Математический анализ

А.А.Никитин

§0 Введение. Основные обозначения.

0.1 Множества. Операции над множествами

Множество состоит из объектов, называемых его элементами. Запись $x \in \mathbf{A}$ означает, что объект x принадлежит множеству $\mathbf{A}$; является элементом множества $\mathbf{A}$. Запись $x \notin \mathbf{A}$ означает, что x не принадлежит множеству $\mathbf{A}$; не является элементом множества $\mathbf{A}$.

Множество может задаваться перечислением своих элементов:

$$\{1, 5, 14, 100\}, \quad \{\text{а}, \text{б}, \text{и}, \text{о}\},$$

а также указанием свойства (*принцип селекции*): множество всех элементов, удовлетворяющих свойству P, обозначение:

$$\mathbf{A} = \{x \in \mathbf{M} \mid x - \text{удовлетворяет свойству } P\}.$$

Обычно рассматриваются элементы, принадлежащие некоторому основному множеству M (объёмлющему множеству, множеству допустимых элементов). Множество M либо ясно из контекста, либо явно указывается. Например, в планиметрии M – это плоскость.

Пример 1. $\mathbf{A} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 > 4\} = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

Элементами множества могут быть множества. Например, во множестве $\{1, \{1\}, \{2, 3\}\}$ три элемента: число 1, множество, единственным элементом которого является число 1, и множество из двух элементов – чисел 2 и 3.

Общепринятые сокращения записи.

Удобно ввести в рассмотрение *пустое множество* – множество, в котором нет ни одного элемента. Обозначение: $\varnothing$.

Если P и Q – два утверждения, то запись $P \Rightarrow Q$ называется *импликацией* и означает, что если верно P, то верно и Q (из P следует Q, P влечёт Q) или P достаточно для Q (Q необходимо для P).

Если $P \Rightarrow Q$ и $Q \Rightarrow P$, то говорят, что утверждения P и Q *равносильны* (или *эквивалентны*) или P необходимо и достаточно для Q. Обозначение: $P \Leftrightarrow Q$.

Также используются следующие специальные знаки (*кванторы*):

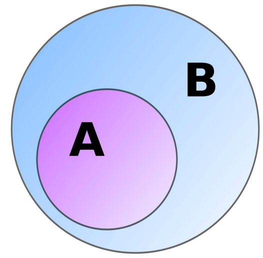
$\forall$ – *квантор всеобщности*; заменяет слова «любой», «каждый» или «для любого», «для всякого».

$\exists$ – *квантор существования*; заменяет слова «существует», «найдётся».

$\exists!$ – «существует и единственный»;

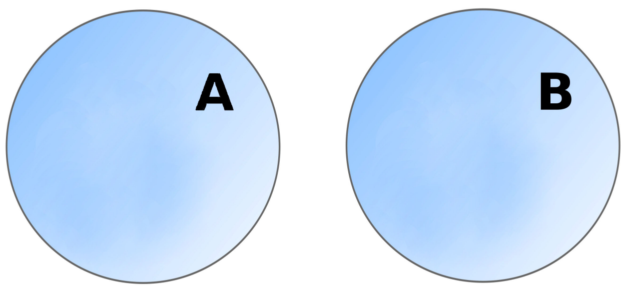
$:=$ или $\stackrel{\mathbf{def}}{=}$ – «равенство по определению»;

Определение: Если каждый элемент множества $\mathbf{A}$ принадлежит множеству $\mathbf{B}$[1], то говорят, что $\mathbf{A}$ *содержится в* $\mathbf{B}$ (или $\mathbf{A}$ подмножество $\mathbf{B}$). Обозначение: $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$.



Определение: Если множества $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ состоят из одних и тех же элементов, то их называют *равными* и пишут $\mathbf{A} = \mathbf{B}$. Другими словами $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$ и $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$:

$$(\forall x \in \mathbf{A} \Rightarrow x \in \mathbf{B}) \text{ и } (\forall y \in \mathbf{B} \Rightarrow y \in \mathbf{A}) \iff \mathbf{A} = \mathbf{B}.$$

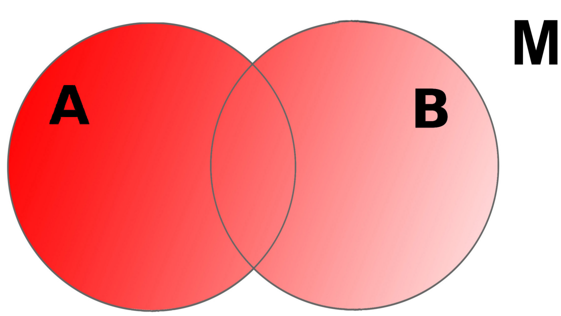


Операции над множествами.

Бинарные операции.

1. *Объединением множеств* $\boldsymbol{A}$ *и* $\boldsymbol{B}$ называется множество всех элементов, лежащих в $\mathbf{A}$ или в $\mathbf{B}$. Обозначение: $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$.

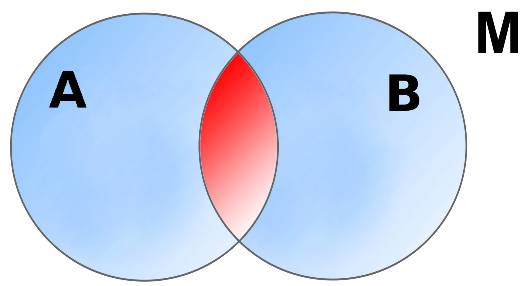
$$\mathbf{A} \cup \mathbf{B} := \left\{ x \in \mathbf{M} \,\middle|\, x \in \mathbf{A} \text{ или } x \in \mathbf{B} \right\}.$$



[1] Т.е. $\forall x \in \mathbf{A} \Rightarrow x \in \mathbf{B}$

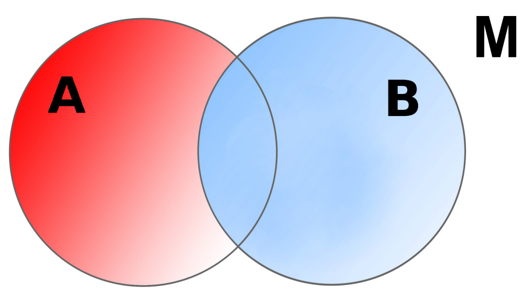
2. *Пересечением множеств* $\boldsymbol{A}$ *и* $\boldsymbol{B}$ называется множество всех элементов, лежащих и в $\mathbf{A}$, и в $\mathbf{B}$. Обозначение: $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$.

$$\mathbf{A} \cap \mathbf{B} := \left\{ x \in \mathbf{M} \,\middle|\, x \in \mathbf{A} \text{ и } x \in \mathbf{B} \right\}.$$



3. *Разностью множеств* $\boldsymbol{A}$ *и* $\boldsymbol{B}$ называется множество всех элементов, лежащих в $\mathbf{A}$, но не лежащих в $\mathbf{B}$. Обозначение: $\mathbf{A} \setminus \mathbf{B}$.

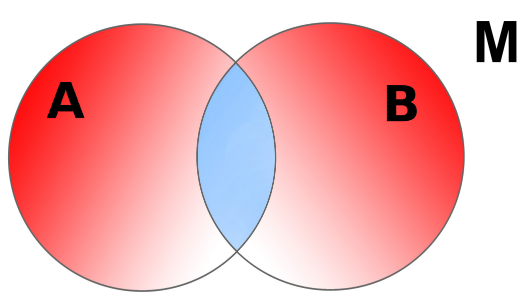
$$\mathbf{A} \setminus \mathbf{B} := \left\{ x \in \mathbf{M} \,\middle|\, x \in \mathbf{A} \text{ и } x \notin \mathbf{B} \right\}.$$



4. *Симметрическая разность множеств* $\boldsymbol{A}$ *и* $\boldsymbol{B}$.

$$\mathbf{A} \vartriangle \mathbf{B} := \left\{ x \in \mathbf{M} \,\middle|\, (x \in \mathbf{A} \text{ и } x \notin \mathbf{B}) \text{ или } (x \in \mathbf{B} \text{ и } x \notin \mathbf{A}) \right\} =$$

$$= (\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \setminus (\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \setminus \mathbf{B}) \cup (\mathbf{B} \setminus \mathbf{A}).$$



Пример 2. $(\mathbf{A}\cup\mathbf{B})\cap\mathbf{C} = (\mathbf{A}\cap\mathbf{C})\cup(\mathbf{B}\cap\mathbf{C})$ – дистрибутивность объединения относительно пересечения.

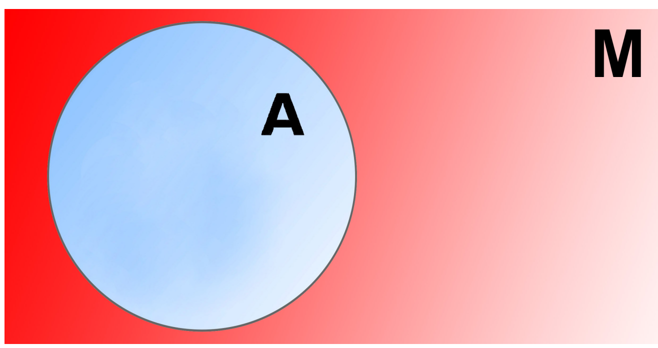
Доказательство. Пусть $x \in (\mathbf{A}\cup\mathbf{B})\cap\mathbf{C} \Rightarrow \big(x\in\mathbf{A}$ или $x\in\mathbf{B}\big)$ и $x\in\mathbf{C} \Rightarrow$ $\big(x\in\mathbf{A}$ и $x\in\mathbf{C}\big)$ или $\big(x\in\mathbf{B}$ и $x\in\mathbf{C}\big) \Rightarrow x \in (\mathbf{A}\cap\mathbf{C})\cup(\mathbf{B}\cap\mathbf{C})$. $(A\cup B)\cap C \subset (A\cap C)\cup(B\cap C)$.

Пусть $x\in(\mathbf{A}\cap\mathbf{C})\cup(\mathbf{B}\cap\mathbf{C}) \Rightarrow x\in\mathbf{A}\cap\mathbf{C}$ или $x\in\mathbf{B}\cap\mathbf{C} \Rightarrow$ $\Rightarrow \big(x\in\mathbf{A}$ и $x\in\mathbf{C}\big)$ или $\big(x\in\mathbf{B}$ и $x\in\mathbf{C}\big) \Rightarrow x\in\mathbf{A}\cup\mathbf{B}$ и $x\in\mathbf{C}\Rightarrow$ $\Rightarrow x\in(\mathbf{A}\cup\mathbf{B})\cap\mathbf{C}$. □ $(A\cap C)\cup(B\cap C)\subset(A\cup B)\cap C$.

Упражнение: Докажите равенство: $(\mathbf{A}\cap\mathbf{B})\cup\mathbf{C} = (\mathbf{A}\cup\mathbf{C})\cap(\mathbf{B}\cup\mathbf{C})$.

5. Пусть мы работаем с подмножеством некоего объёмлющего множества $\mathbf{M}$. *Дополнением множества* $\mathbf{A}\subset\mathbf{M}$ (*дополнение* $\mathbf{A}$ *до* $\mathbf{M}$) называется множество Унарная операция.

$$A^C = \big\{x\in\mathbf{M}\,\big|\,x\notin\mathbf{A}\big\}^{2)}.$$



Пример 3. $\mathbb{Q}^C = \mathbb{I}$ – множество иррациональных чисел;

Пример 4. $(\mathbf{A}\cup\mathbf{B})^C = \mathbf{A}^C\cap\mathbf{B}^C, \quad (\mathbf{A}\cap\mathbf{B})^C = \mathbf{A}^C\cup\mathbf{B}^C$. правила двойственности или формулы де Моргана

Доказательство. $x\in(\mathbf{A}\cup\mathbf{B})^C \Leftrightarrow x\notin\mathbf{A}\cup\mathbf{B}\Leftrightarrow x\notin\mathbf{A}$ и $x\notin\mathbf{B}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x\in\mathbf{A}^C$ и $x\in\mathbf{B}^C\Leftrightarrow x\in\mathbf{A}^C\cap\mathbf{B}^C$.

Второе равенство оставляется читателю в качестве **упражнения**. □

Определение: *Упорядоченная пара* (a,b) – два элемента (возможно, совпадающие), для которых указано, какой из этих элементов первый, какой второй. При этом, $(a,b)=(c,d)\Leftrightarrow a=c$ и $b=d$. $(a,b)=\big\{a,\{a,b\}\big\}$.

[2] C – compliment.

6. *Декартовым произведением множеств* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{B}$ называется множество $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ всех упорядоченных пар (a, b), где $a \in \mathbf{A}$, $b \in \mathbf{B}$.

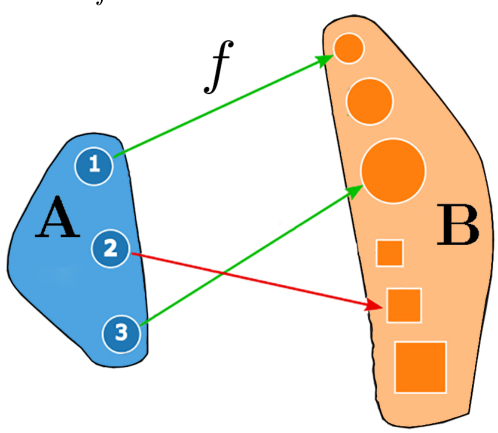
Аналогично вводится понятие декартова произведения n множеств, $\mathbf{A}_1 \times \ldots \times \mathbf{A}_n$.

Пример 5. $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ – плоскость;

Пример 6. $\underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n} = \mathbb{R}^n = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \,\middle|\, x_i \in \mathbb{R}\right\}$ – n-мерное пространство.

0.2 Понятие отображения множеств.

Пусть заданы некоторые непустые множества $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$. Говорят, что f – *отображение множества* $\mathbf{A}$ *во множество* $\mathbf{B}$, или *функция, действующая из* $\mathbf{A}$ *в* $\mathbf{B}$, если указано правило, сопоставляющее (каждому) элементу множества $\mathbf{A}$ **единственный** элемент из множества $\mathbf{B}$. Тот элемент, который, посредством отображения f, сопоставляется x обозначается через $f(x)$[3]. Обозначение: $f : \mathbf{A} \mapsto \mathbf{B}$.



При этом множество $\mathbf{A}$ называется *областью определения отображения* f, а множество $\mathbf{B}$ – *областью значений.*

Определение: *Образом множества* $\mathbf{E} \subset \mathbf{A}$ называется множество

$$f(\mathbf{E}) = \left\{y \in \mathbf{B} \,\middle|\, \exists x \in \mathbf{E},\, y = f(x)\right\}.$$

[3] Далее функции обозначаются без аргумента. Например, функция f. Обозначение $f(x)$ будет применяться для указания **значения функции f на элементе(в точке)** x.

Определение: *Прообразом множества* $\mathbf{C} \subset \mathbf{B}$ называется множество

$$f^{-1}(\mathbf{C}) = \left\{x \in \mathbf{A} \,\middle|\, f(x) \in \mathbf{C}\right\}.$$

Пример 1. $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \Longrightarrow f^{-1}(1) = \{1, -1\}$, $f^{-1}(-1) = \varnothing$.

Пример 2. $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbb{R}^+$, $f(x) = x^2 \Longrightarrow f^{-1}(1) = \{1\}$.

Примеры функций.

Пусть $f : \mathbf{A} \mapsto \mathbf{B}$.

1. $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}$, $\mathbf{B} \subset \mathbb{R}$. f называется *числовой функцией*;
2. $\mathbf{A}$ – произвольно, $\mathbf{B} \subset \mathbb{R}$. f называется *функционалом*;
3. $\mathbf{A} = \mathbb{N}$, $\mathbf{B}$ – произвольно. f называется *последовательностью*, а при $\mathbf{B} \subset \mathbb{R}$ – *числовой последовательностью*.

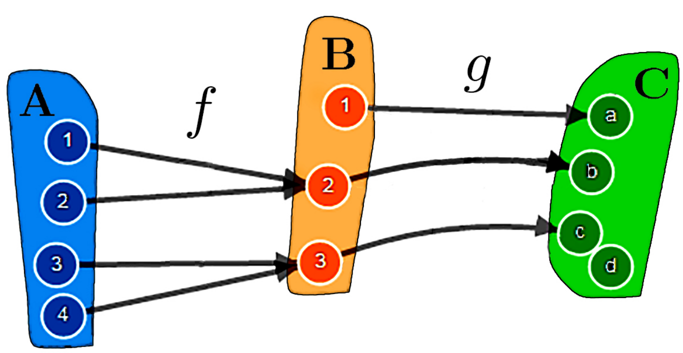
   Обозначение: f_n, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ вместо $f(n)$.

Определение: *Графиком отображения* $f : \mathbf{A} \mapsto \mathbf{B}$ называется подмножество Γ_f множества $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$, такое что:

$$\Gamma_f = \left\{(a, b) \in \mathbf{A} \times \mathbf{B} \,\middle|\, a \in \mathbf{A}, b = f(a)\right\}.$$

Определение: Пусть $f : \mathbf{A} \mapsto \mathbf{B}$, $g : \mathbf{B} \mapsto \mathbf{C}$. *Композицией* (*суперпозицией*) *этих отображений* называется применение одной функции к результату другой, т.е. отображение $g \circ f = g(f)$, переводящее элемент из множества $\mathbf{A}$ в элемент из множества $\mathbf{C}$:

$$g \circ f : \mathbf{A} \mapsto \mathbf{C}.$$



§1 Теория множеств. Принципы полноты.

1.1 Теория вещественных чисел

Будем считать множества $\mathbb{N}$ натуральных чисел, $\mathbb{Z}$ целых чисел и $\mathbb{Q}$ рациональных чисел известными.

Наша ближайшая цель – построить множество вещественных (действительных) чисел, $\mathbb{R}$.

Какими свойствами обладают вещественные числа по сравнению с рациональными? Что у них общего? Что разного?

I. Правила сложения.

На множестве $\mathbb{R}$ определено отображение *(операция сложения)*

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R},$$

сопоставляющее каждой упорядоченной паре (x, y) элементов $x, y \in \mathbb{R}$ некоторый элемент $x+y \in \mathbb{R}$, называемый *суммой x и y*. При этом, выполнены следующие свойства:

$\mathbf{I_1}$. существует *нейтральный элемент* $0 \in \mathbb{R}$ (называемый в случае сложения *нулём*), что $\forall x \in \mathbb{R}$ выполнено:

$$x + 0 = 0 + x = x;$$

$\mathbf{I_2}$. $\forall x \in \mathbb{R}$ имеется элемент $-x \in \mathbb{R}$, называемый *противоположным к x*, такой что

$$x + (-x) = (-x) + x = 0;$$

$\mathbf{I_3}$. операция сложения *ассоциативна*, т.е. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ выполнено:

$$x + (y + z) = (x + y) + z;$$

$\mathbf{I_4}$. операция сложения *коммутативна*, т.е. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ выполнено:

$$x + y = y + x.$$

Если на множестве $\mathbf{G}$ определена операция, удовлетворяющая условиям $\mathbf{I_1}$, $\mathbf{I_2}$, $\mathbf{I_3}$, то говорят, что на $\mathbf{G}$ задана *структура группы* или, что **G** есть *группа*. Если операцию называют сложением, то группа называется *аддитивной*. Если, кроме того, выполнено условие $\mathbf{I_4}$, то группу называют *коммутативной* или *абелевой*.

<u>Определение:</u> *Разность чисел b и a* – это такое число x, что $b = a + x$.

<u>Теорема</u>: Разность чисел b и a существует, единственна и равна $b+(-a)$

Доказательство. $b = a + x \overset{+(-a)}{\Longleftrightarrow} b + (-a) = x.$ □

II. Правила умножения.

На множестве $\mathbb{R}$ определено отображение *(операция умножения)*

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R},$$

сопоставляющее каждой упорядоченной паре (x, y) элементов $x, y \in \mathbb{R}$ некоторый элемент $x \cdot y \in \mathbb{R}$, называемый *произведением x и y*, для которого выполнены следующие условия:

$\mathbf{II_1}$. существует *нейтральный элемент* $1 \in \mathbb{R}$ (называемый в случае умножения *единицей*[1]), что $\forall x \in \mathbb{R}$ выполнено:

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x;$$

$\mathbf{II_2}$. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ имеется элемент $x^{-1} \in \mathbb{R}$, называемый *обратным к x*, такой что

$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1;$$

$\mathbf{II_3}$. операция умножения *ассоциативна*, т.е. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ выполнено:

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z;$$

$\mathbf{II_4}$. операция умножения *коммутативна*, т.е. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ выполнено:

$$x \cdot y = y \cdot x.$$

Заметим, что по отношению к операции умножения множество $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ является *(мультипликативной) группой.*

---

[1] Требуем, чтобы $1 \neq 0$, т.е., что рассматриваемая система не состоит из одного элемента.

Связь сложения и умножения.

(**I**, **II**) Умножение *дистрибутивно* по отношению к сложению, т.е. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ выполнено:

$$(x+y)\cdot z = x\cdot z + y\cdot z.$$

Если на множестве **G** действуют две операции, удовлетворяющие всем перечисленным правилам (`аксиомам`), то **G** называется *алгебраическим (числовым) полем*, или просто *полем.*

Пример 1. Докажем, что обратный элемент единственен как для операции сложения, так и для умножения.

Доказательство. Проведем рассуждения для операции сложения. Пусть $\exists x \in \mathbb{R}$ и два ему противоположных x_1 и x_2 : $x + x_1 = 0$, $x + x_2 = 0$. Тогда, используя ассоциативность операции сложения, получаем:

$$x_2 = 0 + x_2 = (x_1 + x) + x_2 = x_1 + (x + x_2) = x_1 + 0 = x_1.$$

□

Пример 2. Докажем, что $\forall x \in \mathbb{R}$ выполнено $0\cdot x = 0$.

Доказательство. Получаем,

$$0\cdot x = (0+0)\cdot x = 0\cdot x + 0\cdot x.$$

Прибавим к обеим частям этого равенства обратный элемент $-(0\cdot x)$:

$$-(0\cdot x) + 0\cdot x = -(0\cdot x) + 0\cdot x + 0\cdot x \Leftrightarrow 0 = 0\cdot x.$$

□

Пример 3. Докажем, что $\forall x \in \mathbb{R}$ выполнено

$$-x = (-1)\cdot x,$$

где (-1) – обратный элемент к 1.

Доказательство. Получаем,

$$x + (-1)\cdot x = 1\cdot x + (-1)\cdot x = \big(1 + (-1)\big)\cdot x = 0\cdot x \overset{2.}{=} 0.$$

□

Пример 4. Докажем, что $(-1)\cdot(-1) = 1$.

Доказательство. Используя, доказанные в примерах 2 и 3 равенства: $(-1)\cdot 0 = 0$ и $(-1)\cdot 1 = -1$, получаем:

$$1 + (-1) = 0 \overset{|\cdot(-1)}{\Longleftrightarrow} -1 + (-1)\cdot(-1) = 0 \overset{|+1}{\Longleftrightarrow} (-1)\cdot(-1) = 1$$

□

III. Правила порядка.

Между любыми двумя элементами из $\mathbb{R}$ имеется *отношение неравенства*[2] „$\leqslant$“, которое можно рассматривать как отображение

$$\mathbb{R}\times\mathbb{R} \mapsto \{\text{истина, ложь}\},$$

т.е. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ установлено, выполняется ли отношение $x \leqslant y$ или нет. При этом должны быть справедливы следующие условия:

III$_1$. $\forall x \in \mathbb{R}$ выполнено $x \leqslant x$ *(рефлексивность)*;

III$_2$. из $x \leqslant y$ и $y \leqslant x$ следует $x = y$ *(антисимметричность)*;

III$_3$. из $x \leqslant y$ и $y \leqslant z$ следует $x \leqslant z$ *(транзитивность)*;

III$_4$. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ выполнено или $x \leqslant y$, или $y \leqslant x$.

Множество, между `некоторыми` элементами которого имеется отношение неравенства, удовлетворяющее свойствам **III$_1$, III$_2$, III$_3$** называют *частично упорядоченным*, а если кроме того, выполнено свойство **III$_4$**, т.е. любые два элемента множества сравнимы, то множество называется *линейно упорядоченным* (или *совершенно упорядоченным*).

Пример 5. Множество всех подмножеств некоего объёмлющего множества `частично упорядочено`, если определить между ними следующее отношение порядка: $\mathbf{M}_1 \leqslant \mathbf{M}_2$, если $\mathbf{M}_1 \subset \mathbf{M}_2$.

Пример 6. Множество натуральных чисел `частично упорядочено`, если определить между ними следующее отношение порядка: $n \leqslant m$, если n делится без остатка на m.

(I, III) Связь сложения и порядка в $\mathbb{R}$:

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \leqslant y \text{ и } \forall z \in \mathbb{R} \Longrightarrow x + z \leqslant y + z;$$

[2] Бинарное отношение.

(II, III) Связь умножения и порядка в $\mathbb{R}$: для $x, y, z \in \mathbb{R}$, таких что $x \leqslant y$ и $0 \leqslant z$ выполнено: $x \cdot z \leqslant y \cdot z$.

Пример 7. Докажем, что $0 < 1$[3].

Доказательство. То, что $1 \neq 0$ было постулировано в $\mathbf{II_1}$. Предположим, что $1 < 0$, и прибавим к обеим частям данного неравенства (-1). Получаем: $0 < -1$. Перемножая данное неравенство с самим собой[4], и используя свойство **(II,III)**, имеем $0 < (-1) \cdot (-1) \overset{4.}{=} 1$. Противоречие! □

Заметим, что всем уже перечисленным условиям (аксиомам) удовлетворяет и множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$, вот следующему требованию множество $\mathbb{Q}$ уже не отвечает.

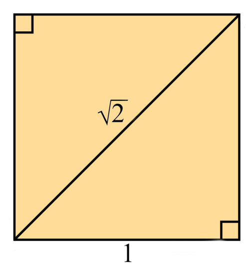
в вещественных числах нет «дырок».

IV. Принцип полноты . Кантора-Дедекинда[5].

Если $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ – непустые подмножества $\mathbb{R}$, обладающие тем свойством, что для $\forall x \in \mathbf{X}$ и $\forall y \in \mathbf{Y}$ выполнено $x \leqslant y$[6], то $\exists c \in \mathbb{R}$ (называемый *разделяющим элементом*), что $x \leqslant c \leqslant y$ для любых элементов $x \in \mathbf{X}$ и $y \in \mathbf{Y}$.

Важным фактом является то, что элемент c найдётся не для каждой пары x и y в отдельности, а он один и тот же для всех элементов из данных множеств.

Пример 8. Существование $\sqrt{2}$.



$x = \sqrt{2}$ – положительное число, которое в квадрате равно 2. **Существует ли у уравнения $x^2 = 2$ корень во множестве $\mathbb{R}$?** Вопрос актуален, т.к., например, во множестве рациональных чисел $\mathbb{Q}$ это уравнение решений не имеет. Действительно, пусть существует несократимая дробь $\frac{p}{q}$, такая, что выполнено равенство $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$

$$\frac{p^2}{q^2} = 2 \Leftrightarrow p^2 = 2q^2 \Longrightarrow \overset{p-\text{чётное}}{p = 2k} \Longrightarrow p^2 = 4k^2 \overset{p^2=2q^2}{\Longrightarrow} q^2 = 2k^2.$$

То есть, q также чётно, а значит дробь $\frac{p}{q}$ – сократима. Противоречие(!)

[3] Под обозначением «$x < y$» понимается $x \leqslant y$ и $x \neq y$.

[4] Т.е. домножая обе части на (-1), и используя полученное неравенство $0 < -1$.

[5] Аксиома полноты/непрерывности.

[6] В этом случае говорят, что *множество* $\mathbf{Y}$ *лежит правее множества* $\mathbf{X}$, или что *множество* $\mathbf{X}$ *лежит левее множества* $\mathbf{Y}$

Может быть, уравнение $x^2 = 2$ вообще не имеет решений? Докажем, что это не так.

Доказательство. Рассмотрим два множества $\mathbf{A} = \left\{x > 0 \,\middle|\, x^2 < 2\right\}$ и $\mathbf{B} = \left\{x > 0 \,\middle|\, x^2 > 2\right\}$. Имеем $1 \in \mathbf{A}$, $2 \in \mathbf{B}$, поэтому данные множества не пусты.

Докажем, что множество $\mathbf{A}$ лежит левее множества $\mathbf{B}$. $\forall a \in \mathbf{A}$ и $\forall b \in \mathbf{B}$ получаем: $0 < b^2 - a^2 = (b-a)\overbrace{(b+a)}^{>0} \Rightarrow b - a > 0 \Leftrightarrow a < b$. По `принципу Кантора-Дедекинда` получаем, что $\exists c \in \mathbb{R} : \forall a \in \mathbf{A}$ и $\forall b \in \mathbf{B}$ выполнено $a \leqslant c \leqslant b$[7].

Докажем, что $c^2 = 2$. Предположим, что $c^2 < 2$ (случай $c^2 > 2$ рассматривается аналогично). Найдём $\delta \in (0,1) : c + \delta > 0$ и $(c+\delta)^2 < 2$.

Если мы найдём такое δ, то получится, что $c + \delta \in$ A, но $c + \delta > c$, т.е. c не разделяющий элемент.

Заметим, что $(c+\delta)^2 = c^2 + \delta(2c+\delta) <^{8)} < c^2 + 5\delta$. Положим $\delta = \frac{2-c^2}{5} > 0$, для него $(c+\delta)^2 < 2$. □

<u>**Замечание:**</u> При `аксиоматическом` определении объекта возникают три вопроса. Является ли построенная система аксиом

1. `непротиворечивой` (т.е. не следует ли из неё одновременно некоторое утверждение и его отрицание)?

2. `независимой` (т.е. не является ли одна из аксиом следствием остальных)?

3. `полной` (т.е. единственный ли объект описывается системой аксиом)?

Мы не будем обсуждать эти вопросы и примем на веру, что для приведённой аксиоматики вещественных чисел ответ на них, после некоторых уточнений, положителен.

<u>**Определение:**</u> Множество $\mathbb{R}$, элементы которого удовлетворяют `всем` перечисленным условиям (`аксиомам`) называется *множеством действительных* (или *вещественных*) *чисел.*

<u>**Упражнение:**</u> Для каждого из множеств $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}$ укажите, какие из аксиом действительных чисел в них не выполняются.

---

[7] Разделяющий элемент c и есть «кандидат» на решение уравнения $x^2 = 2$. Как было отмечено выше, $1 < c < 2$.

[8] $c < 2$, $\delta < 1$

1.2 Ограниченные и неограниченные множества.

Определение: Говорят, что *множество* $\mathbf{X} \subset \mathbb{R}$ *ограничено сверху (снизу)*, если

$$\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbf{X} \Longrightarrow x \leqslant M \ (M \leqslant x).$$

Отрицание: *Множество* $\mathbf{X} \subset \mathbb{R}$ *не ограничено сверху (снизу)*, если

$$\forall M \in \mathbb{R} \ \exists x \in \mathbf{X} : x > M \ (x < M).$$

Число M, в этом случае, называют *верхней (нижней) границей множества* $\mathbf{X}$ или также *мажорантой (минорантой) множества* $\mathbf{X}$.

Определение: Множество, ограниченное и сверху, и снизу, называется *ограниченным*.

Замечание1: Если M (m) – верхняя (нижняя) граница множества $\mathbf{X}$, то всякое число большее M (меньшее m) тоже верхняя (нижняя) граница множества $\mathbf{X}$.

Замечание2: Ограниченность множества $\mathbf{X}$ равносильна « ограниченности по модулю », т.е.

$$\mathbf{X} \text{ – ограничено} \Longleftrightarrow \exists L > 0 : \forall x \in \mathbf{X} \Longrightarrow |x| \leqslant L.$$

Доказательство. Берём в качестве $L = \max\{|m|, |M|\}$. □

Определение: Число a называется *максимумом* или *наибольшим элементом (минимумом* или *наименьшим элементом) множества* $\mathbf{X} \subset \mathbb{R}$, если

$$a \in \mathbf{X} \text{ и } \forall x \in \mathbf{X} \Longrightarrow x \leqslant a \ \ (a \leqslant x).$$

Обозначение: $a = \max \mathbf{X}$ $(a = \min \mathbf{X})$

Из условия $\mathbf{III_2}$ порядка следует, что если в числовом множестве есть максимальный (минимальный) элемент, то он только один. Однако, не во всяком, даже ограниченном множестве имеется максимальный или минимальный элемент. Например, их нет во множестве:

$$\{x \in \mathbb{R} \,\big|\, 0 < x < 1\} = (0, 1).$$

Теорема1 *(существование максимума и минимума конечного множества)*: Во всяком конечном непустом подмножестве множества $\mathbb{R}$ есть наибольший и наименьший элементы.

Доказательство. Проведём доказательство индукцией по числу n элементов множества. База индукции $n = 1$. Если во множестве всего один элемент, то он наибольший и наименьший.

Индукционный переход проведём для максимума. Пусть всякое n-элементное подмножество $\mathbb{R}$ имеет максимум, а $\mathbf{X}$ – $(n+1)$-элементное подмножество: $\mathbf{X} = \{x_1, \dots, x_n, x_{n+1}\}$. Обозначим $c = \max\{x_1, \dots, x_n\}$. Если $c \leqslant x_{n+1}$, то $x_{n+1} = \max \mathbf{X}$, иначе $c = \max \mathbf{X}$.

□

Следствие: Во всяком непустом ограниченном сверху (снизу) подмножестве $\mathbb{Z}$ есть наибольший (наименьший) элемент.

Доказательство. Пусть $\mathbf{E} \subset \mathbb{Z}$, $\mathbf{E} \neq \varnothing$, $\mathbf{E}$ – ограничено сверху. Выберем произвольный элемент $n_0 \in \mathbf{E}$, и положим $\mathbf{E}_1 = \left\{n \in \mathbf{E} \,\middle|\, n \geqslant n_0\right\}$.

Поскольку множество $\mathbf{E}$ ограничено сверху, множество $\mathbf{E}_1$ – конечно. Если $M \in \mathbb{N}$ – одна из верхних границ множества $\mathbf{E}$, то в множестве $\mathbf{E}_1$ не более $(M - n_0 + 1)$ элементов. По теореме 1 в множестве $\mathbf{E}_1$ есть наибольший элемент. Ясно, что он и будет наибольшим элементом $\mathbf{E}$.

Случай ограниченного снизу множества рассматривается аналогично.

□

Определение: Пусть $x \in \mathbb{R}$. Наибольшее целое число, не превосходящее x, называется *целой частью* x. Обозначение: $[x]$.

Существование целой части обеспечивается следствием из теоремы 1; единственность $[x]$ следует из определения, и единственности максимума. Следовательно определение корректно.

Замечание: Из определения следует, что

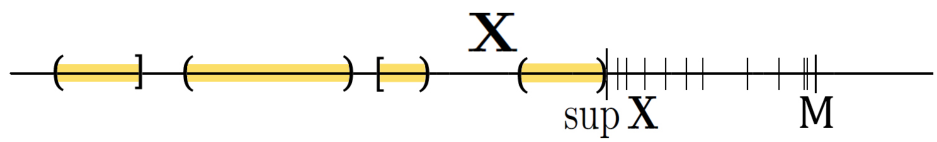
$$[x] \leqslant x < [x] + 1, \quad x - 1 < [x] \leqslant x.$$

Обратно, если $y \in \mathbb{Z}$ и $x - 1 < y \leqslant x$, то $y = [x]$.

Определение: Наименьшее из чисел, ограничивающих множество $\mathbf{X} \subset \mathbb{R}$ сверху называется *точной верхней гранью множества* $\mathbf{X}$. Обозначение: $\sup \mathbf{X}$. Супремум.

$$\beta = \sup \mathbf{X} \iff \mathbf{1})\ \forall x \in \mathbf{X} \Rightarrow x \leqslant \beta;\ \ \mathbf{2})\ \forall \beta' < \beta\ \exists x \in \mathbf{X} : x > \beta' \iff$$

$$\Longleftrightarrow \mathbf{1})\ \forall x \in \mathbf{X} \Rightarrow x \leqslant \beta;\ \ \mathbf{2})\ \forall \varepsilon > 0\ \exists x' \in \mathbf{X} : x' > \beta - \varepsilon.$$



Инфимум.

Определение: Наибольшее из чисел, ограничивающих множество $\mathbf{X} \subset \mathbb{R}$ снизу называется *точной нижней гранью множества* $\mathbf{X}$. Обозначение: $\inf \mathbf{X}$.

$$\alpha = \inf \mathbf{X} \Longleftrightarrow \mathbf{1})\ \forall x \in \mathbf{X} \Rightarrow x \geqslant \alpha;\ \ \mathbf{2})\ \forall \alpha' > \alpha\ \exists x \in \mathbf{X} : x < \alpha' \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \mathbf{1})\ \forall x \in \mathbf{X} \Rightarrow x \geqslant \alpha;\ \ \mathbf{2})\ \forall \varepsilon > 0\ \exists x' \in \mathbf{X} : x' < \alpha + \varepsilon.$$

Выше говорилось, что не всякое (даже ограниченное) множество обладает минимальным и максимальным элементами. Выясним вопрос: всегда ли у числового множества существует его верхняя (нижняя) грань? Если множество не ограничено сверху (снизу), то не существует чисел, которые бы ограничивали его сверху (снизу). Таким образом, в данном случае у числового множества нет верхней (нижней) грани. Если же множество ограничено, ответ даёт следующая теорема:

Теорема2 *(принцип существования точной верхней грани[9])*: Всякое непустое ограниченное сверху числовое множество имеет, и притом единственную, точную верхнюю грань.

Доказательство. **Единственность точной грани моментально следует из единственности минимального элемента, но докажем её непосредственно.**

Предположим, что каждое из чисел b и b' $(b \neq b')$ является точной верхней гранью $\mathbf{X}$. Не ограничивая общности считаем, что $b > b'$. Тогда, в силу того, что $b = \sup \mathbf{X}$, из определения точной верхней грани следует, что для числа b' найдётся $x \in \mathbf{X}$, что $x > b'$. Следовательно, b' не является верхней границей. Противоречие, доказывающее, что верхняя грань единственна.

Докажем существование верхней грани. Пусть $\mathbf{X} \subset \mathbb{R}$ – непустое ограниченное сверху множество, а $\mathbf{Y} = \left\{ y \in \mathbb{R} \,\middle|\, \forall x \in \mathbf{X} \Rightarrow x \leqslant y \right\}$ – множество верхних границ множества $\mathbf{X}$. По условию, $\mathbf{X} \neq \varnothing$ и $\mathbf{Y} \neq \varnothing$. Тогда в силу

[9] Принцип полноты Вейерштрасса.

принципа полноты Кантора-Дедекинда найдётся число $\gamma \in \mathbb{R}$ такое, что $\forall x \in \mathbf{X}$ и $\forall y \in \mathbf{Y}$ выполнено: $x \leqslant \gamma \leqslant y$.

Число γ, таким образом, является мажорантой $\mathbf{X}$, и минорантой $\mathbf{Y}$. Как мажоранта $\mathbf{X}$, число γ является элементом множества $\mathbf{Y}$, но как миноранта $\mathbf{Y}$, число γ является его минимальным элементом. Итак,

$$\gamma = \min \mathbf{Y} = \sup \mathbf{X}.$$

□

Аналогично доказывается существование и единственность точной `нижней` грани у ограниченного снизу числового множества, т.е. верна следующая теорема:

<u>Теорема2*</u> *(принцип существования точной нижней грани)*: Всякое непустое ограниченное снизу числовое множество имеет, и притом единственную, точную нижнюю грань.

Заметим, что если числовое множество обладает максимальным элементом, то он всегда совпадает с его точной верхней гранью. Обратное неверно. Например, у множества $\mathbf{X} = (0,1)$ нет максимального элемента, но $\exists \sup \mathbf{X} = 1$.

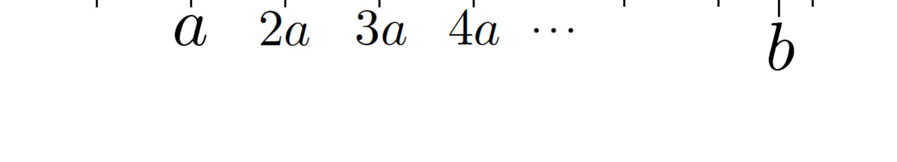
Аналогичные рассуждения имеют место и для $\inf / \min$.

<u>Теорема3</u> *(принцип Архимеда)*: Каково бы ни было действительное число a, существует такое `натуральное` n, что $n > a$.

Доказательство. `От противного`. Пусть $\exists a \in \mathbb{R}$, что $\forall n \in \mathbb{N}$ выполнено $n \leqslant a$. Следовательно, множество $\mathbb{N}$ ограничено сверху. Тогда по теореме 2 $\exists \sup \mathbb{N} = \gamma$. Далее, т.к. $\gamma - 1 < \gamma$, то $\exists n^* \in \mathbb{N}$, что $n^* > \gamma - 1$, т.е. $n^* + 1 > \gamma$, но $(n^* + 1) \in \mathbb{N}$. Поэтому $\gamma \neq \sup \mathbb{N}$. `Противоречие!`

□

У древних греков данное утверждение формулировалось *геометрически*: **любые два отрезка** *соизмеримы*. **Т.е. какими бы ни были отрезки, один можно отложить несколько раз, так чтобы эта сумма стала больше другого.**



Теорема4 *(плотность множества рациональных чисел)*: Во всяком интервале действительной прямой есть рациональное число.

Доказательство. Пусть $a, b \in \mathbb{R}$ и $a < b$. Тогда $\frac{1}{b-a} > 0$, и по принципу Архимеда $\exists n \in \mathbb{N}$, что $n > \frac{1}{b-a}$, т.е. $\frac{1}{n} < b - a$. Положим $c = \frac{[na]+1}{n}$. Тогда $c \in \mathbb{Q}$ и $c > \frac{na-1+1}{n} = a$, $c \leqslant \frac{na+1}{n} = a + \frac{1}{n} < a + b - a = b \Longrightarrow c \in (a, b)$.

□

Свойство, выраженное в теореме 4, называют *(всюду) плотностью множества* $\mathbb{Q}$ *во множестве* $\mathbb{R}$.

Следствие: Во всяком интервале `бесконечно много` рациональных чисел.

Доказательство. `От противного`. Пусть в некотором интервале (a, b) количество рациональных чисел конечно. Обозначим через x_1 наименьшее из них. Тогда в интервале (a, x_1) нет ни одного рационального числа, что `противоречит` теореме 4.

□

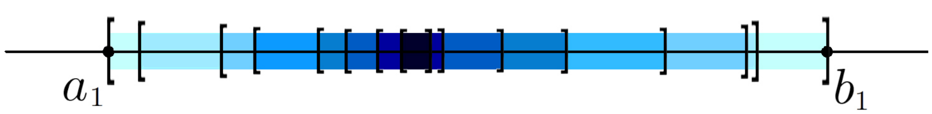
$a_n, b_n \in \mathbb{R}$.

Определение: Система числовых отрезков $\left\{[a_n, b_n]\right\}_{n=1}^{\infty}$ называется *системой вложенных отрезков*, если

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots \leqslant b_n \leqslant \ldots \leqslant b_2 \leqslant b_1, \qquad (*)$$

т.е. каждый следующий отрезок $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ содержится в предыдущем $[a_n, b_n]$:

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots .$$



Теорема5 *(принцип вложенных отрезков Кантора)*: Всякий набор вложенных отрезков имеет хотя бы одну общую точку. Более того, если среди этих отрезков встречаются `отрезки сколь угодно малой длинны`[10], то такая общая точка – единственная.

Доказательство. Пусть $\mathbf{A} = \{a_n\}$ – множество левых концов отрезков, а $\mathbf{B} = \{b_n\}$ – множество правых концов. Данные множества непустые. В силу неравенств $(*)$ получаем, что множество $\mathbf{A}$ ограничено сверху (любым b_n), а множество $\mathbf{B}$ ограничено снизу (любым a_n). Следовательно, по принципу точных граней существуют $\sup \mathbf{A}$ и $\inf \mathbf{B}$, которые мы обозначим α и β соответственно.

Т.к. α ограничивает множество $\mathbf{B}$ снизу[11], а β – наибольшее из чисел, ограничивающих множество $\mathbf{B}$ снизу, то выполнено $\alpha \leqslant \beta$. Поэтому, $\forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow a_n \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant b_n \Longrightarrow [\alpha,\beta]$[12] $\subset \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$. Кроме того, из последнего неравенства вытекает, что $b_n - a_n \geqslant \beta - \alpha$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Откуда, если $\alpha \neq \beta$, т.е. $\beta > \alpha$, то $\exists \varepsilon_0 > 0$ $\Big($например, $\varepsilon_0 = \frac{\beta-\alpha}{2} > 0\Big)$:

$$\forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow b_n - a_n > \varepsilon_0,$$

или среди вложенных отрезков не встречаются отрезки сколь угодно малой длины. □

Видно, что мы доказали более сильное утверждение, а именно, что любой набор попарно пересекающихся отрезков имеет хотя бы одну общую точку (т.к. вложенность отрезков нами нами нигде не использовалась). `Теорема Хелли.`

Определение: Если для системы вложенных отрезков $\big\{[a_n,b_n]\big\}$ выполнено, что

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists [a,b] \in \big\{[a_n,b_n]\big\}_{n=1}^{\infty} \, : \, b - a < \varepsilon,$$

то данная система называется *стягивающейся системой отрезков*[13]. Обозначение: $b_n - a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Упражнение: Докажите справедливость обратного утверждения к принципу вложенных отрезков Кантора. Т.е., если существует `единственная`

[10] Т.е. $\forall \varepsilon > 0 \; \exists [a,b] \in \big\{[a_n,b_n]\big\}_{n=1}^{\infty} \, : \, b - a < \varepsilon$.

[11] От противного. Пусть $\exists n \in \mathbb{N} : b_n < \alpha$. Т.к. $\alpha = \sup \mathbf{A}$, то $\exists m \in \mathbb{N} : a_m \in (b_n, \alpha)$, т.е $b_n < a_m$, что противоречит неравенствам $(*)$.

[12] Данный отрезок может перeродиться в точку.

[13] Или *стягивающейся системой сегментов* (с.с.с.).

точка ξ, принадлежащая всем отрезкам системы, то данная система отрезков является `стягивающейся`[14].

Пример. Для системы других типов множеств данный факт уже, вообще говоря, может не иметь место. Рассмотрим, например, систему полуинтервалов: $\left\{\left(0, \frac{1}{n}\right]\right\}_{n=1}^{\infty}$. Имеем $\left(0, \frac{1}{n}\right] \supset \left(0, \frac{1}{n+1}\right]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, но общей точки у данных полуинтервалов `нет`[15].

_ _

Утверждение: Предположим, что имеет место `принцип Архимеда` и `принцип вложенных отрезков Кантора`. Тогда выполняется `принцип полноты Кантора-Дедекинда`.

Доказательство. Пусть для всякой системы вложенных отрезков $\left\{[a_n, b_n]\right\}$ найдётся хотя бы одна общая точка ξ, а также пусть каково бы ни было действительное число a найдётся $n \in \mathbb{N} : n > a$. Рассмотрим множества $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$, обладающие тем свойством, что $\forall x \in \mathbf{X}$, $\forall y \in \mathbf{Y} \Longrightarrow x \leqslant y$. Докажем, что существует $c \in \mathbb{R}$, что $x \leqslant c \leqslant y$ для `любых` элементов $x \in \mathbf{X}$ и $y \in \mathbf{Y}$.

Выберем произвольные $x_1 \in \mathbf{X}$, $y_1 \in \mathbf{Y}$. Если $x_1 = y_1$, то $c = x_1 = y_1$ – разделяющий элемент. Иначе, поделим отрезок $[x_1, y_1]$ пополам. Если его середина, точка $\dfrac{x_1 + y_1}{2}$ уже разделяет множества $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$, т.е. правее этой точки нет элементов из множества $\mathbf{X}$, а левее её – элементов множества $\mathbf{Y}$, то разделяющий элемент c нами найден. В противном случае, хотя бы с одной стороны средней точки найдутся элементы и из множества $\mathbf{X}$, и элементы из множества $\mathbf{Y}$. Обозначим эту половину через $[x_2, y_2]$[16]. Повторяем описанную процедуру ещё раз, и т.д.

В результате получаем следующее. Если наше построение заканчивается за конечное число шагов, то разделяющий элемент был нами построен. Если же нет, то мы получаем стягивающуюся систему сегментов, в каждом из которых существуют элементы и из множества $\mathbf{X}$, и из множества $\mathbf{Y}$. По принципу вложенных отрезков, существует точка c, принадлежащая каждому отрезку $[x_n, y_n]$. Докажем, что данная точка и является искомым "разделяющим элементом". Если $\exists y \in \mathbf{Y}$ такой, что $y < c$, то по аксиоме Архимеда найдётся такой номер n, что $y < x_n$

[14] Доказательство этого факта см., например, в книге **[Н-Ф]**, с.41.

[15] См. также лемму при изучении модели множества бесконечных десятичных дробей далее.

[16] Безусловно, нами не утверждается, что $x_2 \in \mathbf{X}$, а $y_2 \in \mathbf{Y}$, но это в данном случае не важно.

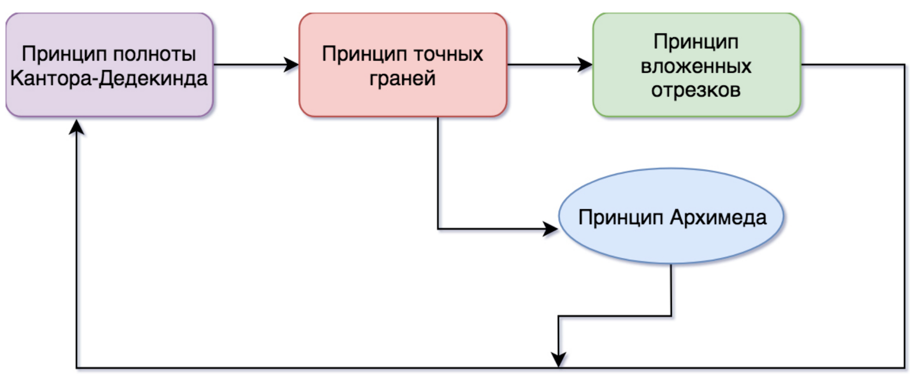
(т.е. $y_n - x_n < c - y$[17]). Но в этом случае в отрезке $[x_n, y_n]$ отсутствуют элементы множества $\mathbf{X}$, что противоречит нашему предположению.

Аналогично рассматривается случай, когда $\exists x \in \mathbf{X}$ и $x > c$. □

Замечание: От принципа (`аксиомы`) Архимеда в условиях теоремы отказаться нельзя. Существуют упорядоченные поля (`неархимедовы`), в которых выполняется принцип вложенных отрезков, но не выполнен принцип Архимеда.

Замечание: Нами было доказано, что в архимедовых полях все три «принципа полноты»: принцип Кантора-Дедекинда, принцип точных граней и принцип вложенных отрезков, выводятся один из другого, а значит эквивалентны друг другу.

Изобразим все вышесказанное в виде диаграммы.



– –

[17] В силу того, что $y_n - x_n = \dfrac{l}{2^n} < c - y = \mathrm{const}$, начиная с некоторого n.

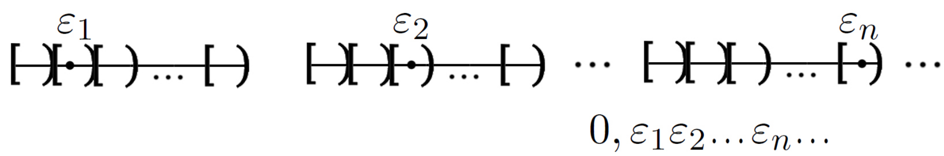
1.3 Множество бесконечных десятичных дробей.

Может быть, множество $\mathbb{R}$, которое мы ввели аксиоматически на самом деле не существует? Единственный способ объяснить, что определение, которое мы ввели жизнеспособно – предъявить модель, некоторое множество, на котором выполняются все перечисленные свойства множества $\mathbb{R}$. Рассмотрим следующую `модель множества действительных чисел`, построенную с помощью объекта, который мы будем называть `бесконечной десятичной дробью`.

Рассмотрим $\forall x \in [0,1)$. Делим $[0,1)$ на 10 частей:

$\left[0, \frac{1}{10}\right), \left[\frac{1}{10}, \frac{2}{10}\right), \ldots, \left[\frac{9}{10}, 1\right)$ – *полуинтервалы первого ранга.*

Точка x принадлежит одному из этих полуинтервалов (например, с номером ε_1). Обозначим его I_1. Длина этого отрезка, $|I_1| = \frac{1}{10}$. Делим его на 10 полуинтервалов второго ранга, выбираем один из них и т.д. На шаге k выбираем полуинтервал I_k (ранга k), $|I_k| = \frac{1}{10^k}$. Если так строить бесконечную дробь, заведомо не получаются разложения, где с некоторого разряда стоят одни девятки. Этим мы избегаем неоднозначности представления вещественного числа в виде бесконечной десятичной дроби $\big(1,0 = 0,(9)\big)$.



Последовательность $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ определяется по числу $x \in [0,1)$ однозначно. Обратно, если есть некоторая последовательность цифр $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$, без периода из девяток, можно ли построить по ней единственное вещественное число?

<u>**Лемма**</u>: Пусть $J_n = [a_n, b_n)$, $J_{n+1} \subset J_n$, и среди них встречаются сколь угодно малые. Тогда $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} J_n = \varnothing$, тогда и только тогда, когда начиная с некоторого места их правые концы совпадают.

Доказательство. Пересечение замкнутых отрезков $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$ по принципу вложенных отрезков состоит ровно из одной точки, и если с некоторого момента их правые концы совпадают, то это и есть общая точка стягивающейся системы сегментов.

$\square$

Утверждение: Пусть $0,\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots$, $\varepsilon_i \in \{0,1,\ldots,9\}$ – последовательность цифр, в которой нет периода из девяток. Тогда $\exists!\, x \in [0,1)$, для которого эта последовательность есть её десятичное разложение.

Доказательство. Пусть I_1 – полуинтервал ранга 1 с номером ε_1; $I_2 \subset I_1$ – полуинтервал ранга 2 с номером ε_2 и т.д. Получаем последовательность $I_1 \supset I_2 \supset \ldots$ полуинтервалов, среди длин которых есть сколь угодно малые.

Для того, чтобы их пересечение было не пусто, требуется, чтобы не выполнялось условие – начиная с некоторого места их правые концы совпадают. Это как раз и означает, что в этой последовательности нет периода из девяток. По принципу вложенных отрезков их пересечение состоит из единственной точки $\{x\}$. Ясно, что $0,\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots$ – есть её десятичное разложение. □

Правила сравнения вещественных чисел.

Определение: *Положительной бесконечной десятичной дробью* называется последовательность вида $a_0,\, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$, где $a_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $a_k \in \{0,1,2,\ldots,9\}$[18]; последовательности, в которых с некоторого места стоят одни девятки запрещены.

Отрицательные бесконечные десятичные дроби **получаются приписыванием знака** *минус* **положительным бесконечным десятичным дробям.**

На положительных бесконечных десятичных дробях отношение порядка определяется так:

$$a_0,\, a_1 a_2 a_3 \ldots \leqslant b_0,\, b_1 b_2 b_3 \ldots$$

тогда и только тогда, когда $a_0 \leqslant b_0$ и для каждого k из равенств $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, …,$a_{k-1} = b_{k-1}$ следует неравенство $a_k \leqslant b_k$. Введённое отношение порядка естественным образом продолжается до отношения порядка на множестве всех бесконечных десятичных дробей.

Проверим, что на множестве бесконечных десятичных дробей выполняется принцип полноты Кантора-Дедекинда. Действительно, пусть $\mathbf{A}, \mathbf{B} \subset \mathbb{R}$ и $\mathbf{A} \neq \varnothing$, $\mathbf{B} \neq \varnothing$. Причём множество $\mathbf{A}$ лежит левее множества $\mathbf{B}$. Построим бесконечную десятичную дробь $c = c_0,\, c_1 c_2 \ldots$, которая будет их разделять.

[18] Считаем, что хотя бы один из элементов a_i отличен от 0. Дробь, все элементы которой равны 0 называется *нулевой бесконечной десятичной дробью.*

Если в $\mathbf{A}$ нет положительных элементов, а в $\mathbf{B}$ нет отрицательных, то в качестве c подойдет нулевой элемент. Рассмотрим случай, когда в $\mathbf{A}$ есть хотя бы один положительный элемент. По условию, в этом случае $\mathbf{B}$ состоит из положительных дробей. Следовательно[19], существует число b_0, наименьшее из всех чисел, с которых начинаются дроби из $\mathbf{B}$. Полагаем $c_0 = b_0$. Далее рассмотрим в множестве $\mathbf{B}$ только те десятичные дроби, у которых целая часть это c_0. Выберем среди них наименьшую первую цифру после запятой. Обозначим её c_1. Рассматриваем в $\mathbf{B}$ дроби, которые начинаются с $c_0, c_1 \ldots$, выбираем среди них наименьшую цифру после запятой и т.д. Построенная бесконечная десятичная дробь $c_0, c_1 c_2 c_3 \ldots$ не является запрещённой[20] и она не больше всякого элемента из $\mathbf{B}$.

Покажем, что построенная дробь не меньше всякого элемента из $\mathbf{A}$. `От противного`. Пусть в $\mathbf{A}$ нашлась такая десятичная дробь $a_0, a_1 a_2 \ldots$, что $a_0 = c_0, \ldots, a_{k-1} = c_{k-1}$ и $c_k < a_k$. По построению найдётся дробь из $\mathbf{B}$, которая начинается с $c_0, c_1 \ldots c_k$. Следовательно, она тоже меньше $a_0, a_1 a_2 \ldots a_k \ldots$, что `противоречит` условию: множество $\mathbf{A}$ левее $\mathbf{B}$.

Случай, когда в $\mathbf{B}$ есть хотя бы один отрицательный элемент, рассматривается аналогично.

1.4 Мощность множества. Кардинальные числа.

<u>Определение:</u> Два множества $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ называются *эквивалентными* (или *равномощными*), если между ними можно установить `взаимно однозначное соответствие` , т.е. каждому элементу $x \in \mathbf{X}$ сопоставляется элемент $y \in \mathbf{Y}$, причём различным элементам множества $\mathbf{X}$ отвечают различные элементы множества $\mathbf{Y}$, и каждый $y \in \mathbf{Y}$ сопоставлен некоторому $x \in \mathbf{X}$. Обозначение: $\mathbf{X} \sim \mathbf{Y}$

Кратко: каждому элементу множества X соответствует один элемент множества Y, и наоборот.

<u>Замечание:</u> Иногда говорится, что $\mathbf{X} \sim \mathbf{Y}$, если существует *биекция*

$$\varphi : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}.$$

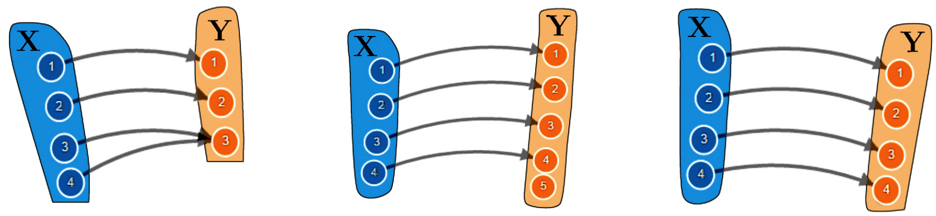
Биективность отображения φ означает, что $\forall y \in \mathbf{Y}$ уравнение $\varphi(x) = y$ имеет ровно одно решение в $\mathbf{X}$.

---

[19] Т.к. во всяком непустом ограниченном снизу подмножестве $\mathbb{N} \cup \{0\}$ есть наименьший элемент.

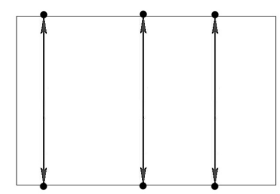
[20] Т.к. в этом случае запрещённым было бы соответствующее число из множества $\mathbf{B}$

Биекция = **сюръекция** $\big(\varphi(X) = Y\big)$ + **инъекция** $\big(\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$ **при** $x_1 \neq x_2\big)$.

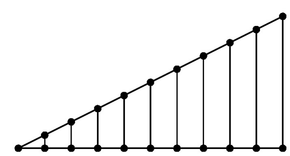


Сюръекция Инъекция Биекция

Рассмотрим несколько примеров равномощных множеств.

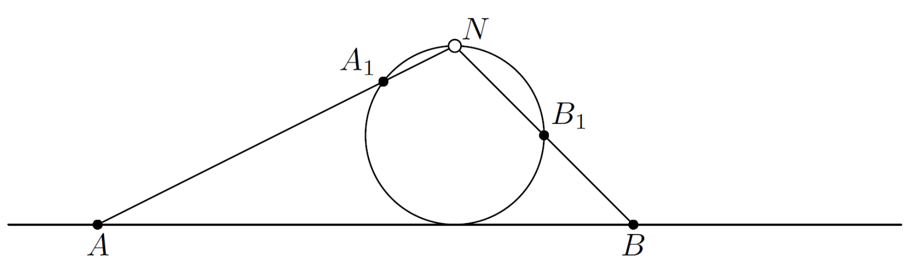


Пример 1. Противоположные стороны прямоугольника равномощны: друг другу сопоставляются противоположные точки.



Пример 2. Гипотенуза и катет прямоугольного треугольника равномощны[21]: взаимно однозначным соответствием будет проекция гипотенузы на катет.

Пример 3. Окружность без точки и прямая равномощны: взаимно однозначное соответствие строится, например, *стереографической проекцией*.



Эквивалентность множеств является `частным случаем` общего понятия эквивалентности, которое определяется следующим образом.

[21] хотя и имеют различные длины

Определение: Отношение „$\sim$“ между элементами некоторого множества называется *отношением эквивалентности*, если оно обладает следующими тремя свойствами: р

1. Рефлексивность: $\mathbf{X} \sim \mathbf{X}$;
2. Симметричность: если $\mathbf{X} \sim \mathbf{Y}$, то $\mathbf{Y} \sim \mathbf{X}$;
3. Транзитивность: если $\mathbf{X} \sim \mathbf{Y}$ и $\mathbf{Y} \sim \mathbf{Z}$, то $\mathbf{X} \sim \mathbf{Z}$.

Пример 1. Примерами отношений эквивалентности служат: равенство и подобие треугольников, параллельность прямых (если договориться считать прямую параллельной самой себе)

Упражнение: Докажите, что равномощность множеств является отношением эквивалентности.

Отношение равномощности разбивает совокупность всех множеств на классы эквивалентных между собой множеств. Множества одного класса эквивалентности имеют одинаковое «количество» элементов (равномощны), а разных – разное.

Определение: Класс, которому принадлежит множество $\mathbf{X}$, называется *мощностью множества* $\mathbf{X}$, а также *кардиналом* или *кардинальным числом множества* $\mathbf{X}$. Обозначение: $\operatorname{card}\mathbf{X}$. Если $\mathbf{X} \sim \mathbf{Y}$, то пишут $\operatorname{card}\mathbf{X} = \operatorname{card}\mathbf{Y}$.

Определение: Будем говорить, что *кардинальное число множества* $\mathbf{X}$ *не больше кардинального числа множества* $\mathbf{Y}$, если $\mathbf{X}$ равномощно некоторому подмножеству $\mathbf{Y}$. Обозначение: $\operatorname{card}\mathbf{X} \leqslant \operatorname{card}\mathbf{Y}$

Итак: $\operatorname{card}\mathbf{X} \leqslant \operatorname{card}\mathbf{Y} \iff \exists \mathbf{Z} \subset \mathbf{Y} : \operatorname{card}\mathbf{X} = \operatorname{card}\mathbf{Z}$.

Определение: Будем говорить, что *кардинальное число множества* $\mathbf{X}$ *меньше кардинального числа множества*, если $\operatorname{card}\mathbf{X} \leqslant \operatorname{card}\mathbf{Y}$ и в тоже время $\operatorname{card}\mathbf{X} \neq \operatorname{card}\mathbf{Y}$. $\mathbf{Y}$. Обозначение: $\operatorname{card}\mathbf{X} < \operatorname{card}\mathbf{Y}$.

Т.е. $\operatorname{card}\mathbf{X} < \operatorname{card}\mathbf{Y} \iff \exists \mathbf{Y}' \subset \mathbf{Y} : \mathbf{Y}' \sim \mathbf{X}$ и $\nexists \mathbf{X}' \subset \mathbf{X} : \mathbf{X}' \sim \mathbf{Y}$.

Класс кардинальных чисел линейно упорядочен, т.к.:

1. **$\forall \mathbf{X}$ выполнено $\operatorname{card}\mathbf{X} \leqslant \operatorname{card}\mathbf{X}$ (очевидно);**
2. **Если $\operatorname{card}\mathbf{X} \leqslant \operatorname{card}\mathbf{Y}$ и $\operatorname{card}\mathbf{Y} \leqslant \operatorname{card}\mathbf{X}$, то $\operatorname{card}\mathbf{X} = \operatorname{card}\mathbf{Y}$ *(теорема Кантора-Бернштейна)*[22];**

[22] см., например, **[Н-Ф], с.23**

3. **Если** $\operatorname{card}\mathbf{X} \leqslant \operatorname{card}\mathbf{Y}$ **и** $\operatorname{card}\mathbf{Y} \leqslant \operatorname{card}\mathbf{Z}$, **то** $\operatorname{card}\mathbf{X} \leqslant \operatorname{card}\mathbf{Z}$ **(очевидно);**
4. $\forall\, \mathbf{X}, \mathbf{Y}$ **выполнено: либо** $\operatorname{card}\mathbf{X} \leqslant \operatorname{card}\mathbf{Y}$, **либо** $\operatorname{card}\mathbf{Y} \leqslant \operatorname{card}\mathbf{X}$ ***(следствие теоремы Цермело)***[23].

Определение: Множество $\mathbf{X}$ называется *конечным*, если оно не равномощно никакому своему `собственному` подмножеству[24]. В противном случае оно называется *бесконечным.*

Определение: Множество $\mathbf{X}$ называется *счётным*, если оно равномощно множеству $\mathbb{N}$, т.е. $\operatorname{card}\mathbf{X} = \operatorname{card}\mathbb{N} = \aleph_0$.

Т.о. X **– счётно, если его элементы можно расположить в виде последовательности:** $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$**, т.е. занумеровать их натуральными числами так, что каждый элемент будет занумерован ровно 1 раз, и при этом, для этого, израсходуются все натуральные числа.**

Определение: Множество $\mathbf{X}$ называется *не более, чем счётным*, если оно либо конечно, либо счётно. $\operatorname{card}\mathbf{X} \leqslant \operatorname{card}\mathbb{N}$.

Утверждение 1: Всякое бесконечное множество содержат счётное подмножество.

Доказательство. Пусть множество $\mathbf{X}$ бесконечно. Тогда $\exists x_1 \in \mathbf{X}$. Множество $\mathbf{X} \setminus \{x_1\}$ также бесконечно, поэтому $\exists x_2 \in \mathbf{X} \setminus \{x_1\}$. Далее найдётся $x_3 \in \mathbf{X} \setminus \{x_1, x_2\}$ и т.д. Ввиду бесконечности множества $\mathbf{X}$ этот процесс не оборвётся ни на каком шаге. В результате получим множество $\widetilde{\mathbf{X}} = \{x_1, x_2, \ldots\}$, которое по построению будет счётным подмножеством множества $\mathbf{X}$. □

Утверждение 2: Всякое бесконечное подмножество счётного множества счётно.

Доказательство. Расположим элементы счётного множества $\mathbf{X}$ виде последовательности $\{x_1, x_2, \ldots\}$. Пусть $\widetilde{\mathbf{X}}$ – некоторое бесконечное подмножество множества $\mathbf{X}$. Будем нумеровать его элементы в порядке их появления в этой последовательности. Тем самым, каждый элемент $\widetilde{\mathbf{X}}$ будет занумерован ровно один раз и, т.к. множество $\widetilde{\mathbf{X}}$ бесконечно, для нумерации будет использован весь натуральный ряд. □

[23] см., например, **[Хаусдорф], с.65**
[24] Т.е. отличного от всего $\mathbf{X}$.

Замечание: Утверждения 1 и 2 показывают, что счётные множества – самые „маленькие" бесконечные множества (никакое несчётное множество не может быть подмножеством счётного).

Теорема6 *(Кантор)*: Вещественный отрезок $[0,1]$ несчётен.

Доказательство. Предположим, что отрезок $[0,1]$ счётен. Тогда он может быть записан в виде последовательности:

$$x_1,\, x_2\, \ldots, x_n, \ldots .$$

Возьмём $x_1 \in [0,1] = I_0$, и зафиксируем отрезок I_1 ненулевой длины, не содержащий x_1. В отрезке I_1 строим отрезок I_2, не содержащий x_2, и т.д. Если уже построен I_n, то поскольку $|I_n| > 0$, строим в нём отрезок I_{n+1}, так что $x_{n+1} \notin I_{n+1}$ и $|I_{n+1}| > 0$. По лемме о вложенных отрезках $\exists c \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}$, но $c \in I_0 \in [0,1]$ и по построению оно не может совпадать ни с одной из точек x_k. $\square$

от лат. continuum - непрерывное, сплошное.

Определение: Мощность отрезка $[0,1]$ называют *мощностью континуума.* Обозначение: $\mathfrak{c}$.

Утверждение: Множество $\mathbf{A}$ всех последовательностей вида $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $a_n = \{0,\, 1,\, 2,\, 3\}$[25], несчётно.

канторовский диагональный процесс.

Доказательство. Пусть множество всех четверичных последовательностей можно пронумеровать. В этом случае все они могут быть расположены по строкам бесконечной матрицы. Выделим последовательность из цифр $\{0,\, 1,\, 2,\, 3\}$, стоящую на диагонали и „инвертируем" её следующим образом: построим последовательность, в n-ой позиции которой стоит не 0, не 3, и не диагональный элемент n-ой последовательности. Построенная четверичная последовательность не лежит в рассматриваемой матрице. Т.к. она отличается от первой строки в первом элементе, от второй во втором, и т.д. $\square$

– –

Построим соответствие между вещественными числами отрезка $[0,1]$ и подмножеством двоичных последовательностей следующим образом. Выберем произвольное число $x \in [0,1]$, и разбиваем данный отрезок на две равные части: $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ и $\left[\frac{1}{2},1\right]$.

[25] Множество четверичных последовательностей.

Если x лежит в левом сегменте, положим $x_1 = 0$, если в правом - $x_1 = 1$[26]. Далее, разбиваем сегмент, в котором лежит x на две равные части, если x лежит в левой - положим $x_2 = 0$, иначе - $x_2 = 1$. И так далее, продолжаем процесс бесконечное число раз. Если число x лежит на границе сегмента, т.е. представляет из себя число вида: $\frac{m}{2^n}$, $m = 1, \dots 2^n$, то кладём в качестве x_n единицу. Этим мы строим соответствие вещественных чисел отрезка $[0,1]$ и двоичных последовательностей, за исключением тех, у которых начиная с некоторого номера стоят нули, т.е. мощность отрезка $[0,1]$ не больше, чем мощность множества двоичных последовательностей.

Обратно, каждой двоичной последовательности, поставим в соответствие двоичную последовательность, у которой на всех чётных местах стоят нули, а на нечётных - элементы рассматриваемой последовательности, т.е.

$$\{0, 1, 1, 0, \dots\} \longleftrightarrow \{0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, \dots\}.$$

Очевидно, что каждой двоичной последовательности можно поставить единственное вещественное число из отрезка $[0,1]$. И, т.к. мы избавились от случая периода из единиц, каждому из поставленных в соответствие вещественных чисел (безусловно, это будут не все числа отрезка $[0,1]$), будет соответствовать только одна двоичная последовательность, т.е. мощность сегмента $[0,1]$ не меньше, чем мощность множества двоичных последовательностей. Остаётся воспользоваться теоремой Кантора-Бернштейна[27].

– –

<u>Теорема7</u> *(Кантор)*: Пусть $\mathbf{X}$ – произвольное множество, а $2^{\mathbf{X}}$ – множество всех его подмножеств, включая $\varnothing$ и $\mathbf{X}$. Мощность множества $\mathbf{X}$ (строго) меньше, чем мощность $2^{\mathbf{X}}$.

Доказательство. Обозначим через $\mathbf{X}'$ множество одноэлементных подмножеств множества $\mathbf{X}$. Т.к. $\mathbf{X}' \subset 2^{\mathbf{X}}$, и в тоже время $\mathbf{X}' \sim \mathbf{X}$, то выполнено неравенство $\operatorname{card} 2^{\mathbf{X}} \geqslant \operatorname{card} \mathbf{X}$.

Докажем, что $\mathbf{X} \nsim 2^{\mathbf{X}}$. От противного. Пусть $\mathbf{X} \sim 2^{\mathbf{X}}$, и пусть φ – биекция между этими множествами, т.е. $\forall x \in \mathbf{X}\ \exists \varphi(x) \in 2^{\mathbf{X}}$, и каждый элемент множества $2^{\mathbf{X}}$ есть $\varphi(x)$ для одного и только одного $x \in \mathbf{X}$.

Назовём элемент $x \in \mathbf{X}$ – правильным, если $x \in \varphi(x)$[28], и неправильным в противном случае. Заметим, что элемент, который соответствует всему $\mathbf{X}$, очевидно, правильный, а тот, который соответствует пустому множеству – неправильный. Т.е. данные множества не пусты, и $\forall x \in \mathbf{X}$ лежит в одном, и только одном из данных множеств.

---

[26] Случай $x = \frac{1}{2}$ будет рассмотрен ниже

[27] Если множество $\mathbf{A}$ эквивалентно некоторой части $\mathbf{B}'$ множества $\mathbf{B}$, а $\mathbf{B}$ эквивалентно некоторой части $\mathbf{A}'$ множества $\mathbf{A}$, то $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$.

[28] Т.е. элемент x лежит во множестве, которому он соответствует.

Обозначим далее через $\mathbf{B}$ множество всех неправильных (и только неправильных) элементов множества $\mathbf{X}$. Т.к. $\mathbf{B} \subset 2^{\mathbf{X}}$, то в соответствии φ этому множеству отвечает некоторый элемент $x_0 \in \mathbf{X}$, т.е. $\mathbf{B} = \varphi(x_0)$. Каков же этот элемент x_0? Ясно, что он не может быть ни правильным, ни неправильным. Противоречие. Следовательно, $\mathbf{X} \nsim 2^{\mathbf{X}}$. $\square$

Континуум-гипотеза: **всякое бесконечное подмножество отрезка $[0,1]$ равномощно $\mathbb{N}$ или $[0,1]$. Эта гипотеза была сформулирована Г.Кантором: существуют ли множества промежуточной мощности между счётными и континуальными? Было высказано предположение, что промежуточные мощности отсутствуют.**

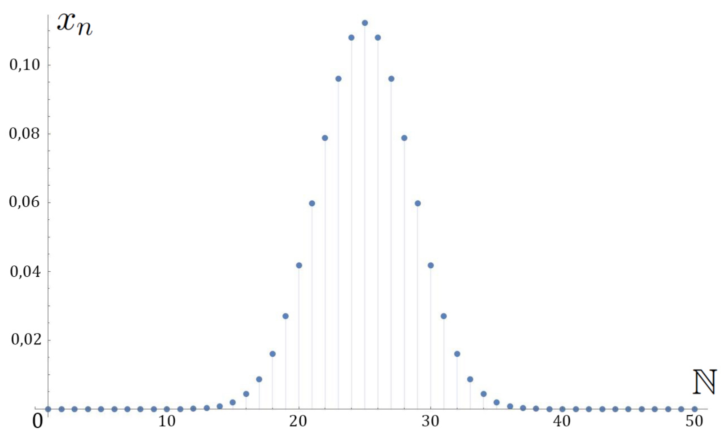
В 1934г. австрийский математик К.Гёдель доказал, что Континуум-гипотеза не противоречит остальным аксиомам теории множеств. Окончательно данный вопрос был решён в 1963г., когда американский математик П. Коэн доказал, что и её отрицание также не противоречит остальным аксиомам теории множеств, и поэтому, Континуум-гипотеза не может быть ни доказана, ни опровергнута в рамках этой аксиоматики.

§2 Теория числовых последовательностей.

2.1 Основные понятия. Бесконечно малые последовательности.

Определение: Функция $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbf{X}$, областью определения которой является множество натуральных чисел, называется *последовательностью.*

Определение: Значения $f(n)$ функции f называются *членами последовательности.* Их принято обозначать символом элемента того множества, в которое идёт отображение, наделяя символ соответствующим индексом аргумента, $x_n = f(n)$. Саму последовательность обозначают $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и называют *последовательностью элементов множества* $\mathbf{X}$



Пример 1. *Десятичное приближение вещественного числа* – приближённое изображение действительного числа конечной десятичной дробью:

$$3{,}1;\ \ 3{,}14;\ \ 3{,}141;\ \ 3{,}1415;\ \ 3{,}14159;\ \ 3{,}141592;\ \ 3{,}1415926;\ \ \ldots$$

Пример 2. *Арифметическая прогрессия* – числовая последовательность вида

$$a_1,\ a_1 + d,\ a_1 + 2d,\ \ldots,\ a_1 + (n-1)d,\ \ldots,$$

то есть последовательность чисел *(членов прогрессии)*, в которой каждый член, начиная со второго, получается из предыдущего добавлением к нему постоянного числа d *(шага*, или *разности прогрессии)*.

Пример 3. *Геометрическая прогрессия* – числовая последовательность, в которой первый член $b_1 \neq 0$, а каждый последующий член, начиная со второго, получается из предыдущего умножением его на определённое число $q \neq 0$ *(знаменатель прогрессии)*:

$$b_1,\ b_1q,\ b_1q^2,\ b_1q^3,\ b_1q^4,\ \ldots$$

Всюду дальше будут рассматриваться последовательности $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbf{X} \subset \mathbb{R}$ действительных чисел (*числовые последовательности*).

Определение: Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной сверху (снизу)*, если:

$$\exists M \in \mathbb{R} \,:\, \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow x_n \leqslant M \ (x_n \geqslant M).$$

Определение: Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной*, если она ограничена сверху и снизу одновременно, т.е.

$$\exists m, M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow m \leqslant x_n \leqslant M \iff \exists A > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow |x_n| \leqslant A^{1)}.$$

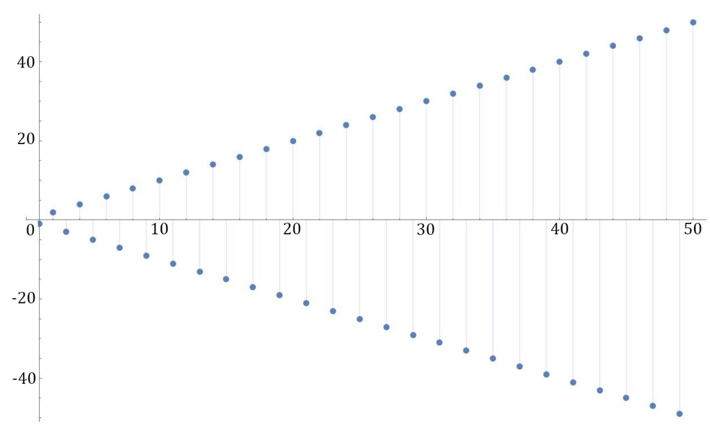
Определение: Последовательность $\{x_n\}$ называется *неограниченной*, если

$$\forall M \in \mathbb{R}\ \exists n(M) \in \mathbb{N} : |x_{n(M)}| > M.$$

Определение: Последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно большой*, если

$$\forall A > 0\ \exists n_0(A)^{2)} \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant n_0 \Longrightarrow |x_n| > A.$$

Пример 1. $x_n = (-1)^n \cdot n$;



[1] $A = \max\{|m|, |M|\}$.

[2] Не требуется, чтобы этот номер был наименьшим.

Пример 2. $x_n = n!$.

Замечание: Иногда требуется знакопостоянство бесконечно большой последовательности. В этом случае различают положительные бесконечно большие последовательности, и отрицательные бесконечно большие последовательности[3].

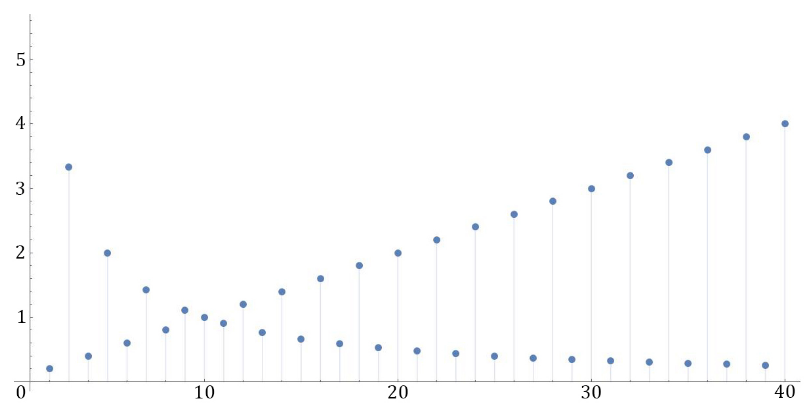
Утверждение: Если последовательность $\{x_n\}$ – бесконечно большая, то она неограничена. Обратное, вообще говоря, неверно.

Доказательство. Первая часть утверждения сразу вытекает из определения бесконечно большой последовательности. Вторая часть доказывается примером неограниченной, но не бесконечно большой последовательности. $\square$

Пример 1. $x_n = n^{(-1)^n} = \left\{1,\, 2,\, \frac{1}{3},\, 4,\, \frac{1}{5},\, \ldots\right\}$;

Пример 2. $x_n = n \cdot \sin n$;

Пример 3. $x_n = n + (-1)^n \cdot n$.



Определение: Последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно малой*, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N_0(\varepsilon) \Longrightarrow |x_n| < \varepsilon,$$

т.е. вне интервала $(-\varepsilon, \varepsilon)$ находится лишь конечное число элементов последовательности.

[3] Определения данных последовательностей берутся без модулей.

Отрицание: $\{x_n\}$ `не является бесконечно малой`, если

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \ \exists n_0 > n \Longrightarrow |x_{n_0}| \geqslant \varepsilon_0.$$

Пример 1. $x_n = \frac{1}{n}$. Рассмотрим $\forall \varepsilon > 0$ неравенство $\left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$. Такое $n \in \mathbb{N}$, $n > \frac{1}{\varepsilon}$ найдётся по принципу Архимеда. Положим $N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$. Тогда $\forall n \geqslant N(\varepsilon)$ имеем $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

Пример 2. $x_n = \frac{1}{q^n}$, $q > 1$.

Проверим, что множество $\mathbf{A} = \left\{q^n \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$ не ограничено сверху. `От противного`. **Пусть $\mathbf{A}$ – ограничено. Тогда по принципу точных граней $\exists \sup \mathbf{A} = \ell$. По определению** $\sup$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ **:** $\frac{\ell}{q} < q^{n_0} < \ell$**, или** $\ell < q^{n_0+1}$**. Но, т.к.** $n_0 + 1 \in \mathbb{N}$**, то** $\ell \neq \sup \mathbf{A}$**.** `Противоречие`**, доказывающее, что $\mathbf{A}$ – не ограничено, поэтому** $\forall M > 0 \ \exists N(M) \,:\, q^{N(M)} > M$.

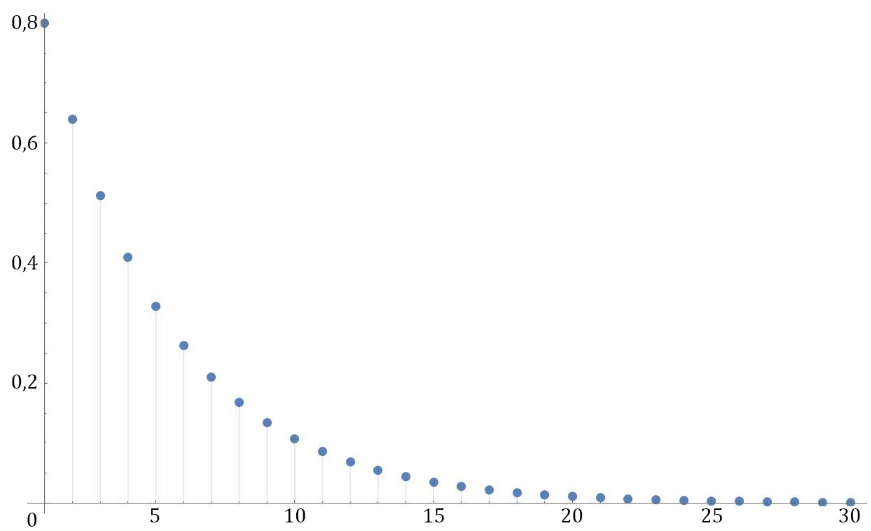
Далее, т.к. $q > 1$, то $q^n > q^{N(M)}$ при $n > N(M)$. Следовательно,

$$\forall M > 0 \ \exists N(M) \,:\, \forall n \geqslant N(M) \Rightarrow q^n > M \Longleftrightarrow \frac{1}{q^n} < \frac{1}{M}.$$

Откуда, т.к. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists M > 0 : \frac{1}{M} < \varepsilon$, то

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \widehat{N}(\varepsilon) \,:\, \forall n \geqslant \widehat{N}(\varepsilon) \Rightarrow \frac{1}{q^n} < \varepsilon,$$

и $\left\{\frac{1}{q^n}\right\}$ – бесконечно малая последовательность при $q > 1$.



<u>Теорема1</u> *(свойства бесконечно малых последовательностей)*:

1. Если $\{x_n\}$ – бесконечно малая, то $\{x_n\}$ – ограничена;
2. Если $\{x_n\}$ – бесконечно малая, $\{y_n\}$ – ограниченная, то $\{x_n \cdot y_n\}$ – бесконечно малая;
3. Если $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ – бесконечно малые, то и $\{x_n \pm y_n\}$, $\{x_n \cdot y_n\}$ – бесконечно малые.

Доказательство. 1. Пусть последовательность $\{x_n\}$ – бесконечно малая. Фиксируем $\forall \varepsilon > 0$ по нему находим $n_0(\varepsilon) : \forall n \geqslant n_0 \Rightarrow |x_n| < \varepsilon$. Теперь, если выбрать $M = \max\{\varepsilon, |x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{n_0-1}|\}$, то

$$\forall n \in \mathbb{N} \implies |x_n| \leqslant M.$$

2. Пусть

$$\exists A > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow |y_n| \leqslant A \text{ и } \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon) : \forall n \geqslant n_0 \Rightarrow |x_n| < \frac{\varepsilon}{A}.$$

Тогда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon)\ :\ \forall n \geqslant n_0(\varepsilon)\ \Rightarrow |x_n \cdot y_n| = |x_n| \cdot |y_n| < \frac{\varepsilon}{A} \cdot A = \varepsilon,$$

т.е. последовательность $\{x_n \cdot y_n\}$ – бесконечно малая.

3. Пусть $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_1(\varepsilon)$, $n_2(\varepsilon)$, такие что:

$$\forall n \geqslant n_1(\varepsilon) \implies |x_n| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n \geqslant n_2(\varepsilon) \implies |y_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно, $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 = \max\{n_1, n_2\}\ :\ \forall n \geqslant n_0 \implies$

$$|x_n \pm y_n| \leqslant |x_n| + |y_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

т.е. $\{x_n \pm y_n\}$ – бесконечно малая. То, что $\{x_n \cdot y_n\}$ – бесконечно малая вытекает из пунктов 1. и 2.

□

Теорема2 *(связь бесконечно малых и бесконечно больших последовательностей)*: Пусть $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x_n \neq 0$. Тогда последовательность $\{x_n\}$ – бесконечно большая, тогда и только тогда, когда $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ – бесконечно малая.

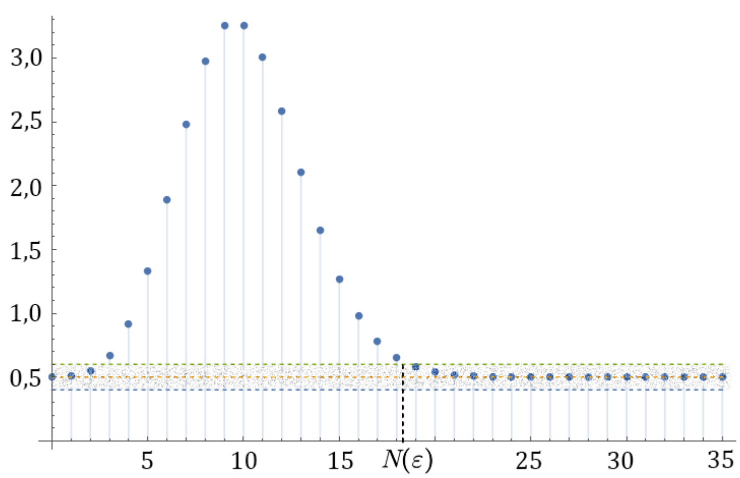
Доказательство. Докажем, например, необходимость[4]. Пусть $\{x_n\}$ – бесконечно большая. Тогда задавая произвольное $\varepsilon > 0$, положим $A = \frac{1}{\varepsilon}$. По этому A находим номер $n_0(A)$, что $\forall n \geqslant n_0(A) \Rightarrow |x_n| > A$. Это равносильно условию $\left|\frac{1}{x_n}\right| < \frac{1}{A} = \varepsilon$. □

2.2 Предел числовой последовательности.

Определение 1: Число a называется *пределом числовой последовательности* $\{x_n\}$, если последовательность $\{x_n - a\}$ является бесконечно малой, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)\ :\ \forall n \geqslant N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon \iff a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon.$$

Обозначение: $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ или $\{x_n\} \xrightarrow[n\to\infty]{} a$.



umgebungen (нем.)

Определение: Интервал, содержащий точку $x \in \mathbb{R}$, будем называть *окрестностью этой точки.* Обозначение: $\mathbf{U}(x)$ или $\mathbf{B}(x)$.

[4] Достаточность доказывается аналогично.

Определение: При $\delta>0$ интервал $(x-\delta, x+\delta)$ называется *δ-окрестностью точки x*. Обозначение: $\mathbf{U}_\delta(x)$. $\overset{\circ}{U}(x) = (x-\delta, x)\cup(x, x+\delta) = \mathbf{U}_\delta(x)\setminus\{x\}$ – *проколотая δ-окрестность точки x*.

Определение 2: Число a называется *пределом числовой последовательности* $\{x_n\}$, если для любой окрестности $\mathbf{U}(a)$ точки a существует такой номер N (выбираемый в зависимости от $\mathbf{U}(a)$), что все члены последовательности, номера которых больше N, содержатся в указанной окрестности точки a.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \text{ если } \forall \mathbf{U}(a)\ \exists N\in\mathbb{N} : \forall n\geqslant N \Rightarrow x_n\in\mathbf{U}(a).$$

Замечание: Эквивалентность определений 1 и 3 легко проверить, если заметить, что в любой окрестности $\mathbf{U}(a)$ содержится некоторая ε - окрестность этой же точки.

Определение: Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то говорят, что *последовательность $\{x_n\}$ сходится к числу a*. Последовательность, имеющая конечный предел, называется *сходящейся*. Обозначение: $\{x_n\}\to$.

Последовательность, не имеющая конечного предела называется *расходящейся*. Обозначение: $\{x_n\}\not\to$.

$$\{x_n\}\not\to, \text{ если } \forall a\in\mathbb{R}\ \exists\varepsilon_0(a) : \forall n\in\mathbb{N}\ \exists n_0\geqslant n, |x_{n_0}-a|\geqslant\varepsilon_0.$$

Пример 1. $x_n = \frac{\sin n}{n}$;

$$|x_n - 0| = \left|\frac{\sin n}{n}\right| \leqslant \frac{1}{n} < \varepsilon, \text{ при } n\geqslant N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1.$$

Пример 2. $x_n = \frac{n}{n+1}$;

$$|x_n - 1| = \left|\frac{n}{n+1}-1\right| = \left|\frac{n-n-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon, \text{ при } n\geqslant N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}-1\right]+1.$$

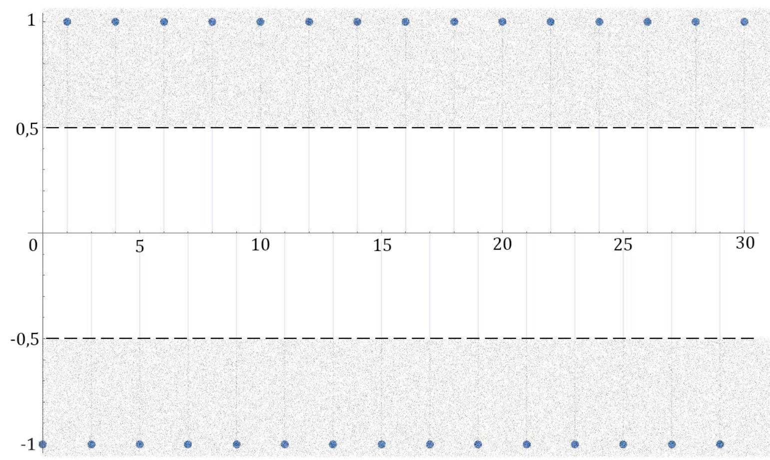
Пример 3. $x_n = (-1)^n$; Предполагая, что $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n = a$, получаем:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon) : \forall n\geqslant N(\varepsilon) \Rightarrow \left|(-1)^n - a\right|\leqslant\varepsilon.$$

Пусть $\varepsilon = \frac{1}{2}$, тогда для чётных и нечётных n: $\begin{cases}|1+a|\leqslant 1/2,\\ |1-a|\leqslant 1/2.\end{cases}$ $(*)$

$$2 = |1+1| = \left|(1+a)+(1-a)\right| \leqslant |1+a|+|1-a| \leqslant \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1.$$

Противоречие(!) Система $(*)$ не совместна.



Теорема3 *(свойства сходящихся последовательностей)*:

1. Сходящаяся последовательность имеет только один предел;

2. Всякая сходящаяся последовательность является ограниченной;

3. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Тогда
$$\lim_{n\to\infty}\big(x_n \pm y_n\big) = a \pm b; \quad \lim_{n\to\infty}\big(x_n \cdot y_n\big) = a \cdot b; \quad \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$$ [5].

Доказательство. 1. `От противного`. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a_1$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a_2$, и $a_1 \neq a_2$. По определению предела: $x_n = a_1 + \alpha_n$, $x_n = a_2 + \beta_n$ [6]. Откуда, $0 \neq a_1 - a_2 = \alpha_n - \beta_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. `Противоречие(!)`

2. Пусть $\{x_n\}$ сходящаяся числовая последовательность, и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Фиксируем $\forall\varepsilon > 0$ и находим по нему $N(\varepsilon)$, что $\forall n \geqslant N(\varepsilon)$ выполнено $|x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$. Обозначим через $M = \max\big\{|x_1|, \ldots, |x_{N-1}|, |a-\varepsilon|, |a+\varepsilon|\big\}$. Тогда $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow |x_n| \leqslant M$.

Замечание: Но не всякая ограниченная числовая последовательность является сходящейся (см. Пример 3 выше).

[5] В случае частного, предполагаем, что $b \neq 0$. Тогда (как будет показано далее), начиная с некоторого номера и $y_n \neq 0$.

[6] Здесь и далее α_n, β_n – бесконечно малые последовательности.

3. Пусть $x_n = a + \alpha_n$, $y_n = b + \beta_n$. Тогда

$$x_n \pm y_n = (a \pm b) + \overbrace{(\alpha_n \pm \beta_n)}^{\text{б.м.}}; \quad x_n \cdot y_n = ab + \overbrace{(a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n)}^{\text{б.м.}};$$

$$\left|\tfrac{x_n}{y_n} - \tfrac{a}{b}\right| = \left|\tfrac{a+\alpha_n}{b+\beta_n} - \tfrac{a}{b}\right| = \left|\tfrac{ab+\alpha_n b - ab - a\beta_n}{y_n\, b}\right| = \tfrac{1}{|y_n b|} \cdot |\alpha_n b - a\beta_n|\,.$$

Не ограничивая общности считаем, что $b > 0$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N(\varepsilon) \,:\, \forall n \geqslant N(\varepsilon) \implies b - \varepsilon < y_n < b + \varepsilon \Leftrightarrow \left\{\varepsilon = \frac{b}{2} > 0\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 < \tfrac{b}{2} < y_n < \tfrac{3b}{2} \Rightarrow \tfrac{1}{y_n} < \tfrac{2}{b} \Rightarrow \tfrac{1}{y_n b} < \tfrac{2}{b^2} \Rightarrow \overbrace{\tfrac{1}{y_n b}}^{\text{огр.}} \cdot \overbrace{|\alpha_n b - \beta_n a|}^{\text{б.м.}}\,.$$

Следовательно, $\left\{\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right\}$ – бесконечно малая, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$

□

<u>Теорема4</u> *(предельный переход и неравенства)*: Пусть $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Причём $a < b$. Тогда, начиная с некоторого номера, выполнено: $x_n < y_n$.

Доказательство. Возьмём число $c \in \mathbb{R}$ такое, что $a < c < b$. По определению предела найдём номера N_1 и N_2 , что при

$$\forall n \geqslant N_1 \Rightarrow |x_n - a| < c - a \iff a - c + a < x_n < c - a + a.$$

$$\forall n \geqslant N_2 \Rightarrow |y_n - b| < b - c \iff c - b + b < y_n < b - c + b.$$

Откуда, при $\forall n \geqslant \max\{N_1, N_2\} \Rightarrow x_n < c - a + a = c = c - b + b < y_n$. □

<u>Следствие1</u>: Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Если $\exists N \,:\, \forall n \geqslant N$ выполнено:

1) $x_n > y_n$, то $a \geqslant b$;
2) $x_n \geqslant y_n$, то $a \geqslant b$;
3) $x_n > b$, то $a \geqslant b$;
4) $x_n \geqslant b$, то $a \geqslant b$;

Доказательство. Утверждения 1) и 2) заключаются из теоремы 4 доказательством от противного. 3) и 4) – частные случаи 1) и 2), получающиеся при $y_n \equiv b$. □

Замечание: В утверждениях 1) и 3) неравенство $a \leqslant b$ нельзя заменить на строгое. Пусть, например, $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{1}{n+1}$ $\big(y_n \equiv 0\big)$, тогда $\forall n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow x_n > y_n$, но $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Следствие2 *(принцип двустороннего ограничения)*: Если все элементы (сходящейся) числовой последовательности $\{x_n\}$, начиная с некоторого номера, находятся на сегменте $[a,b]$, то и предел x этой последовательности лежит на $[a,b]$.

Теорема5 *(теорема о двух милиционерах)*: Пусть последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ таковы, что $\forall n \geqslant \widetilde{N} \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство $x_n \geqslant y_n \geqslant z_n$. Если при этом последовательности $\{x_n\}$ и $\{z_n\}$ сходятся к одному и тому же пределу, то и последовательность $\{y_n\}$ также сходится к тому же пределу.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$. По $\forall \varepsilon > 0$ найдём числа N_1 и N_2 так, чтобы при $\forall n \geqslant N_1$ выполнялось $a - \varepsilon < x_n$,[7] а при $\forall n \geqslant N_2$ выполнялось $z_n < a + \varepsilon$. Тогда при $\forall n \geqslant N = \max\{\widetilde{N}, N_1, N_2\}$ получаем:

$$a - \varepsilon < x_n \leqslant y_n \leqslant z_n < a + \varepsilon, \text{ или } |y_n - a| < \varepsilon,$$

т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$. □

2.3 Монотонные последовательности.

Определение: Последовательность $\{x_n\}$ называется *неубывающей (невозрастающей)*, если для $\forall n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство:

$$x_n \leqslant x_{n+1} \quad (x_n \geqslant x_{n+1}).$$

Обозначение: $\{x_n\}\nearrow$ $\big(\{x_n\}\searrow\big)$.

Определение: Последовательность $\{x_n\}$ называется *монотонной*, если она является либо неубывающей, либо невозрастающей.

Замечание: Если элементы неубывающей (невозрастающей) последовательности для всех номеров удовлетворяют `строгому неравенству`

[7] $|x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$.

$x_n < x_{n+1}$ $(x_n > x_{n+1})$, то эту последовательность называют `строго` *возрастающей (убывающей)*. Обозначение: $\{x_n\}\uparrow$ $\big(\{x_n\}\downarrow\big)$.

<u>Теорема6</u> *(теорема Вейерштрасса[8])*: Для того, чтобы монотонная последовательность имела предел, необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена.

Доказательство. То, что любая сходящаяся последовательность является ограниченной, было доказано выше, поэтому интерес представляет только второе утверждение теоремы.

Рассмотрим неубывающую числовую последовательность $\{x_n\}$, ограниченную сверху[9]. По принципу Вейерштрасса (существования точных граней) у множества значений этой последовательности есть `точная` верхняя грань $s = \sup\limits_n\{x_n\}$. По определению `супремума`

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : s - \varepsilon < x_N \leqslant s.$$

Далее поскольку $\{x_n\}\nearrow$, то при $\forall n > N$ получаем:

$$s - \varepsilon < x_N \leqslant x_n \leqslant s < s + \varepsilon, \text{ т.е. } |s - x_n| = s - x_n < \varepsilon.$$

Т.о. доказано, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = s = \sup\limits_n\{x_n\}$. □

<u>Замечание:</u> Для невозрастающей, ограниченной снизу числовой последовательности $\{y_n\}$ получаем:

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \ell = \inf_n\{y_n\}.$$

<u>Замечание:</u> Если последовательность возрастает и не ограничена сверху, то она стремится к $+\infty$. Если последовательность убывает и не ограничена снизу, то она стремится к $-\infty$.

Доказательство. Пусть $\{x_n\}\uparrow$ и не ограничена. Тогда

$$\forall E > 0\ \ \exists N(E) : x_{N(E)} > E.$$

Т.к. $\{x_n\}\uparrow$, то $\forall n > N(E)$ тем более выполнено $x_n > E$. □

В этом случае, $\sup\limits_n\{x_n\} = +\infty$**.**

---

[8] *Критерий сходимости монотонной последовательности.*

[9] Ограниченность неубывающей последовательности снизу очевидна.

Неравенство Я. Бернулли: **Пусть** $n \in \mathbb{Z}_+$, $-1 < \alpha \in \mathbb{R}$, **тогда**

$$(1+\alpha)^n \geqslant 1 + \alpha n.$$

Доказательство. При $n = 0$ или $n = 1$ имеем верные равенства. Пусть справедливо неравенство $(1+\alpha)^n \geqslant 1 + \alpha n$. Тогда

$$(1+\alpha)^{n+1} = (1+\alpha)^n(1+\alpha) \geqslant (1+\alpha n)(1+\alpha) = 1 + (n+1)\alpha + n\alpha^2 \geqslant 1 + (n+1)\alpha.$$

□

Пример 1 *(число* **e***).*

Докажем существование предела $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Для этого рассмотрим последовательность $y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ и изучим отношение:

$$\frac{y_{n-1}}{y_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{n^n \cdot n^{n+1}}{(n-1)^n \cdot (n+1)^{n+1}} = \frac{n^{2n}}{(n^2-1)^n} \cdot \frac{n}{n+1} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1} \geqslant \{^{10)}\} \geqslant \left(1+\frac{n}{n^2-1}\right) \cdot \frac{n}{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right) \cdot \frac{n}{n+1} = 1.$$

Следовательно, $\{y_n\}\downarrow$. Кроме того, ясно, что $y_n \geqslant 1$. Поэтому, по теореме Вейерштрасса, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, а тогда по теореме о пределе частного, и последовательность $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\} = \frac{y_n}{1+1/n}$ сходится к тому же пределу.

Определение: Предел последовательности $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ называют *числом Эйлера* (или *числом Непера*), или *основанием натуральных логарифмов*. Обозначение: **e**.

Замечание: Можно доказать, что последовательность $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ монотонно возрастает, а следовательно, сходится к своему пределу снизу.

Пример 2. Докажем, что к числу **e** сходится и последовательность

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}.$$

Доказательство. Воспользовавшись биномом Ньютона, получаем:

$$e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots\big(n-(n-1)\big)}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} =$$

[10] Неравенство Бернулли.

$$= 2 + \frac{1}{2!}\overbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}^{<1} + \ldots + \frac{1}{n!}\overbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}^{<1} \cdot \ldots \cdot \overbrace{\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)}^{<1} <$$

$$< 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} = s_n, \text{ т.е. } e_n < s_n.$$

Зафиксируем теперь `произвольное` k, и будем рассматривать $n > k$. Имеем,

$$2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) <$$

$$< 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \overbrace{\ldots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)}^{>0}.$$

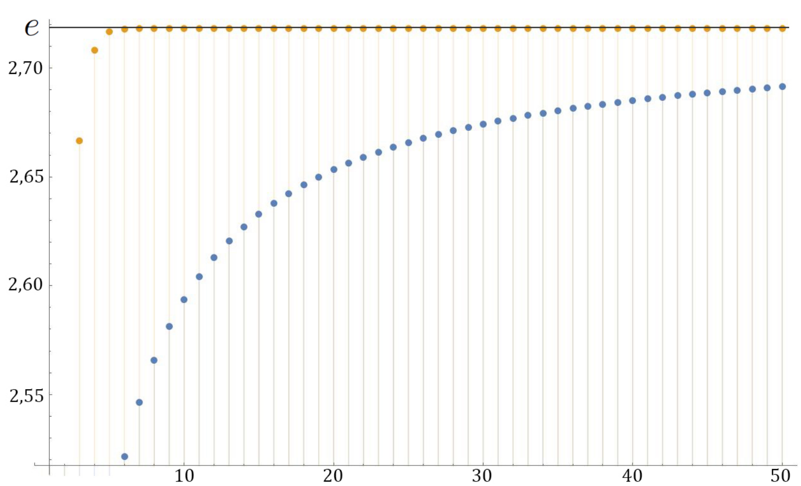
Заметим теперь, что левая часть данного неравенства при $n \to \infty$ и фиксированном k, стремится к s_k, а правая к числу e (см. выше). Следовательно, для $\forall k \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство: $s_k < e$. Объединяя данное неравенство с предыдущим, получаем важный результат:

$$e_k < s_k < e \text{ для всех } k \in \mathbb{N},$$

откуда, и из теоремы о двух милиционерах вытекает требуемое. $\square$

<u>Замечание:</u> Отметим, что последовательность $\{s_n\}$ сходится к числу e существенно быстрее последовательности $\{e_n\}$, и поэтому, применима к вычислениям числа e значительно лучше. Например,

$$e - e_5 \approx 0,2299; \quad e - s_5 \approx 0,0016.$$



2.4 Принципы полноты. Продолжение.

Определение: Говорят, что *система* $S = \{\mathbf{X}\}$ *множеств* $\mathbf{X}$ *покрывает множество* $\mathbf{Y}$, если $\mathbf{Y} \subset \bigcup\limits_{\mathbf{X} \in S} \mathbf{X}$, т.е. если $\forall y \in \mathbf{Y}$ содержится по крайней мере в одном из множеств системы S.

Определение: Подмножество $S = \{\mathbf{X}\}$, являющегося системой множеств, будем называть *подсистемой системы* S. Т.о., подсистема системы множеств сама является системой множеств того же типа.

Теорема *(лемма Гейне-Бореля*[11]*)*: В любой системе интервалов, покрывающей отрезок, имеется `конечное подпокрытие`[12], покрывающее этот отрезок.

Доказательство. Пусть $S = \{\mathbf{E}\}$ – система интервалов $\mathbf{E}$, покрывающая отрезок $[a, b] = \mathbf{I}_0$. Если бы $\mathbf{I}_0$ не допускал покрытие конечным набором интервалов системы S, то поделив $\mathbf{I}_0$ пополам, мы получили бы, что по крайней мере одна из его половинок (обозначим её через $\mathbf{I}_1$) также не допускает конечного покрытия. С отрезком $\mathbf{I}_1$ проделаем ту же процедуру деления пополам, получим отрезок $\mathbf{I}_2$, и т.д.

Т.о., возникает последовательность $\mathbf{I}_0 \supset \mathbf{I}_1 \supset \ldots \supset \mathbf{I}_n \supset \ldots$ вложенных отрезков, не допускающих конечного покрытия интервалами системы S. Т.к. длина отрезка, полученного на n-ом шаге по построению равна $|\mathbf{I}_n| = \frac{|\mathbf{I}_0|}{2^n}$, то (`по принципу Архимеда`) $\{|\mathbf{I}_n|\} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$. Следовательно, $\{\mathbf{I}_n\}$ – стягивающаяся система сегментов, у которой (по принципу вложенных отрезков) существует единственная общая точка, которую мы обозначим c. Т.к. $c \in \mathbf{I}_0 = [a, b]$, то $\exists (\alpha, \beta) \in S$, содержащий точку c, т.е. $\alpha < c < \beta$. Пусть $\varepsilon = \min\{c - \alpha, \beta - c\}$. Найдём в построенной последовательности такой отрезок $\mathbf{I}_n$, что $|\mathbf{I}_n| < \varepsilon$. Поскольку $c \in \mathbf{I}_n$ и $|\mathbf{I}_n| < \varepsilon$, заключаем, что $\mathbf{I}_n \subset (\alpha, \beta)$. Но это `противоречит` тому, что отрезок $\mathbf{I}_n$ нельзя покрыть конечным набором интервалов системы S. □

`cluster point (англ.).`

Определение: Точка $p \in \mathbb{R}$ называется *предельной точкой*[13] *множества* $\mathbf{X} \subset \mathbb{R}$, если любая окрестность этой точки содержит бесконечное подмножество множества $\mathbf{X}$.

[11] Принцип Гейне-Бореля или принцип Бореля-Лебега

[12] Конечная подсистема.

[13] Или *точкой сгущения множества* $\mathbf{X}$

Тоже самое: в любой окрестности точки p есть, по крайней мере одна, не совпадающая с p точка множества X.

Множество предельных точек множества $\mathbf{X}$ обозначается через $\mathbf{X}^*$.

Пример 1. $\mathbf{X} = (0,1) \cup \{2\}, \quad \mathbf{X}^* = [0,1]$;

Пример 2. $\mathbf{X} = \left\{\frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}, \quad \mathbf{X}^* = \{0\}$;

Пример 3. $\mathbf{X} = \mathbb{Q}, \quad \mathbf{X}^* = \mathbb{R}$.

Теорема *(лемма Больцано-Вейерштрасса*[14]*)*: Всякое бесконечное ограниченное числовое множество имеет, по крайней мере, одну предельную точку.

Доказательство. Пусть $\mathbf{X} \subset \mathbb{R}$ – данное бесконечное множество. Из определения ограниченности $\mathbf{X}$ следует, что $\exists [a,b] = \mathbf{I} \subset \mathbb{R}$ такой, что $\mathbf{X} \subset \mathbf{I}$. Покажем, что по крайней мере одна из точек отрезка $\mathbf{I}$ является предельной для $\mathbf{X}$.

Если бы это было не так, то $\forall x \in \mathbf{I}$ существовала бы окрестность $\mathbf{U}(x)$, в которой либо вообще нет точек множества $\mathbf{X}$, либо их там конечное число. Совокупность $\{\mathbf{U}(x)\}$ таких окрестностей, построенных для $\forall\, x \in \mathbf{I}$, образует покрытие отрезка $\mathbf{I}$ интервалами $\mathbf{U}(x)$, из которого по лемме Гейне-Бореля можно выделить конечную систему $\mathbf{U}(x_1), \dots, \mathbf{U}(x_n)$ интервалов, покрывающую отрезок $\mathbf{I}$. Но, т.к. $\mathbf{X} \subset \mathbf{I}$, эта же система покрывает всё множество $\mathbf{X}$. Однако, в каждой окрестности $\mathbf{U}(x_i)$ находится только конечное число точек множества $\mathbf{X}$, значит, и в их конечном объединении также конечное число точек $\mathbf{X}$, т.е. $\mathbf{X}$ – конечное множество. Противоречие(!) □

Определение: Точка $a \in \mathbb{R}$ называется *изолированной точкой множества* $\mathbf{X} \subset \mathbb{R}$, если $\exists \delta > 0 : \mathbf{U}_\delta(a) \cap \mathbf{X} = \{a\}$.

Более кратко: все точки множества X не являющиеся предельными, называются изолированными.

Упражнение: Выведите из леммы Больцано-Вейерштрасса и принципа Архимеда принцип полноты Кантора-Дедекинда.

Тем самым, в архимедовом поле будет доказана эквивалентность пяти важнейших принципов полноты.

[14] Принцип Больцано-Вейерштрасса

2.5 Подпоследовательности и частичные пределы последовательности.

Определение: Если $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – некоторая последовательность, а $n_1 < < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ – строго возрастающая последовательность натуральных чисел, то последовательность $x_{n_1},\ x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots$ называется *подпоследовательностью последовательности* $\{x_n\}$. Обозначение: $\{x_{n_k}\}$.

Пример 1. Последовательность $1, 3, 5, \ldots$ – нечётных натуральных чисел, взятых в их естественном порядке является подпоследовательностью последовательности натуральных чисел. А последовательность $3, 1, 5, \ldots$ уже такой не является.

Утверждение 1: Если последовательность $\{x_n\}$ сходится к пределу a, то и любая её подпоследовательность сходится к тому же пределу a.

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Т.к. $\{x_n\} \to a$, то

$$\exists N(\varepsilon) \ : \ \forall n \geqslant N(\varepsilon) \implies |x_n - a| < \varepsilon.$$

Далее, т.к. $n_k \geqslant n$, то $\forall n_k \geqslant n \geqslant N(\varepsilon)$ элементы последовательности $\{x_{n_k}\}$ удовлетворяют неравенству $|x_{n_k} - a| < \varepsilon$, а это и означает, что подпоследовательность $\{x_{n_k}\} \xrightarrow[k\to\infty]{} a$. $\square$

Очевидно, что если некоторая подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$ сходится к a, то сама последовательность может расходится. Однако, если $\{x_{n_k}\} \to a$, то $\{x_n\}$ либо расходится, либо сходится к a.

Аналогично доказывается следующее утверждение:

Утверждение: Любая подпоследовательность бесконечно большой последовательности представляет собой бесконечно большую последовательность.

Определение: Точка $x \in \mathbb{R}$ называется *предельной точкой (частичным пределом) последовательности* $\{x_n\}$, если выполнено одно из этих условий:

а) в любой окрестности точки x содержится бесконечно много элементов этой последовательности;

б) из этой последовательности можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к пределу x.

Утверждение 2: Оба этих определения эквивалентны.

Доказательство. Пусть $\forall \mathbf{U}(x)\ \exists n \in \mathbb{N} : x_n \in \overset{\circ}{U}(x)$. Рассмотрим совокупность окрестностей $\left\{\overset{\circ}{U}_{1/n}(x)\right\}$. В первой окрестности $\overset{\circ}{U}_1(x)$ выберем элемент x_{n_1}. В $\overset{\circ}{U}_{1/2}(x)$ – элемент x_{n_2}, так, чтобы выполнялось $n_2 > n_1$. В $\overset{\circ}{U}_{1/3}(x)$ – x_{n_3}, $n_3 > n_2$ и т.д.[15]. В результате мы получим подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ последовательности $\{x_n\}$, которая сходится к x, т.к. $|x_{n_k} - x| < \frac{1}{k}$, $\forall k \in \mathbb{N}$ и $\frac{1}{k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$. а) ⇒ б).

Пусть $\exists \{x_{n_k}\} \xrightarrow[k\to\infty]{} x$. Тогда по определению предела числовой последовательности в каждой окрестности $\mathbf{U}(x)$ лежит бесконечно много элементов подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$ (все, начиная с некоторого номера). Остаётся заметить, что каждый элемент подпоследовательности является элементом последовательности $\{x_n\}$. □ б) ⇒ а).

Лемма: Каждая сходящаяся числовая последовательность имеет только одну предельную точку, совпадающую с пределом этой последовательности.

Доказательство. Пусть $\{x_n\} \to a$. Тогда (по формулировке **б)**), точка a является предельной для последовательности $\{x_n\}$. Из Утверждения 1 вытекает сходимость к a любой подпоследовательности последовательности $\{x_n\}$. Следовательно, других предельных точек у этой последовательности нет. □

Обратное утверждение (если у ограниченной числовой последовательности только одна предельная точка, то она сходится), безусловно, также верно.

Замечание: Однако предельных точек у числовой последовательности может быть больше одной, причём как любое конечное число, так и бесконечно много.

[15] Этот процесс можно продолжать бесконечно, т.к. в любой окрестности найдётся бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}$.

<u>Теорема7</u> *(теорема Больцано-Вейерштрасса)*: Каждая ограниченная числовая последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство. Пусть $\mathbf{X}$ – множество значений ограниченной последовательности $\{x_n\}$. Если $\mathbf{X}$ – конечно, то существует по крайней мере одна точка $x \in \mathbf{X}$ и подпоследовательность x_{n_k} (последовательности $\{x_n\}$) такая, что $x_{n_1} = x_{n_2} = \ldots = x$. Последовательность x_{n_k} постоянна, а значит сходится.

Пусть $\mathbf{X}$ – бесконечно. Тогда по лемме Больцано-Вейерштрасса оно обладает по крайней мере одной предельной точкой x $\big($которое будет предельной точкой последовательности $\{x_n\}\big)$. Из определения предельной точки[16] заключаем существование, сходящейся к x подпоследовательности. $\square$

Заметим, что на множестве $\mathbb{Q}$ теорема Больцано-Вейерштрасса не имеет места.

<u>Замечание:</u> Вспоминая определение бесконечно большой последовательности[17] (и бесконечно большой последовательности определённого знака):

$\{x_n\} \to +\infty$, если $\forall E \in \mathbb{R} \quad \exists N(E) : \forall n \geqslant N(E) \Longrightarrow x_n > E$;

$\{x_n\} \to -\infty$, если $\forall E \in \mathbb{R} \quad \exists N(E) : \forall n \geqslant N(E) \Longrightarrow x_n < E$;

$\{x_n\} \to \infty$, если $\forall E \in \mathbb{R} \quad \exists N(E) : \forall n \geqslant N(E) \Longrightarrow |x_n| > E$;

мы можем переписать теорему Больцано-Вейерштрасса следующим образом:

<u>Теорема7′</u>: Из каждой числовой последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность или бесконечно большую подпоследовательность.

Доказательство. Новым, по сравнению с теоремой Больцано-Вейерштрасса, является только тот случай, когда $\{x_n\}$ не ограничена. Тогда по $\forall k \in \mathbb{N}$ будем выбирать номер $n_k \in \mathbb{N}$ такой, что $|x_{n_k}| > k$ и $n_k > n_{k-1}$. Получим подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, которая стремится к бесконечности. $\square$

Обозначим через $\mathbf{X}_n^*$ множество предельных точек последовательности $\{x_n\}$, и рассмотрим следующий пример.

---

[16] См. также Утверждение 2.

[17] Последовательности, стремящиеся к ∞ мы не причисляем к сходящимся.

Пример 1. Рассмотрим счётное множество $\mathbf{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ и по нему составим следующую числовую последовательность:

$$x_n = \{a_1, a_1, a_2, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_1, \ldots, a_n, \ldots\}.$$

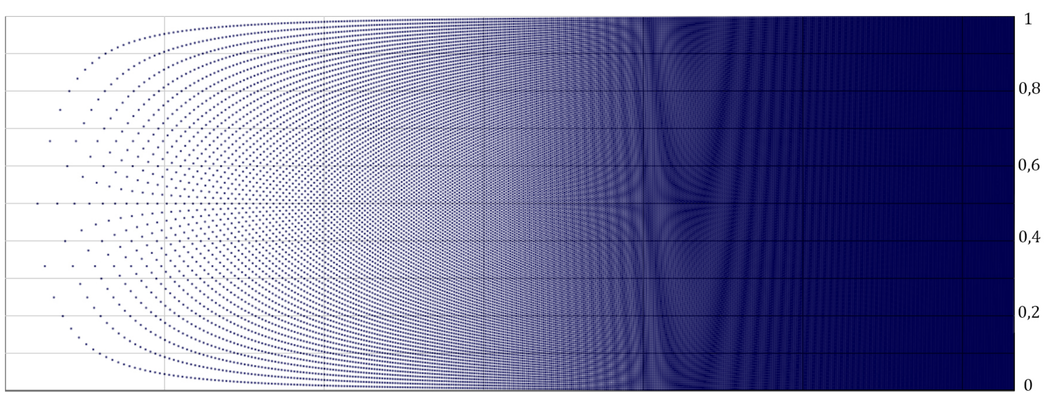
Для неё, очевидно, множество предельных точек $\mathbf{X}_n^*$ включает в себя заданное счётное множество $\mathbf{A}$. Однако, равенство $\mathbf{X}_n^* = \mathbf{A}$ может и не выполняться: множество $\mathbf{X}_n^*$ содержит также все предельные точки последовательности $\{x_n\}$, которые могут и не принадлежать самой $\{x_n\}$.

Пример 2. Пусть $\mathbf{A} = \left\{\frac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{N}\right\}$. Составим числовую последовательность

$$x_n = \left\{1, 1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, 1, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}.$$

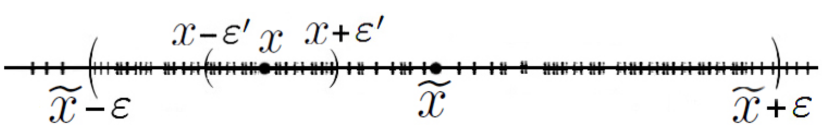
Тогда $\mathbf{X}_n^* = \mathbf{A} \cup \{0\}$, причём $0 \notin \mathbf{A}$.

Пример 3. Пусть последовательность $x_n = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right\}$ состоит из всех рациональных точек интервала $(0,1)$. В этом случае, $\mathbf{X}_n^* = [0,1]$. Т.к. $\forall x \in [0,1]$ в $\forall \mathbf{U}(x)$, найдётся бесконечно много рациональных дробей, элементов последовательности $\{x_n\}$.



Отметим, что в последнем примере мощность $\mathbf{X}_n^*$ – континуум, хотя $\{x_n\}$ – счётно.

<u>Упражнение:</u> Пусть $\mathbf{X}_n^*$ – множество предельных точек последовательности $\{x_n\}$, а $\widetilde{x}$ предельная точка множества $\mathbf{X}_n^*$. Докажите, что $\widetilde{x} \in \mathbf{X}_n^*$.



2.6 Верхний и нижний пределы последовательности.

Рассмотрим некоторую ограниченную числовую последовательность $\{x_n\}$. этом случае, очевидно, множество её предельных точек $\mathbf{X}_n^*$ также ограничено и не пусто[18]. Следовательно, для него существуют $\overline{x} = \sup \mathbf{X}_n^*$ и $\underline{x} = \inf \mathbf{X}_n^*$. Покажем, что $\overline{x}, \underline{x} \in \mathbf{X}_n^*$.

в общем случае, sup и inf могут не принадлежать множеству.

Т.к. $\overline{x} = \sup \mathbf{X}_n^*$, то $\forall \varepsilon > 0\ \exists x_0 \in \mathbf{X}_n^* : \overline{x} - \varepsilon < x_0 \leqslant \overline{x}$. $x_0 \in \mathbf{X}_n^* \Rightarrow x_0$ – предельная точка последовательности $\{x_n\}$. Поэтому, в любой её окрестности находится бесконечно много элементов $\{x_n\}$. Выберем $\varepsilon' > 0$ достаточно малым, так чтобы $\mathbf{U}_{\varepsilon'}(x_0) \subset \mathbf{U}_\varepsilon(\overline{x})$. Тогда в произвольной окрестности $\mathbf{U}_\varepsilon(\overline{x})$ находится бесконечно много элементов $\{x_n\}$, т.е. $\overline{x} \in \mathbf{X}_n^*$.

Аналогично доказывается, что $\underline{x} \in \mathbf{X}_n^*$. Следовательно, у ограниченной числовой последовательности всегда есть наименьшая и наибольшая предельные точки. Их называют *нижним* и *верхним пределами последовательности*. Обозначение: $\overline{x} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$, $\underline{x} = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$

Из выше сказанного и определений вытекает следующее утверждение

Утверждение *(критерий сходимости числовой последовательности)*: Ограниченная числовая последовательность сходится тогда и только тогда, когда её верхний и нижний пределы совпадают.

Следствие: Последовательность сходится тогда и только тогда, когда сходится любая её подпоследовательность.

В случае неограниченной снизу (сверху) числовой последовательности из неё можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к $-\infty$ $(+\infty)$. Поэтому в таких случаях считают, что:

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = -\infty, \quad \Big(\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = +\infty\Big)$$

Т.о., для любой числовой последовательности определены 4 объекта, связанные следующими неравенствами:

$$\inf_n\{x_n\} \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \leqslant \sup_n\{x_n\}. \qquad (*)$$

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$ – sup **множества $\mathbf{X}_n^*$, предельных точек последовательности.**

$\sup\limits_n\{x_n\}$ – sup **множества, составленного из значений последовательности $\{x_n\}$.**

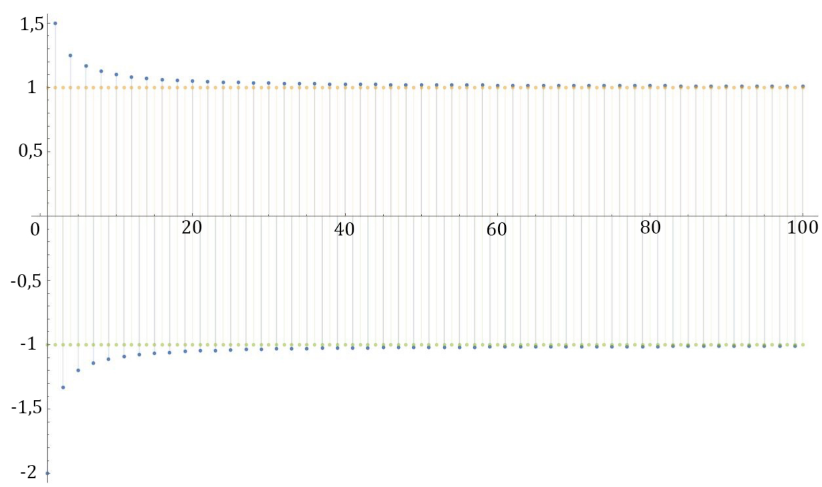
[18] В силу теоремы Больцано-Вейерштрасса.

Для ограниченной последовательности это – конечные числа. При этом, в соотношении $(*)$ могут стоять как равенства, так и строгие неравенства.

<u>**Упражнение:**</u> Постройте пример последовательности $\{x_n\}$, для которой в данном соотношении стоят `строгие неравенства`.

Из этого же соотношения следует, что если все элементы последовательности $\{x_n\}$ лежат на некотором отрезке $[a,b]$, то и $\mathbf{X}_n^* \subset [a,b]$. Обратное, вообще говоря, неверно.

Пример 1. $x_n = (-1)^n + \frac{(-1)^n}{n}$. Имеем, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = -1$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = 1$, но на отрезке $[-1,1]$ нет ни одного элемента последовательности $\{x_n\}$.



Однако, имеет место следующее утверждение:

<u>**Утверждение:**</u> Пусть $\{x_n\}$ – ограниченная числовая последовательность. $\overline{x} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$, $\underline{x} = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) : \forall n \geqslant N(\varepsilon) \Longrightarrow x_n \in (\underline{x} - \varepsilon, \overline{x} + \varepsilon).$$

Т.е. вне интервала $(\underline{x} - \varepsilon, \overline{x} + \varepsilon)$ лежит лишь конечное число элементов $\{x_n\}$.

Доказательство. Доказательство от противного, используя теорему Больцано-Вейерштрасса и определения верхнего/нижнего пределов. □

Упражнение: Пользуясь введёнными выше определениями верхнего и нижнего пределов, докажите равенства:

$$\underline{\lim}_{k\to\infty} x_k = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geqslant n} x_k, \quad \overline{\lim}_{k\to\infty} x_k = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geqslant n} x_k$$

2.7 Критерий Коши сходимости последовательности.

Определение: Последовательность $\{x_n\}$ называется *фундаментальной*[19] (или *последовательностью Коши*), если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) : \forall n \geqslant N(\varepsilon) \text{ и } \forall p \in \mathbb{N} \Longrightarrow |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon.$$

Аналогично: $\{x_n\}$ – фундаментальна, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) : \forall n, m \geqslant N(\varepsilon) \Longrightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Лемма: Любая фундаментальная последовательность ограничена.

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon = 1 > 0$. Для этого ε найдём номер N такой, что $\forall n.m \geqslant N$ выполнено: $|x_n - x_m| < 1$. В частности, тогда $|x_n - x_N| < 1$ для $\forall n \geqslant N$. Следовательно для таких n:

$$|x_n| = |x_n - x_N + x_N| \leqslant |x_n - x_N| + |x_N| < 1 + |x_N|.$$

Положим $M = \max\{|x_1|, \dots, |x_{N-1}|, 1 + |x_N|\} \Longrightarrow |x_n| \leqslant M$ для $\forall n \in \mathbb{N}$. □

критерий Больцано-Коши.

Теорема8 *(критерий Коши сходимости числовой последовательности)*: Для того, чтобы числовая последовательность имела предел, `необходимо и достаточно`, чтобы она была фундаментальной.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\{x_n\} \xrightarrow[n\to\infty]{} x$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) : \forall n \geqslant N \Longrightarrow |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому, $\forall m, n \geqslant N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - x_m| \leqslant |x_n - x| + |x - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Достаточность. По предыдущей лемме, фундаментальная последовательность ограничена. По теореме Больцано-Вейерштрасса у неё

[19] Или *сходящейся в себе*

найдётся сходящаяся подпоследовательность. Пусть $\{x_{n_k}\} \xrightarrow[n\to\infty]{} x$. Докажем, что и $\{x_n\} \xrightarrow[n\to\infty]{} x$. для этого выберем произвольное $\varepsilon > 0$.

$$\exists \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x \implies \exists K(\varepsilon) : \forall k \geqslant K(\varepsilon) \Rightarrow |x_{n_k} - x| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\{x_n\} - \text{фундаментальна} \implies \exists N(\varepsilon) : \forall n, m \geqslant N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Положим $M(\varepsilon) = \max\big\{K(\varepsilon), N(\varepsilon)\big\}$. Тогда $n_M \geqslant n_N \geqslant N$, $n_M \geqslant n_K \geqslant K$. Следовательно, $\forall n \geqslant M(\varepsilon)$ выполнено:

$$|x_n - x| \leqslant |x_n - x_{n_M}| + |x_{n_M} - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ это и означает, что $\{x_n\} \xrightarrow[n\to\infty]{} x$. □

Критерий Коши можно переформулировать так: числовая последовательность сходится, тогда и только тогда, когда её значения безгранично сближаются между собой по мере возрастания их номеров. То есть, числовая последовательность не может «попасть» в $\varepsilon-$трубку с «несблизившимися» членами. И, наоборот, если числовая последовательность «попала» в $\varepsilon-$трубку, то её члены заведомо сблизились между собой.

Таким образом, для числовой последовательности $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ фундаментальность эквивалентна сходимости. Но в общем случае (т.е. в случае $\{x_n\}$ из какого-то другого множества) это не всегда так. Например, если $\{x_n\}$ – рациональные приближения числа $\sqrt{2}$, то $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x_n \in \mathbb{Q}$, $\{x_n\}$ – фундаментальна[20], но не существует предела этой последовательности в $\mathbb{Q}$, т.к. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Заметим, что из сходимости $\{x_n\}$ произвольном множестве (в том числе и $\mathbb{Q}$) следует её фундаментальность[21]. Т.о. фундаментальность слабее сходимости.

<u>**Определение:**</u> Множества, в которых фундаментальность влечёт за собой сходимость последовательности, называют *полными*. Из приведённых выше рассуждений множество $\mathbb{R}$ – полное, а $\mathbb{Q}$ – нет.

---

[20] См. пример ниже.

[21] Доказательство необходимости опиралось лишь на определение сходимости и фундаментальности, но не на свойства множества $\mathbb{R}$.

десятичное разложение вещественного числа.

Пример 1. Пусть

$$r_n = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 \cdot \frac{1}{10} + \varepsilon_2 \cdot \frac{1}{10^2} + \ldots + \varepsilon_n \cdot \frac{1}{10^n},\ \text{где } \varepsilon_0 \in \mathbb{Z},\ \varepsilon_k \in \{0,1,\ldots,9\},\ k = \overline{1,n};$$

$\forall \varepsilon > 0$ и $\forall p \in \mathbb{N}$ получим:

$$|r_n - r_{n+p}| = \sum_{k=n+1}^{n+p} \varepsilon_k \cdot \frac{1}{10^k} \leqslant 9 \cdot \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{10^k} < 9 \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{10^k} = 9 \cdot \frac{1}{9 \cdot 10^n} = \frac{1}{10^n} < \varepsilon,$$

при $n \geqslant N(\varepsilon) = \left[\frac{\ln \varepsilon}{\ln 0{,}1}\right] + 1$.

частичная сумма гармонического ряда.

Пример 2. $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$.

Напишем отрицание фундаментальности:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall n \in \mathbb{N}\ \exists p \in \mathbb{N} \text{ выполнено } |x_n - x_{n+p}| \geqslant \varepsilon_0.$$

Т.е. найдётся такой член, который выйдет из ε-трубки.

$$|H_n - H_{n+p}| = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+p} = \{p = n\} = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} = \varepsilon_0.$$

Следовательно, $\{H_n\}$ не фундаментальна, т.е. $\nexists \lim\limits_{n\to\infty} H_n$.

Т.к. $\{H_n\}\uparrow$, то $H_n \to +\infty$. Однако отметим, что H_n стремится к $+\infty$ очень медленно (чтобы вырасти на $\frac{1}{2}$ требуется взять ещё примерно столько же слагаемых[22]).

Пример 3. $\gamma_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$;

$$|\gamma_n - \gamma_{n+p}| = \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+p)^2} < \frac{1}{n\,(n+1)} + \ldots + \frac{1}{(n+p-1)\,(n+p)} =$$

$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

при $n \geqslant N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$. Следовательно, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n$[23].

Дзета-функция, $\zeta(\alpha)$.

Пример 4. $H_n^\alpha = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha}$; $|H_n^\alpha - H_{n+p}^\alpha| = \frac{1}{(n+1)^\alpha} + \ldots + \frac{1}{(n+p)^\alpha}$.

- Для $\alpha \leqslant 1$, получаем $|H_n^\alpha - H_{n+p}^\alpha| \geqslant |H_n - H_{n+p}| > \frac{1}{2}$ (см. Пример 2.) $\Longrightarrow \nexists \lim\limits_{n\to\infty} H_n^\alpha$.
- Для $\alpha \geqslant 2$, получаем $|H_n^\alpha - H_{n+p}^\alpha| \leqslant |H_n^2 - H_{n+p}^2| = |\gamma_n - \gamma_{n+p}| < \varepsilon$ (см. Пример 3.) $\Longrightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} H_n^\alpha$.

[22] Далее будет доказано, что $\{H_n\}$ растёт со скоростью логарифма.

[23] Можно доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n = \frac{\pi^2}{6}$.

Что происходит при $\alpha \in (1,2)$? Вопрос.

Утверждение *(телескопический признак сходимости[24])*: Пусть $\{a_n\}\searrow$ и $\forall n \in \mathbb{N}$ выполнено $a_n > 0$[25]. Тогда последовательность

$$x_n = a_1 + \ldots + a_n$$

сходится тогда и только тогда, когда сходится последовательность

$$y_n = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \ldots + 2^n a_{2^n}.$$

Доказательство. В силу не отрицательности последовательности $\{a_n\}$ заключаем, что $\{x_n\}\nearrow$ и $\{y_n\}\nearrow$. Сложим неравенства, вытекающие из монотонности $\{a_n\}$:

$$a_2 \leqslant a_2 \leqslant a_1, \quad 2a_4 \leqslant a_3 + a_4 \leqslant 2a_2, \quad 4a_8 \leqslant a_5 + a_6 + a_7 + a_8 \leqslant 4a_4, \ldots,$$

$$2^n a_{2^{n+1}} \leqslant a_{2^n+1} + \ldots + a_{2^{n+1}} \leqslant 2^n a_{2^n},$$

получаем: $\frac{y_{n+1}-a_1}{2} \leqslant x_{2^{n+1}} - a_1 \leqslant y_n$. Откуда, и из критерия сходимости монотонных последовательностей, вытекает требуемое. □

Пример 5. Рассмотрим последовательность $H_n^\alpha = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha}$. По предыдущему утверждению, H_n^α сходится тогда и только тогда, когда сходится последовательность

$$1 + \frac{2}{2^\alpha} + \frac{4}{2^{2\alpha}} + \ldots + \frac{2^n}{2^{n\alpha}} = 1 + 2^{1-\alpha} + 2^{2(1-\alpha)} + \ldots + 2^{n(1-\alpha)}.$$

Это геометрическая прогрессия со знаменателем $2^{1-\alpha}$, она сходится тогда и только тогда, когда $2^{1-\alpha} < 1$, т.е. $1 - \alpha < 0 \Leftrightarrow \alpha > 1$.

Упражнение: Докажите, что последовательность

$$x_n = \frac{1}{2\,(\ln 2)^p} + \frac{1}{3\,(\ln 3)^p} + \ldots + \frac{1}{n\,(\ln n)^p}$$

сходится тогда и только тогда, когда $p > 1$.

[24] Или *теорема Коши о прореживании.*
[25] Т.е. $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \ldots > 0$.

– –

Утверждение: Предположим, что имеет место принцип Архимеда и критерий Коши. Тогда выполняется принцип существования точных граней.

Доказательство. Пусть $\mathbf{S}$ – непустое ограниченное множество. Построим убывающую фундаментальную последовательность (составленную из элементов, ограничивающих $\mathbf{S}$ сверху), сходящуюся к $\sup \mathbf{S}$.

Пусть b – одна из верхних границ множества $\mathbf{S}$ $\big($будем писать $b \in \mathcal{UB}(\mathbf{S})\big)$, и $a \in \mathbf{S}$. По принципу Архимеда найдутся такие натуральные M и $-m$, что $m < a \leqslant b < M$. Для $\forall p \in \mathbb{N}$ определим множество

$$\mathbf{S}_p = \Big\{k \in \mathbb{Z} \,\Big|\, \frac{k}{2^p} \in \mathcal{UB}(\mathbf{S})^{26)} \text{ и } \frac{k}{2^p} \leqslant M\Big\}.$$

Тогда $2^p m$ – ограничивает $\mathbf{S}_p$ снизу[27], а $k = 2^p M \in \mathbf{S}_p$[28]. Следовательно, $\forall p \in \mathbb{N}$ $\mathbf{S}_p$ – конечное множество целых чисел. Поэтому, $\exists \min \mathbf{S}_p$, который мы обозначим через k_p. Определим последовательность $a_p := \frac{k_p}{2^p}$.

Постараемся выяснить, чему равен $a_{p+1} = \frac{k_{p+1}}{2^{p+1}}$.

Получаем, $\frac{2k_p}{2^{p+1}} = \frac{k_p}{2^p} \in \mathcal{UB}(\mathbf{S})$, а $\frac{2k_p-2}{k^{p+1}} = \frac{k_p-1}{2^p} \notin \mathcal{UB}(\mathbf{S})$[29]. Поэтому,

$$\text{либо } k_{p+1} = 2k_p, \text{ либо } k_{p+1} = 2k_p - 1^{30)}.$$

$$\overbrace{\Longrightarrow}^{a_{p+1} = \frac{k_{p+1}}{2^{p+1}}} a_{p+1} = \frac{2k_p}{2^{p+1}} = \frac{k_p}{2^p} = a_p, \text{ либо } a_{p+1} = \frac{2k_p - 1}{2^{p+1}} = \frac{k_p}{2^p} - \frac{1}{2^{p+1}} = a_p - \frac{1}{2^{p+1}}.$$

$$\Longrightarrow a_p - a_{p+1} = 0, \text{ либо } a_p - a_{p+1} = \frac{1}{2^{p+1}}.$$

Теперь, если $q > p \geqslant 1$, то

$$0 \leqslant a_p - a_q = (a_p - a_{p+1}) + (a_{p+1} - a_{p+2}) + \ldots + (a_{q-1} - a_q) \leqslant \frac{1}{2^{p+1}} + \ldots + \frac{1}{2^{q+1}} <$$

$$< \frac{1}{2^{p+1}} + \ldots + \frac{1}{2^{q+1}} + \ldots = \frac{1}{2^{p+1}} \cdot \frac{1}{1 - 1/2} = \frac{1}{2^p}.$$

---

[26] Т.е. ограничивает $\mathbf{S}$ сверху.

[27] Т.к. $\frac{2^p m}{2^p} = m < a \in \mathbf{S}$.

[28] $2^p M + 1 \notin \mathbf{S}_p$, т.к. $\frac{2^p M+1}{2^p} = M + \frac{1}{2^p} > M$.

[29] Иначе, $k_p - 1 \in \mathbf{S}_p \Rightarrow k_p \neq \min \mathbf{S}_p$.

[30] $2k_p - 2$ уже не подходит (см. выше), $2k_p + 1 \neq \min \mathbf{S}_{p+1}$, т.к. $2k_p \in \mathbf{S}_{p+1}$

Откуда, и из принципа Архимеда вытекает фундаментальность последовательности $\{a_p\}$, а значит и её сходимость, т.е. $\exists \lim\limits_{p\to\infty} a_p$. Обозначим данный предел – L, и заметим, что $a_p \searrow L$.

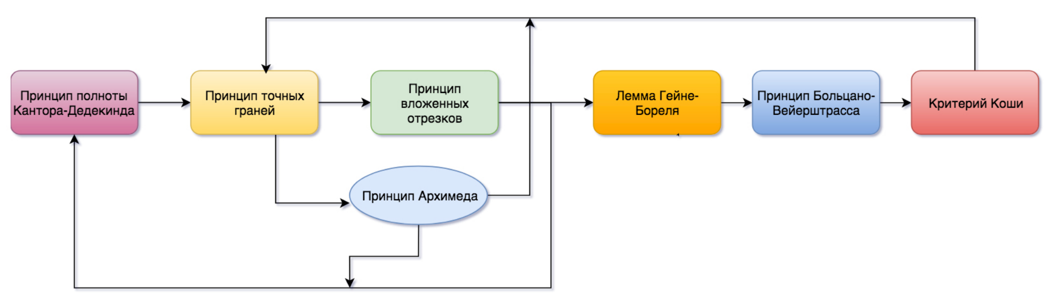
Докажем, что $L = \sup \mathbf{S}$. `От противного`. Пусть $L \notin \mathcal{UB}(\mathbf{S})$, тогда $\exists x \in \mathbf{S} : x > L$. Т.к. $x - L > 0$ и $a_p \searrow L$, то $\exists p \in \mathbb{N} : a_p - L < x - L \Rightarrow a_p < x \in \mathbf{S}$. `Противоречие` с тем, что $a_p = \frac{k_p}{2^p} \in \mathcal{UB}(\mathbf{S})$ (!)

Теперь предположим, что L `не наименьшая` верхняя грань, т.е. $\exists L' \in \mathcal{UB}(\mathbf{S})$, что $L' < L$. Выберем $p \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{2^p} < L - L' \Rightarrow a_p - \frac{1}{2^p} \overbrace{\geqslant}^{a_p \geqslant L} L - \frac{1}{2^p} > L',$$

но тогда $a_p - \frac{1}{2^p} = \frac{k_p - 1}{2^p} \in \mathcal{UB}(\mathbf{S})$, что входит в `противоречие` с тем, что $k_p = \min \mathbf{S}_p$. Следовательно, $L = \sup \mathbf{S}$. Существование $\inf \mathbf{S}$ доказывается аналогично. $\square$

Нами было доказано, что Критерий Коши (`в архимедовом поле`) эквивалентен каждому из шести основных принципов полноты, а значит может быть выбран в качестве первоначальной аксиомы.



Отметим, что принцип Архимеда не может быть выведен из аксиом $\mathbb{R}$, минуя принцип полноты, см. [Зорич I, с.66].

— —