр. 76], [4, стр. 40].

1.3. (2 б.) **Теорема Бэра.**
Пусть E — линейное нормированное пространство. Меожество $X \subset E$ называется *плотным в* множестве $Y \subset E$, если $\overline{X} \supset Y$. Множество M называется *нигде не плотным*, если оно не плотно в каждом открытом шаре $B(\boldsymbol{x}; r)$.

Доказать, что банахово пространство не может быть представлено как счетное объединение нигде не плотных множеств.
Литература: [3, стр. 78], [4, стр. 43].

1.4. (1 б.) **Полунепрерывные функции.**
Пусть E — линейное нормированное пространство. Функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ называется *полунепрерывной снизу* (соотв., *сверху*) в точке $\boldsymbol{x}_0 \in E$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такая окресность U точки $\boldsymbol{x}_0$, что $f(\boldsymbol{x}) > f(\boldsymbol{x}_0) - \varepsilon$ (соотв. $f(\boldsymbol{x}) < f(\boldsymbol{x}_0) + \varepsilon$) для всех $\boldsymbol{x} \in U$.

1. Доказать, что функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $\boldsymbol{x}_0$ тогда и только тогда, когда она в $\boldsymbol{x}_0$ полунепрерывна сверху и снизу.

2. Пусть $f\colon E \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $\boldsymbol{x}_0$, и $1_{\{\boldsymbol{x}_0\}}$ — индикатор множества $\{\boldsymbol{x}_0\}$. Доказать, что для $A \in \mathbb{R}$ функция $f_A = f + A \cdot 1_{\{\boldsymbol{x}_0\}}$ является полунепрерывной снизу, если $A > 0$, и полунепрерывной сверху, если $A < 0$.

3. Доказать, что функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, заданная как $f(x) = [x]$ (целая часть $x \in \mathbb{R}$) является полунепрерывной сверху в каждой точке $\mathbb{R}$.

4. Доказать, что функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ является полунепрерывной сверху (соотв., снизу) в точке $\boldsymbol{x}_0 \in E$ тогда и только тогда, когда функция $-f$ полунепрерывна снизу (соотв., сверху) в точке $\boldsymbol{x}_0$.
   Литература: [3, стр. 111].

1.5. (2 б.) **Полунепрерывные функции на компактах.**
Пусть $X \subset E$ является компактным в E, и функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ полунепрерывны сверху (соотв., снизу). Тогда f ограничена сверху (соотв. снизу) на X и достигает своего максимального (соотв., минимального) значения.
Литература: [3, стр. 112].

1.6. (1 б.) **Теорема Дини.**
Пусть последовательность непрерывных функций на компакте поточечено убывает (или возрастает) к непрерывной функции. Доказать, что сходимость является равномерной.
Литература: [9, стр. 42].

1.7. (1 б.) **Критерий компактности в ℓ_2.**
Доказать, что множество $K \subset \ell_2$ компактно тогда и только тогда, когда

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{\boldsymbol{x}\in K} \sum_{k=N}^{\infty} |x_k|^2 = 0,$$

где $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots)$.
Литература: [9, стр. 43].

1.8. (2 б.) **Критерий компактности в $\mathcal{F}_b(\Omega;\mathbb{K})$.**
Доказать, что множество $K \subset \mathcal{F}_b(\Omega;\mathbb{K})$ является компактным тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

(i) K замкнуто:

(ii) K ограничено;

(iii) для любого $\varepsilon > 0$ существует такое конечное семейство $\{\Omega_k\}_{k=1}^m$, что $\bigcup_{k=1}^m \Omega_k = \Omega$, и при каждом $k = 1, \ldots, m$ имеем

$$|f(\omega) - f(\omega')| < \varepsilon$$

для всех $f \in K$ и $\omega, \omega' \in \Omega_k$.
Литература: [9, стр. 44].

1.9. (1 б.) **Унитарное (евклидово) пространство.**
Пусть H — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$ ($\mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$), и каждой паре $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in H$ ставится в соответствие скаляр $\big(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\big) \in \mathbb{K}$. При этом функция $\big(\cdot, \cdot\big) \colon H \times H \to \mathbb{K}$ удовлетворяет следующим свойствам:

(i) $\big(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\big) \geq 0$ для всех $\boldsymbol{x} \in H$, причем $\big(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\big) = 0$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$;

(ii) $\big(\lambda \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\big) = \lambda\big(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\big)$ для всех $\lambda \in \mathbb{K}$ и $\boldsymbol{x}.\boldsymbol{y} \in H$;

(i) $\big(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\big) = \big(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\big) + \big(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\big)$ для всех $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in H$;

(iv) $\big(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\big) = \overline{\big(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\big)}$, если $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, и $\big(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\big) = \big(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\big)$, если $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Тогда пара $\big(H, \big(\cdot, \cdot\big)\big)$ называется эрмитовым пространством, если $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, и евклидовым, если $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Пусть H — унитарное или евклидово пространство.

1. Доказать, что $|\big(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\big)|^2 \leq \big(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\big)\big(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\big)$ (неравенство Коши--Буняковского).

2. Доказать, что функция $\|\cdot\|_2 \colon H \to \mathbb{R}_+$, заданная как $\|\boldsymbol{x}\|_2 = \sqrt{\big(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\big)}$ является нормой на H.
   Литература: [4, стр. 85].

1.10. (2 б.) **Характеристическое свойство евклидовых пространств.**
Пусть $(E, \|\cdot\|)$ — линейное нормированное пространство над полем $\mathbb{R}$. Доказать, что норма $\|\cdot\|$ порождается скалярным произведением на H, т.е. существует такое скалярное произведение $\big(\cdot, \cdot\big)$, что $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\big(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\big)}$, тогда и только тогда, когда

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2 + \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^2 = 2\big(\|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2\big).$$

Литература: [3, стр. 176].

Index

Литература

[1] *Дъяченко, М. И.* Мера и интеграл / М. И. Дьяченко, П. Л. Ульянов. — М.: Изд-во «Факториал», 1998.

[2] *Халмош, П.* Теория меры / П. Халмош. — Изд-во иностранной литературы, 1953.

[3] *Колмогоров, А. Н.* Элементы функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

[4] *Люстерник, Л. А.* Краткий курс функционального анализа / Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. — М.: Высш. школа, 1982.

[5] *Березанский, Ю. М.* Функциональный анализ. Курс лекций / Ю. М. Березанский, Г. Ф. Ус, З. Г. Шефтель. — К.: Выща шк., 1990.

[6] *Треногин, В. А.* Функциональный анализ / В. А. Треногин. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.

[7] *Федоров, В. М.* Курс функционального анализа / В. М. Федоров. Учебники для вузов. Специальная литература. — СПб: «Лань», 2005.

[8] *Дороговцев, А. Я.* Элементы общей теории меры и интеграла / А. Я. Дороговцев. — К.: Выща шк., 1989.

[9] *Богачев, В. И.* Действительный и функциональный анализ: университетский курс / В. И. Богачев, О. Г. Смолянов. — Москва, Ижевск: R&C Dynamics, 2009.

[10] *Богданский, Ю. В.* Задачи по дисциплине «Функциональный анализ» / Ю. В. Богданский, Г. Б. Подколзин, Ю. А. Чаповский. — Электронная версия, Киев, 2017.

[11] *Зорич, В. А.* Математический анализ. Часть I. / В. А. Зорич. — М.: ФАЗИС, 1997.