

Лекции по курсу
«Физика, Оптика и квантовая механика»

А. В. Купцова, П. В. Купцов, Ю. П. Емельянова

*СГТУ имени Гагарина Ю. А.
Институт электронной техники и машиностроения*

1 сентября 2014 г.

Содержание

1	Электромагнитные волны	9
1.1	Понятие волны	9
1.1.1	Волновая функция	9
1.1.2	Фаза	9
1.1.3	Направление распространения волны	9
1.1.4	Простейшая волна	10
1.1.5	Параметры волны	10
1.1.6	Элементарная волна в общем случае	11
1.1.7	Фронт волны и виды волн	11
1.1.8	Формула плоской волны	11
1.1.9	Одномерное волновое уравнение	11
1.1.10	Волновое уравнение в трёхмерном пространстве	12
1.2	Волновое уравнение для электромагнитного поля	12
1.2.1	Уравнения Максвелла	12
1.2.2	Основные сведения из векторного анализа	13
1.2.3	Вывод волнового уравнения	13
1.3	Уравнение плоской волны	14
1.3.1	Плоская волна	14
1.3.2	Уравнения Максвелла для плоской волны	14
1.3.3	Поперечность электромагнитных волн	15
1.3.4	Связь E и H	15
1.3.5	Волновое уравнение для плоской волны	15
1.4	Свойства электромагнитных волн	16
2	Электромагнитные волны. Интерференция	16
2.1	Шкала электромагнитных волн	16
2.2	Фазовая скорость и предельная скорость движения	17
2.2.1	Уравнение движения точки постоянной фазы	17
2.2.2	Фазовая и предельная скорости	17
2.3	Энергия и импульс электромагнитных волн	17
2.3.1	Плотность потока энергии электромагнитной волны	17
2.3.2	Вектор Умова—Пойнтинга	18
2.3.3	Понятие интенсивности, связь с амплитудой E	18
2.3.4	Импульс электромагнитной волны	18
2.3.5	Давление электромагнитных волн при поглощении и отражении	19
2.4	Замедление электромагнитных волн в веществе	19
2.4.1	Показатель преломления и уменьшении скорости	19
2.4.2	Уменьшение длины волны	19
2.5	Явление интерференции	20
2.5.1	Понятие интерференции и когерентности	20
2.5.2	Понятие разности хода	20
2.5.3	Связь между разностью хода и разностью фаз	20
2.6	Сложение двух гармонических колебаний	21
2.6.1	Векторная диаграмма	21
2.6.2	Сложение некогерентных колебаний	21
2.6.3	Сложение когерентных колебаний	21
2.7	Интерференционные схемы	21
2.7.1	Создание когерентных источников света	21
2.7.2	Схема Юнга	22
2.7.3	Бизеркала Френеля	22
2.7.4	Бипризма Френеля	22
2.7.5	Зеркало Ллойда	22
3	Интерференция	22
3.1	Интерференция двух когерентных источников	22
3.1.1	Условие максимумов и минимумов	22
3.1.2	Положения максимумов на экране	23
3.1.3	Ширина интерференционной полосы	24
3.2	Оптическая длина пути	24
3.3	Распределение интенсивности	24
3.4	Когерентность	25

3.4.1	Причина некогерентности	25
3.4.2	Лазеры	25
3.4.3	Ограниченность протяжённости интерференционной картины	25
3.4.4	Качественное объяснение исчезновения когерентности	26
3.4.5	Понятие длины когерентности	26
3.4.6	Формула для длины когерентности	27
3.4.7	Время когерентности	27
3.4.8	Источник света конечных размеров	27
3.4.9	Ширина когерентности	28
3.4.10	Оценка ширины когерентности	28
3.4.11	Ширина когерентности для Солнца	28
3.4.12	Условия для наблюдения интерференции	28
4	Дифракция Френеля	28
4.1	Понятие дифракции	28
4.1.1	Определение	28
4.1.2	Способы наблюдения дифракции	29
4.2	Уравнение сферической волны	29
4.2.1	Формула сферической волны	29
4.2.2	Убывание амплитуды с расстоянием	29
4.3	Принцип Гюйгенса—Френеля	29
4.3.1	Принцип Гюйгенса	29
4.3.2	Модификация Френелем принципа Гюйгенса	30
4.3.3	Вычисление амплитуды дифрагирующей волны	30
4.3.4	Понятие зон Френеля	30
4.4	Дифракция на круглом отверстии	31
4.4.1	Зоны Френеля для центра отверстия	31
4.4.2	Радиусы зон Френеля	31
4.4.3	Площади зон Френеля	32
4.4.4	Амплитуды и фазы колебаний, создаваемых зонами Френеля	33
4.4.5	Условия максимумов и минимумов	33
4.4.6	Спираль Френеля	33
4.4.7	Анализ дифракции при помощи спирали Френеля	34
4.5	Дифракция на диске	34
5	Дифракция Френеля. Дифракция Фраунгофера	34
5.1	Зонная пластинка	34
5.2	Дифракция Френеля от полуплоскости	35
5.2.1	Зоны Френеля для полуплоскости	35
5.2.2	Построение спирали Корню	35
5.2.3	Формула спирали Корню	36
5.2.4	Использование спирали Корню для анализа дифракции	36
5.2.5	Распределение интенсивности света на экране	38
5.3	Дифракция Френеля от щели	38
5.4	Критерий наблюдения дифракции	39
5.5	Дифракция Фраунгофера на щели	40
5.5.1	Отличие дифракции Фраунгофера от дифракции Френеля	40
5.5.2	Схема установки	40
5.5.3	Амплитуда колебаний в центре экрана	40
5.5.4	Амплитуда колебаний в произвольной точке	41
6	Дифракция Фраунгофера	42
6.1	Условие минимумов и максимумов	42
6.2	Векторные диаграммы для минимумов и максимумов	43
6.2.1	Векторные диаграммы для щели	43
6.2.2	Центр экрана	43
6.2.3	Точка, немного смещённая от центра	43
6.2.4	Точки минимума	43
6.2.5	Точки максимума	44
6.3	Кривая распределения интенсивности	44
6.4	Дифракционная решётка	44
6.5	Условие главных минимумов	45
6.6	Условие главных максимумов	45

6.7	Побочные минимумы	46
6.8	Распределение интенсивности	46
7	Поляризация. Преломление. Двойное лучепреломление	47
7.1	Понятие поляризации. Виды поляризации	47
7.1.1	Определение	47
7.1.2	Линейная поляризация	47
7.1.3	Круговая поляризация	48
7.1.4	Эллиптическая поляризация	48
7.2	Неполяризованный и частично поляризованный свет	48
7.2.1	Естественный свет	48
7.2.2	Интенсивность естественного света	49
7.2.3	Частично поляризованный свет	49
7.3	Поляризаторы	50
7.3.1	Определение	50
7.3.2	Закон Малюса для идеального поляризатора	50
7.3.3	Прохождение естественного света через поляризатор	50
7.4	Преломление света	51
7.4.1	Закон преломления Снеллиуса	51
7.4.2	Закон Брюстера	51
7.4.3	Поляризатор на основе эффекта Брюстера	52
7.5	Двойное лучепреломление	52
7.5.1	Определение	52
7.5.2	Одно- и двусные кристаллы	53
7.5.3	Расщепление света на обыкновенный и необыкновенные пучки	53
7.5.4	Оптическая ось и главная плоскость кристалла	53
7.5.5	Поляризация обыкновенного и необыкновенного пучков	53
7.5.6	Дихроизм	53
8	Двойное лучепреломление. Дисперсия	54
8.1	Природа двойного лучепреломления	54
8.1.1	Качественное объяснение	54
8.1.2	Поверхности лучевых скоростей или волновая поверхность	54
8.1.3	Построения с помощью принципа Гюйгенса	54
8.2	Получение эллиптической поляризации	55
8.2.1	Ориентация оптической оси и плоскости поляризации луча	55
8.2.2	Разложение на обыкновенную и необыкновенную компоненты	55
8.2.3	Длины волн обыкновенной и необыкновенной компонент	55
8.2.4	Возникновения сдвига по фаз	56
8.2.5	Варианты поляризации	56
8.2.6	Кристаллические пластинки	56
8.3	Дисперсия света	56
8.3.1	Понятие дисперсии	56
8.3.2	Качественное объяснение	57
8.3.3	Типичная кривая дисперсии	57
8.3.4	Эффекты связанные с дисперсией	57
8.3.5	Фазовая скорость	57
8.3.6	Передача информации при помощи волн	58
8.3.7	Понятие групповой скорости	59
8.3.8	Вычисление групповой скорости	59
8.3.9	Связь между фазовой и групповой скоростями	60
9	Квантовая оптика	61
9.1	Тепловое излучение	61
9.1.1	Природа теплового излучения	61
9.1.2	Зависимость теплового излучения от температуры	61
9.1.3	Тепловое равновесие с окружающими телами	61
9.2	Величины, характеризующие тепловое излучение	62
9.2.1	Интегральная испускательная способность R_T	62
9.2.2	Спектральная испускательная способность $r_{T,\omega}$	62
9.2.3	Спектральная поглощательная способность $a_{T,\omega}$	62
9.3	Абсолютно чёрное тело	63
9.3.1	Определение и качественное объяснение	63

9.3.2	Серые тела	63
9.3.3	Модель абсолютно чёрного тела	63
9.4	Закон Кирхгофа	63
9.4.1	Формулировка	63
9.4.2	Закон Кирхгофа для абсолютно чёрных тел	63
9.5	Вывод формулы Релея—Джинса	64
9.5.1	Основные положения теории Релея—Джинса	64
9.5.2	Подсчёт плотности стоячих волн	64
9.5.3	Объёмная плотность энергии теплового излучения	66
9.5.4	Испускательная способность абсолютно чёрного тела	66
9.5.5	Формула Релея—Джинса	67
9.5.6	Ультрафиолетовая катастрофа	67
9.5.7	Причины ультрафиолетовой катастрофы	67
10	Квантовая оптика. Ранняя квантовая механика	68
10.1	Вывод формулы Планка	68
10.1.1	Причина противоречия классической теории	68
10.1.2	Гипотеза Планка	68
10.1.3	Дискретность спектра энергий атомов	68
10.1.4	Средняя энергия, испускаемая атомами	68
10.1.5	Классическое приближение	69
10.1.6	Объёмная плотность энергии излучения	69
10.1.7	Формула Планка	69
10.1.8	Закон Стефана—Больцмана	70
10.1.9	Закон смещения Вина	70
10.2	Двойственная природа света. Понятие квантов	70
10.2.1	Кванты	70
10.2.2	Энергия и импульс квантов	71
10.3	Эксперименты, подтверждающие двойственную природу света	71
10.3.1	Коротковолновая граница рентгеновского спектра	71
10.3.2	Законы внешнего фотоэффекта	72
11	Ранняя квантовая механика	73
11.1	Эксперименты, подтверждающие двойственную природу света	73
11.1.1	Эффект Комптона	73
11.2	Представления об атомах	75
11.2.1	Античные идеи	75
11.2.2	Атом с точки зрения химии	75
11.2.3	Открытие электрона и гипотезы об устройстве атома	76
11.2.4	Планетарная модель Резерфорда	76
11.3	Атом Резерфорда	76
11.3.1	Мотивация исследований структуры атома	76
11.3.2	Опыт Резерфорда	76
11.3.3	Результат опыта	76
11.3.4	Объяснение результата опыта при помощи планетарной модели.	76
11.4	Противоречия в модели Резерфорда и постулаты Бора	77
11.4.1	Неустойчивость планетарной модели	77
11.4.2	Постулаты Бора	77
11.5	Опыт Франка и Герца	77
11.5.1	Экспериментальная установка	77
11.5.2	Описание опыта: ошибочность классического подхода	78
11.5.3	Объяснение на основе постулатов Бора	78
12	Ранняя квантовая механика. Волновые свойства вещества	78
12.1	Боровская модель атома водорода	78
12.1.1	Исходные положения теории Бора	78
12.1.2	Кинетическая энергия электронов	79
12.1.3	Потенциальная энергия электронов	79
12.1.4	Квантование момента импульса и радиусы орбит	79
12.1.5	Уровни энергии	79
12.2	Спектральные закономерности	79
12.2.1	Сплошной, линейчатый и полосатый спектры	79
12.2.2	Комбинационный принцип Ритца	80

12.2.3	Спектральные серии	80
12.2.4	Спектры водородоподобных атомов	80
12.2.5	Спектральные серии атома водорода	81
12.3	Свойства волн (повторение)	81
12.3.1	Плоская монохроматическая волна. Фазовая скорость	81
12.3.2	Монохроматические волны и передача информации	81
12.3.3	Волновые пакеты. Групповая скорость	81
12.3.4	Дисперсия	82
12.4	Гипотеза де Бройля о волновых свойствах вещества	82
12.4.1	Формулировка гипотезы	82
12.4.2	Длина волны де Бройля	82
12.4.3	Групповая скорость волны де Бройля	82
12.4.4	Частица как волновой пакет	82
12.4.5	Фазовая скорость волны де Бройля. Дисперсия	83
12.4.6	Оценка значения длины волны де Бройля	83
12.5	Экспериментальная проверка гипотезы де Бройля. Волновые свойства электрона	83
12.5.1	Опыт Дэвиссона и Джермера. Экспериментальная установка	83
12.5.2	Результаты опыта	84
12.5.3	Объяснение результатов опыта	84
12.5.4	Опыты Томсона и Тартаковского	84
13	Принцип неопределённости. Уравнение Шрёдингера	84
13.1	Интерференция частиц	84
13.1.1	Схема мысленного эксперимента	84
13.1.2	Результат опыта при отсутствии волновых свойств	85
13.1.3	Фактический результат опыта	85
13.1.4	Интерпретация результата	85
13.1.5	Влияние наблюдателя на результат эксперимента	86
13.1.6	Выводы из экспериментов по интерференции частиц	86
13.1.7	Реальный эксперимент	86
13.2	Применимость классического описания	87
13.3	Принцип неопределённости Гейзенберга	87
13.3.1	Положение в пространстве частицы с волновыми свойствами	87
13.3.2	Вероятностное задание положения частицы	87
13.3.3	Фурье разложение распределения вероятности	87
13.3.4	Одновременное задание координаты и волнового числа	88
13.3.5	Принцип неопределённости Гейзенберга	88
13.3.6	Следствия из принципа неопределённости	89
13.4	Волновая функция	89
13.4.1	Волновая функция свободной частицы	89
13.4.2	Вероятностная интерпретация волновой функции	89
13.5	Уравнение Шрёдингера	90
13.5.1	Физический смысл уравнение Шрёдингера	90
13.5.2	Получение уравнение Шрёдингера	90
13.5.3	Вид уравнения в одномерном случае	90
13.5.4	Уравнение в трёхмерном случае	91
13.5.5	Факторы, определяющие характер движения частицы	91
13.5.6	Стационарное уравнение Шрёдингера	91
13.6	Квантование	91
13.6.1	Понятие квантования	91
13.6.2	Природа квантования	91
13.6.3	Собственные функции и собственные числа уравнения Шрёдингера	92
13.7	Принцип суперпозиции волновых функций	92
14	Интерпретации квантовой механики. Примеры квантовомеханических задач	92
14.1	Интерпретации квантовой механики	92
14.1.1	Необходимость осмысления положений квантовой механики	92
14.1.2	Копенгагенская интерпретация Бора—Гейзенберга.	92
14.1.3	Интерпретация Пенроуза.	93
14.1.4	Многомировая интерпретация Эверетта	93
14.1.5	Скрытые переменные — Эйнштейн, Планк, Шрёдингер.	93
14.1.6	«Заткнись и считай»	93
14.2	Бесконечно глубокая потенциальная яма	93

14.2.1	Постановка задачи	93
14.2.2	Общее решение уравнение Шрёдингера	94
14.2.3	Граничные условия	94
14.2.4	Уровни энергии	94
14.2.5	Собственные функции	94
14.2.6	Вероятность локализации частицы	95
14.3	Квантовый гармонический осциллятор	95
14.3.1	Потенциальная энергия классического гармонического осциллятора	95
14.3.2	Уравнение Шрёдингера для квантового гармонического осциллятора	96
14.3.3	Уровни энергии квантового гармонического осциллятора	96
14.3.4	Нулевая энергия	96
14.3.5	Правила отбора	96
14.3.6	Молекулы как квантовые осцилляторы	97
14.3.7	Нулевая энергия молекул	97
14.4	Потенциальный барьер	97
14.4.1	Постановка задачи	97
14.4.2	Вид уравнения Шрёдингера	98
14.4.3	Решение слева от барьера	98
14.4.4	Низкий барьер	98
14.4.5	Высокий барьер	99
14.5	Туннельный эффект	100
14.5.1	Понятие туннельного эффекта	100
14.5.2	Качественное описание эффекта	100
15	Постулаты квантовой механики. Квантование атомов	100
15.1	Наблюдаемые физические величины	100
15.1.1	Основные идеи вероятностного описания	100
15.1.2	Связь волновой функции с плотностью вероятности	101
15.1.3	Средние значение физических величин	101
15.2	Операторы физических величин	101
15.2.1	Оператор импульса	101
15.2.2	Понятие оператора	102
15.2.3	Оператор координаты	102
15.2.4	Оператор кинетической энергии	102
15.2.5	Оператор полной энергии	102
15.2.6	Принцип неопределённости на языке операторов	103
15.2.7	Оператор момента импульса	103
15.2.8	Оператор квадрата модуля момента импульса	104
15.3	Постулаты квантовой механики	104
15.4	Квантование момента импульса	105
15.4.1	Невозможность определения направления момента импульса	105
15.4.2	Квантование проекции момента импульса	106
15.4.3	Квантования квадрата модуля момента импульса	106
15.5	Уравнение Шрёдингера для атома водорода	106
15.5.1	Потенциальная энергия водородоподобного атома	106
15.5.2	Стационарное уравнение Шрёдингера для водородоподобного атома	106
15.5.3	Атомные квантовые числа	107
15.5.4	Вид решения уравнения Шрёдингера	107
15.5.5	Положительные и отрицательные значения энергии	107
15.5.6	Вырождение. Кратность вырождения	108
15.5.7	Плотность вероятности электрона в основном состоянии	108
16	Квантование атомов. Таблица Менделеева	109
16.1	Спин электрона	109
16.1.1	Понятие спина. Неклассическая природа спина	109
16.1.2	Оператор спина и проекции спина. Квантовые числа	109
16.2	Полный момент импульса электрона в атоме	109
16.2.1	Оператор полного момента и квантовое число	109
16.2.2	Допустимые значения квантового числа полного момента	109
16.3	Магнитные моменты электрона	110
16.3.1	Орбитальное гиромагнитное отношение и магнитный момент атома	110
16.3.2	Спиновое гиромагнитное отношение для электрона	110
16.3.3	Полный магнитный момент атома	110

16.4	Спин-орбитальное взаимодействие	111
16.4.1	Дублетная структура спектральных линий	111
16.4.2	Дублетная структура и спин-орбитальное взаимодействие	111
16.4.3	Квантовое число спин-орбитального взаимодействия	111
16.5	Правила отбора	111
16.5.1	Правило отбора для орбитального квантового числа	111
16.5.2	Правило отбора для квантового числа полного момента	112
16.6	Многоэлектронные атомы	112
16.6.1	Вырожденные состояния электрона в водородоподобных атомах	112
16.6.2	Снятие вырождения в многоэлектронных атомах	112
16.6.3	Два основных типа связи электронов в атоме	112
16.6.4	LS-связь или связь Рассела-Саундерса	113
16.6.5	JJ-связь	113
16.7	Опыт Штерна—Герлаха	113
16.7.1	Идея опыта	113
16.7.2	Результаты опыта	113
16.8	Эффекты Зеемана и Пашена—Бака	114
16.8.1	Расщепление спектральных линий в магнитном поле	114
16.8.2	Отличия эффекта Зеемана и Пашена—Бака	114
16.9	Периодическая система Менделеева	114
16.9.1	Принцип запрета Паули	114
16.9.2	Обозначения состояний электрона в атоме	114
16.9.3	Оболочки и подоболочки	115
16.9.4	Принцип построения таблицы Менделеева	115
16.9.5	Принцип периодичности	116
17	Атомное ядро	116
17.1	Состав атомного ядра	116
17.1.1	Ядерные единицы массы	116
17.1.2	Понятие нуклонов. Протон	116
17.1.3	Нейтрон	116
17.2	Характеристики атомного ядра	117
17.2.1	Основные характеристики ядра. Обозначение ядер	117
17.2.2	Изотопы, изобары, изотоны, изомеры	117
17.2.3	Изотопы водорода	117
17.2.4	Элементы, встречающиеся в природе. Трансурановые элементы	117
17.2.5	Размер, объём и плотность ядер	118
17.2.6	Спин ядра	118
17.3	Дефект массы. Ядерная энергия	118
17.3.1	Энергия связи и дефект массы	118
17.3.2	Зависимость удельной энергии связи от массового числа	119
17.3.3	Энергетический выход ядерных реакций	119
17.3.4	Причина стабильности большинства ядер	119
17.3.5	Термоядерные реакции	119
17.4	Сильное ядерное взаимодействие	119
17.4.1	Сильное взаимодействие	119
17.4.2	Свойство сильного взаимодействия	120
17.5	Радиоактивность	120
17.5.1	Понятие радиоактивности. Виды излучений	120
17.5.2	Закон радиоактивного распада. Период полураспада	120
17.5.3	Альфа-распад	120
17.5.4	Бета-распад	121
17.5.5	Гамма-излучение	121
17.6	Ядерные реакции	122
17.6.1	Понятие ядерной реакции	122
17.6.2	Два вида ядерных реакций	122
17.6.3	Деление ядер	122
17.6.4	Цепная реакция	123
17.6.5	Изотопный состав природного урана. Обогащение урана	123
17.6.6	Критическая масса	123
17.6.7	Ядерное взрывное устройство	123
17.6.8	Управляемая цепная реакция на АЭС	123

18 Элементарные частицы и космология	123
18.1 Виды взаимодействий	123
18.2 Классификация элементарных частиц	124
18.2.1 Понятие элементарных частиц	124
18.2.2 Группы элементарных частиц	124
18.2.3 Деление частиц на классы	124
18.3 Частицы и античастицы	125
18.3.1 Энергетические уровни вакуума	125
18.3.2 Населённость отрицательных уровней и принцип запрета Паули	125
18.3.3 Образование электрон-позитронной пары	125
18.3.4 Аннигиляция	126
18.3.5 Закон сохранения импульса при аннигиляции	126
18.3.6 Античастицы для других элементарных частиц	126
18.4 Законы сохранения для элементарных частиц	126
18.4.1 Роль законов сохранения	126
18.4.2 Законы сохранения, действующие в микромире	126
18.4.3 Симметрия и законы сохранения	127
18.4.4 Законы сохранения барионного и лептонного заряда	127
18.5 Единая теория взаимодействий	127
18.5.1 Объединение электрического и слабого взаимодействий	127
18.5.2 Гипотеза об объединении электрослабого и сильного взаимодействий	127
18.5.3 Единая теория и гравитация	128
18.6 Стандартная модель и бозон Хиггса	128
18.6.1 Стандартная модель	128
18.6.2 Поле и бозон Хиггса	128
18.6.3 Возникновение массы	128
18.6.4 Важность бозона Хиггса для современной физики материи	128
18.7 Космологические представления	128
18.7.1 Космологическая сингулярность	128
18.7.2 Планковская эпоха и отделение гравитации	129
18.7.3 Инфляция	129
18.7.4 Бариогенезис	129
18.7.5 Нуклеосинтез	129
18.7.6 Возникновение атомов	129
18.7.7 Тёмная материя	129
18.7.8 Тёмная энергия	130
18.7.9 Дальнейшая эволюция Вселенной	130

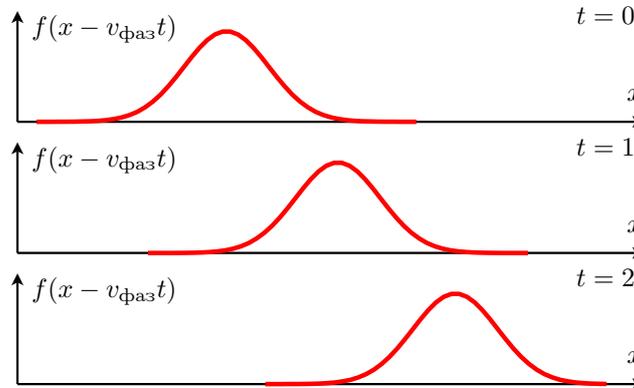
1 Электромагнитные волны

1.1 Понятие волны

1.1.1 Волновая функция

Определение

Волной, бегущей вдоль оси x , называется функция, зависящая от x и t как $f = f(x - v_{\text{фаз}}t)$ или $f = f(x + v_{\text{фаз}}t)$.



1.1.2 Фаза

Аргумент волновой функции $\varphi = x - v_{\text{фаз}}t$ или $\varphi = x + v_{\text{фаз}}t$ называется фазой.

Определение

Фаза — это величина, определяющая состояние волны в данный момент времени в данной точке пространства.

Зафиксируем некоторую постоянную фазу $\varphi = \varphi_1 = \text{const}$ и рассмотрим движение в пространстве точки, которой всё время отвечает одна и та же фаза волны φ_1 :

$$\varphi_1 = x - v_{\text{фаз}}t \Rightarrow x = v_{\text{фаз}}t + \varphi_1$$

$$\varphi_1 = x + v_{\text{фаз}}t \Rightarrow x = -v_{\text{фаз}}t + \varphi_1$$

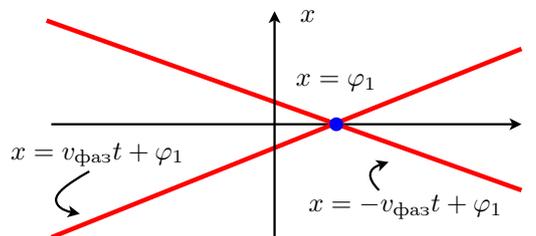
Точка постоянной фазы движется со скоростью $v_{\text{фаз}}$. Величина $v_{\text{фаз}}$ называется фазовой скоростью волны.

1.1.3 Направление распространения волны

Мы получили уравнения движения точки постоянной фазы:

$$x = v_{\text{фаз}}t + \varphi_1, \quad x = -v_{\text{фаз}}t + \varphi_1$$

В первом случае точка движется в положительном направлении, и волна тоже бежит в положительном направлении. Во втором случае волна бежит в обратную сторону.



Общее правило выбора направления движения волны

- Если в формуле $\pm x \pm v_{\text{фаз}}t$ переменные x и t имеют *разные* знаки, то волна бежит в положительном направлении вдоль x :

$$f = f(x - v_{\text{фаз}}t), \quad f = f(v_{\text{фаз}}t - x)$$

- Если знаки *одинаковые*, то волна бежит в отрицательном направлении:

$$f = f(x + v_{\text{фаз}}t), \quad f = f(-x - v_{\text{фаз}}t)$$

1.1.4 Простейшая волна

Согласно теореме Фурье, любую волновую функцию можно разложить в виде суперпозиции гармоник:

$$f(x - v_{\text{фаз}}t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k) e^{ik(x - v_{\text{фаз}}t)} dk$$

где $F(k)$ — комплексная величина.

Используя свойства комплексных чисел, $F(k)$ можно записать через вещественные величины $A(k)$ и $\alpha(k)$:

$$F(k) = A(k) e^{i\alpha(k)}$$

Каждая гармоника устроена следующим образом:

$$F(k) e^{ik(x - v_{\text{фаз}}t)} = A(k) e^{ikx - ikv_{\text{фаз}}t + i\alpha(k)} = A(k) e^{ikx - i\omega t + i\alpha(k)}$$

Здесь введено обозначение $\omega = kv_{\text{фаз}}$.

Вспомним формулу Эйлера $e^{ia} = \cos a + i \sin a$.

Разложим экспоненту в формуле гармоник на синус и косинус и возьмём только вещественную часть. (Можно было бы взять мнимую часть — разницы нет.)

Формула для элементарной, т. е. простейшей волны:

$$f(x, t) = A \cos(kx - \omega t + \alpha)$$

Волны бегут в положительном направлении (около x и t разные знаки):

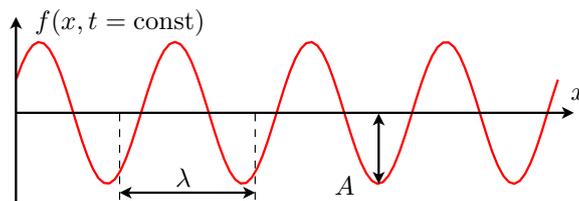
$$\begin{aligned} f(x, t) &= A \cos(kx - \omega t + \alpha) \\ f(x, t) &= A \cos(-kx + \omega t + \alpha) \end{aligned}$$

Волны в отрицательном направлении (знаки у x и t одинаковые):

$$\begin{aligned} f(x, t) &= A \cos(kx + \omega t + \alpha) \\ f(x, t) &= A \cos(-kx - \omega t + \alpha) \end{aligned}$$

1.1.5 Параметры волны

$$f(x, t) = A \cos(kx - \omega t + \alpha)$$



- A — амплитуда, т. е. максимальное отклонение волновой функции $f(x, t)$ от состояния равновесия;
- k — волновое число, $k = 2\pi/\lambda$;
- λ — длина волны, т. е. период в пространстве;
- $\omega = kv_{\text{фаз}}$ — циклическая частота, $\omega = 2\pi/T$;
- T — период волны во времени;
- $v_{\text{фаз}}$ — фазовая скорость, т. е. скорость движения точек постоянной фазы, $v_{\text{фаз}} = \omega/k$;
- α — начальная фаза.

1.1.6 Элементарная волна в общем случае

Пусть волна бежит в произвольном направлении в пространстве.

Пусть состояние волны задаётся не скаляром, а вектором. Тогда формула волны будет иметь вид:

$$\begin{aligned}\vec{f}(x, t) &= \vec{A} \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \alpha) = \\ &= \vec{A} \cos(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t + \alpha)\end{aligned}$$

- $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$ — волновой вектор, задаёт направление распространения волны;
- \vec{r} — радиус-вектор точки в пространстве.

1.1.7 Фронт волны и виды волн

Фронт волны

это геометрическое место точек одинаковой фазы. Другими словами, это поверхность в пространстве, на которой все точки имеют одну и ту же фазу.

По форме фронта различают

- плоские волны;
- сферические;
- эллиптические.

Плоская волна

Волна называется плоской, если вектор, задающий состояние волны, в фиксированный момент времени имеет одну и ту же величину во всех точках любой плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны.

1.1.8 Формула плоской волны

Плоские волны являются самым простым видом волн. Они описываются формулой элементарной волны

$$\vec{f}(x, t) = \vec{A} \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \alpha)$$

Направление распространения волны указывает вектор \vec{k} . Когда волна бежит вдоль оси x , она имеет вид:

$$\vec{f}(x, t) = \vec{A} \cos(kx - \omega t + \alpha)$$

1.1.9 Одномерное волновое уравнение

Определение

Волновое уравнение — это дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v_{\text{фаз}}^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

Волновое уравнение имеет решение в виде бегущей волны $f = f(x - v_{\text{фаз}}t)$. Проверим это:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x - v_{\text{фаз}}t) &= \frac{1}{v_{\text{фаз}}^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(x - v_{\text{фаз}}t) \\ f'' &= \frac{v_{\text{фаз}}^2}{v_{\text{фаз}}^2} f''\end{aligned}$$

1.1.10 Волновое уравнение в трёхмерном пространстве

Если волна распространяется в произвольном направлении и задаётся векторной величиной, то волновое уравнение имеет вид:

$$\Delta \vec{f} = \frac{1}{v_{\text{фаз}}^2} \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial t^2}$$

где Δ — оператор Лапласа, т. е. сумма вторых производных по всем координатам:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

1.2 Волновое уравнение для электромагнитного поля

1.2.1 Уравнения Максвелла

1. Изменяющееся магнитное поле порождает электрическое поле

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

2. Магнитное поле порождается токами проводимости и изменяющимся электрическим полем

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

3. Источниками электрического поля служат заряды

$$\text{div } \vec{D} = \rho$$

4. Магнитных зарядов в природе не обнаружено

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

Материальные уравнения:

$$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}, \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}$$

Первые два уравнения: изменяющееся во времени магнитное поле порождает переменное электрическое поле. В свою очередь, переменное электрическое поле порождает переменное магнитное, и так далее.

Это приводит к распространению поля в пространстве в виде электромагнитной волны.

Рассмотрим электромагнитное поле в среде со следующими свойствами:

- среда непроводящая, токов нет, т. е. $\vec{j} = 0$;
- среда нейтральная, зарядов нет, т. е. $\rho = 0$;
- диэлектрическая и магнитные проницаемости равны ε и μ , соответственно.

В такой среде уравнения Максвелла будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \text{rot } \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \\ \text{div } \vec{D} &= 0, \quad \text{div } \vec{B} = 0 \end{aligned}$$

Учтём материальные уравнения, $\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}$, $\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}$:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= -\mu \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad \text{rot } \vec{H} = \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \\ \text{div } \vec{E} &= 0, \quad \text{div } \vec{H} = 0 \end{aligned}$$

1.2.2 Основные сведения из векторного анализа

Прежде чем двигаться дальше, познакомимся с некоторыми формулами векторного анализа. Тождество Лагранжа для двойного векторного произведения:

$$[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, \vec{b})$$

Эта формула легко запоминается при помощи мнемонической фразы «бац минус цаб».

Операции $\text{rot } \vec{a}$, $\text{div } \vec{a}$ и $\text{grad } a$ можно записать через оператор набла:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{a} &= [\vec{\nabla}, \vec{a}] \quad (\text{векторное произведение } \vec{\nabla} \text{ и } \vec{a}) \\ \text{div } \vec{a} &= (\vec{\nabla}, \vec{a}) \quad (\text{скалярное произведение } \vec{\nabla} \text{ и } \vec{a}) \\ \text{grad } a &= \vec{\nabla} a \quad (\text{произведение вектора } \vec{\nabla} \text{ на скаляр } a) \end{aligned}$$

Скалярное произведение векторного оператора набла самого на себя даёт оператор Лапласа

$$(\vec{\nabla}, \vec{\nabla}) = \Delta$$

Ротор от ротора — это двойное векторное произведение:

$$[\vec{\nabla}, [\vec{\nabla}, \vec{a}]] = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}, \vec{a}) - (\vec{\nabla}, \vec{\nabla})\vec{a} = \text{grad div } \vec{a} - \Delta \vec{a}$$

1.2.3 Вывод волнового уравнения

Возвращаемся к уравнениям Максвелла.

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= -\mu\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad \text{rot } \vec{H} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \\ \text{div } \vec{E} &= 0, \quad \text{div } \vec{H} = 0 \end{aligned}$$

Применим операцию ротор к первому уравнению:

$$\begin{aligned} \text{rot rot } \vec{E} &= -\mu\mu_0 \text{rot } \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \text{grad div } \vec{E} - \Delta \vec{E} &= -\mu\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \\ -\Delta \vec{E} &= -\mu\mu_0 \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

Обозначим $\varepsilon_0\mu_0 = 1/c^2$. Далее станет ясно, что c есть скорость света в вакууме.

С учётом этого получаем волновое уравнение для вектора \vec{E} :

$$\boxed{\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}}$$

Проделав аналогичные выкладки со вторым уравнением Максвелла, получаем волновое уравнение для \vec{H} :

$$\boxed{\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial z^2} = \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}}$$

Выше мы говорили о том, что уравнения такого вида имеют решения в виде бегущих волн. Следовательно, электромагнитное поле может распространяться в пространстве в виде электромагнитных волн.

В волновом уравнении множитель перед второй производной равен обратному квадрату фазовой скорости. Значит, фазовая скорость электромагнитной волны в веществе с проницаемостями ε и μ равна

$$v_{\text{фаз}} = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$$

В вакууме $\varepsilon = \mu = 1$, поэтому $c = v_{\text{фаз}}$, т. е. c есть фазовая скорость света в вакууме.

1.3 Уравнение плоской волны

1.3.1 Плоская волна

Вспомним, что такое плоская волна. Если построить произвольную плоскость, перпендикулярную направлению распространения волны, то во всех её точках в фиксированный момент времени вектор волны будет иметь одно и то же значение.

Рассмотрим плоскую волну, которая распространяется вдоль оси x . Вектора \vec{E} и \vec{H} имеют одинаковые значения во всех точках любой плоскости, перпендикулярной x . Следовательно, частные производные компонент этих векторов по y и по z всегда равны нулю.

1.3.2 Уравнения Максвелла для плоской волны

Запишем уравнения Максвелла для каждой из компонент векторов по отдельности.

Ротор \vec{E} , с учётом равенства нулю производных по y и z

$$\text{rot } E = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} (\text{rot } \vec{E})_x &= \frac{\cancel{\partial E_z}}{\partial y} - \frac{\cancel{\partial E_y}}{\partial z} = 0 \\ (\text{rot } \vec{E})_y &= -\frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{\cancel{\partial E_x}}{\partial z} = -\frac{\partial E_z}{\partial x} \\ (\text{rot } \vec{E})_z &= \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\cancel{\partial E_x}}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x} \end{aligned}$$

Точно так же для \vec{H} :

$$\begin{aligned} (\text{rot } \vec{H})_x &= 0 \\ (\text{rot } \vec{H})_y &= -\frac{\partial H_z}{\partial x} \\ (\text{rot } \vec{H})_z &= \frac{\partial H_y}{\partial x} \end{aligned}$$

Теперь для дивергенции:

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{E} &= \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\cancel{\partial E_y}}{\partial y} + \frac{\cancel{\partial E_z}}{\partial z} = \frac{\partial E_x}{\partial x} \\ \text{div } \vec{H} &= \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\cancel{\partial H_y}}{\partial y} + \frac{\cancel{\partial H_z}}{\partial z} = \frac{\partial H_x}{\partial x} \end{aligned}$$

Значит, уравнения Максвелла можно записать так:

$$\begin{aligned} (\text{rot } \vec{E})_x &= -\mu\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} \Rightarrow 0 = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} \\ (\text{rot } \vec{E})_y &= -\mu\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} \Rightarrow -\frac{\partial E_z}{\partial x} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} \\ (\text{rot } \vec{E})_z &= -\mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} \\ \text{div } \vec{E} &= 0 \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \\ (\text{rot } \vec{H})_x &= \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} \Rightarrow 0 = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} \\ (\text{rot } \vec{H})_y &= \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \Rightarrow -\frac{\partial H_z}{\partial x} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \\ (\text{rot } \vec{H})_z &= \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial H_y}{\partial x} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} \\ \text{div } \vec{H} &= 0 \Rightarrow \frac{\partial H_x}{\partial x} = 0 \end{aligned}$$

1.3.3 Поперечность электромагнитных волн

Из полученных уравнений видно, что компоненты E_x и H_x являются константами: они не зависят от x и t .

Отличные от нуля E_x и H_x могут быть связаны только с постоянными однородными полями, наложенными на волны. Сами волны не имеют составляющих вдоль x . Поэтому без ограничения общности их можно положить $E_x = H_x = 0$.

Таким образом, вектора \vec{E} и \vec{H} в плоской волне перпендикулярны направлению распространения, т. е. волны являются поперечными. Это справедливо не только для плоских волн. Всякие электромагнитные волны являются поперечными. Продольные электромагнитные волны не обнаружены.

1.3.4 Связь E и H

Мы получили следующие уравнения:

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_y}{\partial x} &= -\mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t}, & \frac{\partial H_z}{\partial x} &= -\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}, \\ \frac{\partial E_z}{\partial x} &= \mu\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t}, & \frac{\partial H_y}{\partial x} &= \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}\end{aligned}$$

Из первых двух видно, что E_y порождает H_z , а та, в свою очередь, снова порождает E_y . Компоненты E_z и H_y при этом не возбуждаются.

Наоборот, когда не равны нулю только E_z и H_y , компоненты E_y и H_z остаются равными нулю.

В плоской волне вектора \vec{E} и \vec{H} всегда перпендикулярны друг другу, и для изучения такой волны достаточно взять только по одной из компонент каждого из полей, положив $E_z = H_y = 0$.

Рассмотрим первую пару уравнений. Подставим решение в виде бегущей волны $E_y = E_y(x - v_{\text{фаз}}t)$, $H_z = H_z(x - v_{\text{фаз}}t)$. (Штрихами будем обозначать производные.)

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_y}{\partial x} &= -\mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t}, & \frac{\partial H_z}{\partial x} &= -\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \\ E'_y &= \mu\mu_0 v_{\text{фаз}} H'_z, & E'_y &= (\mu\mu_0 c / \sqrt{\varepsilon\mu}) H'_z \\ E'_y &= (\mu\mu_0 / \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu}) H'_z, & \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} E'_y &= \sqrt{\mu_0 \mu} H'_z\end{aligned}$$

Проинтегрируем полученное равенство, а постоянную интегрирования положим равной нулю. (Она отвечает за статические поля, которые нас не интересуют.) В итоге получим:

$$\boxed{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} E_y = \sqrt{\mu_0 \mu} H_z}$$

Связь между E_y и H_z означает, что в плоской электромагнитной волне электрическое и магнитное поле меняются синфазно.

Когда растёт E_y , растёт и H_z , а когда E_y убывает, H_z тоже убывает.

Вспомним, что $\mu\mu_0 \vec{H} = \vec{B}$. Учитывая это:

$$\boxed{\vec{E} = - \left[\vec{v}_{\text{фаз}}, \vec{B} \right]}$$

Векторное произведение сконструировано так, чтобы тройка $(\vec{E}, \vec{B}, v_{\text{фаз}})$ образовывала правовинтовую систему.

1.3.5 Волновое уравнение для плоской волны

Снова рассмотрим уравнения Максвелла для E_y и H_z и получим волновые уравнения в явном виде. Продифференцируем каждое из них по x :

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_y}{\partial x} &= -\mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t}, & \frac{\partial H_z}{\partial x} &= -\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} &= -\mu\mu_0 \frac{\partial^2 H_z}{\partial x \partial t}, & \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} &= -\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial t} \\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} &= -\mu\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial H_z}{\partial x} \right), & \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} &= -\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial H_z}{\partial x} &\rightarrow -\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}, & \frac{\partial E_y}{\partial x} &\rightarrow -\mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} \\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} &= \varepsilon\varepsilon_0 \mu\mu_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}, & \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} &= \varepsilon\varepsilon_0 \mu\mu_0 \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}\end{aligned}$$

С учётом того, что $\varepsilon_0\mu_0 = 1/c^2$, получим волновые уравнения для плоской волны в окончательной форме:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}$$

Решения полученных уравнений в виде элементарных волн имеют вид:

$$E_y = E_{\text{макс}} \cos(kx - \omega t + \alpha)$$

$$H_z = H_{\text{макс}} \cos(kx - \omega t + \alpha)$$

В общем случае плоские волны, распространяющиеся в произвольном направлении, имеют вид:

$$\vec{E} = \vec{E}_{\text{макс}} \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \alpha)$$

$$\vec{H} = \vec{H}_{\text{макс}} \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \alpha)$$

где \vec{k} — волновой вектор, направление которого совпадает с направлением распространения волны.

1.4 Свойства электромагнитных волн

Анализируя уравнения Максвелла, мы обнаружили следующие свойства электромагнитных волн.

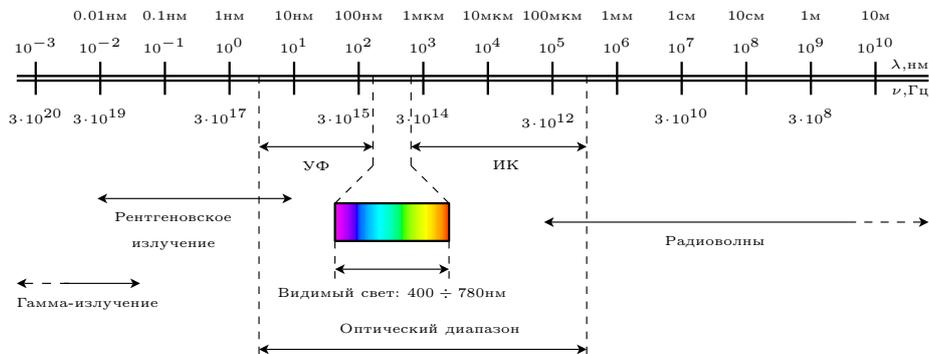
- Электромагнитная волна является поперечной. Это значит, что вектора \vec{E} и \vec{H} всегда перпендикулярны направлению распространения. Предпринимались попытки обнаружить продольные волны, но они все не дали результата.
- В плоской волне \vec{E} и \vec{H} перпендикулярны друг другу.
- В плоской электромагнитной волне электрическая и магнитная компоненты связаны формулой: $\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon}E_y = \sqrt{\mu_0\mu}H_z$, или, в векторном виде $E_y = \mu\mu_0v_{\text{фаз}}H_z$, $\vec{E} = -[\vec{v}_{\text{фаз}}, \vec{B}]$.
- Направления векторов \vec{E} и \vec{H} подобраны так, чтобы тройка $(\vec{E}, \vec{B}, v_{\text{фаз}})$ образовывала правовинтовую систему.

2 Электромагнитные волны. Интерференция

2.1 Шкала электромагнитных волн

Различают несколько видов электромагнитных волн:

- радиоволны,
- оптический диапазон,
- рентгеновское излучение,
- гамма-излучение.



- Радиоволны изучает радиофизика.
- Волны оптического диапазон — волновая оптика.
- Рентгеновское и гамма-излучения — атомная и ядерная физика.

2.2 Фазовая скорость и предельная скорость движения

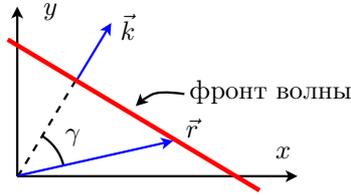
2.2.1 Уравнение движения точки постоянной фазы

Уравнение плоской волны

$$\vec{E} = \vec{E}_{\text{макс}} \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \alpha)$$

Уравнение для фазы

$$\varphi = \vec{k}\vec{r} - \omega t + \alpha$$



Так как $\vec{v}_{\text{фаз}} = d\vec{r}/dt$, то для вычисления фазовой скорости продифференцируем уравнение для фазы $\varphi = \vec{k}\vec{r} - \omega t + \alpha$ по времени.

(Почему мы дифференцируем прямо в таком виде, не выразив сначала \vec{r} через t ? Это делается согласно теореме о дифференцировании неявной функции.)

$$\begin{aligned} \vec{k} \frac{d\vec{r}}{dt} - \omega = 0 &\Rightarrow \vec{k} \vec{v}_{\text{фаз}} = \omega \Rightarrow k v_{\text{фаз}} \cos \gamma = \omega \\ v_{\text{фаз}} &= \omega / (k \cos \gamma) \end{aligned}$$

где γ — угол между \vec{k} и $\vec{v}_{\text{фаз}}$.

2.2.2 Фазовая и предельная скорости

Вспомним, что $c = \omega/k$. Следовательно,

$$v_{\text{фаз}} = \frac{c}{\cos \gamma}$$

Это значит, что если мы наблюдаем плоскую волну под углом к её направлению распространения, то $\cos \gamma < 1$ и значит фазовая скорость в этом направлении оказывается выше скорости света c .

Здесь нет противоречия. Дело в том, что запрещён перенос информации или материальных тел со скоростью выше скорости света. Фазовая скорость по определению не связана с передачей информации, поэтому она может быть какой угодно.

2.3 Энергия и импульс электромагнитных волн

2.3.1 Плотность потока энергии электромагнитной волны

Электромагнитные волны переносят энергию.

Плотность потока энергии — это энергия, переносимая за единицу времени через единичную площадку.

Чтобы найти плотность потока энергии, нужно умножить объёмную плотность энергии поля на скорость волны.

Будем рассматривать плоскую волну. Объёмная плотность энергии в вакууме ($\varepsilon = \mu = 1$) равна

$$\begin{aligned} w &= w_E + w_H = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu_0 H^2}{2} \\ &= \frac{\sqrt{\varepsilon_0} E \sqrt{\varepsilon_0} E}{2} + \frac{\sqrt{\mu_0} H \sqrt{\mu_0} H}{2} = \end{aligned}$$

Так как для плоской волны справедливо равенство $\sqrt{\varepsilon_0} E = \sqrt{\mu_0} H$, то

$$= \frac{\sqrt{\varepsilon_0} E \sqrt{\mu_0} H}{2} + \frac{\sqrt{\varepsilon_0} E \sqrt{\mu_0} H}{2} = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} E H = \frac{1}{c} E H$$

Тогда плотность потока энергии равна

$$S = wc = EH$$

Удобно записать это равенство в векторном виде:

$$\vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}]$$

2.3.2 Вектор Умова—Пойнтинга

Вектор \vec{S} — плотность потока энергии. Этот вектор называется вектором Умова—Пойнтинга.

Это фундаментальная формула, которая справедлива для любого вида электромагнитных волн, не только плоских.

Поток энергии, переносимой электромагнитной волной через поверхность F , вычисляется по формуле

$$\Phi = \int_F \vec{S} d\vec{F}$$

2.3.3 Понятие интенсивности, связь с амплитудой E

Для того, чтобы охарактеризовать энергию электромагнитной волны, в оптике используют понятие интенсивности.

Интенсивность

есть среднее по времени от модуля вектора Умова—Пойнтинга.

$$I = \langle |\vec{S}| \rangle_t$$

Так как в большинстве практически важных задач можно принять, что E и H меняются по закону синуса или косинуса, то можно использовать формулу связи

$$\begin{aligned} \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} E_{\text{макс}} &= \sqrt{\mu_0 \mu} H_{\text{макс}} \\ H_{\text{макс}} &= \frac{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon}}{\sqrt{\mu_0 \mu}} E_{\text{макс}} \\ E &= E_{\text{макс}} \cos(kx - \omega t + \alpha) \\ H &= H_{\text{макс}} \cos(kx - \omega t + \alpha) \\ S &= EH = E_{\text{макс}} H_{\text{макс}} \cos^2(kx - \omega t + \alpha) \\ S &= \frac{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon}}{\sqrt{\mu_0 \mu}} E_{\text{макс}}^2 \cos^2(kx - \omega t + \alpha) \end{aligned}$$

Усреднив S по времени, получим интенсивность,

$$I = \chi E_{\text{макс}}^2$$

где χ — коэффициент пропорциональности.

Точная формула для χ не приведена из-за того, что она зависит от формы волны и от свойств среды.

Для нас главное, что χ — константа, и всегда интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды светового вектора $E_{\text{макс}}^2$.

2.3.4 Импульс электромагнитной волны

Согласно теории относительности, импульс (количество движения) определяется следующим образом:

$$\vec{p} = \vec{v}W/c^2$$

где W — энергия, \vec{v} — скорость движения, c^2 — скорость света. Для электромагнитной волны $\vec{v} = \vec{c}$.

Удобно рассмотреть плотность импульса, т. е. импульс в единице объёма поля: $\vec{p}_v = \vec{p}/V$, $w = W/V$,

$$\vec{p}_v = \vec{c}w/c^2$$

Так как $\vec{c}w$ есть плотность потока энергии, т. е. вектор Умова-Пойнтинга, то

$$\vec{p}_v = \vec{S}/c^2 = [\vec{E}, \vec{H}]/c^2$$

2.3.5 Давление электромагнитных волн при поглощении и отражении

Пусть электромагнитная волна падает на некоторую поверхность и полностью поглощается. Волна оказывает давление на поверхность, величина которого равна поглощённому импульсу.

За время τ поверхность площадью S поглощает излучение в объёме $V = c\tau S$. Тогда за единицу времени единичная площадка поглощает объём $V = c$.

Импульс, содержащийся в этом объёме, равен:

$$p = p_v V = \frac{w}{c} c = w$$

Так как объёмная плотность энергии изменяется во времени, то её усредняют:

$$p = \langle w \rangle$$

Пусть электромагнитная волна отражается от поверхности. Давление пропорционально изменению импульса (Вспомним: $F = d(mv)/dt$ и $p = F/S$.)

Если до падения импульс равен p_1 , а после отражения $p_2 = Rp_1$, то с учётом обратного направления \vec{p}_2 имеем:

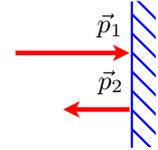
$$\Delta p = p_2 + p_1 = p_1(1 + R)$$

Здесь $R \leq 1$ — коэффициент отражения.

Повторив выкладки, приведённые выше, мы получим:

$$p = \langle w \rangle (1 + R)$$

Давление, оказываемое электромагнитной волной на отражающую поверхность выше, чем на поглощающую.



2.4 Замедление электромагнитных волн в веществе

2.4.1 Показатель преломления и уменьшении скорости

Длина волны света такова, что он может эффективно взаимодействовать с атомами вещества. За взаимодействие отвечает электрический вектор \vec{E} . Поэтому его называют световым вектором.

Благодаря взаимодействию, свет распространяется в веществе медленнее, чем в вакууме.

$$v_{\text{фаз}} = c/\sqrt{\epsilon\mu} = c/n$$

Величина $n = \sqrt{\epsilon\mu}$ называется показателем преломления вещества.

Магнитная проницаемость почти всех веществ практически равна единице (исключение — ферромагнетики). Поэтому

$$n \approx \sqrt{\epsilon}$$

2.4.2 Уменьшение длины волны

Показатель преломления показывает, во сколько раз скорость света в среде меньше, чем в вакууме. Всегда $n > 1$. Говорят, что n характеризует оптическую плотность среды.

Внутри вещества у света меняется длина волны:

$$\lambda = \frac{v_{\text{фаз}}}{\nu} = \frac{c}{n\nu} = \frac{\lambda_0}{n}$$

В среде длина волны меньше, чем в вакууме.

Человеческий глаз воспринимает как цвет частоту излучения. Поэтому при прохождении через прозрачные среды свет не меняет свой цвет, хотя его длина волны меняется.

2.5 Явление интерференции

2.5.1 Понятие интерференции и когерентности

Интерференция

это явление перераспределения энергии световых волн в пространстве, возникающее вследствие сложения колебаний двух или более когерентных источников света.

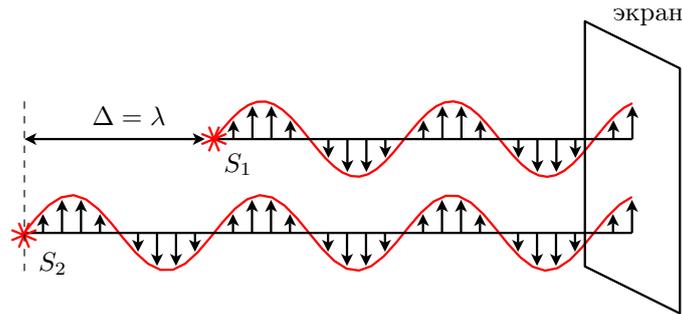
Когерентными

называют источники, которые излучают свет таким образом, что колебания световых векторов совершаются согласовано, т. е. разность фаз между ними остаётся постоянной.

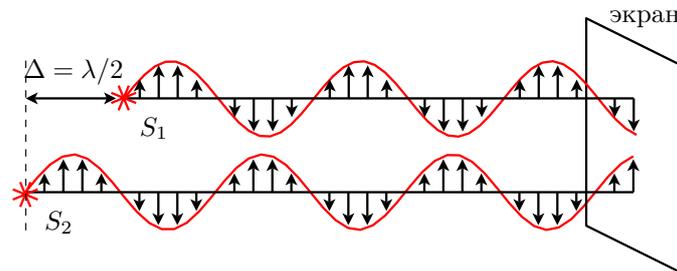
2.5.2 Понятие разности хода

Разностью хода

называют разность расстояний, пройденных волнами до точки встречи.



Один из лучей прошёл путь на длину волны меньший, чем другой. На экране два луча попали в одну точку. Они имеют одинаковую фазу и усиливают друг друга — возникает яркое пятно, интерференционный максимум.



Один из лучей света попал в точку наблюдения, пройдя путь, на половину длины волны больший. Колебания происходят в противофазе и гасят друг друга. Возникает тёмное пятно — интерференционный минимум.

2.5.3 Связь между разностью хода и разностью фаз

Рассмотрим две когерентные волны с одинаковыми частотами, начальными фазами и одинаковыми направлениями векторов \vec{E} :

$$E_1 = A_1 \cos(\omega t - kx + \alpha)$$

$$E_2 = A_2 \cos(\omega t - kx + \alpha)$$

До точки наблюдения первая волна прошла путь l_1 , а вторая l_2 . При $t = t_{\text{набл}}$ найдём их фазы и разность фаз:

$$\varphi_1 = \omega t_{\text{набл}} - k l_1 + \alpha$$

$$\varphi_2 = \omega t_{\text{набл}} - k l_2 + \alpha$$

$$\delta = \varphi_1 - \varphi_2 = -k l_1 + k l_2 = k(l_2 - l_1)$$

Связь разности хода с разностью фаз:

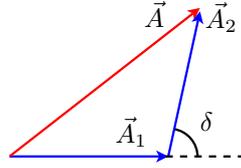
$$\boxed{\delta = k\Delta}$$

2.6 Сложение двух гармонических колебаний

2.6.1 Векторная диаграмма

Пусть две гармонические (синусоидальные) волны с одинаковыми частотами и одинаковыми направлениями векторов \vec{E} приходят в одну и ту же точку пространства. В этой точке мы будем наблюдать колебания

$$E_1 = A_1 \cos(\omega t + \alpha_1), \quad E_2 = A_2 \cos(\omega t + \alpha_2)$$



Результирующие колебания можно найти при помощи векторной диаграммы. Используем теорему косинусов:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \delta$$

где $\delta = \alpha_2 - \alpha_1$ — разность фаз колебаний, $2A_1A_2 \cos \delta$ — интерференционный член.

2.6.2 Сложение некогерентных колебаний

Если колебания некогерентные, то разность фаз δ произвольным образом меняется во времени.

Когда δ беспорядочно меняется, причем так, что принимает с равной вероятностью любые значения, то среднее по времени значение $\langle \cos \delta \rangle = 0$.

$$\begin{aligned} \langle A^2 \rangle &= \langle A_1^2 \rangle + \langle A_2^2 \rangle + \langle 2A_1A_2 \rangle \langle \cos \delta \rangle \rightarrow 0 \\ \langle A^2 \rangle &= \langle A_1^2 \rangle + \langle A_2^2 \rangle \end{aligned}$$

Так как $I \propto \langle A^2 \rangle$, то

$$I = I_1 + I_2$$

При некогерентных колебаниях, интенсивность результирующего колебания равна сумме интенсивностей, создаваемых каждой из волн в отдельности.

2.6.3 Сложение когерентных колебаний

Если колебания когерентные, то $\delta = \text{const}$, т. е. не меняется во времени.

В этом случае

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2} \cos \delta$$

Интенсивность суммы двух колебаний зависит от разности фаз между ними.

Интенсивность максимальна при $\delta = 0$, $\cos 0 = 1$

$$I_{\text{макс}} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2}, \quad I_{\text{макс}} > I_1 + I_2$$

Интенсивность минимальна при $\delta = \pi$, $\cos \pi = -1$

$$I_{\text{мин}} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1I_2}, \quad I_{\text{мин}} < I_1 + I_2$$

2.7 Интерференционные схемы

2.7.1 Создание когерентных источников света

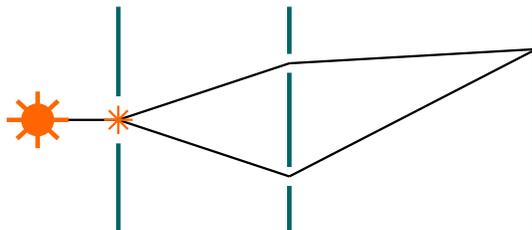
Интерференцию световых волн можно наблюдать лишь при условии, что источники света когерентны, т. е. согласованны.

Для создания двух когерентных волн, используют волну, излучаемую одним только источником света. Эту волну разделяют тем или иным способом на две, а затем накладывают части друг на друга каким-либо способом.

При этом, если разность хода этих волн от источника до точки наблюдения не превышает некоторой характерной длины (длины когерентности, об этом ниже), то случайные изменения амплитуды и фазы световых колебаний в двух волнах происходят согласованно (когерентно) и мы наблюдаем интерференционную картину — систему чередующихся светлых и темных полос.

2.7.2 Схема Юнга

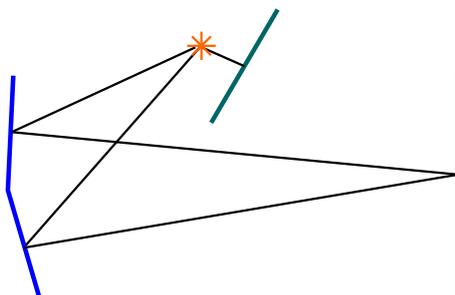
Свет от естественного источника проходит через узкую щель — эту щель можно считать точечным источником. Затем свет от этого точечного источника раздваивается на двух щелях.



Далее мы будем говорить о точечных источниках света, предполагая, что естественный свет, т. е. от неточечного источника, прошёл через узкую щель.

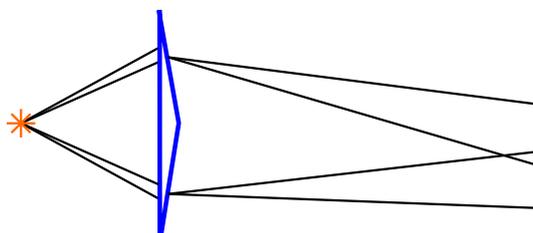
2.7.3 Бизеркала Френеля

Свет от точечного источника отражается от двух зеркал, расположенных под небольшим углом друг к другу. Дополнительная ширма блокирует лучи, идущие от источника к экрану напрямую.



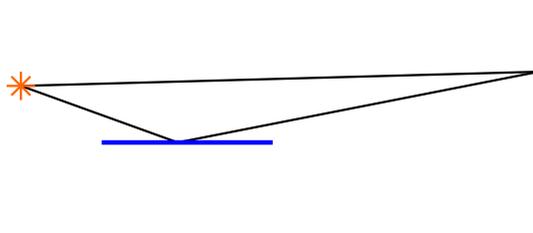
2.7.4 Бипризма Френеля

Пучок расходящихся световых лучей от точечного источника проходит через основание призмы с очень малым углом преломления.



2.7.5 Зеркало Ллойда

Интерферирует свет от точечного источника и его отражение в зеркале, расположенном почти параллельно направлению на экран.

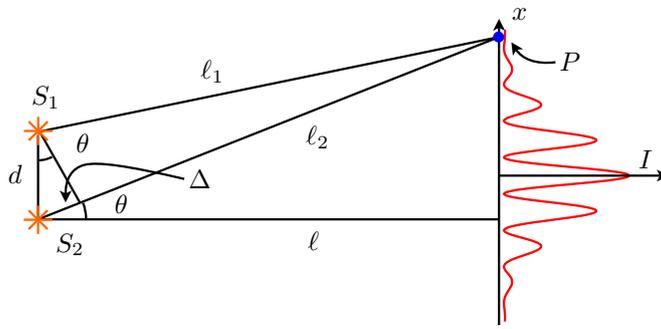


3 Интерференция

3.1 Интерференция двух когерентных источников

3.1.1 Условие максимумов и минимумов

Независимо от интерференционной схемы, волны, образовавшиеся после разделения, можно считать исходящими от двух точечных источников S_1 и S_2 , расположенных на расстоянии d друг от друга.



Обозначим разность хода как Δ

$$\Delta = l_2 - l_1$$

Если Δ равно целому числу длин волн,

$$\Delta = m\lambda, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

то в точке P будет интерференционный максимум. Число m — порядок максимума.

Максимумам отвечает разность фаз

$$\delta = 2\pi m$$

Если Δ равно целому числу волн плюс ещё половина,

$$\Delta = m\lambda + \lambda/2, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

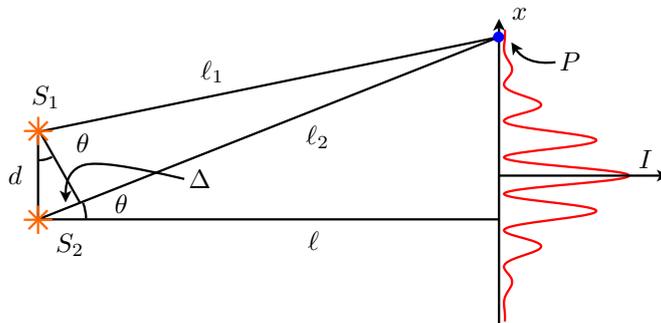
то в точке P будет интерференционный минимум.

Минимумам соответствует разность фаз

$$\delta = 2\pi m + \pi$$

3.1.2 Положения максимумов на экране

Найдём положения максимумов.



Разность хода можно вычислить как

$$\Delta = d \sin \theta$$

Мы не рассматриваем максимумы, расположенные далеко от центра — их всё равно не будет видно из-за ограниченной длины когерентности (об этом ниже). Значит, угол θ мал.

Для малых углов справедливо:

$$\sin \theta \approx \theta \Rightarrow \cos \theta \approx 1 \Rightarrow \operatorname{tg} \theta \approx \theta$$

Следовательно:

$$\Delta = d \sin \theta \Rightarrow \Delta \approx d\theta, \quad \operatorname{tg} \theta = x/l \Rightarrow \theta \approx x/l$$

$$\Delta = dx/l = m\lambda$$

$$x_m = m\lambda l/d$$

3.1.3 Ширина интерференционной полосы

Расстояние между серединами соседних максимумов или минимумов называется шириной интерференционной полосы.

$$\Delta x = x_{m+1} - x_m = \frac{(m+1)\lambda\ell}{d} - \frac{m\lambda\ell}{d} = \frac{\lambda\ell}{d}(m+1-1)$$

$$\boxed{\Delta x = \lambda\ell/d}$$

Для увеличения ширины интерференционной полосы нужно увеличивать ℓ или уменьшать d .

3.2 Оптическая длина пути

Если свет от источников проходит через различные среды, используют понятия оптической длины пути и оптической разности хода.

Если волна распространяется в среде с показателем преломления n и проходит геометрический путь ℓ , то фаза ее меняется на величину

$$k\ell = \frac{2\pi}{\lambda}\ell = \frac{2\pi}{\lambda_{\text{вак}}}n\ell = \frac{2\pi}{\lambda_{\text{вак}}}L$$

где λ — длина волны в среде, $\lambda_{\text{вак}}$ — длина волны в вакууме.

Произведение геометрической длины пути на показатель преломления среды называется оптической длиной пути,

$$\boxed{L = n\ell}$$

Оптическая длина пути

Пусть свет, распространяясь в среде, проходит геометрический путь ℓ за время τ . Оптическая длина пути — это расстояние, которое пройдет свет в вакууме за то же самое время τ .

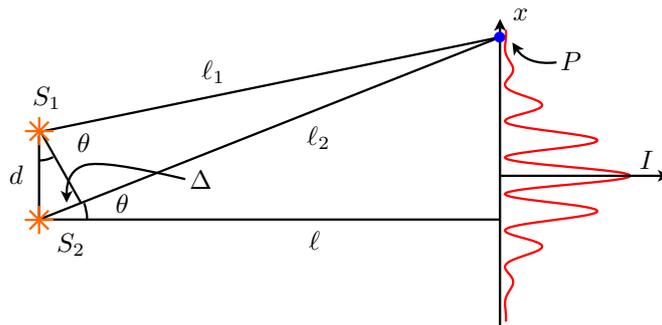
Две волны, проходящие через различные среды, приобретут разность фаз

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_{\text{вак}}}(n_1\ell_1 - n_2\ell_2) = \frac{2\pi}{\lambda_{\text{вак}}}\Delta$$

где под Δ теперь понимается оптическая разность хода.

В условиях для интерференционных минимумов и максимумов фигурирует оптическая разность хода.

3.3 Распределение интенсивности



Пусть S_1 и S_2 — когерентные источники монохроматического света одинаковой амплитуды. Будем считать излучаемые ими волны плоскими.

Тогда амплитуды волн не будут зависеть от пройденного расстояния (Если бы волны были, например, сферическими, то амплитуда бы убывала с расстоянием.)

В интересующей нас точке экрана эти волны будут создавать колебания с одинаковой амплитудой

$$A_1 = A_2 = A_0$$

Тогда амплитуда результирующего колебания будет равна:

$$A^2 = A_0^2 + A_0^2 + 2A_0^2 \cos \delta =$$

$$= 2A_0^2(1 + \cos \delta) = 4A_0^2 \cos^2(\delta/2)$$

Вычислим δ , используя полученную выше формулу для разности хода: $\Delta = dx/\ell$.

$$\delta = k\Delta = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{dx}{\ell}$$

Так как $I \propto A^2$, то

$$I = 4I_0 \cos^2 \left(\frac{\pi d}{\lambda \ell} x \right)$$

В максимумах косинус равен единице, и интенсивность равна $4I_0$. В минимумах интенсивность равна нулю.

Такая картина будет наблюдаться только для идеально когерентных источников. Для реальных источников света распределение интенсивности будет отличаться от полученного идеализированного. Интенсивность максимумов убывает с удалением от центра, и интерференционная картина исчезает.

3.4 Когерентность

3.4.1 Причина некогерентности

Излучение света происходит за счёт переходов электронов в атомах с более высоких орбит на более низкие.

Каждый переход длится конечное время. За это время испускается фрагмент волны конечной длины — цуг. Естественный свет — пучок таких цугов.

Переходы в атомах происходят несогласованно, следовательно, и цуги не согласованы друг с другом по фазе.

Так как цуги не согласованы, то они не могут интерферировать. Интерференция возникает, только если каждый цуг раздваивается и интерферирует со своей копией.

3.4.2 Лазеры

Основная идея генерации лазерного излучения — добиться согласованного перехода электронов. Для этого используют вещества со специальными свойствами.

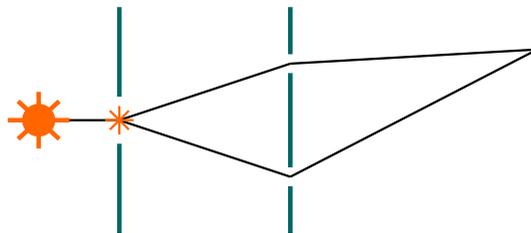
Сначала электроны вещества возбуждают, т. е. выводят на более высокие орбиты. С этих орбит электроны самопроизвольно сходят, но не на основную орбиту, а на промежуточную, её называют метастабильная орбита.

На метастабильной орбите накапливается много электронов, и они находятся там достаточно долго — пока случайно один не перейдёт вниз и не испустит цуг.

Главное специфическое свойство метастабильной орбиты — случайный цуг воздействует на электроны на ней так, что заставляет их переходить вниз. При этом генерируется цуг, *точно согласованный* с исходным.

Процесс напоминает падение костяшек домино — одна затравка вызывает лавину, и все цуги в этой лавине согласованы. Поэтому лазерное излучение обладает высокой когерентностью.

3.4.3 Ограниченность протяжённости интерференционной картины



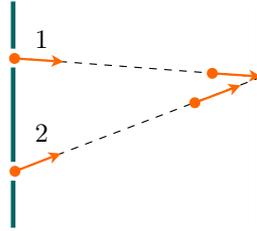
Опыт Юнга. Яркий пучок света, проходит через узкую щель — щель выступает в роли точечного источника света. Далее свет падает на две другие щели, которые играют роль когерентных источников. Свет от этих щелей образует на экране интерференционную картину.

По мере удаления от центра картины интерференционные полосы исчезают.

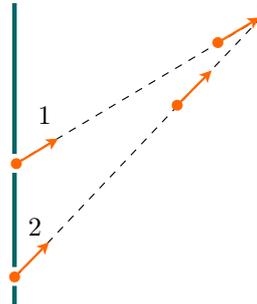
3.4.4 Качественное объяснение исчезновения когерентности

Причина исчезновения интерференционной картины при удалении от центра: излучение состоит из цугов конечной длины, а с удалением от центра увеличивается разность хода Δ .

На рисунке показана точка, для которой разность хода Δ мала. Путь первой копии цуга короче, чем путь второй копии. Но так как Δ меньше длины цугов, вторая копия успевает частично провзаимодействовать с первой — возникает интерференционная картина.



На этом рисунке разность хода велика. Вторая копия приходит в точку наблюдения, когда первая уже полностью поглотилась экраном. Интерференции нет.



3.4.5 Понятие длины когерентности

Величина разности хода, при которой интерференционная картина исчезает, называется длиной когерентности $\ell_{\text{ког}}$.

Предположим, что наибольший порядок максимума, который мы наблюдаем, равен m . Тогда длину когерентности можно оценить как

$$\ell_{\text{ког}} = m\lambda$$

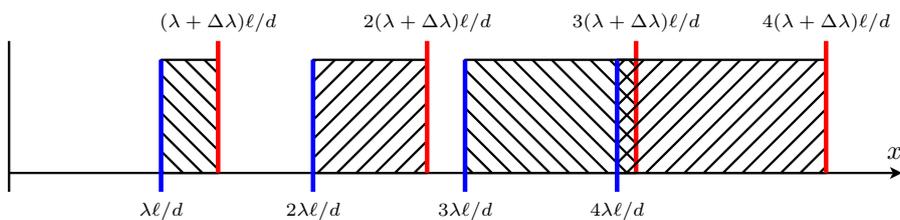
Определим значение m . Монохроматическая волна — это *бесконечно протяжённая* синусоида. Цуг — это фрагмент синусоиды конечной длины.

Теорема Фурье говорит, что каждый такой цуг можно представить как сумму нескольких монохроматических волн с немного отличающимися длинами волн. Значит, естественный свет не может быть строго монохроматическим.

Естественный свет можно представить как совокупность монохроматических компонент в некотором интервале длин волн $(\lambda, \lambda + \Delta\lambda)$. Каждой компоненте соответствуют разные положения максимумов и разная ширина интерференционной полосы.

$$x_m = m\lambda\ell/d, \quad \Delta x = \lambda\ell/d$$

Интерференционная картина существует, пока максимумы разных компонент не начинают перекрываться.



3.4.6 Формула для длины когерентности

Условие наложения максимума m -ого порядка $\lambda + \Delta\lambda$ и $(m + 1)$ -ого максимума компоненты λ :

$$m(\lambda + \Delta\lambda) = (m + 1)\lambda$$

$$m = \lambda/\Delta\lambda$$

В итоге получаем формулу для длины когерентности

$$\ell_{\text{ког}} = \lambda^2/\Delta\lambda$$

Для солнечного света $\ell_{\text{ког}} = 5\lambda$. Это очень малая величина. Для лучших не лазерных источников $\ell_{\text{ког}} = 10\text{см}$, для лазеров $\ell_{\text{ког}} = 100 \div 1000\text{м}$.

Мы выяснили, что интерференция на установке будет наблюдаться только при обязательном выполнении условия: оптическая разность хода должна быть меньше длины когерентности,

$$\Delta < \ell_{\text{ког}}$$

3.4.7 Время когерентности

Для того, чтобы получить длину когерентности, мы представили естественный свет как сумму монохроматических гармоник с длинами волн от λ до $\lambda + \Delta\lambda$.

Другой способ, эквивалентный этому — представить естественный свет как синусоидальную волну с фазой, меняющейся во времени случайным образом:

$$E = A \cos(\omega t + \alpha(t))$$

Если складываются две такие волны, то интерференционный член $\cos \delta$ будет зависеть от времени:

$$\cos \delta(t) = \cos[\alpha_1(t) - \alpha_2(t)]$$

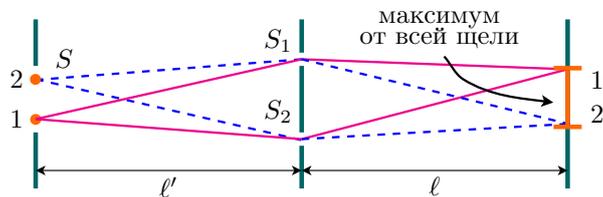
Время когерентности $\tau_{\text{ког}}$ — это промежуток времени, в течение которого случайные изменения $\delta(t)$ в данной точке достигают значения порядка π .

Время когерентности есть время, за которое свет проходит путь, равный длине когерентности.

$$\tau_{\text{ког}} = \ell_{\text{ког}}/c$$

3.4.8 Источник света конечных размеров

Увеличение размера источника, т. е. входной ширины щели, приводит к размытию интерференционных полос на экране и к полному их исчезновению.



Разобьем щель S на бесконечно узкие участки. Участок 1 даёт максимум в точке $1'$, участок 2 — максимум в точке $2'$.

Интерференционные максимумы от разных участков сдвинуты относительно друг друга. Это и приводит к тому, что интерференционные полосы оказываются размытыми.

Вспомним, что расстояние между серединами соседних максимумов или минимумов называется шириной интерференционной полосы, $\Delta x = \lambda\ell/d$.

Пусть $\ell = \ell'$. Тогда из рисунка видно, что если ширина щели S равна ширине интерференционной полосы Δx , то картина будет полностью размыта, и можно сделать вывод, что вторичные источники S_1 и S_2 стали некогерентными.

3.4.9 Ширина когерентности

Ситуацию с размытием интерференционной картины можно представить так: источник света S освещает ширму со щелями S_1 и S_2 .

Щели выделяют на волновой поверхности вторичные источники. Источники когерентные, пока расстояние между ними меньше некоторой величины — ширины когерентности $h_{\text{ког}}$.

Условие когерентности вторичных источников:

$$d \leq h_{\text{ког}}$$

Ширина когерентности $h_{\text{ког}}$ — это максимальное расстояние между точками на волновом фронте, вторичные источники в которых ещё остаются когерентными.

3.4.10 Оценка ширины когерентности

Найдём приближённо $h_{\text{ког}}$. Из условия когерентности вторичных источников:

$$h_{\text{ког}} \approx d$$

Выразим d из формулы для ширины интерференционной полосы: $\Delta x = \lambda \ell / d$:

$$h_{\text{ког}} \approx \frac{\lambda \ell}{\Delta x} \approx$$

Вторичные источники становятся некогерентными, когда $s \approx \Delta x$, где s — ширина первой щели S .

$$\approx \frac{\lambda \ell}{s} = \frac{\lambda}{s/\ell}$$

Отношение s/ℓ равно тангенсу угла φ , под которым виден источник света из точки расположения двух щелей. (Вообще говоря, тут должно быть не расстояние от щелей до экрана ℓ , а ℓ' , но обычно эти расстояния близки по величине.)

В интерференционных схемах этот угол мал, тогда можно записать:

$$h_{\text{ког}} \approx \lambda / \varphi$$

Угол φ называется угловой шириной источника света. Это угол, под которым виден источник в месте расположения двух щелей.

3.4.11 Ширина когерентности для Солнца

Для Солнца $\varphi = 0.01$ рад, средняя длина волны $\lambda = 0.5$ мкм. Следовательно

$$(h_{\text{ког}})_{\text{Солнца}} \approx 0.05 \text{мм}$$

Следовательно, чтобы наблюдать интерференцию, освещая две щели солнечным светом непосредственно, расстояние между двумя щелями должно быть меньше 0.05мм.

Это очень мало, поэтому в опыте Юнга присутствует первая узкая щель, которая имеет намного меньшую угловую ширину и, следовательно, более высокую ширину когерентности.

3.4.12 Условия для наблюдения интерференции

Для наблюдения интерференции должны соблюдаться условия

- Разность хода лучей меньше длины когерентности, $\Delta < \ell_{\text{ког}}$.
- Расстояние между щелями меньше ширины когерентности, $d < h_{\text{ког}}$.

4 Дифракция Френеля

4.1 Понятие дифракции

4.1.1 Определение

Дифракцией

называют совокупность явлений, связанных с отклонением от прямолинейного распространения волны в среде с резкими неоднородностями, такими как края экранов, отверстия и т. д.

В частности, дифракция приводит к огибанию световыми волнами препятствий и проникновению света в область геометрической тени.

Для наблюдения дифракции характерные размеры неоднородности должны быть сопоставимы с длиной волны света.

4.1.2 Способы наблюдения дифракции

Различают два способа наблюдения дифракции

- Дифракция Фраунгофера — источник и точка наблюдения расположены далеко от препятствия, и поэтому лучи света, падающие на препятствие и идущие в точку наблюдения можно считать параллельными.
- Дифракция Френеля — все другие случаи, когда лучи не являются параллельными.

4.2 Уравнение сферической волны

4.2.1 Формула сферической волны

Для объяснения дифракции широко используется понятие сферической волны. Формула имеет вид

$$E = \frac{A}{r} \cos(\omega t - kr + \alpha)$$

где r — расстояние до источника (т. е. до центра сферы).

В отличие от плоской волны, амплитуда светового вектора E сферической волны зависит от r . Это связано с законом сохранения энергии.

Пусть источник света испускает в единицу времени энергию $J_{\text{сфер}}$.

Закон сохранения энергии требует, чтобы через сферу *любого радиуса*, окружающую источник, в единицу времени проходила энергия $J_{\text{сфер}}$.

Убедимся, что для этого необходимо, чтобы амплитуда волны убывала с расстоянием как A/r .

4.2.2 Убывание амплитуды с расстоянием

В некоторой точке сферического фронта интенсивность (т. е. количество энергии, переносимой за единицу времени через единицу площади) равна

$$I_{\text{сфер}} = \chi \frac{A^2}{r^2}$$

где χ — постоянный коэффициент пропорциональности.

Энергия, переносимая через сферу радиусом r в единицу времени, равна

$$J_{\text{сфер}} = I_{\text{сфер}} 4\pi r^2 = \chi \frac{A^2}{r^2} 4\pi r^2 = \text{const}$$

Таким образом, мы видим, что амплитуда сферической волны убывает с расстоянием от источника из-за того, что энергия волны распределяется по увеличивающемуся объёму пространства.

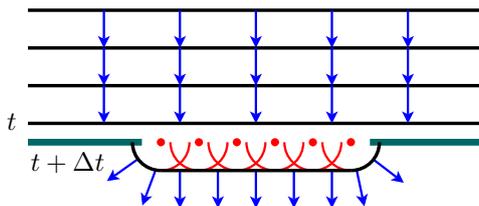
4.3 Принцип Гюйгенса—Френеля

4.3.1 Принцип Гюйгенса

Принцип Гюйгенса даёт качественное объяснение дифракции. Он позволяет при помощи геометрических построений найти форму волнового фронта после прохождения волной препятствия.

Пусть известно положение волнового фронта в момент времени t . Предположим, что каждая точка, до которой дошла волна в этот момент, является источником сферических вторичных волн.

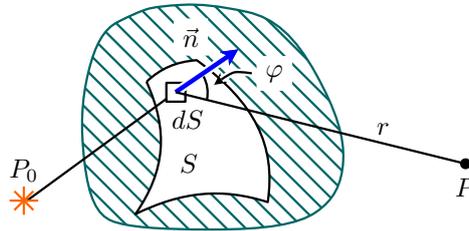
Чтобы найти положение первичного волнового фронта при $t + \Delta t$, нужно построить огибающую вторичных волн в этот момент времени.



4.3.2 Модификация Френелем принципа Гюйгенса

Принцип Гюйгенса позволяет определить только направление распространения света. Френель дополнил этот принцип положением о том, что вторичные источники следует считать *когерентными*, и последующее положение первичного фронта есть результат *интерференции* вторичных источников.

Пусть имеется преграда произвольной формы с отверстием также произвольной формы и площадью S . Через отверстие проходит свет от точечного монохроматического источника P_0 и попадает в точку наблюдения P .



4.3.3 Вычисление амплитуды дифрагирующей волны

Отверстие вырезает часть волнового фронта падающей волны. Каждая элементарная (бесконечно малая) площадка на этой поверхности, имеющая площадь dS , испускает вторичную сферическую волну.

Амплитуда этой волны в точке наблюдения P определяется следующим образом:

- она пропорциональна амплитуде первичной волны a_0 , приходящей к площадке dS ;
- она зависит от угла φ между нормалью к площадке и направлением на точку наблюдения P , эта зависимость выражается коэффициентом $K(\varphi)$;
- пропорциональна площади dS ;
- обратно пропорциональна расстоянию r от площадки до точки наблюдения P .

Следовательно, вклад dE площадки в излучение в точке P можно записать как:

$$dE = K(\varphi) \frac{a_0 dS}{r} \cos(\omega t - kr)$$

Результирующие колебания в точке P можно найти как суперпозицию колебаний, создаваемых элементарными площадками отверстия:

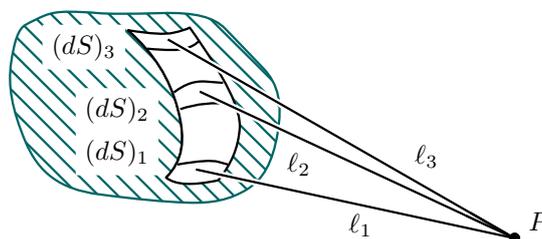
$$E = \int_S K(\varphi) \frac{a_0 dS}{r} \cos(\omega t - kr)$$

4.3.4 Понятие зон Френеля

В некоторых случаях результат дифракции удаётся найти без интегрирования. Согласно принципу Гюйгенса—Френеля, колебания, испускаемые различными площадками dS , являются когерентными и создают интерференционную картину. Это позволяет использовать векторные диаграммы.

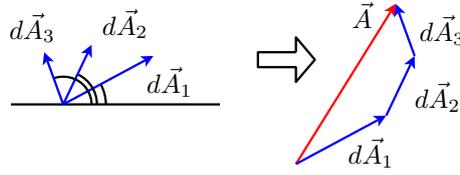
Общая идея: всю волновую поверхность S разбивают на зоны, которые называют зонами Френеля. Форма зон выбирается так, чтобы волны от границ соседних зон приходили бы в точку наблюдения с одинаковыми разностями хода. Тогда результирующее колебание в точке наблюдения можно представить в виде суммы векторов, повернутых друг относительно друга на один и тот же угол.

Пусть $d\vec{A}_i$ — амплитуда колебаний, создаваемых в точке наблюдения i -ой площадкой $(dS)_i$. От разных площадок свет проходит разный путь, поэтому волны будут приходить от них в точку наблюдения со сдвигом по фазе.



$$\begin{aligned}
 dE_1 &= dA_1 \cos(\omega t + kl_1) = dA_1 \cos(\omega t + \alpha_1) \\
 dE_2 &= dA_2 \cos(\omega t + kl_2) = dA_2 \cos(\omega t + \alpha_2) \\
 dE_3 &= dA_3 \cos(\omega t + kl_3) = dA_3 \cos(\omega t + \alpha_3)
 \end{aligned}$$

Колебания с одинаковыми частотами, но сдвинутые по фазе можно представить как вектора, углы между которыми равны разности соответствующих фаз.

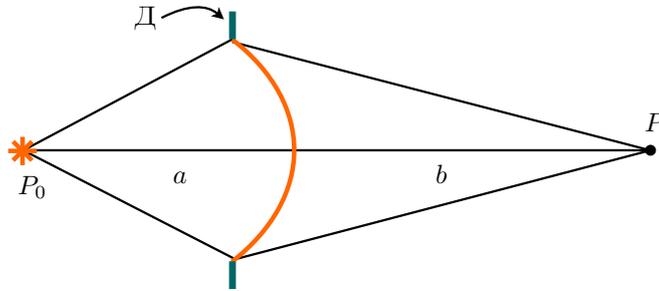


Вектора $d\vec{A}_i$, соответствующие разным площадкам, будут повернуты друг относительно друга на разные углы. Результирующее колебание в точке наблюдения — векторная сумма всех $d\vec{A}_i$.

4.4 Дифракция на круглом отверстии

4.4.1 Зоны Френеля для центра отверстия

Рассмотрим диафрагму \mathcal{D} с круглым отверстием. Поместим источник света в точке P_0 на оси, перпендикулярной плоскости диафрагмы, и проходящей через центр отверстия. Вычислим амплитуду световых волн, приходящих в точку P на той же оси.



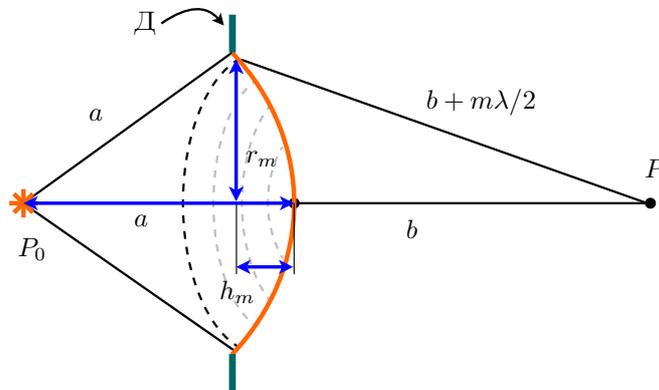
Волновая поверхность, вырезаемая диафрагмой, симметрична относительно оси PP_0 , поэтому разобьём её на кольцевые зоны Френеля с центром на оси.

Радиусы зон выберем таким образом, чтобы разности хода от краёв каждой зоны отличались на $\lambda/2$.

Разность фаз у волн, приходящих от границ зон, будет равна

$$\Delta\varphi = k\lambda/2 = \pi$$

4.4.2 Радиусы зон Френеля



Вычислим внешний радиус m -ой зоны Френеля r_m . Из рисунка видно, что

$$\begin{aligned}
 r_m^2 &= a^2 - (a - h_m)^2 \\
 r_m^2 &= (b + m\lambda/2)^2 - (b + h_m)^2
 \end{aligned}$$

Из уравнения $r_m^2 = a^2 - (a - h_m)^2$ получим:

$$\begin{aligned} &= a^2 - a^2 + 2ah_m - h_m^2 \\ r_m^2 &= 2ah_m - h_m^2 \end{aligned}$$

Так как $a \gg r_m$, то кривизна фронта, вырезаемого диафрагмой, мала — $h_m \ll a$. Поэтому вторым слагаемым можно пренебречь:

$$r_m^2 = 2ah_m$$

Чтобы найти h_m^2 приравняем правые части двух уравнений для r_m^2 :

$$\begin{aligned} r_m^2 &= a^2 - (a - h_m)^2, \quad r_m^2 = (b + m\lambda/2)^2 - (b + h_m)^2 \\ a^2 - (a - h_m)^2 &= (b + m\lambda/2)^2 - (b + h_m)^2 \\ 2ah_m - h_m^2 &= b^2 + 2bm\lambda/2 + m^2\lambda^2/4 - b^2 - 2bh_m - h_m^2 \\ 2ah_m &= 2bm\lambda/2 + m^2\lambda^2/4 - 2bh_m \\ 2h_m(a + b) &= 2bm\lambda/2 + m^2\lambda^2/4 \end{aligned}$$

Так как $b \gg \lambda$, то слагаемое $m^2\lambda^2/4$ будет пренебрежимо мало по сравнению с $2bm\lambda/2$ и им можно пренебречь

$$\begin{aligned} 2h_m(a + b) &= 2bm\lambda/2 + m^2\lambda^2/4 \\ h_m &= \frac{bm\lambda}{2(a + b)} \end{aligned}$$

Подставим h_m в формулу для r_m :

$$r_m^2 = 2ah_m = 2a \frac{bm\lambda}{2(a + b)}$$

$$r_m = \sqrt{\frac{ab}{(a + b)} m\lambda}$$

Если падающий на диафрагму волновой фронт плоский, то это эквивалентно тому, что источник находится бесконечно далеко, т. е. $a \rightarrow \infty$. В этом случае

$$r_m = \sqrt{m\lambda b}$$

4.4.3 Площади зон Френеля

Согласно принципу суперпозиции, амплитуда колебаний A_m , создаваемых m -ой зоной Френеля в точке наблюдения, есть сумма колебаний, создаваемых каждой точкой зоны. Следовательно, A_m пропорциональна площади зоны S_m .

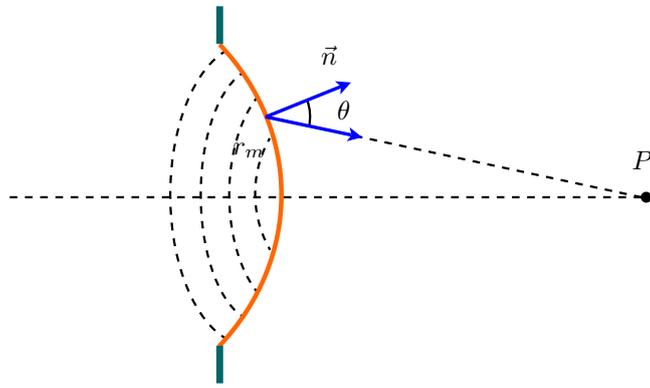
Площадь зоны можно оценить следующим образом:

$$\begin{aligned} S_m &= \pi r_m^2 - \pi r_{m-1}^2 = \pi \frac{ab}{(a + b)} m\lambda - \pi \frac{ab}{(a + b)} (m - 1)\lambda = \\ &= \pi \lambda \frac{ab}{(a + b)} (m - (m - 1)) \end{aligned}$$

$$S_m = \pi \lambda \frac{ab}{(a + b)}$$

Получили, что все площади одинаковые.

Однако мы не учли, что волновой фронт имеет слабую выпуклость. Значит, чем больше m , тем больше угол θ и тем меньше лучей от зоны идёт в точку P .



Поэтому на самом деле площади зон *почти* одинаковые. Они медленно убывают с ростом m .

4.4.4 Амплитуды и фазы колебаний, создаваемых зонами Френеля

Каждая зона Френеля создаёт в точке наблюдения колебания со следующими свойствами.

- Амплитуды колебаний, создаваемых m -ой зоной, медленно убывают с ростом m .
- Колебания, создаваемые соседними зонами, находятся в противофазе.

4.4.5 Условия максимумов и минимумов

Сразу можно сделать вывод — если диафрагма открывает ровно две, четыре или другое чётное число зон, то они практически погасят друг друга, и в точке P будет тёмное пятно.

Если открыта одна, три, пять или любое другое нечётное число зон, то в точке P будет яркое пятно.

4.4.6 Спираль Френеля

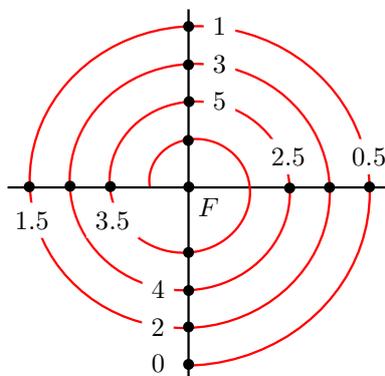
Для вычисления амплитуды колебаний в точке P в общем случае используют графический метод, связанный с построением векторной диаграммы.

Разделим волновой фронт на кольцевые зоны, гораздо более узкие, чем зоны Френеля. Каждое такое кольцо будет создавать в точке наблюдения колебания.

Эти колебания можно представить векторами на векторной диаграмме. Длина вектора пропорциональна амплитуде, угол равен фазе. Каждая следующая стрелочка чуть короче предыдущей и повернута против часовой стрелки.



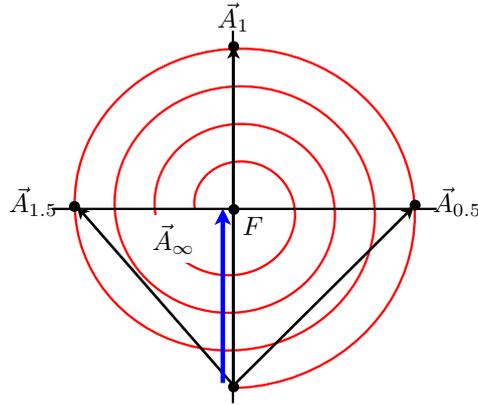
Перейдя к бесконечно малым кольцевым зонам, мы получим спираль Френеля. Спираль нужно представлять себе как совокупность бесконечно малых по длине элементарных векторов.



Разность хода между границами зон Френеля равна $\lambda/2$, а разность фаз равна π . Поэтому вкладам от точек на границах зон соответствуют противоположные по направлению вектора.

Точка 1 — граница первой зоны, точка 2 — граница второй и т. д. Всем открытым зонам соответствует полная спираль, т. е. точка F .

4.4.7 Анализ дифракции при помощи спирали Френеля



Каждому радиусу диафрагмы соответствует некоторая точка на спирали. Для нахождения амплитуды нужно соединить точку 0 с этой точкой на спирали.

Если открыта первая зона, то нужно найти сумму элементарных векторов от точки 0 до 1.

Если открыто две зоны, то результирующий вектор \vec{A}_2 будет очень мал (на рисунке не показан)

Если открыты все зоны Френеля (диафрагма отсутствует), тогда нужно соединить точку 0 с центром спирали в точке F — получим вектор \vec{A}_∞ .

Вычислим интенсивность света в центре экрана, когда открыта только половина первой зоны.

Проведём вектор от точки 0 в точку 0.5. Вычислим длину этого вектора по теореме Пифагора

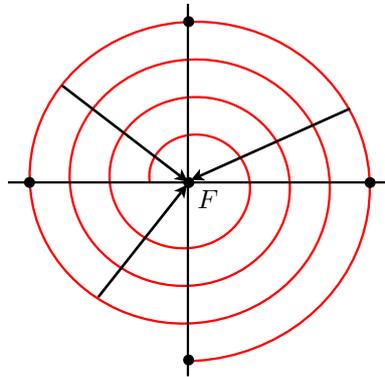
$$A_{0.5}^2 = A_\infty^2 + A_\infty^2 \Rightarrow I_{0.5} = 2I_\infty$$

4.5 Дифракция на диске

Спираль Френеля можно использовать, чтобы проанализировать дифракцию на диске.

Если на пути света стоит непрозрачный диск, то открыты все зоны, кроме нескольких первых.

Следовательно, конец результирующего вектора находится в точке F , а начало на спирали, в точке, соответствующей количеству открытых зон.



Из рисунка видно, что если диск закрывает небольшое число зон (неважно сколько), амплитуда результирующего колебания будет почти равна амплитуде A_∞ . Это значит, что в центре дифракционной картины всегда будет светлое пятно. Оно называется пятном Пуассона.

5 Дифракция Френеля. Дифракция Фраунгофера

5.1 Зонная пластинка

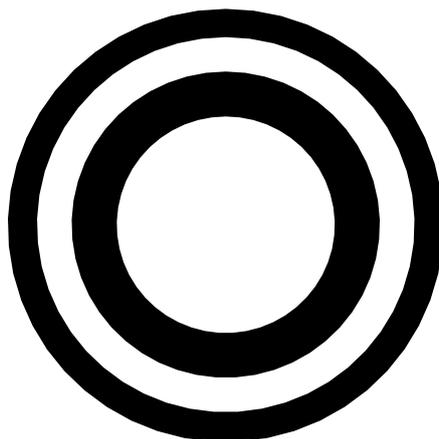
Поместим на пути света преграду, сконструированную так, чтобы зоны Френеля были открыты через одну. Например, все нечётные, т. е. 1, 3, 5 и т. д. Такой оптический инструмент называется зонной пластинкой.

Радиус m -ой зоны равен

$$r_m = \sqrt{\frac{ab}{(a+b)} m \lambda} \propto \sqrt{m}$$

Зонная пластинка образована концентрическими окружностями, радиусы которых пропорциональны корням из последовательных целых чисел: $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ и т. д.

На рисунке показан центральный фрагмент зонной пластинки. Открыта первая и третья зоны.



Так как зоны открыты через одну, то свет от каждой открытой зоны приходит в одной и той же фазе. Амплитуда колебаний, создаваемых в точке наблюдения зоной с небольшим номером примерно равна A_∞ .

Следовательно

$$A_{\text{зон.пласт.}} = nA_\infty$$

$$I_{\text{зон.пласт.}} = n^2 I_\infty$$

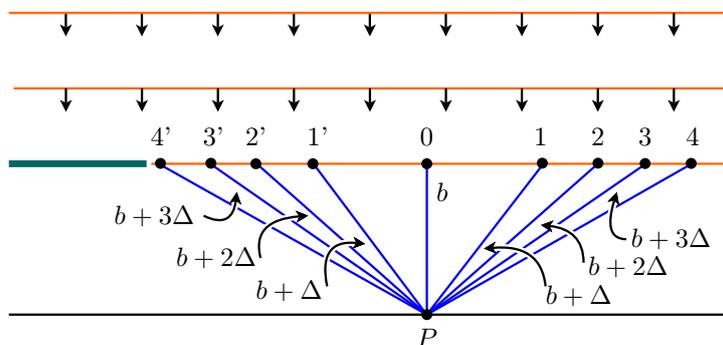
где n — число открытых зон. Интенсивность света в центральной точке экрана будет в n^2 раз выше, чем в случае отсутствия преграды.

5.2 Дифракция Френеля от полуплоскости

5.2.1 Зоны Френеля для полуплоскости

Рассмотрим плоский фронт волны, параллельный преграде. Найдём амплитуду колебаний в точке P .

Разобьём волновую поверхность на зоны в виде полосок, параллельных краю препятствия. Ширину полосок зададим так, чтобы разность хода между соседними полосками была постоянной.

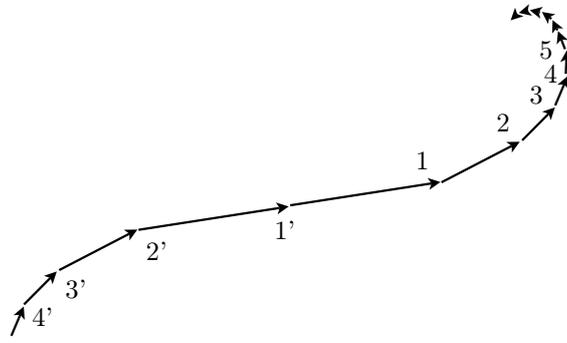


5.2.2 Построение спирали Корню

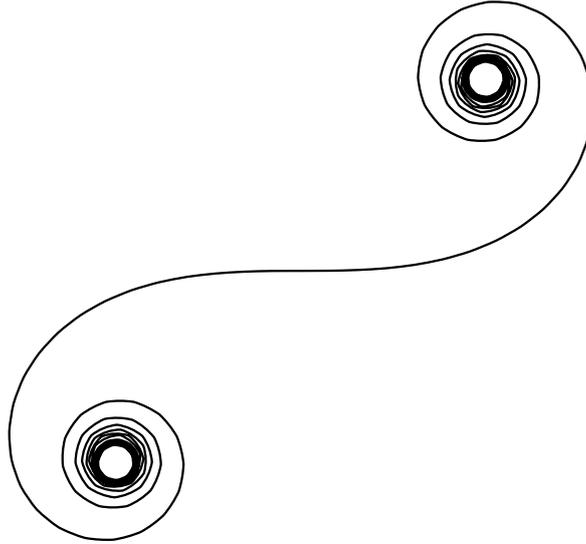
Просуммируем вклады каждой из зон. Чем выше номер, тем уже зона — значит, вклады зон уменьшаются с ростом номера.

Видно, что сначала вклад убывает очень быстро, а для высоких номеров уже почти не меняется.

За начало отсчёта примем фазу луча от 0 в P . Получим векторную диаграмму в виде двойной спирали. Спираль не симметрична относительно 0 — справа открыты все зоны, а слева только несколько штук.



Колебания в точке P — векторная сумма всех векторов от вектора $4'$ слева до фокуса спирали справа (т. е. до точки, в которую мы попадём, если будем продолжать добавлять вектора справа). Устремим размеры зон к нулю. Тогда векторная диаграмма превратится в плавную кривую, которая называется спиралью Корню.



5.2.3 Формула спирали Корню

Математически, эта спираль задаётся в виде двух параметрических формул, которые называются интегралами Френеля:

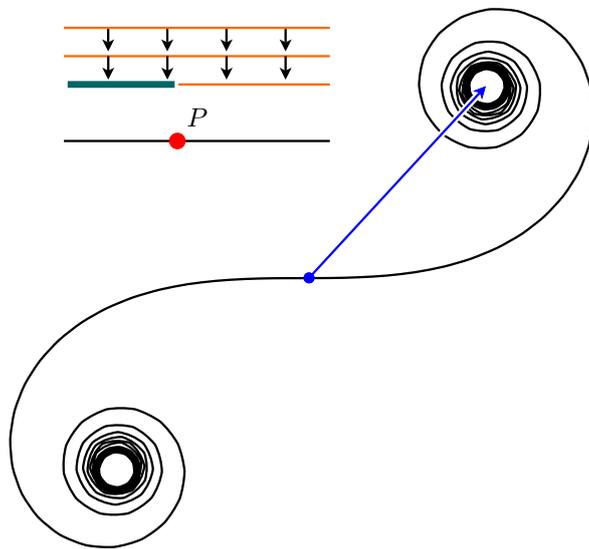
$$\xi = \int_0^v \cos(\pi u^2/2) dv, \quad \eta = \int_0^v \sin(\pi u^2/2) dv,$$

Параметр v — длина спирали, отсчитанная от центральной точки. При $v \rightarrow \pm\infty$ спираль сходится в точки фокусов.

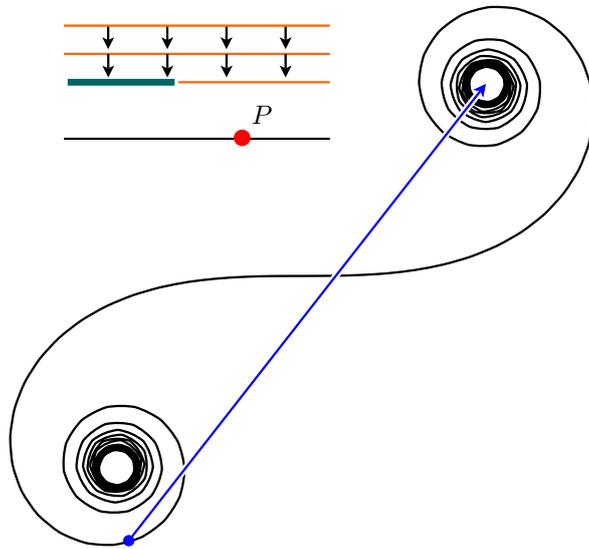
5.2.4 Использование спирали Корню для анализа дифракции

Будем считать, что край препятствия находится слева. Тогда результирующее колебание в точке наблюдения представляется вектором, выходящим из некоторой точки на левой ветки спирали и заканчивающимся в фокусе правой.

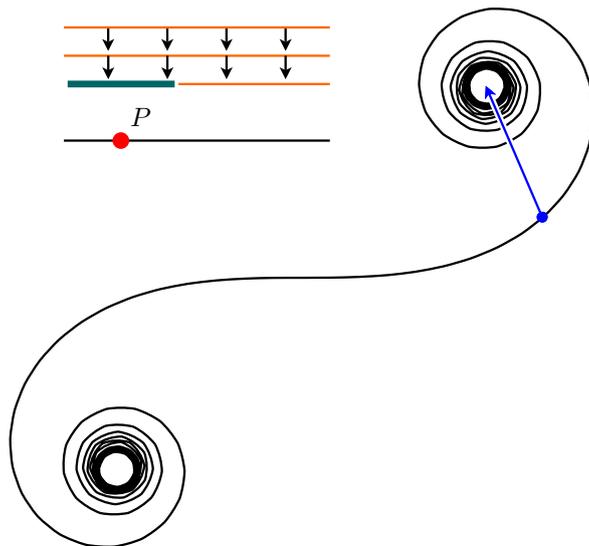
Точка наблюдения точно *напротив* края экрана.



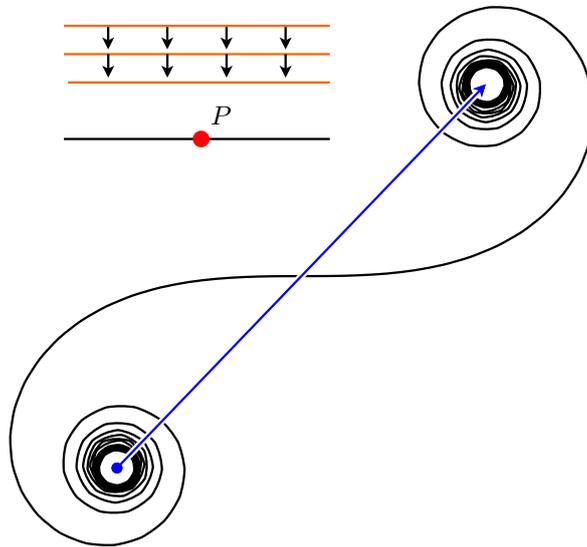
Точка наблюдения *правее* края экрана.



Точка наблюдения *левее* края экрана, в области геометрической тени.

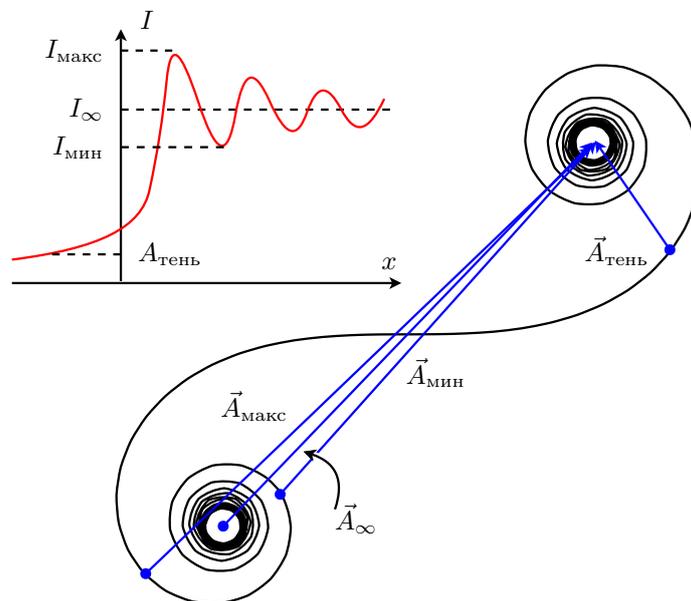


Препятствия нет вообще.



5.2.5 Распределение интенсивности света на экране

Начало координат соответствует краю препятствия.

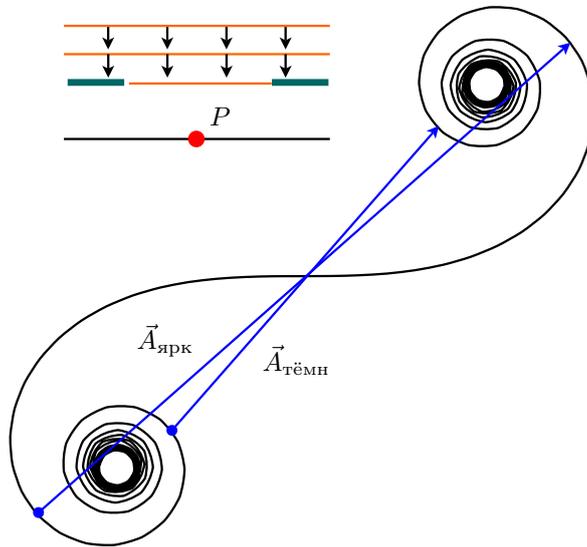


5.3 Дифракция Френеля от щели

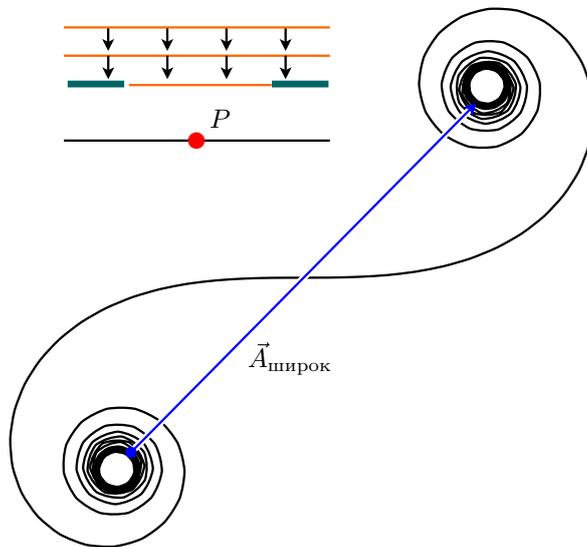
Если поместить вторую бесконечную преграду справа от первой, то получим щель.

Для анализа дифракции на щели можно использовать спираль Корню. Так как теперь не вся правая часть волнового фронта даёт вклад в освещённость точки наблюдения, то конец вектора находится не в фокусе спирали, а в одной из её точек, так же как и его начало.

В зависимости от ширины щели, в центре может быть яркая $A_{\text{ярк}}$ или более тёмная $A_{\text{тёмн}}$ полоса. Правее и левее центра будут чередоваться светлые и тёмные полосы.



Если ширина щели велика, то яркость точек напротив щели будет практически постоянной. Только на границах геометрической тени образуется система густо расположенных светлых и тёмных полос.



5.4 Критерий наблюдения дифракции

Вспомним формулу для радиусов зон Френеля при плоском падающем фронте:

$$r_m = \sqrt{m\lambda b}$$

Если размеры диафрагмы по сравнению с длиной волны таковы, что открыто очень много зон Френеля, т. е. $m \rightarrow \infty$, то дифракционная картина исчезает, и мы наблюдаем на экране просто светлое пятно. Значит величину m можно выбрать в качестве критерия.

Пусть h — характерный размер препятствия, запишем его вместо r_m . Вместо m будем писать p , считая его теперь некоторой характеристической величиной. Вспомним, что b — расстояние от препятствия до экрана. Переобозначим его как ℓ .

$$h = \sqrt{p\lambda\ell} \Rightarrow p = \frac{h^2}{\lambda\ell}$$

$$p = \frac{h^2}{\lambda\ell}$$

- При $p \gg 1$ задействовано очень много зон Френеля. Волновые эффекты пренебрежимо малы, работает приближение геометрической оптики.
- Если $p \approx 1$, то вклад в дифракционную картину дают несколько зон Френеля. Это называется дифракцией Френеля.
- При $p \ll 1$ задействована область волнового фронта, меньше, чем одна зона Френеля — дифракция Фраунгофера.

5.5 Дифракция Фраунгофера на щели

5.5.1 Отличие дифракции Фраунгофера от дифракции Френеля

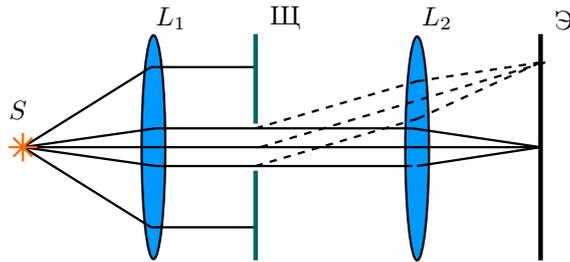
Дифракция Фраунгофера наблюдается, когда источник и экран достаточно удалены от преграды, так что лучи, создающие дифракционную картину, можно считать параллельными.

Условием наблюдения дифракции Фраунгофера является малый размер щели — должно быть задействовано меньше одной зоны Френеля.

5.5.2 Схема установки

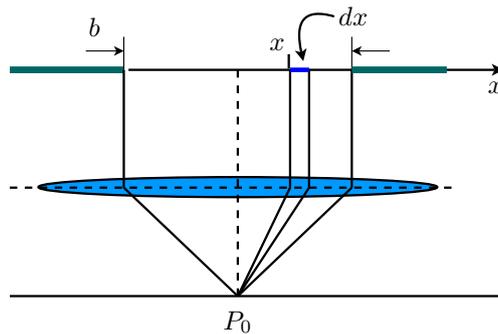
Установка по наблюдению дифракции Фраунгофера состоит из источника света S , собирающей линзы L_1 , щели \mathcal{C} , второй собирающей линзы L_2 и экрана \mathcal{E} .

Источник света находится в фокусе первой линзы, а экран — в фокусе второй. В результате этого, лучи, подвергающиеся дифракции, можно считать параллельными.



5.5.3 Амплитуда колебаний в центре экрана

Пусть на бесконечно длинную щель шириной b падает плоская волна.



Поместим за щелью собирающую линзу и экран в фокальной плоскости линзы. Направим ось x поперёк щели, начало координат поместим в центре щели. Найдём амплитуду колебаний A_0 , создаваемых щелью в центре экрана, в точке P_0 .

Поделим щель на элементарные участки, которые являются источниками вторичных плоских волн. Линза — таутохронная оптическая система, она не привносит разность хода. Значит лучи от каждой точки щели приходят в точку P_0 одновременно.

Следовательно, создаваемые каждой точкой щели в точке P_0 колебания будут синфазны. Поэтому A_0 есть просто алгебраическая сумма амплитуд колебаний вторичных источников.

Отсюда следует, что элементарный участок щели размером dx создаёт в точке P_0 колебания с амплитудой

$$dA = \frac{A_0}{b} dx$$

Вспомним, что согласно принципу Гюйгенса—Френеля элементарный участок даёт следующий вклад в дифракционную картину:

$$dE = K(\varphi) \frac{a_0 dS}{r} \cos(\omega t - kr)$$

В нашем случае дифракционную картину создают плоские волны. Элементарные участки также считаем источниками плоских волн. Поэтому множитель $1/r$ нужно отбросить.

Если рассматривать малые углы дифракции φ , то множитель $K(\varphi)$ можно принять за единицу.

Амплитуда a_0 равна $a_0 = dx A_0 / b$.

Путь лучей от щели до экрана равен ℓ , он одинаков для всех лучей, так как линза обладает свойством таутохронности. Значит слагаемое $k\ell = k\ell$ одинаково для всех точек.

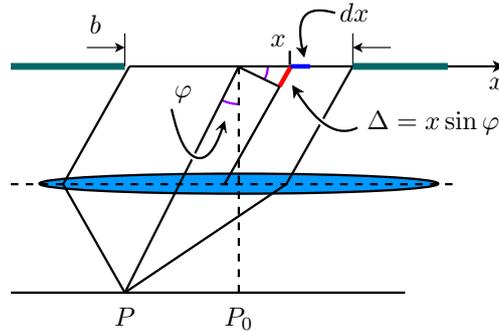
Фактически, это начальная фаза колебаний, а нас будут интересовать разности фаз. Без ограничения общности можно положить начальную фазу равной нулю.

В итоге получаем формулу, описывающую вклад элементарной площадочки в колебания в точке P_0 :

$$(dE)_{P_0} = \frac{A_0}{b} dx \cos(\omega t)$$

5.5.4 Амплитуда колебаний в произвольной точке

Рассмотрим точку P . В эту точку лучи от разных элементарных участков щели приходят со сдвигом фаз.



Примем фазу луча, проходящего через центр щели при $x = 0$, за ноль. От участка $(x, x + dx)$ до P луч проходит путь на $\Delta = x \sin \varphi$ больший, чем центральный луч.

Поэтому у него появляется дополнительный сдвиг по фазе на величину $-k\Delta$. Знак минус, потому что этот луч отстаёт от центрального. Вклад элементарной площадочки dx в колебания в точке P равен:

$$dE = \frac{A_0}{b} dx \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x \sin \varphi \right)$$

Вспомним формулу Эйлера $e^{i\gamma} = \cos \gamma + i \sin \gamma$

Стандартный приём: заменим в формуле косинус на экспоненту, выполним вычисления, а затем возьмём вещественную часть результата. Так мы избежим применения громоздких тригонометрических формул.

$$dE = \frac{A_0}{b} dx \exp \left[i \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x \sin \varphi \right) \right]$$

Вычислим результирующие колебания, создаваемые всей щелью в точке P :

$$E = \int_{-b/2}^{b/2} \frac{A_0}{b} dx \exp \left[i \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x \sin \varphi \right) \right]$$

$$E = \frac{A_0}{b} e^{i\omega t} \int_{-b/2}^{b/2} dx \exp \left(-ix \frac{2\pi}{\lambda} \sin \varphi \right)$$

Для удобства введём обозначение $\gamma = (\pi/\lambda) \sin \varphi$.

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{A_0}{b} e^{i\omega t} \int_{-b/2}^{b/2} dx \exp(-2i\gamma x) = \\
 &= \frac{A_0}{b} e^{i\omega t} \frac{1}{-2i\gamma} \int_{-b/2}^{b/2} d(-2i\gamma x) \exp(-2i\gamma x) = \\
 &= \frac{A_0}{b} e^{i\omega t} \frac{1}{-2i\gamma} \exp(-2i\gamma x) \Big|_{-b/2}^{b/2} = \\
 &= \frac{A_0}{b} e^{i\omega t} \frac{1}{-2i\gamma} \left[\exp\left(-2i\gamma \frac{b}{2}\right) - \exp\left(2i\gamma \frac{b}{2}\right) \right] = \\
 &= \frac{A_0}{b\gamma} e^{i\omega t} \frac{1}{2i} [e^{i\gamma b} - e^{-i\gamma b}] \\
 E &= \frac{A_0}{b\gamma} \sin(\gamma b) e^{i\omega t}
 \end{aligned}$$

Множитель перед $e^{i\omega t}$ — это амплитуда колебаний в точке P , направление на которую задаётся углом φ .

$$A_\varphi = \frac{A_0}{b\gamma} \sin(\gamma b)$$

$$A_\varphi = A_0 \frac{\sin[(b\pi/\lambda) \sin \varphi]}{(b\pi/\lambda) \sin \varphi}$$

$$I_\varphi = I_0 \left\{ \frac{\sin[(b\pi/\lambda) \sin \varphi]}{(b\pi/\lambda) \sin \varphi} \right\}^2$$

6 Дифракция Фраунгофера

6.1 Условие минимумов и максимумов

Чтобы определить положения максимумов и минимумов, вычислим $dI_\varphi/d\varphi = 0$:

$$\cos \varphi \times \sin[(b\pi/\lambda) \sin \varphi] \times \{ \sin[(b\pi/\lambda) \sin \varphi] - (b\pi/\lambda) \sin \varphi \cos[(b\pi/\lambda) \sin \varphi] \} = 0$$

Первый множитель $\cos \varphi$ обращается в ноль при $\varphi = \pi/2$ — направление вдоль экрана. Это значит, что в точках, бесконечно удалённых от центра экрана, интенсивность обращается в ноль.

Второй множитель $\sin[(b\pi/\lambda) \sin \varphi]$ стоит в числителе выражения для I_φ . Он обращается в ноль при

$$(b\pi/\lambda) \sin \varphi = \pm n\pi \Rightarrow \boxed{b \sin \varphi = \pm n\lambda, \quad n = 0, 1, 2, \dots}$$

и при этом интенсивность также обращается в ноль. Отсюда делаем вывод, что это — условия минимумов. За максимумы отвечает последний множитель:

$$\operatorname{tg}[(b\pi/\lambda) \sin \varphi] = (b\pi/\lambda) \sin \varphi$$

Очевидное решение $\varphi = 0$. Значит, при дифракции Фраунгофера на щели в центре экрана всегда максимум (а при дифракции Френеля это не так).

При $\varphi \rightarrow 0$ числитель и знаменатель в формуле для интенсивности стремятся к нулю. Однако, используя правило Лопиталя, можно получить, что $I_{\varphi=0} = I_0$.

Общее решение уравнения для максимумов нельзя записать в виде простой формулы. На практике такие уравнения решают численно.

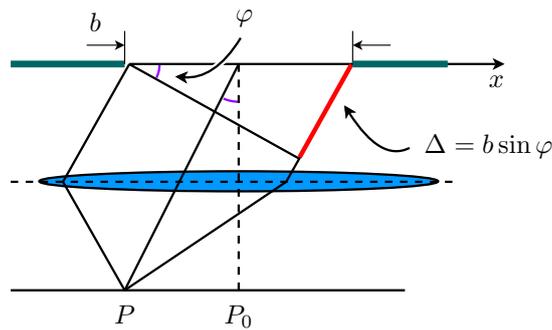
Приближённо можно считать, что максимумы находятся посередине между минимумами. Это значит, что приближённое условие максимумов имеет вид:

$$\boxed{b \sin \varphi = \pm (2m + 1)\lambda/2, \quad m = 1, 2, 3, \dots}$$

6.2 Векторные диаграммы для минимумов и максимумов

6.2.1 Векторные диаграммы для щели

Условия максимумов и минимумов можно объяснить при помощи векторных диаграмм.



Величина $b \sin \varphi$ — это разность хода между лучами, проходящими у краёв щели.

Изобразим вклады элементарных участков щели векторами. Они могут быть повернуты друг относительно друга на угол, зависящий от угла дифракции φ .

6.2.2 Центр экрана

Напомним, что в отличие от дифракции Френеля, теперь мы считаем испускаемые элементарными участками волны плоскими, и следовательно, все вектора имеют одинаковую длину.

В точке $\varphi = 0$ в центре экрана все элементарные участки дают одинаковые вклады без сдвига по фазе. Их сумма даёт самый высокий центральный максимум \vec{A}_0 .



6.2.3 Точка, немного смещённая от центра

Здесь цепочка векторов изгибается вверх.

В точке $b \sin \varphi = \lambda/2$ разность фаз между краями щели

$$\delta = \pi$$

Векторная диаграмма для всей щели в этом случае:



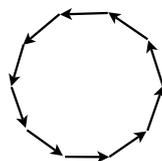
По сравнению с точкой $\varphi = 0$ здесь амплитуда меньше, однако это пока не минимум. В точке $b \sin \varphi = \lambda/2$ нет ни минимума ни максимума. Именно поэтому в формуле для максимумов $b \sin \varphi = (2m + 1)\lambda/2$ мы отсчитываем m от единицы, а не от нуля.

6.2.4 Точки минимума

Здесь разность хода $b \sin \varphi = n\lambda$ соответствует разности фаз

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} n\lambda = 2\pi n$$

Элементарные вектора совершают n оборотов и конец последнего (правый край щели) совпадает с началом первого (левый край). В итоге $\vec{A}_\varphi = 0$:



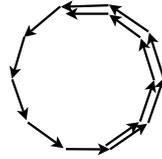
Иными словами, потребовав, чтобы для заданного φ разность хода между краями щели была равна $n\lambda$, мы увидели, что такому углу дифракции действительно соответствует минимум освещённости.

6.2.5 Точки максимума

Максимумам соответствует условие $b \sin \varphi = m\lambda + \lambda/2$, чему соответствует разность фаз

$$\delta = 2\pi m + \pi$$

На векторной диаграмме m полных оборотов и половина:



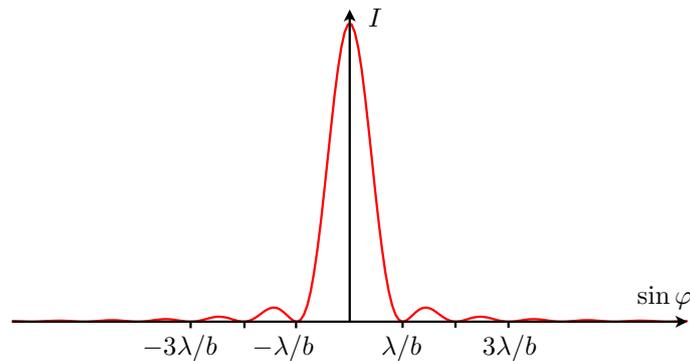
Сложив все элементарные вектора, мы увидим, что этому условию, действительно, соответствует интерференционный максимум.

Чтобы аналогично рассмотреть точки справа от центра, нужно брать знаки «-» в формулах для минимумов и максимумов.

6.3 Кривая распределения интенсивности

В целом кривая распределения интенсивности света на экране в результате дифракции на щели имеет вид

$$I_{\varphi} = I_0 \left\{ \frac{\sin[(b\pi/\lambda) \sin \varphi]}{(b\pi/\lambda) \sin \varphi} \right\}^2$$



Интенсивность центрального максимума намного больше всех прочих.

6.4 Дифракционная решётка

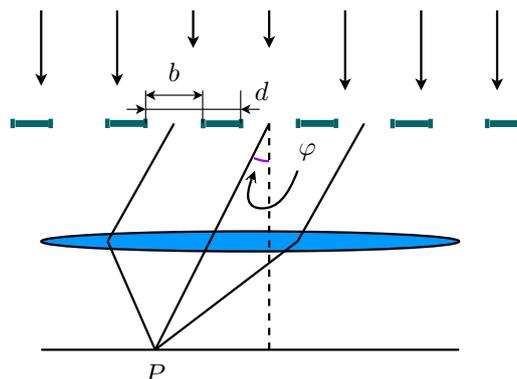
Дифракционная решётка

это оптический прибор, используемый для изучения спектрального состава света и определения длин волн.

Она представляет собой стеклянную или металлическую пластину, на которую нанесено много прямых равноотстоящих штрихов одинаковой конфигурации, например, щелей.

При прохождении светом решётки реализуется многолучевая интерференция когерентных дифрагирующих пучков света, исходящих из щелей решётки.

Дифракционную картину на экране наблюдают по методу Фраунгофера.



Предполагается, что свет падает на решётку нормально (перпендикулярно).

Расстояние между щелями d называется периодом решётки, b — ширина щели решётки, φ — угол дифракции, N число освещённых щелей решётки.

Если бы волны, исходящие от разных щелей не были бы когерентными друг другу, то каждая щель создавала бы на экране распределение минимумов и максимумов. Так как щели расположены достаточно близко, то эти распределения накладывались бы друг на друга, и возникала бы картина как при дифракции на одной щели, только интенсивности возросли бы в N раз.

Почему возросли бы в N раз интенсивности, а не амплитуды? Сейчас мы говорим о некогерентных колебаниях. Поэтому складывать нужно именно интенсивности.

На самом деле, картина будет иной. Так как размеры решётки обычно меньше ширины когерентности, то картина на экране возникает в результате действия двух факторов.

- Интерференция между элементарными участками волнового фронта в пределах *одной* щели (как и в случае дифракции на щели).
- Интерференция между одинаковыми участками волнового фронта *разных* щелей.

6.5 Условие главных минимумов

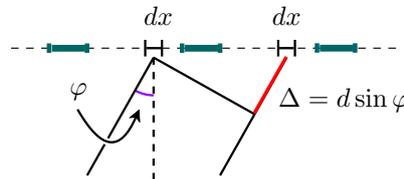
Выше мы обсуждали, что в случае, если для точки P разность хода лучей от двух краёв одной щели равна целому числу λ , то волна, исходящая от всей щели, гасит сама себя в этой точке экрана.

Для дифракционной решётки это выполняется при одном и том же значении φ для всех щелей. Поэтому условие главных минимумов для решётки совпадает с условием минимумов для щели:

$$b \sin \varphi = \pm n\lambda, \quad n = 1, 2, \dots$$

6.6 Условие главных максимумов

Рассмотрим два элементарных участка волнового фронта dx , взятых одинаковым образом на соседних щелях. Расстояние между ними будет равно d . Разность хода исходящих от них лучей равна $\Delta = d \sin \varphi$.



Пусть для некоторой точки экрана P выполняется

$$d \sin \varphi = m\lambda, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Тогда лучи будут приходить в точку P сдвинутыми по фазе на $(2\pi/\lambda)m\lambda = 2m\pi$. Это эквивалентно отсутствию сдвига по фазе, т. е. лучи будут усиливать друг друга. Иными словами, мы получили условие максимума.

Так как условие максимума будет выполняться для всех щелей, то в точке P амплитуда колебаний будет равна

$$A_{\text{макс}} = NA_1$$

где A_1 — амплитуда колебаний в точке P от одной щели.

Значит, интенсивность в точке главного максимума:

$$I_{\text{макс}} = N^2 I_1$$

Так как ширина щели не может быть больше периода решётки, $b < d$, то получается, что главные максимумы расположены чаще, чем главные минимумы. Но минимумы и максимумы должны чередоваться. Следовательно, кроме главных существуют ещё побочные минимумы и максимумы.

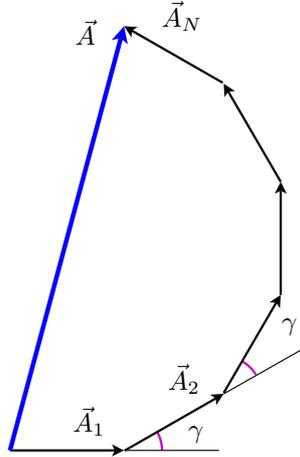
6.7 Побочные минимумы

Рассмотрим вклад в колебания в точке P каждой щели как целого. Обозначим амплитуду колебаний, создаваемых i -ой щелью в точке P как \vec{A}_i .

Все вектора \vec{A}_i , соответствующие разным щелям, равны по модулю и повернуты друг относительно друга на один и тот же угол γ .

$$\gamma = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \varphi$$

Результирующий вектор \vec{A} , равный сумме этих векторов, можно найти при помощи векторной диаграммы.



При увеличении Δ угол γ будет расти, а цепочка закручиваться. При $N\gamma = 2\pi n$ цепочка замкнется. Тогда $\vec{A} = 0$, т. е. мы получим минимум.

$$\gamma_{\text{мин}} = \frac{2\pi n}{N} \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \varphi = \frac{2\pi n}{N}$$

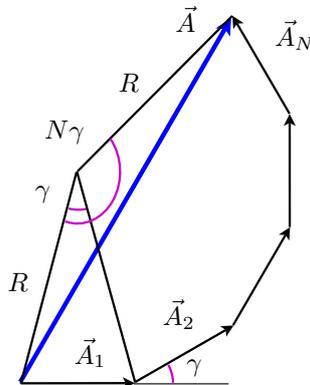
$$d \sin \varphi = \lambda \frac{n}{N}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, n \neq 0, N, 2N, 3N, \dots$$

При n , равном нулю или кратном N , вектора \vec{A}_i параллельны друг другу. Тогда они не гасят, а наоборот, усиливают друг друга — получаем условие главных максимумов.

Между 0 и N n принимает $N - 1$ значений. Следовательно, между каждой парой главных максимумов имеется $N - 1$ побочных минимумов. Между ними находятся $N - 2$ побочных максимума. Однако их интенсивности пренебрежимо малы.

6.8 Распределение интенсивности

Снова рассмотрим векторную диаграмму для колебаний, создаваемых в точке P отдельными щелями. Опишем вокруг векторов окружность. Она будет иметь радиус R .



Из этой диаграммы можно найти A_1 и A :

$$A_1 = 2R \sin(\gamma/2), \quad A = 2R \sin(N\gamma/2), \quad \gamma = (2\pi d/\lambda) \sin \varphi,$$

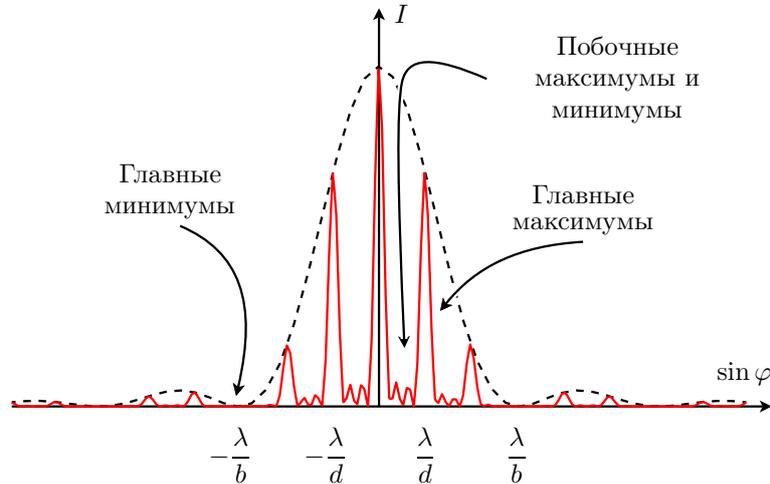
$$A = A_1 \frac{\sin(N\gamma/2)}{\sin(\gamma/2)} = A_1 \frac{\sin[(N\pi d/\lambda) \sin \varphi]}{\sin[(\pi d/\lambda) \sin \varphi]}$$

Изучая дифракцию на одной щели, мы определили амплитуду колебаний, создаваемых всей щелью в точке P :

$$A_1 = A_0 \frac{\sin[(b\pi/\lambda) \sin \varphi]}{(b\pi/\lambda) \sin \varphi}$$

где A_0 — амплитуда колебаний, создаваемых одной щелью напротив центра линзы.

$$I = I_0 \left\{ \frac{\sin[(b\pi/\lambda) \sin \varphi]}{(b\pi/\lambda) \sin \varphi} \right\}^2 \left\{ \frac{\sin[(N\pi d/\lambda) \sin \varphi]}{\sin[(\pi d/\lambda) \sin \varphi]} \right\}^2$$



Первая дробь в этой формуле описывает пунктирную огибающую кривую: дифракция на каждой щели в отдельности.

Вторая дробь описывает многолучевую интерференцию, которая создается совместным действием одинаковых участков всех N щелей.

Наиболее важными являются главные максимумы, расположенные между первыми главными минимумами, так как они наиболее яркие. Побочные максимумы практически незаметны — их интенсивность примерно 4% от интенсивности главных максимумов.

Если d кратно b , то главные минимумы попадают на некоторые главные максимумы и гасят их.

7 Поляризация. Преломление. Двойное лучепреломление

7.1 Понятие поляризации. Виды поляризации

7.1.1 Определение

Поляризованной

называют волну, у которой направление колебаний вектора \vec{E} упорядочено каким-либо образом.

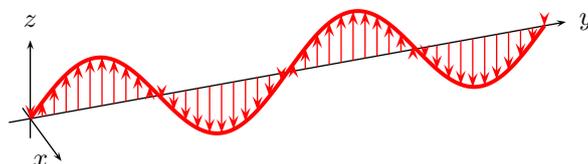
Виды поляризации

- линейная,
- круговая (или циркулярная),
- эллиптическая.

7.1.2 Линейная поляризация

Свет называют линейно- или плоскополяризованным.

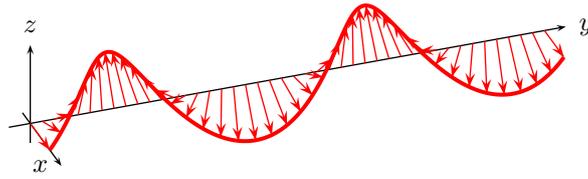
Плоскость, в которой колеблется вектор \vec{E} , называется плоскостью поляризации. На рисунке плоскость поляризации совпадает с плоскостью yz .



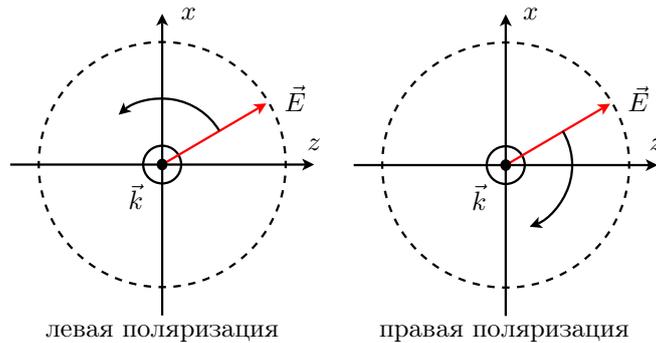
7.1.3 Круговая поляризация

Свет называют циркулярно поляризованным или поляризованным по кругу.

При наблюдении в определенной точке пространства вектор вращается с частотой ω , равной частоте самой волны, модуль вектора \vec{E} не меняется.



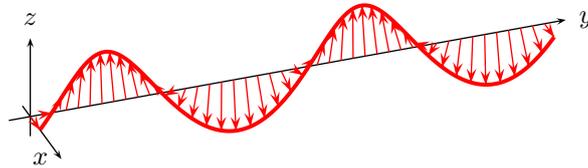
Вектор \vec{E} может вращаться в разные стороны. Если смотреть навстречу световому лучу, то вращение по часовой стрелке называется правой поляризацией, а против часовой — левой.



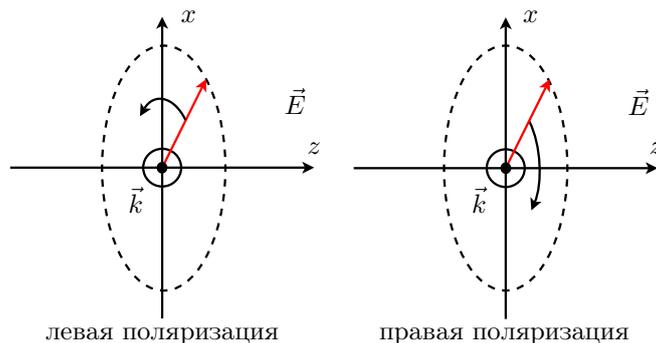
7.1.4 Эллиптическая поляризация

Свет называют эллиптически поляризованным.

Вектор в каждой точке пространства, в котором распространяется электромагнитная волна, вращается с частотой ω , конец вектора описывает эллипс, т. е. модуль вектора меняется. Эллиптическая поляризация — наиболее общий вид поляризации.



Так же как и в случае круговой поляризации, различают левую и правую эллиптические поляризации.



7.2 Неполаризованный и частично поляризованный свет

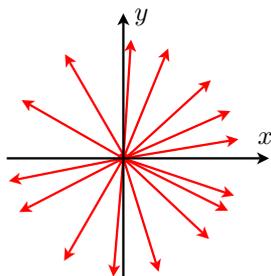
7.2.1 Естественный свет

Естественный свет — это свет, испускаемый нелазерными источниками (раскаленными телами, раскаленными газами, дуговым разрядом).

Излучение светящегося тела складывается из волн, испускаемых его атомами. Излучение отдельного атома продолжается $\tau \sim 10^{-8}$ с и представляет фрагмент волны, называемый цугом. Протяжённость цуга может быть порядка $c\tau \sim 3$ м.

Излучив, атом через некоторое время вновь переходит в возбужденное состояние и излучает опять. Одновременно излучает множество атомов. Порожденные ими цуги волн, накладываясь друг на друга, образуют испускаемую телом световую волну.

Направления колебаний для каждого цуга ориентированы случайным образом. Следовательно, и результирующий вектор \vec{E} будет менять своё направление случайным образом.

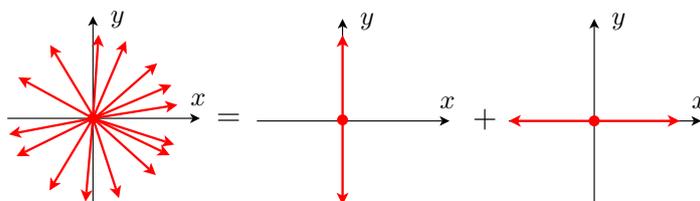


В каждой точке пространства направление колебаний сохраняется в течение очень короткого времени, а затем меняется на другое. Все направления колебаний электрического вектора равновероятны. Такой свет называется неполяризованным

7.2.2 Интенсивность естественного света

Выберем произвольно направления координатных осей так, чтобы ось z была направлена вдоль луча света.

Тогда световой вектор в каждый момент времени можно представить как сумму двух составляющих — вдоль осей x и y .



Случайные изменения светового вектора можно представить как сумму двух плоскополяризованных компонент — E_x и E_y таких, что E_x и E_y меняются случайным образом (не по закону синусов, как это было в простейшем случае) и при этом меняются независимо друг от друга.

Человеческий глаз и оптические приборы регистрируют энергию светового вектора независимо от его ориентации в пространстве. Следовательно, интенсивность естественного света можно представить как сумму интенсивностей компонент по x и по y .

Так как все направления равновероятны, то интенсивности x - и y -компонент будут равны друг другу.

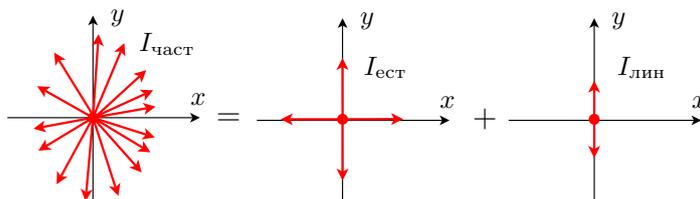
$$I_{\text{ест}} = I_x + I_y, \quad I_x = I_y = I/2$$

7.2.3 Частично поляризованный свет

Помимо плоскополяризованного и естественного света, существует еще промежуточный случай — частично поляризованный свет.

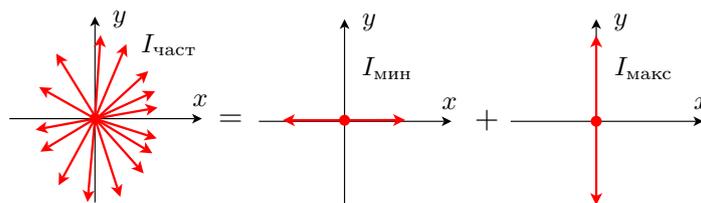
Его можно представить как сумму естественного света интенсивностью $I_{\text{ест}}$ и линейно-поляризованного интенсивностью $I_{\text{лин}}$,

$$I_{\text{част}} = I_{\text{ест}} + I_{\text{лин}}$$



Или как сумму двух плоскополяризованных волн со взаимно перпендикулярными плоскостями поляризации, различной интенсивности и с несвязанными фазами.

$$I_{\text{част}} = I_{\text{мин}} + I_{\text{макс}}$$



Частично поляризованный свет характеризуют степенью поляризации, которую определяют как:

$$P = \frac{I_{\text{макс}} - I_{\text{мин}}}{I_{\text{макс}} + I_{\text{мин}}}$$

7.3 Поляризаторы

7.3.1 Определение

Поляризаторы

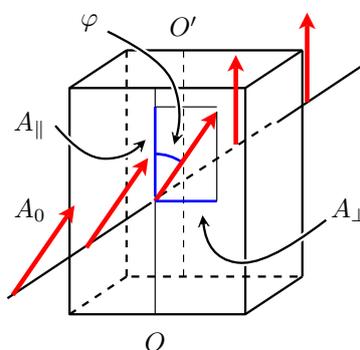
это приборы, с помощью которых из естественного света получают линейно-поляризованный.

Поляризаторы свободно пропускают колебания светового вектора, параллельные плоскости, которая называется плоскостью пропускания.

Колебания, перпендикулярные плоскости пропускания поляризатора, задерживаются. Если они задерживаются полностью, то поляризатор называется идеальным. Неидеальный поляризатор задерживает колебания в перпендикулярной плоскости только частично.

7.3.2 Закон Малюса для идеального поляризатора

Пусть на идеальный поляризатор падает линейно-поляризованный свет с амплитудой A_0 .



Световой вектор образует угол φ с плоскостью пропускания OO' . Поляризатор пропускает только составляющую A_{\parallel} , а составляющую A_{\perp} задерживает (поглощает).

$$A_{\parallel} = A_0 \cos \varphi \Rightarrow \boxed{I = I_0 \cos^2 \varphi}$$

Закон Малюса

Интенсивность линейно поляризованного света, прошедшего через идеальный поляризатор, уменьшается как квадрат косинуса угла между плоскостью поляризации и плоскостью пропускания.

7.3.3 Прохождение естественного света через поляризатор

Вспомним, что естественный свет можно представить как сумму двух несогласованных компонент, поляризованных линейно в двух перпендикулярных плоскостях.

Направления этих плоскостей поляризации можно выбрать как угодно. Интенсивность естественного света равна:

$$I_{\text{ест}} = I_x + I_y, \quad I_x = I_y = I/2$$

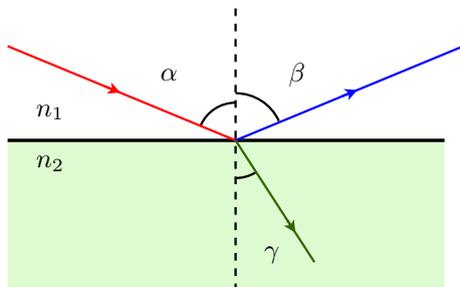
Если естественный свет падает на поляризатор, то одна из компонент задерживается. Следовательно, интенсивность естественного света, прошедшего через поляризатор уменьшается в два раза:

$$I = I_{\text{ест}}/2$$

7.4 Преломление света

7.4.1 Закон преломления Снеллиуса

Пусть свет падает на границу раздела двух прозрачных диэлектриков с показателями преломления n_1 и n_2 .



- α — угол падения
- β — угол отражения
- γ — угол преломления

Угол падения всегда равен углу отражения, $\alpha = \beta$.

Закон Снеллиуса для углов падения и преломления:

$$\sin \alpha / \sin \gamma = n_2 / n_1$$

7.4.2 Закон Брюстера

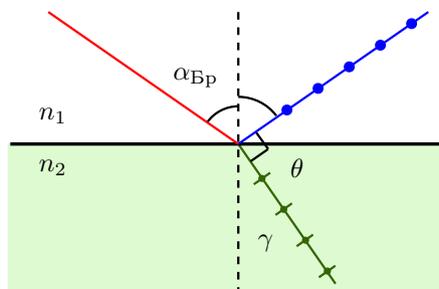
Если угол падения отличен от нуля, то отраженный и преломленный лучи частично поляризованы.

В отраженном луче преобладают колебания вектора, перпендикулярные плоскости падения.

В преломлённом свете преобладают колебания, параллельные плоскости падения. (Плоскость падения — плоскость, проходящая через падающий луч и нормаль к границе раздела двух сред).

Существует угол падения, называемый углом Брюстера, при котором отражённый свет полностью поляризован. Световой вектор отражённого луча строго перпендикулярен плоскости падения.

Преломлённый луч при этом поляризуется не полностью, однако степень его поляризации достигает максимального значения.



Угол Брюстера определяется из следующего выражения:

$$\text{tg } \alpha_{\text{Бр}} = n_2 / n_1$$

Угол Брюстера $\alpha_{\text{Бр}}$ называют также углом полной поляризации.

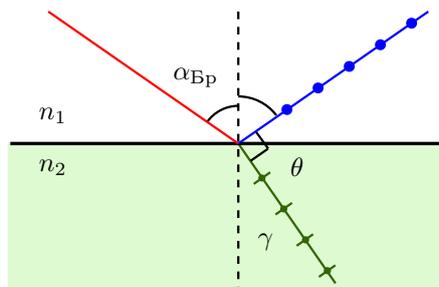
Вычислим угол θ между отражённым и преломлённым лучами при угле падения $\alpha_{\text{Бр}}$.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_{\text{Бр}} &= \frac{\sin \alpha_{\text{Бр}}}{\cos \alpha_{\text{Бр}}} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin \alpha_{\text{Бр}}}{\sin \gamma} \\ \cos \alpha_{\text{Бр}} &= \sin \gamma \end{aligned}$$

Используем формулу приведения $\sin \gamma = \cos(90^\circ - \gamma)$

$$\begin{aligned} \cos \alpha_{\text{Бр}} &= \cos(90^\circ - \gamma) \Rightarrow \alpha_{\text{Бр}} = 90^\circ - \gamma \\ \alpha_{\text{Бр}} + \gamma &= 90^\circ \Rightarrow \theta = 90^\circ \end{aligned}$$

Мы получили, что при падении света под углом Брюстера, преломленный и отраженный лучи ортогональны.



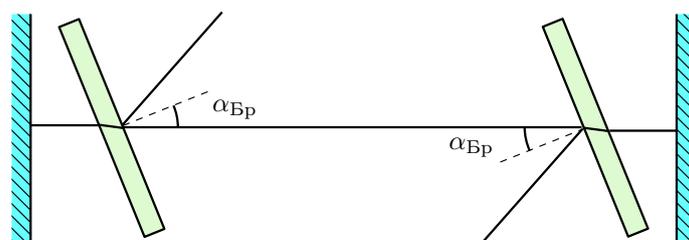
7.4.3 Поляризатор на основе эффекта Брюстера

При падении света на границу раздела двух сред под углом Брюстера отражённый луч полностью поляризован. Однако при падении света под углом Брюстера коэффициент отражения обычно достаточно мал. (Коэффициент отражения — отношение амплитуды отражённого света к амплитуде падающего.)

Для стекла угол Брюстера примерно равен 56° , а коэффициент отражения при таком угле падения около 0.1. Это значит, что амплитуда отражённого луча в 10 раз меньше падающего.

Поэтому для создания поляризованного света используют преломлённый, а не отражённый луч. Для повышения степени поляризации преломление под углом Брюстера повторяют многократно. Эта идея, в частности, используется в газовых лазерах.

Торцы газоразрядной трубки представляют собой плоскопараллельные стеклянные пластинки, расположенные под углом Брюстера к оси трубки. За этими пластинками расположены зеркала.



Излучение поляризуется в результате многократных преломлений под углом Брюстера. Отражённые лучи удаляются из резонатора.

7.5 Двойное лучепреломление

7.5.1 Определение

Двойное лучепреломление

это эффект расщепления светового луча на две составляющие, которые распространяются в разных направлениях и с разными скоростями.

Двойное лучепреломление возникает в анизотропных средах.

Анизотропная среда — среда, свойства которой разные в разных направлениях. В первую очередь, речь идёт о кристаллах. Анизотропны все кристаллы, у которых решётка не имеет кубической симметрии.

7.5.2 Одно- и двуосные кристаллы

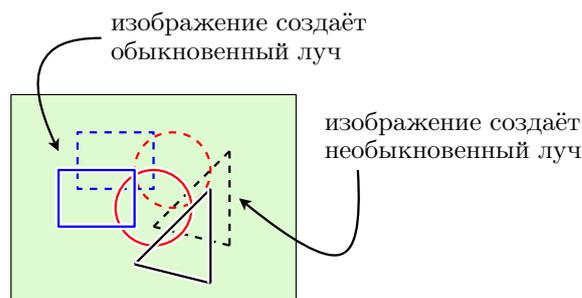
Существуют кристаллы одноосные и двуосные. У одноосных кристаллов один из преломленных пучков подчиняется закону Снеллиуса. Его называют обыкновенным и обозначают индексом «о».

Другой пучок не подчиняется закону Снеллиуса и даже при нормальном падении света на поверхность кристалла необыкновенный пучок может отклоняться от нормали. Как правило, необыкновенный пучок не лежит в плоскости падения. Необыкновенный луч обозначают индексом «е».

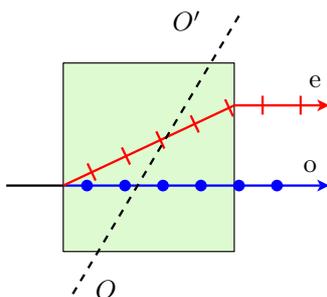
У двуосных кристаллов оба луча необыкновенные. В качестве примера кристаллов с двойным лучепреломлением можно привести исландский шпат, турмалин, кварц. У последнего особенно сильное двойное лучепреломление. Мы будем рассматривать только одноосные кристаллы.

7.5.3 Расщепление света на обыкновенный и необыкновенные пучки

На рисунке показано, как изображение предметов раздваивается при наблюдении их через кристалл с двойным лучепреломлением.



Раздвоение картинки происходит из-за расщепления световых лучей, как показано на рисунке.



7.5.4 Оптическая ось и главная плоскость кристалла

Оптическая ось OO' показывает выделенное направление в кристалле, вдоль которого оба луча распространяются, не разделяясь и с одинаковой скоростью.

Любая плоскость, проходящая через оптическую ось, называется главной плоскостью кристалла (главной плоскостью). Обычно под главной плоскостью понимают плоскость, проходящую через световой луч и оптическую ось.

На рисунке выше главное сечение совпадает с плоскостью рисунка.

7.5.5 Поляризация обыкновенного и необыкновенного пучков

Обыкновенный и необыкновенный лучи линейно поляризованы. У обыкновенного луча «о» вектор \vec{E}_o колеблется перпендикулярно главному сечению, у необыкновенного луча «е» вектор \vec{E}_e колеблется в плоскости главного сечения.

Вектора \vec{E}_o и \vec{E}_e , строго говоря, могут быть не взаимно перпендикулярными. Но так как угол между о- и е-лучами очень мал, то считают, что они взаимно перпендикулярны.

7.5.6 Дихроизм

Двойному лучепреломлению соответствует явление дихроизма, при котором один из лучей поглощается гораздо сильнее. Например, кристалл турмалина практически полностью поглощает о-луч на длине около 1мм.

На основе этого явления делают кристаллические поляроиды. На прозрачную тонкую пленку наносят определенным образом сориентированные кристаллы турмалина. При прохождении через поляризатор обыкновенный луч света поглощается, и на выходе получается поляризованный свет.

8 Двойное лучепреломление. Дисперсия

8.1 Природа двойного лучепреломления

8.1.1 Качественное объяснение

Причина двойного лучепреломления — анизотропия кристалла. Вспомним, что скорость света в веществе равна $v = c/n$, где n — показатель преломления.

У одноосных кристаллов n зависит от угла между вектором \vec{E} и главной осью.

Если луч естественного, т. е. неполяризованного, света распространяется вдоль главной оси, то \vec{E} всегда остаётся перпендикулярным оси.

В этом случае распространение происходит как в обычном, изотропном, веществе.

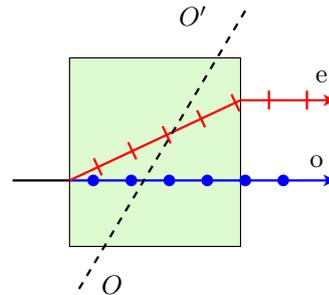
Если луч естественного света распространяется под некоторым углом к главной оси, то он расщепляется на два.

У одной из составляющих вектор \vec{E} лежит перпендикулярно главной плоскости (это плоскость, проходящая через луч и главную ось).

У этого луча по-прежнему \vec{E} перпендикулярен главной оси и поэтому он распространяется также, как и вдоль главной оси — обыкновенный луч.

Скорость обыкновенного луча $v_o = c/n_o$ всегда одинакова.

Необыкновенный луч — это компонента исходного луча, у которой вектор \vec{E} лежит в главной плоскости. В зависимости от угла луча с главной осью, угол между \vec{E} и осью будет разным и значит скорость этого луча будет также будет разной, $v_e = c/n_e$.

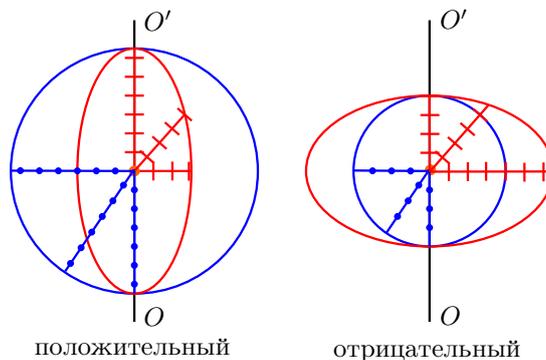


8.1.2 Поверхности лучевых скоростей или волновая поверхность

Поместим в центре кристалла точечный источник света.

Для обыкновенной волны скорость во всех направлениях одинакова — волновая поверхность сферическая.

Для необыкновенной волны скорость зависит от направления и волновая поверхность есть эллипсоид вращения.



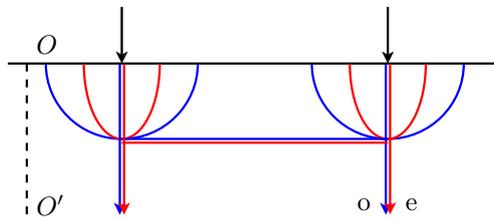
Два случая:

- Положительный кристалл: скорость необыкновенного луча v_e меньше или равна скорости обыкновенного v_o .
- Отрицательный кристалл: $v_e \geq v_o$.

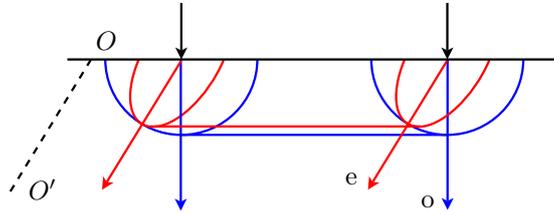
8.1.3 Построения с помощью принципа Гюйгенса

Принцип Гюйгенса утверждает, что каждая точка волновой поверхности является источником вторичной волны. Считаем фронт падающей волны плоский.

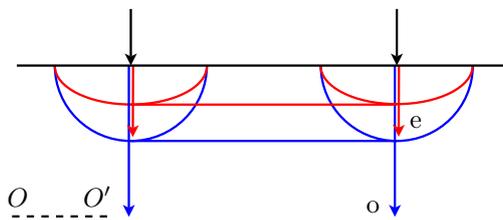
Пусть главная ось перпендикулярна поверхности. Тогда волновые поверхности для о- и е-лучей совпадают.



Главная ось направлена под углом к поверхности: происходит расщепление луча на обыкновенный и необыкновенный.



Главная ось параллельна поверхности. Волновые поверхности для о- и е-лучей совпадают, следовательно лучи распространяются в одном направлении. Однако скорости лучей разные.



8.2 Получение эллиптической поляризации

8.2.1 Ориентация оптической оси и плоскости поляризации луча

Рассмотрим кристаллическую пластинку, которая вырезана, так, что оптическая ось параллельна поверхности.

Обыкновенный и необыкновенный лучи распространяются в одном направлении, но с разными скоростями.

Пусть на поверхность этой пластинки нормально падает линейно поляризованный свет.

В кристалле луч разделится на два луча, имеющих взаимно перпендикулярные \vec{E}_o и \vec{E}_e .

8.2.2 Разложение на обыкновенную и необыкновенную компоненты

Колебания у поверхности кристалла:

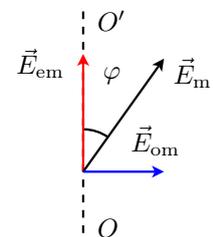
$$\vec{E}_o = \vec{E}_{om} \cos(\omega t)$$

$$\vec{E}_e = \vec{E}_{em} \cos(\omega t)$$

Амплитуды \vec{E}_{om} и \vec{E}_{em} зависят от ориентации плоскости поляризации падающего луча по отношению к оптической оси.

$$E_{om} = E_m \sin \varphi$$

$$E_{em} = E_m \cos \varphi$$



8.2.3 Длины волн обыкновенной и необыкновенной компонент

Показатели преломления для лучей разные, n_o и n_e .

Вспомним, что в диэлектрике длина волны света меняется в n раз.

Значит длины волн и волновые числа $k = 2\pi/\lambda$ у обыкновенного и необыкновенного лучей будут разными:

$$\lambda_o = \lambda_{\text{вак}}/n_o, k_o = k_{\text{вак}}n_o$$

$$\lambda_e = \lambda_{\text{вак}}/n_e, k_e = k_{\text{вак}}n_e$$

где индекс «вак» означает величину в вакууме.

8.2.4 Возникновения сдвига по фаз

Пусть толщина кристалла равна ℓ . Колебания на выходе из кристалла будут иметь вид:

$$\vec{E}_o = \vec{E}_{om} \cos(\omega t - k_o \ell), \quad \vec{E}_e = \vec{E}_{em} \cos(\omega t - k_e \ell)$$

Лучи выходят из пластинки с разностью фаз

$$\delta = k_o \ell - k_e \ell = k_{\text{вак}} \ell (n_o - n_e) = k_{\text{вак}} \Delta$$

где $\Delta = \ell(n_o - n_e)$ — оптическая разность хода.

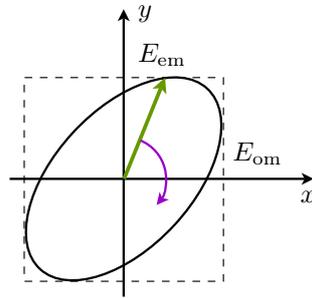
Следовательно, световые колебания на выходе можно представить в виде:

$$E_x = E_{om} \cos(\omega t)$$

$$E_y = E_{em} \cos(\omega t + \delta)$$

8.2.5 Варианты поляризации

Характер поляризации зависит от δ , т. е. в первую очередь от толщины пластинки.



- Если $0 < \delta < \pi$, то сначала E_y , а затем E_x достигают максимального значения — вектор вращается по часовой стрелке, поляризация правая.
- Если $-\pi < \delta < 0$, то поляризация левая.
- Если угол между плоскостью поляризации падающего луча и оптической осью равен $\varphi = 45^\circ$, то поляризация вырождается в круговую.
- Если $\delta = m\pi$, где m — целое, нечётное, то из пластинки выходит линейно поляризованный свет. Направление колебаний вектора \vec{E} поворачивается на угол 2φ . Если при этом $\varphi = 45^\circ$, то пластинка поворачивает плоскость поляризации на 90° .
- Если разность фаз $\delta = m\pi$, где m — чётное, то поляризация не меняется.

8.2.6 Кристаллические пластинки

- Пластинка в четверть волны: $\ell(n_o - n_e) = \pm(m + 1/4)\lambda_{\text{вак}}$, где $m = 1, 2, 3, \dots$. При выходе из такой пластинки колебания векторов E_o и E_e сдвинуты по фазе на $\delta = \pi/2$. Если при этом $\varphi = 45^\circ$, то выходящий свет циркулярно поляризован.
- Пластинка в полволны: $\ell(n_o - n_e) = \pm(m + 1/2)\lambda_{\text{вак}}$. Вектора E_o и E_e сдвинуты по фазе на $\delta = \pi$. Свет на выходе линейно поляризован, но плоскость поляризации повернута, см. выше.
- Пластинка в целую волну: $\ell(n_o - n_e) = \pm m\lambda_{\text{вак}}$. При прохождении такой пластинки свет остается линейно-поляризованным в той же плоскости, что и падающий свет.

8.3 Дисперсия света

8.3.1 Понятие дисперсии

Дисперсией света

называют явления, обусловленные зависимостью показателя преломления вещества от длины световой волны:

$$n = f(\lambda_{\text{вак}})$$

где $\lambda_{\text{вак}}$ — длина световой волны в вакууме.

Дисперсией вещества

называется производная n по $\lambda_{\text{вак}}$. Если $dn/d\lambda_{\text{вак}} = 0$, то $n = \text{const}$ — дисперсия отсутствует. В противном случае говорят, что среда обладает дисперсией (является диспергирующей).

8.3.2 Качественное объяснение

Явление дисперсии объясняется тем, что электромагнитная волна воздействует на электронные облака атомов и они начинают колебаться.

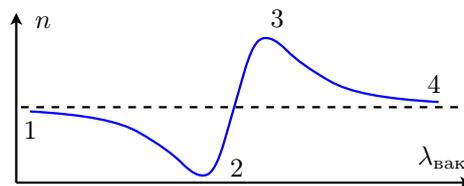
Колеблющиеся электронные облака создают вторичные электромагнитные волны.

Наложение исходных и вторичных электромагнитных волн приводит к тому, что изменяется амплитуда, фаза и скорость результирующей волны.

Так как амплитуда и фаза колебаний электронных облаков зависит от частоты света, то свет с разной частотой и длиной волны распространяется в веществе с разными скоростями.

8.3.3 Типичная кривая дисперсии

Типичная зависимость $n = f(\lambda_{\text{вак}})$ показана на рисунке.



На участках 1 — 2 и 3 — 4 дисперсия нормальная. С уменьшением длины волны показатель преломления увеличивается, так что дисперсия вещества $dn/d\lambda_{\text{вак}}$ отрицательна.

Участок 2 — 3 — аномальная дисперсия. Аномальная дисперсия соответствует волнам, которые наиболее эффективно взаимодействуют с атомами вещества.

8.3.4 Эффекты связанные с дисперсией

- Классический опыт Ньютона по разложению белого света в спектр связан с явлением дисперсии: в белом свете присутствуют лучи с разными длинами волн, которые, проходя через призму, преломляются по-разному. Радуга также объясняется дисперсией солнечного света на капельках воды.
- Благодаря дисперсии света, можно наблюдать цветную «игру света» на гранях бриллианта и других прозрачных гранёных предметов или материалов.
- Игра света на бриллиантах проявляется очень сильно (именно поэтому он так ценится). Это обусловлено тем, что он во-первых имеет очень высокий средний показатель преломления $n = 2.42$ (против $n = 1.5$ у стекла), который сильно зависит от длины волны. Во-вторых бриллиант обладает высокой прозрачностью, т. е. мало поглощает.
- При передачи сигналов через световоды дисперсия выступает как паразитный фактор. Из-за дисперсии снижается диапазон частот, которые можно передавать по оптическому волокну. Следствие этого — уменьшение объёма информации, передаваемого волокном в единицу времени. Также дисперсия ограничивает дальность передачи сигналов по световодам.

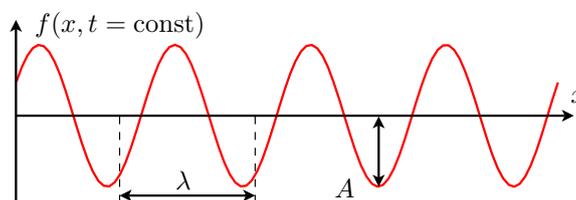
8.3.5 Фазовая скорость

Вспомним, что элементарная волна

$$E = A \cos(\omega t - kx + \alpha)$$

представляет собой бесконечную во времени и в пространстве последовательность «горбов» и «впадин».

Мгновенный снимок волны в некоторый момент времени показан на рисунке.



Каждый горб и каждая впадина двигаются с фазовой скоростью $v_{\text{фаз}}$:

$$v_{\text{фаз}} = \omega/k$$

Скорость света c есть фазовая скорость. Как известно, в веществе скорость света уменьшается в $n = \sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ раз,

$$v = c/n$$

Если имеется дисперсия, т. е. $n = f(\lambda_{\text{вак}})$, то

$$v = \frac{c}{f(\lambda_{\text{вак}})}$$

Это значит, что волны с разной длиной волны имеют разные фазовые скорости.

В среде без дисперсии $n = \text{const}$ и

$$v = c/\text{const}$$

Все волны распространяются с одинаковыми фазовыми скоростями.

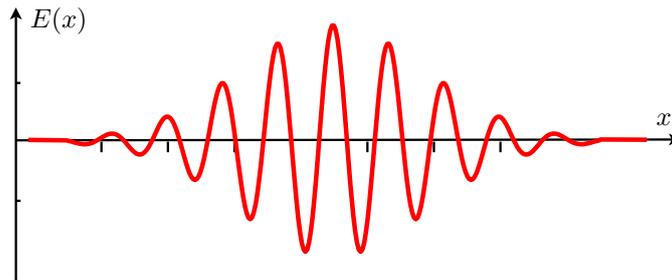
8.3.6 Передача информации при помощи волн

С помощью монохроматической волны нельзя передавать информацию, т. к. она представляет собой *бесконечную* последовательность *идентичных* горбов и впадин.

Для передачи сигнала нужно сделать на волне «отметку», например, оборвав её на некоторое время Δt .

Однако в этом случае волна уже не будет монохроматической, т. е. не будет описываться формулой $E = A \cos(\omega t - kx + \alpha)$.

Можно использовать группы волн или волновые пакеты.



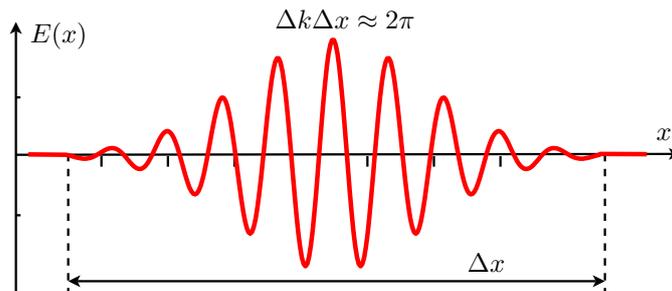
Теорема Фурье: волновой пакет есть суперпозиция монохроматических волн с частотами в интервале $\Delta\omega$ относительно основной частоты ω_0 , $\Delta\omega \ll \omega_0$:

$$E(x, t) = \int_{\omega_0 - \Delta\omega/2}^{\omega_0 + \Delta\omega/2} A_\omega \cos(\omega t - k_\omega x + \alpha_\omega) d\omega$$

(индексы ω указывают на зависимость от частоты).

В пределах пакета монохроматические волны в большей или меньшей степени усиливают друг друга, а вне пакета они гасят друг друга.

Чем меньше ширина пакета в пространстве, Δx , тем больший интервал частот $\Delta\omega$ или соответственно больший интервал волновых чисел Δk требуется для того, чтобы описать пакет:



8.3.7 Понятие групповой скорости

В среде без дисперсии все монохроматические волны, образующие пакет, распространяются с одинаковой фазовой скоростью $v_{\text{фаз}}$.

В этом случае скорость движения пакета совпадает с $v_{\text{фаз}}$ и форма пакета со временем не изменяется.

Если же дисперсия присутствует, то разные составляющие пакета двигаются в пространстве по-разному. Это приводит к постепенному расплыванию и исчезновению волнового пакета.

Но если дисперсия невелика, то расплывание происходит медленно. Тогда можно говорить о скорости пакета, которая называется групповой.

Групповая скорость совпадает с фазовой только в недиспергирующей среде. В общем случае она может быть как меньше, так и больше фазовой.

8.3.8 Вычисление групповой скорости

Перепишем формулу для волнового пакета в комплексном виде. Такая форма записи соответствует более общему случаю и с экспонентами проще иметь дело чем с тригонометрическими функциями:

$$E(x, t) = \int_{\omega_0 - \Delta\omega/2}^{\omega_0 + \Delta\omega/2} \hat{A}_\omega \exp[i(\omega t - k_\omega x)] d\omega$$

где $\hat{A}_\omega = A_\omega e^{i\alpha_\omega}$ — комплексная амплитуда.

Мы не знаем как k зависит от ω . Но мы знаем, что все частоты лежат в узком интервале около ω_0 (по определению волнового пакета).

Это значит, что имеет смысл рассматривать только малые отклонения от ω_0 , т.е. только малые $\omega - \omega_0$.

Следовательно, можно разложить $k_\omega = k(\omega)$ в ряд Тейлора около ω_0 и отставить только два первых члена разложения, т.к. остальные будут пренебрежимо малы:

$$k_\omega = k_0 + \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_0 (\omega - \omega_0) + \dots$$

где $k_0 = k(\omega_0)$, а $(dk/d\omega)_0$ — значение производной в точке ω_0 .

Тогда получим:

$$E(x, t) = \int_{\omega_0 - \Delta\omega/2}^{\omega_0 + \Delta\omega/2} \hat{A}_\omega \exp[i(\omega t - k_\omega x)] d\omega, \quad k_\omega = k_0 + \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_0 (\omega - \omega_0)$$

$$E(x, t) = \int_{\omega_0 - \Delta\omega/2}^{\omega_0 + \Delta\omega/2} \hat{A}_\omega \exp \left[i \left(\omega t - k_0 x - \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_0 (\omega - \omega_0) x \right) \right] d\omega$$

Перейдём к переменной $\xi = \omega - \omega_0$. Тогда $\omega = \omega_0 + \xi$, $d\omega = d\xi$. Пределы интегрирования также преобразуются: если $\omega = \omega_0 \pm \Delta\omega/2$, то $\xi = \pm\Delta\omega/2$.

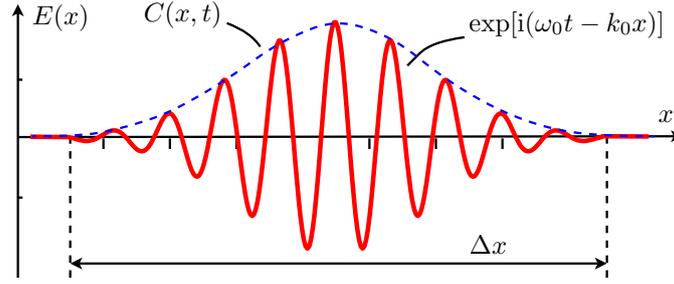
$$E(x, t) = \int_{-\Delta\omega/2}^{+\Delta\omega/2} \hat{A}_\xi \exp \left[i \left(\omega_0 t + \xi t - k_0 x - \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_0 \xi x \right) \right] d\xi$$

$$E(x, t) = \exp[i(\omega_0 t - k_0 x)] \int_{-\Delta\omega/2}^{+\Delta\omega/2} \hat{A}_\xi \exp \left[i \left(t - \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_0 x \right) \xi \right] d\xi$$

$$E(x, t) = \exp[i(\omega_0 t - k_0 x)] \int_{-\Delta\omega/2}^{+\Delta\omega/2} \hat{A}_\xi \exp(i g(x, t) \xi) d\xi$$

где $g(x, t) = t - (dk/d\omega)_0 x$.

Мы получили: $E(x, t) = C(x, t) \exp[i(\omega_0 t - k_0 x)]$, где экспонента задаёт колебания внутри пакета, а $C(x, t)$ — огибающая



«Горбы» и «впадины» внутри пакета бегут с фазовой скоростью $v_{\text{фаз}} = \omega_0/k_0$, а движение пакета в целом определяется движением огибающей

$$C(x, t) = \int_{-\Delta\omega/2}^{+\Delta\omega/2} \hat{A}_\xi \exp(ig(x, t)\xi) d\xi$$

Высота огибающей $C(x, t)$ зависит от $g(x, t) = t - (dk/d\omega)_0 x$.

Если мы найдём такую константу $g_{\text{макс}}$, при котором огибающая достигает максимума, то

$$g_{\text{макс}} = t - (dk/d\omega)_0 x$$

будет уравнением движения максимума волнового пакета. Его скорость есть групповая скорость $v_{\text{грп}}$:

$$x = \frac{t - g_{\text{макс}}}{(dk/d\omega)_0} = \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_0 (t - g_{\text{макс}}), \quad v_{\text{грп}} = \frac{dx}{dt}$$

$$v_{\text{грп}} = \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_0$$

Здесь индекс «0» напоминает, что нужно вычислять производную для волнового числа k_0 .

8.3.9 Связь между фазовой и групповой скоростями

Чтобы выяснить, как между собой связаны $v_{\text{фаз}}$ и $v_{\text{грп}}$, учтём, что $\omega = v_{\text{фаз}} k$:

$$\begin{aligned} v_{\text{грп}} &= \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_0 = \frac{d}{dk}(v_{\text{фаз}} k) \\ &= v_{\text{фаз}} + k \frac{dv_{\text{фаз}}}{dk} = v_{\text{фаз}} + k \frac{dv_{\text{фаз}}}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dk} = \end{aligned}$$

Вычислим $d\lambda/dk$:

$$\frac{d\lambda}{dk} = \frac{d}{dk} \frac{2\pi}{k} = -\frac{2\pi}{k^2} = -\frac{\lambda}{k}$$

Следовательно:

$$= v_{\text{фаз}} + k \frac{dv_{\text{фаз}}}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dk} = v_{\text{фаз}} - k \frac{\lambda}{k} \frac{dv_{\text{фаз}}}{d\lambda} = v_{\text{фаз}} - \lambda \frac{dv_{\text{фаз}}}{d\lambda}$$

Теперь примем во внимание, что $v_{\text{фаз}} = c/n$ и что $n = f(\lambda)$:

$$v_{\text{грп}} = v_{\text{фаз}} - \lambda \frac{d}{d\lambda} \frac{c}{n} = v_{\text{фаз}} - \lambda \frac{(-c)}{n^2} \frac{dn}{d\lambda} = v_{\text{фаз}} + v_{\text{фаз}} \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda}$$

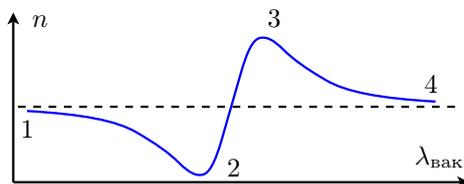
Окончательно получаем:

$$v_{\text{грп}} = v_{\text{фаз}} \left(1 + \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda}\right)$$

Мы видим, что в среде без дисперсии ($dn/d\lambda = 0$) волновой пакет распространяется с фазовой скоростью. Напомним, что только в этом случае волновой пакет существует бесконечно долго. Во всех остальных случаях он расплывается.

Так как максимум интенсивности приходится на центр волнового пакета, то в тех случаях, когда понятие волнового пакета ещё имеет смысл (пакет пока не расплылся) скорость переноса энергии волной равна групповой скорости.

В случае нормальной дисперсии $dn/d\lambda < 0$ и значит групповая скорость волны меньше фазовой. При аномальной дисперсии $dn/d\lambda > 0$ и групповая скорость больше фазовой.



9 Квантовая оптика

9.1 Тепловое излучение

9.1.1 Природа теплового излучения

Всякое излучение света происходит в результате переходов атомов из возбуждённых состояний с большей энергией в состояние с меньшей энергией.

Тепловым

называется излучение, при котором переход атомов в возбуждённое состояние происходит за счёт энергии теплового движения.

9.1.2 Зависимость теплового излучения от температуры

Тепловое излучение имеет место при любой температуре тел. С изменением температуры меняется интенсивность и спектральный состав излучения.

При малых температурах излучаются длинные (инфракрасные) волны.

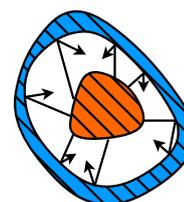
С увеличением температуры возрастает общая энергия излучения, а максимум спектра смещается в коротковолновую (ультрафиолетовую) область.

При повышении температуры интенсивность растёт, а с уменьшением убывает.

9.1.3 Тепловое равновесие с окружающими телами

Окружим тело оболочкой с идеально отражающей поверхностью. Тело будет одновременно испускать и поглощать отражённое от оболочки излучение.

Сначала тело будет больше испускать, чем поглощать и его температура будет убывать, так как энергия теплового движения будет расходоваться на излучение.



Это будет происходить до тех пор, пока количество поглощаемой энергии не сравняется с количеством испускаемой энергии.

При этом температура тела и плотность энергии излучения в пространстве между телом и оболочкой достигнут некоторых постоянных во времени значений.

При этом наступает тепловое равновесие между телом и окружающим его излучением.

Тепловое излучение — это единственный вид излучения, которое может находиться в тепловом равновесии с окружающими телами.

9.2 Величины, характеризующие тепловое излучение

9.2.1 Интегральная испускательная способность R_T

Интегральная испускательная способность R_T

или просто испускательная способность — это плотность потока энергии, испускаемой телом по всем направлениям (т. е. в пределах телесного угла 4π).

Поток энергии — это энергия, излучаемая в единицу времени.

Плотность — энергия, испускаемая единицей площади поверхности тела.

Значит R_T — энергия, испускаемая за единицу времени единицей площади тела по всем направлениям.

Тепловое излучение зависит от температуры тела. Поэтому R_T имеет индекс « T ». Говорят — испускательная способность при данной температуре.

Величину R_T также называют энергетической светимостью.

9.2.2 Спектральная испускательная способность $r_{T,\omega}$

Излучение состоит из волн разной частоты ω и длины волны λ .

Плотность потока энергии, испускаемой в интервале частот от ω до $\omega + d\omega$ обозначают как $dR_{T,\omega}$.

Отношение

$$\frac{dR_{T,\omega}}{d\omega} = r_{T,\omega}$$

называется спектральной испускательной способностью.

Спектральная испускательная способность

есть плотность потока энергии, испускаемой телом в единичном интервале частот вблизи некоторого значения частоты ω . Эта величина есть функция температуры тела и частоты.

R_T можно выразить через $r_{T,\omega}$:

$$R_T = \int_0^{\infty} r_{T,\omega} d\omega$$

Спектральную испускательную способность можно задать в терминах длин волн.

$$\frac{dR_{T,\lambda}}{d\lambda} = r_{T,\lambda}$$

Величины должны быть определены таким образом, чтобы выполнялось равенство $dR_{T,\lambda} = dR_{T,\omega}$.

Частотный интервал и интервал длин волн должны быть связаны следующим образом

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} \Rightarrow d\lambda = -\frac{2\pi c}{\omega^2} d\omega = -\frac{\lambda^2}{2\pi c} d\omega$$

Знак минус в этом выражении означает, что увеличение длины волны соответствует уменьшению частоты.

При вычислении энергетических характеристик нас интересуют только абсолютные значения $d\omega$ и $d\lambda$. Поэтому в дальнейшем этот минус будем опускать.

Имеем:

$$dR_{T,\omega} = dR_{T,\lambda} \Rightarrow r_{T,\omega} d\omega = r_{T,\lambda} d\lambda \Rightarrow r_{T,\omega} = r_{T,\lambda} \frac{d\lambda}{d\omega}$$

$$r_{T,\omega} = \frac{\lambda^2}{2\pi c} r_{T,\lambda}$$

9.2.3 Спектральная поглощательная способность $a_{T,\omega}$

Пусть на элементарную площадку поверхности тела падает поток энергии $d\Phi_\omega$, у которого частоты волн лежат в интервале от ω до $\omega + d\omega$.

Поглощаемую телом часть потока обозначим как $d\Phi'_\omega$.

Спектральной поглощательной способностью

называется отношение поглощённого телом потока энергии к падающему потоку на частоте ω назовём

$$a_{T,\omega} = \frac{d\Phi'_\omega}{d\Phi_\omega}$$

Эта величина не может быть больше единицы.

9.3 Абсолютно чёрное тело

9.3.1 Определение и качественное объяснение

Абсолютно чёрное тело

это тело у которого спектральная поглощательная способность $a_{T,\omega}$ равна единице на любой частоте.

Абсолютно чёрное тело поглощает всё падающее на него излучение.

Не нужно, однако, забывать, что при этом абсолютно чёрное тело также и испускает тепловое излучение.

Абсолютно чёрное тело — это тело, которое ничего не отражает. Энергия всего падающего на него излучения сначала преобразуется в тепловую энергию тела, а затем испускается в виде теплового излучения.

9.3.2 Серые тела

Серым

называется тело, для которого спектральная поглощательная способность $a_{T,\omega}$ постоянна на всех частотах и меньше единицы.

Абсолютно чёрных в природе не существует. Например сажа имеет близкую к единице поглощательную способность только в ограниченном интервале частот. В далёкой инфракрасной области её поглощательная способность заметно меньше единицы.

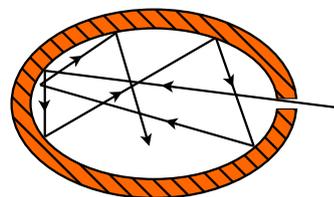
9.3.3 Модель абсолютно чёрного тела

Можно создать устройство по свойствам очень близкое к абсолютно чёрному телу.

Модель абсолютно чёрного тела представляет почти замкнутую полость, снабжённую малым отверстием.

Излучение, попадающее внутрь, претерпевает многократные отражения и практически полностью поглощается стенками полости.

Затем оно переизлучается и, выходя из полости, обладает свойствами теплового излучения абсолютно чёрного тела.



9.4 Закон Кирхгофа

9.4.1 Формулировка

Закон Кирхгофа:

отношение испускательной и поглощательной способности не зависит от природы тела. Оно описывается для всех тел одной и той же универсальной функцией частоты (или длины волны) и температуры.

$$\frac{r_{T,\omega}}{a_{T,\omega}} = f(\omega, T)$$

Сами величины $r_{T,\omega}$ и $a_{T,\omega}$ меняются при переход от одного тела к другому, но их отношение остаётся одинаковым.

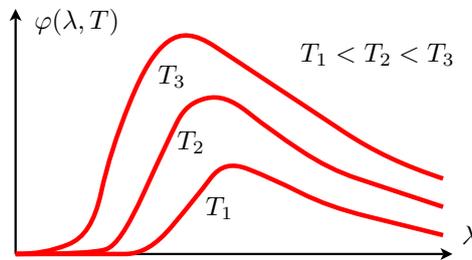
Из этого следует, что если одно тело более сильно чем другое поглощает излучение, то оно также сильнее его испускает.

9.4.2 Закон Кирхгофа для абсолютно чёрных тел

Для абсолютно чёрного тела $a_{T,\omega} = 1$, значит $f(\omega, T) = r_{T,\omega}$.

Изучая излучение полости при различных температурах можно получить экспериментальную зависимость $f(\omega, T)$ или $\varphi(\lambda, T)$ (f и φ выражают одну и ту же зависимость, выраженную через ω и λ , соответственно).

Эта зависимость имеет вид, показанный на рисунке.



9.5 Вывод формулы Релея—Джинса

9.5.1 Основные положения теории Релея—Джинса

На основе классических представлений об волновой природе электромагнитного поля невозможно получить правильную формулу для спектральной испускательной способности абсолютно чёрного тела.

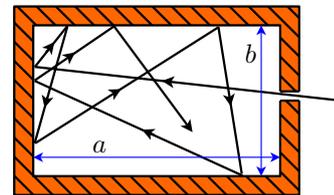
Такую попытку предприняли Релей и Джинс, предположив:

- равновесное излучение в полости (модель абсолютно чёрного тела) представляет собой систему стоячих волн;
- энергия равномерно распределена между этими волнами.

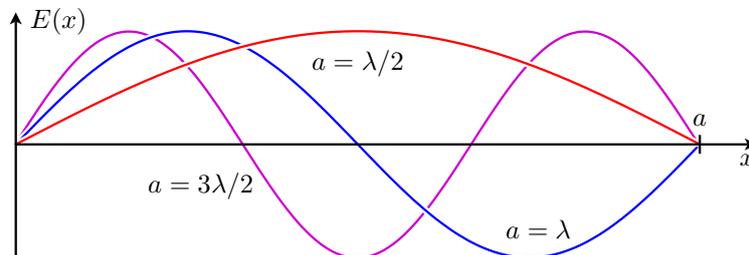
9.5.2 Подсчёт плотности стоячих волн

Подсчитаем количество стоячих электромагнитных волн, которые могут существовать в полости конечных размеров.

Сначала для простоты рассмотрим двумерную область, имеющую форму прямоугольника со сторонами a и b . Направим ось x вдоль стороны a , а ось y вдоль стороны b . Позже станет понятно как учесть третью координату.



Волна произвольной ориентации имеет волновой вектор \vec{k} , который образует углы α и β с осями x и y соответственно.



Компонента волны вдоль оси x , может быть только такой, чтобы на стенках поле обращалось в ноль. Поэтому на длине a должно укладываться целое число полуволн.

$$a = n_x \frac{\lambda}{2} = n_x \frac{\pi}{k_x}$$

где n_x — целое положительное число, k_x — волновое число для волн, распространяющихся вдоль x . k_x равно проекции волнового вектора \vec{k} волны с произвольной ориентацией относительно осей на ось x .

$$k_x = k \cos \alpha = \frac{n_x \pi}{a}$$

Такое же граничное условие должно выполняться для волн вдоль y :

$$k_y = k \cos \beta = \frac{n_y \pi}{b}$$

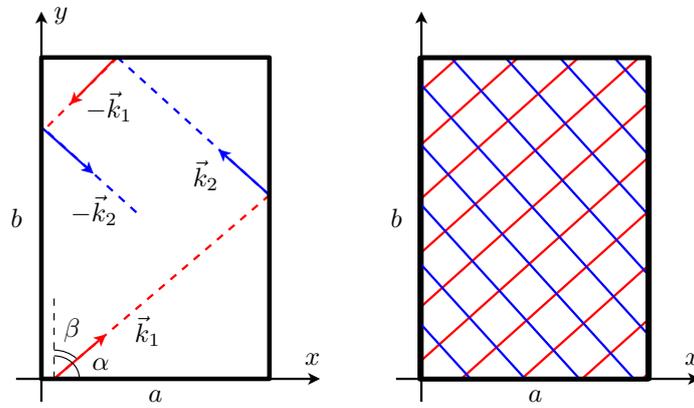
где n_y — целое положительное число.

Обратим внимание на то, что n_x и n_y могут принимать сколь угодно большие значения.

Граничные условия ограничивают длины волн сверху: если $a < \lambda/2$, то такая волна уже «не умещается» в полости.

Но волна может быть сколь угодно короткой и при этом удовлетворять граничным условиям.

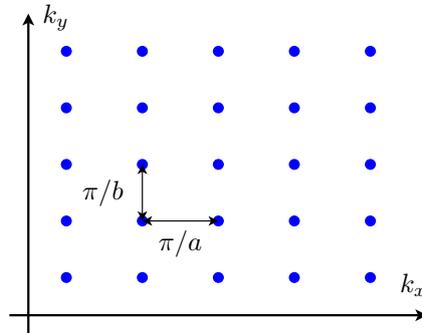
В двумерном пространстве в результате отражения волны от стенок возникают четыре бегущие волны с векторам $\vec{k}_1, \vec{k}_2, -\vec{k}_1, -\vec{k}_2$, которые имеют одинаковые модули. Сложение этих волн даст две стоячие волны.



Нам требуется подсчитать стоячие волны с различными λ , укладывающиеся в рассматриваемую полость. Воспользуемся формулами $k_x = k \cos \alpha = n_x \pi / a$ и $k_y = k \sin \alpha = n_y \pi / b$.

Каждой паре целых положительных чисел n_x и n_y соответствует определённая длина волны (и, следовательно, частота), которая допустима в данной полости.

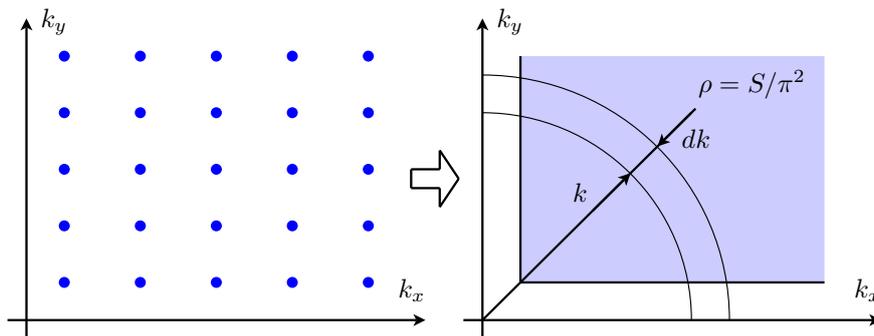
Отложим k_x и k_y на координатной плоскости. Допустимым длинам волн на этой плоскости соответствуют точки, расположенные расстояниями друг от друга π/a по оси k_x и π/b по ос k_y .



На каждую длину волны (точку на рисунке) в k -пространстве приходится площадь $\pi^2/(ab)$.

Плотность точек равна S/π^2 , где $S = ab$ — площадь полости.

Так как k -пространство полубесконечно (n_x и n_y могут быть сколь угодно большими), то интервалы между точками π/a и π/b можно считать малыми и приближённо считать распределение стоячих волн не дискретным, а непрерывным, с плотностью $\rho = S/\pi^2$.



Вычислим количество стоячих волн в интервале от k до $k + dk$. Проведём в k -пространстве окружность радиусом k . Длина четверти окружности равна $2\pi k/4$. Площадь четверти кольца толщиной dk равна $(2\pi k/4)dk$.

$$dN_k = \frac{S}{\pi^2} \frac{2\pi k}{4} dk = \frac{S}{2\pi} k dk$$

Теперь понятно, как учесть третью координату. Если имеется трёхмерная полость объёма V , то в трёхмерном k -пространстве на каждую стоячую волну будет приходиться объём π^3/V .

Тогда в непрерывном приближении плотность стоячих волн равна V/π^3 .

Вычислим количество волн с волновыми числами в интервале от k до dk .

Площадь одной восьмой сферы, соответствующей положительным $k_{x,y,z}$ равна $4\pi k^2/8$, объём соответствующего слоя толщиной dk равен $(4\pi k^2/8)dk$.

Следовательно,

$$dN_k = \frac{V}{\pi^3} \frac{4\pi k^2 dk}{8} = \frac{V k^2 dk}{2\pi^2}$$

Перейдём к частотам:

$$k = \frac{\omega}{c}, \quad \frac{dk}{d\omega} = \frac{1}{c} \Rightarrow k^2 dk = \frac{\omega^2 d\omega}{c^3}$$

$$dN_\omega = \frac{V}{2\pi^2} k_\omega^2 dk_\omega = \frac{V}{2\pi^2} \frac{\omega^2 d\omega}{c^3} = \frac{V \omega^2 d\omega}{2\pi^2 c^3}$$

Отсюда следует, что число стоячих волн, приходящихся на единицу объёма полости равно

$$dn'_\omega = \frac{\omega^2 d\omega}{2\pi^2 c^3}$$

Эта величина не учитывает, что электромагнитная волна может быть поляризована в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Поэтому полученное количество нужно умножить ещё на два:

$$dn_\omega = \frac{\omega^2 d\omega}{\pi^2 c^3}$$

9.5.3 Объёмная плотность энергии теплового излучения

Так как излучение равновесное, то энергия должна быть равномерно распределена по степеням свободы системы.

Согласно статистической физике, на каждую степень свободы приходится средняя энергия $kT/2$ (здесь k — не волновое числа, а *постоянная Больцмана!*).

У электромагнитной волны есть электрическая и магнитная составляющая, значит умножаем на два:

$$\langle \mathcal{E} \rangle = kT$$

Энергия волн в единичном объёме пространства, приходящаяся на интервал частот от ω до $\omega + d\omega$:

$$U(\omega, T) = \langle \mathcal{E} \rangle dn_\omega = kT \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} d\omega$$

Получаем объёмную плотность энергии на частоте ω :

$$u(\omega, T) = kT \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3}$$

9.5.4 Испускательная способность абсолютно чёрного тела

От объёмной плотности энергии нужно перейти к энергии, излучаемой поверхностью тела.

В пространство с тепловым излучением поместим единичную площадку. Вычислим количество энергии переносимой через неё *только в одном направлении* в единицу времени. Это и будет искомая величина.

Стоячие волны в полости ориентированы произвольно относительно площадки.

Разложим каждую из волн на две компоненты — перпендикулярную и параллельную площадке.

Площадку пересекает только перпендикулярная компонента.

Значит через площадку проходит только половина всей энергии излучения, окружающей площадку. Поэтому объёмную плотность энергии нужно поделить на два.

Каждая перпендикулярная компонента представляет собой суперпозицию двух встречных волн.

Нас интересует перенос только в одном направлении — значит нужно взять только половину энергии, приходящейся на перпендикулярные компоненты.

Итого — исходную плотность энергии $u(\omega, T)$ нужно поделить на четыре.

Достроим на нашей площадке объём. Внутри объёма заключена энергия с плотностью $u(\omega, T)$, но, как мы выяснили, только $1/4$ этой плотности будет давать вклад в поток через площадку.

За время t через площадку площадью $S_{\text{плотц}}$ будет перенесена энергия, заключённая в объеме $S_{\text{плотц}}ct$.

Если $t = 1$ и $S_{\text{плотц}} = 1$, то этот объём равен c .

Следовательно, окончательно получаем, что испускательная способность абсолютно чёрного тела равна:

$$f(\omega, T) = \frac{c}{4}u(\omega, T)$$

9.5.5 Формула Релея—Джинса

Используя выражение для $u(\omega, T)$, получим формулу Релея—Джинса.

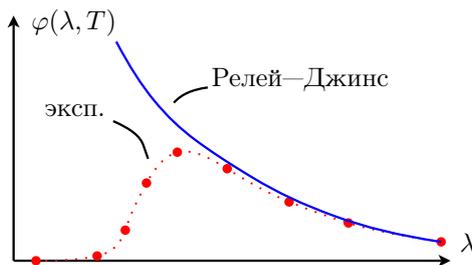
$$f(\omega, T) = \frac{kT\omega^2}{4\pi^2c^2}$$

Учтя, что $\omega = 2\pi c/\lambda$ и формулу $r_{T,\omega} = (\lambda^2/(2\pi c))r_{T,\lambda}$, выразим излучательную способность через длину волны:

$$\varphi(\lambda, T) = \frac{2\pi ckT}{\lambda^4}$$

9.5.6 Ультрафиолетовая катастрофа

Формула Релея—Джинса хорошо согласуется с экспериментом в области длинных волн, но не работает для коротковолновой части спектра.



Ультрафиолетовая катастрофа: согласно формуле Релея—Джинса испускательная способность при $\lambda \rightarrow 0$ становится бесконечно большой.

Если просуммировать энергию на всех длинах волн, то получается бесконечно большая величина.

9.5.7 Причины ультрафиолетовой катастрофы

Источник проблем в формуле Релея—Джинса в том, что представляя тепловое излучение в полости как суперпозицию стоячих волн, мы вынуждены допустить существование сколь угодно коротких волн (допустимы сколь угодно большие n_x и n_y).

Граничные условия лимитируют только максимальную длину волны, но не минимальную.

Таким образом, излучение в полости имеет бесконечно большое число степеней свободы, а количество степеней свободы у вещества, испускающего излучение, конечно.

При этом мы полагаем, что энергия должна быть равномерно распределена по всем степеням свободы излучения.

Сочетание этих совершенно правильных по отдельности классических положений приводит к противоречию.

А именно: тепловое равновесие вещества и излучения невозможно, так как невозможно равномерно перераспределить энергию конечного числа степеней свободы вещества по бесконечно большому числу степеней свободы излучения.

Тем не менее, вывод формулы Релея—Джинса не содержит ошибок. Он сделан совершенно правильно в рамках представлений классической физике. Этого говорит о том, что для объяснения формы спектра теплового излучения, классические представления непригодны.

10 Квантовая оптика. Ранняя квантовая механика

10.1 Вывод формулы Планка

10.1.1 Причина противоречия классической теории

Как мы выяснили, противоречие в формуле Релея—Джинса возникает из-за сочетания двух, правильных по отдельности, классических положений:

- излучение имеет бесконечно большое число степеней свободы;
- энергия распределена по всем степеням свобод равномерно.

Чтобы получить верную формулу, нужно скорректировать одно из них. Правильную формулу получил Макс Планк в 1900, выдвинув новую гипотезу об энергии стоячих волн в полости.

10.1.2 Гипотеза Планка

Ключевое предположение Планка — атомы вещества излучают электромагнитное излучение не непрерывно, а в виде порций, т. е. квантов.

При этом каждый квант имеет энергию

$$\mathcal{E} = h\nu = \hbar\omega$$

где h — фундаментальная константа, которая получила название постоянной Планка, $\hbar = h/(2\pi)$.

$$h = 6.6261937 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$$

$$\hbar = 1.0545915 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$$

10.1.3 Дискретность спектра энергий атомов

Чтобы излучить квант, атом должен находиться в возбуждённом состоянии т. е. в состоянии с «лишней» энергией.

При излучении атом из возбуждённого состояния переходит в основное, отдавая энергию в виде излучения.

Тепловое излучение равновесное. Параллельно с испусканием происходит поглощение излучения атомами. В результате они снова переходя в возбуждённое состояние.

Из предположения Планка вытекает, что возбуждённые состояния атома могут иметь дискретные значения энергии. Атомы, излучающие на частоте ω , могут быть находиться в состояниях с энергиями

$$\mathcal{E}_0 = 0, \mathcal{E}_1 = \hbar\omega, \mathcal{E}_2 = 2\hbar\omega, \dots, \mathcal{E}_n = n\hbar\omega$$

10.1.4 Средняя энергия, испускаемая атомами

Согласно теореме Больцмана, доля атомов, находящихся в состоянии с энергией \mathcal{E}_n , равна

$$N_n = N_0 \exp(-\mathcal{E}_n/(kT))$$

где N_0 — число атомов в невозбуждённом состоянии.

Найдём среднюю энергию, испускаемую атомами на частоте ω :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{E} \rangle &= \frac{\mathcal{E}_0 N_0 + \mathcal{E}_1 N_1 + \mathcal{E}_2 N_2 + \dots}{N_0 + N_1 + N_2 + \dots} \\ &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} N_n \mathcal{E}_n}{\sum_{n=0}^{\infty} N_n} \\ &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\hbar\omega \exp(-n\hbar\omega/(kT))}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-n\hbar\omega/(kT))} \end{aligned}$$

Введём обозначение $x = \hbar\omega/(kT)$:

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \hbar\omega \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n e^{-nx}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}} = -\hbar\omega \frac{d}{dx} \left[\ln \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} \right) \right]$$

Аргументом логарифма является стоит сумма бесконечной геометрической прогрессии, каждый следующий член которой меньше предыдущего. Первый член прогрессии 1, знаменатель прогрессии e^{-x} . Тогда сумма равна:

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} = \frac{1}{1 - e^{-x}}$$

Следовательно, для средней энергии получаем:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{E} \rangle &= -\hbar\omega \frac{d}{dx} \left[\ln \left(\frac{1}{1 - e^{-x}} \right) \right] \\ &= -\hbar\omega (1 - e^{-x}) \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1 - e^{-x}} \right) \\ &= -\hbar\omega (1 - e^{-x}) \left(\frac{-1}{(1 - e^{-x})^2} \right) \frac{d}{dx} (1 - e^{-x}) \\ &= -\hbar\omega \cancel{(1 - e^{-x})} \left(\frac{-1}{(1 - e^{-x})^{\cancel{2}}} \right) e^{-x} = \frac{\hbar\omega e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \frac{\hbar\omega}{e^x - 1} \end{aligned}$$

В итоге получаем формулу для энергии

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \frac{\hbar\omega}{\exp(\hbar\omega/(kT)) - 1}$$

10.1.5 Классическое приближение

Если устремить постоянную Планка \hbar к нулю, то получим классическую формулу для равномерного распределения энергии. Применим правило Лопиталья:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{E} \rangle_{\text{классич}} &= \lim_{\hbar \rightarrow 0} \frac{\hbar\omega}{\exp(\hbar\omega/(kT)) - 1} \\ &= \lim_{\hbar \rightarrow 0} \frac{d\hbar\omega/d\hbar}{d[\exp(\hbar\omega/(kT)) - 1]/d\hbar} \\ &= \lim_{\hbar \rightarrow 0} \frac{\omega}{[\omega/(kT)] \exp(\hbar\omega/(kT))} = kT \end{aligned}$$

Значит полученная формула для $\langle \mathcal{E} \rangle$ является обобщением предположения Релея—Джинса о равномерном распределении энергии.

Равномерное распределение имеет место для малых частот, т. е. на больших длинах волн. Действительно, именно для длинных волн формула Релея—Джинса даёт правильный результат.

10.1.6 Объёмная плотность энергии излучения

Воспользуемся формулой для плотности стоячих волн

$$dn_{\omega} = \frac{\omega^2 d\omega}{\pi^2 c^3}$$

и вычисли энергию излучения в единичном объёме пространства, на интервале частот от ω до $\omega + d\omega$:

$$U(\omega, T) = \langle \mathcal{E} \rangle dn_{\omega} = \left(\frac{\hbar\omega}{\exp(\hbar\omega/(kT)) - 1} \right) \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} d\omega$$

Тогда объёмная плотность энергии на частоте ω равна:

$$u(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3 [\exp(\hbar\omega/(kT)) - 1]}$$

10.1.7 Формула Планка

Вспомним, что для того, чтобы от объёмной плотности перейти к излучательной способности, нужно $u(\omega, T)$ домножить на $c/4$.

В итоге получаем формулу Планка для спектральной испускательной способности абсолютно чёрного тела.

$$f(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2c^2[\exp(\hbar\omega/(kT)) - 1]}$$

Эта формула точно согласуется с экспериментальными данными во всём интервале частот.

Учтя, что $\omega = 2\pi c/\lambda$ и формулу $r_{T,\omega} = (\lambda^2/(2\pi c)r_{T,\lambda})$, запишем формулу Планка через длину волны:

$$\varphi(\lambda, T) = \frac{4\pi^2\hbar c^2}{\lambda^5[\exp(2\pi\hbar c/(kT\lambda)) - 1]}$$

10.1.8 Закон Стефана—Больцмана

Если проинтегрировать формулу Планка по всем длинам волн (или по всем частотам), то получим испускательную способность абсолютно чёрного тела:

$$R^{\text{а.ч.т.}} = \int_0^\infty f(\omega, T)d\omega = \sigma T^4$$

Эта формула называется законом Стефана—Больцмана. Впервые зависимость $R^{\text{а.ч.т.}} = \sigma T^4$ была получена экспериментально.

Из формулы Планка следует, что постоянная Стефана—Больцмана σ равна:

$$\sigma = \pi^2k^4/(60c^2\hbar^3)$$

Это очень точно согласуется с полученным экспериментальным значением.

10.1.9 Закон смещения Вина

Экспериментально было обнаружено, что длина волны, соответствующая максимальному значению испускательной способности $\lambda_{\text{макс}}$, и температура тела T связаны формулой

$$\lambda_{\text{макс}}T = b$$

где b — константа. Эта формула называется законом смещения Вина.

Из закона смещения Вина следует, что с увеличением температуры уменьшается преобладающая длина волны теплового излучения. Слабо нагретые тела излучают в инфракрасном диапазоне. При нагревании тела краснеют, потом желтеют.

Закон смещения Вина есть следствие уравнения для максимума функции $\varphi(\lambda, T)$:

$$\frac{\partial\varphi(\lambda, T)}{\partial\lambda} = 0 \Rightarrow \lambda_{\text{макс}}T = \frac{2\pi\hbar c}{4.9651k}$$

(Число 4.9651 в знаменателе — численное решение уравнения $xe^x - 5(e^x - 1) = 0$, которое возникает в процессе поиска $\lambda_{\text{макс}}$.)

Таким образом, формула Планка даёт исчерпывающее описание равновесного теплового излучения.

10.2 Двойственная природа света. Понятие квантов

10.2.1 Кванты

В конце 19 — в начале 20 веков были выполнены серия экспериментов, которые продемонстрировали, что электромагнитное излучение может при определённых условиях вести себя не как волна, а как поток частиц.

Сначала Макс Планк выдвинул гипотезу, что свет может излучаться не непрерывно, а порциями, квантами. Затем Эйнштейн предположил, что свет может также и поглощаться квантами.

Квант света получил название «фотон» (от греческого «свет»). Этот термин ввёл в обращение Гилберт Льюис в 1926 году.

10.2.2 Энергия и импульс квантов

В теоретических работах Макса Планка, Альберта Эйнштейна и других учёных было показано, что том случае, когда электромагнитное излучение проявляет себя как поток частиц фотонов, каждому из фотонов нужно сопоставить энергию и импульс:

$$E = \hbar\omega, \quad \vec{p} = \hbar\vec{k}$$

При этом фотон не обладает массой и во всех инерциальных системах отсчёта движется со скоростью света c .

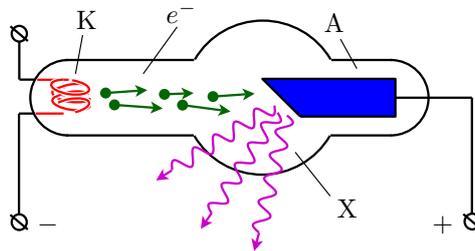
10.3 Эксперименты, подтверждающие двойственную природу света

10.3.1 Коротковолновая граница рентгеновского спектра

Вильгельм Конрад Рёнтген в 1895 году обнаружил, что при бомбардировке стекла и металлов быстрыми электронами возникают лучи высокой энергии, которые он назвал X-лучами.

Эти лучи были названы рентгеновскими, а сам учёный получил первую в мире Нобелевскую премию по физике за открытие этих лучей.

Рентгеновские лучи представляют собой электромагнитные волны с длинами волн от 10^{-5} нм до 100 нм.



Нагретый электрическим током катод К испускает электроны e^- .

Они разгоняются за счёт разности потенциалов U , приложенной между катодом и анодом А.

Сталкиваясь с анодом, электроны тормозятся с высоким ускорением, что приводит к генерации рентгеновских лучей X.

Согласно классической электродинамике, в спектре рентгеновского излучения должны присутствовать все длины волн.

Длина волны, которой соответствует максимум мощности излучения, должна плавно уменьшаться с ростом скорости электронов, т. е. с ростом U .

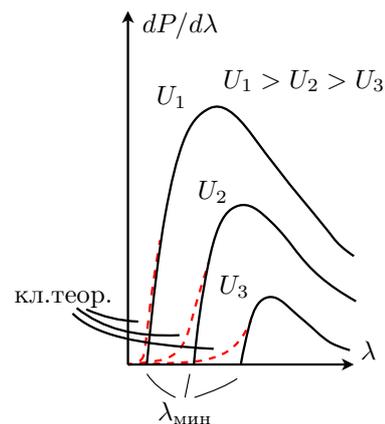
Экспериментальные спектры достаточно хорошо соответствуют классической теории.

Существует серьёзное отличие: спектр для коротких длин волн не убывает плавно к нулю, как предсказывает классическая теория, а резко обрывается при некотором значении $\lambda_{\text{мин}}$.

Экспериментально было найдено соотношение для минимальной длины волны:

$$\lambda_{\text{мин}} = \frac{1.239 \cdot 10^{-6}}{U}$$

Нельзя объяснить существование коротковолновой границы, считая рентгеновские лучи классической электромагнитной волной.



Вспомним квантовую гипотезу Планка о том, что излучение есть поток квантов с энергией $\hbar\omega$.

Каждый квант вырывается из вещества разогнанным электроном.

Энергия электронов не может быть больше eU , поэтому

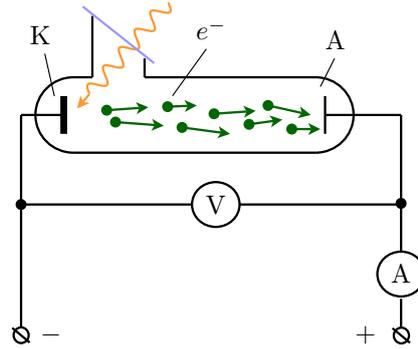
$$\hbar\omega \leq eU \Rightarrow \omega_{\text{макс}} = \frac{eU}{\hbar} \Rightarrow \lambda_{\text{мин}} = \frac{2\pi\hbar c}{eU}$$

Константа $2\pi\hbar c/e = 1.239 \cdot 10^{-6}$ хорошо соответствует эксперименту.

10.3.2 Законы внешнего фотоэффекта

Внешний фотоэффект — испускание электронов веществом под действием излучения.

Большой вклад в изучение фотоэффекта внёс Александр Столетов в 1888-90 годах.

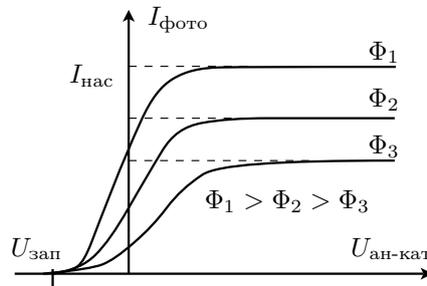


Свет падает на катод К электронно-вакуумной трубки и вырывает из него электроны.

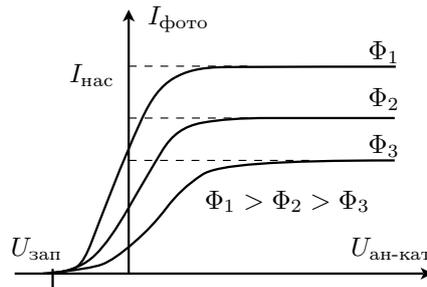
Под действием приложенной между анодом и катодом разности потенциалов $U_{\text{ан-кат}}$ электроны достигают анода и замыкают цепь.

Возникающий ток этого называют фототоком $I_{\text{фото}}$.

Экспериментально были установлены три закона внешнего фотоэффекта.



1. Закон Столетова. Фототок насыщения $I_{\text{нас}}$ (т. е. количество электронов, вырываемых светом с поверхности металла за единицу времени) на данной частоте излучения прямо пропорционален энергии излучения Φ , попадающего на катод.
2. Максимальная кинетическая энергия вырываемых светом электронов линейно возрастает с частотой света и не зависит от его интенсивности. Эта энергия равна $eU_{\text{зап}}$, где $U_{\text{зап}}$ запирающее напряжение, при котором фототок обращается в нуль.



3. Для каждого вещества существует красная граница фотоэффекта, то есть минимальная частота света ω_0 (или максимальная длина волны λ_0), при которой ещё возможен фотоэффект, и если $\omega < \omega_0$, то фотоэффект уже не происходит.

Используя классические представления, невозможно объяснить законы внешнего фотоэффекта.

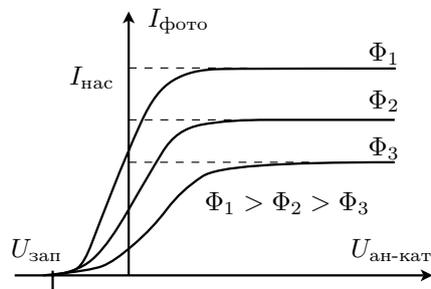
Планк выдвинул гипотезу, что свет излучается квантами с энергией $h\omega$. В 1905 году Альберт Эйнштейн предположил, что свет не только излучается, но и поглощается квантами с энергией $h\omega$.

Электрон в атоме находится в потенциальной яме. Чтобы его освободить, квант света, фотон, должен совершить работу, равную потенциальной энергии взаимодействия электрона с ядром.

Следовательно, энергия фотона расходуется на совершение работы выхода $A_{\text{вых}}$ и на то, чтобы сообщить электрону кинетическую энергию K :

$$h\omega = A_{\text{вых}} + K$$

Эта формула называется законом Эйнштейна. Она позволяет объяснить все законы фотоэффекта.



1. Энергия излучения, падающего на катод, равна $E = n\hbar\omega$, где n — число фотонов, попадающих на катод. Насыщение возникает, когда все электроны, вылетевшие с катода, достигают анода. Число вырванных электронов пропорционально числу падающих фотонов. Значит фототок насыщения тоже пропорционален n . Отсюда следует закон Столетова.
2. Работы выхода $A_{\text{вых}}$ зависит только от свойств вещества и не зависит от излучения. Значит, чем выше частота, тем выше $\hbar\omega$, тем большая часть энергии фотонов превращается в кинетическую энергию электронов. Это объясняется второй закон.
3. Если фотоны имеют низкую частоту, то их энергии недостаточно для совершения работы выхода и фототок исчезает. Это объясняет третий закон.

11 Ранняя квантовая механика

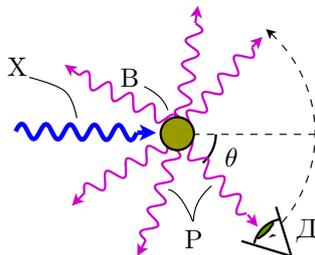
11.1 Эксперименты, подтверждающие двойственную природу света

11.1.1 Эффект Комптона

Эффект Комптона — доказательство существования импульса у фотона

Существование у фотона импульса $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ предсказал Эйнштейн в 1909 году.

Экспериментальное доказательство этого сделал в 1923 году Артур Комптон, за что получил Нобелевскую премию.

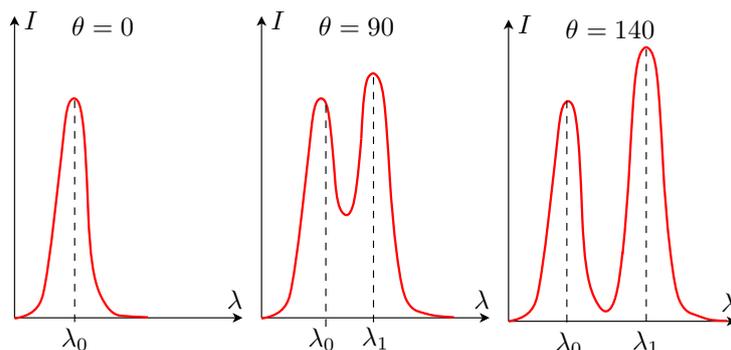


Комптон исследовал рассеяние рентгеновских лучей различными веществами.

Пучок рентгеновских лучей X падает на образец вещества В и рассеивается по всем направлениям — пучки Р.

Детектор Д может перемещаться вокруг образца и регистрировать спектр излучения, рассеиваемого под разными углами.

Было обнаружено, что в рассеянных лучах наряду с первоначальной длиной волны λ_0 также присутствует лучи большей длины волны λ_1 .



Разность $\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_0$ зависит только от угла рассеивания θ . От длины волны λ_0 и от природы рассеивающего вещества $\Delta\lambda$ не зависит.

Для объяснения этого эффекта приходится допустить, что свет есть поток квантов, фотонов, каждый из которых обладает не только энергией, но и импульсом

$$E = \hbar\omega, \quad \vec{p} = \hbar\vec{k}$$

Эффект Комптона — результат упругого соударения фотонов со свободными электронами.

Природа вещества влияет на интенсивность смещённой компоненты — если атомный номер мал, то бо́льшая часть энергии приходится на смещённую компоненту. С ростом атомного номера доля несмещённой компоненты растёт.

С увеличением атомного номера доля сильно связанных электронов в атоме возрастает. Фотоны реже взаимодействуют с отдельными, слабосвязанными электронами. В этом причина уменьшения доли смещённой компоненты.

Вообще говоря, электроны в привязаны к атомам и не могут считаться свободными. Однако энергия рентгеновских фотонов много больше энергии связи электронов.

Поэтому для наблюдения эффекта необходимо рентгеновское излучение, обычный свет не годится, так как энергия его фотонов меньше необходимой.

Так как фотоны движутся со скоростью света, то нужно использовать релятивистские формулы для энергии и импульса.

Закон сохранения энергии:

- Энергия фотона до соударения $\hbar\omega_1$, после $\hbar\omega_2$.
- Энергия электрона до соударения $m_e c^2$ (энергия покоя), после соударения $c\sqrt{p_e^2 + m_e^2 c^2}$ (на основании формулы $E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2$).

$$\hbar\omega_1 + m_e c^2 = \hbar\omega_2 + c\sqrt{p_e^2 + m_e^2 c^2}$$

Закон сохранения импульса

- Импульс фотона до соударения $\hbar\vec{k}_1$, после $\hbar\vec{k}_2$.
- Импульс электрона до соударения 0, после \vec{p}_e .

$$\hbar\vec{k}_1 = \vec{p}_e + \hbar\vec{k}_2$$

Берём закон сохранения энергии, выражаем $\omega = ck$ и делим всё на c и выражаем p_e^2 :

$$\begin{aligned} \hbar\omega_1 + m_e c^2 &= \hbar\omega_2 + c\sqrt{p_e^2 + m_e^2 c^2} \\ \hbar\omega_1 + m_e c^2 &= \hbar\omega_2 + c\sqrt{p_e^2 + m_e^2 c^2} \\ \hbar k_1 + m_e c &= \hbar k_2 + \sqrt{p_e^2 + m_e^2 c^2} \\ \hbar k_1 - \hbar k_2 + m_e c &= \sqrt{p_e^2 + m_e^2 c^2} \\ \hbar(k_1 - k_2) + m_e c &= \sqrt{p_e^2 + m_e^2 c^2} \\ (\hbar(k_1 - k_2) + m_e c)^2 &= p_e^2 + m_e^2 c^2 \\ p_e^2 &= (\hbar(k_1 - k_2) + m_e c)^2 - m_e^2 c^2 \\ p_e^2 &= \hbar^2(k_1 - k_2)^2 + 2\hbar(k_1 - k_2)m_e c + \cancel{m_e^2 c^2} - \cancel{m_e^2 c^2} \\ p_e^2 &= \hbar^2(k_1 - k_2)^2 + 2\hbar(k_1 - k_2)m_e c \end{aligned}$$

Теперь выражаем квадрат импульса из закона сохранения импульса:

$$\begin{aligned} \hbar\vec{k}_1 &= \vec{p}_e + \hbar\vec{k}_2 \\ \vec{p}_e &= \hbar(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \\ p_e^2 &= (\vec{p}_e)^2 = \hbar^2(\vec{k}_1 - \vec{k}_2)^2 \\ &= \hbar^2[(\vec{k}_1)^2 - 2\vec{k}_1\vec{k}_2 + (\vec{k}_2)^2] \\ p_e^2 &= \hbar^2(k_1^2 + k_2^2 - 2k_1 k_2 \cos \theta) \end{aligned}$$

где θ — угол между векторами \vec{k}_1 и \vec{k}_2 , т. е. это угол рассеяния.

Приравнявая два выражения для p_e^2 , получим

$$\begin{aligned}
 \hbar^2(k_1 - k_2)^2 + 2\hbar(k_1 - k_2)m_e c &= \hbar^2(k_1^2 + k_2^2 - 2k_1 k_2 \cos \theta) \\
 \cancel{\hbar^2 k_1^2} - 2\hbar^2 k_1 k_2 + \cancel{\hbar^2 k_2^2} + 2\hbar(k_1 - k_2)m_e c & \\
 &= \cancel{\hbar^2 k_1^2} + \cancel{\hbar^2 k_2^2} - 2\hbar^2 k_1 k_2 \cos \theta \\
 - 2\hbar^2 k_1 k_2 + 2\hbar(k_1 - k_2)m_e c &= -2\hbar^2 k_1 k_2 \cos \theta \\
 - \hbar k_1 k_2 + (k_1 - k_2)m_e c &= -\hbar k_1 k_2 \cos \theta \\
 (k_1 - k_2)m_e c &= \hbar k_1 k_2 - \hbar k_1 k_2 \cos \theta \\
 (k_1 - k_2)m_e c &= \hbar k_1 k_2 (1 - \cos \theta) \\
 \frac{k_1 - k_2}{k_1 k_2} m_e c &= \hbar (1 - \cos \theta)
 \end{aligned}$$

Так как $k = 2\pi/\lambda$, то

$$\begin{aligned}
 k_1 - k_2 &= \frac{2\pi}{\lambda_1} - \frac{2\pi}{\lambda_2} = 2\pi \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1 \lambda_2} \\
 \frac{k_1 - k_2}{k_1 k_2} &= 2\pi \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1 \lambda_2} \frac{\lambda_1 \lambda_2}{4\pi^2} = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2\pi}
 \end{aligned}$$

Возвращаемся к основной формуле

$$\begin{aligned}
 \frac{k_1 - k_2}{k_1 k_2} m_e c &= \hbar (1 - \cos \theta) \\
 \frac{m_e c}{2\pi} (\lambda_2 - \lambda_1) &= \hbar (1 - \cos \theta) \\
 \lambda_2 - \lambda_1 &= \frac{2\pi \hbar}{m_e c} (1 - \cos \theta)
 \end{aligned}$$

Итоговая формула:

$$\boxed{\lambda_2 - \lambda_1 = \lambda_c (1 - \cos \theta)}$$

где $\lambda_c = 2\pi\hbar/(m_e c)$ — комптоновская длина волны.

Формула комптоновской длины волны получается из формулы де-бройлевской длины волны путём замены скорости частицы v на скорость света c . Комптоновская длина волны — одна из характеристик элементарных частиц в квантовой теории поля.

11.2 Представления об атомах

11.2.1 Античные идеи

Понятие об атоме как о наименьшей неделимой части материи было впервые сформулировано древнеиндийскими и древнегреческими философами.

Древнегреческий философ Демокрит полагал, что свойства того или иного вещества определяются формой, массой, и другими характеристиками образующих его атомов.

У огня атомы остры, поэтому огонь способен обжигать, у твёрдых тел они шероховаты, поэтому накрепко сцепляются друг с другом, у воды — гладки, поэтому она способна течь. Даже душа человека, согласно Демокриту, состоит из атомов.

11.2.2 Атом с точки зрения химии

В 17 и 18 веках химикам удалось экспериментально подтвердить древнюю идею, показав, что некоторые вещества не могут быть подвергнуты дальнейшему расщеплению на составляющие элементы с помощью химических методов.

На международном съезде химиков, проходившем в Германии в 1860 году было принято определение понятия атома.

Атом

есть наименьшая частица химического элемента, входящая в состав простых и сложных веществ.

Такое определение формально верно и вполне достаточно для целей химической науки. Однако оно предполагает, что атом неделим.

11.2.3 Открытие электрона и гипотезы об устройстве атома

Английский физик Джозеф Джон Томсон в 1897 году обнаружил, что вещество может испускать электроны.

Из этого следует, что атом не является неделимым.

В 1903 году Дж. Дж. Томсон предложил рассматривать атом как положительно заряженное тело с заключёнными внутри него электронами — «пудинг с изюмом».

Японский физик Хантаро Нагаока в 1904 предложил модель, построенную по аналогии с планетой Сатурн.

В этой модели вокруг маленького положительного ядра по орбитам вращались электроны, объединённые в кольца. Модель была построена на аналогии с расчётами устойчивости колец Сатурна — кольца уравновешены из-за очень большой массы планеты.

11.2.4 Планетарная модель Резерфорда

В 1911 году англичанин Эрнест Резерфорд, ученик Дж. Дж. Томсона, на основе своих экспериментов пришёл к выводу, что атом представляет собой подобие планетной системы.

Он предположил, что электроны движутся по орбитам вокруг расположенного в центре атома тяжёлого положительно заряженного ядра. Эта модель получила название планетарной.

11.3 Атом Резерфорда

11.3.1 Мотивация исследований структуры атома

Достаточно долго учёные полагали, что атом не имеет никакой внутренней структуры.

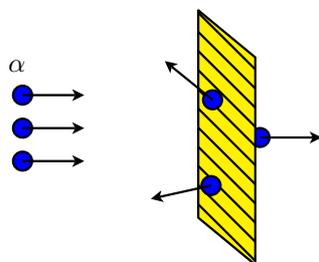
В начале 20 века, благодаря открытию Дж. Дж. Томсона, стало известно, что в атомах есть электроны.

Атом электрически нейтральный, а электрон заряжен отрицательно. Значит в атомах должна находиться также некоторая положительная субстанция.

Нужно было в эксперименте обнаружить эту неизвестную субстанцию.

11.3.2 Опыт Резерфорда

В 1911 году Эрнест Резерфорд исследовал рассеяние α -частиц при прохождении тонкой металлическую фольги.



Эти частицы значительно тяжелее электрона. (Позже было установлено, что это ядра атомов гелия).

Значит они не будут «замечать» электроны в атоме. Характер их рассеивания будет зависеть только от взаимодействия с положительной субстанцией.

11.3.3 Результат опыта

Предположим, что верна модель «пудинг с изюмом». Значит атом более или менее однороден. Все частицы ведут себя одинаково. Если они имеют достаточно энергии, они проникают сквозь вещество. Если энергии мало, то они все отскакивают.

В опыте оказалось, что часть частиц проходит, а существенная часть отскакивает практически назад. Такое возможно только если в атомах вещество распределено неоднородно.

11.3.4 Объяснение результата опыта при помощи планетарной модели.

На основе этого опыта Резерфорд предположил, что атом устроен наподобие солнечной системы — массивное положительно ядро в центре и электроны вращаются вокруг него по некоторым орбитам. Почти вся масса атома приходится на его ядро.

Используя эту модель, Резерфорд получил формулу для распределения углов рассеяния и эта формула была подтверждена экспериментально.

11.4 Противоречия в модели Резерфорда и постулаты Бора

11.4.1 Неустойчивость планетарной модели

Модель атома, в которой электроны двигаются по орбитам вокруг атомов наподобие планет солнечной системы, является неустойчивой.

Согласно классической электродинамике, при движении заряда меняется электромагнитное поле, которое он создаёт. Если заряд движется с ускорением, он излучает электромагнитные волны.

Заряды в планетарной модели двигаются вокруг ядра под действием центростремительной силы — это сила Кулона.

Следовательно происходит движение с ускорением и значит должны излучаться электромагнитные волны.

На излучение расходуется кинетическая энергия электрона. Значит его скорость должна непрерывно уменьшаться.

Уменьшение скорости — уменьшение радиуса орбиты. В итоге электрон просто должен упасть на ядро.

Таким образом, классическая электродинамика оказалась не в состоянии объяснить, почему существуют устойчивые атомы.

11.4.2 Постулаты Бора

Чтобы избежать противоречий с экспериментами, Нильс Бор в 1913 году сформулировал два постулата.

1. Из бесконечного множества электронных орбит, допустимых классической механикой, электрон в атоме может занимать орбиты только из дискретного набора.

Каждая из орбит характеризуется энергией \mathcal{E}_n и моментом импульса $L = m_e v r = n\hbar$, где $n = 1, 2, \dots$ — целое число.

Двигаясь по этим орбитам электрон не излучает (вопреки классической электродинамике). Поэтому такие орбиты называются стационарными.

2. Атом излучает и поглощает энергию при переходе электрона с одной орбиты на другую.

При этом энергия меняется скачком и если переход сопровождается излучением фотона, то его частота удовлетворяет правилу Бора:

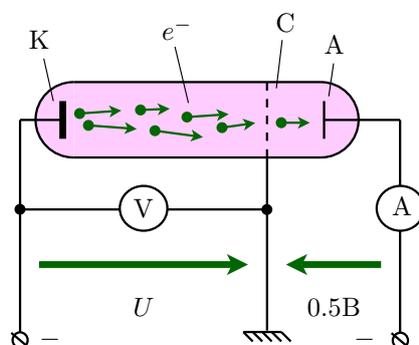
$$\hbar\omega = \mathcal{E}_n - \mathcal{E}_m$$

11.5 Опыт Франка и Герца

11.5.1 Экспериментальная установка

Существование дискретных энергетических уровней атома было подтверждено экспериментально в 1914 году в опыте Франка и Герца.

В основе опыта — электронно-вакуумная трубка, заполненная парами ртути. Трубка имеет катод К, анод А и сетку С.



Между катодом и сеткой приложено ускоряющее напряжение U , которое в ходе опыта может принимать различные значения.

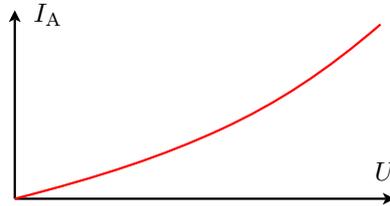
Между сеткой и анодом приложено небольшое тормозящее напряжение равное 0.5В .

11.5.2 Описание опыта: ошибочность классического подхода

Электроны, покинувшие катод, ускоряются на пути к сетке и сталкиваются с атомами ртути. По классическим представлениям, атомы ртути могут получить любую порцию энергии. Следовательно, при любом ускоряющем напряжении U какие-то столкновения будут неупругими, т. е. электроны будут отдавать свою энергию и задерживаться у сетки тормозящим напряжением между сеткой и анодом.

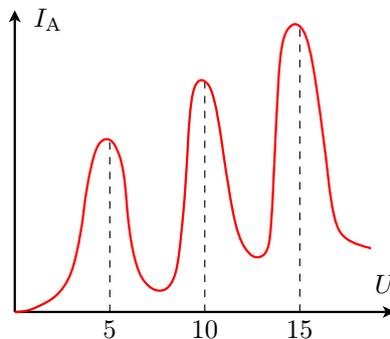
Другие столкновения будут упругими — электроны не потеряют энергию, дойдут до анода и по цепи потечёт ток.

Вольт-амперная характеристика в этом случае должна быть монотонно возрастающей.



11.5.3 Объяснение на основе постулатов Бора

Эксперимент показал, что верны не классические представления, а постулаты Бора — атомы ртути могут поглощать энергию только порциями, кратными 4.9эВ .



Когда ускоряющее напряжение мало, электронам не хватает энергии, чтобы возбудить атомы ртути. Столкновения только упругие и вольт-амперная характеристика растёт.

Достигнув максимума при $U = 4.9\text{В}$, кривая начинает спадать. Это значит, что электронам теперь достаточно энергии, чтобы возбудить атомы ртути и происходят неупругие столкновения. Отдав энергию атомам ртути, электроны задерживаются у сетки — это объясняет спад анодного тока.

Новый рост кривой начинается из-за того, что электроны после столкновения успевают снова ускориться достаточно, чтобы пройти от сетки к аноду.

Когда кривая достигает второго максимума и начинает снова спадать, электронам хватает энергии чтобы дважды за время движения про взаимодействовать с атомами ртути. Третий максимум соответствует трёхкратному взаимодействию и так далее.

12 Ранняя квантовая механика. Волновые свойства вещества

12.1 Боровская модель атома водорода

12.1.1 Исходные положения теории Бора

Эксперимент Франка и Герца показывает, что постулаты Бора справедливы. На основе этих постулатов можно вычислить радиусы круговых стационарных орбит и соответствующие энергии электронов простейших атомных системы.

Будем рассматривать атомные системы, у которых вокруг ядра вращается единственный электрон. Такой системой является атом водорода и ионы элементов из начала таблицы Менделеева: He^+ , Li^{++} и так далее. Будем считать, что электрон движется по круговой орбите.

Считаем, что масса ядра настолько больше массы электрона, что ядро можно считать неподвижным. У водорода самое лёгкое ядро. Даже для него масса ядра в 1836 раз больше массы электрона.

12.1.2 Кинетическая энергия электронов

Заряд ядра обозначим как Ze , где e — заряд электрона по абсолютной величине, Z — целое число, равное порядковому номеру элемента: для водорода $Z = 1$, для гелия $Z = 2$, для лития $Z = 3$.

Запишем второй закон Ньютона для кругового движения электрона. Центробежной силой, которая удерживает электрон на орбите является сила Кулона.

$$ma_{\text{цс}} = F_{\text{цс}} \Rightarrow m \frac{v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r^2}$$

Если умножить левую и правую части на $r/2$, то получим кинетическую энергию:

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r}$$

12.1.3 Потенциальная энергия электронов

Потенциальная энергия кулоновского взаимодействия равна $U = -Ze^2/(4\pi\epsilon_0 r)$.

Значит полная энергия электрона равна:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = K + U &= \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r} \\ &= \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r} - \frac{2}{8\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r} \\ \mathcal{E} &= -\frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r} \end{aligned}$$

12.1.4 Квантование момента импульса и радиусы орбит

Вернёмся к исходному выражению для второго закона Ньютона $ma_{\text{цс}} = F_{\text{цс}}$ и используем правило квантования момента импульса $mvr = n\hbar$:

$$\begin{aligned} m \frac{v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r^2}, \quad v = \frac{n\hbar}{mr} &\Rightarrow \cancel{m} \frac{n^2 \hbar^2}{m^{\cancel{2}} r^{\cancel{2}}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r^{\cancel{2}}} \\ \frac{n^2 \hbar^2}{mr} &= \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \\ \boxed{r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 n^2 \hbar^2}{Ze^2 m}} \end{aligned}$$

12.1.5 Уровни энергии

Подставим r_n в формулу для энергии:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_n &= -\frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r_n} = -\frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2 m}{4\pi\epsilon_0 n^2 \hbar^2} \\ \boxed{\mathcal{E}_n = -\frac{Z^2 e^4 m}{32\pi^2 \epsilon_0^2 n^2 \hbar^2}} \end{aligned}$$

Мы получили формулы для энергий и радиусов стационарных орбит атома водорода.

Орбиты образуют дискретный набор, нумеруемый n . Число n называется главным квантовым числом. При $n = 1$ состояние атома называется основным.

12.2 Спектральные закономерности

12.2.1 Сплошной, линейчатый и полосатый спектры

Накалённые твердые тела испускают тепловое излучение, имеющее *сплошной спектр*. Это значит что ненулевая интенсивность излучения наблюдается в непрерывном диапазоне длин волн.

У газов, наряду со сплошной областью наблюдаются *линейчатые и полосатые спектры*.

- Линейчатый спектр состоит из ряда закономерно расположенных более или менее узких спектральных линий.
- Полосатый спектр состоит из широких полос. Каждая полоса образована большим числом узких спектральных линий расположенных близко друг к другу. Полосы кажутся сплошными при наблюдении с низким разрешением.

Линейчатые спектры испускаются атомами и ионами, а полосатые — молекулам.

12.2.2 Комбинационный принцип Ритца

Комбинационный принцип Ритца

является основным законом спектроскопии. Он установлен эмпирически и гласит, что всё многообразие спектральных линий данного атома можно представить путём попарных комбинаций величин, называемых спектральными термами:

$$\frac{1}{\lambda} = T_m - T_n$$

Термы — величины положительные и нумеруются в порядке убывания: при $m < n$ должно быть $T_m > T_n$.

12.2.3 Спектральные серии

Если в формуле $1/\lambda = T_m - T_n$ зафиксировать m и придавать n всевозможные значения, начиная с $n = m + 1$, то получится система линий, называемая спектральной серией.

Пример серии: все спектральные линии $n \rightarrow 1$, т.е. соответствующие $n = 2, 3, 4, \dots$ и $m = 1$, все спектральные линии $n \rightarrow 2$, т.е. $n = 3, 4, 5, \dots$, $m = 2$.

Совокупность спектральных серий составляет спектр рассматриваемого атома.

Спектр атома есть его уникальная характеристика, отличающая его от других атомов. Поэтому, анализируя спектры, можно определять, из каких атомов состоит то или иное вещество. В частности, таким образом узнают состав звезд.

12.2.4 Спектры водородоподобных атомов

Аналитические выражения для термов подавляющего большинства атомов неизвестны. Их вычисляют на основе экспериментальных данных.

Исключение составляют водородоподобные системы — ядро с единственным электроном. Спектры таких атомов и ионов хорошо описываются на основе теории Бора.

Вспомним правило частот Бора: $\hbar\omega = \mathcal{E}_n - \mathcal{E}_m$. Подставим сюда найденное значение энергии получим:

$$\begin{aligned} \hbar\omega &= -\frac{Z^2 e^4 m}{32\pi^2 \varepsilon_0^2 n^2 \hbar^2} + \frac{Z^2 e^4 m}{32\pi^2 \varepsilon_0^2 m^2 \hbar^2} = \frac{Z^2 e^4 m}{32\pi^2 \varepsilon_0^2 \hbar^2} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \\ \hbar \frac{2\pi c}{\lambda} &= \frac{Z^2 e^4 m}{32\pi^2 \varepsilon_0^2 \hbar^2} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \\ \frac{1}{\lambda} &= \frac{Z^2 e^4 m}{64\pi^3 \varepsilon_0^2 \hbar^3 c} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \end{aligned}$$

Выражение перед скобкой называется постоянной Ридберга:

$$R = \frac{Z^2 e^4 m}{64\pi^3 \varepsilon_0^2 \hbar^3 c}$$

Таким образом, получаем формулу:

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

Следовательно, спектральный терм для водородоподобной атомной системы равен

$$T_n = \frac{R}{n^2}$$

Полученные спектральные формулы хорошо воспроизводит экспериментальные закономерности, что говорит о том, что постулаты Бора были верны.

12.2.5 Спектральные серии атома водорода

При изучении спектров атома водорода были обнаружены следующие серии.

1. Серия Лаймана, $n \rightarrow 1$, ультрафиолет.
2. Серия Бальмера, $n \rightarrow 2$, первые 4 линии — видимый свет, остальные ультрафиолет.
3. Серия Пашена, $n \rightarrow 3$, инфракрасный.
4. Серия Брэккета, $n \rightarrow 4$, далёкий инфракрасный.
5. Серия Пфунда, $n \rightarrow 5$, далёкий инфракрасный.

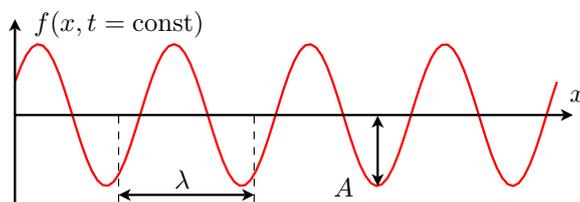
12.3 Свойства волн (повторение)

12.3.1 Плоская монохроматическая волна. Фазовая скорость

Уравнение одномерной плоской монохроматической волны имеет вид:

$$\vec{E} = A \cos(\omega t - kx + \alpha)$$

Мгновенный снимок волны в некоторый момент времени показан на рисунке.



Скорость, с которой бегут горбы и впадины называется фазовой.

$$v_{\text{фаз}} = \frac{\omega}{k}$$

12.3.2 Монохроматические волны и передача информации

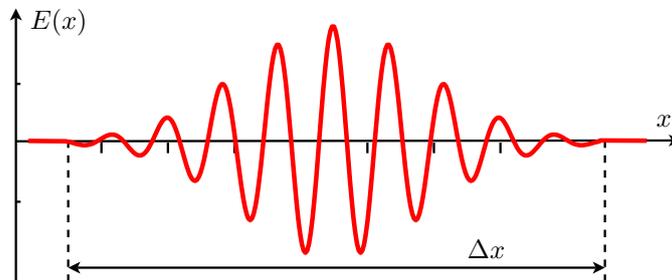
С помощью монохроматической волны нельзя передавать информацию, так как каждый последующий «горб» ничем не отличается от предыдущего.

Для передачи сигнала нужно на волне сделать «отметку», например, оборвав её на некоторое время Δt .

Однако в этом случае волна уже не будет монохроматической, т. е. не будет описываться формулой $E = A \cos(\omega t - kx + \alpha)$.

12.3.3 Волновые пакеты. Групповая скорость

Проще всего передавать сигнал с помощью волнового пакета или импульса.



Импульс распространяется с скоростью, которая называется групповой,

$$v_{\text{грп}} = \frac{d\omega}{dk}$$

12.3.4 Дисперсия

Применительно к световым волнам явление дисперсии состоит в том, что показатель преломления среды зависит от длины волны.

Также дисперсию можно охарактеризовать как зависимость фазовой скорости от длины волны (или частоты).

Наличие такой зависимости приводит к тому, что волновой пакет в среде с дисперсией не может распространяться бесконечно долго и «расплывается».

12.4 Гипотеза де Бройля о волновых свойствах вещества

12.4.1 Формулировка гипотезы

В 1924 году французский физик Луи де Бройль высказал следующую гипотезу.

Гипотеза де Бройля

Установленный ранее для фотонов корпускулярно-волновой дуализм присущ всем частицам — электронам, протонам, атомам и так далее.

Количественные соотношения между волновыми и корпускулярными свойствами частиц должны быть те же, что и для фотонов.

Если частица имеет энергию E и импульс \vec{p} , то с ней связана волна, которой можно сопоставить длину волны и энергию.

$$\vec{p} = \hbar \vec{k}, \quad E = \hbar \omega$$

12.4.2 Длина волны де Бройля

Если вспомнить, что $k = 2\pi/\lambda$, то получим, что длина волны де Бройля равна

$$p = \hbar k \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{h}{p}}$$

Если частица движется с нерелятивистской скоростью, то её импульс равен $p = mv$.

Тогда:

$$\boxed{\lambda = \frac{h}{mv}}$$

(Обратить внимание, что в этой формуле h , а не \hbar).

12.4.3 Групповая скорость волны де Бройля

То что с каждой частицей можно связать волну выходит за рамки привычного здравого смысла. Чтобы придать волне де Бройля «понятный» физический смысл, найдём её групповую скорость.

Рассмотрим свободную частицу:

$$v_{\text{грп}} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(\hbar\omega)}{d(\hbar k)} =$$

Учтём, что $\hbar k = p$ и $\hbar\omega = E$.

Так как частица свободная, то её энергия равна кинетической энергии: $\hbar\omega = mv^2/2 = p^2/(2m)$, где v — скорость частицы.

Следовательно:

$$\frac{dE}{dp} = \frac{d}{dp} \frac{p^2}{2m} = \frac{p}{m} = v$$

12.4.4 Частица как волновой пакет

Мы получили, что групповая скорость волны де Бройля равна скорости частицы,

$$\boxed{v_{\text{грп}} = v}$$

Кажется, что это позволяет рассматривать частицу как волновой пакет, распространяющийся с скоростью частицы. Волновой пакет проще соотнести с понятием частицы чем волну как таковую.

12.4.5 Фазовая скорость волны де Бройля. Дисперсия

Однако, выяснилось, что это ошибочное утверждение. Найдём фазовую скорость волны де Бройля.

$$v_{\text{фаз}} = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar\omega}{\hbar k} = \frac{E}{\sqrt{2mE}} = \sqrt{\frac{E}{2m}} = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2m}}$$

Мы получили, что фазовая скорость зависит от частоты.

Волны де Бройля обладают дисперсией даже в вакууме. Любой волновой пакет будет расплываться в пространстве. Следовательно, частица не может быть представлена как волновой пакет.

Квантовые закономерности не соответствуют нашим интуитивным представлениям. Всякие попытки как-то объяснить квантовые идеи при помощи «понятных» классических представлений проваливаются.

12.4.6 Оценка значения длины волны де Бройля

Почему в обычной жизни мы не замечаем у предметов волновых свойств? Вычислим длину волны де Бройля для пылинки $m = 1\text{мг}$, движущейся со скоростью $v = 10^{-6}\text{м/с}$.

$$\lambda = \frac{h}{mv} \approx 7 \cdot 10^{-20}\text{см}$$

Мы видим, что длина волны много меньше размеров пылинки и поэтому волновые свойства практически не проявляются.

Рассмотрим электрон, разгоняемый разностью потенциалов $U = 150\text{В}$.

Кинетическая энергия электрона равна $K = 150\text{эВ}$, импульс $p = \sqrt{2m_e K}$.

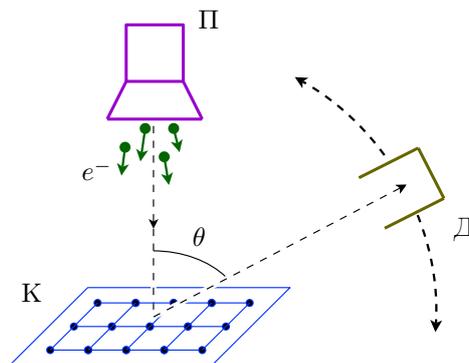
$$\lambda \approx 0.1\text{нм}$$

Эта величина сопоставим с межатомным расстоянием. Следовательно, электроны должны дифрагировать на кристаллической решётки.

12.5 Экспериментальная проверка гипотезы де Бройля. Волновые свойства электрона

12.5.1 Опыт Дэвиссона и Джермера. Экспериментальная установка

Американские физики Дэвиссон и Джермер в 1927 году поставили эксперимент, который доказал, что электроны могут демонстрировать волновые свойства.



В экспериментальной установке электронная пушка П бомбардирует кристалл К электронами.

Электроны ускоряются и отбираются таким образом, чтобы пучок электронов, долетающих до кристалла был моноэнергетическим.

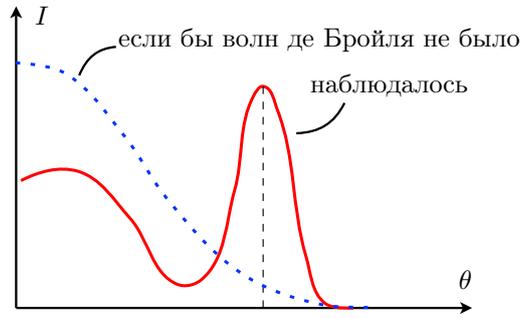
Иными словами, у всех почти одинаковая кинетическая энергия, почти одинаковые скорости и, следовательно, должны быть почти одинаковыми дебройлевские длины волн.

Электроны, попадая на кристалл, отражаются и улавливаются детектором Д.

Детектор подсоединён к гальванометру и при попадании электронов гальванометр регистрирует ток.

Детектор может двигаться вокруг установки. В ходе эксперимента снимают зависимость тока от угла θ .

12.5.2 Результаты опыта

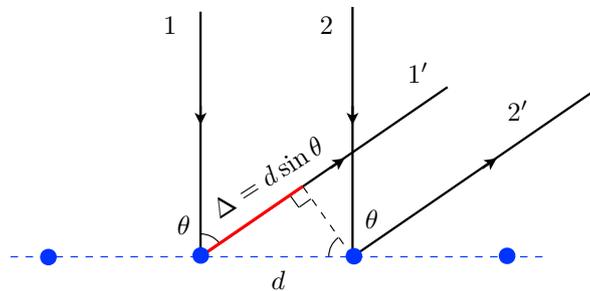


Если бы волн де Бройля не существовало, то электроны просто бы рассеивались. Вид кривой в этом случае показан пунктиром.

На самом деле в опыте была получена другая кривая — сплошная линия.

12.5.3 Объяснение результатов опыта

Расстояния между атомами решётки сопоставимо с ожидаемой длиной волны де Бройля для электронов и поэтому кристалл выступает как дифракционная решётка для электронов.



На схеме d — расстояние между атомами кристаллической решётки, Δ — разность хода отражённых лучей.

Возникает интерференция отражённых электронов и в зависимости от угла θ наблюдаются минимумы и максимумы тока.

Длина волны электронов, вычисленная по найденному положению дифракционного максимума совпала с длиной волны, предсказанной де Бройлем.

12.5.4 Опыты Томсона и Тартаковского

В один год с Дэвиссоном и Джермером, американский физик Томсон и независимо от него советский физик Тартаковский получили дифракционную картину при прохождении электронного пучка через металлическую фольгу.

Картина регистрировалась на фотопластинке, на которую электроны действуют также как и фотоны.

Кристаллическая решётка выступает как дифракционная решётка и поэтому на фотопластинке возникает характерная интерференционная картина из светлых и тёмных колец.

Аналогично были проведены опыты по дифракции нейтронов и молекул. Все эти опыты окончательно подтвердили факт существования волн де Бройля.

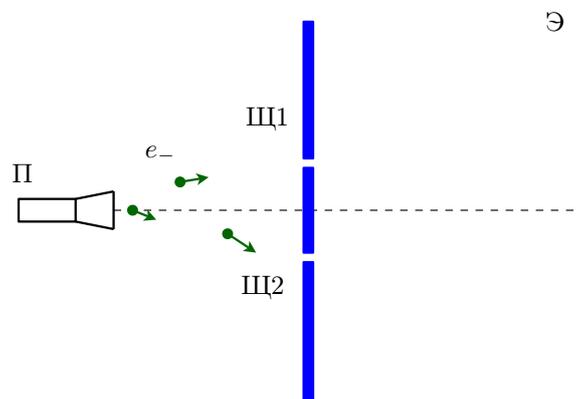
13 Принцип неопределённости. Уравнение Шрёдингера

13.1 Интерференция частиц

13.1.1 Схема мысленного эксперимента

После открытия волн де Бройля было поставлено много экспериментов по обнаружению волновых свойств частицы материи. Общую идею и результат этих опытов описывает следующий мысленный эксперимент. Пушка П направляет частицы на непрозрачное препятствие с двумя щелями.

За щелями находится экран, на котором фиксируются точки, в которые приходят частицы. (Например — фотопластинка.)

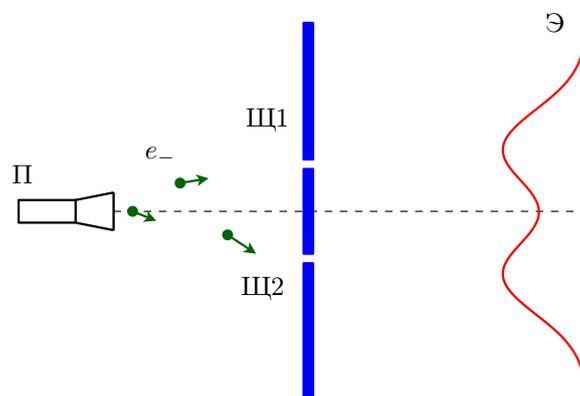


Частицы испускаются редко, так что следующая вылетает только когда первая уже достигла экрана!

Каждая частица оставляет на экране точку. Если наблюдать достаточно долго, то на экране появляются скопления точек от большого количества пришедших частиц.

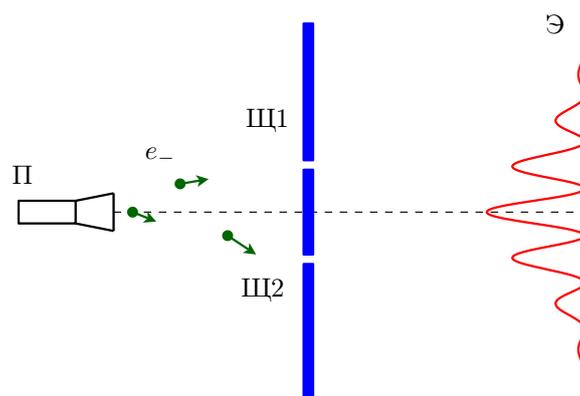
13.1.2 Результат опыта при отсутствии волновых свойств

Если бы волновых свойств не было, то частица с равными вероятностями проходила бы каждую из щелей, формируя на экране два соответствующих пятна.



13.1.3 Фактический результат опыта

На самом деле, возникает интерференционная картина, такая же как в опыте Юнга по интерференции света на двух щелях.



13.1.4 Интерпретация результата

Частица раздваивается, проходит одновременно через две щели и затем интерферирует сама с собой?

Интерференция объясняется тем, что частица может проявлять свойство волны — волны де Бройля. Именно она интерферирует и приводит к наблюдаемой картине.

13.1.5 Влияние наблюдателя на результат эксперимента

Невозможно установить детектор около одной из щелей, чтобы узнать, где же на самом деле проходит частица.

Чем точнее детектор будет определять прохождение частицы, тем сильнее окажется искажённой интерференционная картина.

Это объясняется тем, что на уровне субатомных частиц уже невозможно проводить измерения не оказывая заметного влияния на объект измерения.

Невозможно создать детектор, который бы определяя прохождения частицы никак бы на него не влиял.

Следовательно, поместив детектор у одной из щелей, мы меняем условие самого опыта и поэтому наблюдаем уже другую картину на экране.

13.1.6 Выводы из экспериментов по интерференции частиц

- Каждая частица обладает свойствами волны, а волны могут проявлять себя как поток частиц.
- Для частиц не определено понятие траектории — в принципе нельзя сказать, по какой траектории частица пришла из одной точки в другую.

13.1.7 Реальный эксперимент

Учёные из Венского университета (Австрия) провели в 2012 году эксперимент с дифракцией и интерференцией молекул фталоцианина и его производных, весящих до 1298 атомных единиц массы.

Фталоцианин и его вариации использовались потому, что это — флуоресцентные красители (молекулы испускают свет после поглощения энергии возбуждения). Их единичные молекулы которых можно эффективно снимать на видео при помощи микроскопа с камерой, попутно определяя их положение с точностью 10 нм.

Пучок летящих друг за другом молекул в вакуумированной трубе создавался при помощи испарения с поверхности стекла очень тонкого слоя красителя, нагреваемого слабым (50 мВт) лазерным лучом с длиной волны 445 нм (синий цвет).

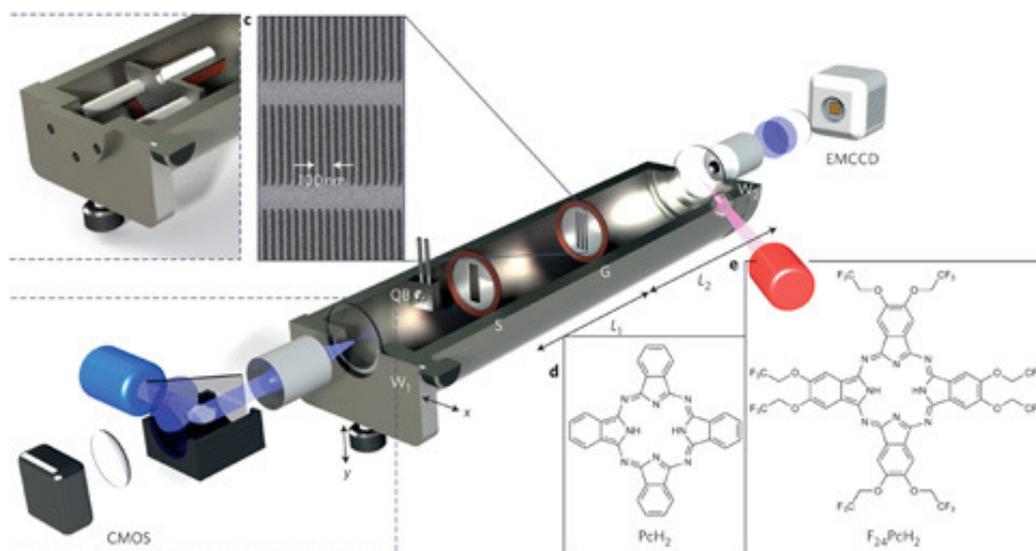
Разработанная экспериментаторами техника измерения площади красителя на стекле позволила убедиться, что с поверхности образца вылетали друг за другом именно единичные молекулы, а не их конгломераты.

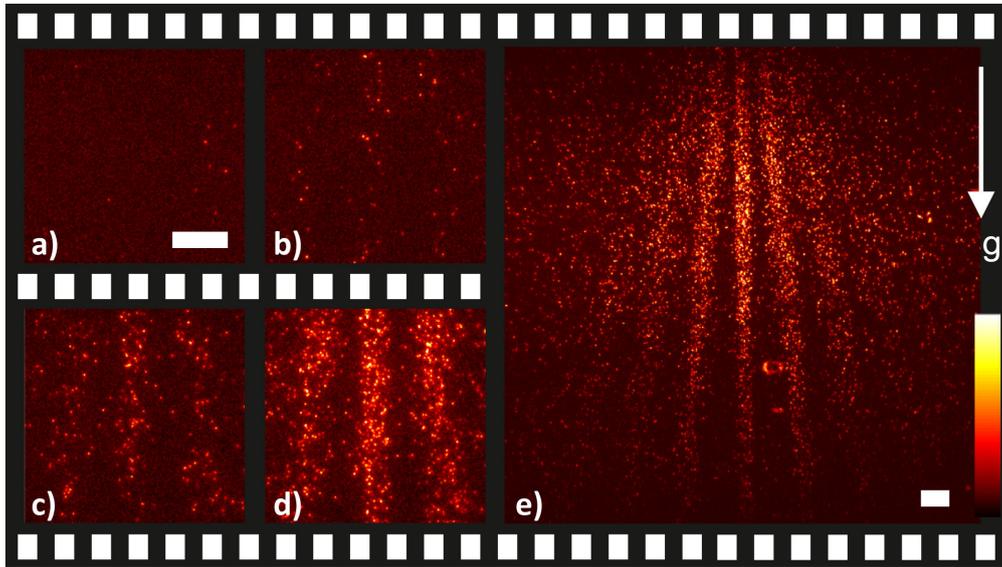
Далее молекулы пролетали сквозь коллиматорную щель, а затем попадали на дифракционную решётку из нитрида кремния. Её толщина составляла 10 нм, период решётки 100 нм, ширина щелей 50 нм.

После решётки молекулы попадали на поверхность второго (финишного) кварцевого окна, где их возбуждал другой лазер (661 нм, красный), направляемый на пластину под углом так, чтобы не засвечивать камеру.

Флуоресценция фталоцианина снималась через объектив микроскопа и фильтр при помощи светочувствительной матрицы с электронным умножением, способной ловить единичные фотоны.

Схема установки





Экран в начале опыта (a), через две минуты (b), 20 мин (c), 40 мин (d), 90 мин (e). g – направление силы тяжести. Масштабные линейки – 20 мкм. Цветная шкала отражает число пойманных фотонов (от нуля до 650).

13.2 Применимость классического описания

Главным масштабным множителем в квантовом мире является постоянная Планка.

Поэтому существует простой способ оценить, на каком языке следует описывать ту или иную систему.

Если параметры рассматриваемой физической системы скомбинировать в величину H , имеющую размерность постоянной Планка Дж · с, тогда систему можно описывать при помощи классической физики, если

$$H \gg h$$

13.3 Принцип неопределённости Гейзенберга

13.3.1 Положение в пространстве частицы с волновыми свойствами

В классической физике состояние частицы или системы частиц описывается набором параметров, таких как координата, скорость, момент импульса и так далее.

Но когда частица ведёт себя как волна, её точное местоположение не определено. Становится неясно, как задавать её положение в пространстве.

Вместо точного задания координат, применим вероятностное описание.

13.3.2 Вероятностное задание положения частицы

Пусть $f(x)$ – некоторая функция, возможно комплексная, которая показывает вероятность обнаружить местоположение частицы момент времени t .

Если $|f(x_0)| = 0$ то в точке x_1 частицы нет, если $|f(x_1)| = 1$, то частица находится в точке x_1 .

13.3.3 Фурье разложение распределения вероятности

Согласно теореме Фурье, функцию $f(x)$ можно записать в следующем виде:

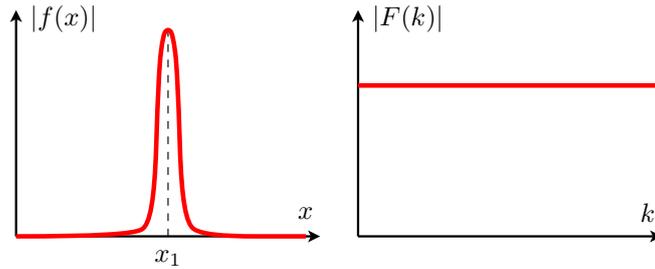
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k) e^{ikx} dk$$

Вспомним, что $e^{ikx} = \cos kx + i \sin kx$ – периодическая функция.

Смысл этой формулы в том, что функция $f(x)$ представлена как суперпозиция волн с волновым числом k и амплитудой $F(k)$. (Вообще говоря, чтобы была волна, тут должно быть не kx а $\omega t - kx$, но мы говорим о фиксированном моменте времени, о мгновенном снимке волны.)

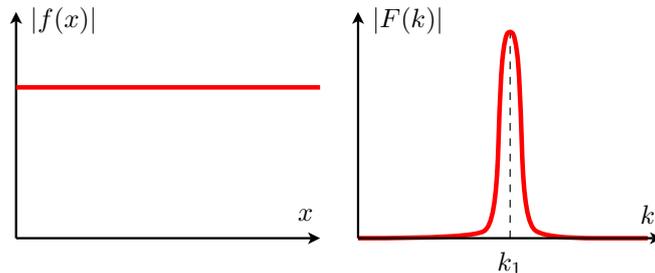
13.3.4 Одновременное задание координаты и волнового числа

Разложение Фурье устроено таким образом, что если $|f(x)|$ не равно нулю только в одной точке x_1 , то амплитуды волн $|F(k)|$ все одинаковы.



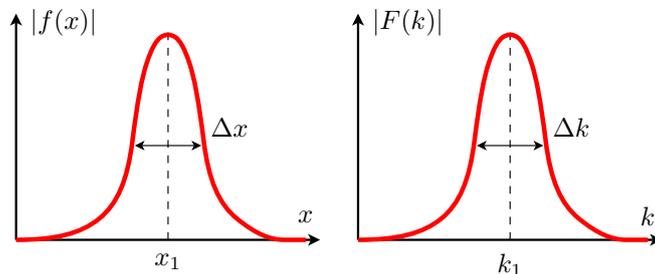
Это значит, что если мы точно знаем, что частица находится в точке x_1 , то мы ничего не можем сказать о конкретном значении её волнового числа k . Иначе говоря, её длина волны не определена.

Если мы точно зададим волновое число k_1 (т.е. измеряем длину волны де Бройля), то получим, что мы вообще ничего не можем сказать о координате частицы.



Вспомним опыт по интерференции частиц на двух щелях. Так как мы видим интерференционную картину, то можем найти дебройлевскую длину волны. При этом совсем ничего нельзя сказать о том, по какой траектории, т.е. через какую щель прошла частица.

Если мы измерили положение частицы около точки x_1 с точностью до некоторого интервала Δx , то и её волновое число будет определено с точностью до Δk .



Из теоремы Фурье, т.е. из чисто математических соображений, можно найти соотношение для Δx и Δk :

$$\Delta x \Delta k \approx 2\pi$$

13.3.5 Принцип неопределённости Гейзенберга

Согласно формуле де Бройля

$$\lambda = \frac{h}{p} \Rightarrow \frac{2\pi}{k} = \frac{h}{p} \Rightarrow k = \frac{2\pi p}{h} \Rightarrow \Delta k = \frac{2\pi}{h} \Delta p$$

Следовательно:

$$\Delta x \Delta k \approx 2\pi \Rightarrow \Delta x \frac{2\pi}{h} \Delta p \approx 2\pi$$

$$\boxed{\Delta x \Delta p \approx h}$$

Эта формула называется соотношением неопределённости Гейзенберга. Из него следует, что невозможно одновременно точно знать координату и импульс частицы.

Предыдущие рассуждения относились к мгновенным снимкам волн, сделанным в некоторый момент времени. Если же наоборот, рассматривать одну точку в пространстве, то получим ещё одну формулировку принципа неопределённости:

$$\Delta t \Delta E \approx h$$

Если мы можем измерить время, в течении которого частица находится в некотором состоянии с точностью до Δt , то энергия этого состояния нам известна с точностью до ΔE .

Отсюда следует, что точное значение энергии может быть определено только для таких состояний, в которых частица находится бесконечно долго.

13.3.6 Следствия из принципа неопределённости

- Невозможны состояния, в которых частица находится в состоянии покоя, так как Δx и Δp не могут быть одновременно равны нулю.
- К квантовому объекту не может быть применено понятие траектории.
- Теряет смысл деление полной энергии на кинетическую и потенциальную.

Кинетическая энергия зависит от импульса частицы, а потенциальная есть функция координат. Так как координаты и импульс не могут быть определены одновременно, то и выделение потенциальной и кинетической энергии теряет смысл.

13.4 Волновая функция

13.4.1 Волновая функция свободной частицы

Опыты показали, что движение микроскопических частиц нельзя описывать классическим способом, задавая закон изменения координат и импульсов.

Поэтому был разработан новый математический аппарат, в котором каждому микрообъекту сопоставляется волновая функция.

Частице, которая равномерно и прямолинейно движется вдоль оси x , соответствует волновая функция

$$\psi(x, t) = A \exp(i(px - Et)/\hbar)$$

Как известно, $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$.

Функции синус и косинус не имеют «краёв» слева и справа. Они определены на всей бесконечной числовой оси.

Следовательно, частица, описываемая волновой функцией $\psi(x, t) = A \exp(i(px - Et)/\hbar)$, существует во всём пространстве (для простоты мы говорим обо одномерном случае).

Иными словами, её положение в пространстве полностью не определено. При этом в полном соответствии с принципом неопределённости Гейзенберга она имеет точное значение импульса p .

У этой частицы точно определена энергия E . В соответствии с принципом неопределённости частица может находиться в этом состоянии бесконечно долго.

Такая частица — только удобная модель. В реальности не может существовать частиц, не испытывающих воздействия со стороны других частиц. Аналогия с материальной точкой — в реальности не существует точечных частиц без объёма, но иногда размерами можно пренебречь.

В общем случае волновая функция принимает комплексные значения и её невозможно наблюдать непосредственно в эксперименте.

13.4.2 Вероятностная интерпретация волновой функции

Если многократно повторять один и тот же опыт с микрочастицами, то его результаты будут носить вероятностный характер: в первом опыте частица будет обнаружена в точке x_1 , во втором в точке x_2 и т. д.

Вероятность обнаружить частицу на отрезке от x до $x + dx$ пропорциональна квадрату модуля волновой функции:

$$P = \psi(x, t)\psi^*(x, t)dx = |\psi(x, t)|^2 dx$$

Здесь «*» обозначает операцию комплексного сопряжения. (Для простоты мы говорим об одномерном случае, но аналогично можно рассмотреть три измерения.)

Так как квадрат модуля волновой функции есть вероятность, то на волновую функцию накладывают дополнительное условие нормировки:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x, t) \psi^*(x, t) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x, t)|^2 dx = 1$$

Интегрирование ведётся по всему пространству или по той области пространства где частица заведомо находится.

13.5 Уравнение Шрёдингера

13.5.1 Физический смысл уравнение Шрёдингера

Точно также как законы движения в классической механике выводятся из второго закона Ньютона, волновая функция вычисляется как решение уравнения Шрёдингера. Это уравнение есть основное уравнение нерелятивистской квантовой теории.

Уравнение Шрёдингера невозможно вывести из прежних представлений и теорий. Справедливость этого уравнения установлена тем, что все вытекающие при его применении следствия подтверждены экспериментом.

13.5.2 Получение уравнение Шрёдингера

Обсудим, на основании каких рассуждений можно сконструировать уравнение Шрёдингера. (Мы не выводим уравнение в строгом смысле. Мы пытаемся сконструировать, т. е. угадать правильное уравнение.)

Вспомним волновую функцию для свободной частицы.

$$\psi(x, t) = A \exp(i(px - Et)/\hbar)$$

Если вычислить производную по времени от $\psi(x, t)$, то получим энергию:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} E \psi \Rightarrow E = \frac{1}{\psi} i \hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

Вторая производная по координате даёт импульс:

$$\frac{\partial^2 \psi}{dx^2} = \left(\frac{ip}{\hbar}\right)^2 \psi \Rightarrow p^2 = -\frac{1}{\psi} \hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{dx^2}$$

Для нерелятивистских скоростей полная энергия равна сумме потенциальной и кинетической:

$$K + U = E \Rightarrow \frac{p^2}{2m} = E - U$$

Подставим сюда выражения для E и p :

$$-\frac{1}{\psi} \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{dx^2} = \frac{1}{\psi} i \hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} - U$$

13.5.3 Вид уравнения в одномерном случае

$$-\frac{1}{\psi} \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{dx^2} = \frac{1}{\psi} i \hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} - U$$

$$\boxed{i \hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + U(x, t) \psi}$$

Полученное уравнение называется одномерным уравнением Шрёдингера.

13.5.4 Уравнение в трёхмерном случае

В трёхмерном случае уравнение Шрёдингера имеет вид:

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + U(\vec{r}, t) \psi}$$

- m — масса частицы.
- ∇^2 — оператор Лапласа,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

- $U(\vec{r}, t)$ — потенциальная энергия. Эта функция задаётся «классическим образом», т. е. это потенциальная энергия точечной частицы в силовом поле.

13.5.5 Факторы, определяющие характер движения частицы

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + U(\vec{r}, t) \psi$$

Из уравнения следует, что характер движения частицы определяется

- видом функции потенциальной энергии $U(\vec{r}, t)$,
- наложенными граничными условиями.

13.5.6 Стационарное уравнение Шрёдингера

Стационарными называют состояния, в которых наблюдаемые физические величины не меняются с течением времени. В частности: $U = U(\vec{r})$.

Волновую функцию для стационарных состояний можно представить как произведение двух функций: одна зависит только от x , другая только от t .

$$\psi(\vec{r}, t) = \Psi(\vec{r}) e^{-iEt/\hbar}$$

Подставим волновую функцию такого вида в уравнение Шрёдингера. Продифференцируем по времени и сократим экспоненты. В результате получим уравнение Шрёдингера для стационарных состояний:

$$\boxed{\nabla^2 \Psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U(\vec{r})) \Psi = 0}$$

13.6 Квантование

13.6.1 Понятие квантования

Квантование — переход от классической величины, которая может изменяться непрерывно, к квантово-механической, которая может принимать только дискретные значения. Пример — квантование энергии электрона в атоме.

До открытия уравнения Шрёдингера квантование можно было только постулировать. Например Бор постулировал квантование энергии и момента импульса электрона в атоме.

Если описывать микрочастицы при помощи уравнения Шрёдингера и волновых функций, то квантование возникает естественным образом.

13.6.2 Природа квантования

Физический смысл имеют только такие решения уравнения Шрёдингера, которые во всех точках пространства удовлетворяют естественным и стандартным требованиям, накладываемым на решение дифференциального уравнения.

- Волновая функция должна быть конечной,
- однозначной,
- непрерывной,
- гладкой (т. е. без изломов).
- Уравнение Шрёдингера есть уравнение в частных производных. Его решения должны удовлетворять условиям на границе области пространства, в которой находится частица.

13.6.3 Собственные функции и собственные числа уравнения Шрёдингера

Заданным граничным условиям и потенциальной энергии соответствует набор решений.

Каждое из этих решений называется собственной функцией. Каждой собственной функции соответствует некоторое число, которое называется собственным значением.

Каждая собственная функция соответствует некоторому состоянию частицы, а соответствующее собственное значение — физической величине, характеризующей это состояние.

Пример: чтобы описать электрон в атоме, нужно задать формулу для его потенциальной энергии.

Решив уравнение Шрёдингера, мы получим набор собственных волновых функций, каждая из которых описывает одно из возможных состояний электрона. Собственные значения определяют энергию соответствующих состояний.

В зависимости от вида граничных условий собственные значения могут быть как дискретными, так и непрерывными. В первом случае говорят о квантовании физической величины.

13.7 Принцип суперпозиции волновых функций

Уравнение Шрёдингера — это линейное дифференциальное уравнение.

Это значит, что если ψ_1 и ψ_2 суть решения этого уравнения, то их любая линейная комбинация также будет решением,

$$\psi = C_1\psi_1 + C_2\psi_2$$

где C_1 и C_2 — произвольные константы.

Физическая интерпретация этого свойства — принцип суперпозиции волновых функций. Если у некоторой системы возможны являются состояния с волновой функцией ψ_1 и ψ_2 , то для неё возможно также и состояние, являющееся суперпозицией этих состояний, $\psi = C_1\psi_1 + C_2\psi_2$.

14 Интерпретации квантовой механики. Примеры квантовомеханических задач

14.1 Интерпретации квантовой механики

14.1.1 Необходимость осмысления положений квантовой механики

Классическая механика считает поведение частиц детерминированным: если мы точно знаем положение частицы в начальный момент времени, то, по крайней мере в принципе, мы можем точно предсказать её положение в любой другой момент времени.

Поведение микрочастиц оказывается совсем другим. Один и тот же опыт может давать разные исходы и квантовая механика может предсказать только вероятность исхода опыта. Это требует осмысления. Поэтому были предложено несколько интерпретаций квантовой механики.

14.1.2 Копенгагенская интерпретация Бора—Гейзенберга.

Волновая функция — это только удобный математический инструмент, позволяющий предсказывать вероятность обнаружить частицу в том или ином состоянии.

Вероятностное поведение микрочастиц — объективная реальность. Она такая какая она есть и не может быть как-либо объяснена.

Квантовые частицы не могут существовать в одном или другом состоянии, они существуют во всех возможных состояниях сразу. Общее количество возможных состояний квантового объекта называется его волновой функцией.

Выполняя измерение, мы случайным образом выбираем одно из возможных состояний частицы. Поэтому измерения в квантовой механике носят вероятностный характер.

Не имеют смысла вопросы типа «где была частица до тех пор, пока её зарегистрировали в данной точке». Она была во всех допустимых условиях эксперимента местах и во всех возможных состояниях сразу.

14.1.3 Интерпретация Пенроуза.

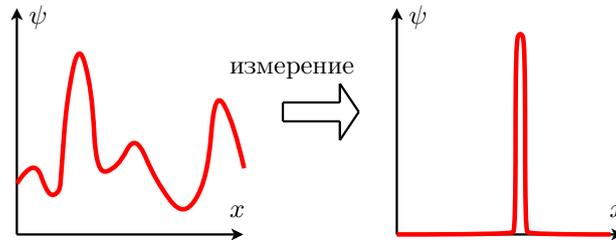
Волновая функция — это объективная реальность.

Это значит, что представляя себе микрочастицы, о них следует думать не как об упругих шариках, а как о некоторых «размазанных» в пространстве субстанциях.

Эти субстанции математически описываются волновыми функциями и их поведение полностью детерминировано, никаких вероятностных законов нет.

Однако если такая субстанция-частица вступает во взаимодействие с макроскопическим наблюдателем, то происходит её коллапс.

Она «собирается» в одной точке пространства. Точка выбирается случайным образом, так что вероятность собраться в точке x определяется квадратом модуля волновой функции в данной точке.



14.1.4 Многомировая интерпретация Эверетта

Квантовые частицы существуют во всех возможных состояниях сразу (как и в интерпретации Бора).

При всяком измерении мы выбираем не одно из состояний, а Вселенную, в которой реализовалось это состояние. Параллельно рождается пучок Вселенных со всевозможными альтернативными исходами.

Сознание каждого наблюдателя движется только вдоль одной линии времени, и он регистрирует эффект как вероятностный (может произойти, а может и не произойти). Однако существуют параллельные временные линии с параллельными копиями наблюдателя. На этих линиях регистрируются иные исходы опыта.

14.1.5 Скрытые переменные — Эйнштейн, Планк, Шрёдингер.

Квантовая механика — это не законченная наука. Существует пока неизвестные нам параметры, которые влияют на исход опыта.

Например, рассчитывая траекторию полёта ядра, но не принимая во внимание угол наклона орудия над горизонтом, мы будем вместо однозначной координаты точки падения, получать вероятностный результат.

Если бы мы сумели вывести квантовомеханические формулы с учётом скрытых параметров, то квантовая механика предсказывала бы результаты эксперимента точно.

Эта идея тщательно проверялась много лет, но никаких скрытых переменных найдено не было.

14.1.6 «Заткнись и считай»

Несмотря на вероятностный характер, квантовая механика позволят эффективно решать все стоящие перед ней практической задачи.

Следовательно, достаточно просто формально пользоваться её инструментами и не строить никаких дополнительных философских теорий.

14.2 Бесконечно глубокая потенциальная яма

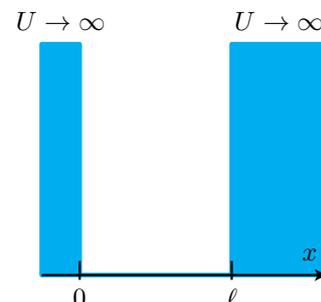
14.2.1 Постановка задачи

Рассмотрим частицу в прямоугольной потенциальной яме шириной ℓ , у которой бесконечно высокие стенки.

$$U(0 < x < \ell) = 0$$

Потенциальная энергия не меняется во времени, значит задача стационарная:

$$\nabla^2 \Psi(\vec{r}) + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U(\vec{r})) \Psi(\vec{r}) = 0$$



Задача одномерная и внутри ямы $U = 0$. Поэтому:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E \Psi = 0$$

14.2.2 Общее решение уравнение Шрёдингера

Для удобства обозначим

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

Тогда

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + k^2 \Psi = 0$$

Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$\Psi(x) = a \sin(kx + \alpha)$$

где a и α — произвольные постоянные.

14.2.3 Граничные условия

Вне ямы потенциальная энергия бесконечно велика, поэтому частица там существовать не может.

Следовательно, волновая функция должна обращаться в ноль на границах ямы, т. е. граничные условия имеют вид:

$$\Psi(x = 0) = 0, \quad \Psi(x = \ell) = 0$$

Исходя из этого ищем параметры решения.

$$\Psi(0) = a \sin(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

$$\Psi(\ell) = a \sin(k\ell) = 0 \Rightarrow k\ell = \pm n\pi$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$ (Случай $n = 0$ исключаем, так как тогда $\Psi \equiv 0$, т. е. частицы нет вообще.)

14.2.4 Уровни энергии

Подставим в $k\ell = n\pi$ значение k :

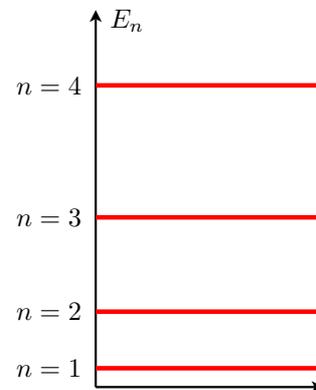
$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \Rightarrow E = \frac{k^2 \hbar^2}{2m}$$

$$E = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2m\ell^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Полученная формула дает собственные значения энергии частицы.

Энергия оказалась квантованной, спектр — дискретным.

Энергия растёт пропорционально n^2 , т. е. энергетические уровни становятся реже с ростом n .



14.2.5 Собственные функции

Найдем собственные функции, подставив $k\ell = \pm n\pi$ в формулу для Ψ :

$$\Psi(x) = a \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right)$$

Мы взяли только $+n\pi$, так как выбрав $-n\pi$ мы получим тоже самое, но с другим знаком у a .

Воспользуемся условием нормировки:

$$\int_0^{\ell} |\Psi(x)|^2 dx = a^2 \int_0^{\ell} \sin^2\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx = 1$$

$$a^2 \frac{\ell}{n\pi} \int_0^{n\pi} \sin^2 y dy = 1 \Rightarrow a^2 \frac{\ell}{n\pi} \int_0^{n\pi} \frac{1}{2}(1 - \cos 2y) dy = 1$$

$$a^2 \frac{\ell}{2n\pi} (y - \sin 2y) \Big|_0^{n\pi} = 1$$

$$a^2 \frac{\ell}{2n\pi} n\pi = 1 \Rightarrow a^2 \frac{\ell}{2} = 1$$

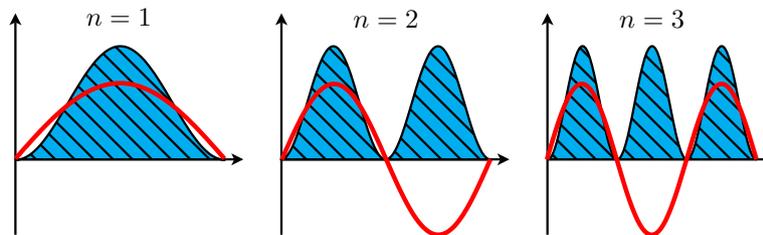
$a = \sqrt{2/\ell}$

14.2.6 Вероятность локализации частицы

Таким образом, собственные функции имеют вид:

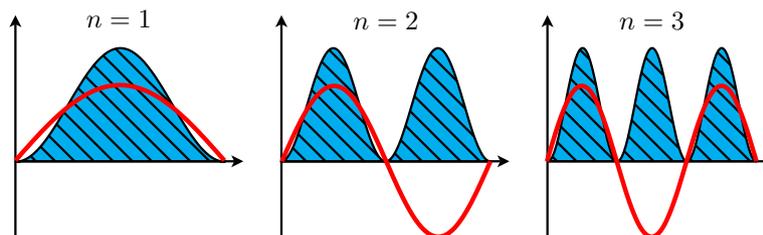
$\Psi(x) = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$

На рисунке показаны собственные функции и плотности вероятности $|\Psi|^2$ (заштрихованные графики)



При $n = 1$ вероятность найти частицу вблизи краев ямы стремится к нулю. Наибольшая вероятность в середине.

$\Psi(x) = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$



При $n \rightarrow \infty$ максимумы плотности вероятности приближаются друг к другу и практически сливаются. Плотность вероятности становится практически равномерной, и частица начинает себя вести классическим образом.

14.3 Квантовый гармонический осциллятор

14.3.1 Потенциальная энергия классического гармонического осциллятора

В классической механике гармонический осциллятор — это частица в параболической потенциальной яме, например груз на пружине:

$$U(x) = \frac{\varkappa x^2}{2}$$

Здесь \varkappa — некоторый коэффициент. В случае груза на пружинке — это коэффициент упругости.

Собственная частота классического гармонического осциллятора равна

$$\omega^2 = \frac{\varkappa}{m}$$

где m — масса частицы, совершающей колебания.

Исключим x из формулы для потенциальной энергии:

$$U(x) = \frac{m\omega^2 x^2}{2}$$

14.3.2 Уравнение Шрёдингера для квантового гармонического осциллятора

Согласно правилам построения квантовой механики, чтобы получить квантовый гармонический осциллятор, мы должны подставить выражение для потенциальной энергии в уравнение Шрёдингера.

Так как потенциальная энергия не зависит от времени, то задача стационарная. Кроме того, мы рассматриваем одномерный осциллятор.

Таким образом получаем уравнение:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E - \frac{m\omega^2 x^2}{2} \right) \Psi(\vec{r}) = 0$$

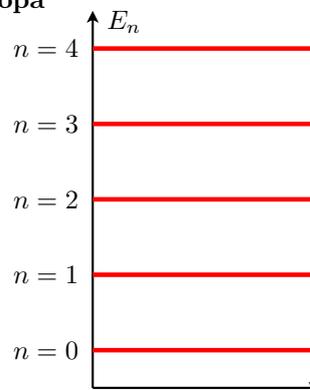
14.3.3 Уровни энергии квантового гармонического осциллятора

Из теории дифференциальных уравнений: решения существуют только при E , равных

$$E_n = (n + 1/2)\hbar\omega, \\ n = 0, 1, 2, \dots$$

Энергия растёт пропорционально n — спектр эквидистантный, т. е. интервалы между уровнями одинаковые.

При переходе с одного уровня на другой испускается или поглощается фотон с энергией $\hbar\omega$. Но неверно говорить, что в стационарных состояниях квантовый осциллятор колеблется с частотой ω .

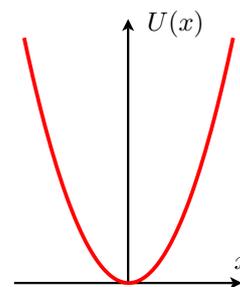


14.3.4 Нулевая энергия

Энергия квантового осциллятора никогда не обращается в нуль. При $n = 0$ энергия осциллятора равна $E_0 = \hbar\omega/2$. Эта энергия называется нулевой.

Существование нулевой энергии согласуется с принципом неопределённости.

Кривая потенциальной энергии имеет минимум в нуле. Следовательно, когда энергия частицы равна нулю, она покоится в точке $x = 0$, т. е. у неё есть определённое значение координаты и импульса частицы. Это противоречит принципу неопределённости.



14.3.5 Правила отбора

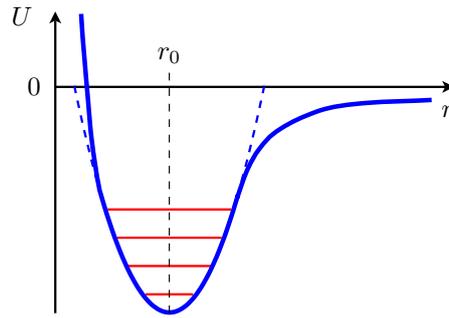
В рамках квантовой механики можно вычислить вероятности переходов квантовой системы из одного состояния в другое.

Для гармонического осциллятора возможны лишь переходы между соседними уровнями. При таких переходах квантовое число n меняется на единицу.

Условия, накладываемые на изменения квантовых чисел при переходах системы из одного состояния в другое, называются правилами отбора.

14.3.6 Молекулы как квантовые осцилляторы

В атомной физике к осциллятору сводится задача о колебаниях молекул и многие другие важные задачи. Потенциальная энергия взаимодействия атомов в двухатомной молекуле (типа NaCl) выглядит, как показано на рисунке.



Вблизи точки равновесия r_0 кривая близка к параболе.

Когда амплитуда колебаний невелика, у молекулы должны существовать дискретные колебательные уровни энергии, которые описываются формулой

$$E_n = (n + 1/2)\hbar\omega$$

где $\omega = \sqrt{\kappa/\mu}$, $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ — приведённая масса молекулы, κ — характеристическая величина, зависящая от структуры молекулы.

Спектр малых колебаний молекулы эквидистантный, т.е. в спектре эти колебания будут представлены единственной линией, соответствующей частоте ω .

Для колебаний с более высокой энергией энергетические уровни сгущаются. В формулу для энергетических уровней вводят поправку, обусловленную ангармоничностью потенциальной энергии взаимодействия.

14.3.7 Нулевая энергия молекул

Нулевая энергия присущая всякой системе частиц, рассматриваемой в квантовой механике.

При температурах, близких к 0К, любое вещество находится в кристаллическом состоянии и его атомы (молекулы, ионы) ведут себя как квантовые осцилляторы.

Существование нулевой энергии подтверждается экспериментами по рассеянию света кристаллами при низких температурах.

Интенсивность рассеянного света пропорциональна энергии колебаний кристаллической решётки.

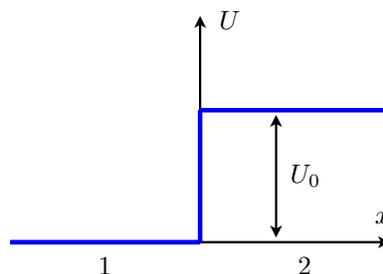
Было обнаружено, что при уменьшении температуры кристалла интенсивность рассеянного света стремится не к нулю, а к ненулевому значению, что можно объяснить только наличием нулевой энергии колебаний.

14.4 Потенциальный барьер

14.4.1 Постановка задачи

Рассмотрим одномерный прямоугольный потенциальный барьер вида

$$U(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0 \\ U_0 & \text{при } x \geq 0 \end{cases}$$



14.4.2 Вид уравнения Шрёдингера

Слева на барьер налетает частица с полной энергией E . Одномерное уравнение Шрёдингера:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + U(x)\psi$$

Так как U не зависит от времени, то

$$\psi(x, t) = \Psi(x)e^{-i\omega t}$$

Обозначим $E = \hbar\omega$ и подставим в уравнение:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + k^2 \Psi = 0, \quad k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E - U(x))$$

Идея поиска решения: найти решения для областей 1 и 2, а затем «сшить» их, т. е. подобрать параметры так, чтобы два решения гладко стыковались друг с другом.

14.4.3 Решение слева от барьера

Решение в области 1 (слева от барьера):

$$U(x) = 0 \Rightarrow k_1^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E > 0$$

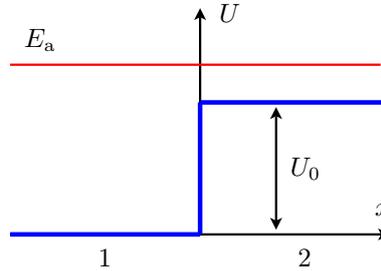
Так как $k_1^2 > 0$, то решение имеет вид:

$$\Psi_1(x) = a_1 e^{ik_1 x} + b_1 e^{-ik_1 x}$$

Первое слагаемое — волна, падающая на барьер, второе слагаемое — волна отражённая от барьера.

14.4.4 Низкий барьер

Пусть $E = E_a > U_0$.



$$k_2^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E_a - U_0) > 0$$

Так как $k_2^2 > 0$, то $\Psi_2(x) = a_2 e^{ik_2 x} + b_2 e^{-ik_2 x}$

Второе слагаемое — волна, бегущая справа налево. Отражённую волну мы уже учли, а в области 2 такой волны быть не может. Поэтому $b_2 = 0$.

Условие сшивки двух решений 1 и 2:

$$\Psi_1(0) = \Psi_2(0), \quad \Psi_1'(0) = \Psi_2'(0)$$

Смысл этих условий — в нуле решение не должно разрываться и не должно иметь излома, т. е. должно быть гладким.

Подставляя выражения для $\Psi_{1,2}$ получим:

$$\begin{cases} a_1 + b_1 = a_2 \\ k_1 a_1 - k_1 b_1 = k_2 a_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 a_1 + k_1 b_1 = k_1 a_2 \\ k_1 a_1 - k_1 b_1 = k_2 a_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2k_1 a_1 = a_2(k_1 + k_2) \\ 2k_1 b_1 = a_2(k_1 - k_2) \end{cases}$$

$$a_1 = a_2(k_1 + k_2)/(2k_1), \quad b_1 = a_2(k_1 - k_2)/(2k_1)$$

Нам пока неизвестно a_2 . Найдём его, учтя, что квадрат волновой функции есть вероятность обнаружить частицу в некоторой области.

Закон сохранения вещества: вероятность обнаружить частицу до взаимодействия с барьером равна вероятности найти частицу либо отражённой от барьера, либо прошедшей под него.

$$a_1^2 = b_1^2 + a_2^2$$

Найдём коэффициенты отражения и пропускания:

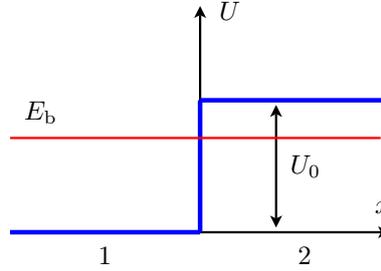
$$R = \frac{b_1^2}{a_1^2} = \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2}$$

$$D = \frac{a_2^2}{a_1^2} = \frac{a_1^2 - b_1^2}{a_1^2} = \frac{4k_1k_2}{(k_1 + k_2)^2}$$

Вывод: даже если частица имеет энергию больше, чем высота барьера U_0 , то существует вероятность, что она отразится от него и полетит назад. Для классической частицы такое невозможно — она обязательно пролетит слева направо.

14.4.5 Высокий барьер

Пусть $E = E_b < U_0$.



Напомним, что в области 1 решение имеет вид

$$\Psi_1(x) = a_1 e^{ik_1 x} + b_1 e^{-ik_1 x}$$

В области 2 имеем уравнение Шрёдингера

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + k_2^2 \Psi = 0, \quad k_2^2 = \frac{2m}{\hbar} (E_b - U_0) < 0$$

Так как $k_2^2 < 0$, то

$$k_2 = i\lambda_2, \quad \lambda_2 = \sqrt{\frac{2m}{\hbar} (U_0 - E_b)}$$

Извлекая корень из k_2 , возьмём знак «+», т. е. $\lambda_2 > 0$.

Решение в области 2 имеет вид

$$\Psi_2(x) = a_2 e^{-\lambda_2 x} + b_2 e^{\lambda_2 x}$$

Второе слагаемое стремится к бесконечности в области 2, поэтому надо положить $b_2 = 0$.

Условия сшивки:

$$\begin{cases} a_1 + b_1 = a_2 \\ ik_1 a_1 - ik_1 b_1 = -\lambda_2 a_2 \end{cases}$$

Отсюда находим:

$$a_1 = a_2 \frac{k_1 + i\lambda_2}{2k_1}, \quad b_1 = a_2 \frac{k_1 - i\lambda_2}{2k_1}$$

Снова вспомним, решение в области 1:

$$\Psi_1(x) = a_1 e^{ik_1 x} + b_1 e^{-ik_1 x}$$

Первое слагаемое — падающая волна, второе — отражённая.

Коэффициент отражения

$$R = b_1 b_1^* / (a_1 a_1^*)$$

где «*» — комплексное сопряжение.

Подставляя значения a_1 и b_1 , получим:

$$a_1 a_1^* = b_1 b_1^* = a_2^2 (k_1^2 + \lambda_2^2) / (4k_1^2)$$

Это значит, что коэффициент отражения равен

$$R = 1$$

Но вероятность найти частицу в области 2 равна

$$\Psi_2 \Psi_2^* = e^{-2\lambda_2 x}$$

Частица может проникать под барьер. Хотя она рано или поздно отразится, точка отражения не определена.

14.5 Туннельный эффект

14.5.1 Понятие туннельного эффекта

Способность квантовых частиц заходить под барьер приводит к туннельному эффекту.

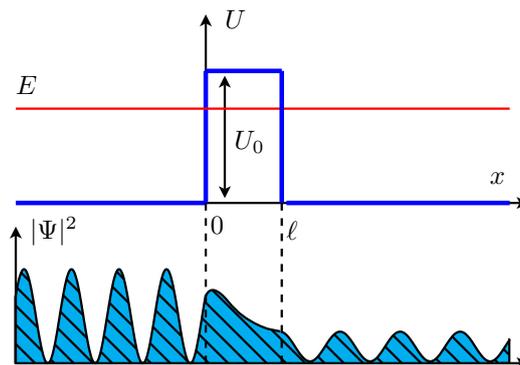
Туннельный эффект

это способность частицы с ненулевой вероятностью проходить сквозь потенциальный барьер конечной ширины.

14.5.2 Качественное описание эффекта

Пусть частица с энергией E налетает на потенциальный барьер высотой U_0 и конечной ширины, причём $E < U_0$.

Решение уравнения Шрёдингера оказывается не равным нулю как слева так и справа от барьера. Это значит, что существует ненулевая вероятность, что частица пройдёт сквозь барьер и окажется за ним.



Вероятность прохождения барьера называется коэффициентом пропускания.

Для барьера прямоугольной формы она равна

$$D \approx \exp\left(-\frac{2\ell}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)}\right)$$

В классической физике туннельный эффект в принципе не существует.

Этим эффектом объясняется многие явления: холодная эмиссия электронов из металлов, альфа-распад, атомное деление ядер, и т. д.

15 Постулаты квантовой механики. Квантование атомов

15.1 Наблюдаемые физические величины

15.1.1 Основные идеи вероятностного описания

Вспомним, что в молекулярной физике мы не можем вычислить координаты и импульсы отдельных частиц, а вместо этого находим функции распределения.

Эти функции суть плотности вероятности обнаружить частицу вещества (газа) в том или ином состоянии.

Зная функцию распределению, можно вычислять различные средние значения которые являются макроскопически наблюдаемыми величинами.

Например, для вычисления внутренней энергии газа нужно найти среднеквадратичную скорость его молекул, используя функцию распределения Максвелла: $f(v)$:

$$\langle v^2 \rangle = \frac{1}{n} \int_0^{\infty} v^2 n f(v) dv$$

15.1.2 Связь волновой функции с плотностью вероятности

Похожая ситуация возникает и при квантово-механическом описании поведения частицы.

Состояние квантовой частицы определяется не координатой и импульсом, а волновой функцией.

Квадрат модуля волновой функции есть плотность вероятности обнаружить частицу в заданной точке пространства.

15.1.3 Средние значение физических величин

Средняя координата равна

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x \psi \psi^* dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* x \psi dx$$

Если некоторая физическая величина есть функция от координаты, то её среднее равно

$$\langle f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* f(x) \psi dx$$

Средние значения, вычисляемые таким образом суть физические величины, которые можно наблюдать экспериментально.

15.2 Операторы физических величин

15.2.1 Оператор импульса

Не все физические величины можно получить в результате простого усреднения.

Найдём средний импульс вдоль оси x .

$$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* p \psi dx$$

Чтобы найти средний импульс, нужно знать, как p зависит от x .

Рассмотрим свободную частицу:

$$\psi(x, t) = A \exp \left[\frac{i}{\hbar} (p_x x - Et) \right]$$

Такая частица имеет определённые значения импульса p_x и энергии E .

Согласно принципу неопределённости Гейзенберга, её координата полностью не определена, и она может существовать в таком состоянии бесконечно долго.

Выразим из этой формулы импульс. Для этого продифференцируем $\psi(x, t)$ по x :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = A \left(\frac{i}{\hbar} p_x \right) \exp \left[\frac{i}{\hbar} (p_x x - Et) \right] = \frac{i}{\hbar} p_x \psi$$

Из этого следует равенство:

$$p_x \psi = -i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Зная волновую функцию частицы ψ , мы можем получить её импульс, выполнив над ψ действие, которое можно обозначит как \hat{p}_x :

$$\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

Символ \hat{p}_x — оператор проекции импульса на ось x .

Зная оператор импульса, можно вычислить средний импульс вдоль x (т. е. экспериментально наблюдаемую величину):

$$\begin{aligned}\langle p \rangle_x &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* p_x \psi dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \hat{p}_x \psi dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi dx\end{aligned}$$

15.2.2 Понятие оператора

Оператор

это обозначение набора математических преобразований, которые нужно совершить над функцией.

Аналогия: функция — это действие, совершаемое над числом, чтобы получить новое число, оператор — действие над функцией, чтобы получить новую функцию.

Мы будем обозначать операторы символом « $\hat{}$ ».

15.2.3 Оператор координаты

Умножение на координату тоже можно рассматривать как оператор.

Оператор координаты x имеет вид

$$\hat{x} = x$$

Средняя координата (наблюдаемая экспериментально):

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \hat{x} \psi dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* x \psi dx$$

15.2.4 Оператор кинетической энергии

Зная операторы координаты и импульса, можно находить другие операторы.

Оператор квадрата модуля импульса:

$$\begin{aligned}\hat{p}^2 &= \hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2 = \\ &= \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 + \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 = \\ &= -\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \\ \hat{p}^2 &= -\hbar^2 \nabla^2 = -\hbar^2 \Delta\end{aligned}$$

Отсюда получаем оператор кинетической энергии:

$$\hat{K} = \frac{1}{2m} \hat{p}^2 = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2$$

15.2.5 Оператор полной энергии

Вспомним, что уравнение Шрёдингера выражает закон сохранения энергии.

Стационарное уравнение Шрёдингера имеет вид:

$$\begin{aligned}\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + (E - U(\vec{r})) \Psi &= 0 \Rightarrow \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi - U(\vec{r}) \Psi = -E \Psi \\ - \left(\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - U(\vec{r}) \right) \Psi &= E \Psi \\ \hat{H} \Psi &= E \Psi\end{aligned}$$

Отсюда видно, что оператор полной энергии имеет вид:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U = \hat{K} + \hat{U}$$

Оператор полной энергии называется оператором Гамильтона или гамильтонианом.

15.2.6 Принцип неопределённости на языке операторов

Принцип неопределённости: нельзя одновременно измерить координаты и соответствующие им проекции импульса.

Пусть у нас есть некоторая волновая функция $\psi(x, t)$. Подействуем на неё сначала оператором импульса \hat{p} , а затем оператором координаты \hat{x} :

$$\hat{x}\hat{p}\psi(x, t) = -i\hbar x \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

А теперь поменяем порядок действия операторов:

$$\hat{p}\hat{x}\psi(x, t) = -i\hbar \frac{\partial(x\psi)}{\partial x} = -i\hbar\psi - i\hbar x \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Получились разные значения. Если результат последовательного действия двух операторов зависит от порядка их применения, говорят, что эти операторы *не коммутируют*.

Формулировка принципа неопределённости: невозможно в одном и том же эксперименте получить определённые значения двух физических величин, операторы которых не коммутируют.

15.2.7 Оператор момента импульса

Момент импульса в классической физике:

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}] = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix}$$

Чтобы перейти к квантовомеханическому описанию, заменим физические величины на операторы

$$\begin{aligned} \hat{L}_x &= \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y \\ \hat{L}_y &= -\hat{x}\hat{p}_z + \hat{z}\hat{p}_x \\ \hat{L}_z &= \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x \end{aligned}$$

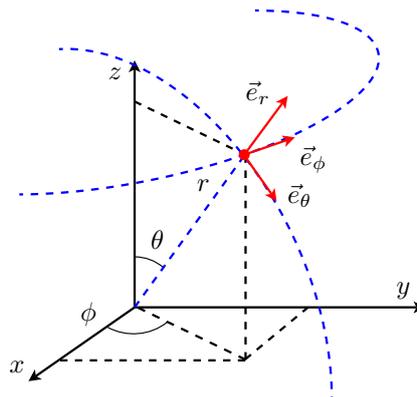
Если проверить попарное действие операторов

$$\begin{aligned} &\hat{L}_x\hat{L}_y \text{ и } \hat{L}_y\hat{L}_x \\ &\hat{L}_x\hat{L}_z \text{ и } \hat{L}_z\hat{L}_x \\ &\hat{L}_z\hat{L}_y \text{ и } \hat{L}_y\hat{L}_z \end{aligned}$$

то обнаружится, что получаются разные результаты.

Значит все эти операторы не коммутируют. Следовательно, принцип неопределённости разрешает измерить только одну из компонент момента импульса. Обычно рассматривают z -компоненту момента импульса.

Оператор компоненты момента импульса имеет более компактную форму в сферической системе координат (r, θ, ϕ) .



$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \cos \phi \\y &= r \sin \theta \sin \phi \\z &= r \cos \theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta \\ \frac{\partial}{\partial \phi} &= \frac{\partial x}{\partial \phi} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \phi} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \phi} \frac{\partial}{\partial z} = \\ &= -r \sin \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial x} + r \sin \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial y} + 0 = \\ &= -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}\end{aligned}$$

Сравним это с формулой для \hat{L}_z :

$$\hat{L}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x = -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

Оператор проекции момента импульса на ось z можно записать как

$$\hat{L}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}$$

15.2.8 Оператор квадрата модуля момента импульса

Величина проекции вектора на координатную ось зависит

- от длины вектора;
- от ориентации координатных осей.

Расположим координатные оси так, чтобы ось z совпала с направлением вектора момента импульса. В этом случае $|L| = L_z$.

Так как L_z определена, то и $|L|$ тоже определена.

Теперь повернём оси произвольным образом. Физическая величина $|L|$ не может зависеть от ориентации координатных осей (частный случай принципа относительности Эйнштейна).

Отсюда следует вывод — модуль вектора момента импульса может быть измерен одновременно с проекцией L_z .

Обычно говорят не о модуле, а о его квадрате, так как выражение для него имеет более компактный вид.

$$\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$$

15.3 Постулаты квантовой механики

1. Состояние движения квантово-механической системы описывается волновой функцией $\psi(\vec{r}, t)$, которая подчиняется уравнению Шрёдингера

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + U(\vec{r}, t) \psi$$

2. Каждая физическая величина представляется определённым оператором.

При поиске оператора для той или иной величины руководствуются аналогией с классическими закономерностями и соответствием вычисленных теоретических значений с экспериментальными данными.

3. При экспериментальном измерении числового значения величины, представляемой оператором \hat{A} , с определённой вероятностью получается одно из чисел $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$

Числа ξ_n называются собственными числами оператора \hat{A} и удовлетворяют уравнению:

$$\hat{A}u_n = \xi_n u_n$$

где u_n — собственные функции оператора \hat{A} .

(Вспомним: простейшая задача на собственные значения формулируется для матриц. Дана матрица A , найти такие вектора \vec{u} и числа ξ , чтобы удовлетворялось равенство $A\vec{u} = \xi\vec{u}$.)

4. Вероятность получить при измерении то или иное значение ξ_n равна $|a_n|^2$, где a_n есть коэффициент разложения волновой функции системы ψ по собственным функциям оператора измеряемой физической величины \hat{A} :

$$\psi = \sum_n a_n u_n$$

(Вспомним: ряд Фурье — разложение по синусам и косинусам, ряд Тейлора — разложение по степенным функциям).

5. Среднее значение физической величины вычисляется по формуле

$$\langle \xi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \hat{A} \psi dx$$

Если подставить сюда разложение $\psi = \sum_n a_n u_n$ и учесть свойства собственных функций u_n (а именно — ортогональность), то получим

$$\langle \xi \rangle = \sum_n |a_n|^2 \xi_n$$

Выше мы говорили, что $|\psi(\xi, t)|^2$ есть вероятность обнаружить частицу в точке с координатой $x = \xi$. Как это согласуется с постулатами квантовой механики?

Оператор координаты: $\hat{x} = x$. Для него задача на собственные числа становится тривиальной:

$$\xi u = x u \Rightarrow \xi = x$$

Спектр собственных функций включает в себя только одну функцию $u \equiv 1$.

Разложение ψ по собственным функциям оператора координаты тривиально:

$$\psi = u \psi = 1 \cdot \psi$$

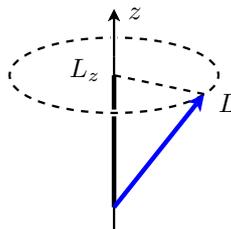
Вероятность получить координату $x = \xi$ есть квадрат модуля коэффициента при u , т. е. $|\psi|^2$.

15.4 Квантование момента импульса

15.4.1 Невозможность определения направления момента импульса

Вспомним, что из принципа неопределённости следует, что направление момента импульса не определено. Можно измерить только длину вектора и проекцию только на одно произвольное направление.

Это можно представить так, как будто вектор «размазан» по образующим конуса, ось которого совпадает с направлением оси z .



15.4.2 Квантование проекции момента импульса

Найдём собственные значения оператора \hat{L}_z . Решим уравнение на собственные значения в сферических координатах.

$$\begin{aligned}\hat{L}_z\Psi = L_z\Psi &\Rightarrow -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}\Psi = L_z\Psi \Rightarrow \frac{\partial\Psi}{\Psi} = \frac{i}{\hbar}L_z\partial\phi \\ \ln\Psi = \frac{i}{\hbar}L_z\phi + \ln C &\Rightarrow \ln\frac{\Psi}{C} = \frac{i}{\hbar}L_z\phi \\ \Psi = C \exp\left(\frac{i}{\hbar}L_z\phi\right)\end{aligned}$$

Для того, чтобы Ψ была однозначной функцией угла ϕ , нужно потребовать выполнения равенства:

$$\Psi(\phi + 2\pi) = \Psi(\phi)$$

Равенство выполняется, когда проекция момента импульса равна:

$$L_z = m_\ell\hbar, \quad m_\ell = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

где m_ℓ — называется магнитным квантовым числом (причина такого названия будет объяснена ниже).

Это равенство определяет спектр собственных значений оператора \hat{L}_z .

15.4.3 Квантования квадрата модуля момента импульса

Аналогичная задача на собственные значения оператора \hat{L}^2 достаточно громоздка и мы приведём только результат:

$$L = \hbar\sqrt{\ell(\ell + 1)}, \quad \ell = 0, 1, 2, \dots$$

где ℓ — орбитальное или азимутальное квантовое число.

Из этих формул следует, что модуль момента импульса и его проекция на ось z принимают дискретные значения.

Так как L_z представляют проекции вектора, за длину которого отвечает L , то

$$|m_\ell| \leq \sqrt{\ell(\ell + 1)}$$

Из-за того, что m_ℓ может принимать только целые значения, имеем:

$$m_\ell = -\ell, -\ell + 1, \dots, 0, \dots, \ell - 1, \ell$$

15.5 Уравнение Шрёдингера для атома водорода

15.5.1 Потенциальная энергия водородоподобного атома

Рассмотрим квантовую систему, состоящую из электрона, который движется в кулоновском поле ядра с зарядом Ze . Такая система называется водородоподобной.

Она соответствует самому водороду и ионизированным атомам из начала таблицы Менделеева.

Потенциальная энергия такой системы равна

$$U(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r}$$

где r — расстояние между ядром и электроном.

15.5.2 Стационарное уравнение Шрёдингера для водородоподобного атома

Стационарное уравнение Шрёдингера для водородоподобной системы имеет вид:

$$\nabla^2\Psi + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r} \right) \Psi = 0$$

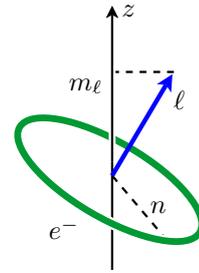
Вспомним, что это уравнение представляет собой уравнение на собственные значения для оператора энергии. Собственные значения энергии здесь обозначены через E .

Так как поле имеет сферическую симметрию, то целесообразно перейти из декартовой в сферическую систему координат

$$(x, y, z) \rightarrow (r, \theta, \phi)$$

15.5.3 Атомные квантовые числа

Собственные решения оператора Гамильтона (т. е. решение уравнения Шрёдингера) для рассматриваемой квантовой системы определяется тремя квантовыми числами:



- n — главное квантовое число; определяет допустимые значения энергии электрона E_n (вспомним n в формуле для энергии в теории Бора); решение существует при $n = 1, 2, \dots, \infty$. Значение n определяет размер электронного облака (орбитали).
- ℓ — орбитальное квантовое число; определяет модуль момента импульса электрона L_ℓ ; решение существует при $\ell = 0, 1, \dots, (n - 1)$. Значение ℓ задаёт форму орбитали.
- m_ℓ — магнитное квантовое число; определяет проекцию вектора момент импульса на ось z L_{zm_ℓ} ; фактически задаёт ориентацию вектора момента импульса в пространстве; решение существует при $m_\ell = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \ell$.

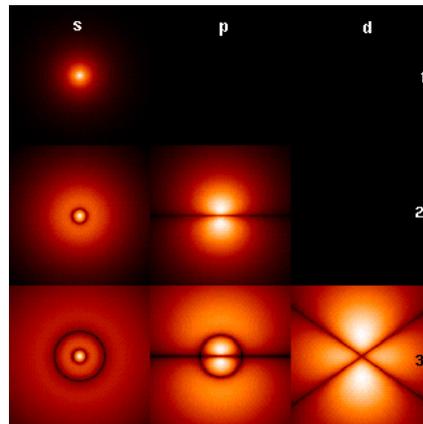
15.5.4 Вид решения уравнения Шрёдингера

Решение может быть представлено в виде произведения двух функций:

$$\Psi_{n\ell m_\ell}(r, \theta, \phi) = R_{n\ell}(r)Y_{\ell m_\ell}(\theta, \phi)$$

- $R_{n\ell}(r)$ есть функция только расстояния электрона до ядра. Она зависит от главного квантового и орбитального квантовых чисел.
- $Y_{\ell m_\ell}(\theta, \phi)$ есть функция θ и ϕ . Она зависит от орбитального и магнитного квантовых чисел.

Оттенки цвета показывают значения $|\Psi|^2$ в сечении xz . По горизонтали s, p и d соответствуют $\ell = 0, 1, 2$, по вертикали $n = 1, 2, 3$ ($\ell = 0, 1, \dots, (n-1)$). $m_\ell = 0$. Трёхмерное решение получается вращением рисунков вокруг вертикальной оси z .



<http://en.wikipedia.org/wiki/File:NAtomOrbitals.png>

15.5.5 Положительные и отрицательные значения энергии

Уравнение Шрёдингера имеет решения как для положительных так и для отрицательных собственных значений E_n .

При положительных E_n решение соответствует свободному электрону, который пролетает вблизи ядра, но не захватывается им.

Отрицательные E_n соответствуют электрону, захваченному ядром.

Отрицательные собственные значения энергии E_n дискретные.

$$E_n = -\frac{Z^2 e^4 m}{32\pi^2 \epsilon_0^2 n^2 \hbar^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Эта формула точно совпадает с формулой для энергией атома водорода, полученной в теории Бора.

Отличие в том, что для теперь для её вывода не потребовалось делать никаких дополнительных предположений о квантовании. Квантование возникает естественным образом в ходе решения уравнение Шрёдингера.

15.5.6 Вырождение. Кратность вырождения

Энергия электрона в водородоподобном атоме зависит только от главного квантового числа n .

Это значит, что одной и той же энергии соответствует несколько решений с разными ℓ и m_ℓ .

Например при $n = 2$ энергии E_2 соответствуют волновые функции

$$\Psi_{2,0,0}, \Psi_{2,1,-1}, \Psi_{2,1,0}, \Psi_{2,1,1}$$

Состояния с разными квантовыми числами и одинаковой энергией называются вырожденными. Число таких состояний называется кратностью вырождения.

Для состояния с квантовым числом n кратность вырождения N равна:

$$N = \sum_{\ell=0}^{n-1} (2\ell + 1) = n^2$$

(для вычисления суммы используется формула для суммы членов арифметической прогрессии).

Как будет обсуждаться ниже, электрон обладает собственным механическим моментом — спином. Спин может принимать одно из двух возможных значений. С учётом спина кратность вырождения равна

$$N = 2n^2$$

15.5.7 Плотность вероятности электрона в основном состоянии

Основное состояние — это состояние с минимальной энергией. В основном состоянии $n = 1$, $\ell = 0$, $m_\ell = 0$.

Решение уравнений Шрёдингера в основном состоянии сферически симметрично и имеет вид:

$$\Psi_{100} = Ae^{-r/r_1}$$

где r_1 — первый боровский радиус (радиус орбиты электрона, вычисленный в теории бора при $n = 1$).

Вспомним: квантовые частицы не имеют траектории. Вместо этого нужно говорить о вероятности обнаружить частицу в той или иной точке.

Вероятность нахождения электрона в объёме dV равна

$$dp = |\Psi|^2 dV$$

Возьмём в качестве элементарного объёма dV сферический слой толщиной dr и радиусом r :

$$dV = 4\pi r^2 dr$$

Тогда:

$$\begin{aligned} dp &= 4\pi r^2 A^2 e^{-2r/r_1} dr \\ \frac{dp}{dr} &= (4\pi A^2) r^2 e^{-2r/r_1} \end{aligned}$$

Полученная формула даёт вероятность местонахождения электрона в сферическом слое единичной толщины вблизи радиуса r

Это выражение обращается в нуль при $r \rightarrow 0$ и $r \rightarrow \infty$.

Найдём r при котором dp/dr будет максимальной.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}(r^2 e^{-2r/r_1}) &= 2r e^{-2r/r_1} + (-2/r_1) r^2 e^{-2r/r_1} = 0 \\ 2r e^{-2r/r_1} (1 - r/r_1) &= 0 \\ r &= r_1 \end{aligned}$$

Мы получили правильную интерпретацию боровского радиуса r_1 . Эта величина есть расстояние от ядра, на котором вероятность обнаружить электрон максимальна.

16 Квантование атомов. Таблица Менделеева

16.1 Спин электрона

16.1.1 Понятие спина. Неклассическая природа спина

Экспериментально было обнаружено, что кроме орбитального момента импульса, связанного с движением вокруг ядра, электрон имеет собственный момент импульса. Этот момент получил названием спиновый или просто спин (англ. spin — вращение).

Если бы электрон был шариком, то спин был бы связан с его вращением вокруг собственной оси. Но аналогия с вращением вокруг собственной оси очень приближительна. Если предположить, что электрон вращается вокруг собственной оси, то правильный спиновый момент импульса мы получим, только если будем считать, что радиус электрона стремится к нулю, а линейная скорость вращения стремится к скорости света.

Спин — это существенно квантовая величина. Спин имеет постоянное и определённое значение, также как масса и заряд. (Пользуясь аналогией с вращением вокруг собственной оси можно сказать, что ускорить или замедлить это вращение невозможно).

16.1.2 Оператор спина и проекции спина. Квантовые числа

Аналогично орбитальному моменту, определённое значение в одном и том же состоянии могут иметь только модуль спина и одна из его проекций на произвольную ось z .

Со спином связывают квантово-механический оператор, который имеет собственные значения

$$L_s = \hbar\sqrt{s(s+1)}$$

где s — спиновое квантовое число.

В отличие от орбитального, спиновое квантовое число всегда имеет единственное значение

$$s = 1/2$$

Это выражение того факта, что спин имеет постоянное значение,

$$L_s = \hbar\sqrt{3}/2$$

Собственные числа оператора проекции спина на произвольную ось равны:

$$L_{sz} = \hbar m_s, \quad m_s = \pm s$$

Это значит, что проекция спина на любое направление может принимать только два значения

$$L_{sz} = \pm\hbar/2$$

16.2 Полный момент импульса электрона в атоме

16.2.1 Оператор полного момента и квантовое число

Полный момент импульса — это сумма орбитального и спинового моментов электрона.

Если мы рассмотрим суммарное действие операторов орбитального и спинового моментов, то получим, что оператор полного момента имеет собственные числа вида

$$L_j = \hbar\sqrt{j(j+1)}$$

где j — квантовое число полного момента.

16.2.2 Допустимые значения квантового числа полного момента

Анализ операторов показывает, что допустимые значения j определяются возможными взаимными ориентациями спина по отношению к орбитальному моменту:

$$j = l + s, |l - s|$$

- Если $l = 0$, то $j = s = 1/2$.

- Если $l > 0$, то $j = l + 1/2$ и $j = l - 1/2$.

Видно, что j может принимать только полуцелые значения.

Оператор проекции полного момента имеет следующие собственные числа:

$$L_{jz} = m_j \hbar, \quad m_j = -j, -j + 1, \dots, 0, \dots, j - 1, j$$

16.3 Магнитные моменты электрона

16.3.1 Орбитальное гиромагнитное отношение и магнитный момент атома

Классическая заряженная частица, двигающаяся по круговой орбите, обладает как механическим моментом импульса \vec{L} , так и магнитным моментом \vec{M} . (Вспомним, что $\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}]$, $\vec{M} = I\vec{S}$.)

Считая электрон классической частицей, можно найти отношение этих моментов:

$$\frac{M}{L} = -\frac{e}{2m_e}$$

здесь e — элементарный положительный заряд, m_e — масса электрона, знак «−» связан с тем, что вектора \vec{L} и \vec{M} направлены в противоположные стороны. Это называется гиромагнитным соотношением.

Эксперименты показали, что у электрона в атоме отношение орбитального магнитного момента к орбитальному механическому моменту действительно равно гиромагнитному соотношению (несмотря на то, что формула получена в классическом приближении).

Орбитальный магнитный момент атома равен:

$$M_\ell = \frac{e}{2m_e} L_\ell = -\frac{\hbar e}{2m_e} \sqrt{\ell(\ell + 1)} = -\mu_B \sqrt{\ell(\ell + 1)}$$

$$\mu_B = \frac{\hbar e}{2m_e}$$

где μ_B — магнетон Бора, естественная единица измерения магнитного момента.

Проекция магнитного момента на ось z :

$$M_{\ell z} = -\mu_B m_\ell, \quad m_\ell = -\ell, -\ell + 1, \dots, 0, \ell - 1, \ell$$

16.3.2 Спиновое гиромагнитное отношение для электрона

Экспериментально было доказано, что гиромагнитное соотношение для спиновых моментов в два раза больше, чем для орбитальных:

$$\frac{M_s}{L_s} = -\frac{e}{m_e}$$

Так как $L_s = \hbar\sqrt{3}/2$, то

$$M_s = -\frac{e}{m_e} L_s = -\mu_B \sqrt{3}$$

Проекция собственного (спинового) магнитного момента может принимать два значения:

$$M_{sz} = -\frac{e}{m_e} L_{sz} = \pm\mu_B$$

16.3.3 Полный магнитный момент атома

Так как гиромагнитные соотношения для орбитального и спинового моментов разные, то полный магнитный момент вычисляется более сложным образом:

$$M_j = \mu_B g \sqrt{j(j + 1)}$$

$$g = 1 + \frac{j(j + 1) + s(s + 1) - \ell(\ell + 1)}{2j(j + 1)}$$

где g — фактор магнитного расщепления или множитель Ланде.

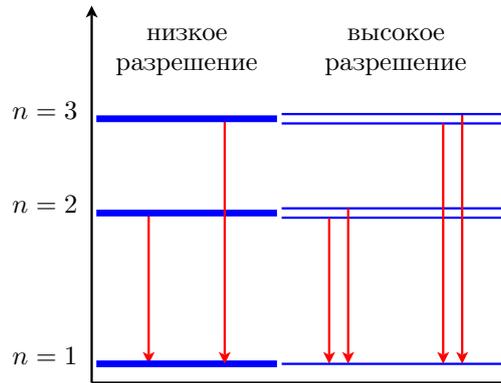
Проекция полного момента:

$$M_{jz} = -\mu_B g m_j$$

16.4 Спин-орбитальное взаимодействие

16.4.1 Дублетная структура спектральных линий

Исследование спектральных линий атомов щелочных металлов приборами с высоким разрешением показало, что почти все линии имеют дублетную структуру — состоят из двух очень близких друг к другу линий.



16.4.2 Дублетная структура и спин-орбитальное взаимодействие

Существование дублетной структуры объясняется тем, что орбитальный и собственный магнитные моменты электронов взаимодействуют друг с другом. Точнее — взаимодействуют магнитные поля, возникающие из-за орбитального движения электрона и из-за наличия у него спина.

В результате этого состояния электронов с разными ориентациями спинов имеют разную энергию, но отличие в энергии очень мало.

Поэтому в спектрах это проявляется не как появление новых отдельных линий, а как слабо заметное раздвоение линий. Взаимодействие спиновых и орбитальных моментов называется спин-орбитальным.

16.4.3 Квантовое число спин-орбитального взаимодействия

На языке квантовых чисел дублетное расщепление уровней энергии описывают квантовые числа полного момента j .

Вспомним, что когда $\ell > 0$ j может принимать два значения $\ell + s$ и $\ell - s$. Эти значения соответствуют разным ориентациям спина относительно орбитального момента.

Дублету (паре очень близких друг к другу линий) соответствуют одинаковые наборы квантовых чисел n , ℓ и т. д. — отличаются только значения j .

У электрона в состоянии с $\ell = 0$ орбитальный момент равен нулю и спин-орбитальное взаимодействие отсутствует, j имеет единственное значение $j = s$. Это значит, что дублетного расщепления нет.

16.5 Правила отбора

16.5.1 Правило отбора для орбитального квантового числа

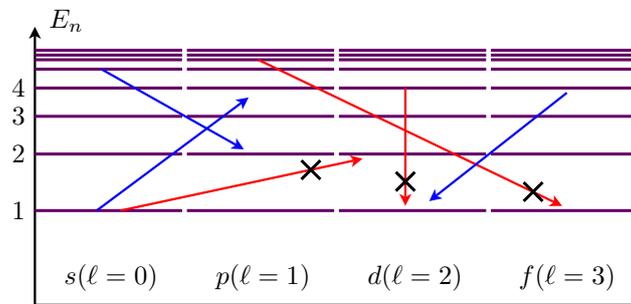
Испускание и поглощение света происходит при переходах электрона с одного уровня на другой. Однако переходы возможны не для всех пар уровней.

Правило, в соответствии с которым осуществляются переходы, называется правилом отбора.

В атоме возможны переходы, при которых орбитальное квантовое число ℓ изменяется на единицу:

$$\Delta\ell = \pm 1$$

Это правило обусловлено тем, что фотон обладает моментом импульса. При испускании фотон уносит из атома момент импульса, при поглощении привносит. Правило отбора фактически выражает закон сохранения момента импульса.



Переходы, запрещённые правилом отбора, отмечены крестиками.

16.5.2 Правило отбора для квантового числа полного момента

При изменении ℓ на единицу соответствующее значение j может также измениться на единицу:

$$j = \ell + 1/2 \rightarrow j = \ell + 1 + 1/2$$

$$j = \ell + 1 + 1/2 \rightarrow j = \ell + 1/2$$

или может остаться неизменным:

$$j = \ell + 1/2 \rightarrow j = \ell + 1 - 1/2 = \ell + 1/2$$

Следовательно, правило отбора для j имеет вид:

$$j = 0, \pm 1$$

Главное квантовое число n может изменяться на любое значение.

16.6 Многоэлектронные атомы

16.6.1 Вырожденные состояния электрона в водородоподобных атомах

В любом атоме состояние электрона описывается четырьмя квантовыми числами:

$$n, \ell, m_\ell, m_s \text{ или } n, \ell, j, m_j$$

У атома водорода и у водородоподобных ионов единственный электрон движется в кулоновском поле ядра.

При этом его энергия зависит только от главного квантового числа n и не зависит от других квантовых чисел.

Следовательно, состояния такого электрона вырождены.

16.6.2 Снятие вырождения в многоэлектронных атомах

Напомним, что когда несколько квантовомеханических состояний с разными значениями квантового числа, обозначим его как x , имеют одинаковую энергию, то говорят, что имеется вырождение по этому квантовому числу.

Если при каких-то условиях энергия состояния начинает зависеть от x , то говорят, что вырождение по x снимается.

В многоэлектронном атоме электрон движется в поле остальных электронов и ядра, а значит поле не является кулоновским.

При этом энергия электрона зависит не только от числа n , но и от числа ℓ . Следовательно, в многоэлектронных атомах снимается вырождение по орбитальному квантовому числу ℓ .

16.6.3 Два основных типа связи электронов в атоме

Атом в целом также можно охарактеризовать механическим и магнитным моментами. Моменты атома складываются из орбитальных и спиновых моментов отдельных электронов.

Для классических векторов нужно было бы найти векторную сумму моментов всех электронов. Но так как мы имеем дело с квантовыми величинами, то их сложение происходит по более сложным правилам.

Так как механический и магнитный моменты связаны друг с другом, то магнитные моменты формируются точно также как механические.

Существует два основных способа. В соответствии с этим различают два типа связи электронов в атоме.

16.6.4 LS-связь или связь Рассела-Саундерса

Энергия взаимодействия между орбитальными моментами L_ℓ разных электронов и между спинами разных электронов выше, чем спин-орбитальное взаимодействие у каждого отдельного электрона.

В этом случае сначала складываются орбитальные моменты различных электронов, образуя полный орбитальный момент атома L_L .

Также спины отдельных электронов складываются в полный спиновый момент L_S .

И затем эти два момента складываются друг с другом.

Этот тип связи наиболее часто встречается у лёгких атомов.

16.6.5 JJ-связь

Энергия спин-орбитального взаимодействия выше, энергии взаимодействия между орбитальными моментами разных электронов и между спинами отдельных электронов.

Это значит, что сначала у каждого электрона в отдельности складываются орбитальные и спиновые моменты — формируются полные моменты L_j электронов.

Затем все полные моменты отдельных электронов складываются между собой, образуя полный атомный момент L_J .

Этот тип связи второго типа преимущественно наблюдается у тяжёлых атомов

16.7 Опыт Штерна—Герлаха

16.7.1 Идея опыта

Опыт Штерна и Герлаха доказал наличие у атомов магнитных моментов и их квантование.

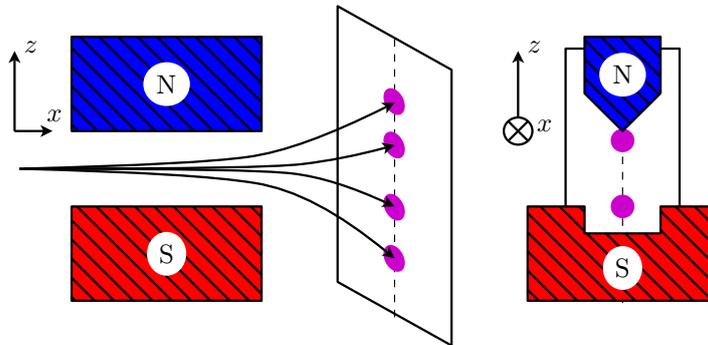
Если атомы обладают магнитным моментом, то согласно электродинамике в неоднородном магнитном поле на них должна действовать сила

$$F_z = \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

где μ_z — проекция магнитного момента на ось z .

Так как μ_z мало, нужно чтобы вдоль z поле было сильно неоднородным.

Пучок атомов пропускает сквозь сильное неоднородное поперечное магнитное поле, создаваемое полюсами магнитов сложной формы.



При включении магнитного поля наблюдалось расщепление пучка. На экране возникала серия отчётливых друг от друга пятен.

Атомы электрически нейтральны, так что взаимодействие с магнитным полем возможно только если они обладают магнитным моментом.

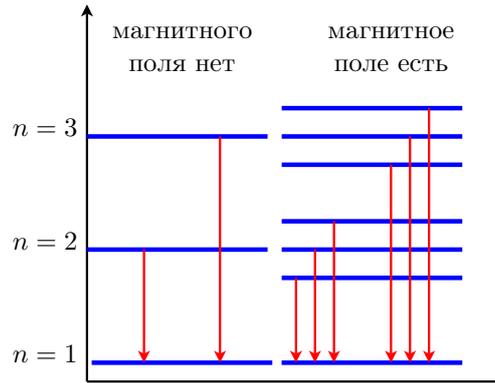
16.7.2 Результаты опыта

- Отклонение атомов от прямолинейного распространения в неоднородном магнитном поле подтверждает, что атомы обладают магнитным моментом.
- Расщепление пучка на несколько пятен говорит о том, что в пучке присутствуют атомы с различной пространственной ориентацией моментов.
- Наличие нескольких *отдельных* друг от друга пятен вместо непрерывного распределения говорит о том, что магнитные моменты квантуются — проекции магнитных моментов на ось z могут принимать только дискретные значения.

16.8 Эффекты Зеемана и Пашена—Бака

16.8.1 Расщепление спектральных линий в магнитном поле

Эффекты Зеемана и Пашена—Бака состоят в том, что при помещении источника света (нагретые атомы) в магнитное поле его спектральные линии испытывают расщепление.



Расщепление линий возникает из-за расщепления энергетических уровней. Это объясняется наличием у атомов магнитных моментов.

Когда магнитного поля нет, энергия атома не зависит от того, как ориентирован в пространстве его магнитный момент. В магнитном поле разным ориентациям момента соответствуют разные значения энергии — происходит расщепление уровней.

16.8.2 Отличия эффекта Зеемана и Пашена—Бака

Эффект Зеемана наблюдается когда внешнее поле невелико, так что не разрывается спин-орбитальное взаимодействие. Это значит, что с внешним полем взаимодействует полный момент атома как целого. Иными словами, энергия взаимодействия зависит от ориентации в магнитном поле атома как целого.

Если поле велико, то спин-орбитальное взаимодействие разрывается. Энергия взаимодействия начинается зависеть как от ориентации орбитального момента атома, так и от ориентации спинового момента. Этот называется эффектом Пашена—Бака.

16.9 Периодическая система Менделеева

16.9.1 Принцип запрета Паули

Когда атом содержит несколько электронов, то логично было бы ожидать, что все электроны будут находиться в состоянии с минимальной энергией.

Однако на самом деле это не так. Причина в том, что электроны подчиняются принципу запрета Паули.

Принцип запрета Паули

В любом квантовом состоянии может находиться не более одного электрона.

Вспомним, что состояние электрона в атоме задаётся четырьмя квантовыми числами

$$n, \ell, m_\ell, m_s \text{ или } n, \ell, j, m_j$$

Самый первый электрон невозбуждённого атома занимает состояние с $n = 1$ и с такими значениями других квантовых чисел, чтобы его энергия была минимальной.

Второй электрон уже не может находиться в состоянии, характеризуемом той же самой четвёркой квантовых чисел. Поэтому он займёт первое свободное состояние с минимальным значением энергии.

Каждый следующий электрон невозбужденного атома должен занимать самый глубокий из ещё незаполненных уровней.

16.9.2 Обозначения состояний электрона в атоме

Для удобства каждому значению ℓ сопоставили букву:

ℓ	0	1	2	3	4	5
символ	s	p	d	f	g	h

С использованием этих обозначений, состояния электрона описываются следующим образом:

$$\begin{aligned}
n = 1 \quad \ell = 0 &\rightarrow 1s \\
n = 2 \quad \ell = 0 &\rightarrow 2s \\
&\quad \ell = 1 \rightarrow 2p \\
n = 3 \quad \ell = 0 &\rightarrow 3s \\
&\quad \ell = 1 \rightarrow 3p \\
&\quad \ell = 2 \rightarrow 3d
\end{aligned}$$

16.9.3 Оболочки и подоболочки

Каждому значению n соответствует $2n^2$ состояний с различными квантовыми числами ℓ , m_ℓ и m_s . Совокупность электронов с одинаковыми значениями квантового числа n образуют оболочку.

Значение n	1	2	3	4	5	6
Обозначение оболочки	K	L	M	N	O	P

Оболочки подразделяют на подоболочки, отличающиеся квантовым числом ℓ .

Различные состояния в подоболочке отличаются значениями квантовых чисел m_ℓ и m_s . Число состояний в подоболочке равно $2(2\ell + 1)$.

Подоболочки обозначаются следующим образом:

$$1s, 2s, 2p, 3s, 3p, 3d, \dots$$

Первое число — значение главного квантового числа n . Буква — значение ℓ . (Вспомним: $\ell = 0 \rightarrow s$, $\ell = 1 \rightarrow p$, $\ell = 2 \rightarrow d$.)

Орбитальное квантовое число ℓ принимает значение от 0 до $n-1$. Поэтому при $n = 1$ имеется единственная подоболочка s , при $n = 2$ имеются подоболочки s и p и так далее.)

Обол.	K		L			M								
Подоб.	1s	2s	2p			3s	3p			3d				
m_ℓ	0	0	-1	0	+1	0	-1	0	+1	-2	-1	0	+1	+2
m_s	$\uparrow\downarrow$													
Чис. эл.	2	2	6			2	6			10				
$2n^2$	2		8			18								

Заполненные подоболочки имеют орбитальный и спиновый моменты равные нулю: для каждой подоболочки

$$\sum m_\ell = \sum m_s = 0$$

Их полные моменты тоже равны нулю. Значит можно не принимать во внимание заполненные подоболочки. Только незаполненные подоболочки дают вклад в момент атома.

16.9.4 Принцип построения таблицы Менделеева

Понимание периодической системы элементов основано на оболочной структуре электронного облака атома.

Каждый следующий атом получается из предыдущего увеличением заряда ядра на единицу ($+e$) и добавлением одного электрона, который заполняет свободное состояние с наименьшей энергией (в согласии с принципом Паули).

Z	Элемент	K		L	
		1s	2s	2p	
1	H	1			
2	He	2			
3	Li	2	1		
4	Be	2	2		
5	B	2	2	1	
6	C	2	2	2	
7	N	2	2	3	
8	O	2	2	4	

Идеальный порядок заполнения подоболочек нарушается на калии K. Он должен был бы получить электрон на подоболочку $3d$, но для него энергетически более выгодным оказывается состояние $4s$.

Так как у калия начинает заполняться новая подоболочка, он начинает новый период в таблице.

16.9.5 Принцип периодичности

Каждый период начинается с элемента с одним электроном на внешней подоболочке и заканчивается элементом с заполненной внешней подоболочкой.

Электроны на внешней подоболочке называются валентными. Они определяют поведение химического элемента в химических реакциях.

Чем меньше валентных электронов имеет элемент, тем легче он отдаёт эти электроны в реакциях с другими элементами. И наоборот, чем больше валентных электронов содержится в атоме химического элемента, тем легче он приобретает электроны в химических реакциях при прочих равных условиях.

Вещества с одинаковым числом валентных электронов имеют сходные химические свойства.

17 Атомное ядро

17.1 Состав атомного ядра

17.1.1 Ядерные единицы массы

В физике субатомных частиц массы принято выражать в единицах энергии, умножая их для этого на c^2 .

Масса 1МэВ эквивалентна массе $10^6\text{эВ}/c^2 = 1.60 \cdot 10^{-13}\text{Дж}/(3 \cdot 10^8\text{м}/c^2) = 1.78 \cdot 10^{-30}\text{кг}$.

Также используется атомная единица массы: $1\text{а. е. м.} = 931.50\text{МэВ} = 1.66 \cdot 10^{-27}\text{кг}$.

Атомная единица массы есть $1/12$ массы ядра изотопа углерода ^{12}C .

$1\text{а. е. м.} = 1/N_A$, где N_A — число Авогадро. Молярная масса элемента, выраженная в граммах на моль, в точности совпадает с массой этого элемента, выраженной в а. е. м.

17.1.2 Понятие нуклонов. Протон

Атомные ядра состоят из протонов и нейтронов. Эти частицы называют нуклонами, т. е. ядерными частицами.

Протон обозначается символом p . Он обладает зарядом $+e$ и массой

$$m_p = 938.28\text{МэВ}.$$

Для сравнения: масса электрона равна

$$m_e = 0.511\text{МэВ}.$$

Видно, что $m_p = 1836m_e$.

Спин протона

$$s = 1/2$$

Магнитный момент

$$\mu_p = +2.79\mu_{\text{я}}, \quad \mu_{\text{я}} = \frac{e\hbar}{2m_p} = 5.05 \cdot 10^{-27}\text{Дж/Тл}$$

$\mu_{\text{я}}$ — ядерный магнетон.

Ядерный магнетон в 1836 раз меньше магнетона Бора, и магнитный момент протона примерно в 660 раз меньше чем у электрона.

Знак «+» говорит, что механический и магнитные моменты сонаправлены.

17.1.3 Нейтрон

Электрический заряд нейтрона равен нулю, масса

$$m_n = 939.57\text{МэВ}$$

Это очень близко к массе протона. Разность $m_n - m_p = 1.3\text{МэВ} = 2.5m_e$.

Спин нейтрона

$$s = 1/2$$

Магнитный момент (несмотря на отсутствие заряда!)

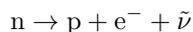
$$\mu_n = -1.91\mu_{\text{я}}$$

Знак « \rightarrow » говорит, что механический и магнитные моменты направлены противоположно.

В свободном состоянии нейтрон нестабилен (радиоактивен). Он самопроизвольно превращается в протон и испускает электрон и антинейтрино.

Период полураспада — время, за которое распадается половина первоначального количества частиц. Период полураспада нейтрона 12 мин.

Схему распада можно записать так:



где e^{-} — электрон, $\bar{\nu}$ — антинейтрино.

Масса нейтрино, по современным оценкам, не превышает 0.28эВ. Масса нейтрона больше массы протона на $2.5m_e$. Следовательно, масса нейтрона превышает суммарную массу частиц, на которые он распадается, на $1.5m_e = 0.77\text{МэВ}$.

Лишняя масса превращается в кинетическую энергию продуктов распада в соответствии с формулой Эйнштейна $E = mc^2$.

17.2 Характеристики атомного ядра

17.2.1 Основные характеристики ядра. Обозначение ядер

Количество протонов Z определяет заряд ядра $+Ze$ и порядковый номер элемента в таблице Менделеева.

Количество нуклонов (протоны + нейтроны) A есть массовое число ядра. Масса ядра приблизительно равна Am_p .

Число нуклонов в ядре равно $N = A - Z$.

Для обозначения ядер используют символ



где X — химический символ соответствующего элемента.

Атомный номер часто опускают. Иногда массовой число пишут справа: ZX^A .

17.2.2 Изотопы, изобары, изотоны, изомеры

- Изотопы — ядра с одинаковыми порядковыми номерами Z , но с разными массовыми числами A .
- Изобары — ядра с одинаковыми массовыми числами A но разными Z . Например ${}^{40}_{18}\text{Ar}$ и ${}^{40}_{20}\text{Ca}$.
- Изотоны — ядра с одинаковым числом нейтронов $N = A - Z$. (${}^{13}_6$ и ${}^{14}_7\text{N}$).
- Изомеры — ядра с одинаковыми Z и A , но имеющих разное внутреннее устройство и, как следствие, разные периоды полураспада.

17.2.3 Изотопы водорода

Большинство химических элементов имеют по несколько стабильных изотопов. Кислород: ${}^{16}_8\text{O}$, ${}^{17}_8\text{O}$, ${}^{18}_8\text{O}$.

Водород имеет три изотопа:

- ${}^1_1\text{H}$ — обычный водород или протий ($Z = 1$, $N = 0$),
- ${}^2_1\text{H}$ — тяжёлый водород или дейтерий ($Z = 1$, $N = 1$),
- ${}^3_1\text{H}$ — тритий ($Z = 1$, $N = 2$),

Дейтерий также обозначают символом D , а тритий — символом T . Протий и дейтерий стабильны, а тритий радиоактивен.

17.2.4 Элементы, встречающиеся в природе. Трансурановые элементы

На Земле встречаются элементы с атомными номерами Z от 1 до 92, исключая технеций (Tc , $Z = 43$) и прометий (Pm , $Z = 61$).

Элементы с номерами выше 92 (это номер урана) называют трансурановыми.

Все известные изотопы трансурановых веществ имеют период полураспада существенно меньший, чем возраст Земли и поэтому практически отсутствуют в естественном виде. Их синтезируют в лабораториях.

17.2.5 Размер, объём и плотность ядер

Размер ядра. В первом приближении ядро можно считать шаром радиусом

$$r = 1.3 \cdot 10^{-15} A^{1/3} \text{ м} = 1.3 A^{1/3} \Phi$$

(Φ — ферми, единица длины, принятая в ядерной физике, $1\Phi = 10^{-15}\text{м}$).

Из этой формулы следует, что объём ядра пропорционален числу нуклонов в ядре.

Следовательно, плотность вещества во всех ядрах примерно одинакова.

17.2.6 Спин ядра

Спины нуклонов, равные $1/2$, складываются в результирующий спин ядра.

Поэтому квантовое число спина ядра будет полуцелым, когда число нуклонов A нечётное и целым или нулём при нечётном числе нуклонов A .

Спины ядер не превышают нескольких единиц, т. е. спины большинства нуклонов взаимно компенсируют друг друга, располагаясь антипараллельно.

У всех чётно-чётных ядер (Z и N чётные) спин равен нулю.

17.3 Дефект массы. Ядерная энергия

17.3.1 Энергия связи и дефект массы

Масса ядра меньше суммы входящих в него частиц. Это обусловлено тем, что при объединении нуклонов в ядро выделяется энергия связи нуклонов друг с другом.

Энергия покоя частицы связана с её массой соотношением $E_0 = mc^2$. Следовательно, энергия покоящегося ядра меньше суммарной энергии невзаимодействующих покоящихся нуклонов на величину

$$E_{\text{св}} = c^2[(Zm_p + Nm_n) - m_{\text{я}}]$$

Эта величина — энергия связи нуклонов в ядре. Она равна работе, которую нужно совершить, чтобы разделить образующие ядро нуклоны и удалить их на такое расстояние, чтобы они практически не взаимодействовали друг с другом.

Преобразуем формулу для энергии связи:

$$E_{\text{св}} = c^2[(Zm_p + Nm_n + Zm_e) - m_{\text{я}} - Zm_e]$$
$$E_{\text{св}} = c^2[(Zm_{\text{H}} + Nm_n) - m_{\text{а}}]$$

где m_{H} — масса атома водорода, $m_{\text{а}}$ — масса атома.

Эта формула может оказаться удобнее, так как в справочниках обычно указывают массы атомов, а не их ядер.

Величина

$$\Delta = (Zm_{\text{H}} + Nm_n) - m_{\text{я}}$$

называется дефектом массы ядра.

Дефект массы связана с энергией связи соотношением $\Delta = E_{\text{св}}/c^2$.

Для гелия ${}^4_2\text{He}$ $Z = 2$, $N = 2$, масса атома гелия равна 3728.0МэВ , масса атома водорода $938, 7\text{МэВ}$, масса нейтрона была приведена выше.

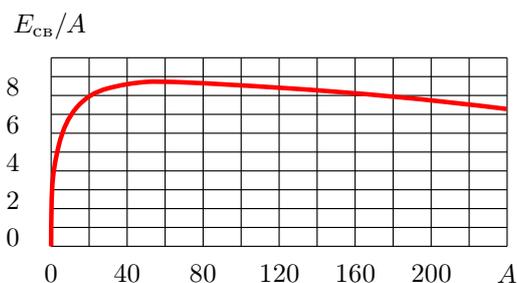
Подставив это в формулу, получим

$$E_{\text{св}} = 28.4\text{МэВ}$$

В расчёте на 1 нуклон получаем удельную энергию связи: $E_{\text{св}}/A = 7.1\text{МэВ}$.

Для сравнения: энергия связи валентных электронов в атомах примерно 10^6 раз меньше.

17.3.2 Зависимость удельной энергии связи от массового числа



Сильнее всего связаны нуклоны в ядрах с массовыми числами 50 – 60 (элементы от Cr до Zn). Энергия связи убывает влево и вправо от максимума.

С выделением энергии протекают два процесса:

- деление тяжёлых ядер на несколько более лёгких;
- слияние (синтез) лёгких ядер в одно ядро.

17.3.3 Энергетический выход ядерных реакций

Деление одного ядра с массовым числом $A = 240$ (удельная энергия связи 7.5МэВ) на два ядра с массовыми числами $A = 120$ (удельная энергия связи 8.5МэВ) приводит к высвобождению энергии 240МэВ.

Слияние двух ядер тяжёлого водорода ${}^2_1\text{H}$ в ядро гелия ${}^4_2\text{He}$ приводит к выделению энергии 24МэВ.

Для сравнения: при соединении одного атома углерода с двумя атомами водорода (сгорание угля) выделяется энергия 5эВ.

17.3.4 Причина стабильности большинства ядер

Ядра с массовыми числами от 50 до 60 наиболее стабильны, так как имеют максимальную энергию связи.

Вопрос: почему тогда ядра с номером меньше 50 и больше 60 самопроизвольно не распадаются, что бы перейти в состояния с максимальной энергией связи?

Ответ: для того чтобы разделиться, тяжёлое ядро должно пройти несколько промежуточных состояний с более низкой энергией связи. Чтобы перейти в эти состояния, нужна дополнительная энергия извне (энергия активации). В обычных условиях ядру неоткуда получить эту энергию и ядра остаются стабильными.

17.3.5 Термоядерные реакции

Для слияния лёгких ядер они должны подойти друг к другу на расстояние порядка 10^{-15}м , чему препятствует кулоновское отталкивание.

Для преодоления отталкивания, ядра должны двигаться с огромными скоростями. Это соответствует высокой температуре — порядка сотен миллионов кельвин.

По этой причине процесс синтеза легких ядер называется термоядерной реакцией.

17.4 Сильное ядерное взаимодействие

17.4.1 Сильное взаимодействие

Огромная энергия связи нуклонов говорит о том, что между нуклонами действует очень интенсивное притяжение.

Оно удерживает нуклоны на расстоянии порядка 10^{-15}м друг от друга преодолевая кулоновское расталкивание.

Это взаимодействие получило название сильного или ядерного взаимодействия.

Согласно квантовой физике, силовое взаимодействие осуществляется посредством частиц — квантов соответствующего поля.

Например, фотоны — это кванты электромагнитного поля.

Квантами сильного взаимодействия являются частицы, которые называются глюоны (от английского слова «клей»).

17.4.2 Свойство сильного взаимодействия

1. Действует на очень коротких расстояниях. Быстро убывает на расстояниях больше 10^{-15} м.
2. Не зависит от электрического заряда, т. е. одинаково действует на нейтроны и протоны.
3. Зависит от взаимной ориентации спинов. Так например нейтрон и протон удерживаются вместе в ядре дейтерия только если их спины сонаправлены.
4. Не центральная сила. Её нельзя представить направленной вдоль прямой, соединяющей центры нуклонов.
5. Обладает свойством насыщения, т. е. каждый нуклон может взаимодействовать только с ограниченным числом нуклонов.

17.5 Радиоактивность

17.5.1 Понятие радиоактивности. Виды излучений

Радиоактивностью называется самопроизвольное превращение одних атомных ядер в другие, сопровождающееся испусканием частиц, т. е. радиоактивным излучением.

Радиоактивность, наблюдающаяся у ядер в природных условиях называется естественной. Радиоактивность, полученная в лаборатории называется искусственной.

Радиоактивный распад сопровождается испусканием излучения трёх видов:

1. α -излучение представляет собой ядра гелия ${}^4\text{He}$;
2. β -излучение — поток электронов (или позитронов);
3. γ -излучение — поток фотонов высокой энергии, т. е. электромагнитные волны с чрезвычайно малой длиной волны, порядка 10^{-3} нм.

17.5.2 Закон радиоактивного распада. Период полураспада

Так как отдельные ядра распадаются независимо друг от друга, то количество ядер dN распадающихся за малый промежуток времени dt пропорционально как числу имеющихся ядер так и промежутку времени dt :

$$dN = -\lambda N dt,$$

где λ — постоянная распада.

Интегрирование даёт закон радиоактивного распада:

$$N = N_0 \exp(-\lambda t)$$

где N_0 — количество ядер в начальный момент времени, N — количество нераспавшихся ядер в момент времени t .

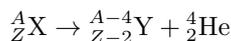
Время, за которое распадается половина первоначального количества ядер называется периодом полураспада T :

$$N_0/2 = N_0 \exp(-\lambda T)$$

$$T = \ln 2 / \lambda = 0.693 / \lambda$$

17.5.3 Альфа-распад

Альфа-распад — распад тяжёлых ядер, сопровождающийся испусканием α -частиц (ядра ${}^4_2\text{He}$):



где X — распадающееся (материнское) ядро, Y образующиеся (дочернее) ядро.

Энергия испускаемых α -частиц сравнительно велика и составляет несколько миллионов электронвольт.

Проходя через вещество, α -частицы теряют свою энергию при неупругих соударениях с молекулами и атомами среды, вызывая их возбуждение и ионизацию.

Двигаясь в среде, α -частицы постепенно тормозятся, приобретая в конечном итоге тепловую скорость окружающих молекул.

Чем плотнее вещество, тем меньше пробег α -частиц. В воздухе при нормальном давлении пробег равен нескольким см, а в твёрдом веществе порядка 0.01 мм (α -частицы полностью задерживаются листом бумаги).

Кинетическая энергия α -частиц возникает за счёт превышения энергии покоя материнского ядра над суммарной энергией покоя дочернего ядра и α -частицы. Поэтому энергии всех α -частиц оказываются примерно одинаковыми.

Покидая ядро, α -частица вынуждена преодолевать потенциальный барьер, существование которого обусловлено действием ядерных сил. Это происходит за счёт туннельного эффекта.

17.5.4 Бета-распад

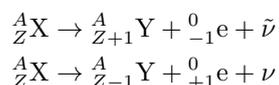
Существует три разновидности β -распада:

1. ядро, претерпевая превращение, испускает электрон (β^- -распад);
2. ядро испускает позитрон (β^+ -распад);
3. ядро поглощает один из своих электронов (электронный захват).

При β^- -распаде один из нейтронов ядра превращается в протон, а при β^+ -распаде один из протонов становится нейтроном.

При этом массовый число не меняется, а зарядовое изменяется на единицу.

Схема β -распада:



Пока не было открыто нейтрино, бета-распад протекал необъяснимым образом. Казалось, что закон сохранения энергии нарушается, так как возникающие электроны имели непредсказуемое значение энергии — от нуля до некоторого максимального E_{\max} .

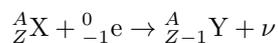
Позже выяснилось, что кроме электрона позитрона, при β -распаде испускается антинейтрино (при позитронном распаде — нейтрино).

Эта частица имеет очень малую массу покоя, не имеет электрического заряда и очень трудно регистрируется в опытах. (Именно поэтому законы бета-распада долго были необъяснимыми.)

Освобождающаяся при β -распаде энергия случайным образом делится между электроном/позитроном, антинейтрино/нейтрино и дочерним ядром.

Однако доля энергии, передаваемой ядру, исчезающе мала, по сравнению с энергией, уносимой электроном и антинейтрино. Практически можно считать, что эти две частицы делят между собой всю освобождающуюся энергию.

Ещё одним видом бета-распада является электронный захват. Схема электронного захвата: за счёт поглощения одного из электронов ядро уменьшает своё зарядовое число на единицу и испускает нейтрино,



Может происходить захват электрона с K-, L- или M-оболочек. Соответственно, говорят от K-, L- или M-захвате.

Место захваченного электрона в электронной оболочке заполняют электроны из внешних оболочек и при этом излучаются рентгеновские фотоны.

Электронный захват в опытах регистрируют именно по рентгеновскому излучению.

17.5.5 Гамма-излучение

Гамма-излучение — электромагнитное излучение с очень короткой длиной волны, испускаемое ядрами в ходе радиоактивных процессов.

Гамма-излучение возникает из-за того, что дочернее ядро может возникать в возбуждённом состоянии. Снятие возбуждения сопровождается испусканием γ -кванта.

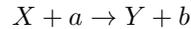
17.6 Ядерные реакции

17.6.1 Понятие ядерной реакции

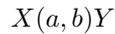
Ядерная реакция — это процесс взаимодействия ядра с субатомной частицей или с другим ядром, приводящий к преобразованию ядра (или ядер).

Взаимодействие реагирующих частиц происходит при сближении их до расстояния порядка 10^{-15} м.

Наиболее распространённый вид реакции — взаимодействие лёгкой частицы a с ядром X , в результате которого образуется лёгкая частица b и ядро Y :



Сокращённо это записывают так:



В качестве лёгких частиц a и b обычно фигурируют: нейтрон (n), протон (p), дейтрон (ядро дейтерия, d), α -частица (α) и γ -фотон (γ).

Ядерные реакции могут сопровождаться как выделением, так и поглощением энергии — энергия реакции.

Она определяется разностью масс исходных и конечных ядер. Если сумма масс образующихся ядер больше суммы масс исходных ядер, то реакция идёт с поглощением энергии.

Примеры ядерных реакций.

- α -распад урана с возникновением тория: ${}_{92}^{235}\text{U} \rightarrow {}_{90}^{231}\text{Th} + {}_2^4\text{He}$
- слияние двух ядер гелия в ядро лития: ${}_2^4\text{He} + {}_2^4\text{He} \rightarrow {}_3^7\text{Li} + p$
- превращение бериллия в литий: ${}_4^9\text{Be} + p \rightarrow {}_3^6\text{Li} + {}_2^4\text{He}$

17.6.2 Два вида ядерных реакций

Существуют два вида ядерных реакций — с образованием составного ядра и без.

Ядерные реакции, вызванные низко энергетическим (не очень быстрыми) частицами протекают в два этапа.

На первом этапе материнское ядро X захватывает частицу a и превращается в промежуточное ядро Π , которое называют составным ядром.

Затем составное ядро распадается, испуская частицу b :



Время жизни составного ядра сравнительно велико по сравнению с внутриядерными процессами, и поэтому распад составного ядра происходит независимо от первого этапа, поглощения.

Это значит, что распад может происходить несколькими способами, и их вероятность не зависит от условий образования составного ядра.

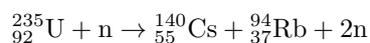
Реакции, вызванные быстрыми нуклонами и дейтронами протекают без возникновения составного ядра и называются прямыми.

17.6.3 Деление ядер

При облучении урана нейтронами образуются элементы из середины периодической таблицы.

Осколки от деления могут быть ядрами различных веществ. Всего обнаружено около 80 различных вариантов.

Пример реакции деления урана:



Кроме урана при облучении нейтронами делится торий (${}_{90}^{232}\text{Th}$), проактиний (${}_{91}^{231}\text{Pa}$) и плутоний (${}_{94}^{239}\text{Pu}$).

Нейтроны сверхвысоких энергий вызывают деление и более лёгких ядер.

Ядра ${}_{92}^{235}\text{U}$ и ${}_{94}^{239}\text{Pu}$ делятся нейтронами любых энергий, но особенно хорошо медленными.

17.6.4 Цепная реакция

Испускание при делении ядер нескольких нейтронов делает возможным осуществление цепной ядерной реакции.

Испущенные при делении одного ядра z нейтронов могут вызвать деление z ядер, что приведёт к испусканию z^2 новых нейтронов, которые вызовут деление z^2 ядер и так далее.

Однако в реальности не все испущенные нейтроны вызывают деление ядер. Они могут покидать область реакции, а также поглощаться атомами примесей, которые не претерпевают деления.

17.6.5 Изотопный состав природного урана. Обогащение урана

Природный уран содержит 99.27% изотопа ${}_{92}^{238}\text{U}$, 0.72% ${}_{92}^{235}\text{U}$ и около 0.01% ${}_{92}^{234}\text{U}$.

Следовательно, на каждое делящееся ядро ${}_{92}^{235}\text{U}$ приходится 140 ${}_{92}^{238}\text{U}$, которые захватывают не слишком быстрые нейтроны без деления.

Чтобы заставить делиться ${}_{92}^{238}\text{U}$ требуются нейтроны очень высокой энергии, которые не образуются в ходе реакции деления. Поэтому в природном уране цепная реакция не возникает.

Для ядерной энергетики и для атомного оружия производят разделение изотопов природного урана, выделение чистого изотопа ${}_{92}^{235}\text{U}$, что называется обогащением урана.

17.6.6 Критическая масса

Объём тела растёт как куб, а поверхность как квадрат его линейных размеров. Следовательно, при постоянной плотности, чем больше масса образца, тем больше нейтронов участвует в реакции.

Существует пороговое значение массы вещества (урана-235 или плутония-239), при превышении которого в нём может идти цепная ядерная реакция.

17.6.7 Ядерное взрывное устройство

В атомной бомбе уран-235 или плутоний-239 разделены на несколько кусков массой ниже критической. Чтобы произошёл взрыв, нужно быстро соединить их вместе, так чтобы образовалась критическая масса.

Это осуществляют при помощи подрыва обычного, химического взрывчатого вещества (запал).

Ядерная реакция сопровождается выделением большого количества теплоты. Чтобы активное вещество не испарилось до того, как прореагирует основная часть атомов, его помещают в массивную оболочку большой плотности.

17.6.8 Управляемая цепная реакция на АЭС

На АЭС используется топливо уран с небольшим процентом изотопа 235.

Когда в результате деления возникают быстрые нейтроны, уран-238 поглощает их без деления и цепная реакция не возникает.

Медленные нейтроны не взаимодействуют с ураном-238 и хорошо взаимодействуют с ураном-235.

Чтобы запустить управляемую реакцию, нужно замедлять нейтроны. Для этого сравнительно небольшие блоки ядерного топлива чередуют с веществом-замедлителем: водой, графитом или бериллием.

Для контроля интенсивности реакции в активную зону реактора вводят некоторое количество замедлителя. Увеличение количества замедлителя ускоряет реакцию, уменьшение замедляет её.

18 Элементарные частицы и космология

18.1 Виды взаимодействий

Всего известно 4 вида фундаментальных взаимодействий. Интенсивность взаимодействия характеризуется безразмерной константой.

- Сильное взаимодействие. Связь нуклонов в ядре. Константа взаимодействия ≈ 10 . Радиус действия $\approx 10^{-15}\text{м}$.
- Электромагнитное взаимодействие. Константа взаимодействия $1/137$, радиус действия не ограничен.
- Слабое взаимодействие. Отвечает за все виды β -распада, за распады многих элементарных частиц. Константа взаимодействия $\approx 10^{-14}$. Радиус действия $\approx 10^{-18}$.
- Гравитационное. Ему подвержены все частицы, но константа взаимодействия очень мала, $\approx 10^{-39}$. Не играет ощутимой роли в процессах микромира. Исключение — явления вблизи чёрных дыр.

18.2 Классификация элементарных частиц

18.2.1 Понятие элементарных частиц

Элементарными частицами называются мельчайшие известные в настоящее время частицы материи.

Термин «элементарные» в значительной мере условен, так как строго говоря многие частицы претерпевают взаимные превращения.

Большинство частиц нестабильны — они спонтанно превращаются в другие частицы. Стабильными являются фотон, электрон, все виды нейтрино, протон и их античастицы.

18.2.2 Группы элементарных частиц

- Фермионы и бозоны. Фермионы имеют полуцелый спин и подчиняются принципу запрета Паули (электрон, протон, нейтрон, нейтрино) Бозоны имеют целый спин (фотон, глюон, мезоны). Также к бозонам относятся ядра с чётным числом нуклонов.
- Лептоны. От греческого «лептос», лёгкий. Это фермионы, которые имеют вид точечных частиц, т. е. не состоят ни из чего вплоть до 10^{-18} м. Такие частицы называют фундаментальными. К лептонам относятся электрон, нейтрино, мюоны и др.
- Адроны. От греческого «адрос», массивный. Эти массивные частицы подвержены сильному взаимодействию. Подразделяются на мезоны и барионы. Барионами являются, в частности протоны и нейтроны.
- Кварки. Фундаментальные частицы (точечные, без внутренней структуры), которые обладают электрическим зарядом либо $-e/3$, либо $+2e/3$ и не наблюдаются в свободном состоянии. Из кварков построены все адроны. В частности, протон и нейтрон состоят из трёх кварков.
- Калибровочные или элементарные бозоны. Это бозоны, посредством которых осуществляются взаимодействия: фотон (электромагнитное), 8 глюонов (сильное), W - и Z -бозоны (слабое), гравитон (гравитационное, гипотетическая частица, существование которой не доказано).
- Составные бозоны. Частицы с целым или нулевым спином, построенные из других частицы. Например, мезоны — построены из пары кварков или ядра с чётным числом нуклонов.

18.2.3 Деление частиц на классы

По спину.

- фермионы — полуцелый спин;
- бозоны — целый или нулевой спин.

По внутренней структуре

- фундаментальные (лептоны, кварки, калибровочные бозоны);
- составные — адроны (мезоны и барионы).

По видам взаимодействия

- адроны — участвуют во всех видах взаимодействия;
- лептоны — участвуют в слабом взаимодействии и, при наличии заряда, в электромагнитном.
- кварки — участвуют в сильном взаимодействии.

По типу материи

- вещество (фермионы и составные бозоны);
- поле (калибровочные бозоны).

18.3 Частицы и античастицы

18.3.1 Энергетические уровни вакуума

Уравнение Шрёдингера не удовлетворяет требованиям теории относительности, оно не инвариантно по отношению к преобразованию Лоренца.

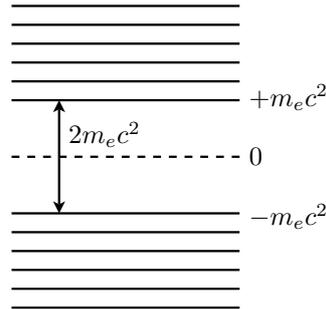
Дирак в 1928 году предложил релятивистское квантовомеханическое уравнение для электрона. Анализ решений этого уравнения позволил предсказать существование античастицы — позитрона.

Импульсу p свободной частицы соответствуют два решения: с положительной и отрицательной энергиям:

$$E = \pm \sqrt{c^2 p^2 + m_e^2 c^4}$$

Наименьшая положительная энергия равна $+m_e c^2$, наибольшая отрицательная энергия равна $-m_e c^2$. Между ними существует интервал запрещённых значений шириной $2m_e c^2$.

18.3.2 Населённость отрицательных уровней и принцип запрета Паули



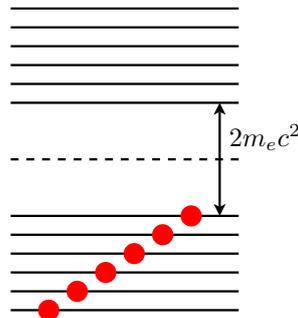
В принципе электрон мог бы преодолевать этот интервал и попадать на отрицательные уровни вследствие туннельного эффекта.

Однако частица с отрицательной энергией обладала бы странными свойствами. Она могла бы опускаться по энергетическим уровням вниз, излучая неограниченно большое количество энергии.

Дирак предположил что мы не наблюдаем такие частицы так как вакуум есть такое состояние, в котором все уровни с отрицательной энергией заселены электронами.

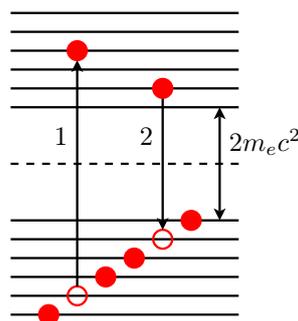
Электроны это фермионы, так что действует запрет Паули, не позволяющий двум и более электронам занимать одинаковые состояния.

Поэтому электроны не могут свободно переходить в состояния с отрицательной энергией. Так как заняты все без исключения отрицательные уровни, электроны на этих уровнях себя никак не обнаруживают.



18.3.3 Образование электрон-позитронной пары

Если одному электрону с отрицательного уровня сообщить энергию $E \geq 2m_e c^2$, то электрон перейдёт в состояние с положительной энергией и будет вести себя обычным образом — стрелка 1.



Вакансия («дырка») на отрицательных уровнях будет восприниматься приборами как электрон с положительным зарядом — античастица позитрон.

18.3.4 Аннигиляция

При встрече частицы и античастицы они аннигилируют — стрелка 2. При этом излучается γ -квант. Аннигиляция — это не взаимное уничтожение частиц, а их взаимное превращение.

18.3.5 Закон сохранения импульса при аннигиляции

Для соблюдения закона сохранения импульса, в процессе рождения электрон-позитронных пар кроме γ -кванта должна участвовать ещё одна частица.

$$\gamma + X \rightarrow X + e^- + e^+$$

где X — либо ещё один электрон, либо ядро, вблизи которого происходит рождение.

При аннигиляции закон сохранения импульса удовлетворяется тем, что рождаются два (реже три) γ -кванта, разлетающиеся в разные стороны:

$$e^- + e^+ \rightarrow \gamma + \gamma(+\gamma)$$

18.3.6 Античастицы для других элементарных частиц

По аналогии с электроном, теория Дирака предсказала также существование античастиц для других фермионов, например для протона или нейтрона. Эти предсказания были подтверждены экспериментально.

Античастицы существуют не только у фермионов, но и у бозонов. Вообще теория предсказывает существование античастиц для всех элементарных частиц. Фактически это означает, что уравнения дают пару решений, одно из которых соответствует частице, а другое античастице (вспомним про электрон и позитрон).

Существуют такие частицы, для которых решения совпадают. Эти частицы тождественны собственным античастицам и их называют абсолютно нейтральными. Такой частицей, например является фотон. Абсолютно нейтральные частицы не способны к аннигиляции.

18.4 Законы сохранения для элементарных частиц

18.4.1 Роль законов сохранения

Все процессы связанные с взаимными превращениями элементарных частиц возможны только при выполнении законов сохранения.

Более того, если явление не противоречит ни одному закону сохранения, оно обязательно происходит с некоторой вероятностью.

Например при туннельном эффекте законы сохранения не нарушаются, и он имеет место, хотя представляется невозможным с точки зрения здравого смысла.

18.4.2 Законы сохранения, действующие в микромире

- Энергии.
- Импульса.
- Моента импульса.
- Электрического заряда.
- Барионного заряда.
- Лептонного заряда.

18.4.3 Симметрия и законы сохранения

Каждый закон сохранения связан с какой-либо симметрией законов природы. Однако не для всех законов эта симметрия известна.

- Закон сохранения энергии — однородность времени.
- Закон сохранения импульса — однородность пространства.
- Закон сохранения момента импульса — изотропия пространства.

Симметрия проявляется как неизменность законов движения частиц относительно преобразований:

- Сдвиг начала отсчёта времени — энергия.
- Перенос начала отсчёта координат — импульс.
- Поворот координатных осей — момент импульса.

18.4.4 Законы сохранения барионного и лептонного заряда

Сохранение барионного заряда

Если барионам приписать заряд $B = +1$, антибарионам $B = -1$, а всем прочим частицам $B = 0$, то во всех процессах с участием барионов суммарное значение заряда должно сохраняться.

Сохранение лептонного заряда

Припишем каждому лептону заряд $L = +1$, антилептону $L = -1$, а всем прочим частицам $L = 0$. Во всех процессах с участием лептонов суммарный заряд сохраняется.

Пример: закон сохранения барионного заряда не разрешает процесс распада протона, на пучок лептонов:

$$p \not\rightarrow e^+ + \nu + \bar{\nu}$$

Действительно, такой распад никогда не наблюдается в экспериментах.

Законы сохранения барионного и лептонного заряда — чисто эмпирические. Их происхождение не ясно. Слово заряд здесь имеет условное значение. Эти заряды не имеют никакого отношения к полям и силовому взаимодействию, как в случае с электрическим зарядом.

18.5 Единая теория взаимодействий

18.5.1 Объединение электрического и слабого взаимодействий

Эйнштейн был первым, кто высказал идею о том, что все виды силового взаимодействия должны иметь одинаковую природу и описываться одной теорией. Он много лет безуспешно пытался объединить гравитацию и электромагнитное взаимодействие.

В 60-х годах 20 века Вайнберг, Глэшоу и Салам создали единую теорию электрослабых взаимодействий.

Они доказали, что при очень высокой температуре (т. е. высокой кинетической энергии частиц), порядка 10^{15} градусов, электромагнитное и слабое взаимодействие проявляют себя идентичным образом.

Это связано с тем, что при такой высокой температуре частицы W и Z , отвечающие за слабое взаимодействие теряют массу покоя и становятся идентичными фотонам.

18.5.2 Гипотеза об объединении электрослабого и сильного взаимодействий

После открытия электрослабого взаимодействия, Джорджи и Глэшоу обосновали возможность того, что при ещё более высоких температурах, порядка 10^{28} градусов электрослабое и сильное взаимодействия становятся идентичными.

Однако до сегодняшнего дня доказательства этого нет. Одним из косвенных доказательств правильности этой теории является нарушение закона сохранения барионного заряда — распад протона на пучок лептонов. Пока такой эффект не зарегистрирован.

18.5.3 Единая теория и гравитация

Наибольшая сложность связана с попытками построить теорию, включающую в себя также и гравитацию.

Обычно в микромире гравитация практически не играет никакой роли.

Однако вблизи чёрных дыр и для описания Большого взрыва такая теория необходима.

Сегодня существует две нестыкующиеся друг с другом совершенно разные ветви фундаментальной науки — теория микромира, основанная на законах квантовой механики, и космология, основанная на общей теории относительности.

Хотя существуют теории, объединяющие эти ветви, но их экспериментальная проверка требует сверхвысоких энергий. Возможно, некоторые теории будут подтверждены или опровергнуты при помощи большого адронного коллайдера.

18.6 Стандартная модель и бозон Хиггса

18.6.1 Стандартная модель

Стандартная модель — теория, построенная на основе квантовой механики и описывающая электромагнитное, слабое и сильное взаимодействие всех элементарных частиц. Стандартная модель не учитывает гравитацию.

Стандартная модель включает в себя описание всех известных элементарных частиц. Частицы, существование которых предсказано стандартной моделью, были впоследствии обнаружены экспериментально.

Единственная частица, предсказанная стандартной моделью но пока не обнаруженная экспериментально — бозон Хиггса.

18.6.2 Поле и бозон Хиггса

Стандартная модель предполагает, что кроме известных гравитационного, сильного и электрослабого полей существует поле Хиггса, по фамилии английского теоретика Питера Хиггса.

Бозон Хиггса — гипотетическая массивная бесспиновая частица, квант этого поля.

Поле Хиггса отвечает за возникновение масс у элементарных частиц.

18.6.3 Возникновение массы

Поле Хиггса практически неотделимо от пустого пространства. Считается, что все пространство заполнено этим полем, и что частицы приобретают массу путем взаимодействия с ним.

Те из них, которые сильно взаимодействуют с полем Хиггса, являются тяжелыми частицами, а слабо взаимодействующие — легкими.

Этот эффект аналогичен эффекту движения тела в вязкой жидкости, когда оно за счет взаимодействия с жидкостью приобретает дополнительную эффективную массу. Еще один пример — электрон в кристалле. Из-за электромагнитного взаимодействия с атомами кристаллической решетки электрон приобретает эффективную массу, отличную от массы свободного электрона.

18.6.4 Важность бозона Хиггса для современной физики материи

Экспериментальное подтверждение существования бозона Хиггса совершенно необходимо для подтверждения правильности стандартной модели.

Если бозон Хиггса и соответствующее ему поле не существуют, значит стандартная модель должна быть пересмотрена.

18.7 Космологические представления

18.7.1 Космологическая сингулярность

По современным представлениям, наблюдаемая нами сейчас Вселенная возникла 14 млрд лет назад из некоторого начального точечного состояния и с тех пор непрерывно расширяется и охлаждается.

Экстраполяция наблюдаемого расширения Вселенной назад во времени приводит к бесконечной плотности и температуре в конечный момент времени в прошлом и нулевым размерам Вселенной.

Это состояние называется космологической сингулярностью и сигнализирует о том, что наша математическая модель пространства-времени в момент Большого взрыва теряет применимость.

Более того, теория не даёт никакой возможности говорить о чём-либо, что предшествовало этому моменту. Однако при этом теория вовсе не отрицает возможность существования чего-либо до Большого взрыва.

Согласно известным ограничениям по применимости современных физических теорий, наиболее ранним моментом, допускающим описание, считается момент Планковской эпохи, 10^{-43} с после Большого взрыва, с температурой примерно 10^{32} К (Планковская температура) и плотностью около 10^{93} г/см³ (Планковская плотность).

18.7.2 Планковская эпоха и отделение гравитации

Ранняя Вселенная представляла собой высокооднородную и изотропную среду с необычайно высокой плотностью энергии, температурой и давлением.

При расширении Вселенная начала остывать и через 10^{-43} с после Большого взрыва температура понизилась так, что гравитационное взаимодействие отделилось от остальных фундаментальных взаимодействий. Этот момент называют Планковской эпохой

18.7.3 Инфляция

Приблизительно через 10^{-35} с после наступления Планковской эпохи фазовый переход вызвал экспоненциальное расширение Вселенной.

Фазовый переход — явление, аналогичное конденсации жидкости из газа, но применительно к элементарным частицам.

Данный период получил название Космической инфляции.

После окончания этого периода строительный материал Вселенной представлял собой кварк-глюонную плазму.

18.7.4 Бариогенезис

По прошествии времени температура упала до значений, при которых стал возможен следующий фазовый переход, называемый бариогенезисом. На этом этапе кварки и глюоны объединились в барионы, такие как протоны и нейтроны.

При этом одновременно происходило асимметричное образование как материи, которая превалировала, так и антиматерии, которые взаимно аннигилировали, превращаясь в излучение.

18.7.5 Нуклеосинтез

Дальнейшее падение температуры привело к следующему фазовому переходу — образованию всех тех элементарных частиц, которые мы сегодня наблюдаем во Вселенной.

После чего наступила эпоха нуклеосинтеза, при которой протоны, объединяясь с нейтронами, образовали ядра дейтерия, гелия-4 и ещё нескольких лёгких изотопов.

18.7.6 Возникновение атомов

После дальнейшего падения температуры и расширения Вселенной наступил следующий переходный момент, при котором гравитация стала доминирующей силой.

Через 380 тысяч лет после Большого взрыва температура снизилась настолько, что стало возможным существование атомов водорода (до этого процессы ионизации и рекомбинации протонов с электронами находились в равновесии).

После эры рекомбинации материя стала прозрачной для излучения, которое, свободно распространяясь в пространстве, доходит до нас в виде реликтового излучения.

18.7.7 Тёмная материя

Изучая структуру галактик, астрофизики доказали, что для их формирования и поддержания в устойчивом состоянии недостаточно только гравитации, создаваемой видимым веществом. Теория требует гораздо больше материи, чем мы видим.

Была выдвинута гипотеза о существовании тёмной материи. Этот вид материи не взаимодействует с электромагнитным излучением и поэтому её не видно в телескопы. Но она участвует в гравитационном взаимодействии.

Такой материи во Вселенной должно быть примерно 25%, тогда как на долю «обычной» материи приходится примерно 5%

18.7.8 Тёмная энергия

В настоящее время Вселенная продолжает расширяться и наблюдения за звёздами показывает, что расширение происходит с ускорением.

Наличие ускорения означает, что кроме гравитационного притяжения существует также гравитационной отталкивание. За него отвечает некая субстанция, которую назвали тёмной энергией. Её во Вселенной около 70%

18.7.9 Дальнейшая эволюция Вселенной

Дальнейшая эволюция зависит от экспериментально измеримого параметра — средней плотности вещества в современной Вселенной.

Если плотность не превосходит некоторого (известного из теории) критического значения, Вселенная будет расширяться вечно, если же плотность больше критической, то процесс расширения когда-нибудь остановится и начнётся обратная фаза сжатия, возвращающая к исходному сингулярному состоянию.

Современные экспериментальные данные относительно величины средней плотности ещё недостаточно надёжны, чтобы сделать однозначный выбор между двумя вариантами будущего Вселенной.