

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Балтийский государственный технический университет "ВОЕНМЕХ" им. Д.Ф. Устинова

Е. Л. БАРТ

## **ГЕОМЕТРИЯ КРИВЫХ И ПОВЕРХНОСТЕЙ**

Учебно-практическое пособие

Санкт-Петербург  
2016

<b>Содержание</b>	<b>стр.</b>
<b>1. Системы координат</b>	3
<b>1.1. Декартовы прямоугольные координаты</b>	3
<b>1.2. Полярная система координат</b>	8
<b>1.3. Цилиндрическая и сферическая системы координат</b>	11
<b>1.4. Барицентрическая система координат</b>	13
<b>2. Исследование кривой и построение ее графика</b>	22
<b>2.1. Исследование функции и построение ее графика в декартовой системе координат</b>	22
<b>2.2. Построение кривых при параметрическом задании</b>	39
<b>2.3. Построение кривых в полярной системе координат</b>	55
<b>2.4. Построение графика функции или кривой, заданных неявно</b>	64
<b>3. Кривые второго порядка</b>	75
<b>3.1. Канонические уравнения кривых второго порядка в декартовой системе координат</b>	75
<b>3.2. Преобразование системы координат: параллельный перенос и поворот</b>	83
<b>3.3. Приведение общего уравнения кривой второго порядка к каноническому виду</b>	84
<b>4. Поверхности второго порядка</b>	89
<b>4.1. Классификация и канонические уравнения поверхностей второго порядка</b>	89
<b>4.2. Приведение уравнения второго порядка к каноническому виду. Исследование с помощью квадратичной формы</b>	97
<b>5. Аффинные преобразования</b>	108
<b>6. Кватернионы и вращения</b>	113
<b>6.1. Алгебра кватернионов</b>	113
<b>6.2. Кватернионы и вращения в трехмерном пространстве</b>	116
<b>7. Индивидуальные задания</b>	121
<i>Литература</i>	127

## 1. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Аналитическая геометрия есть ветвь математики, изучающая геометрические образы, средствами алгебры и математического анализа.. Для этого прежде всего создается некоторый аппарат, позволяющий переводить геометрические понятия на алгебраический язык. Таким аппаратом служит "метод координат", предложенный еще в 17 веке французскими математиками Пьером Ферма и Рене Декартом.(P. Fermat, 1601-1665; R. Descartes, 1596-1650). В основе метода лежит некоторое предварительное понятие *системы координат*. Введение системы координат было толчком к открытию дифференциального исчисления. Систематическое изучение пространственных линий и поверхностей на основе координатного метода было осуществлено впервые Леонардом Эйлером (Leonhard Euler, 1707-1783).

Систем координат существует очень много, в зависимости от задач, которые нужно решать. Перечислим наиболее употребительные из них.

### 1.1. Декартова прямоугольная система координат

#### 1.1.1. Прямоугольная система координат на плоскости

Пусть на плоскости проведены две взаимно перпендикулярные прямые  $Ox$  и  $Oy$ . Точка их пересечения  $O$  называется началом координат.

Пусть  $M$  – произвольная точка плоскости. Опустим из нее перпендикуляры  $MA$  и  $MB$  на прямые  $Ox$  и  $Oy$  (рис.1.1).

Декартовыми координатами  $x$  и  $y$  точки  $M = M(x, y)$  называются длины отрезков  $OA$  и  $OB$ , взятые с некоторыми знаками, в соответствии с правилами:

1) если  $A$  лежит на  $Ox$  правее точки  $O$ , то длине  $OA$  приписывается знак "+", если левее, то "-";

2) если  $B$  лежит на  $Oy$  выше точки  $O$ , то длине  $OB$  приписывается знак "+", а если ниже, то "-".

Сами прямые  $Ox$  и  $Oy$ , с учетом этих правил, называются осями координат:  $Ox$  – осью абсцисс (лат. *abscissa* – правильная), а  $Oy$  – осью ординат (лат. *ordinatus* – упорядоченная ).

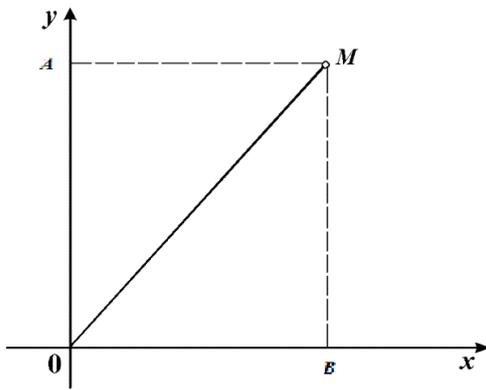


Рис.1.1

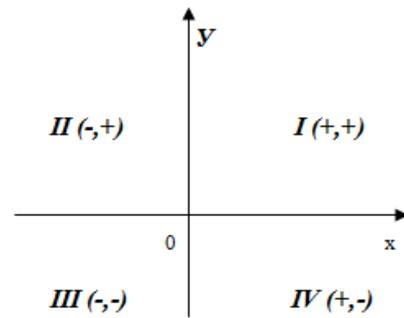


Рис.1.2

**Замечание.** Координатные оси разбивают плоскость на 4 "квадранта" (на рис. 1.2: I–IV).

**Теорема.** Любой точке плоскости  $M$  соответствует единственная упорядоченная пара чисел  $(x, y)$ . Обратно, любой такой паре чисел соответствует единственная точка плоскости.

Напомним основные формулы в декартовой системе координат на плоскости.

### 1. Расстояние между точками плоскости

Пусть  $A$  и  $B$  – две точки плоскости, координаты которых в декартовой системе координат:  $A(x_1 ; y_1)$  и  $B(x_2 ; y_2)$ , тогда

$$d = |\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Указанная формула, по существу, является теоремой Пифагора, записанной в координатной форме.

### 2. Деление отрезка в заданном отношении

Пусть точки  $M_1(x_1, y_1)$ ,  $M_2(x_2, y_2)$  и  $M(x, y)$  таковы, что  $\frac{M_1M}{MM_2} = \frac{q_1}{q_2}$ , тогда

$$\begin{cases} x = \frac{x_1 q_2 + x_2 q_1}{q_1 + q_2} \\ y = \frac{y_1 q_2 + y_2 q_1}{q_1 + q_2} \end{cases}$$

В частности, если

$$а) \frac{M_1M}{MM_2} = \lambda = \frac{\lambda}{1} = \frac{q_1}{q_2}, \text{ то } \begin{cases} x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \end{cases}$$

$$б) M(x, y) - \text{середина отрезка } M_1M_2, \lambda = 1 \text{ и } \begin{cases} x = \frac{x_1 + x_2}{2} \\ y = \frac{y_1 + y_2}{2} \end{cases}.$$

### 3. Площадь треугольника

Пусть точки  $A(x_1; y_1)$ ,  $B(x_2; y_2)$ ,  $C(x_3; y_3)$  - вершины треугольника, тогда его площадь выражается формулой:

$$S = \pm \begin{vmatrix} x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 \end{vmatrix}.$$

Знак "+", если кратчайший поворот от вектора  $\overrightarrow{AB}$  к вектору  $\overrightarrow{AC}$  положительный, то есть против часовой стрелки, и знак "-", если такой поворот отрицательный. В правой части стоит определитель второго порядка. Площадь треугольника всегда положительна.

**Замечание.** Если определитель равен 0, то это означает, что точки лежат на одной прямой. Таким образом, равенство нулю определителя задает условие, при котором три точки лежат на одной прямой.

#### 1.1.2. Прямоугольная система координат в пространстве

Декартова (прямоугольная) система координат в пространстве определяется заданием линейной единицы для измерения длин и трех пересекающихся в одной точке взаимно перпендикулярных осей, занумерованных в каком-либо порядке.

Точка пересечения осей называется началом координат, а сами оси — координатными осями. Первая координатная ось называется осью абсцисс, вторая — осью ординат, третья — осью аппликат («аппликата» от лат. *applicata*, что означает «приложенная»).

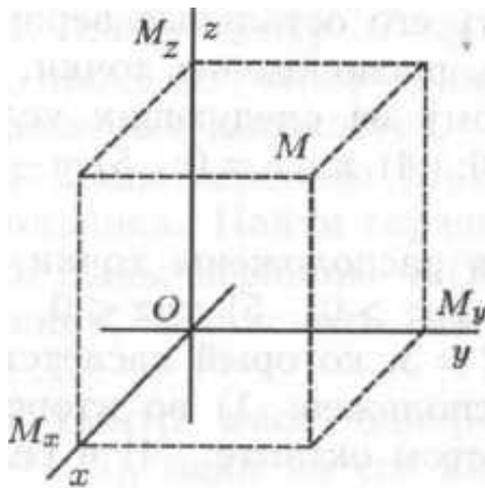


Рис.1.3

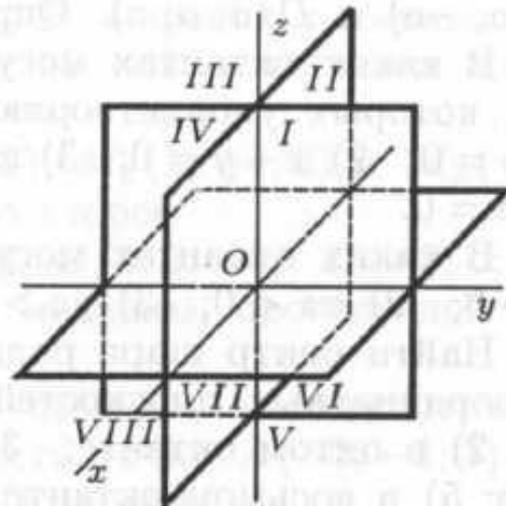


Рис.1.4

Начало координат обозначается буквой  $O$ , координатные оси — соответственно символами  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ .

Пусть  $M$  — произвольная точка пространства,  $M_x$ ,  $M_y$  и  $M_z$  — ее проекции на координатные оси (рис. 1.3).

Координатами точки  $M$  в заданной системе называются числа:

$x = OM_x$ ,  $y = OM_y$ ,  $z = OM_z$ , где  $OM_x$  — величина отрезка  $OM_x$  оси абсцисс,  $OM_y$  — величина отрезка  $OM_y$  оси ординат,  $OM_z$  — величина отрезка  $OM_z$  оси аппликат. Число  $x$  называется абсциссой,  $y$  — ординатой,  $z$  — аппликатой точки  $M$ . Символ  $M(x; y, z)$  обозначает, что точка  $M$  имеет координаты  $x, y, z$ .

**Теорема.** Любой точке пространства соответствует единственная тройка чисел  $(x; y, z)$ , и обратно всякая тройка чисел  $(x; y, z)$  задает единственную точку в пространстве.

Плоскость  $Oyz$  разделяет все пространство на два полупространства; то из них, которое расположено в положительном направлении оси  $Ox$ , называется ближним, другое — дальним. Плоскость  $Oxz$  также разделяет пространство на два полупространства; то из них, которое расположено в положительном направлении оси  $Oy$ , называется правым, другое — левым. Наконец, и плоскость  $Oxy$  разделяет пространство на два полупространства; то из них, которое расположено в положительном направлении оси  $Oz$ , называется верхним, другое — нижним.

Три плоскости  $Oxy$ ,  $Oxz$  и  $Oyz$  вместе разделяют пространство на восемь частей; их называют координатными октантами и нумеруют так, как показано на рис.1.4.

Напомним основные формулы в декартовой системе координат в пространстве.

### 1. Расстояние между двумя точками

Пусть  $A(x_1, y_1, z_1)$  и  $B(x_2, y_2, z_2)$  точки в пространстве, тогда расстояние между ними определяется формулой:

$$d = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

### 2. Деление отрезка в данном отношении

Пусть точки  $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ,  $M_2(x_2, y_2, z_2)$  и  $M(x, y, z)$ , лежащие на одной прямой, таковы, что  $\frac{M_1M}{MM_2} = \frac{q_1}{q_2}$ , тогда

$$\begin{cases} x = \frac{x_1q_2 + x_2q_1}{q_1 + q_2} \\ y = \frac{y_1q_2 + y_2q_1}{q_1 + q_2} \\ z = \frac{z_1q_2 + z_2q_1}{q_1 + q_2} \end{cases}.$$

Аналогично, если

$$\text{а) } \frac{M_1M}{MM_2} = \frac{q_1}{q_2} = \lambda, \text{ то } \begin{cases} x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \\ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda} \end{cases}.$$

б) точка  $M(x, y, z)$  является серединой отрезка  $M_1M_2$ , т.е.  $\lambda = 1$ , то

$$\begin{cases} x = \frac{x_1 + x_2}{2} \\ y = \frac{y_1 + y_2}{2} \\ z = \frac{z_1 + z_2}{2} \end{cases}.$$

## 1.2. Полярная система координат

**Определение.** Полярная система координат на ориентированной плоскости задается выбором точки  $O$ , называемой началом или полюсом, и луча, выходящего из точки  $O$ , называемого полярной осью.

Полярные координаты точки  $M$  – это упорядоченная пара  $(r, \varphi)$ , где  $r$  – полярный радиус, равный расстоянию от  $M$  до полюса:  $r = |OM|$  и  $\varphi$  – полярный угол, равный углу между полярной осью и лучом  $OM$ , причем угол отсчитывается в соответствии с ориентацией плоскости (таким образом,  $\varphi$  является вещественным числом, определенным с точностью до  $2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ) (рис.1.5).

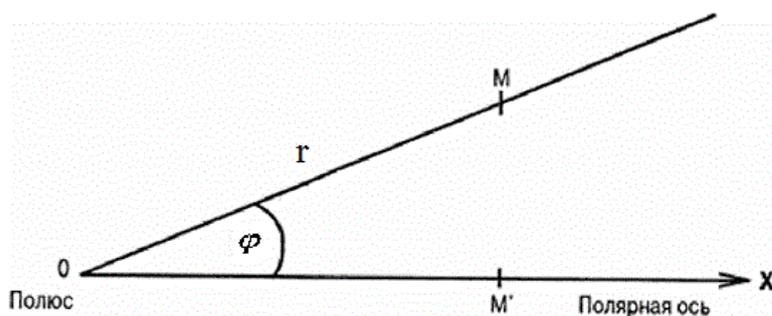


Рис.1.5

### Замечания.

1. Для точки  $O$  полярный угол не определяется, полярный радиус равен нулю.
2. Полярный радиус величина всегда неотрицательная (в математической литературе такая система координат называется *строго полярной*, в отличие от *обобщенной полярной системы*, в которой полярный радиус может принимать как положительные, так и отрицательные значения).
3. Координатными линиями полярной системы координат являются концентрические окружности с центром в точке  $O$  ( $r = const.$ ) и лучи, выходящие из точки  $O$  ( $\varphi = const.$ ).

Свяжем полярную систему координат с декартовой: полюс совместим с началом декартовой системы координат, а полярную ось направим по оси абсцисс, тогда из прямоугольного треугольника (рис.1.6) имеем  $\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$ .

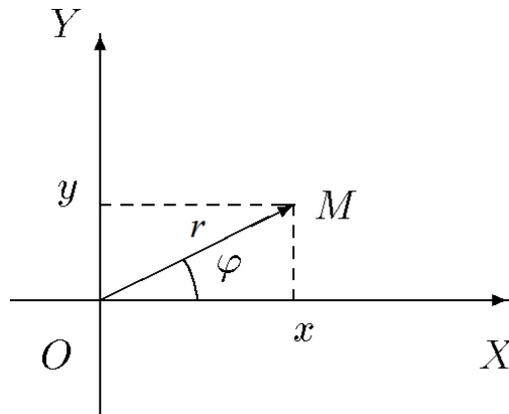


Рис.1.6

$$\text{Обратно } \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}, \text{ или } \varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right), x > 0 \\ \pi + \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right), x < 0 \\ \frac{\pi}{2}, x = 0, y > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, x = 0, y < 0 \end{cases}$$

Расстояние  $d$  между точками плоскости  $M_1(r_1, \varphi_1)$  и  $M_2(r_2, \varphi_2)$  по теореме косинусов вычисляется по формуле:

$$d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}.$$

### Примеры.

1. Написать уравнения следующих кривых в полярной системе координат:

a)  $x^2 + y^2 = a^2$ .

В декартовой системе координат это уравнение окружности радиуса  $a$  с центром в начале координат, ее уравнение в полярной системе имеет вид  $r = a$

b)  $x^2 + y^2 = ax$ .

В декартовой системе координат это уравнение окружности «смещенной по оси  $Ox$ », радиуса  $\frac{a}{2}$  с центром  $\left(\frac{a}{2}; 0\right)$ , ее уравнение в полярной системе координат имеет вид  $r = a \cos \varphi$ . Заметим, что, если  $a > 0$ , то окружность смещена вправо по оси, а если  $a < 0$ , то – влево.

$$c) \quad x^2 + y^2 = by.$$

В декартовой системе координат это уравнение окружности «смещенной по оси  $Oy$ », радиуса  $\frac{b}{2}$  с центром  $\left(0; \frac{b}{2}\right)$ , ее уравнение в полярной системе координат имеет вид  $r = b \sin \varphi$ . Заметим, что, если  $b > 0$ , то окружность смещена вверх по оси, а если  $b < 0$ , то – вниз.

$$d) \quad (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2).$$

Данная кривая называется *лемнискатой Бернулли*, ее уравнение в полярной системе координат имеет вид  $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ , а ее график приведен в разделе 2.4 (пример 3).

2. Нарисовать кривые, заданные уравнениями:

$$a) \quad r = \frac{3}{\cos \varphi}. \text{ Умножив обе части этого уравнения на } \cos \varphi,$$

получим, что  $r \cos \varphi = 3$ , т.е.  $x = 3$ . В декартовой системе координат это уравнение прямой, перпендикулярной оси  $Ox$ .

$$b) \quad r = k\varphi \text{ (спираль Архимеда)}$$

**Замечание.**

**Определение.** Спиралью Архимеда называется линия, описываемая точкой, равномернодвигающейся по лучу, который сам равномерно вращается вокруг своего начала. Пусть в начальный момент времени  $t \quad r = \varphi = 0$ .

Для  $t > 0$  имеем  $r = Vt$  и  $\varphi = wt$ . Разделим первое уравнение на второе:

$$\frac{r}{\varphi} = \frac{V}{w} = k \Rightarrow r = k\varphi.$$

График этой кривой изображен на рис.1.7.

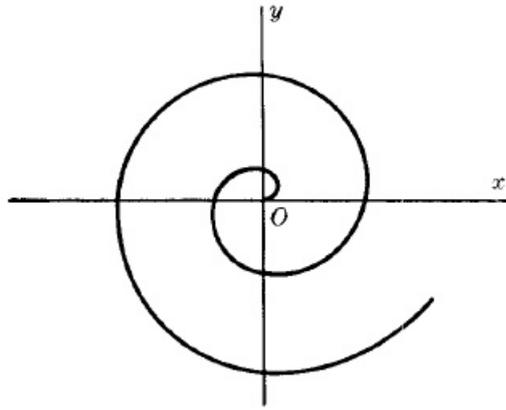


Рис.1.7

### 1.3. Цилиндрическая и сферическая системы координат в трехмерном пространстве

В пространстве имеются два естественных обобщения полярной системы координат.

Выберем в пространстве:

- 1) ориентированную плоскость  $\pi$  (*экваториальную плоскость*);
- 2) точку  $O$  на ней (*полюс*);
- 3) луч  $Ox$  на плоскости (*полярную ось*);
- 4) перпендикулярную к  $\pi$  ось  $Oz$  (*зенитную ось*).

Для произвольной точки  $M$  пространства обозначим через  $M'$  ее проекцию на  $\pi$  (основание перпендикуляра, опущенного из  $M$  на плоскость  $\pi$ ), а через  $M''$  – ее проекцию на  $Oz$ .

*Цилиндрические координаты*  $(r, \varphi, z)$  точки  $M$  определяются следующим образом:  $r, \varphi$  – полярные координаты точки  $M'$  на плоскости  $\pi$ , а  $z$  – координата  $M''$  на оси  $Oz$  (рис.1.8). Для точек зенитной оси координата  $\varphi$  не определена.

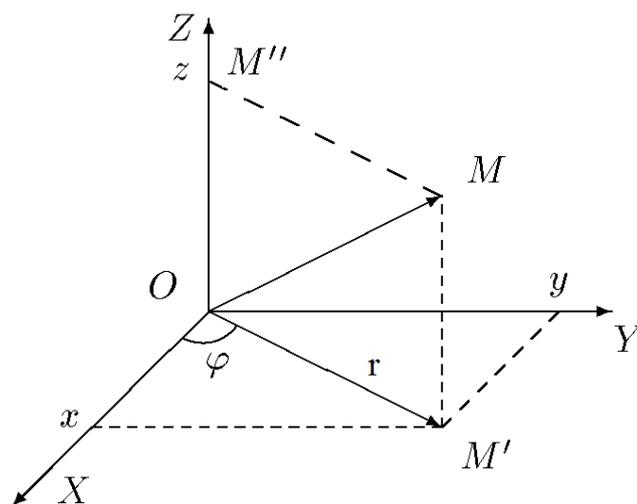


Рис.1.8

Сферические координаты  $(r, \varphi, \theta)$  точки  $M$  определяются следующим образом:  $r = |OM|$  (радиус),  $\varphi$  – угол от  $Ox$  к  $OM'$  (долгота), угол  $\theta$  – угол от  $OM'$  к  $OM$  (со знаком соответствия направлению  $Oz$ ) (широта),  $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$  (рис.1.9). Для точек зенитной оси  $\theta = \pm\pi/2$ , а координата  $\varphi$  не определена. Для точки  $O$   $r = 0$ , а  $\varphi$  и  $\theta$  не определены.

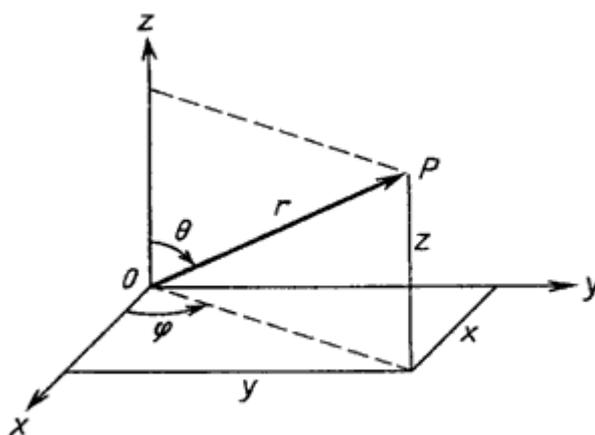


Рис.1.9

Свяжем декартову систему координат в пространстве с цилиндрической: начало декартовой системы координат совместим с полюсом, ось абсцисс направим по полярной оси, ось ординат пусть лежит в плоскости  $\pi$ , причем ориентация этих осей положительна для плоскости  $\pi$ , а ось аппликат имеет

направление зенитной оси. Тогда декартовы и цилиндрические координаты связаны формулами:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = z, \end{cases} \begin{cases} z = z, \\ r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \end{cases}$$

(конечно, можно получить более конкретные выражения, как для полярных координат).

Декартовы и сферические координаты связаны формулами:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \cos \varphi, \\ y = r \cos \theta \sin \varphi, \\ z = r \sin \theta, \end{cases} \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \theta = \arcsin \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \\ \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \end{cases}$$

(поскольку  $r \cos \theta = \sqrt{x^2 + y^2}$ ).

## 1.4. Барицентрическая система координат

### 1.4.1. Барицентрические координаты на плоскости

История метода барицентрических координат.

Приставка "бари" означает тяжелый (от греч. βαριό); поэтому "барицентр" – это центр тяжести, центр масс.

Великий древнегреческий мыслитель Архимед (III в. до н. э.), родоначальник метода, обнаружил, возможность доказывать новые математические факты с помощью свойств *центра масс*. В частности, этим способом им была установлена теорема о том, что три медианы треугольника пересекаются в одной точке. Соображения Архимеда были позднее использованы и развиты многими геометрами (Папп, Чева, Гульден, Люилье и др.). В XIX замечательный немецкий математик Август Фердинанд Мёбиус (1790-1868) подметил, что барицентрические решения геометрических задач приводят к введению очень интересной системы координат, не похожей ни на

декартову, ни на полярную систему, но очень богатую геометрическими приложениями.

Если в точке  $A$  сосредоточена масса  $m$ , то будем эту материальную точку обозначать через  $mA$ , т.е. в виде "произведения" (рис.1.10).

**Определение.**

Центром масс (или барицентром) системы материальных точек  $m_1A_1, m_2A_2, \dots, m_nA_n$  называется точка  $Z$ , для которой имеет место равенство:

$$m_1\vec{ZA}_1 + m_2\vec{ZA}_2 + \dots + m_n\vec{ZA}_n = 0$$

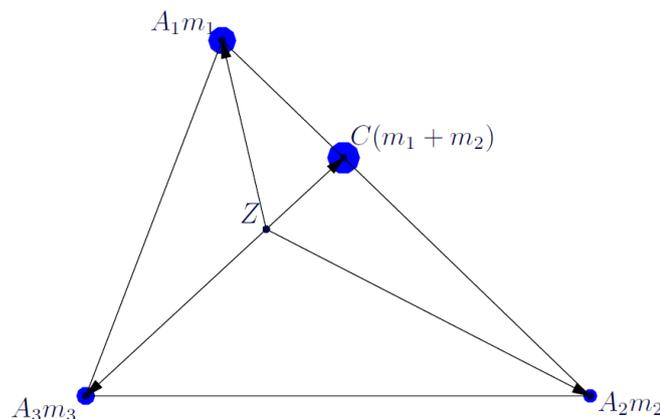


Рис.1.10

**Свойства:**

1. Всякая система, состоящая из конечного числа материальных точек, имеет центр масс и притом единственный.
2. Центр масс двух материальных точек расположен на отрезке, соединяющем эти точки, его положение определяется архимедовым правилом рычага, т.е. делит этот отрезок в отношении  $\frac{m_2}{m_1}$ .
3. Если в системе, состоящей из конечного числа материальных точек, отметить несколько материальных точек и массы всех отмеченных точек перенести в их центр масс, то от этого положение центра масс всей системы не изменится.

Координаты центра тяжести системы двух материальных точек  $A_1(x_1, y_1, z_1)$  и  $A_2(x_2, y_2, z_2)$  равны соответственно:

$$\begin{cases} x = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}, \\ y = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}, \\ z = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2}{m_1 + m_2}. \end{cases}$$

Легко доказать методом математической индукции, что

координаты центра тяжести системы из  $n$  материальных точек  $A_i(x_i, y_i, z_i)$  с массами  $m_i$  соответственно ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) находятся по формулам:

$$\begin{cases} x = \frac{m_1 x_1 + \dots + m_n x_n}{m_1 + \dots + m_n}, \\ y = \frac{m_1 y_1 + \dots + m_n y_n}{m_1 + \dots + m_n}, \\ z = \frac{m_1 z_1 + \dots + m_n z_n}{m_1 + \dots + m_n}. \end{cases}$$

Эти формулы используются для введения барицентрической системы координат.

**Определение.**

Рассмотрим какие-либо три различные точки  $A_1(x_1, y_1)$ ,  $A_2(x_2, y_2)$  и  $A_3(x_3, y_3)$ , не лежащие на одной прямой, и произвольную точку  $M(x, y)$ . Выясним, существуют ли такие три числа  $m_1, m_2, m_3$ , удовлетворяющие условию

$$m_1 + m_2 + m_3 = 1,$$

что точка  $M(x, y)$  будет центром тяжести точек  $A_1, A_2, A_3$  с массами  $m_1, m_2, m_3$  соответственно. Данная задача сводится к вопросу об однозначной разрешимости системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} m_1 + m_2 + m_3 = 1 \\ m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 = x \\ m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 = y \end{cases}$$

Рассмотрим определитель данной системы линейных уравнений

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) \neq 0.$$

Действительно, определитель отличен от нуля, иначе получили бы пропорцию

$$\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1}, \text{ что означало бы, что точки лежат на одной прямой.}$$

Таким образом, система однозначно разрешима относительно  $m_1, m_2, m_3$ .

Следовательно, положение любой точки  $M$  на плоскости однозначно определяется относительно базисных точек  $A_1, A_2, A_3$  этой плоскости посредством *барицентрических координат*  $m_1, m_2, m_3$ .

Например, так как точка пересечения медиан  $M$  треугольника  $ABC$  является центром масс трех материальных точек  $1A, 1B, 1C$ , а значит и центром масс трех материальных точек  $\frac{1}{3}A, \frac{1}{3}B, \frac{1}{3}C$ , то числа  $m_1 = \frac{1}{3}, m_2 = \frac{1}{3}, m_3 = \frac{1}{3}$  являются барицентрическими координатами (Б-координатами) точки  $M$ .

**Пример.** Вычислить Б-координаты точки  $H$  пересечения высот остроугольного треугольника  $ABC$ , принимая этот треугольник в качестве базисного, если величины углов  $A, B, C$  равны соответственно  $\alpha, \beta, \gamma$ .

**Решение.**

Обозначим высоты треугольника за  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$ . Подберем для вершин  $B$  и  $C$  такие массы  $m_2$  и  $m_3$ , чтобы точка  $A_1$  оказалась центром масс двух материальных точек  $m_2B$  и  $m_3C$ . По правилу рычага имеем

$$m_2|BA_1| = m_3|A_1C|, \text{ т.е. } m_2c \cos \beta = m_3b \cos \gamma.$$

Аналогично, чтобы точка  $B_1$  оказалась центром масс материальных точек  $m_3C$  и  $m_1A$ , должно выполняться равенство

$$m_3a \cos \gamma = m_1c \cos \alpha.$$

Из полученных равенств, следует (если учесть теорему синусов), что

$$\frac{m_1}{\sin \alpha \cos \beta \cos \gamma} = \frac{m_2}{\cos \alpha \sin \beta \cos \gamma} = \frac{m_3}{\cos \alpha \cos \beta \sin \gamma}, \text{ т.е.}$$

$$\frac{m_1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{m_2}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{m_3}{\operatorname{tg} \gamma}.$$

Отсюда вытекает, что точка  $H$  имеет Б-координаты  $k \operatorname{tg} \alpha$ ,  $k \operatorname{tg} \beta$ ,  $k \operatorname{tg} \gamma$ , где

$$k = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma}.$$

Пусть точка  $M$  имеет относительно базисного треугольника  $A_1A_2A_3$  барицентрические координаты  $m_1, m_2, m_3$ , тогда справедливы следующие утверждения:

1) точка  $M$  в том и только в том случае принадлежит прямой  $A_1A_2$ , если  $m_3 = 0$ ;

2) точка  $M$  в том и только в том случае принадлежит отрезку  $[A_1A_2]$ , если  $m_1 > 0$ ,  $m_2 > 0$ ,  $m_3 = 0$ ;

3) точка  $M$  в том и только в том случае принадлежит контуру треугольника  $A_1A_2A_3$ , если  $m_1 \geq 0$ ,  $m_2 \geq 0$ ,  $m_3 \geq 0$ ,  $m_1m_2m_3 = 0$ ;

4) точка  $M$  в том и только в том случае принадлежит лучу, который противоположен лучу  $A_1A_2$ , если  $m_2 < 0$ ,  $m_3 = 0$ ;

5) точка  $M$  в том и только в том случае принадлежит открытой полуплоскости, которая ограничена прямой  $A_1A_2$  и не содержит треугольник  $A_1A_2A_3$ , если  $m_3 < 0$ ;

6) точка  $M$  в том и только в том случае принадлежит углу  $A_1A_2A_3$ , если  $m_1 \geq 0$ ,  $m_3 \geq 0$ ;

7) точка  $M$  в том и только в том случае лежит внутри треугольника  $A_1A_2A_3$ , если  $m_1 > 0$ ,  $m_2 > 0$ ,  $m_3 > 0$ ;

8) точка  $M$  в том и только в том случае принадлежит углу, который симметричен углу  $A_1A_2A_3$  относительно точки  $A_2$ , если  $m_1 \leq 0$ ,  $m_3 \leq 0$ ;

Барицентрические координаты были введены, исходя из соображений, связанных с центрами масс. Замечательно, что имеется и другой, чисто геометрический подход к барицентрическим координатам, позволяющий выразить эти координаты через площади треугольников. Ограничимся формулировкой следующей теоремы, а желающих более подробно

ознакомиться с темой отсылаем к книге Балка М.Б. и Болтянского И.Г. "Геометрия масс"

**Теорема.**

Пусть точка  $M$  лежит внутри базисного треугольника  $A_1A_2A_3$  и пусть  $S, S_1, S_2, S_3$  – площади треугольников  $A_1A_2A_3, MA_1A_2, MA_1A_3, MA_3A_2$ .

Тогда барицентрические координаты точки  $P$  равны:

$$m_1 = \frac{S_1}{S}, m_2 = \frac{S_2}{S}, m_3 = \frac{S_3}{S}.$$

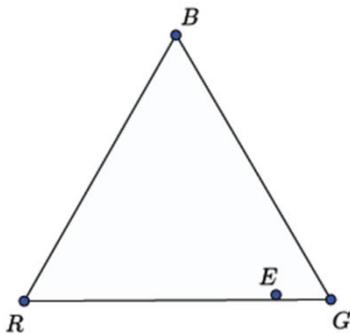
**Пример.** Найти Б-координаты центра  $O$  окружности, вписанной в базисный треугольник  $ABC$  со сторонами  $a, b, c$ .

**Решение.** Обозначим через  $r$  радиус вписанной окружности. Тогда  $S_1 = \frac{1}{2}ar, S_2 = \frac{1}{2}br, S_3 = \frac{1}{2}cr, S = \frac{1}{2}(a+b+c)r$ . Поэтому центр  $O$  имеет Б-координаты  $\frac{a}{a+b+c}, \frac{b}{a+b+c}, \frac{c}{a+b+c}$ .

Применяют барицентрические координаты в различных химических, топологических задачах (в частности, это первые однородные координаты, т.е. такие, что определяемый ими объект не меняется при умножении всех координат на одно и то же ненулевое число). Интересно их применение в колориметрии. Любой цвет может быть представлен смешением трех цветов. В 1931 году Международная Осветительная Комиссия (МОК) приняла в качестве основных три цвета: красный  $R$ , зеленый  $G$  и синий  $B$  с длинами волн соответственно  $\lambda = 700$  нм,  $\lambda = 546.1$  нм и  $\lambda = 435.8$  нм.

При смешении цветов  $R, G$  и  $B$  можно, в частности, получить и белый цвет. Приняты различные стандарты "белизны". Если смешать с равными интенсивностями (то есть освещенностями, скажем, по 1 люмену) красный  $R$ , зеленый  $G$  и синий  $B$ , то получится цвет синего оттенка. В качестве стандартного белого цвета (обозначается буквой  $E$ ) принят цвет, который получается от смешения цвета  $R$  с освещенностью в 1 люмен с 4.5907 люмена цвета  $G$  и с 0.0601 люмена цвета  $B$ . Мы можем теперь наглядно изобразить

цвета, получаемые от смешения трех цветов  $R, G$  и  $B$ . Выберем на плоскости какой-нибудь треугольник и вершины его обозначим буквами  $R, G$  и  $B$  (в соответствии с основными цветами). Если некоторый цвет возник при смешении  $r$  "единиц" цвета  $R$ ,  $g$  "единиц" цвета  $G$  и  $b$  "единиц" цвета  $B$ , причем  $r + g + b = 1$ , то можно этому цвету сопоставить точку  $F$ , имеющую барицентрические координаты  $(r, g, b)$ . При этом надо условиться, что считать "единицей" того или иного цвета. В соответствии со сказанным выше за "единицу" принимаются такие интенсивности цветов  $R, G$  и  $B$ , которые соответствуют освещенностям в 1, 4.6 и 0.006 люмена соответственно. Эти координаты называют в колориметрии *координатами цветности* или *трехцветными координатами*. В частности, стандартный белый цвет  $E$  имеет барицентрические координаты (координаты цветности)  $(1/3; 1/3; 1/3)$ .



**Задачи для самостоятельного решения:**

1. Вычислить барицентрические координаты точки  $O$  – центра описанной около треугольника  $A_1A_2A_3$  окружности, если его углы равны  $\alpha, \beta, \gamma$ .
2. Какие барицентрические координаты имеют следующие точки: вершина  $A_3$  базисного треугольника  $A_1A_2A_3$ ; середина  $A'_3$  его стороны  $A_1A_2$ ?
3. Какие барицентрические координаты относительно треугольника  $ABC$  имеет вершина  $D$  параллелограмма  $ABCD$ ?
4. В прямоугольном треугольнике  $ABC$  известны длины  $a, b$  катетов. Вычислить барицентрические координаты (относительно треугольника  $ABC$ ) основания высоты, опущенной из вершины прямого угла  $C$  на гипотенузу  $AB$ .

5. На сторонах треугольника  $A_1A_2A_3$  выбраны такие точки  $B_1, B_2, B_3$ , что  $|A_2B_1| = \frac{1}{4}|A_2A_3|$ ,  $|A_3B_2| = \frac{1}{4}|A_3A_1|$ ,  $|A_1B_3| = \frac{1}{4}|A_1A_2|$ . Зная площадь  $S$  треугольника  $A_1A_2A_3$ , вычислить площадь  $\sigma$  треугольника  $PQR$ , ограниченного прямыми  $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3$ .

6. В равнобедренном треугольнике  $ABC$  ( $AB=BC$ ) биссектриса  $AE$  пересекает высоту  $BD$  в точке  $F$ , причем  $|FB|=3|FD|$ . Какие барицентрические координаты относительно треугольника  $ABC$  имеет точка  $H$  пересечения высот?

### 1.4.2. Барицентрические координаты в пространстве

Выберем в пространстве некоторый тетраэдр  $A_1A_2A_3A_4$ , который в дальнейшем будем называть *базисным* (или *координатным*). При любой загрузке четырех вершин тетраэдра действительными массами  $m_1, m_2, m_3, m_4$  с ненулевой суммой однозначно определена в пространстве точка, являющаяся центром масс этих материальных точек, и наоборот, для любой точки  $M$  возможно подобрать для вершин тетраэдра такие действительные (не обязательно положительные) массы  $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$  с суммой 1, чтобы центром этих масс оказалась точка  $M$ . Это доказывается так же, как и на плоскости. Такие числа  $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$  и будем называть *барицентрическими координатами* (короче: Б-координатами) точки  $M$ .

Подобно тому как барицентрические координаты относительно треугольника могут быть выражены через ориентированные площади некоторых треугольников, так и в пространстве барицентрические координаты точки  $M$  относительно тетраэдра  $A_1A_2A_3A_4$  могут быть выражены через некоторые объемы. Пусть сначала точка  $M$  лежит внутри базисного тетраэдра  $A_1A_2A_3A_4$ . Обозначим через  $V$  объем этого тетраэдра, а через  $V_1, V_2, V_3, V_4$  — объемы тетраэдров  $MA_2A_3A_4, A_1MA_3A_4, A_1A_2MA_4, A_1A_2A_3M$ . Тогда можно доказать, что барицентрическими координатами точки  $M$  будут числа

$$\mu_1 = \frac{V_1}{V}, \mu_2 = \frac{V_2}{V}, \mu_3 = \frac{V_3}{V}, \mu_4 = \frac{V_4}{V}. \quad (*)$$

Если же  $M$  – произвольная точка пространства (не обязательно лежащая внутри базисного тетраэдра  $A_1A_2A_3A_4$ ), то эти формулы останутся справедливыми, если под  $V, V_1, V_2, V_3, V_4$  понимать *ориентированные* объемы соответствующих тетраэдров, т.е. их объемы, взятые с некоторыми знаками. Это в данном случае можно пояснить так. Ориентированный объем  $V$  базисного тетраэдра условимся считать положительным; ориентированный объем  $V_1$  тетраэдра  $MA_2A_3A_4$  будем считать положительным, если тетраэдр  $MA_2A_3A_4$  расположен по ту же сторону плоскости  $A_2A_3A_4$ , что и базисный тетраэдр  $A_1A_2A_3A_4$ , и отрицательным, если тетраэдр  $MA_2A_3A_4$  и базисный тетраэдр расположены по разные стороны от плоскости  $A_2A_3A_4$ . Аналогично определяются ориентированные объемы  $V_2, V_3, V_4$  тетраэдров  $A_1MA_3A_4, A_1A_2MA_4, A_1A_2A_3M$ .

**Пример.** Найти барицентрические координаты центра  $O$  шара, вписанного в базисный тетраэдр  $A_1A_2A_3A_4$ .

**Решение.**

Пусть  $r$  – радиус вписанного шара;  $s_1, s_2, s_3, s_4$  – площади граней, противоположных вершинам  $A_1, A_2, A_3, A_4$ . Точка  $O$  лежит очевидно внутри базисного тетраэдра. Объемы  $V, V_1, V_2, V_3, V_4$  тетраэдров  $A_1A_2A_3A_4, OA_2A_3A_4, A_1OA_3A_4, A_1A_2OA_4, A_1A_2A_3O$  имеют следующие значения:

$$V_1 = \frac{1}{3}s_2r, V_2 = \frac{1}{3}s_2r, V_3 = \frac{1}{3}s_3r, V_4 = \frac{1}{3}s_4r, V = \frac{1}{3}sr$$

( $s$  – полная поверхность тетраэдра). Тогда барицентрические координаты точки  $O$  находим по формулам (\*)

$$O = \left( \frac{s_1}{s}, \frac{s_2}{s}, \frac{s_3}{s}, \frac{s_4}{s} \right).$$

## 2. ИССЛЕДОВАНИЕ КРИВОЙ И ПОСТРОЕНИЕ ЕЕ ГРАФИКА

### 2.1. Исследование функции и построение ее графика в декартовой системе координат

Напомним общий план исследования функции с помощью пределов и производных и обсудим его, по возможности, более подробно с привлечением полезных соображений из элементарной математики.

Для исследования функции  $y = f(x)$  и построения эскиза ее графика целесообразен следующий порядок действий:

#### 1. Найти области определения функции (ООФ или $D(y)$ ) и значений функции (ОДЗ или $E(y)$ ).

Областью определения функции одной действительной переменной  $y = f(x)$  может быть все множество действительных чисел  $\mathbf{R}$  (т.е. вся числовая ось  $Ox$ ) или какое-то его подмножество (интервал, полуинтервал, промежуток), а может быть и множество отдельных точек. При аналитическом способе задания функции ограничения в области определения могут возникнуть, если выражение в правой части содержит дробь, знаменатель которой обращается в нуль при определенных значениях  $x$ , корни четных степеней, логарифмы, арксинусы, арккосинусы и т.п.

Область значений функции может состоять из отдельных точек, одной точки, одного или нескольких интервалов, всего множества  $\mathbf{R}$  и т.д. Очевидно, что для ограниченной функции область ее значений не может быть неограниченным множеством, а для неограниченной функции – ограниченным. Например, для неограниченной функции  $y = x^6$ ,  $E(y) = [0; \infty)$ , а для ограниченной функции  $y = \arctg x$ ,  $E(y) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ . Иногда для отыскания области значений функции удобно вычислить  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ .

#### 2. Найти точки пересечения графика функции с осями координат.

С  $Ox$  ( $y = 0$ ) – корни функции. Таких точек может быть сколько угодно (например,  $y = \sin x$ ).

С  $Oy$  ( $x = 0$ ). Таких точек может быть не более одной.

### 3. Исследовать функцию на четность.

**Определение.** Функция называется *четной*, если  $f(-x) = f(x)$ , и *нечетной*, если  $f(-x) = -f(x)$ . Функция может быть ни четной, ни нечетной. Такая функция называется функцией *общего вида*, или *общего положения*.

Графиком четной функции является кривая, симметричная относительно оси  $Oy$ .

Графиком нечетной функции является кривая, симметричная относительно начала координат. Заметим, что, если функция обладает свойством четности (т.е. является либо четной, либо нечетной), то ее область определения обязательно симметрична относительно начала координат. Обратное утверждение неверно. Если же область определения функции несимметрична относительно начала координат, то функция обязательно общего вида.

Установление симметрии графика, если таковая имеется, помогает при дальнейшем исследовании функции, например, при нахождении точек экстремумов и перегибов.

### 4. Исследовать функцию на периодичность.

**Определение.** Функция  $y = f(x)$  называется *периодической* или *периодичной*, если для каждого  $x$  из  $D(y)$  существует положительное число  $T$ :  $f(x+T) = f(x)$ . Наименьшее такое число  $T$  называется *основным периодом* функции.

Заметим, что, если функция  $f(x)$  периодична с периодом  $T$ , то справедливы следующие утверждения:

1)  $f(x+T) = f(x) = f(x-T)$ ;

2)  $f(x+nT) = f(x), \quad \forall n \in Z$ ;

3)  $D(y)$  является неограниченной как в положительном, так и в отрицательном направлении оси  $Ox$ ;

4)  $f'(x)$  тоже является периодической функцией с периодом  $T$ , однако, обратное не всегда верно;

5) функция  $g(x) = a(f(kx+b))$ , где  $a$ ,  $b$  и  $k$  константы и  $k \neq 0$ , является периодической с периодом  $\frac{T}{k}$ ;

6) пусть функции  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  – периодичны, их периоды равны  $T_1$  и  $T_2$  соответственно, тогда их сумма будет периодической функцией, если число  $\frac{T_1}{T_2}$  является рациональным, и ее период тогда равен  $\text{НОК}(T_1, T_2)$ . Если же соотношение периодов иррационально, то суммарная функция не периодична.

**Пример.** Доказать, что функция  $f(x) = \cos^2 x$  является периодической и найти ее основной период.

**Решение:**

$D(y) = R$ . Пусть  $T$  – период  $f(x)$ , тогда для любого  $x$   $\cos^2(x+T) = \cos^2(x)$ .

Если  $x = \frac{\pi}{2}$ , то  $\cos^2\left(\frac{\pi}{2} + T\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right)$ , т.е.  $\sin^2 T = 0$ .

Тогда  $T = \pi n$ ,  $n \in Z$ . Из чисел  $\pi n$  наименьшим положительным будет  $\pi$ .

Т.к.  $f(x + \pi) = \cos^2(x + \pi) = (-\cos x)^2 = \cos^2 x = f(x)$ ,  $T = \pi$  – основной период функции  $f(x)$ .

Доказательство неперодичности той или иной функции по определению может оказаться совсем не простым, поэтому часто помогает элементарный логический трюк: если все периодические функции обладают некоторым свойством, а данная функция им не обладает, то она, естественно, не является периодической. Так, например, периодическая функция всякое свое значение принимает бесконечно много раз, и поэтому, например, функция  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 18x + 2$  не является периодической, так как значение 2 она принимает только в трех точках  $x = -6$ ,  $x = 0$ ,  $x = 3$ .

В случае установления факта периодичности функции существенно облегчается ее изучение и построение графика: периодичную функцию можно исследовать на промежутке, равном длине основного периода. Достаточно построить на нем ее график, а затем распространить его влево и вправо согласно периоду.

**5. Исследовать функцию на непрерывность; найти точки разрыва (если они существуют) и установить их характер; найти вертикальные асимптоты.**

**Определение.**

Вычислим в точке  $x_0$   $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  и односторонние пределы функции

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x).$$

Если существуют конечные односторонние пределы, но не все три числа равны между собой, то точку  $x_0$  называют *точкой разрыва первого рода* функции  $f(x)$ . Причем, если  $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = A$ , но  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq A$  или  $f(x)$  не определена в точке  $x_0$ , тогда точку  $x_0$  называют *точкой устранимого разрыва* функции  $f(x)$ . Если же  $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$ , тогда точку  $x_0$  называют *точкой неустранимого разрыва или скачком*. Скачком также называют разность  $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$ , а разности  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$  и  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$  называют скачками функции  $f(x)$  слева и справа в точке  $x_0$ .

Если хотя бы один из односторонних пределов в точке  $x_0$  бесконечен или вовсе не существует, точку  $x_0$  называют *точкой разрыва второго рода* функции  $f(x)$ .

Запишем область определения функции в виде объединения интервалов, например,  $D(y) = (-\infty, x_0) \cup (x_0, x_1) \cup \dots \cup (x_n, +\infty)$ . Тогда концы интервалов являются точками, в которых нужно исследовать функцию на непрерывность.

Прямая  $x = x_0$  называется *вертикальной асимптотой* функции  $f(x)$ , если хотя бы один из ее односторонний пределов в точке  $x_0$  равен  $\pm\infty$ .

Вертикальных асимптот у функции может быть сколько угодно, например,  $f(x) = \ln \cos x$ .

**6. Найти наклонные асимптоты кривой  $y = f(x)$  или убедиться, что их нет.**

**Определение.** Прямая  $L$  называется *асимптотой* кривой  $y = f(x)$ , если расстояние  $d$  от точки  $M(x, y)$  кривой до прямой  $L$  стремится к нулю при неограниченном удалении этой точки по кривой от начала координат (т.е. при стремлении хотя бы одной из координат к бесконечности) (рис.2.1).

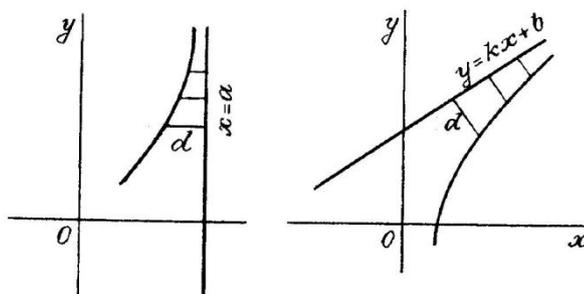


Рис.2.1

Наклонные асимптоты функции ищем в виде уравнения прямой в форме с угловым коэффициентом  $y = kx + b$ , где  $k$  и  $b$  вычисляются по формулам:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx).$$

Заметим, что:

- 1) наклонных асимптот у функции может быть не более двух;
- 2) в общем случае надо аккуратно вычислять указанные пределы отдельно при  $x \rightarrow -\infty$  и при  $x \rightarrow +\infty$ ;
- 3) если при  $x \rightarrow +\infty$  (аналогично, при  $x \rightarrow -\infty$ ) хотя бы один из пределов  $k$  и  $b$  бесконечен или не существует, то наклонной асимптоты нет;
- 4) наклонная асимптота может быть у кривой при  $x \rightarrow +\infty$  и ее может не быть при  $x \rightarrow -\infty$ , или наоборот;
- 5) возможны также случаи, когда при  $x \rightarrow +\infty$  и при  $x \rightarrow -\infty$  кривая имеет разные наклонные асимптоты, которые называются соответственно *правой* и *левой* наклонными асимптотами;

б) периодичная функция не может иметь наклонных асимптот, т.к. все свои значения она принимает бесконечное число раз и указанные пределы при  $x \rightarrow -\infty$  и при  $x \rightarrow +\infty$  не существуют;

7) периодичная функция может иметь только вертикальные асимптоты, например,  $f(x) = \operatorname{tg} x$ .

Полезно ответить на следующие вопросы:

- может ли график функции пересекать наклонную асимптоту?
- как найти точки пересечений графика функции с асимптотой?
- как выяснить подходит график функции к асимптоте сверху или снизу?
- как согласуется приближение графика функции сверху (снизу) к асимптоте с выпуклостью (вогнутостью)?

**7. Найти интервалы возрастания и убывания функции и ее экстремумы.**

**Определение.** Функция  $f(x)$  называется *возрастающей* в интервале  $(a, b)$ , если для любых двух точек  $x_1$  и  $x_2$  из указанного интервала, удовлетворяющих неравенству  $x_1 < x_2$ , выполняется неравенство  $f(x_1) < f(x_2)$ .

Функция  $f(x)$  называется *убывающей* в интервале  $(a, b)$ , если для любых двух точек  $x_1$  и  $x_2$  из указанного интервала, удовлетворяющих неравенству  $x_1 < x_2$ , выполняется неравенство  $f(x_1) > f(x_2)$ .

Возрастающие и убывающие в интервале функции называются строго монотонными.

*Признаки возрастания и убывания функции* следующие:

1) если  $f'(x) > 0$  для  $\forall x \in (a, b)$ , то функция  $f(x)$  монотонно возрастает в интервале  $(a, b)$ ;

2) если  $f'(x) < 0$  для  $\forall x \in (a, b)$ , то функция  $f(x)$  монотонно убывает в интервале  $(a, b)$ .

**Определение.** Значение функции  $f(x_0)$  называется *максимумом* функции  $f(x)$ , если при любом достаточно малом  $\varepsilon > 0$  выполняется условие  $f(x) < f(x_0)$  для любого  $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ .

**Определение.** Точка  $x_0$  называется в этом случае *точкой максимума* функции  $f(x)$ .

Значение функции  $f(x_0)$  называется *минимумом* функции  $f(x)$ , если при любом достаточно малом  $\varepsilon > 0$  выполняется условие  $f(x) > f(x_0)$  для  $\forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ . Точка  $x_0$  называется в этом случае *точкой минимума* функции  $f(x)$ .

Максимум или минимум функции  $f(x)$  называется *экстремумом функции*.

*Необходимое условие экстремума* формулируется следующим образом: если функция  $f(x)$  определена в точке  $x_0$  и имеет в этой точке экстремум, то возможны три случая:  $f'(x_0)=0$ ;  $f'(x_0)=\infty$ ;  $\nexists f'(x_0)$ . Соответствующие точки называются *критическими точками I рода, или точками подозрительными на экстремум*. Точка  $x_0$ , в которой  $f'(x_0)=0$ , называется *стационарной точкой*.

Геометрически условие  $f'(x_0)=0$  означает, что в точке  $x_0$  касательная к графику функции  $f(x)$  параллельна оси  $Ox$ , при этом в точке  $x_0$  может и не быть экстремума, но, если он есть, то называется *гладким*; условие  $f'(x_0)=\infty$  означает, что касательная параллельна оси  $Oy$  и при отсутствии экстремума, но в случае, если он есть, такой экстремум называется *острым*; наконец, условие  $\nexists f'(x_0)$  означает, что в точке  $x_0$  касательная не существует, при этом функция может иметь в этой точке экстремум, такой экстремум называется *угловым*.

Лишний раз подчеркнем, что не всякая критическая точка является точкой экстремума, т.е. выполнение одного из условий 1-3 является необходимым условием существования экстремума, но недостаточным!

*Достаточные условия экстремума* определяют по следующим правилам:

**Правило 1.** Если при переходе через критическую точку первая производная меняет знак, то данная критическая точка является точкой экстремума, причем если знак меняется с плюса на минус, то это точка максимума, а если с минуса на плюс, то это точка минимума. Если первая

производная при переходе через критическую точку знака не меняет, то экстремума в этой точке функция не имеет.

**Правило 2.** Если точка  $x_0$  является стационарной точкой функции  $f(x)$ , т.е.  $f'(x_0)=0$  и при этом  $f''(x_0)\neq 0$ , то в точке  $x_0$  функция имеет экстремум, причем максимум, если  $f''(x_0)<0$ , и минимум, если  $f''(x_0)>0$ .

В общем случае (теорема Тейлора) если в точке  $x_0$   $f'(x_0)=0$ ,  $f''(x_0)=0, \dots, f^{(n-1)}(x_0)=0$ ,  $f^{(n)}(x_0)\neq 0$ , то функция  $f(x)$  имеет в точке  $x_0$  экстремум, если  $n$  – четное число, причем максимум при  $f^{(n)}(x_0)<0$  и минимум при  $f^{(n)}(x_0)>0$ . При нечетном  $n$  функция  $f(x)$  в точке  $x_0$  экстремума не имеет.

## 8. Найти интервалы выпуклости и вогнутости кривой, являющейся графиком функции, и точки ее перегиба.

**Определение.** График функции  $y=f(x)$  называется *выпуклым вверх (или выпуклым)* в интервале  $(a, b)$ , если он расположен ниже касательной, проведенной в любой точке этого интервала. График функции  $y=f(x)$  называется *выпуклым вниз (или вогнутым)* в интервале  $(a, b)$ , если он расположен выше касательной, проведенной в любой точке этого интервала.

Достаточное условие выпуклости (вогнутости) графика функции: если  $f''(x)<0$  в интервале  $(a, b)$ , то график функции является *выпуклым* в этом интервале; при  $f''(x)>0$  в интервале  $(a, b)$  график функции – *вогнутый*. Точка графика функции с координатами  $x_0$  и  $f(x)$ , отделяющая его выпуклую часть от вогнутой или наоборот, называется *точкой перегиба*.

Если  $x_0$  – абсцисса точки перегиба графика функции  $y=f(x)$ , то вторая производная в этой точке равна нулю или не существует. Точки, в которых  $f''(x)=0$ ,  $f''(x)=\infty$  или  $\nexists f''(x)$ , называются критическими точками 2-го рода функции  $f(x)$ . Не всякая критическая точка 2-го рода является точкой перегиба.

Если  $x_0$  – критическая точка 2-го рода и при произвольном достаточно малом  $h>0$  выполняются неравенства  $f''(x_0-h)<0$ ,  $f''(x_0+h)>0$  или неравенства

$f''(x_0 - h) > 0$ ,  $f''(x_0 + h) < 0$ , то точка кривой  $y = f(x)$  с абсциссой  $x_0$  является точкой перегиба.

Если  $f''(x)$  в окрестности точки  $x_0$  не меняет знак, то данная точка кривой  $y = f(x)$  точкой перегиба не является.

Чтобы найти точки перегиба графика функции  $y = f(x)$ , необходимо:

- 1) найти критические точки 2-го рода функции  $f(x)$ ;
- 2) исследовать знак  $f''(x)$  при переходе через критические точки 2-го рода.

**9. Построить эскиз графика функции  $y = f(x)$ , нанося предварительно асимптоты и характерные точки.**

**Пример 1.** Исследовать функцию  $y = e^{1/x} - x$  и построить ее график.

**Решение.** 1. Область определения данной функции  $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ .

2. График функции не пересекает ось  $Oy$ , так как  $x = 0$  не принадлежит области определения функции. Для нахождения точек пересечения графика с осью  $Ox$  надо решить уравнение  $e^{1/x} - x = 0$ . Его можно решить графически, построив графики функций  $y_1 = x$  и  $y_2 = e^{1/x}$ . Графиком функции  $y_1 = x$  является прямая. Для того, чтобы построить эскиз графика  $y_2 = e^{1/x}$ , вычислим пределы

$$\lim_{x \rightarrow +0} e^{1/x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -0} e^{1/x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{1/x} = 1.$$

Сделаем эскиз графиков  $y_1$  и  $y_2$  (рис.2.2).

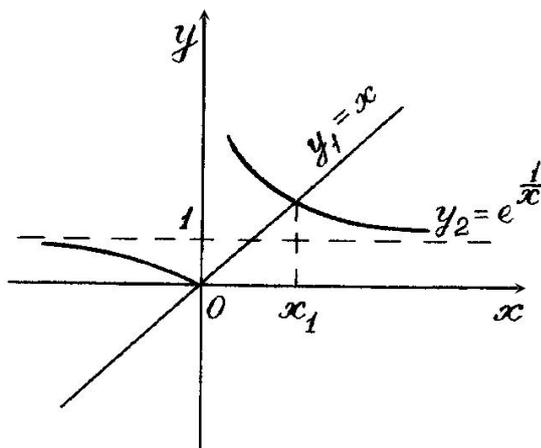


Рис.2.2

Точка  $x = x_1$  является точкой пересечения прямой  $y_1$  и кривой  $y_2$ , а следовательно, и точкой пересечения функции  $y = e^{1/x} - x$  с осью  $Ox$ .

3. Для выяснения четности и нечетности функции вычислим  $f(-x) = e^{-1/x} + x$ . Так как  $f(-x) \neq f(x)$  и  $f(-x) \neq -f(x)$ , то это функция общего вида и ее график никакой симметрией не обладает.

4. Очевидно, что функция непериодическая, т.к. значение 0 она принимает только в одной точке, что следует из пункта 2, в то время как периодичная функция каждое свое значение принимает бесконечное число раз.

5. Определим вертикальные асимптоты. Вычислим пределы:

$$\lim_{x \rightarrow +0} \left( e^{\frac{1}{x}} - x \right) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -0} \left( e^{\frac{1}{x}} - x \right) = 0.$$

Следовательно, прямая  $x = 0$  – вертикальная асимптота.

6. Найдем наклонные асимптоты, вычислив

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - x}{x} = -1; \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( e^{\frac{1}{x}} - x + x \right) = 1.$$

Итак, наклонная асимптота  $y = -x + 1$ .

7. Исследуем функцию на экстремум и найдем ее интервалы монотонности. Так как

$$y' = \frac{-e^{\frac{1}{x}} - x^2}{x^2} = -\frac{\left( e^{\frac{1}{x}} + x^2 \right)}{x^2},$$

очевидно, что уравнение  $e^{1/x} + x^2 = 0$  не имеет вещественных корней и экстремума. Функция всюду убывает, так как  $y' < 0$  во всей области определения функции.

8. Найдем интервалы выпуклости и вогнутости графика кривой и точки перегиба.

Так как

$$y'' = \frac{e^{\frac{1}{x}} + 2xe^{\frac{1}{x}}}{x^2} = \frac{e^{\frac{1}{x}}(1 + 2x)}{x^2},$$

то критические точки 2-го рода:  $x = -0,5$  ( $y'' = 0$ ) и  $x = 0$  ( $y'' = \infty$ ).

Исследуем знак  $y''$  при переходе через критические точки 2-го рода (табл.2.1).

Таблица 2.1

Функция	Интервал				
	$(-\infty; -\frac{1}{2})$	$-\frac{1}{2}$	$(-\frac{1}{2}; 0)$	0	$(0; +\infty)$
$y''$	-	0	+	$\infty$	+
$y$		Точка перегиба $(-0,5; e^{-2} + 0,5)$		Не определена	

Таким образом, график кривой выпуклый при  $x \in (-\infty; -0,5)$  и вогнутый при  $x \in (-0,5; 0) \cup (0; +\infty)$ .

Точка с координатами  $(-0,5; e^{-2} + 0,5)$  является точкой перегиба.

Эскиз графика представлен на рис.2.3.

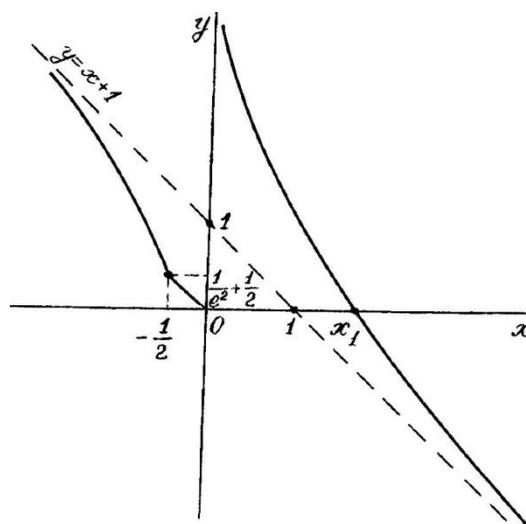


Рис.2.3

**Пример 2.** Исследовать функцию  $y = x - 2\text{arctg}x$  и построить ее график.

**Решение.** 1. Функция определена для всех  $x \in (-\infty; +\infty)$ .

2. График пересекает ось  $Oy$  в точке  $(0; 0)$ . Для нахождения точек пересечения графика с осью  $Ox$  надо решить графы

чески уравнение  $y = x - 2\arctg x = 0$  (или  $x/2 = \arctg x$ ). Строим графики  $y_1 = 0,5$  и  $y_2 = \arctg x$ . Находим точки их пересечения (рис.2.4).

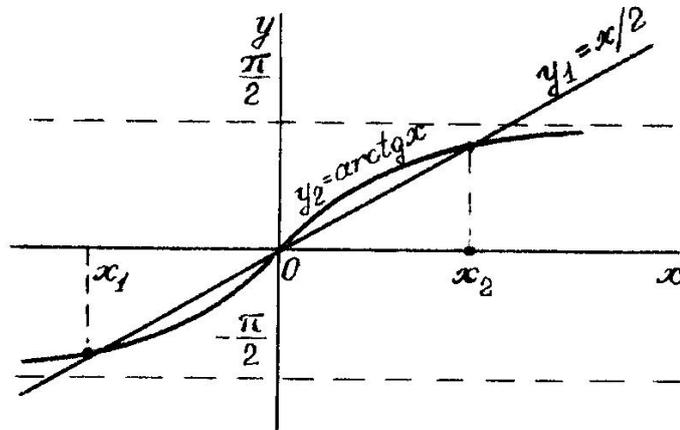


Рис.2.4

Таким образом, график  $y_1$  пройдет через начало координат и дважды пересечет кривую  $y_2$  в точках  $(x_1, 0)$  и  $(x_2, 0)$ .

3. Функция  $y = x - 2\arctg x$  является нечетной, так как  $f(-x) = -x - 2\arctg(-x) = -x + 2\arctg x = -(x - 2\arctg x) = -f(x)$ , и, следовательно, ее график будет симметричен относительно начала координат.

4. Функция неперiodическая.

5. Функция является непрерывной, так как определена для всех  $x \in (-\infty; +\infty)$ , и, следовательно, вертикальных асимптот кривая не имеет.

6. Найдем наклонные асимптоты, вычислив

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x - 2\arctg x}{x} = 1; \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [x - 2\arctg x - x] = \begin{cases} -\pi & \text{при } x \rightarrow +\infty; \\ +\pi & \text{при } x \rightarrow -\infty. \end{cases}$$

Итак, уравнение правой асимптоты (при  $x \rightarrow +\infty$ )  $y = x - \pi$ , а уравнение левой асимптоты (при  $x \rightarrow -\infty$ )  $y = x + \pi$ .

7. Исследуем функцию на экстремум и найдем интервалы монотонности.

Вычислим

$$y' = 1 - \frac{2}{1+x^2} = \frac{x^2-1}{x^2+1}.$$

Определим критические точки функции  $y' = 0$  при  $x = \pm 1$ . Исследуем перемену знака  $y'$  (табл.2.2).

Таблица 2.2

Функция	Интервал				
	$(-\infty; -1)$	$-1$	$(-1; 1)$	$1$	$(1; +\infty)$
$y'$	+	0	-	0	+
$y$					

Вычислим  $y_{\max}(-1) = 0,5\pi - 1$  и  $y_{\min}(1) = 1 - 0,5\pi$ .

8. Найдем интервалы выпуклости и вогнутости кривой и ее точки перегиба. Вычислим  $y'' = 4x/(x^2+1)^2$ . Определим критические точки 2-го рода:  $x = 0$  ( $y'' = 0$ ). Исследуем знак  $y''$  при переходе через критические точки 2-го рода (табл.2.3).

Таблица 2.3

Функция	Интервал		
	$(-\infty, 0)$	$0$	$(0, +\infty)$
$y''$	-	0	+
$y$		Точка перегиба (0, 0)	

Таким образом, график кривой выпуклый при  $x \in (-\infty; 0)$  и вогнутый при  $x \in (0; +\infty)$ . Точка  $(0, 0)$  является точкой перегиба.

9. Эскиз графика представлен на рис.2.5.

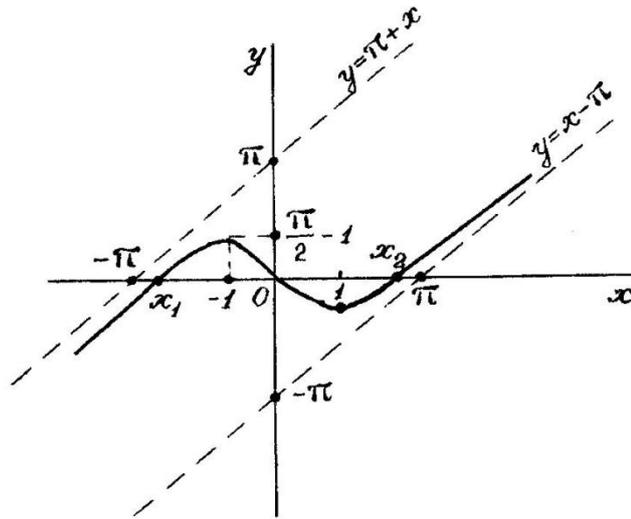


Рис.2.5

**Пример 3.** Исследовать функцию  $y = (x-1)^{1/3}(x-2)^{2/3}$  и построить ее график.

**Решение.** 1. Функция определена для всех  $x \in (-\infty; +\infty)$ .

2. График функции пересекает ось  $Oy$  в точке  $(0, -\sqrt[3]{4})$  и ось  $Ox$  в точках  $(1, 0)$ ,  $(2, 0)$ .

3. Функция общего вида, так как  $f(-x) \neq f(x)$  и  $f(-x) \neq -f(x)$ . Следовательно, ее график не обладает свойствами симметрии.

4. Функция неперiodическая.

5. Функция непрерывная, так как определена для всех  $x \in (-\infty; +\infty)$ .

Следовательно, график функции вертикальных асимптот не имеет.

6. Наклонной асимптотой является прямая  $y = x - 5/3$ , так как

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[3]{1 - \frac{5}{x} + \frac{8}{x^2} - \frac{4}{x^3}} = 1;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(x-1)(x-2)^2 - x^3}{\left( \sqrt[3]{(x-1)^2(x-2)^4} + \sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2} + x^2 \right)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-5x^2 + 8x - 4}{\sqrt[3]{(x-1)^2(x-2)^4} + x\sqrt[3]{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} + x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-5 + \frac{8}{x} - \frac{4}{x^2}}{\sqrt[3]{\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 \left(1 - \frac{2}{x}\right)^4} + \sqrt[3]{1 - \frac{5}{x} + \frac{8}{x^2} - \frac{4}{x^3}} + 1} = -\frac{5}{3}.$$

## 7. Производная

$$y' = \frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}}(x-2)^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{1}{3}}(x-2)^{-\frac{1}{3}} = \frac{3x-4}{3\sqrt[3]{(x-1)^2(x-2)}}.$$

Критические точки функции:  $x=4/3$  ( $y'=0$ ) и  $x=1$  и  $x=2$  ( $y'=\infty$ ).

Исследование перемены знака  $y'$  при переходе через критические точки представлено в табл.2.4.

Таблица 2.4

Функция	Интервал						
	$(-\infty; 1)$	1	$(1; \frac{4}{3})$	$\frac{4}{3}$	$(\frac{4}{3}; 2)$	2	$(2; +\infty)$
$y'$	+	$\infty$	+	0	-	$\infty$	+
$y$		Экстремум-ма нет					

Вычислим  $y_{\max}(4/3) = 3\sqrt[3]{4}/3$  и  $y_{\min}(2) = 0$ .

## 8. Вторая производная

$$y'' = -\frac{2}{9\sqrt[3]{(x-1)^5(x-2)^4}}.$$

Критические точки 2-го рода:  $x_1 = 1$  и  $x_2 = 2$  ( $y'' = \infty$ ).

Исследование перемены знака  $y''$  при переходе через критические точки 2-го рода представлено в табл.2.5.

Таблица 2.5

Функция	Интервал				
	$(-\infty, 1)$	1	$(1, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$y''$	+	$\infty$	-	$\infty$	-
$y$		Точка перегиба (1,0)		Перегиба нет	

Таким образом, график функции вогнутый при  $x \in (-\infty; 1)$  и выпуклый при  $x \in (1; +\infty)$ . Точка  $(1, 0)$  является точкой перегиба.

9. Эскиз графика функции представлен на рис.2.6.

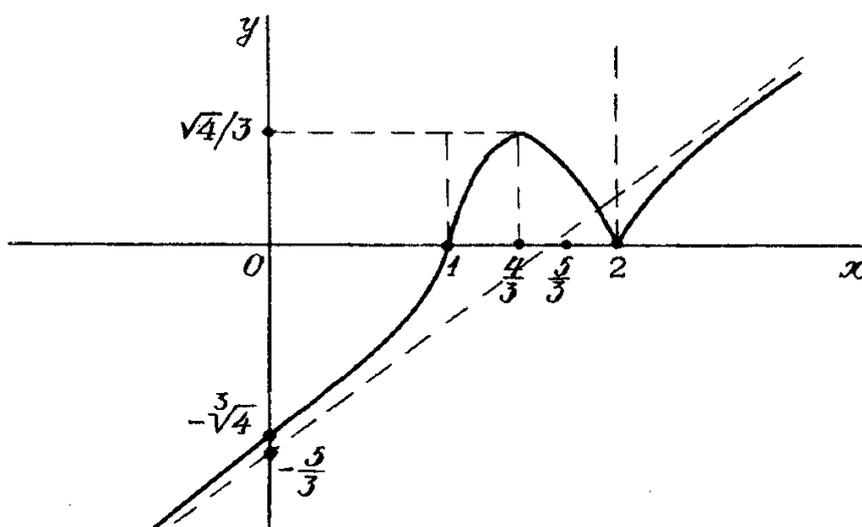


Рис.2.6

**Пример 4.** Исследовать функцию и построить график  $y = \ln \sin x$ .

**Решение.** 1. Область определения функции – множество решений неравенства  $\sin x > 0$ , т.е. объединение интервалов  $(0; \pi) \cup (2\pi; 3\pi) \cup \dots \cup (2n\pi; (2n+1)\pi), \dots n \in \mathbb{Z}$ .

2. Точки пересечения графика функции с осью  $Oy$  отсутствуют. Точки пересечения графика с осью  $Ox$  (из решения уравнения  $\ln \sin x = 0 \Rightarrow \sin x = 1 \Rightarrow x = \pi/2 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ , т.е. график функции пересекает ось  $Ox$  в множестве точек указанного вида.

3.  $f(-x) \neq f(x)$  и  $f(-x) \neq -f(x)$ . Следовательно, функция общего вида.

4. Функция периодическая, так как функция  $\sin x$  периодическая с периодом  $2\pi$ . Следовательно, можно исследовать и строить график на

промежутке  $[0; 2\pi]$ , а затем распространить его влево и вправо согласно периоду.

5. Вертикальные асимптоты кривой:  $x = 0$  и  $x = \pi$ , так как

$$\lim_{x \rightarrow +0} \ln \sin x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pi-0} \ln \sin x = -\infty.$$

6. Наклонных асимптот нет, так как функция периодическая.

7. Производная  $y' = \operatorname{ctg} x$ . Критические точки  $x = \pi/2$  ( $y' = 0$ ). Перемена знака  $y'$  при переходе через критическую точку представлена в табл.2.6.

Вычислим  $y_{\max}(\pi/2) = 0$ .

Таблица 2.6

Функция	Интервал		
	$(0; \pi/2)$	$\pi/2$	$(\pi/2; \pi)$
$y'$	+	0	-
$y$			

8. Вторая производная  $y'' = -1/\sin^2 x$ . График функции выпуклый, так как  $y'' < 0 \quad \forall x \in (0; \pi)$ .

9. Эскиз графика представлен на рис.2.7.

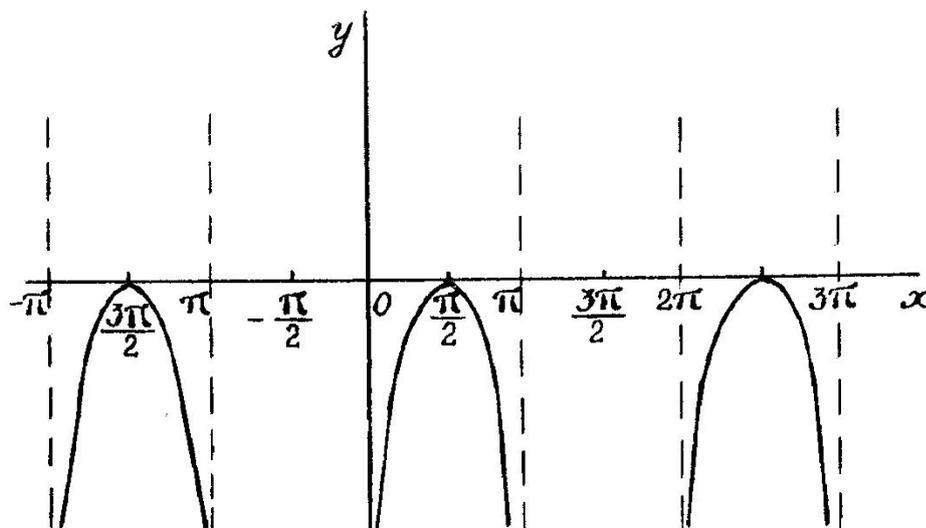


Рис.2.7

## 2.2. Построение кривых при параметрическом задании

В геометрии и механике часто употребляется параметрический способ задания кривой.

Кривую линию можно рассматривать как геометрическое место последовательных положений движущейся материальной точки, а координаты  $x$  и  $y$  этой точки выразить в виде непрерывных функций вспомогательной переменной  $t$ , которая называется *параметром*. Плоская кривая в этом случае определяется двумя уравнениями:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \quad t \in [\alpha, \beta] \quad (*)$$

Изменение параметра  $t$  в промежутке  $[\alpha, \beta]$  таково, что точка с координатами  $(x, y)$  описывает всю кривую или рассматриваемую ее часть. Отметим, что каждому значению  $t$  соответствует только одно значение  $x$  и  $y$ . Задание кривой уравнениями (\*) называется *параметрическим*.

Если из уравнений (\*) можно исключить параметр  $t$ , то получим явное или неявное задание функции  $y = f(x)$ . Исключение параметра  $t$  из уравнений движения материальной точки приводит к уравнению *траектории* этой точки.

**Пример 1.** Установить, какую линию определяют уравнения

$$\begin{cases} x = 2t - 4t^2 \\ y = t - 2t^2 \end{cases}.$$

**Решение.** Если второе уравнение умножить на 2 и вычесть его почленно из первого, то получим  $x - 2y = 0$ . Это уравнение определяет прямую.

**Пример 2.** Установить, какую линию определяют уравнения

$$\begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \end{cases}$$

при одном из следующих условий: 1)  $t \in [0, \pi]$ ; 2)  $t \in [\pi, 2\pi]$ ; 3)  $t \in [0, 2\pi]$ ?

**Решение.** Для исключения параметра  $t$  возведем обе части каждого уравнения в квадрат и сложим почленно полученные уравнения:

$$\begin{cases} x^2 = r^2 \cos^2 t \\ y^2 = r^2 \sin^2 t \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = r^2(\sin^2 t + \cos^2 t) \Rightarrow x^2 + y^2 = r^2.$$

Теперь рассмотрим указанные условия:

1. Пусть  $t \in [0, \pi]$ , тогда  $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ . Перед корнем выбран знак плюс потому, что если  $t$  изменяется в промежутке  $[0, \pi]$ , то  $y \geq 0$ . В этом случае искомая линия – это полуокружность с центром в начале координат, расположенная в верхней полуплоскости.

2. Пусть  $t \in [\pi, 2\pi]$ , тогда  $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$ . Это уравнение определяет полуокружность с центром в начале координат, расположенную в нижней полуплоскости.

3. Пусть  $t \in [0, 2\pi]$ , тогда уравнения  $x = r \cos t$ ,  $y = r \sin t$  определяют окружность радиуса  $r$  с центром в начале координат.

**Замечание.** В случаях 1) и 2) можно говорить о параметрически заданной функции, а в случае 3) о параметрически заданной кривой. В дальнейшем, чтобы не оговаривать отдельно, будем использовать термин кривая, как более общий.

**Пример 3.** Какими параметрическими уравнениями задается произвольная окружность с центром в точке  $(a, b)$  радиуса  $r$  (рис.2.8)?

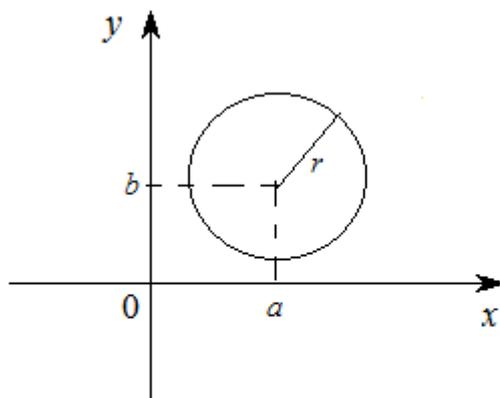


Рис. 2.8

**Решение:**  $\begin{cases} x = a + r \cos t \\ y = b + r \sin t \end{cases}, t \in [0; 2\pi]$ , откуда  $\begin{cases} x - a = r \cos t \\ y - b = r \sin t \end{cases}$  и, если возвести оба

уравнения в квадрат и сложить, то получим  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$  – каноническое

уравнение окружности с центром в  $(a,b)$  радиуса  $r$  в декартовой системе координат.

**Пример 4.** Написать параметрические уравнения *циклоиды* (плоской кривой, описываемой точкой окружности, катящейся без скольжения по прямой) (рис.2.9).

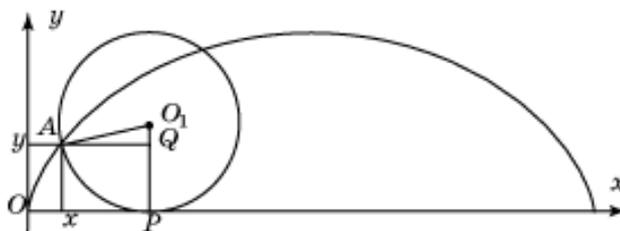


Рис.2.9

**Решение:**

Пусть точка  $A(x, y)$  принадлежит окружности. Обозначим за  $t$  центральный угол  $\angle AO_1P$ , тогда  $OP = O\tilde{P} = rt$

$$\begin{cases} x = OP - MQ = rt - r \sin t = r(t - \sin t) \\ y = O_1P - O_1Q = r - r \cos t = r(1 - \cos t) \end{cases}$$

Ответ:  $\begin{cases} x = r(t - \sin t) \\ y = r(1 - \cos t) \end{cases}$

**Замечание.** Сравните уравнения окружности с уравнениями циклоиды. Почему по их виду можно сделать вывод о том, что окружность замкнутая кривая, а циклоида нет?

Если точка  $A$  лежит внутри или вне круга, то описываемая ею кривая называется *трохоидой* (соответственно, *укороченной* или *удлиненной* циклоидой).

Все эти варианты циклоиды можно наблюдать, если смотреть на круговую спираль (винтовую пружину) под различными углами. В частности, имеет место следующая

**Лемма.**

Ортогональная проекция под углом  $45^\circ$  правильной спирали на плоскость есть циклоида в масштабе  $1:\sqrt{2}$  по осям  $OX$  и  $OY$ .

**Доказательство.**

Правильная спираль параметрически задается системой уравнений:

$$\text{Система уравнений } \begin{cases} x = -r \sin t \\ y = r(1 - \cos t) \\ z = rt \end{cases}, \quad t \in (-\infty; +\infty) \quad \text{задает правильную}$$

(бесконечную в обе стороны оси  $OZ$ ) спираль с осью  $\begin{cases} x=0 \\ y=r \end{cases}$  (точка вращается по часовой стрелке в плоскости  $XOY$  и одновременно движется вверх равномерно с той же линейной скоростью). Повернем оси  $OX$  и  $OZ$  на угол  $\varphi$  вокруг оси  $OY$ . При этом координаты  $x$  и  $z$  изменятся по правилу поворота на плоскости  $XOZ$ :

$$\begin{cases} x = -r \sin t = x' \cos \varphi - z' \sin \varphi \\ z = rt = x' \sin \varphi + z' \cos \varphi \end{cases},$$

а  $y$ -ая координата не изменится. Выражая  $x'$  из этой системы по формуле Крамера

$$x' = \frac{\begin{vmatrix} -r \sin t & -\sin \varphi \\ rt & \cos \varphi \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix}} = \frac{r(t \sin \varphi - \sin t \cos \varphi)}{1},$$

получим, что в проекции на плоскость  $X'OY$  наша спираль задается неявно

системой уравнений  $\begin{cases} x' = r(t \sin \varphi - \sin t \cos \varphi) \\ y = r(1 - \cos t) \end{cases}$ . Значит, если "камера" направлена

перпендикулярно плоскости  $X'OY$ , то есть смотрит под углом  $\varphi$  к плоскости  $XOY$ , то в плоскости камеры мы видим циклоиду, растянутую по оси  $OX'$  в  $\sqrt{2}$  раз:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{2}} r(1 - \cos t) \\ y = r(t - \sin t) \end{cases}.$$

**Пример 5.** Написать параметрические уравнения кривой, заданной уравнением  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$  (рис.2.10).

**Решение:** Данная кривая, называется *астроидой* (плоской кривой, описываемой точкой окружности радиуса  $a$ , катящейся по внутренней стороне окружности радиуса  $r=4a$ , по-гречески *αστρον* – звезда, *ειδος* – вид, форма; астроида – звездообразная.) и имеет следующие параметрические уравнения:

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$$

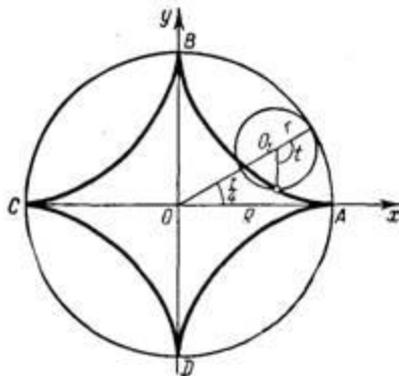


Рис.2.10

Укажем, что в случае явного задания функции  $y = f(x)$ , где  $f(x)$  определена и непрерывна в промежутке  $[a, b]$ , кривую, определяемую этим уравнением, можно легко задать параметрическим способом:

$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}, \quad t \in [a, b].$$

Напомним, что, если функция  $y$  аргумента  $x$  задана параметрическими уравнениями  $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ ,  $t \in [\alpha, \beta]$ , причем  $\varphi(t)$  и  $\psi(t)$  – дифференцируемые функции по  $t$  и  $\varphi'(t) \neq 0$ , то производная от функции  $y$  по  $x$  равна

$$y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \quad \text{или} \quad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{dy}{dx}, \quad \text{а для нахождения второй производной нужно}$$

продифференцировать обе части равенства  $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$  по  $t$ .

Тогда

$$y''_{xx} = \frac{y''_t x'_t - x''_t y'_t}{(x'_t)^3}.$$

Исследование и построение кривой, заданной параметрически, проводятся по той же схеме, что и для явно заданной функции  $y = f(x)$ , но имеет некоторые особенности. Укажем наиболее важные из них.

### 1. Симметрия

Если функция  $x = \varphi(t)$  является четной, а функция  $y = \psi(t)$  – нечетной, то

кривая  $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, t \in [\alpha, \beta]$  симметрична относительно оси  $Ox$ .

Если функция  $x = \varphi(t)$  является нечетной, а функция  $y = \psi(t)$  – четной, то

кривая  $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, t \in [\alpha, \beta]$  симметрична относительно оси  $Oy$ .

Если функции  $x = \varphi(t)$  и  $y = \psi(t)$  являются нечетными, то кривая

$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, t \in [\alpha, \beta]$  симметрична относительно начала координат.

Заметим, что это достаточные признаки, но не необходимые.

### 2. Точки пересечения с осями

Для нахождения точек пересечения кривой  $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, t \in [\alpha, \beta]$  с осью абсцисс надо найти значения  $t$ , при которых  $y = 0$  (решения уравнения  $\psi(t) = 0$ ) и соответствующие значения  $x = \varphi(t)$ .

Для нахождения точек пересечения кривой  $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, t \in [\alpha, \beta]$  с осью ординат надо найти значения  $t$ , при которых  $x = 0$  (решения уравнения  $\varphi(t) = 0$ ) и соответствующие значения  $y = \psi(t)$ .

Иногда целесообразно определять точки пересечения кривой с биссектрисами координатных углов  $y = x$  и  $y = -x$ , для чего решают соответственно уравнения  $\psi(t) = \varphi(t)$  и  $\psi(t) = -\varphi(t)$ , значения функций  $x = \varphi(t)$  и  $y = \psi(t)$  при найденных  $t$  и дадут координаты искомых точек.

### 3. Особые точки

**Определение.** Точка  $M(x_0; y_0)$  кривой  $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, t \in [\alpha, \beta]$  называется

*особой (нерегулярной)*, если при  $t = t_0$

$$x_0 = \varphi(t_0), y_0 = \psi(t_0), \text{ а } \varphi'(t_0) = \psi'(t_0) = 0.$$

Другие точки кривой, в которых хоть одна из производных  $\varphi'(t)$  или  $\psi'(t)$  не равна нулю, называются *неособыми (регулярными)* точками.

В любой неособой точке  $(x_0; y_0)$  уравнение касательной имеет вид:

$$y - y_0 = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}(x - x_0), \text{ если } \varphi'(t_0) \neq 0,$$

$$x - x_0 = \frac{\varphi'(t_0)}{\psi'(t_0)}(y - y_0), \text{ если } \psi'(t_0) \neq 0.$$

**Замечание.** Для того, чтобы касательная к кривой была параллельна оси абсцисс должно выполняться условие  $y'_x = 0$ , т.е. значения  $t$ , соответствующие таким точкам ищем из уравнения

$$y'_t = 0, \text{ если } x'_t \neq 0.$$

Значения  $t$ , соответствующие точкам, в которых касательная к кривой параллельна оси ординат, ищем из уравнения

$$x'_t = 0, \text{ если } y'_t \neq 0.$$

Для классификации особых точек найдем производные высших порядков. Пусть  $p$  – порядок первой из производных, отличной от нуля в точке  $t_0$ , т.е.

$\begin{cases} x^{(p)}(t_0) \neq 0 \\ y^{(p)}(t_0) \neq 0 \end{cases}$ , а  $q$  – порядок первой из производных, такой что вектор  $\{x^{(q)}(t_0), y^{(q)}(t_0)\}$  не коллинеарен вектору  $\{x^{(p)}(t_0), y^{(p)}(t_0)\}$ . Возможны следующие случаи:

1)  $p$  – нечетное,  $q$  – четное, тогда кривая в окрестности точки  $M$  имеет такой же вид, как и в окрестности регулярной точки;

2)  $p$  – нечетное,  $q$  – нечетное, тогда точка  $M$  является точкой перегиба;

3)  $p$  – четное,  $q$  – нечетное, тогда точка  $M$  называется *точкой возврата I рода* (различные ветви кривой в этой точке расположены по разные стороны от общей касательной);

4)  $p$  – четное,  $q$  – четное, тогда точка  $M$  называется *точкой возврата II рода* (различные ветви кривой в этой точке расположены по одну сторону от общей касательной).

#### 4. Точки самопересечения

**Определение.** Пусть изменение параметра  $t$  на промежутке  $[\alpha; \beta]$  таково, что промежуток разбивается на конечное число промежутков, на каждом из которых функция  $x = \varphi(t)$  строго монотонна. Тогда можно определить обратную функцию  $t = t(x)$  и, следовательно,  $y(t) = y(t(x))$ . Получается, что каждому промежутку строгой монотонности  $x = \varphi(t)$  соответствует однозначная функция  $y(x)$ , график, которой называется *ветвью* данной кривой.

Количество ветвей определяется количеством участков строгой монотонности функции  $x = \varphi(t)$ .

Точка  $(x_1; y_1)$  называется *двойной*, если в ней пересекаются две ветви кривой, имеющие различные касательные. Отсюда следует, что должны существовать два различных значения  $t_1$  и  $t_2$  параметра  $t$  такие, что

$$\begin{cases} x_1 = \varphi(t_1) = \varphi(t_2), \\ y_1 = \psi(t_1) = \psi(t_2), \quad t_1 \neq t_2. \end{cases}$$

Решаем эту систему и проверяем, имеют ли угловые коэффициенты касательных к кривой при найденных значениях параметра  $t$  разные значения, т.е.  $\frac{\psi'(t_1)}{\varphi'(t_1)} \neq \frac{\psi'(t_2)}{\varphi'(t_2)}$ . Если да, то кривая имеет двойную точку. Точка самопересечения может быть не только двойной, но и более высокой кратности.

## 5. Асимптоты

Кривая имеет вертикальную асимптоту  $x = a$ , если одновременно выполняются равенства

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow t_1} \psi(t) = \infty, \\ \lim_{t \rightarrow t_1} \varphi(t) = a. \end{cases}$$

Кривая имеет горизонтальную асимптоту  $y = b$ , если одновременно выполняются равенства

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow t_1} \psi(t) = b, \\ \lim_{t \rightarrow t_1} \varphi(t) = \infty. \end{cases}$$

Для определения наклонных асимптот  $y = kx + b$  надо найти такое значение  $t_1$  параметра  $t$ , при котором  $x = \infty$  и  $y = \infty$ . Если такое значение  $t$  найдено, то  $k$  и  $b$  определяются по формулам

$$\begin{cases} k = \lim_{t \rightarrow t_1} \frac{y}{x} = \lim_{t \rightarrow t_1} \frac{\psi(t)}{\varphi(t)}, \\ b = \lim_{t \rightarrow t_1} (y - kx) = \lim_{t \rightarrow t_1} [\psi(t) - k\varphi(t)], \end{cases}$$

причем пределы, стоящие в правых частях этих формул, существуют.

**Замечание.** Полезны рассуждения о "направлениях движения" по кривой

$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ ,  $t \in [\alpha, \beta]$ . Всего возможно четыре направления, которые зависят от участков монотонности функций  $x = \varphi(t)$  и  $y = \psi(t)$  (рис.2.11) :

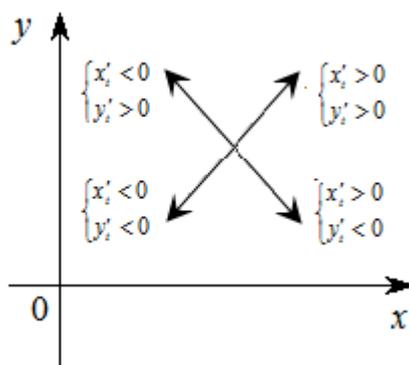


Рис.2.11

Составим план исследования параметрически заданной кривой, который, на наш взгляд, может служить некоторым "руководством к действию" и упростит задачу построения графика:

- 1<sup>0</sup>. Найти область определения функции, как пересечение областей определения функций  $x(t)$  и  $y(t)$ , записав ее объединением интервалов.
- 2<sup>0</sup>. Вычислить пределы функций  $x(t)$  и  $y(t)$  во всех "концах" области определения.
- 3<sup>0</sup>. Найти точки пересечения кривой с осями.
- 4<sup>0</sup>. Проверить симметрию графика кривой.
- 5<sup>0</sup>. Найти асимптоты.
- 6<sup>0</sup>. Найти первые производные функций  $x(t)$  и  $y(t)$  по  $t$ . Нарисовать соответствующие оси, отметив на них "возрастание-убывание", причем представляется удобным для функции  $x(t)$  возрастание показывать стрелкой  $\rightarrow$  и убывание показывать стрелкой  $\leftarrow$ , а для функции  $y(t)$  возрастание –  $\uparrow$  и убывание –  $\downarrow$ . Сделать замечания о параллельности осям касательных к графику кривой.
- 7<sup>0</sup>. Найти вторую производную  $y''_{xx}$ . Расставить ее знаки на оси и сделать вывод о выпуклости-вогнутости графика кривой. Если какой-либо корень "не находится" вручную, то его можно найти, используя Mathcad, Wolfram Mathematica (или любой другой пакет). Также можно написать вместо него какое-нибудь условное обозначение, например,  $t^*$ .
- 8<sup>0</sup>. Найти, если таковые есть, особые точки и точки самопересечения.
- 9<sup>0</sup>. Заполнить таблицу, в которой будут отражены для каждого интервала параметра  $t$  ("кусочка кривой") монотонность функций  $x(t)$ ,  $y(t)$  и  $y(x)$ , знаки  $x'_t, y'_t, y'_x, y''_{xx}$ , краткая характеристика поведения функции. Во всех "характерных" вычислить  $y(x)$  и  $y'(x)$ .

10<sup>0</sup>. Нарисовать график.

**Пример 1.**

Построить кривую  $\begin{cases} x = \frac{t^2}{4(1-t)} \\ y = \frac{t^3}{8(t-1)} \end{cases}$ .

**Решение.**

1<sup>0</sup>. Функция  $x(t) = \frac{t^2}{4(1-t)}$  имеет область определения

$D(x(t)) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$ . Функцией  $y(t) = \frac{t^3}{8(t-1)}$  имеет такую же область

определения  $D(y(t)) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$ , следовательно  $D(y(x(t))) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$ .

2<sup>0</sup>. Вычислим пределы:

$$\lim_{t \rightarrow 1+0} x(t) = -\infty, \lim_{t \rightarrow 1-0} x(t) = +\infty \text{ и } \lim_{t \rightarrow 1+0} y(t) = +\infty, \lim_{t \rightarrow 1-0} y(t) = -\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = +\infty, \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = -\infty \text{ и } \lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = +\infty, \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = -\infty$$

3<sup>0</sup>. Точки пересечения с осями:

с  $Ox$ :  $y = 0$  при  $t = 0 \Rightarrow x = 0$

с  $Oy$ :  $x = 0$  при  $t = 0 \Rightarrow y = 0$

4<sup>0</sup>. График кривой симметрией не обладает.

5<sup>0</sup>. Асимптоты:

Вертикальных и горизонтальных асимптот нет, т.к. нет значений

параметра  $t$ , при которых  $\begin{cases} \lim_{t \rightarrow t_1} \psi(t) = \infty, \\ \lim_{t \rightarrow t_1} \varphi(t) = a. \end{cases}$  ИЛИ  $\begin{cases} \lim_{t \rightarrow t_1} \psi(t) = b, \\ \lim_{t \rightarrow t_1} \varphi(t) = \infty. \end{cases}$

Будем искать наклонную асимптоту  $y = kx + b$ , т.к. при  $t = 1$   $\begin{cases} \lim_{t \rightarrow 1} \psi(t) = \infty, \\ \lim_{t \rightarrow 1} \varphi(t) = \infty. \end{cases}$

$$k = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{4t^3(1-t)}{8(t-1)t^2} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{-t}{2} = -\frac{1}{2};$$

$$b = \lim_{t \rightarrow 1} \left( \frac{t^3}{8(t-1)} + \frac{t^2}{8(1-t)} \right) = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^3 - t^2}{8(t-1)} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^2}{8} = \frac{1}{8};$$

Следовательно  $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{8}$  — наклонная асимптота.

6<sup>0</sup>. Найдем первые производные функций  $x(t)$  и  $y(t)$ :

$$x'_t = \frac{t(2-t)}{4(1-t)^2},$$

тогда при  $t \in (0; 1) \cup (1; 2)$  функция  $x(t)$  возрастает, а при  $t \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$  функция  $x(t)$  убывает,

$$y'_t = \frac{t^2(2t-3)}{8(t-1)^2},$$

тогда при  $t \in (1.5; +\infty)$  функция  $y(t)$  возрастает, а при  $t \in (-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 1.5)$  функция  $y(t)$  убывает.

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{t^2(2t-3)}{8(t-1)^2} \cdot \frac{t(2-t)}{4(t-1)^2} = \frac{t(2t-3)}{2(2-t)}.$$

Касательная к кривой параллельна оси абсцисс:  $y'_x = 0$  при  $t = 1.5$ , т.е. в точке  $\left(-\frac{9}{8}; \frac{27}{32}\right)$ .

Касательная к кривой параллельна оси ординат:  $y'_x = \infty$  при  $t = 2$  в точке  $(-1; 1)$ .

7<sup>0</sup>.  $y''_{xx} = \frac{4(t-3)(t-1)^3}{t(t-2)^3}$ , следовательно, при  $t \in (-\infty; 0) \cup (1; 2) \cup (3; +\infty)$  график

кривой будет выпуклым вниз, а при  $t \in (0; 1) \cup (2; 3)$  – выпуклым вверх.

8<sup>0</sup>.

Особые точки:

$$\begin{cases} x'(t) = 0 \\ y'(t) = 0 \end{cases}, \text{ при } t = 0. \begin{cases} x''(0) \neq 0 \\ y''(0) = 0 \end{cases}, \text{ следовательно } p = 2, \text{ вычисляя производные}$$

третьего порядка получаем, что  $q = 3$ . Значит, точка  $(0; 0)$  при  $t = 0$  является точкой возврата I рода.

Точки самопересечения:

$$\begin{cases} \frac{t_1^2}{4(1-t_1)} = \frac{t_2^2}{4(1-t_2)} \\ \frac{t_1^3}{8(t_1-1)} = \frac{t_2^3}{8(t_2-1)} \\ t_1 \neq t_2 \end{cases} \begin{cases} t_1^2(1-t_2) = t_2^2(1-t_1) \\ t_1^3(t_2-1) = t_2^3(t_1-1) \\ t_1 \neq t_2 \end{cases} \begin{cases} t_1 = 0 \\ t_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow t = 1$$

9<sup>0</sup>. Составим таблицу (табл.2.7):

Таблица 2.7

$t$	$x(t)$	$y(t)$	$y(x)$	$x'(t)$	$y'(t)$	$y'_x$	$y''_{xx}$	Краткая характеристика поведения функции
$(+\infty; 0)$	←	↓	↙	-	-	+	+	Выпуклость вниз
0	0	0	0	0	0	0	...	Точка возврата
$(0; 1)$	→	↓	↘	+	-	-	-	Выпуклость вверх
1-0	$+\infty$	$-\infty$	...	$+\infty$	$-\infty$	-1/2	...	Асимптотическая точка
1+0	$-\infty$	$+\infty$	...	$+\infty$	$-\infty$	-1/2	...	Асимптотическая точка
$(1; 3/2)$	→	↓	↘	+	-	-	+	Выпуклость вниз
3/2	-9/8	27/32	...	+	0	0	+	Касательная горизонтальна

$(3/2; 2)$	$\rightarrow$	$\uparrow$	$\nearrow$	+	+	+	+	Выпуклость вниз
2	-1	1		0	+	$+\infty$	...	Касательная вертикальна
$(2;3)$	$\leftarrow$	$\uparrow$	$\nwarrow$	-	+	-	-	Выпуклость вверх
3	$-9/8$	$27/16$	...	-	+	-	0	Точка перегиба
$(3; +\infty)$	$\leftarrow$	$\uparrow$	$\nwarrow$	-	+	-	+	Выпуклость вниз

10<sup>0</sup>. Построим график (рис.2.12):

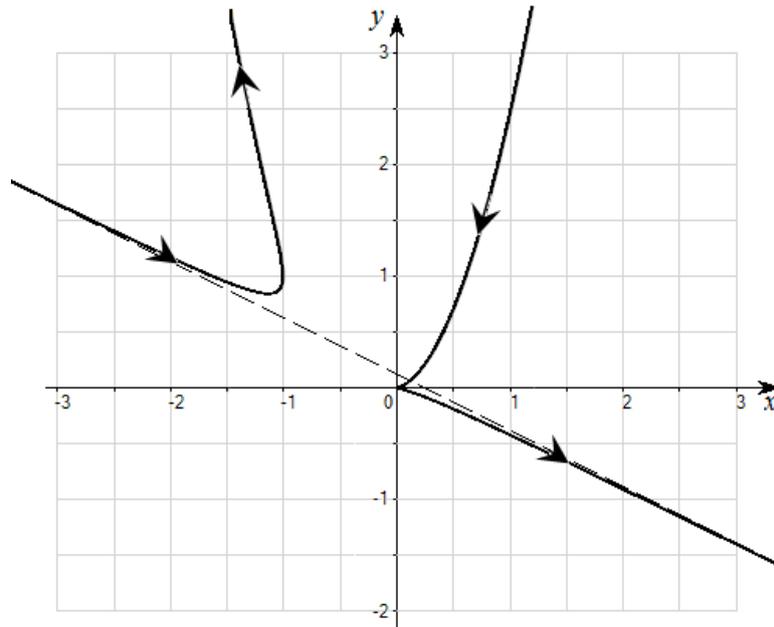


Рис.2.12

**Пример 2.** Построить кривую  $\begin{cases} x = \frac{t^2}{t^2 + 1} \\ y = \frac{t(1-t^2)}{t^2 + 1} \end{cases}$ .

**Решение.**

Отметим, что  $D(y(x)) = [0;1)$ , т.к. значение  $x = \frac{t^2}{t^2 + 1}$  при любом  $t$  является

положительным числом, меньшим единицы, следовательно, кривая расположена между прямыми  $x = 0$  и  $x = 1$ .

2<sup>0</sup>. Вычислим пределы:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 1, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 1 \quad \text{и} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = -\infty$$

3<sup>0</sup>. Точки пересечения с осями координат:

с  $OX$  –  $(0;0)$  и  $\left(\frac{1}{2};0\right)$ , т.к.  $y = 0$  при  $t = 0$ ,  $t = \pm 1$ , тогда  $x = 0$  и  $x = \frac{1}{2}$ .

с  $OY$  –  $(0;0)$ .

4<sup>0</sup>. Так как  $x(t)$  – четная, а  $y(t)$  – нечетная функции, то кривая симметрична относительно оси абсцисс.

5<sup>0</sup>. Асимптоты.

Кривая имеет вертикальную асимптоту  $x=1$ , т.к.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^2}{t^2 + 1} = 1 \text{ и } \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t(1-t^2)}{t^2 + 1} = \infty.$$

Горизонтальных и наклонных асимптот у кривой нет, т.к. не существует значения параметра  $t$ , при котором  $x \rightarrow \infty$ .

6<sup>0</sup>. Найдем первые производные:

$$x'_t = \frac{2t}{(t^2 + 1)^2},$$

тогда при  $t \in (0; +\infty)$  функция  $x(t)$  возрастает, а при  $t \in (-\infty; 0)$  функция  $x(t)$  убывает,

$$y'_t = \frac{1 - 4t^2 - t^4}{(t^2 + 1)^2},$$

тогда при  $t \in \left(-\sqrt{-2+\sqrt{5}}; \sqrt{-2+\sqrt{5}}\right)$  функция  $y(t)$  возрастает, а при функции

$t \in \left(-\infty; -\sqrt{-2+\sqrt{5}}\right) \cup \left(\sqrt{-2+\sqrt{5}}; +\infty\right)$   $y(t)$  убывает.

$$y'_x = \frac{1 - 4t^2 - t^4}{2t},$$

заметим, что  $y'_x = 0$  при  $t = \pm\sqrt{-2+\sqrt{5}}$  ( $t \approx \pm 0.5$ ) и, следовательно, существуют две точки  $A$  и  $B$ , в которых касательная параллельна оси абсцисс.

7<sup>0</sup>. Найдем  $y''_{xx} = -\frac{(3t^4 + 4t^2 + 1)(t^2 + 1)^2}{2t^3}$ , следовательно, при  $t \in (-\infty; 0)$  график

кривой будет выпуклым вниз, а при  $t \in (0; +\infty)$  – выпуклым вверх.

8<sup>0</sup>. Точки самопересечения:

$$\begin{cases} \frac{t_1^2}{t_1^2 + 1} = \frac{t_2^2}{t_2^2 + 1} \\ \frac{t_1(1-t_1^2)}{t_1^2 + 1} = \frac{t_2(1-t_2^2)}{t_2^2 + 1} \end{cases}.$$

Решив эту систему, находим два разных значения  $t_1 = 1$  и  $t_2 = -1$ , для которых соответствующие значения  $x$  одинаковы и соответствующие значения  $y$  также одинаковы. Следовательно, точка  $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$  – двойная точка кривой.

Найдем угловые коэффициенты  $k_1$  и  $k_2$  касательных к ветвям кривой, которые пересекаются в этой точке:

$$k_1 = \frac{y'(t_1)}{x'(t_1)} = -2, \quad k_2 = \frac{y'(t_2)}{x'(t_2)} = 2.$$

9<sup>0</sup>. Составим таблицу (табл.2.8):

Таблица 2.8

$t$	$x(t)$	$y(t)$	$y(x)$	$x'(t)$	$y'(t)$	$y'_x$	$y''_{xx}$	Краткая характеристика поведения
-----	--------	--------	--------	---------	---------	--------	------------	----------------------------------

								функции
$(+\infty; -1)$	←	↓	↙	-	-	+	+	Выпуклость вниз
-1	0.5	0						Точка пересечения с $Ox$
$(-1; -0.5)$	←	↓	↙	-	-	-	+	Выпуклость вниз
-0.5	0.19	-0.3			0	0		Касательная горизонтальна
$(-0.5; 0)$	←	↑	↖	-	+	-	+	Выпуклость вниз
0	0	0	0	+	0	$+\infty$	+	Касательная вертикальна, пер. с $Oy$
$(0; 0.5)$	→	↑	↗	+	+	+	-	Выпуклость вверх
0.5	0.19	0.3			0	0		Касательная горизонтальна
$(0.5; 1)$	→	↓	↘	+	-	-	-	Выпуклость вверх
1	0.5	0						Точка пересечения с $Ox$
$(1; +\infty)$	→	↓	↘	+	-	-	-	Выпуклость вверх

10<sup>0</sup>. Построим график (рис.2.13):

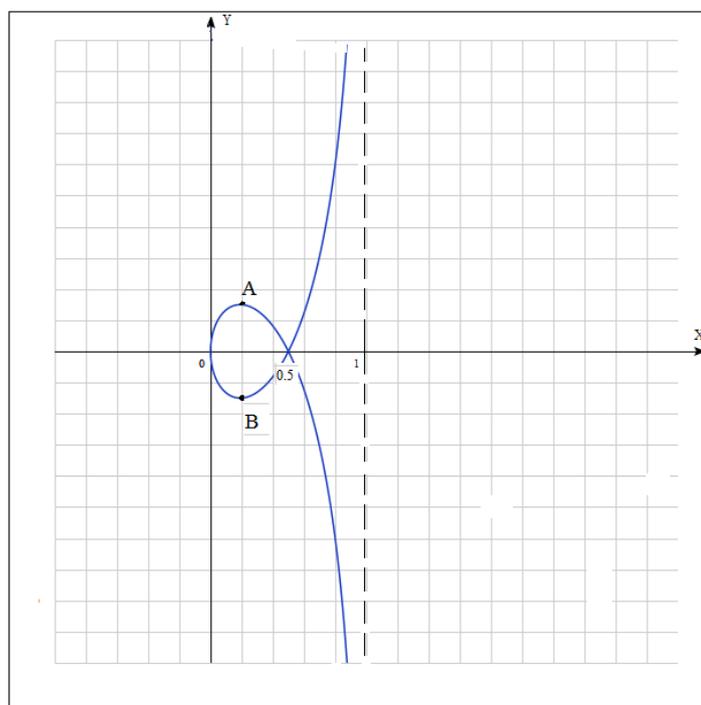


Рис.2.13

### Пример 3.

Построить кривую  $\begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y = 3t - t^3 \end{cases}$ .

#### Решение.

1<sup>0</sup>. Функция  $x(t) = 2t - t^2$  имеет область определения

$D(x(t)) = (-\infty; +\infty)$ . Функций  $y(t) = 3t - t^3$  имеет такую же область

определения  $D(y(t)) = (-\infty; +\infty)$ , следовательно  $D(y(x(t))) = (-\infty; +\infty)$ .

2<sup>0</sup>. Вычислим пределы:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = -\infty, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = -\infty \quad \text{и} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = -\infty$$

3<sup>0</sup>. Точки пересечения с осями:

$$\text{с } Ox: y = 0 \text{ при } t = 0, t = \pm\sqrt{3} \Rightarrow x = 0, \quad x \approx 0.46, \quad x \approx -6.46$$

$$\text{с } Oy: x = 0 \text{ при } t = 0, t = 2 \Rightarrow y = 0, \quad y = -2$$

4<sup>0</sup>. График кривой симметрией не обладает.

5<sup>0</sup>. Асимптоты:

Вертикальных и горизонтальных асимптот нет, т.к. нет значений

параметра  $t$ , при которых  $\begin{cases} \lim_{t \rightarrow t_1} \psi(t) = \infty, \\ \lim_{t \rightarrow t_1} \varphi(t) = a. \end{cases}$  или  $\begin{cases} \lim_{t \rightarrow t_1} \psi(t) = b, \\ \lim_{t \rightarrow t_1} \varphi(t) = \infty. \end{cases}$

Будем искать наклонную асимптоту  $y = kx + b$ , т.к. при  $t = \infty$   $\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = \infty, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \infty. \end{cases}$

Вычислим  $k = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{3t - t^3}{2t - t^2} = \infty$ . Следовательно, наклонных асимптот нет.

6<sup>0</sup>. Найдем первые производные функций  $x(t)$  и  $y(t)$ :

$$x'_t = 2(1-t),$$

тогда при  $t \in (-\infty; 0)$  функция  $x(t)$  возрастает, а при  $t \in (0; +\infty)$  функция  $x(t)$  убывает.

$$y'_t = 3(1-t^2),$$

тогда при  $t \in (-1; 1)$  функция  $y(t)$  возрастает, а при функция  $t \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$   $y(t)$  убывает.

$$y'_x = \frac{3(1-t^2)}{2(1-t)} = \frac{3(1+t)}{2}.$$

Касательная параллельна оси абсцисс при  $t = -1$  в точке  $(-3; -2)$ .

7<sup>0</sup>. Найдем  $y''_{xx} = \frac{3}{4(1-t)}$ , следовательно, при  $t \in (-\infty; 1)$  график кривой будет

выпуклым вниз, а при  $t \in (1; +\infty)$  – выпуклым вверх.

8<sup>0</sup>.

Особые точки:

$$\begin{cases} x'(t) = 0 \\ y'(t) = 0 \end{cases}, \text{ при } t = 1 \text{ точка } (1; 2) \text{ является особой точкой.}$$

Представим  $x(t)$  и  $y(t)$  в следующем виде:

$$x(t) = 1 - (t-1)^2, \quad y(t) = 2 - 3(t-1)^2 - (t-1)^3$$

Эти представления являются разложениями функций в ряд Тейлора по степеням  $t-1$ . Отсюда сразу, что  $p = 2$ , а  $q = 3$ , т.к.  $\{x''_{tt}(1); y''_{tt}(1)\} = \{-2; -6\} \neq 0$  и  $\{x'''_{ttt}(1); y'''_{ttt}(1)\} = \{0; -6\} \neq 0$  не коллинеарны. Таким образом точка  $(1; 2)$  является точкой возврата I рода.

Точек самопересечения нет, т.к. система  $\begin{cases} 2t_1 - t_1^2 = 2t_2 - t_2^2 \\ 3t_1 - t_1^3 = 3t_2 - t_2^3 \end{cases}$  не имеет решений,

для которых  $t_1 \neq t_2$ .

9<sup>0</sup>. Составим таблицу (табл.2.9):

Таблица 2.9

$t$	$x(t)$	$y(t)$	$y(x)$	$x'(t)$	$y'(t)$	$y'_x$	$y''_{xx}$	Краткая характеристика поведения функции
$(+\infty; -1)$	$\rightarrow$	$\downarrow$	$\searrow$	+	-	-	+	Выпуклость вниз
-1	-3	-2						Касательная горизонтальна
$(-1; 1)$	$\rightarrow$	$\uparrow$	$\nearrow$	+	+	+	+	Выпуклость вниз
1	1	2	...	0	0	...	...	Точка возврата I рода
$(1; +\infty)$	$\leftarrow$	$\downarrow$	$\searrow$	-	-	-	-	Выпуклость вверх

10<sup>0</sup>. Построим график (рис.2.14):

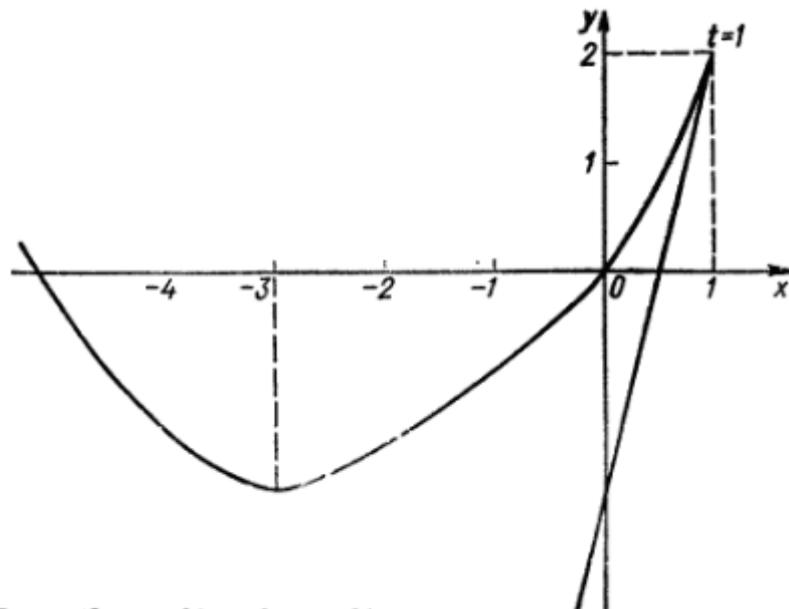


Рис.2.14

## 2.3. Построение кривых в полярной системе координат

Напомним некоторые сведения из аналитической геометрии на плоскости и математического анализа.

### 2.3.1. Уравнение прямой в полярной системе координат

В полярной системе координат уравнение прямой, расстояние до которой от полюса  $p$ , а полярный угол нормали  $\alpha$  легко получить, например, так: пусть  $M(\rho, \varphi)$  произвольная точка прямой,  $P$  – точка пересечения прямой с ее нормалью (рис.2.15).

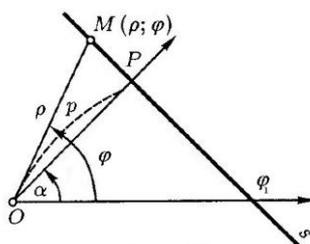


Рис.2.15

Из треугольника  $OMP$  находим:

$$\rho \cos(\varphi - \alpha) = p \Rightarrow \rho = \frac{p}{\cos(\varphi - \alpha)}.$$

В частности, если прямая параллельна полярной оси, то  $\rho = \frac{p}{\sin \varphi}$ , т.к.

$\alpha = \frac{\pi}{2}$ , а  $\varphi_1 = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}$ . Если прямая перпендикулярна полярной оси, то  $\rho = \frac{p}{\cos \varphi}$ , т.к.

$\alpha = 0$ , а  $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ .

### 2.3.2 Уравнение касательной к кривой в полярной системе координат

Пусть прямая является касательной в точке  $M$  к некоторой кривой, заданной уравнением  $\rho = f(\varphi)$  в полярной системе координат (рис.2.16).

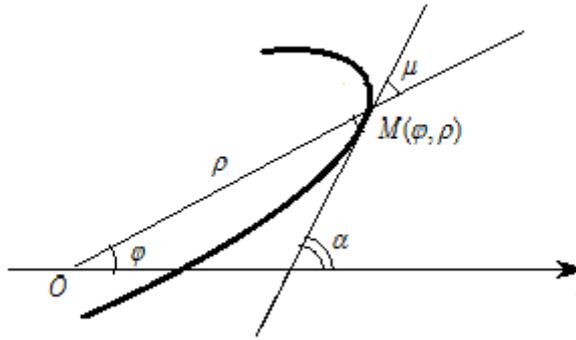


Рис.2.16

Тогда при естественном переходе к декартовым координатам получим систему уравнений:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi = f(\varphi) \cos \varphi \\ y = \rho \sin(\varphi) = f(\varphi) \sin \varphi \end{cases}$$

Ее можно рассматривать как параметрическое задание нашей кривой, где угол  $\varphi$  является параметром.

Из геометрического смысла производной угловой коэффициент касательной будет равен

$$k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{y'_\varphi}{x'_\varphi} = \frac{\rho'_\varphi \sin \varphi + \rho \cos \varphi}{\rho'_\varphi \cos \varphi - \rho \sin \varphi}.$$

Однако лучше использовать более простую формулу:

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\rho}{\rho'_\varphi}.$$

Действительно

$$\operatorname{tg} \mu = \operatorname{tg}(\alpha - \varphi) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \varphi} = \frac{\frac{y'_x - \frac{y}{x}}{x} - \frac{y}{x}}{1 + \frac{y'_x}{x} \frac{y}{x}} = \frac{xy'_x - y}{x + yy'_x} = \frac{\rho}{\rho'_\varphi}.$$

### 2.3.4 Исследование функции и построение кривой в полярной системе координат

Существуют два вида полярных координат:

- 1) строго полярная система координат, где  $\rho \geq 0$ ;
- 2) обобщенная полярная система координат, где как  $\rho \geq 0$ , так и  $\rho \leq 0$ .

Мы будем рассматривать полярные координаты первого вида.

Пусть исследуемая кривая задана уравнением  $\rho = f(\varphi)$ .

Можно исследовать ее как кривую, заданную параметрически, считая, что

$$\varphi = t, \text{ а } \begin{cases} x = f(t) \cos t \\ y = f(t) \sin t \end{cases}, \text{ как это было в предыдущем разделе. Однако, часто это}$$

приводит к громоздким вычислениям.

Намного естественнее рассматривать  $\rho = f(\varphi)$  как функцию от аргумента  $\varphi$ , где  $-\infty < \varphi < +\infty$ , и исследовать ее методами дифференциального исчисления, также как функцию  $y = f(x)$  в декартовой системе координат, меняя в ней  $\rho$  на  $y$ , а  $\varphi$  на  $x$ . Тогда исследование проводится по ранее рассмотренному плану. Но при этом обычные геометрические понятия такие, как касательные, экстремумы, выпуклость графика и др., следует вычислять по формулам, преобразованным для полярной системы координат

Отметим некоторые свойства графика функции  $\rho = f(\varphi)$  в сравнении его с графиком  $y = f(x)$ :

1) Если областью определения функции  $y = f(x)$  является, например, отрезок  $a \leq x \leq b$ , то для функции  $\rho = f(\varphi)$  соответствующее множество  $a \leq \varphi \leq b$  является сектором;

2) Если функция  $y = f(x)$  ограничена ( $m < f(x) < M$ ), т.е. ее график заключен в полосе между прямыми  $y = m$  и  $y = M$ , то  $\rho = f(\varphi)$  тоже ограничена и ее график находится в кольце  $m < \rho < M$ ;

3) Если функция  $y = f(x)$  – четная, то в декартовых координатах точки  $A(x, f(-x))$  и  $B(x, f(x))$  симметричны относительно оси  $Oy$ . В то же время в полярной системе координат точки  $A_1(f(-\varphi), \varphi)$  и  $B_1(f(\varphi), \varphi)$  оказываются симметричными относительно полярной оси (рис.2.17)

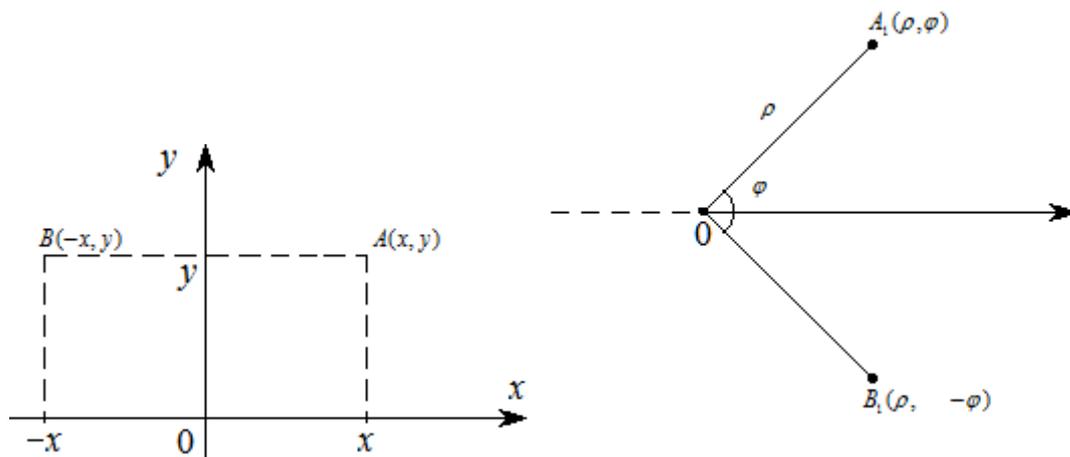


Рис.2.17

Нечетной функция  $\rho = f(\varphi)$  может быть только в случае  $f(\varphi) \equiv 0$ , так как  $\rho \geq 0$ .

4) Если функция  $y = f(x)$  является периодической, то функция  $\rho = f(\varphi)$  тоже будет периодической с таким же периодом. Поэтому достаточно построить график функции  $\rho = f(\varphi)$  в секторе с углом у вершины, равным периоду, а затем с помощью постепенного поворота на углы, кратные периоду, построить искомый график.

**Пример 1.** Построить эскиз графика  $\rho = a \sin 3\varphi$ .

**Решение:**

Рассмотрим функцию  $y = \sin 3x$ , с периодом  $T = \frac{2\pi}{3}$ . Найдем область

определения функции  $\rho = a \sin 3\varphi$ :  $\sin 3\varphi \geq 0 \Rightarrow 2\pi k \leq 3\varphi \leq \pi + 2\pi k, k \in Z$ ,

$$\frac{2\pi k}{3} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}, k \in Z \Rightarrow T = \frac{2\pi}{3}.$$

Удобно построить кривую в секторе  $\left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$ , при этом в секторе  $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right]$

точек кривой нет. Достаточно построить, например, по точкам, только первый «лепесток», а остальную часть построить с помощью поворота на углы, кратные периоду (рис.2.18)

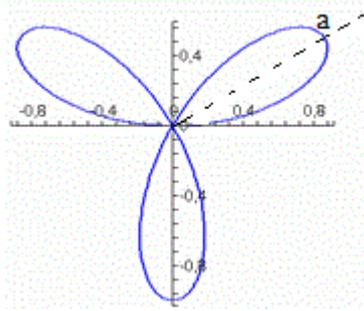


Рис.2.18

Это кривая называется *трехлепестковой розой*.

5) Как правило, при определении полярной системы координат, положительным изменением угла  $\varphi$  (поворота точки) считается поворот против часовой стрелки. Если функция  $y = f(x)$  возрастает в некотором промежутке, то в полярной системе координат для функции  $\rho = f(\varphi)$  большим значениям  $\varphi$  из этого промежутка соответствуют большие значения  $\rho$  и при движении против часовой стрелки радиус увеличивается.

Если функция  $y = f(x)$  имеет экстремум при  $x = x_0$ , то функция  $\rho = f(\varphi)$  имеет экстремум при  $\varphi = \varphi_0$ .

6) Горизонтальная асимптота  $y = c$  кривой  $y = f(x)$  в декартовой системе координат переходит в *асимптотическую окружность*  $\rho = c$  в полярной системе координат. В частности, если  $c = 0$ , то окружность вырождается в точку.

Наметим общий план построения кривой  $\rho = f(\varphi)$  в полярной системе координат:

1°. Область определения функции следует искать из решения неравенства  $\rho \geq 0$ .

2°. Проверить симметрию и периодичность.

3°. Найти точки самопересечения из решения уравнения  $f(\varphi_1) = f(\varphi_2)$ .

4°. Найти  $\rho' = f'(\varphi)$ . Исследовать функцию на монотонность и экстремумы.

5°. Найти асимптоты кривой. Будем искать уравнение асимптоты в виде уравнения прямой в полярной системе координат  $\rho = \frac{P}{\cos(\varphi - \alpha)}$  (рис.2.19).

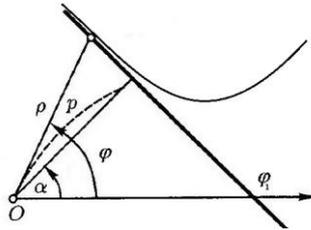


Рис.2.19

Для нахождения угла  $\alpha$  (угла, образованного перпендикуляром, опущенным на асимптоту из полюса, с полярной осью) (рис.2.) исследуют по уравнению заданной кривой, существует ли такое значение  $\varphi = \varphi_1$ , для которого соответствующее значение  $\rho = \infty$ . Если такое значение  $\varphi$  найдено, то кривая имеет бесконечную ветвь. Далее надо найти

$$p = \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_1} \frac{\rho^2}{|\rho'|}, \quad \alpha = \varphi_1 \pm \frac{\pi}{2}.$$

Если этот предел существует, то бесконечная ветвь имеет асимптоту. Если этот предел не существует, то бесконечная ветвь кривой не имеет асимптоты (т.е. является параболической ветвью). Если  $p > 0$ , то асимптота находится слева от радиус-вектора, который простирается в бесконечность, если  $p < 0$  – то слева.

6°. Касательные к кривой  $\rho = f(\varphi)$ .

В 2.3.2 мы вывели формулу  $\operatorname{tg} \mu = \frac{\rho}{\rho'_{\varphi}}$ . Для того, чтобы найти на кривой  $\rho = f(\varphi)$  точки, в которых касательная перпендикулярна к полярной оси, надо в этой формуле положить  $\mu = \frac{\pi}{2} - \varphi + k\pi$ . Значения  $\varphi$ , найденные из этого уравнения, и определяют искомые точки. Касательные к кривой  $\rho = f(\varphi)$  в точках  $\rho_{\max}$  и  $\rho_{\min}$  перпендикулярны к радиус-вектору точки касания.

7°. Выпуклость, вогнутость кривой  $\rho = f(\varphi)$ . Точки перегиба.

Если кривая имеет точки перегиба, то соответствующие значения  $\varphi$  должны быть корнями нечетной кратности уравнения

$$\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho'\rho'' = 0.$$

Обозначим за  $D = \rho^2 + 2\rho'^2 - \rho'\rho''$ . Если  $D > 0$ , то кривая выпукла от полюса, а если  $D < 0$ , то кривая выпукла к полюсу.

**Пример 2.** Построить график функции  $\rho = \frac{a}{\cos^2 \varphi}$ .

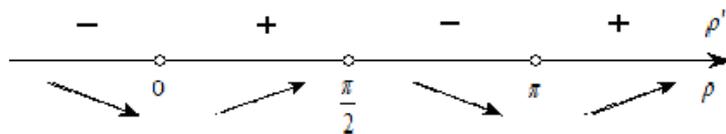
**Решение:**

1) ООФ:  $\cos \varphi \neq 0 \Rightarrow \varphi \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$ . Кривая имеет бесконечные ветви.

2) Кривая симметрична относительно полярной оси ( $\rho(\varphi) = \rho(-\varphi)$ ).

3) Функция периодическая с периодом  $T = 2\pi$ , следовательно, все исследование можно проводить на  $[0, 2\pi]$

4)  $\rho' = \frac{2a \sin \varphi}{\cos^3 \varphi}$ ;  $\rho' = 0 \Rightarrow \sin \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0; \pi$ .



$$\rho_{\min}(0) = a; \quad \rho_{\max}(\pi) = a.$$

5) Найдем точки, в которых касательная к кривой параллельна полярной оси.

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\rho}{\rho'_\varphi}; \quad \mu = k\pi - \varphi \Rightarrow \operatorname{tg}(k\pi - \varphi) = \frac{a}{\cos^2 \varphi} : \frac{2a \sin \varphi}{\cos^3 \varphi} = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \varphi$$

$$\operatorname{tg}^2 \varphi = -\frac{1}{2} \text{ решений нет.}$$

6) Найдем точки, в которых касательная к кривой перпендикулярна полярной оси.

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\rho}{\rho'_\varphi} \quad \mu = \frac{\pi}{2} - \varphi + k\pi \Rightarrow \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi + k\pi\right) = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \varphi \Rightarrow \varphi = 0; \varphi = \pi, \text{ т.е. в}$$

точках  $(a, 0)$  и  $(a, \pi)$ .

7) Для нахождения точек перегиба решаем уравнение

$\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho'\rho'' = 0$ . Имеем  $\cos \varphi = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$ . На промежутке  $[0, 2\pi]$  получаем

четыре значения  $\varphi$ , которые и будут точками перегиба функции.

8) Асимптоты.

При  $\varphi = \frac{\pi}{2}$   $\rho = \infty$ , следовательно, возможна асимптота, но

$$\rho = \lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\rho^2}{|\rho'|} = \lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{a^2 \cos^3 \varphi}{\cos^4 \varphi 2a \sin \varphi} = \lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{a}{\sin 2\varphi} = \infty, \text{ откуда следует, что асимптот}$$

нет.

9) Построим кривую в полярной системе координат (рис.2.20).

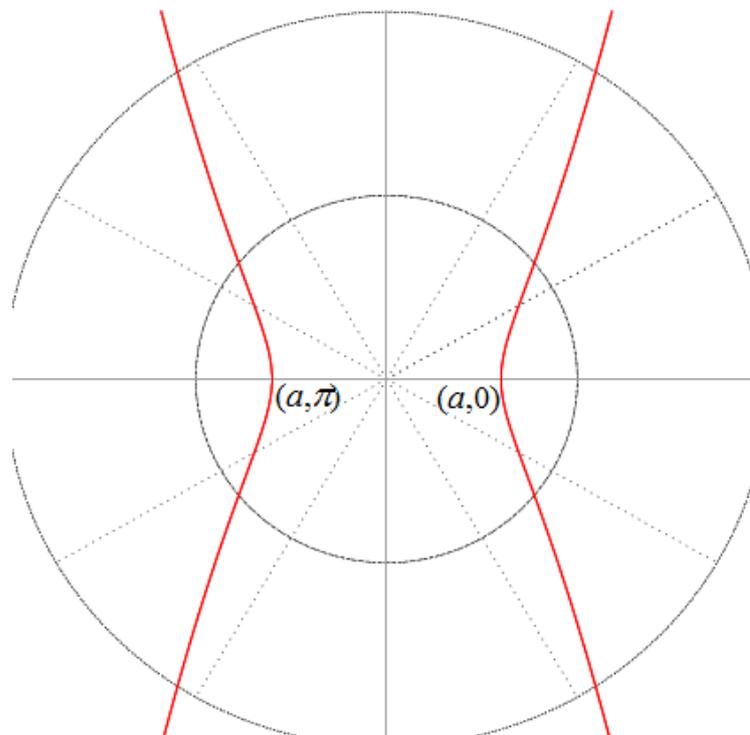


Рис.2.20

**Пример 3.** Построить график функции  $\rho = \varphi + \frac{1}{\varphi}$ .

**Решение:**

1) ООФ:  $\rho = \frac{\varphi^2 + 1}{\varphi} \Rightarrow \varphi > 0$ .

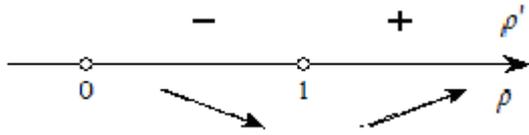
2)  $\rho(-\varphi) = -\varphi - \frac{1}{\varphi} = -\left(\varphi + \frac{1}{\varphi}\right) = -\rho(\varphi)$ , следовательно, график симметрией не

обладает.

3) Непериодическая.

4) Имеет бесконечные ветви, т.к.  $\lim_{\varphi \rightarrow +0} \left( \varphi + \frac{1}{\varphi} \right) = +\infty$  и  $\lim_{\varphi \rightarrow +\infty} \left( \varphi + \frac{1}{\varphi} \right) = +\infty$ .

$$5) \rho' = 1 - \frac{1}{\varphi^2} = \frac{\varphi^2 - 1}{\varphi^2} = \frac{(\varphi - 1)(\varphi + 1)}{\varphi^2} \Rightarrow \rho' = 0, \text{ при } \varphi = \begin{cases} -1 \notin D(\rho) \\ 1 \end{cases}$$



Следовательно,  $\rho_{\min}(1) = 2$ .

6) Асимптоты кривой  $\rho = \frac{p}{\cos(\varphi - \alpha)}$ .

$$p = \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_1} \frac{\rho^2}{|\rho'|} = \lim_{\varphi \rightarrow +0} \frac{\left( \varphi + \frac{1}{\varphi} \right)^2}{\left| \frac{\varphi^2 - 1}{\varphi^2} \right|} = \lim_{\varphi \rightarrow +0} \frac{(\varphi^2 + 1)^2}{|\varphi^2 - 1|} = 1, \text{ кривая имеет асимптоту } \begin{cases} p = 1 \\ \alpha = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

при  $\varphi \rightarrow +0$ .

$$p = \lim_{\varphi \rightarrow +\infty} \frac{(\varphi^2 + 1)^2}{|\varphi^2 - 1|} = +\infty, \text{ следовательно, при } \varphi \rightarrow +\infty \text{ асимптоты у данной}$$

кривой нет.

7) Точки перегиба.

$$\rho'' = \frac{2}{\varphi^3}$$

$$D = \rho^2 + 2\rho'^2 - \rho'\rho'' = \left( \varphi + \frac{1}{\varphi} \right)^2 + 2\left( 1 - \frac{1}{\varphi^2} \right)^2 - \left( \varphi + \frac{1}{\varphi} \right) \frac{2}{\varphi^3} = \varphi^2 + 4 - \frac{5}{\varphi^2} = \frac{(\varphi^2 + 5)(\varphi^2 - 1)}{\varphi^2}$$

$D = 0$  при  $\varphi = \begin{cases} -1 \notin D(\rho) \\ 1 \end{cases}$ . Исследуя знак  $D$ , получаем, что  $\varphi = 1$  является точкой

перегиба.

8) Построим кривую в полярной системе координат (рис.2.21).

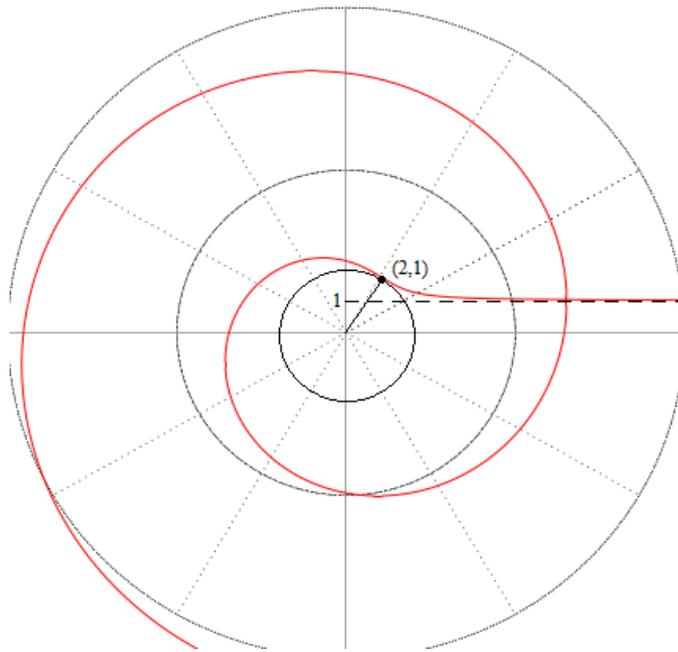


Рис.2.21

## 2.4. Построение графика функции или кривой, заданных неявно

Рассмотрим функцию, заданную неявно уравнением

$$F(x, y) = 0.$$

В зависимости от того, какой является функция  $F(x, y)$  – алгебраической или трансцендентной, кривые, представленные уравнением  $F(x, y) = 0$ , делятся на алгебраические и трансцендентные.

Укажем на некоторые особенности исследования функции и построения графика кривой  $F(x, y) = 0$ .

### 1. Точки пересечения с осями

С осью абсцисс – это решения системы уравнений 
$$\begin{cases} F(x, 0) = 0 \\ F(x, y) = 0 \end{cases}.$$

С осью ординат – это решения системы уравнений 
$$\begin{cases} F(0, y) = 0 \\ F(x, y) = 0 \end{cases}.$$

### 2. Симметрия

Если  $F(x, y) = F(-x, y)$  то кривая симметрична относительно оси ординат.

Если  $F(x, y) = F(x, -y)$ , то кривая симметрична относительно оси абсцисс.

Если  $F(x, y) = F(-x, -y)$ , то кривая симметрична относительно начала

координат.

Если  $F(x, y) = F(y, x)$ , то кривая симметрична относительно прямой  $y = x$ .

### 3. Асимптоты для алгебраических кривых

Для нахождения горизонтальных асимптот кривой  $F(x, y) = 0$  надо приравнять к нулю коэффициент при высшей степени  $x$ , входящей в уравнение, причем, если этот коэффициент – постоянная величина, то горизонтальных асимптот нет.

Для нахождения вертикальных асимптот кривой  $F(x, y) = 0$  надо приравнять к нулю коэффициент при высшей степени  $y$ , входящей в уравнение, причем, если этот коэффициент – постоянная величина, то горизонтальных асимптот нет.

Для нахождения наклонных асимптот кривой  $F(x, y) = 0$  надо в уравнении кривой заменить  $y$  на  $y = kx + b$ , приравнять нулю коэффициенты при двух высших степенях  $x$  и полученную систему решить относительно  $k$  и  $b$ .

#### ***2.4.1 Построение на плоскости некоторых кривых, заданных неявно, без использования понятия частной производной функции двух переменных***

В этом разделе рассмотрим лишь частные случаи построения графиков неявно заданных кривых:

1) Если уравнение  $F(x, y) = 0$  можно разрешить относительно одной из переменных, тогда можно провести исследование и построить график, как в декартовой системе координат (раздел **2.1**).

2) Если уравнение  $F(x, y) = 0$  можно параметризовать, т.е. ввести параметр  $t$  так, что оно будет равносильно соотношению  $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, t \in T$  (или несколькими таким соотношениям), тогда можно провести исследование и построить график, как при параметрическом задании функции (раздел **2.2**).

3) Если уравнение  $F(x, y) = 0$  можно привести к более простому виду в полярной системе координат (раздел **2.3**).

**Пример 1.** Нарисовать в системе  $XOY$  эскиз кривой, заданной уравнением

$$x^4 + 2y^2 - x^2 - y^4 = 0.$$

**Решение:**

1. Для нахождения области определения неявно заданной функции разрешим уравнение относительно  $y$ . Получим

$$y = \pm\sqrt{1 + \sqrt{x^4 - x^2 + 1}} \text{ и } y = \pm\sqrt{1 - \sqrt{x^4 - x^2 + 1}},$$

т.е. кривая будет иметь две ветви. В области определения обеих ветвей должно выполняться неравенство

$$x^4 - x^2 + 1 \geq 0, \text{ что верно для любого } x \in \mathbb{R}.$$

Для точек второй ветви необходимо, чтобы  $\sqrt{x^4 - x^2 + 1} \leq 1$ , что равносильно  $x^2 - 1 \leq 0$ , или  $|x| \leq 1$ . Следовательно, область определения первой ветви  $(-\infty; +\infty)$ , а второй  $[-1; 1]$ .

2. Кривая обладает симметрией относительно осей  $Ox$  и  $Oy$ .

3. Кривая не имеет горизонтальных и вертикальных асимптот, т.к. коэффициенты при высших степенях  $x$  и  $y$  в уравнении постоянные.

4. Наклонные асимптоты.

Подставим в уравнение  $y = kx + b$  и получим

$$x^4 - (kx + b)^4 - x^2 + 2(kx + b)^2 = 0$$

Раскроем скобки и приведем подобные

$$(1 - k^4)x^4 - 4k^3bx^3 - (1 + 6k^2b^2 - 2k^2)x^2 + 4(kb - kb^3)x + 2b^2 - b^4 = 0.$$

Приравняем нулю коэффициенты при  $x^4$  и  $x^3$ . Получим систему

$$\begin{cases} k^4 - 1 = 0 \\ 4k^3b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = \pm 1 \\ b = 0 \end{cases}.$$

Следовательно, прямые  $y = x$  и  $y = -x$  наклонные асимптоты кривой.

5. Можно построить в декартовой системе координат функцию

$$y = \sqrt{1 + \sqrt{x^4 - x^2 + 1}} - \text{часть рассматриваемой кривой.}$$

$$y' = \frac{4x^3 - 2x}{4\sqrt{1 + \sqrt{x^4 - x^2 + 1}}\sqrt{x^4 - x^2 + 1}};$$

$$y' = 0 \text{ при } x = 0, x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Исследуя на знак  $y'$ , получим, что  $y_{\min}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = y_{\min}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx 1.37$ ;  $y_{\max}(0) = \sqrt{2}$

6. Для определения выпуклости, вогнутости графика требуется вычислить  $y''$ , которая в этом примере имеет достаточно громоздкий вид.

График кривой представлен на рис.2.22

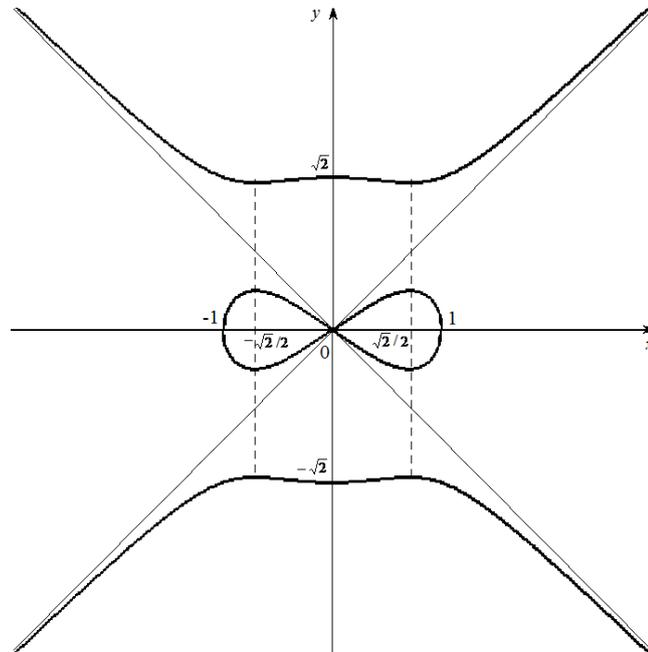


Рис.2.22

**Пример 2.** Нарисовать в системе  $ХОУ$  эскиз кривой, заданной уравнением  $x^3 + y^3 = axy$ .

**Решение:**

Не умаляя общности можно считать, что  $a = 1$ .

$$x^3 + y^3 = xy$$

Разделим обе части уравнения на  $x^3$ :

$$1 + \left(\frac{y}{x}\right)^3 = \frac{y}{x^2},$$

введем параметр  $t = \frac{y}{x}$ , тогда уравнение примет вид

$$1 + t^3 = t \frac{1}{x}, \text{ откуда следует, что } x = \frac{t}{1+t^3}, \text{ а } y = tx = \frac{t^2}{1+t^3}.$$

Таким образом, получаем параметрическое задание кривой:

$$\begin{cases} x = \frac{t}{1+t^3} \\ y = \frac{t^2}{1+t^3} \end{cases}.$$

Далее исследуем кривую и строим ее график как в разделе 2.2.

1<sup>0</sup>. Функция  $x(t) = \frac{t}{1+t^3}$  имеет область определения

$D(x(t)) = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$ . Функцией  $y(t) = \frac{t^2}{1+t^3}$  имеет такую же область

определения  $D(y(t)) = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$ , следовательно  $D(y(x(t))) = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$ .

2<sup>0</sup>. Вычислим пределы:

$$\lim_{t \rightarrow -1+0} x(t) = +\infty, \lim_{t \rightarrow -1-0} x(t) = -\infty \text{ и } \lim_{t \rightarrow -1+0} y(t) = +\infty, \lim_{t \rightarrow -1-0} y(t) = -\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0 \text{ и } \lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$$

3<sup>0</sup>. Точки пересечения с осями:

с  $Ox$ :  $y = 0$  при  $t = 0 \Rightarrow x = 0$ ;

с  $Oy$ :  $x = 0$  при  $t = 0 \Rightarrow y = 0$ , следовательно, кривая проходит через начало координат.

4<sup>0</sup>. График кривой симметричен относительно прямой  $y = x$ .

5<sup>0</sup>. Асимптоты:

Вертикальных и горизонтальных асимптот нет, т.к. нет значений

параметра  $t$ , при которых  $\begin{cases} \lim_{t \rightarrow t_1} \psi(t) = \infty, \\ \lim_{t \rightarrow t_1} \varphi(t) = a. \end{cases}$  или  $\begin{cases} \lim_{t \rightarrow t_1} \psi(t) = b, \\ \lim_{t \rightarrow t_1} \varphi(t) = \infty. \end{cases}$

Будем искать наклонную асимптоту  $y = kx + b$ , т.к. при  $t = -1$   $\begin{cases} \lim_{t \rightarrow -1} \psi(t) = \infty, \\ \lim_{t \rightarrow -1} \varphi(t) = \infty. \end{cases}$

$$\lim_{t \rightarrow -1} \frac{y}{x} = \lim_{t \rightarrow -1} t = -1; \quad \lim_{t \rightarrow -1} (y + x) = \lim_{t \rightarrow -1} \frac{t(t+1)}{t^3+1} = \lim_{t \rightarrow -1} \frac{t}{t^2-t+1} = -\frac{1}{3}.$$

Поэтому прямая  $y = -x - \frac{1}{3}$  есть наклонная асимптота исследуемой кривой.

6<sup>0</sup>. Найдем первые производные функций  $x(t)$  и  $y(t)$ :

$$x'_t = \frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2}, \text{ точка } t_0 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} - \text{единственная точка экстремума функции } x(t),$$

приблизленно точку  $t_0 \approx 0.79$

Функции  $x(t)$  возрастает при  $t \in (-\infty; -1) \cup (-1; t_0)$  и убывает при  $t \in (t_0; +\infty)$ .

$$y'_t = \frac{t(2-t^3)}{(1+t^3)^2}, \quad y'(t) = 0 \text{ при } t = 0 \text{ и } t = \sqrt[3]{2} = \frac{1}{t_0}, \text{ считаем, что } \sqrt[3]{2} \approx 1.26.$$

Исследуя знак производной  $y'(t)$ , получим, что при  $t \in (0; \sqrt[3]{2})$  функция  $y(t)$  возрастает, а при  $y(t) t \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (\sqrt[3]{2}; +\infty)$  функция  $y(t)$  убывает.

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{t(2-t^3)}{(1+t^3)^2} \cdot \frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2} = \frac{t(2-t^3)}{(1-2t^3)^2}$$

Касательная к кривой параллельна оси абсцисс:  $y'_x = 0$  при  $t = \sqrt[3]{2} = \frac{1}{t_0}$ , т.е. в точке  $\left(\frac{\sqrt[3]{2}}{3}; \frac{\sqrt[3]{4}}{3}\right)$ .

Касательная к кривой параллельна оси ординат:  $y'_x = \infty$  при  $t = t_0 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$  в точке  $\left(\frac{2}{3\sqrt[3]{2}}; \frac{2}{3\sqrt[3]{4}}\right)$ .

7<sup>0</sup>.  $y''_{xx} = \frac{2(1+t^3)^4}{(1-2t^3)^3}$ , следовательно, при  $t \in (-\infty; -1) \cup (-1; t_0)$  график кривой будет выпуклым вниз, а при  $t \in (t_0; +\infty)$  – выпуклым вверх.

8<sup>0</sup>.

Особых точек нет.

Точки самопересечения:

$$\begin{cases} \frac{t_1}{1+t_1^3} = \frac{t_2}{1+t_2^3} \\ \frac{t_1^2}{1+t_1^3} = \frac{t_2^2}{1+t_2^3} \\ t_1 \neq t_2 \end{cases} \quad \begin{cases} t_1(1+t_2^3) = t_2(1+t_1^3) \\ t_1^2(1+t_2^3) = t_2^2(1+t_1^3) \\ t_1 \neq t_2 \end{cases} \text{ решений нет.}$$

9<sup>0</sup>. Составим таблицу (табл.2.10):

Таблица 2.10

$t$	$x(t)$	$y(t)$	$y(x)$	$x'(t)$	$y'(t)$	$y'_x$	$y''_{xx}$	Краткая характеристика поведения функции
$(+\infty; -1)$	$\rightarrow$	$\downarrow$	$\swarrow$	+	-	-	+	Выпуклость вниз
$-1-0$	$-\infty$	$-\infty$	...	$+\infty$	$-\infty$	-1	...	Асимптотическая точка
$-1+0$	$+\infty$	$+\infty$	...	$+\infty$	$-\infty$	-1	...	Асимптотическая точка
$(-1; 0)$	$\rightarrow$	$\downarrow$	$\swarrow$	+	-	-	+	
0	0	0	0	1	0	0	2	
$(0; t_0)$	$\rightarrow$	$\uparrow$	$\swarrow$	+	-	-	+	Выпуклость вниз
$t_0$	$x(t_0)$	$y(t_0)$	...	0	0	0	0	Касательная вертикальна Точка перегиба
$(t_0; 1/t_0)$	$\leftarrow$	$\downarrow$	$\swarrow$	-	+	+	-	Выпуклость вверх
$1/t_0$	...	...	...	0	+	$+\infty$	...	Касательная горизонтальна
$(1/t_0; +\infty)$	$\leftarrow$	$\downarrow$	$\swarrow$	-	+	-	-	Выпуклость вверх

10<sup>0</sup>. Построим график (рис.2.12):

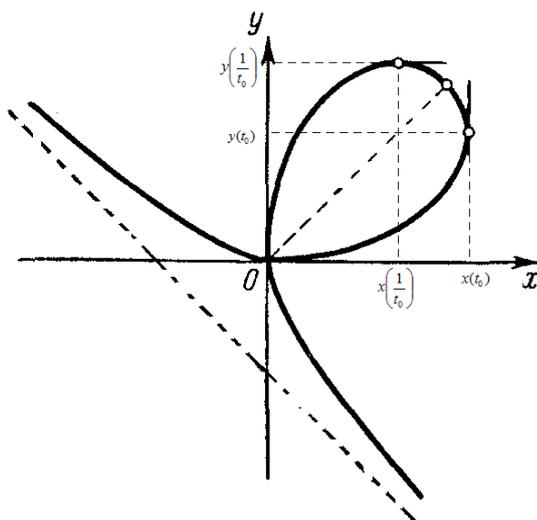


Рис.2.23

Эта кривая носит в математике название "*Декартов лист*".

Впервые уравнение этой кривой исследовал Р.Декарт. В 1638 году в письме к П.Ферма он определил эту кривую как геометрическое место точек, для каждой из которых сумма кубов абсциссы и ординаты пропорциональна их произведению. Однако, он построил только петлю в первом координатном угле, где  $x$  и  $y$  принимают положительные значения. Декарт полагал, что петля симметрично повторяется во всех четырёх координатных четвертях, в виде четырёх лепестков цветка. В то время эта кривая называлась цветком жасмина (англ. *jasmine flower*, фр. *fleur de jasmin*). В современном виде эту кривую впервые представил Х.Гюйгенс в 1692 году.

**Пример 3.** Нарисовать в системе  $XOY$  эскиз кривой, заданной уравнением  $(x^2 + y^2)^2 = 2c^2(x^2 - y^2)$ .

**Решение:**

Перепишем уравнение этой кривой в полярной системе координат

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}$$

Получим уравнение  $\rho = c\sqrt{2\cos 2\varphi}$ . Исследуя его как в разделе 2.3, построим кривую (рис.2.24).

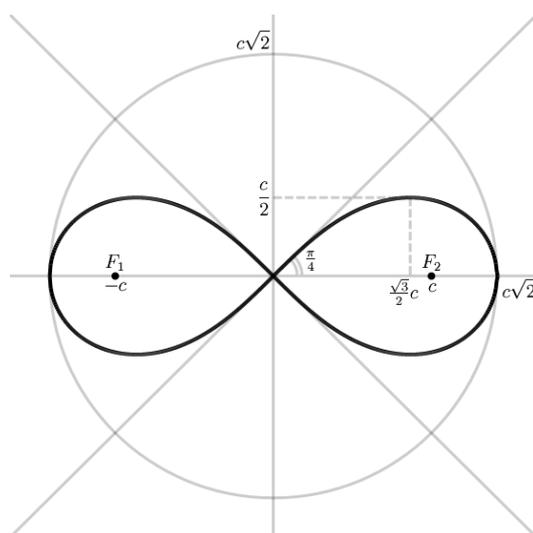


Рис.2.24

Эту кривую в математике называют *лемниской Бернулли* и определяют как геометрическое место точек, произведение расстояний от которых до двух заданных точек (фокусов) постоянно и равно квадрату половины расстояния между фокусами. Вообще, лемниской называется линия уровня любого многочлена от нескольких переменных.

Название происходит от греч. λημνίσκος [Лемнискос|рус.] — лента, повязка. В Древней Греции «лемниской» называли бантик, с помощью которого прикрепляли венок к голове победителя на спортивных играх. Эту лемнискату называют в честь швейцарского математика Якоба Бернулли, положившего начало её изучению.

#### **2.4.2 Общий случай построения на плоскости кривой, заданной неявно**

Дополним предыдущий раздел исследования, используя понятия частных производных функции двух переменных.

Если в некоторой области  $D \in R^2$  функция  $F(x, y)$  имеет непрерывные частные производные первого порядка, то через каждую точку  $M(x, y)$ , координаты которой удовлетворяют уравнению  $F(x, y) = 0$ , проходит (и только одна) простая дуга кривой, координаты каждой точки которой удовлетворяют тому же уравнению при условии, что частные производные  $F'_x, F'_y$  в точке  $M(x, y)$  не равны нулю одновременно.

Точки области  $D$ , удовлетворяющие уравнениям

$$F(x, y) = 0, F'_x(x, y) = 0, F'_y(x, y) = 0 \quad (*)$$

называют *особыми точками*.

Точки, в которых  $F'_x, F'_y$  не обращаются в нуль одновременно, называют *обыкновенными*. Если в точке  $M_0(x_0, y_0)$  обращаются в нуль, кроме самой функции, обе ее частные производные первого порядка, но не все производные второго порядка равны нулю, то точка  $M_0(x_0, y_0)$  называется *двойной особой точкой*.

Если имеют место условия (\*), а также

$$F''_{xx}(x, y) = 0, F''_{xy}(x, y) = 0, F''_{yy}(x, y) = 0, \quad (**)$$

но среди производных третьего порядка хотя бы одна в точке  $M_0(x_0, y_0)$  отлична от нуля, то точка  $M_0(x_0, y_0)$  называется *тройной особой точкой*. Вообще, если в точке  $M_0(x_0, y_0)$  все частные производные от  $F(x, y)$  до  $(n-1)$ -го порядка включительно обращаются в нуль, но среди производных  $n$ -го порядка существует хотя бы одна, отличная от нуля, то точка  $M_0(x_0, y_0)$  называется  *$n$ -кратной особой точкой*. Тогда кривая имеет  $n$  касательных в  $M_0(x_0, y_0)$ , причем некоторые из них могут совпадать или оказаться мнимыми (число последних – четное).

Для двойной особой точки  $M_0(x_0, y_0)$  угловые коэффициенты двух касательных в этой точке являются корнями квадратного уравнения

$$F''_{xx} + 2F''_{xy}y' + F''_{yy}y'^2 = 0 \quad (x = x_0, y = y_0).$$

Корни уравнения могут быть действительными и различными (узловая точка или точка самопересечения), совпадающими (точка возврата или точка самоприкосновения) или мнимыми (изолированная точка).

Для тройной особой точки  $M_0(x_0, y_0)$  угловые коэффициенты трех касательных в точке  $M_0(x_0, y_0)$  являются корнями кубического уравнения

$$F'''_{xxx} + 3F'''_{xxy}y' + 3F'''_{xyy}y'^2 + F'''_{yyy}y'^3 = 0 \quad (x = x_0, y = y_0).$$

Отметим, что координаты точки перегиба кривой, заданной уравнением  $F(x, y) = 0$ , удовлетворяют уравнению

$$F''_{xx}F_y'^2 - 2F''_{xy}F_x'F_y' + F''_{yy}F_x'^2 = 0 \quad (x = x_0, y = y_0).$$

Построение кривой на плоскости удобно проводить по следующей схеме:

1°. Определить область регулярности кривой и особые точки.

2°. Найти точки самопересечения.

3°. Найти касательные, параллельные осям.

4°. Найти точки перегиба.

5°. Определить асимптоты, если они есть.

6°. Отметить некоторые общие свойства кривой (например, симметрию относительно какой-либо оси).

**Пример 4.** Построить кривую, заданную уравнением  $x^4 - y^4 + xy = 0$ .

**Решение:**

Функция  $F(x, y) = x^4 - y^4 + xy$ .

1°. Найдем  $F'_x = 4x^3 + y$  и  $F'_y = -4y^3 + x$ . Начало координат является особой точкой, так как  $F(x, y) = 0$ ,  $F'_x(x, y) = 0$ ,  $F'_y(x, y) = 0$  при  $x = 0$ ,  $y = 0$ .

Далее,  $F''_{xx} = 12x^2$ ,  $F''_{yy} = -12y^2$ ,  $F''_{xy} = 1 \neq 0$ , т.е. начало координат является двойной особой точкой.

Так как  $F''_{xy}{}^2 - F''_{xx}F''_{yy} = 0$  при  $x = 0$ ,  $y = 0$ , то начало координат есть точка самопересечения.

Уравнение  $F''_{xx} + 2F''_{xy}y' + F''_{yy}y'^2 = 0$  при  $x = 0$ ,  $y = 0$  или

$F''_{xx}dx^2 + 2F''_{xy}dxdy + F''_{yy}dy^2 = 0$  дает  $2dxdy = 0$ , откуда следует, что уравнения

касательных в начале координат имеют вид  $x = 0$ , и  $y = 0$ . Таким образом, в окрестности начала координат можно выделить две ветви кривой, касательными к которым служат оси координат.

2°. Системы  $\begin{cases} F'_x(x, y) = 0 \\ F(x, y) = 0 \end{cases}$  и  $\begin{cases} F'_y(x, y) = 0 \\ F(x, y) = 0 \end{cases}$  не имеют решений, отличных от

нулевого. Поэтому кривая не имеет точек, в которых касательные были бы параллельны осям координат.

3°. Координаты точек перегиба должны удовлетворять уравнению  $F''_{xx}F'_y{}^2 - 2F''_{xy}F'_xF'_y + F''_{yy}F'_x{}^2 = 0$ . Решая это уравнение, найдем  $x_{1,2} = \pm 0.8421$  и  $x_{3,4} = \pm 0.5142$ . Таким образом, имеем четыре точки перегиба  $M_1(0.5142; 0.8421)$ ,  $M_2(0.8421; -0.5142)$ ,  $M_3(-0.5142; -0.8421)$  и  $M_4(-0.8421; -0.5142)$ .

4°. Разделив обе части уравнения на  $x^4$  и переходя к пределу при  $x \rightarrow \infty$ , находим  $k_{1,2} = \pm 1$ . Затем из данного уравнения выразим  $y - x = \frac{xy}{(y^2 + x^2)(y + x)}$  и перейдем к пределу при  $x \rightarrow \infty$ ; получим  $y - x \rightarrow 0$ , т.е.  $b_1 = 0$ . Аналогично при  $k_2 = -1$  получим  $b_2 = 0$ . Итак, кривая имеет две наклонные асимптоты  $y = \pm x$ .

5°. Кривая симметрична относительно начала координат, так как ее уравнение не меняется при замене  $x$  на  $-x$  и  $y$  на  $-y$ .

График ее изображен на рис. 2.25.

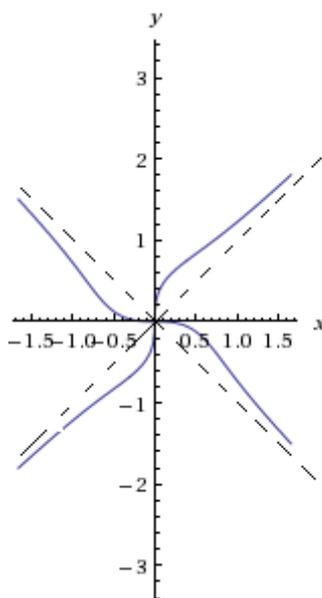


Рис.2.25

### 3. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

#### 3.1. Канонические уравнения кривых второго порядка в декартовой системе координат

Из курса аналитической геометрии известно, что линейное уравнение первого порядка

$$Ax + By + C = 0$$

задает на плоскости прямую и обратно, любая прямая на плоскости может быть задана линейным уравнением первого порядка с двумя переменными.

Рассмотрим теперь уравнение вида

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

которое называется *общим уравнением второго порядка*, если хотя бы один из коэффициентов  $A$ ,  $B$ ,  $C$  отличен от нуля.

Возникает вопрос, что задает на плоскости такое уравнение?

Например,

$$x^2 + y^2 + 1 = 0$$

$$x^2 + y^2 = 0$$

$$x^2 - y^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 = 1.$$

В дальнейшем покажем, что при определенном соотношении коэффициентов общее уравнение второго порядка задает эллипс, гиперболу, параболу, пару прямых, точку или мнимую кривую. Напомним, что такое эллипс, гипербола и парабола.

**Определение.** *Эллипсом* называется геометрическое место точек, для которых сумма расстояний до двух заданных точек плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.

Выведем уравнение эллипса.

Пусть  $M(x, y)$  – произвольная точка эллипса;  $2c$  – расстояние между фокусами эллипса  $F_1$  и  $F_2$ ;  $2a$  – сумма расстояний от точки  $M$  до фокусов эллипса  $F_1$  и  $F_2$ ,  $r_1 = MF_1$  и  $r_2 = MF_2$  – фокальные радиусы, тогда

$$r_1 + r_2 = 2a$$

Очевидно, что  $a > c$  (так как  $2a$  – сумма двух сторон треугольника, а  $2c$  – одна его сторона).

Для вывода простейшего уравнения эллипса выберем следующее расположение координатных осей.

Поместим фокусы эллипса  $F_1$  и  $F_2$  на оси абсцисс симметрично относительно оси ординат. Начало координат будет делить пополам отрезок  $F_1F_2$ . Координаты фокусов будут  $F_1(-c; 0)$   $F_2(c; 0)$ . Следовательно,

$$r_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \quad \text{и} \quad r_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

Тогда по определению эллипса имеем

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

Формально это равенство и является уравнением эллипса. Однако, в такой форме анализировать его и пользоваться им как для решения задач, так и для теоретических исследований не очень удобно. Чтобы привести это уравнение к более простому виду избавимся от иррациональности. Оставим в левой части один корень

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Возведём в квадрат обе части этого уравнения

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2.$$

Теперь раскроем скобки, приведём подобные, сократим на 4 и уединим оставшийся корень квадратный. Тогда получим

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

$$4cx = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2};$$

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx.$$

Теперь ещё раз возведём в квадрат обе части и откроем скобки

$$a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2.$$

Приведём подобные члены, все переменные величины перенесём в левую часть, остальное – в правую часть, и получим

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Разделим обе части этого уравнения на  $a^2(a^2 - c^2)$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Так как  $a > c$ , то можно положить  $a^2 - c^2 = b^2$

Тогда получим простейшую (её называют *канонической*) форму уравнения эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Исследуем форму эллипса по его уравнению. Найдём точки пересечения этой кривой с осями координат: при  $y = 0$  имеем  $A_1(-a; 0)$  и  $A_2(a; 0)$ ; при  $x = 0 \Rightarrow B_1(0; -b)$  и  $B_2(0; b)$ .

Заметим далее, что каждое из двух слагаемых левой части нашего уравнения не превосходит единицы, так как их сумма равна единице, а они оба существенно положительны (т.е. всегда).

$$\text{Поэтому } \frac{x^2}{a^2} \leq 1, \frac{y^2}{b^2} \leq 1. \Rightarrow \begin{matrix} -a \leq x \leq a \\ -b \leq y \leq b \end{matrix}$$

Таким образом, эллипс целиком лежит внутри прямоугольника со сторонами  $2a$  и  $2b$ . Далее заметим, что уравнение сохраняет вид, если заменить  $x$  на  $-x$  или  $y$  на  $-y$  (так как обе переменные входят в чётных степенях). Отсюда следует, что если эллипсу принадлежит некоторая точка  $M_0(x_0, y_0)$ , то одновременно с нею эллипсу принадлежат ещё три точки  $M_1(x_0, -y_0)$ ,  $M_2(-x_0, y_0)$  и  $M_3(-x_0, -y_0)$ , симметричные с точкой  $M_0$  относительно оси  $Ox$ , оси  $Oy$  и начала координат соответственно

Это означает, что наше уравнение описывает замкнутую кривую, у которой оси координат являются осями симметрии.

Поэтому для её построения достаточно построить дугу, расположенную в первой четверти.

Разрешим уравнение эллипса относительно  $y$ :

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Для построения дуги эллипса, расположенной в первой четверти, перед корнем следует взять знак «+» и изменять переменную  $x$  только от  $0$  до  $a$

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \quad 0 \leq x \leq a.$$

При  $x = 0$  получаем точку  $B_2(0; b)$ , с увеличением абсциссы от  $0$  до  $a$  ордината убывает от  $b$  до  $0$ . Теперь мы можем построить дугу эллипса в первой четверти и по соображениям симметрии весь эллипс.

Отрезок оси абсцисс  $A_1A_2 = 2a$  называют *большой осью* эллипса, а отрезок оси ординат  $B_1B_2 = 2b$  малой его осью. Половину их длин – числа  $a$

и  $b$  — обычно называют *большой* и *малой полуосями* эллипса. Начало координат такой канонической системы координат называют *центром* эллипса. Концы большой и малой осей эллипса — точки  $A_1, A_2, B_1$  и  $B_2$  — называют его *вершинами* (рис.3.1).

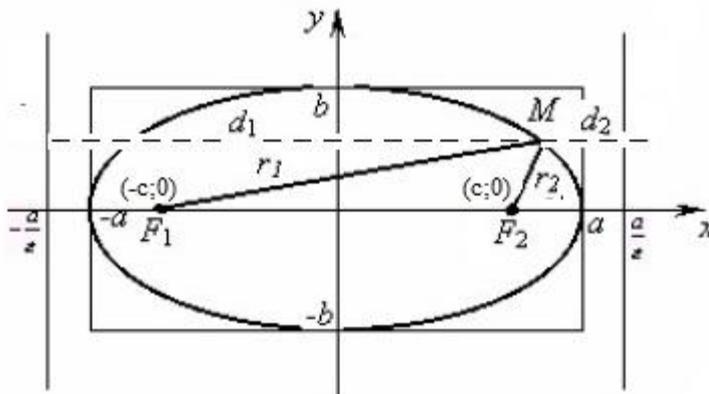


Рис.3.1

Форма эллипса зависит от величины отношения  $\frac{b}{a}$  длин его малой и большой полуосей: чем больше это отношение, тем эллипс будет менее «сплюснутым», менее сжатым; при  $b = a$  (когда полуоси равны между собой) он превращается в окружность радиуса  $a$  с центром в начале координат

$$x^2 + y^2 = a^2$$

Число  $\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$  называется *эксцентриситетом* эллипса.

Подчеркнем, что эксцентриситет эллипса это безразмерная величина, которая ничего не говорит о размерах эллипса, а заведует его формой! Очевидно, что  $0 < \varepsilon < 1$ .

Чем ближе  $\varepsilon$  к нулю, тем больше эллипс похож на окружность. В частности, для окружности  $b = a$ ,  $c = 0$ ,  $\varepsilon = 0$ , т.е. оба фокуса совпадают с началом канонической системы координат. Чем ближе  $\varepsilon$  к 1, тем больше эллипс "сплюснут" относительно осей координат.

Фокальные радиусы могут быть вычислены по формулам

$$r_1 = a + \varepsilon x \text{ и } r_2 = a - \varepsilon x$$

*Директрисой* эллипса называется прямая, перпендикулярная к фокальной оси, такая, что отношение расстояний от произвольной точки эллипса до фокуса  $r$  и соответствующей ему директрисы  $d$  есть величина постоянная, равная эксцентриситету.

$$\frac{r}{d} = \varepsilon$$

Таким образом у эллипса две директрисы. Их уравнения имеют вид

$$x = -\frac{a}{\varepsilon}; \quad x = \frac{a}{\varepsilon}, \text{ если } a > b \text{ и}$$

$$y = -\frac{b}{\varepsilon}; \quad y = \frac{b}{\varepsilon}, \text{ если } b > a.$$

**Замечание.**

Легко убедиться, что параметрические уравнения эллипса имеют вид:

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}, \quad t \in [0; 2\pi], \text{ если возвести оба уравнения в квадрат и сложить, то}$$

получится каноническое уравнение эллипса  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

**Определение.** Гиперболой называется геометрическое место точек, разность расстояний которых до двух заданных точек плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами.

Пусть  $M(x, y)$  – произвольная точка гиперболы;  $2c$  – расстояние между фокусами гиперболы  $F_1$  и  $F_2$ ;  $2a$  – разность расстояний от точки  $M$  до фокусов гиперболы  $F_1$  и  $F_2$ , т.е.

$$r_1 - r_2 = 2a < 2c$$

$a$  – действительная полуось гиперболы;  $b = \sqrt{c^2 - a^2}$  – мнимая полуось гиперболы. Если точки  $F_1$  и  $F_2$  лежат на оси абсцисс, а начало координат делит отрезок  $F_1F_2$  пополам, то координаты фокусов будут

$$F_1(-c; 0) \quad F_2(c; 0).$$

По определению гиперболы имеем

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

После аналогичных преобразований это уравнение приобретает следующий простейший вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

который называют каноническим.

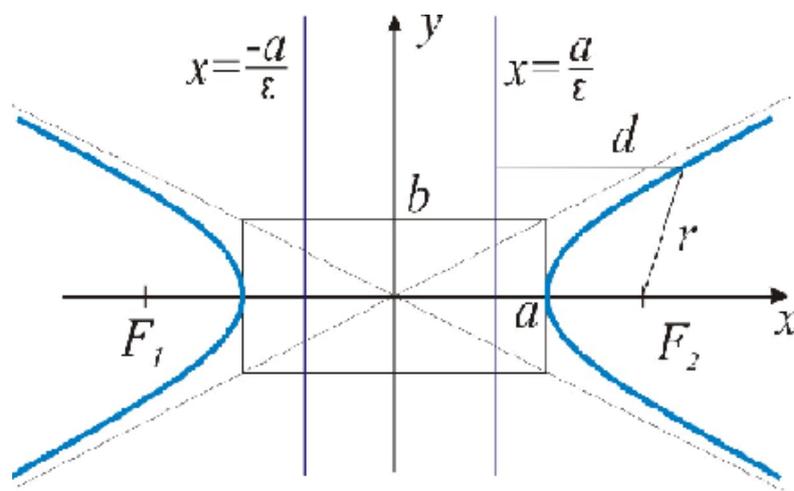


Рис.3.2

Гипербола пересекает ось  $Ox$  в двух точках  $A_1(-a; 0)$  и  $A_2(a; 0)$ . С осью  $Oy$  у неё пересечений нет (поэтому она и называется мнимой осью).

Для построения гиперболы по её уравнению заметим прежде всего, что

$$\frac{x^2}{a^2} \geq 1, \quad |x| \geq a.$$

Отсюда следует, что в вертикальной полосе между параллельными оси  $Oy$  прямыми  $x = -a$  и  $x = a$  нет точек, удовлетворяющих уравнению гиперболы.

Так же как и для эллипса оси координат служат осями симметрии гиперболы, так как переменные входят только в чётных степенях. Поэтому достаточно построить ту часть гиперболы, которая расположена в первой четверти, а именно

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}, \quad x \geq a.$$

При  $x = a \Rightarrow y = 0$ , при неограниченном возрастании переменной  $x$  переменная величина  $y$  тоже неограниченно возрастает, т.е. кривая уходит на бесконечность, но при этом всё ближе подходит к прямой  $y = \frac{b}{a} x$ .

Такие прямые, к которым неограниченно приближаются уходящие в бесконечность ветви кривых, называются *асимптотами* этих кривых. В силу симметрии гипербола имеет две асимптоты, их уравнения  $y = \pm \frac{b}{a} x$ . Теперь можно построить всю гиперболу. Отрезок  $A_1A_2 = 2a$  называется *вещественной осью* гиперболы, а  $B_1B_2 = 2b$  – *мнимой осью*.

Точки  $A_1$  и  $A_2$  называются вершинами гиперболы, а начало координат – её центром (рис.3.2).

Форма гиперболы зависит от угла наклона асимптоты к вещественной оси, т.е. от величины отношения  $\frac{b}{a}$ . Чем эта величина меньше, тем меньше угол между асимптотами, в котором заключена гипербола, и поэтому тем более сжата сама гипербола.

Так же как и в случае эллипса для характеристики формы гиперболы пользуются понятием *эксцентриситета*

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}.$$

Так как у гиперболы  $c > a$ , то её эксцентриситет  $\varepsilon > 1$ . Легко показать, что, также как и для эллипса, эксцентриситет отвечает за форму гиперболы: чем больше  $\varepsilon$ , тем больше угол между асимптотами.

При  $b = a$  получаем гиперболу с уравнением  $x^2 - y^2 = a^2$ , которую называют *равнобочной* или *равносторонней*.

**Замечания.**

1. Если отнести равнобочную гиперболу к асимптотам, т.е. взять за оси координат её асимптоты, то гипербола примет вид

$$y = \frac{k}{x}, \quad k = \frac{a^2}{2},$$

который Вам хорошо знаком под названием *обратно пропорциональной зависимости*.

2. Легко убедиться, что параметрические уравнения гиперболы имеют вид:

$$\begin{cases} x = \frac{a}{2} \left( t + \frac{1}{t} \right) \\ y = \frac{b}{2} \left( t - \frac{1}{t} \right) \end{cases}, t \in R, t \neq 0, \quad \text{если переписать каноническое уравнение}$$

гиперболы  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  в виде  $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 1$  и подставить в него  $x$  и  $y$ .

Легко показать, что параметрические уравнения

$$\begin{cases} x = a \operatorname{ch} t \\ y = b \operatorname{sh} t \end{cases}, t \in R \text{ так же задают гиперболу.}$$

**Определение.** *Параболой* называется геометрическое место точек, равноудалённых от заданной точки  $F$ , называемой фокусом, и заданной прямой, называемой директрисой параболы.

Если ось абсцисс совпадает с перпендикуляром, опущенным из фокуса на директрису, а начало координат делит этот перпендикуляр пополам, то каноническое уравнение параболы имеет вид

$$y^2 = 2px.$$

Ось абсцисс является осью симметрии параболы.

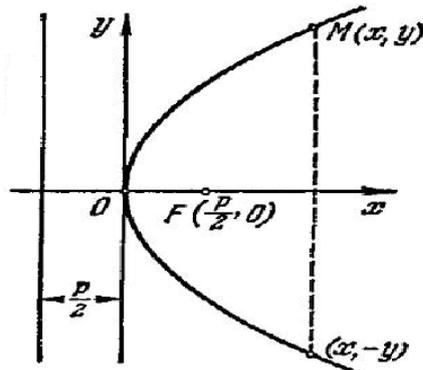


Рис.3.3

Построим параболу по этому уравнению. При  $p > 0$  вся параболоа расположена справа от оси  $Oy$ , так как левая часть уравнения всегда положительна.

Так как в уравнение переменная  $y$  входит только в чётной степени, то ось  $Ox$  является осью симметрии параболы.

Начало координат принадлежит параболое и называется её *вершиной*. В первой четверти имеем возрастающую функцию  $y = \sqrt{2px}$ . Параметр  $p$  регулирует раствор ветвей параболы, а знак этого параметра указывает направление её ветвей (рис.3.3).

Вид параболы  $y = ax^2$  хорошо известен из школьного курса математики (здесь ось  $Oy$  является осью симметрии). *Эксцентриситет* параболы

$\varepsilon = \frac{MF}{MK} = 1$  – отношение расстояния от произвольной точки параболы до директрисы к расстоянию от этой точки до фокуса.

**Замечание.**

Каноническое уравнение параболы легко параметризовать, например,

$$\begin{cases} x = \frac{t^2}{2p}, t \in R \\ y = t \end{cases}$$

### 3.2. Преобразование системы координат: параллельный перенос и поворот

Преобразованием координат называется переход от одной системы координат к другой. Целью преобразования координат является переход к такой системе, в которой уравнение заданной линии становится каноническим.

Формулы, позволяющие по координатам точки в одной системе координат определить ее координаты в другой системе, называются формулами преобразования координат.

#### 1. Параллельный перенос осей координат.

Формулы преобразования координат при параллельном переносе осей от системы  $xOy$  к системе  $x'O'y'$  имеют вид

$$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases},$$

где  $x, y$  – координаты точки в системе  $xOy$ ;  $x', y'$  – ее координаты в системе  $x'O'y'$ ;  $x_0, y_0$  – координаты нового начала координат  $O'$  в системе координат  $xOy$  (рис.3.4).

Формулы обратного преобразования, т.е. преобразования координат к исходной системе,

имеют вид

$$\begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{cases}.$$

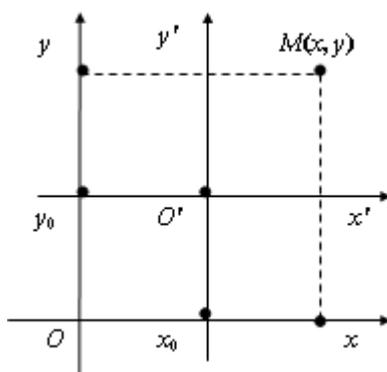


Рис.3.4

#### 2. Поворот осей координат.

Поворотом координатных осей называется такое преобразование координат, при котором обе координатные оси поворачиваются на один и тот же угол, а начало координат остается в той же точке плоскости. Формулы преобразования координат

$$\begin{cases} x = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi; \\ y = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi; \end{cases} \quad (*)$$

$$\begin{cases} x' = x \cos \varphi + y \sin \varphi; \\ y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi, \end{cases} \quad (**)$$

где  $\varphi$  – угол поворота осей;  $x, y$  – координаты точки  $M$  в исходной системе координат  $xOy$ ;  $x', y'$  – координаты той же точки  $M$  в новой системе  $x'Oy'$  (рис.3.5).

**Замечание.**

1. Для запоминания формул (\*) можно привести остроумное замечание, сделанное И.П.Натансоном, что в выражении для  $x$  налицо «полный беспорядок» (косинус раньше синуса, знак минус!), а в выражении для  $y$  – «полный порядок» (синус раньше косинуса, знак плюс).

2. С практической точки зрения формулы (\*) важнее формул (\*\*), последние запоминать не обязательно.

Чтобы совершить обратный переход к системе координат  $xOy$ , необходимо повернуть координатные оси на угол  $(-\varphi)$ .

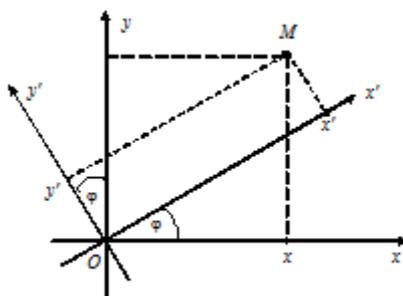


Рис.3.5

### 3.3. Приведение общего уравнения кривой второго порядка к каноническому виду

Если в общем уравнении второго порядка  $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$  коэффициент  $B = 0$ , то для приведения такого уравнения к каноническому виду достаточно параллельного переноса осей координат.

**Пример 1.** Привести уравнение  $9x^2 + 4y^2 - 36x + 8y + 4 = 0$  к каноническому виду, определить вид линии, описываемой этим уравнением, сделать схематический рисунок.

**Решение.** Преобразуем исходное уравнение, дополнив до полных квадратов выражения, содержащие  $x$  и  $y$  соответственно.

$$9(x^2 - 4x + 4) + 4(y^2 + 2y + 1) + 4 - 36 - 4 = 0$$

или

$$9(x - 2)^2 + 4(y + 1)^2 = 36.$$

Разделив обе части последнего уравнения на 36, получим

$$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1.$$

Перейдем к новым координатам по формулам

$$\begin{cases} x' = x - 2 \\ y' = y + 1 \end{cases},$$

т.е. совершим параллельный перенос осей, причём новое начало координат поместим в точку  $O'(2, -1)$ . В новой системе координат  $x'O'y'$  уравнение примет вид

$$\frac{x'^2}{2^2} + \frac{y'^2}{3^2} = 1$$

Получено каноническое уравнение эллипса. Его центр находится в точке  $O'(2, -1)$ , величины полуосей  $a = 2$ ,  $b = 3$  (рис.3.6)

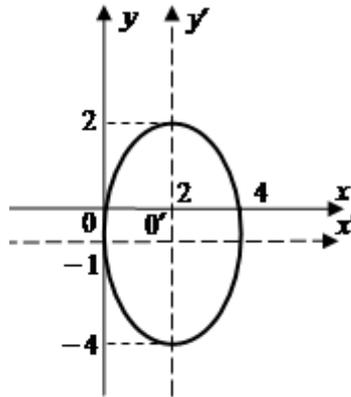


Рис.3.6

Если  $B \neq 0$ , то для этого необходимо сначала совершить поворот осей на угол  $\varphi$ , выбрав  $\varphi$  таким образом, чтобы в новой системе координат  $x'O'y'$  уравнение кривой не содержало члена  $x'y'$ .

Непосредственно подставим  $\begin{cases} x = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi; \\ y = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi; \end{cases}$  в уравнение

$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ . Получим

$$A(x' \cos \varphi - y' \sin \varphi)^2 + 2B(x' \cos \varphi - y' \sin \varphi)(x' \sin \varphi + y' \cos \varphi) + C(x' \sin \varphi + y' \cos \varphi)^2 + 2D(x' \cos \varphi - y' \sin \varphi) + 2E(x' \sin \varphi + y' \cos \varphi) + F = 0$$

Раскроем скобки, приведем подобные и коэффициент при  $x'y'$  приравняем к нулю:

$$-2A \cos \varphi \sin \varphi + 2B(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + 2C \cos \varphi \sin \varphi = 0 \quad (+)$$

Используя тригонометрические формулы двойного угла, получим

$$2B \cos 2\varphi = (A - C) \sin 2\varphi. \text{ Откуда следует, что } \operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2B}{A - C}, \text{ или}$$

$$\frac{2 \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} = \frac{2B}{A - C}. \text{ Затем, зная } \operatorname{tg} \varphi, \text{ находим } \cos \varphi \text{ и } \sin \varphi.$$

Можно было сразу рассмотреть уравнение (+) как однородное тригонометрическое уравнение и, поделив обе его части, например, на  $\cos \varphi$ , получить квадратное уравнение относительно  $\operatorname{tg} \varphi$ .

**Пример 2.** Привести уравнение  $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$  к каноническому виду, определить вид линии, описываемой этим уравнением, сделать схематический рисунок.

**Решение.** Сначала сделаем поворот осей координат, подставив  $x$  и  $y$  из формул (\*) в исходное уравнение:

$$\begin{aligned} &5(x' \cos \varphi - y' \sin \varphi)^2 + 4(x' \cos \varphi - y' \sin \varphi)(x' \sin \varphi - y' \cos \varphi) + \\ &+ 8(x' \sin \varphi - y' \cos \varphi)^2 - 32(x' \cos \varphi - y' \sin \varphi) - \\ &- 56(x' \sin \varphi - y' \cos \varphi) + 80 = 0; \\ &5(x')^2 \cos^2 \varphi - 10x'y' \sin \varphi \cos \varphi + 5(y')^2 \sin^2 \varphi + 4(x')^2 \cos \varphi \sin \varphi + \\ &+ 4x'y' \cos^2 \varphi - 4x'y' \sin^2 \varphi - 4(y')^2 \sin \varphi \cos \varphi + 8(x')^2 \sin \varphi + \\ &+ 16x'y' \sin \varphi \cos \varphi + 8(y')^2 \cos^2 \varphi - 32x' \cos \varphi + 32y' \sin \varphi - \\ &- 56x' \sin \varphi - 56y' \cos \varphi + 80 = 0. \end{aligned}$$

Сгруппируем слагаемые:

$$\begin{aligned} &(5 \cos^2 \varphi + 8 \sin^2 \varphi + 4 \sin \varphi \cos \varphi)(x')^2 + \\ &+ (6 \sin \varphi \cos \varphi - 4 \sin^2 \varphi + 4 \cos^2 \varphi)x'y' + \\ &+ (5 \sin^2 \varphi - 4 \sin \varphi \cos \varphi + 8 \cos^2 \varphi)(y')^2 - (32 \cos \varphi + 56 \sin \varphi)x' + \\ &+ (32 \sin \varphi - 56 \cos \varphi)y' + 80 = 0. \end{aligned}$$

Выберем угол поворота  $\varphi$  так, чтобы коэффициент при  $x'y'$  оказался равным нулю:

$$6 \sin \varphi \cos \varphi - 4 \sin^2 \varphi + 4 \cos^2 \varphi = 0.$$

Так как случай, когда  $\cos \varphi = 0$ , не является решением полученного для  $\varphi$  уравнения, разделим это уравнение на  $\cos^2 \varphi$ :

$$6 \operatorname{tg} \varphi - 4 \operatorname{tg}^2 \varphi + 4 = 0; \quad 2 \operatorname{tg}^2 \varphi - 3 \operatorname{tg} \varphi = 0;$$

$$(\operatorname{tg} \varphi)_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = 2; -1/2.$$

Выберем угол поворота  $\varphi \in (0; \pi/2)$ , тогда  $\varphi = \operatorname{arctg} 2$ . Известно, что

$$\sin^2 \alpha = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}; \quad \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

Так как  $\varphi \in (0; \pi/2)$ , то  $\sin \varphi \geq 0$  и  $\cos \varphi \geq 0$ , а  $\operatorname{tg}^2 \varphi = 2$ . Вычислим  $\sin \varphi$  и  $\cos \varphi$

:

$$\sin^2 \varphi = \frac{2^2}{1+2^2} = \frac{4}{5}; \quad \cos^2 \varphi = \frac{1}{1+2^2} = \frac{1}{5};$$

$$\sin \varphi = 2/\sqrt{5}; \cos \varphi = 1/\sqrt{5}.$$

Подставив найденные для  $\sin \varphi$  и  $\cos \varphi$  значения в уравнение (32), получим

$$\begin{aligned} & \left( 5 \cdot \frac{1}{5} + 4 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + 8 \cdot \frac{1}{5} \right) (x')^2 + 0 \cdot x'y' + \\ & + \left( 5 \cdot \frac{4}{5} + 4 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + 8 \cdot \frac{1}{5} \right) (y')^2 - \\ & - \left( 32 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + 56 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \right) x' + \left( 32 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + 56 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \right) y' + 80 = 0; \\ & 9 \left( (x')^2 - \frac{16}{\sqrt{5}} x' \right) + 4 \left( (y')^2 - \frac{2}{\sqrt{5}} y' \right) + 80 = 0. \end{aligned}$$

Теперь осуществим параллельный перенос осей, преобразовав полученное уравнение к виду

$$9 \left( x' - \frac{8}{\sqrt{5}} \right)^2 + 4 \left( y' - \frac{1}{\sqrt{5}} \right)^2 = 36,$$

где  $x' = x'' - 8/\sqrt{5}$ ;  $y' = y'' + 1/\sqrt{5}$ , точка  $O$  в системе  $x''O'y''$  будет иметь координаты  $O(-8/\sqrt{5}; 1/\sqrt{5})$ , в новой системе координат уравнение примет вид  $(x'')^2/4 + (y'')^2/9 = 1$ . Построим эллипс в системе координат  $x''O'y''$ , затем последовательно выполним обратный переход параллельным переносом осей к системе координат  $x'O'y'$  и обратный поворот осей к системе  $xOy$  (рис.3.7).

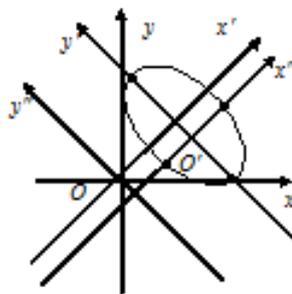


Рис.3.7

Рассмотрим на примере другой подход к задаче приведения уравнения второго порядка к каноническому виду, используя понятия квадратичной формы, собственных чисел и соответствующих им собственных векторов матрицы, а также матрицу ортогонального преобразования. Такой подход подробнее будет описан в разделе 4.2 для уравнений второго порядка в пространстве.

**Пример 3.** Привести к каноническому виду уравнение линии  $17x^2 + 12xy + 8y^2 - 80 = 0$ .

**Решение.**

Если рассмотреть данное уравнение в общем виде

$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ , то старшие коэффициенты будут равны

$A = 17$ ,  $B = 6$ ,  $C = 8$  и образуют квадратичную форму  $17x^2 + 12xy + 8y^2$  с матрицей

$\begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$ . Найдем собственные числа этой матрицы из характеристического уравнения :

$$\begin{vmatrix} 17-\lambda & 6 \\ 6 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ или } \lambda^2 - 25\lambda + 100 = 0, \text{ т.е. } \lambda_1 = 5, \lambda_2 = 20.$$

Следовательно, квадратичная форма  $17x^2 + 12xy + 8y^2$  преобразуется к каноническому виду  $5x'^2 + 20y'^2$ , а данное уравнение – к виду

$$5x'^2 + 20y'^2 - 80 = 0, \text{ или } \frac{x'^2}{16} + \frac{y'^2}{4} = 1,$$

т.е. заданная линия является эллипсом.

Найдем базис, в котором уравнение эллипса принимает канонический вид, для чего найдем собственные вектора матрицы, соответствующие собственным числам  $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 20$ .

При  $\lambda = 5$  имеем систему уравнений  $\begin{cases} 12x_1 + 6x_2 = 0 \\ 6x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}$ , откуда  $x_2 = -2x_1$ .

Тогда собственный вектор  $\vec{u} = c \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = c(e_1 - 2e_2)$ .

При  $\lambda = 20$  имеем систему уравнений  $\begin{cases} -3x_1 + 6x_2 = 0 \\ 6x_1 - 12x_2 = 0 \end{cases}$ , откуда  $x_1 = 2x_2$ .

Тогда собственный вектор  $\vec{v} = c \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = c(2e_1 + e_2)$ .

Найдем нормированные собственные векторы :

$$e'_1 = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{e_1 - 2e_2}{\sqrt{5}} \text{ и } e'_2 = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{2e_1 + e_2}{\sqrt{5}}.$$

Матрица ортогонального преобразования имеет вид:  $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ .

Формулы преобразования координат запишутся так:  $\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y' \\ y = -\frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y' \end{cases}$ .

Следовательно,

$$\begin{aligned} 17x^2 + 12xy + 8y^2 - 80 &= \frac{17}{5}(x' + 2y')^2 + \frac{12}{5}(x' + 2y')(-2x' + y') + \frac{8}{5}(-2x' + y')^2 - 80 = \\ &= 5x'^2 + 20y'^2 - 80 = 0. \end{aligned}$$

Этот же результат можно было получить сразу, как только были найдены собственные числа  $\lambda_1, \lambda_2$ :  $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 - 80 = 0$ .

## 4. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

### 4.1. Классификация и канонические уравнения поверхностей второго порядка

**Определение.** Поверхностью второго порядка называется множество всех точек пространства, координаты которых удовлетворяют алгебраическому уравнению второй степени

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{10}x + 2a_{20}y + 2a_{30}z + a_{00} = 0,$$
 где коэффициенты  $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}, a_{10}, a_{20}, a_{30}, a_{00}$  – действительные числа, причем  $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}$  не равны нулю одновременно.

В теории поверхностей второго порядка классифицируют и изучают различные виды поверхностей. Методом их изучения является так называемый *метод сечения*: исследуются сечения поверхности плоскостями, параллельными координатным или самими координатными плоскостями, и по виду сечений делается вывод о форме поверхности.

Существует семнадцать видов поверхностей второго порядка. Идея классификации поверхностей основана на приведении их уравнения к *каноническому* виду в результате преобразования системы координат в каноническую.

Рассмотрим подробнее шесть видов поверхностей второго порядка: эллипсоид, однополостный гиперболоид, двуполостный гиперболоид, конус, эллиптический параболоид и гиперболический параболоид.

**Определение.** Эллипсоидом (рис. 4.1) называется поверхность второго порядка, которая в канонической системе координат определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

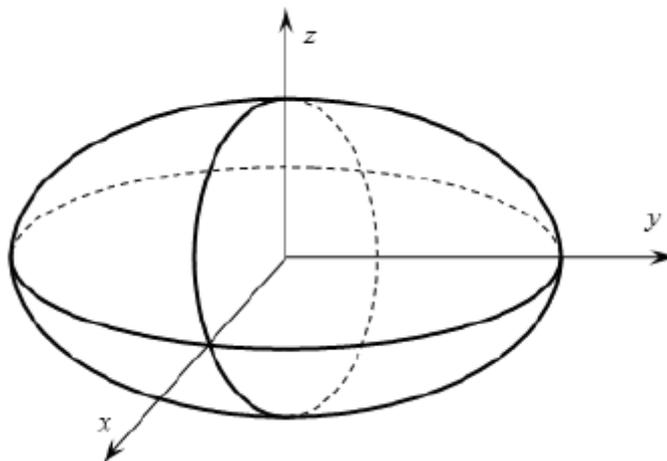


Рис.4.1

В частности, если  $a = b = c$ , то получаем *сферу*  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  с центром в начале

координат и радиусом  $a$ . Числа  $a, b, c$  называются *полуосями* эллипсоида. Если все они различны, то эллипсоид называется *трехосным*. Точки пересечения эллипсоида с осями координат:  $A_1(-a;0;0)$ ,  $A_2(a;0;0)$ ,  $B_1(0;-b;0)$ ,  $B_2(0;b;0)$ ,  $C_1(0;0;-c)$ ,  $C_2(0;0;c)$  называются его *вершинами*.

Оси канонической системы координат являются осями симметрии эллипсоида, начало координат – его центром симметрии, а координатные плоскости – плоскостями симметрии.

Рассмотрим сечение эллипсоида плоскостью  $xOy: z = 0$ . Оно задается системой уравнений

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ z = 0 \end{cases},$$

и представляет собой эллипс с каноническим уравнением  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

Рассматривая аналогично сечения эллипсоида координатными плоскостями  $xOz: y = 0$  и  $yOz: x = 0$ , а также плоскостями, им параллельными ( $x = h_1, y = h_2, z = h_3$ ), получаем кривые второго порядка *эллиптического* типа. Это – либо эллипс (при  $h_1 < a, h_2 < b, h_3 < c$ ), либо пара мнимых пересекающихся прямых, т.е. точка (при  $|h_1| = a, |h_2| = b, |h_3| = c$ ), либо мнимый эллипс (при  $h_1 > a, h_2 > b, h_3 > c$ ).

**Определение.** *Однополостным гиперboloидом* (рис.4.2) называется поверхность второго порядка, которая в канонической системе координат определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

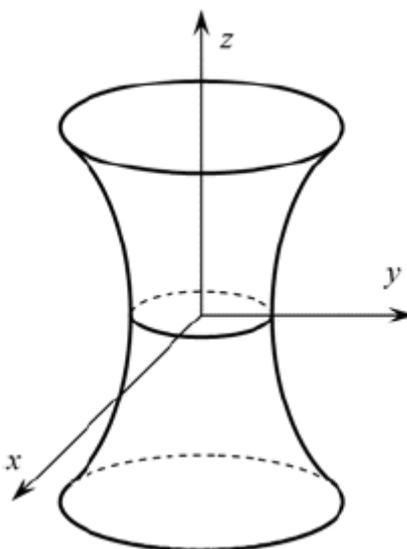


Рис.4.2

Оси канонической системы координат являются осями симметрии однополостного гиперboloида, начало координат – его центром симметрии, а координатные плоскости –

плоскостями симметрии. Оси абсцисс и ординат пересекают однополостный гиперboloид в точках  $A_1(-a;0;0)$ ,  $A_2(a;0;0)$ ,  $B_1(0;-b;0)$ ,  $B_2(0;b;0)$ , которые называются его *вершинами*. Ось аппликат  $Oz$ , не имеющая с гиперboloидом общих действительных точек, называется его *мнимой осью*.

Если рассмотреть сечения однополостного гиперboloида плоскостью  $xOy: z = 0$  или плоскостями, параллельными ей ( $z = h_3$ ), то в сечении получаются эллипсы. Эллипс  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  называется *горловым*.

Теперь возьмем сечение однополостного гиперboloида плоскостью  $xOz: y = 0$ . Оно задается системой уравнений

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0 \end{cases}$$

и представляет собой гиперболу с действительной осью  $Ox: \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ .

Рассмотрим аналогичные сечения гиперboloида плоскостью  $yOz: x = 0$ , а также плоскостями, параллельными плоскостям  $xOz: y = h_2$  и  $yOz: x = h_1$ , получаем кривые второго порядка *гиперболического* типа. Это – либо гипербола (при  $|h_1| \neq a$ ,  $|h_2| \neq b$ ), либо пара пересекающихся прямых (при  $|h_1| = a$ ,  $|h_2| = b$ ). Например, сечение однополостного гиперboloида плоскостью  $x = a$  задается системой уравнений

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = a \end{cases}$$

и представляет собой пару пересекающихся прямых с каноническим уравнением  $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ .

**Определение.** *Двуполостным гиперboloидом* (рис.4.3) называется поверхность второго порядка, которая в канонической системе координат определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

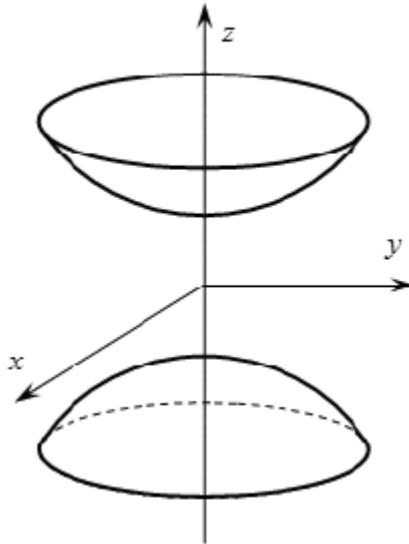


Рис.4.3

Ось аппликат  $Oz$  канонической системы координат является осью симметрии двуполостного гиперboloида, начало координат – его центром симметрии, а координатные плоскости – плоскостями симметрии. Ось аппликат пересекает гиперboloид в точках  $C_1(0;0;-c)$ ,  $C_2(0;0;c)$ , которые называются его *вершинами*. Сама ось аппликат называется *действительной осью* гиперboloида.

Если рассмотреть сечение двуполостного гиперboloида координатными плоскостями  $xOz$ ;  $y = 0$  и  $yOz$ :  $x = 0$ , и плоскостями, им параллельными ( $x = h_1$ ,  $y = h_2$ ), то в сечении получаются гиперболы.

Рассматривая аналогичные сечения гиперboloида плоскостью  $xOy$ :  $z = 0$ , а также плоскостями, параллельными плоскости  $xOy$ :  $z = h$ , получаем кривые второго порядка *эллиптического* типа. Это – либо эллипс (при  $|h| > c$ ), либо пара мнимых пересекающихся прямых, т.е. точка (при  $|h| = c$ ), либо мнимый эллипс (при  $|h| < c$ ). Например, при  $|h| > c$  сечение двуполостного гиперboloида плоскостью  $z = h$  задается системой уравнений

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \\ z = h \end{cases},$$

откуда при подстановке второго уравнения в первое получаем:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1$  и

каноническое уравнение эллипса  $\frac{x^2}{\left(\frac{h^2}{c^2} - 1\right)a^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{h^2}{c^2} - 1\right)b^2} = 1$ .

**Определение.** *Конусом второго порядка* (рис. 4.4) называется поверхность, которая в канонической системе координат определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

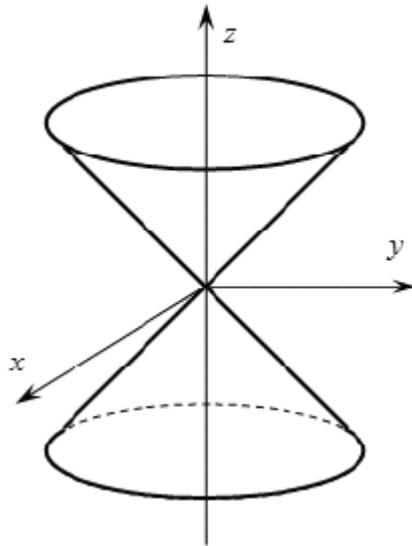


Рис.4.4

Эта поверхность второго порядка состоит из прямых, пересекающихся в одной точке – *вершине* конуса. Действительно, если точка с координатами  $(x_0; y_0; z_0)$  удовлетворяет уравнению конуса, то ему удовлетворяют также точки с координатами

$$x = x_0t, \quad y = y_0t, \quad z = z_0t$$

при любом значении параметра  $t$ . Записанные уравнения являются параметрическими уравнениями прямой, проходящей через начало координат и точку  $(x_0; y_0; z_0)$ . Конус состоит из таких прямых, называемых *образующими* конуса. Ось аппликат канонической системы координат называется его осью.

Оказывается, что плоскость, проходящая через вершину конуса, либо не пересекает его в другой точке, либо пересекает по двум образующим, либо касается вдоль образующей. Любая плоскость, параллельная этим плоскостям, в первом случае пересекает конус по *эллипсу*, во втором случае – пересекает по *гиперболе*, в третьем случае – по *параболе*. Поэтому эллипс, гиперболу и параболу часто называют *коническими сечениями*.

**Определение.** *Эллиптическим параболоидом* (рис. 4.5) называется поверхность второго порядка, которая в канонической системе координат определяется уравнением .

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z.$$

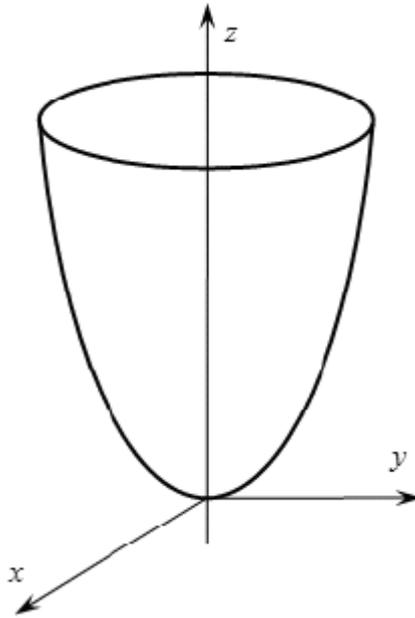


Рис.4.5

Ось аппликат  $Oz$  канонической системы координат является единственной осью симметрии эллиптического параболоида, плоскости  $xOz$  и  $yOz$  – плоскостями симметрии. Ось аппликат, называемая *осью* эллиптического параболоида, пересекает его в начале координат, эта точка называется *вершиной* параболоида.

Если рассмотреть сечение эллиптического параболоида координатными плоскостями  $xOz$ ;  $y = 0$  и  $yOz$ :  $x = 0$ , и плоскостями, им параллельными ( $x = h_1$ ,  $y = h_2$ ), то в сечении получаются параболы. Например, сечение эллиптического параболоида плоскостью  $y = h_2$  задается системой уравнений

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z, \\ y = h_2 \end{cases},$$

откуда при подстановке второго уравнения в первое последовательно получаем:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{h_2^2}{b^2} = 2z$  и уравнение параболы  $x^2 = 2a^2z - \frac{a^2h_2^2}{b^2}$ . Получаемые таким образом параболы лежат в параллельных плоскостях, отличаясь лишь положением в пространстве.

Рассматривая аналогичные сечения эллиптического параболоида плоскостью  $xOy$ :  $z = 0$ , а также плоскостями, параллельными плоскости  $xOy$ :  $z = h$ , получаем кривые второго порядка *эллиптического* типа. Это – либо эллипс (при  $h > 0$ ), либо пара мнимых пересекающихся прямых, т.е. точка (при  $h = 0$ ), либо мнимый эллипс (при  $h < 0$ ).

**Определение.** *Гиперболическим параболоидом* (рис. 4.6) называется поверхность второго порядка, которая в канонической системе координат определяется уравнением .

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z.$$

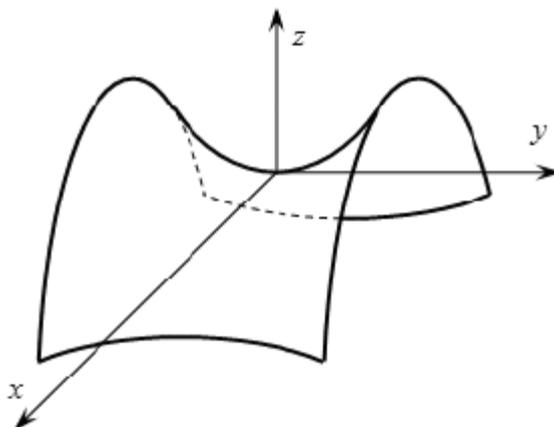


Рис.4.6

Ось аппликат  $Oz$  канонической системы координат является единственной осью симметрии гиперболического параболоида, плоскости  $xOz$  и  $yOz$  – плоскостями симметрии. Ось аппликат, называемая *осью* гиперболического параболоида, пересекает его в начале координат, эта точка называется *вершиной* параболоида.

Если рассмотреть сечение гиперболического параболоида координатными плоскостями  $xOz$ ;  $y = 0$  и  $yOz$ :  $x = 0$ , и плоскостями, им параллельными ( $x = h_1$ ,  $y = h_2$ ), то в сечении получаются параболы. Например, сечение эллиптического параболоида плоскостью  $x = h_1$  задается системой уравнений

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z, \\ x = h_1 \end{cases},$$

откуда при подстановке второго уравнения в первое последовательно получаем:

$$\frac{h_1^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z \text{ и уравнение параболы } y^2 = -2b^2 z + \frac{a^2 h_1^2}{a^2}.$$

Рассматривая аналогичные сечения гиперболического параболоида плоскостью  $xOy$ :  $z = 0$ , а также плоскостями, параллельными плоскости  $xOy$ :  $z = h$ , получаем кривые второго порядка *гиперболического* типа. Это – либо гипербола (при  $|h| > 0$ ), либо пара пересекающихся прямых (при  $h = 0$ ). Таким образом, по форме гиперболический параболоид напоминает седло, эту поверхность часто называют *седловой*.

Остальные одиннадцать видов поверхностей относятся к классам *цилиндрических* поверхностей (*эллиптический, гиперболический и параболический* (рис. 4.7) цилиндры); *пар плоскостей* (*пересекающихся, параллельных и совпавших*) и *мнимых* поверхностей (мнимый эллипсоид, мнимый конус, мнимый эллиптический цилиндр, пары мнимых пересекающихся и мнимых параллельных плоскостей).

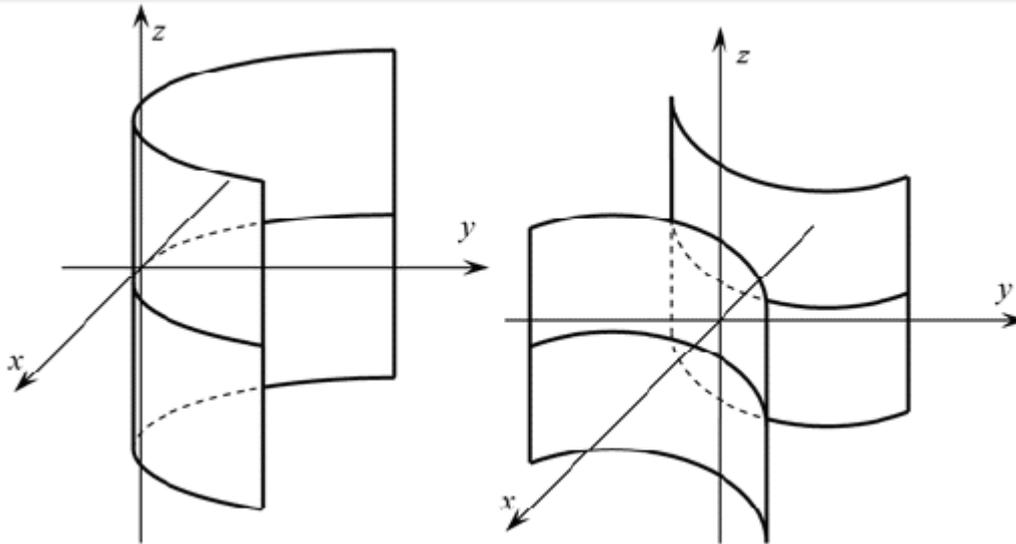


Рис.4.7

Уравнения всех семнадцати поверхностей сведем в справочную таблицу:

№	Вид поверхности второго порядка	Уравнение
1	Эллипсоид	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
2	Мнимый эллипсоид	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$
3	Однополостный гиперboloид	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
4	Двуполостный гиперboloид	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$
5	Эллиптический параболоид	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$
6	Гиперболический параболоид	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$
7	Конус	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$

8	<i>Мнимый конус</i>	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$
9	<i>Эллиптический цилиндр</i>	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
10	<i>Гиперболический цилиндр</i>	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
11	<i>Параболический цилиндр</i>	$y^2 = 2px$
12	<i>Мнимый эллиптический цилиндр</i>	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$
13	<i>Пара мнимых пересекающихся плоскостей</i>	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$
14	<i>Пара пересекающихся плоскостей</i>	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$
15	<i>Пара параллельных плоскостей</i>	$x^2 - a^2 = 0$
16	<i>Пара мнимых параллельных плоскостей</i>	$x^2 + a^2 = 0$
17	<i>Пара совпавших плоскостей</i>	$x^2 = 0$

## 4.2. Приведение уравнения второго порядка к каноническому виду.

### Исследование с помощью квадратичной формы

Пусть в пространстве задана прямоугольная декартова система координат  $Oxyz$ . Рассмотрим общее уравнение поверхности второго порядка:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{10}x + 2a_{20}y + 2a_{30}z + a_{00} = 0, \quad (1)$$

где коэффициенты  $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}, a_{10}, a_{20}, a_{30}, a_{00}$  — действительные числа, причем  $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}$  не равны нулю одновременно.

Выделим квадратичную часть выражения, стоящего в уравнении слева,

$$f = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$$

Такое выражение называется *квадратичной формой от трех переменных*.

Составим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Эта матрица называется *матрицей квадратичной формы  $f$* . Она является *симметричной*, то есть  $A^T = A$ , или, другими словами,  $a_{ij} = a_{ji}$ . Следует обратить внимание на то, как эта матрица составлена. На диагонали у нее стоят коэффициенты при квадратах переменных, а в остальных местах – половины коэффициентов при произведениях переменных.

Исходная система координат является прямоугольной, поэтому скалярное

произведение векторов с координатными столбцами  $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$  и  $\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$

задается формулой  $(\alpha, \beta) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3$ . Сформулируем две теоремы, позволяющие пользоваться приведенным ниже алгоритмом.

**Теорема 1.** *Если матрица  $A$  – симметричная, то ее собственные числа являются вещественными числами и существует ортонормированный базис из собственных векторов.*

Пусть  $A$  – матрица квадратичной формы  $f$ . По сформулированной теореме у нее существует ортонормированный базис из собственных векторов.

Обозначим их  $i', j', k'$  и пусть эти векторы имеют координаты

$$i' = \begin{pmatrix} s_{11} \\ s_{21} \\ s_{31} \end{pmatrix}, \quad j' = \begin{pmatrix} s_{12} \\ s_{22} \\ s_{32} \end{pmatrix}, \quad k' = \begin{pmatrix} s_{13} \\ s_{23} \\ s_{33} \end{pmatrix}.$$

Базис  $i, j, k$  назовем старым, а базис  $i', j', k'$  – новым. Тогда матрица перехода будет иметь вид

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} \end{pmatrix}.$$

Выберем новую систему координат  $Ox'y'z'$  так, что начало координат не изменяется, а новые базисные векторы  $i', j', k'$  задают направления новых координатных осей  $Ox', Oy', Oz'$  (рис. 4.8).

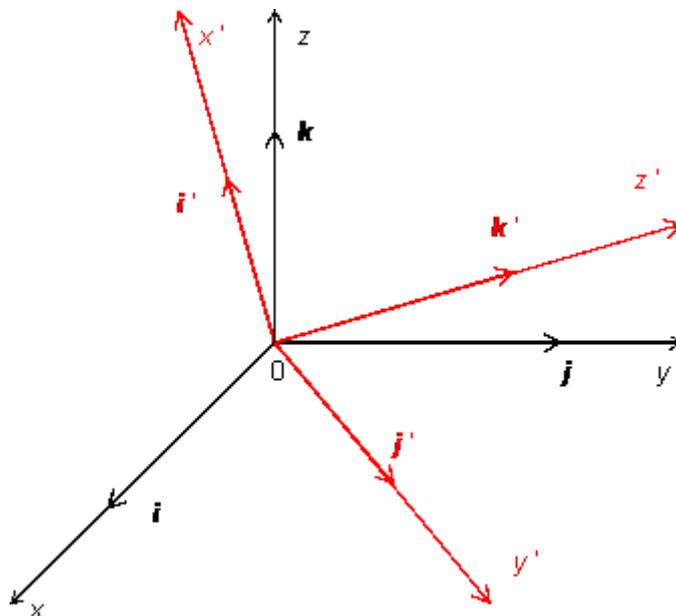


Рис. 4.8

Тогда координаты  $(x, y, z)$  точки  $M$  являются координатами ее радиус-вектора  $\vec{OM}$  и, следовательно, при замене базиса меняются по формуле

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad (2)$$

**Теорема 2.** Пусть собственные векторы  $i', j', k'$  матрицы квадратичной формы  $f$ , образующие ортонормированный базис, соответствуют собственным числам  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ . Тогда в системе координат  $Ox'y'z'$  квадратичная форма принимает вид

$$f = \lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + \lambda_3(z')^2.$$

Если вместо  $x, y, z$  подставить в уравнение (1) их выражения через новые переменные  $x', y', z'$ , то можно показать, что квадратичная его часть и линейная часть преобразуются независимо друг от друга. В результате уравнение в системе координат  $Ox'y'z'$  имеет вид

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + \lambda_3(z')^2 + b_1'x' + b_2'y' + b_3'z' + c = 0, \quad (3)$$

причем, хотя бы одно из чисел  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  отлично от нуля, иначе матрица  $A$  была бы нулевой.

Рассмотрим три случая.

### Случай 1.

Пусть все собственные числа  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  отличны от нуля. В уравнении (3) выделим полные квадраты

$$\lambda_1(x' - x_1')^2 + \lambda_2(y' - y_1')^2 + \lambda_3(z' - z_1')^2 + c' = 0.$$

Выполним параллельный перенос системы координат  $Ox'y'z'$ , взяв за новое начало системы координат точку  $O_1(x_1', y_1', z_1')$ . Тогда в новой системе координат  $O\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$  уравнение запишется в виде

$$\lambda_1(\tilde{x})^2 + \lambda_2(\tilde{y})^2 + \lambda_3(\tilde{z})^2 + c' = 0$$

Пусть  $c' \neq 0$ . Перенесем  $c'$  в правую часть и поделим обе части на  $-c'$ , получим

$$\mu_1(\tilde{x})^2 + \mu_2(\tilde{y})^2 + \mu_3(\tilde{z})^2 = 1$$

Возможны следующие варианты:

1. Если числа  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  отрицательны, то ни одна точка пространства не удовлетворяет этому уравнению. Говорят, что оно определяет *мнимый эллипсоид*.

2. Если числа  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  положительны, то уравнение является каноническим уравнением эллипсоида.

3. Если одно из чисел  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  отрицательно, а остальные положительны, то (после переименования осей) получим каноническое уравнение однополостного гиперболоида.

4. Если одно из чисел  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  положительно, остальные отрицательны, то (после переименования осей) получим каноническое уравнение двуполостного гиперболоида.

Пусть  $c' = 0$ . Возможны следующие варианты:

1. Если все числа  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  положительны, то только начало координат удовлетворяет этому уравнению. Поверхность выродилась в точку.

2. Если одно из чисел  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  отрицательно, а два положительны, то (после переименования осей) получим каноническое уравнение конуса.

3. Если же два числа отрицательны или все три отрицательны, то, умножив обе части уравнения на  $-1$ , получим вариант 1 или вариант 2.

### Случай 2.

Пусть одно из чисел  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  равно нулю, а два других отличны от нуля. Допустим, что  $\lambda_3 = 0$ . Тогда в уравнении (3) выделим полные квадраты по переменным  $x', y'$

$$\lambda_1(x' - x'_1)^2 + \lambda_2(y' - y'_1)^2 + b'_3 z' + c' = 0$$

Пусть  $b'_3 \neq 0$ . Преобразуем уравнение к виду

$$\lambda_1(x' - x'_1)^2 + \lambda_2(y' - y'_1)^2 = -b'_3 \left( z' + \frac{c'}{b'_3} \right).$$

Поделим обе части уравнения на  $-b'_3$  и выполним параллельный перенос осей координат, взяв за новое начало координат точку  $O_1 \left( x'_1, y'_1, -\frac{c'}{b'_3} \right)$ . Получим уравнение

$$\mu_1(\tilde{x})^2 + \mu_2(\tilde{y})^2 = \tilde{z}.$$

Возможны следующие варианты:

1. Если числа  $\mu_1$  и  $\mu_2$  положительны, то это – каноническое уравнение эллиптического параболоида.

2. Если  $\mu_1 > 0, \mu_2 < 0$ , получим каноническое уравнение гиперболического параболоида.

3. Если числа  $\mu_1$  и  $\mu_2$  отрицательны или  $\mu_1 < 0, \mu_2 > 0$ , то сменим направление у оси  $O_1 \tilde{z}$  на противоположное и получим либо вариант 1, либо вариант 2.

Пусть  $b'_3 = 0$ . Тогда поверхность является цилиндрической, образующие которой параллельны оси  $Oz'$ , а направляющей служит кривая на плоскости  $x'Oy'$  с уравнением

$$\lambda_1(x' - x'_1)^2 + \lambda_2(y' - y'_1)^2 + c' = 0$$

Анализ поверхностей с таким уравнением предоставляю сделать самостоятельно.

### Случай 3.

Пусть только одно из чисел  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  отлично от нуля. Допустим, что  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ . Тогда в уравнении (3) выделим полный квадрат по переменному  $x'$

$$\lambda_1(x' - x'_1)^2 + b_2y' + b'_3z' + c' = 0.$$

Возможны следующие варианты:

1. Пусть хотя бы одно из чисел  $b_2, b_3$  отлично от нуля. Тогда на плоскости  $y'Oz'$  возьмем две перпендикулярные прямые  $b_1y' + b_3z' = 0$  и  $b_3y' - b_2z' = 0$ . Возьмем новую систему координат, у которой начало будет в точке  $O$ , ось  $O\tilde{x}$  направлена по оси  $Ox'$ , ось  $O\tilde{y}$  направлена вдоль второй прямой, а ось  $O\tilde{z}$  направлена вдоль первой прямой. Тогда уравнение примет вид

$$\lambda_1\tilde{x}^2 + \tilde{y} + c' = 0.$$

Это – уравнение цилиндрической поверхности, образующие которой параллельны оси  $O\tilde{z}$ , а направляющей служит кривая на плоскости  $\tilde{x}O\tilde{y}$  с уравнением

$$\lambda_1\tilde{x}^2 + \tilde{y} + c' = 0$$

Анализ возможных поверхностей предлагаю провести самостоятельно.

2. Пусть  $b_2 = b_3 = 0$ . Тогда уравнение принимает вид

$$(x' - x'_1)^2 = -\frac{c'}{\lambda_1}.$$

Если число справа положительно, то уравнение определяет две плоскости

$$x' = x'_1 \pm \sqrt{-\frac{c'}{\lambda_1}}.$$

Если число справа равно нулю, то уравнение определяет одну плоскость

$$x' = x'_1.$$

Если число справа отрицательно, то ни одна точка пространства уравнению не удовлетворяет.

Итак, получен алгоритм, позволяющий установить, какая поверхность задается уравнением второго порядка, и каково ее положение в пространстве.

**Пример 1.** Приведите уравнение поверхности

$$x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz - 2x + 6y + 2z = 0$$

к каноническому виду.

**Решение.**

Квадратичная форма имеет вид

$$x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz$$

Выписываем ее матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Находим ее собственные числа. Для этого запишем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 1 & 5-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

После вычисления определителя получим

$$-\lambda^3 + 7\lambda^2 - 36 = 0.$$

Подбором находим один корень  $\lambda_1 = 3$ . Преобразуем уравнение, выделяя множитель  $\lambda - 3$

$$-\lambda^3 + 3\lambda^2 + 4\lambda^2 - 12\lambda + 12\lambda - 36 = 0$$

или

$$-\lambda^2(\lambda - 3) + 4\lambda(\lambda - 3) + 12(\lambda - 3) = 0,$$

откуда

$$(\lambda - 3)(\lambda^2 - 4\lambda - 12) = 0$$

Находим два других корня характеристического уравнения  $\lambda_2 = 6$  и  $\lambda_3 = -2$  .

Находим собственные векторы. Для собственного числа  $\lambda_1 = 3$  для координат собственного вектора  $\alpha$  получим систему уравнений

$$\begin{cases} -2\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Решая ее находим, что фундаментальная система решений содержит только

одно решение, и в качестве собственного вектора можно взять  $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Для собственного числа  $\lambda_2 = 6$  для координат собственного вектора  $\beta$  получим систему уравнений

$$\begin{cases} -5\beta_1 + \beta_2 + 3\beta_3 = 0, \\ \beta_1 - \beta_2 + \beta_3 = 0, \\ 3\beta_1 + \beta_2 - 5\beta_3 = 0. \end{cases}$$

Отсюда находим собственный вектор  $\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Для собственного числа  $\lambda_3 = -2$  для координат собственного вектора  $\gamma$  получим систему уравнений

$$\begin{cases} 3\gamma_1 + \gamma_2 + 3\gamma_3 = 0, \\ \gamma_1 + 7\gamma_2 + \gamma_3 = 0, \\ 3\gamma_1 + \gamma_2 + 3\gamma_3 = 0. \end{cases}$$

Отсюда находим собственный вектор  $\gamma = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Легко проверить, что  $(\alpha, \beta) = (\alpha, \gamma) = (\beta, \gamma) = 0$  , то есть собственные векторы попарно ортогональны. Их длины равны соответственно  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{6}$ ,  $\sqrt{2}$  . Поэтому векторы нового ортонормированного базиса будут иметь координаты

$$i' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \quad j' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \quad k' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Матрица перехода имеет вид

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Старые координаты связаны с новыми уравнением  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ , то есть

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{3}} x' + \frac{1}{\sqrt{6}} y' - \frac{1}{\sqrt{2}} z' \\ y = -\frac{1}{\sqrt{3}} x' + \frac{2}{\sqrt{6}} y' \\ z = \frac{1}{\sqrt{3}} x' + \frac{1}{\sqrt{6}} y' + \frac{1}{\sqrt{2}} z' \end{cases} \quad (4)$$

Подставим эти выражения в исходное уравнение. Квадратичная форма примет вид, в котором произведения переменных будут отсутствовать, а коэффициентами при квадратах будут служить собственные числа

$$3(x')^2 + 6(y')^2 - 2(z')^2 - 2\left(\frac{1}{\sqrt{3}} x' + \frac{1}{\sqrt{6}} y' - \frac{1}{\sqrt{2}} z'\right) + 6\left(-\frac{1}{\sqrt{3}} x' + \frac{2}{\sqrt{6}} y'\right) + 2\left(\frac{1}{\sqrt{3}} x' + \frac{1}{\sqrt{6}} y' + \frac{1}{\sqrt{2}} z'\right) = 0.$$

Приводим подобные члены

$$3(x')^2 + 6(y')^2 - 2(z')^2 - \frac{6}{\sqrt{3}} x' + \frac{12}{\sqrt{6}} y' + \frac{4}{\sqrt{2}} z' = 0.$$

Выделим полные квадраты

$$3\left((x')^2 - \frac{2}{\sqrt{3}}x' + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right) - 1 + 6\left((y')^2 + \frac{2}{\sqrt{6}}y' + \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2\right) - 1 - 2\left((z')^2 - \frac{2}{\sqrt{2}}z' + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right) + 1 = 0$$

или

$$3\left(x' - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 6\left(y' + \frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 - 2\left(z' - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1.$$

Выполняем параллельный перенос осей координат

$$\begin{cases} \tilde{x} = x' - \frac{1}{\sqrt{3}}, \\ \tilde{y} = y' + \frac{1}{\sqrt{6}}, \\ \tilde{z} = z' - \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Новое начало системы координат  $O_1$  имеет координаты

$$x' = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad y' = -\frac{1}{\sqrt{6}}, \quad z' = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

В исходной системе координат точка  $O_1$  в соответствии с формулами (4) имеет координаты

$$x = -\frac{1}{3}, \quad y = -\frac{2}{3}, \quad z = \frac{2}{3}.$$

В новой системе координат  $O_1\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$  уравнение принимает канонический вид

$$\frac{\tilde{x}^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} + \frac{\tilde{y}^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2} - \frac{\tilde{z}^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1.$$

Это уравнение является каноническим уравнением однополостного гиперboloида. Его центр находится в точке  $O_1$ , две вещественные оси параллельны векторам  $i'$ ,  $j'$  вещественные полуоси равны  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ,  $\frac{1}{\sqrt{6}}$ . Мнимая ось параллельна вектору  $k'$ , мнимая полуось равна  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ . Изображение гиперboloида приведено на рисунке 4.9.

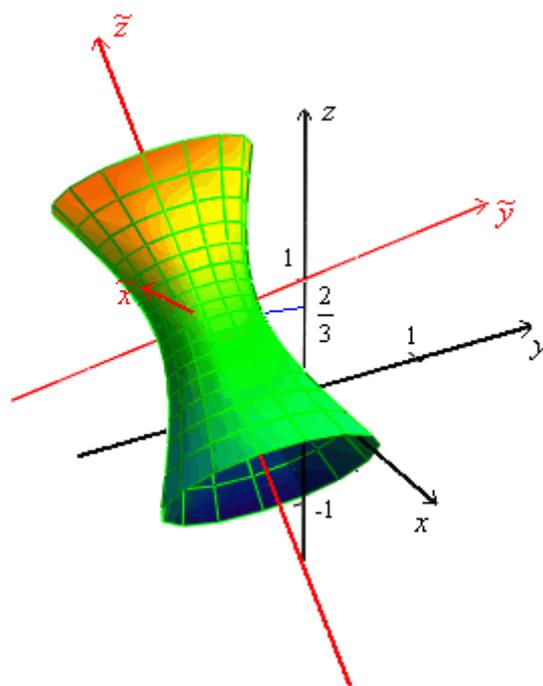


Рис.4.9

## 5. АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

При работе с трехмерными объектами, часто требуется совершать по отношению к ним различные преобразования: двигать, поворачивать, сжимать, растягивать, скашивать и т.д. При этом в большинстве случаев требуется, чтобы после применения этих преобразований сохранялись определенные свойства.

Напомним, что преобразование – это отображение множества на само себя. Отображение называется взаимно однозначным (биективным), если разные элементы переходят в разные, и в каждый элемент, какой-то элемент переходит.

**Определение.** Преобразование плоскости или пространства называется *аффинным* (от лат. *affinis* — соприкасающийся, близкий, смежный), если оно точно взаимно однозначно и трем точкам, лежащим на одной прямой, соответствуют три точки, также лежащие на одной прямой.

Свойства аффинного преобразования в трехмерном пространстве:

- пересекающиеся прямые переходят в пересекающиеся прямые;
- параллельные прямые – в параллельные;
- скрещивающиеся прямые – в скрещивающиеся;
- каждая плоскость аффинно отображается на некоторую плоскость, при этом пересекающиеся плоскости переходят в пересекающиеся, параллельные плоскости – в параллельные;
- алгебраическая линия переходит в алгебраическую, при этом порядок линии сохраняется, в частности, эллипсы переходят в эллипсы, гиперболы – в гиперболы, параболы – в параболы;
- сохраняет пропорции параллельных объектов – длин отрезков на параллельных прямых и площадей квадратуемых фигур на параллельных плоскостях.

При аффинном преобразовании множество векторов плоскости (пространства) взаимно однозначно отображает на множество векторов плоскости (пространства), и это отображение является *линейным*.

Любое аффинное преобразование задается матрицей с ненулевым определителем и вектором переноса. В трехмерном пространстве оно задается матрицей  $3 \times 3$  и вектором:

$$\vec{p}' = A\vec{p} + \vec{t}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{pmatrix}.$$

$A$  представляет собой матрицу линейного оператора над пространством

трехмерных векторов. Если умножить вектор  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  на любую матрицу  $3 \times 3$ , то

опять получим вектор  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , т.е. начало системы координат, относительно

преобразование  $A$ , является неподвижной точкой. Требование, чтобы определитель был ненулевой, диктуется определением. Если определитель матрицы  $A$  равен нулю, то все пространство переходит в плоскость, прямую или точку. Тем самым не соблюдается *взаимная однозначность*. На практике удобно задавать аффинное преобразование одной матрицей  $4 \times 4$ :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & t_x \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & t_y \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что первые три значения последней строки равны нулю. Это *необходимое условие* того, что преобразование будет аффинным. В общем случае произвольная матрица размера  $4 \times 4$  задает проективное преобразование, которое используется для проецирования трехмерной сцены.

Рассмотрим частные случаи аффинных преобразований.

Для различных компьютерных приложений введем систему координат следующим образом (рис.4.19):

- система координат правая;
- ось  $Oz$  направлена на наблюдателя, перпендикулярно плоскости экрана;
- ось  $Oy$  находится в плоскости экрана и направлена вверх;
- ось  $Ox$  находится в плоскости экрана и направлена вправо.

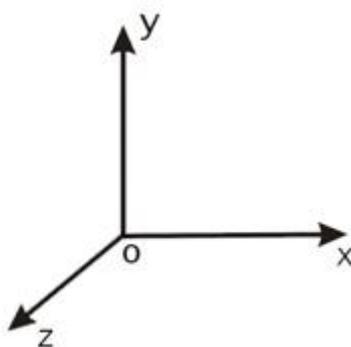


Рис.4.10

## 1. Параллельный перенос

Параллельный перенос задается матрицей:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ В данном случае матрица } A = E, \text{ единичной матрице.}$$

## 2. Поворот (вращение)

Если на плоскости повороты делались вокруг некоторой точки, например, начала координат, то в пространстве повороты производятся вокруг некоторого вектора.

Рассмотрим сначала частные случаи поворотов вокруг координатных осей.

### Поворот вокруг оси $Oy$ .

Заметим, что при повороте вокруг оси  $Oy$  ординаты точек не меняются. Абсцисса и аппликата точки преобразуются независимо от ординаты и в

плоскости  $xOz$  это будет поворот вокруг начала координат по часовой стрелке, т.е. в отрицательном направлении. Матрица такого преобразования, аналогично тому, как это было показано в разделе 3, имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \cos(-\varphi_y) & -\sin(-\varphi_y) \\ \sin(-\varphi_y) & \cos(-\varphi_y) \end{pmatrix}. \text{ Тогда } \begin{cases} x' = x \cos(\varphi_y) + z \sin(\varphi_y) \\ y' = y \\ z' = -x \sin(\varphi_y) + z \cos(\varphi_y) \end{cases}.$$

$$\text{Матрица преобразования } A_y(\varphi_y) = \begin{pmatrix} \cos(-\varphi_y) & 0 & -\sin(-\varphi_y) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(-\varphi_y) & 0 & \cos(-\varphi_y) \end{pmatrix}.$$

### **Поворот вокруг осей $Ox$ и $Oz$ .**

Аналогичными рассуждениями можно получить матрицы поворотов  $A_x(\varphi_x)$  и  $A_z(\varphi_z)$  вокруг осей  $Ox$  и  $Oz$ , соответственно:

$$A_x(\varphi_x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi_x) & -\sin(\varphi_x) \\ 0 & \sin(\varphi_x) & \cos(\varphi_x) \end{pmatrix}$$

$$A_z(\varphi_z) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi_z) & -\sin(\varphi_z) & 0 \\ \sin(\varphi_z) & \cos(\varphi_z) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что определители матриц  $A_x$ ,  $A_y$ ,  $A_z$  равны 1. Эти матрицы обладают свойством ортогональности:  $A^T A = A A^T = E$ . Из этого, в свою очередь, следует полезное свойство, что обращение матрицы поворота можно заметить транспонированием:  $A^{-1}(\varphi) = A^T(\varphi)$ .

### **3. Масштабирование (сжатие/растяжение, отражение)**

Растяжения и сжатия, о которых мы будем говорить, в определенном смысле, *равномерные*. Эта равномерность означает, что все кусочки плоскости (пространства) будут растягиваться (сжиматься) одинаково.

Коэффициенты сжатия/растяжения определяются диагональными членами матрицы  $A$ :

$$\begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & s_z \end{pmatrix}.$$

$$\text{В результате } \begin{cases} x' = s_x x \\ y' = s_y y \\ z' = s_z z \end{cases}$$

Комбинация коэффициентов  $s_x = -1, s_y = 1, s_z = 1$  будет задавать отражение от плоскости  $yOz$  ( $x = 0$ ). При  $s_x = s_y = s_z = -1$  получим центральную симметрию относительно начала координат.

С точки зрения линейной алгебры матрица  $A$  содержит базис новой системы координат. Она переводит вектора декартова базиса:

$$(1 \ 0 \ 0) \rightarrow (a_{11} \ a_{21} \ a_{31})$$

$$(0 \ 1 \ 0) \rightarrow (a_{12} \ a_{22} \ a_{32})$$

$$(0 \ 0 \ 1) \rightarrow (a_{13} \ a_{23} \ a_{33}).$$

#### 4. Скос

Теперь несложно получить преобразование скоса. Например:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Если придерживаться общепринятой терминологии, то приведенное выше преобразование называется сдвигом. Сдвигом (shear) будет любое преобразование, главная диагональ матрицы  $A$  которого единичная. Если при этом определитель матрицы  $A$  равен нулю, то преобразование не является аффинным.

Сложные аффинные преобразования можно получить как комбинацию простых (элементарных) преобразований. При этом выбирать простые аффинные преобразования можно по-разному. Например, поворот можно представить как комбинацию масштабирования и сдвига. Тем не менее, для удобства, поворот также считается элементарным преобразованием. Поворот вокруг произвольного вектора представляется как комбинация поворотов вокруг координатных осей.

## 6. КВАТЕРНИОНЫ И ТРЕХМЕРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

В компьютерной графике и динамике твердого тела широко используется аппарат кватернионов – четырехмерных гиперкомплексных чисел со специальными правилами умножения. Кватернионы имеют ряд практических преимуществ по сравнению с другими способами описания вращательного движения твердого тела. С помощью кватернионов эффективно решаются задачи на определение параметров конечного поворота твердого тела и задачи сложения поворотов.

Кватернионы были введены в математику в 1843 году Уильямом Роуэном Гамильтоном (William Rowan Hamilton, 1805-1865). Хотя Гамильтон действительно был первым, кто построил кватернионы как алгебру, у кватернионов есть и более ранняя история, начинающаяся с открытия Эйлером в 1748 году тождества четырех квадратов. Кроме того, О. Родригес в своих исследованиях параметризовал общий поворот с помощью четырех чисел, являющихся фактически координатами соответствующего кватерниона. Это позволяет рассматривать его как предвестника идей Гамильтона, поскольку приводимое им правило умножения совпадает с формулой Гамильтона для произведения двух кватернионов.

### 6.1. Алгебра кватернионов

Кватернионом (четверичным числом, числом Гамильтона) называется упорядоченная четверка вещественных чисел  $(a,b,c,d)$ , которую часто удобно представлять как точку (или вектор) из четырехмерного евклидова пространства. Для этих четверок введены две операции: сложение друг с другом и умножение друг на друга. Сами числа в четверке называются координатами (компонентами) кватерниона. Складываются кватернионы так же как вектора: по координатам. Например,  $(3,1,-2,1) + (-1,0,-1,2) = (2,1,-3,3)$ .

Для описания умножения представим кватернион в его *арифметической форме*:

$$a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k ,$$

где буквы  $i, j, k$  можно считать переменными в алгебраическом выражении.

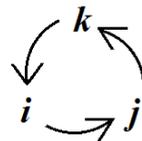
Например,  $(3, 1, -2, 1) = 3 + i - 2j + k$ .

Теперь при умножении двух таких выражений, конечно помещенных в скобки, мы будем пользоваться «школьными» правилами раскрытия скобок при умножении. Все знакомые со школы арифметические правила действий сохраняются, кроме одного: для трех наших переменных не действует закон коммутативности (переместительный закон) умножения:  $x \cdot y \neq y \cdot x$ , если  $x$  и  $y$  суть какие-нибудь выражения, содержащие  $i, j$  или  $k$ . Вместо этого для них вводятся следующие правила:

$$1. \quad i \cdot j = -j \cdot i = k, \quad j \cdot k = -k \cdot j = i, \quad k \cdot i = -i \cdot k = j$$

$$2. \quad i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

Все эти равенства можно домножать на обычные вещественные числа, в частности, и на число  $-1$ , в любом порядке. Отметим, что правила первой группы совпадают с правилами векторного умножения друг на друга направляющих ортов  $i, j, k$  трехмерного пространства. Их легко запомнить по следующей мнемонической схеме:



**Рис.6.1. Умножение мнимых единиц кватернионов.**

умножения двух соседей против часовой стрелки всегда дают в ответе третьего без всяких знаков. Вторая группа правил повторяет основное свойство мнимой единицы комплексных чисел, за что  $i, j, k$  называют мнимыми единицами кватернионов.

Пример.

Умножим кватернион  $(3, 1, -2, 1)$  на кватернион  $(-1, 0, -1, 2)$ .

$$\begin{aligned} (3+i-2j+k)(-1-j+2k) &= \\ &= -3-3j+6k-i-ij+2ik+2j+2j^2-4jk-k-kj+2k^2= \\ &= -3-3j+6k-i-k-2j+2j-2-4i-k+i-2= \\ &= -7-4i-3j+4k. \end{aligned}$$

Оказывается, что произведение кватернионов обладает всеми свойствами вещественных чисел, хорошо знакомых нам со школы (ассоциативность, дистрибутивность), кроме одного: оно не коммутативно, то есть в общем случае произведение зависит от порядка сомножителей.

Вот еще несколько естественных определений.

Пусть  $\alpha = a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k$  – кватернион.

Число  $a$  называется *скалярной* или *вещественной* частью кватерниона  $\alpha$ .

Такие кватернионы можно отождествить с вещественными числами (так же как это было в комплексных числах).

Умножение на них коммутативно, перестановочно с любым кватернионом – проверьте!

Кватернион  $u = b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k$  называется *векторной* частью  $\alpha$ . Сами по себе такие кватернионы с нулевой скалярной частью называются *чисто мнимыми* или просто *векторами*, так как они естественно изображаются как векторы трехмерного евклидова пространства (а часто просто отождествляются с ними по координатам).

И произведение чисто мнимых кватернионов легко выражается через два известных вида произведений векторов:

$$\begin{aligned} u \cdot v &= (b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k)(f \cdot i + g \cdot j + h \cdot k) = \\ &= -bf - cg - dh + (ch - dg)i + (df - bh)j + (bg - cf)k = \\ &= -(bf + cg + dh) + \begin{vmatrix} i & j & k \\ b & c & d \\ f & g & h \end{vmatrix} = -(u, v) + u \times v. \end{aligned} \quad (1)$$

То есть кватернионное произведение векторов есть кватернион, скалярная часть которого равна скалярному произведению этих векторов (в обычном смысле слова), взятому с противоположным знаком, а векторная часть равна их векторному произведению.

Кватернион  $\bar{\alpha} = a - b \cdot i - c \cdot j - d \cdot k = a - u$ , отличающийся от  $\alpha$  знаком всей векторной части, называется *сопряженным* с  $\alpha$ . Ясно, что  $\overline{\bar{\alpha}} = \alpha$ . С помощью сопряженного легко установить, что каждый кватернион, кроме нулевого

$(0,0,0,0)$ , имеет *обратный*. Действительно, умножим кватернион  $\alpha$  на сопряженный к нему:

$$\alpha\bar{\alpha} = (a+u)(a-u) = a^2 + ua - au - u^2 =$$

(средние слагаемые сокращаются, так как здесь  $a$  можно считать обычным числом.)

$$= a^2 - ((u,u) + u \times u) = a^2 + u^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = |\alpha|^2.$$

Здесь число  $|\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$  называется *модулем* кватерниона. Если кватернион не нулевой, то  $|\alpha| \neq 0$  и мы получим:

$$\frac{\bar{\alpha}}{|\alpha|^2} \cdot \alpha = \alpha \cdot \frac{\bar{\alpha}}{|\alpha|^2} = 1,$$

что и означает, что кватернион  $\alpha^{-1} = \frac{1}{|\alpha|^2} \cdot \bar{\alpha}$  есть обратный для  $\alpha$ .

Пример.

$$\frac{1}{-1-j+2k} = \frac{-1+j-2k}{(-1)^2+1^2+(-2)^2} = -\frac{1}{6} + \frac{1}{6}j - \frac{1}{3}k.$$

## 6.2. Кватернионы и вращения в трехмерном пространстве

Одним из основных приложений кватернионов является описание движений тел в трехмерном пространстве. Язык кватернионов оказался наиболее емким и эффективным, а умножение кватернионов впитало в себя наиболее важные особенности такого движения. Из основ кинематики и динамики твердого тела известно, что произвольное движение тела всегда можно разложить на движение некоторой точки тела и движение тела с неподвижной точкой (вращение). При этом основную проблему представляет изучение вращательного движения тела, поскольку задача о движении точки сравнительно проста.

В качестве примера применения кватернионов рассмотрим поворот твердого тела в трехмерном пространстве вокруг начала координат.

Для этого заметим сначала, что по формуле (1) для любой попарно ортогональной тройки векторов единичной длины  $u, v, w$ , ориентированных в

пространстве так же, как и тройка  $i, j, k$ , верны (проверьте!) формулы кватернионного умножения, аналогичные правилам 1. и 2.:

$$u \cdot v = -v \cdot u = w, \quad v \cdot w = -w \cdot v = u, \quad w \cdot u = -u \cdot w = v, \quad u^2 = v^2 = w^2 = -1.$$

Пусть  $\alpha$  – некоторый кватернион, причем  $|\alpha| = 1$ , и пусть  $\alpha = a + u_0$  есть разложение  $\alpha$  на скалярную и векторную часть. Тогда  $|\alpha|^2 = a^2 + |u_0|^2 = 1$ , так что можно положить  $a = \cos \varphi$ ,  $|u_0| = \sin \varphi$ ,  $0 \leq \varphi \leq \pi$ , и  $\alpha = \cos \varphi + u \sin \varphi$ , где  $u$  – вектор длины 1.

Пусть теперь  $v$  – какой-нибудь вектор единичной длины, ортогональный  $u$ , и пусть  $w = u \cdot v$ . Теперь  $u, v, w$  образуют взаимно ортогональную тройку чисто мнимых кватернионов единичной длины и, значит, к ним будут применимы формулы (2).

Посмотрим, как на каждого из этой тройки векторов будет действовать преобразование трехмерного пространства  $y = \alpha^{-1} \cdot x \cdot \alpha$  при переменном векторе  $x$ .

Во-первых, кватернионы  $u$  и  $\alpha$  перестановочны при умножении, так как отличаются только скалярной частью (проверьте!). Поэтому  $\alpha^{-1} \cdot u \cdot \alpha = u$ .

Во-вторых,  $\alpha^{-1} = \bar{\alpha} = \cos \varphi - u \sin \varphi$ , и значит,

$$\begin{aligned} \alpha^{-1} \cdot v \cdot \alpha &= (\cos \varphi - u \sin \varphi) \cdot v \cdot (\cos \varphi + u \sin \varphi) = \\ &= v \cos^2 \varphi - w \sin \varphi \cos \varphi + v \cdot u \sin \varphi \cos \varphi - w \cdot u \sin^2 \varphi = \\ &= v \cos 2\varphi - w \sin 2\varphi. \end{aligned}$$

Аналогично,  $\alpha^{-1} \cdot w \cdot \alpha = v \sin 2\varphi + w \cos 2\varphi$ .

Вспоминая матрицу замены координат при повороте в плоскости, в данном случае содержащей вектора  $v$  и  $w$ , приходим к выводу, что наше преобразование поворачивает эту плоскость на угол  $-2\varphi$ , считая положительным направление поворотов от  $v$  к  $w$  (рис. 6.1). В трехмерном пространстве все повороты происходят только вокруг определенной оси. У нас – это ось, направленная вдоль вектора  $u$ , так как он не меняется в нашем преобразовании.

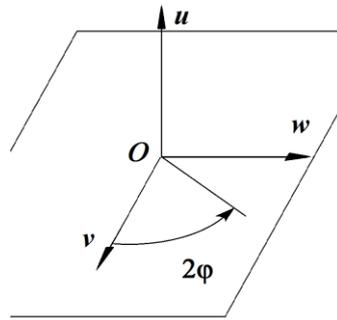


Рис. 6.2.

Для описания вращения широко используемой системой переменных в динамике твердого тела является система трех углов – углов [Эйлера](#) (Euler Angles) :  $\psi$  – угол прецессии,  $\theta$  – угол нутации,  $\phi$  – угол собственного вращения. Леонард Эйлер почти всю свою жизнь прожил в Санкт-Петербурге, где и решил необычайно большое количество задач математики, механики и астрономии. Указанная система углов была им введена в связи с изучением движения Земли.

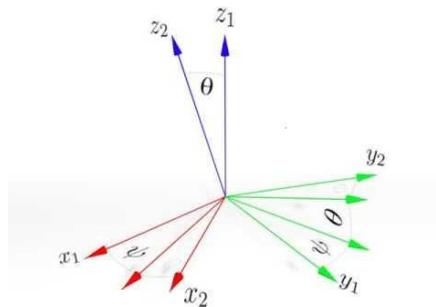
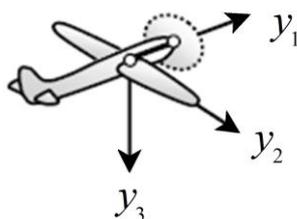


Рис.6.3. Углы Эйлера.

В аэродинамике и кораблестроении их часто называют углами А.Н. Крылова: *крен*, *тангаж* и *рысканье* (или *скольжение*); по-английски: *roll*, *pitch*, *yaw*. Надо помнить, что повороты в трехмерном пространстве не коммутативны, а значит, на результат влияет порядок поворотов (замечательной иллюстрацией этого факта является *гироскоп*). Поэтому при использовании углов Эйлера важен порядок поворотов вокруг осей, а также от того в какой системе координат совершаются повороты. Большим недостатком является отсутствие операции комбинации поворота. Углы Эйлера нельзя складывать покомпонентно. Итоговый поворот не будет комбинацией исходных поворотов.

Воспользуемся методом А.Н. Крылова для описания изменения ориентации твердого тела в трехмерном пространстве.

Твердое тело будем представлять в виде самолета, а учитывать повороты самолета будем с точки зрения пилота (или аппаратуры) поворачивающегося вместе с ним. При этом в качестве подвижной, то есть связанной с самолетом, системы координат  $y_1, y_2, y_3$  выбирается самолетная координатная система, оси которой показаны на рис. 3. Ось  $y_1$  называется осью крена,  $y_2$  – осью тангажа,  $y_3$  – осью скольжения. В начальном положении тело совпадает с неподвижной системой координат (рис. 6.4).



**Рис. 6.4. Направление осей подвижной системы координат.**

Сначала выполняется поворот тела вокруг оси крена  $y_1$ , на угол  $\alpha$ . Далее выполняется поворот тела вокруг нового положения оси тангажа  $y_2$ , на угол  $\beta$ , а затем вокруг нового положения оси скольжения  $y_3$  на угол  $\gamma$ . После этих трех поворотов тело приходит в окончательное положение, определяемое углами  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ .

На основании этих формул запишем кватернионы нужных нам основных поворотов:

$$\delta_1 = (\cos \alpha/2, \sin \alpha/2, 0, 0), \delta_2 = (\cos \beta/2, 0, \sin \beta/2, 0), \delta_3 = (\cos \gamma/2, 0, 0, \sin \gamma/2).$$

Последовательное суммирование поворотов (их нельзя переставлять в произвольном порядке!) любого кватерниона-вектора  $p$  означает его последовательное умножение на соответствующие поворотные кватернионы поворотов-слагаемых. Учитывая связь подвижной и неподвижной системы координат легко понять, как выглядит кватернион суммарного поворота  $\delta$ , то есть такой, что  $q = \delta^{-1} p \delta$ , где  $q$  – вектор, полученный после поворота вектора  $p$ . Именно,  $\delta$  будет выражен как произведение кватернионов основных поворотов

в порядке слева направо (напоминаем, что их произведение не коммутативно!):

$$\delta = \delta_1 \delta_2 \delta_3.$$

Перемножая кватернионы-сомножители, получим:

$$\delta = \begin{bmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2} \\ \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2} \\ \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2} \\ \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2} \end{bmatrix}.$$

Напоследок заметим, что представленная кватернионами физическая картина мира имеет глубокий философский смысл. Наблюдатель в «вещественном» времени следит за движениями объектов в «мнимом» трехмерном пространстве. Как писал известный древнеримский философ Сенека: «Все у нас чужое, одно лишь время наше».

## 7. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

### Задание 1.

Исследовать функции и построить их графики:

1.  $y = \frac{x-3}{(x-2)^2}$ ;  $y = x - \ln(x^2 - 1)$ ;  $y = xe^{x-3}$
2.  $y = \frac{1}{x+1} + 2x - 1$ ;  $y = 4^{1/(3-x)}$ ;  $y = 3xe^{-\sqrt{x}}$
3.  $y = \frac{(x-1)^2}{x+1}$ ;  $y = 1 - \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}$ ;  $y = \frac{x}{\ln x}$
4.  $y = \frac{x^2 + 1}{x-1}$ ;  $y = \frac{e^{x-2}}{2-x}$ ;  $y = (x-1)^2 |x+4|$
5.  $y = \frac{x}{(2x-1)^2}$ ;  $y = \sqrt[3]{2x^2 - x^3}$ ;  $y = |2+x|e^{-x}$
6.  $y = \frac{2}{x^2 + x - 2}$ ;  $y = \frac{e^{x+2}}{1-|x+2|}$ ;  $y = x^2 \ln x$
7.  $y = \frac{(x-2)^2}{x+1}$ ;  $y = \ln \frac{5-x}{6+x}$ ;  $y = \frac{e^x}{|x^2 - 1|}$
8.  $y = \frac{3x^4 + 1}{x^3}$ ;  $y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$ ;  $y = \ln \left| \frac{x+2}{x-2} \right|$
9.  $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4$ ;  $y = \frac{x^2 + \ln x}{x}$ ;  $y = x^3 e^{2-x}$
10.  $y = \sqrt[3]{x}(x-1)$ ;  $y = \frac{x}{\ln x}$ ;  $y = \frac{e^{x-3}}{4-x}$
11.  $y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x}$ ;  $y = x^{2/3}(x-5)$ ;  $y = x^2 - \ln x$
12.  $y = \frac{1}{x+1} + 2x - 1$ ;  $y = 4^{1/(3-x)}$ ;  $y = 3xe^{-\sqrt{x}}$
13.  $y = \frac{1+x}{(1-x)^3}$ ;  $y = \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x+1}$ ;  $y = 3xe^{3-x}$
14.  $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$ ;  $y = x \ln(x^2 + 1)$ ;  $y = \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}$
15.  $y = \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4x}$ ;  $y = \frac{1 + \ln x}{x}$ ;  $y = \frac{|3-x|}{x+2}$
16.  $y = \frac{4}{x^2 + 2x - 3}$ ;  $y = 3x - \ln x$ ;  $y = \frac{|x^2 - 1|}{e^{x-1}}$
17.  $y = \frac{x^2}{1-x}$ ;  $y = x^2 e^{-x^2}$ ;  $y = \frac{|1+x|}{1-x} e^x$
18.  $y = \frac{x}{x^2 - 4}$ ;  $y = \ln(\sin x)$ ;  $y = \frac{1+x}{1-x} e^x$
19.  $y = \frac{x^2 - 1}{x}$ ;  $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ ;  $y = \sqrt[3]{(x-9)^2}$

$$20. y = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 4}; \quad y = \frac{x + \ln x}{2x}; \quad y = \frac{|2x + 1|}{x - 1}$$

**Задание 2.** Исследовать параметрически заданную кривую и построить ее график:

$$1. \begin{cases} x = \frac{t}{1+t^3} \\ y = \frac{t^2}{1+t^3} \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x = -\frac{2t^2}{1+t^2} \\ y = \frac{2t^3}{1+t^2} \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x = \cos t - \frac{1}{2} \cos 2t \\ y = \sin t + \frac{1}{2} \sin 2t \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x = 4t^2 + 8 \\ y = 3t(t^2 + 1) \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x = \frac{t}{1-t^2} \\ y = \frac{t(1-2t^2)}{1-t^2} \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x = t + e^{-t} \\ y = 2t + e^{-2t} \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x = \operatorname{ch} t - 1 \\ y = \operatorname{sh} t - t \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} x = \sqrt{\cos 2t} \cos t \\ y = \sqrt{\cos 2t} \sin t \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} x = \frac{t^2}{5} + \frac{1}{5t^2} \\ y = \frac{t^2}{3} - \frac{1}{3t^2} \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} x = 3t^2 - 2t^3 + 1 \\ y = t - \frac{t^3}{3} \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} x = \frac{t^2}{t^2 + 1} \\ y = \frac{t(1-t^2)}{t^2 + 1} \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} x = 3 \operatorname{ch} t \\ y = 3 \operatorname{sh} t \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} x = \frac{t}{t^2 - 1} \\ y = \frac{t^2}{t^2 - 1} \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} x = \frac{t^3}{t^3 + 1} \\ y = \frac{t^2}{t^3 + 1} \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} x = \frac{t^2 - 1}{t(t + 2)} \\ y = \frac{t^2}{(t + 2)(t + 1)} \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} x = \frac{t^2 + 1}{4(t - 1)} \\ y = \frac{t}{t + 1} \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} x = \frac{t}{1 - t^2} \\ y = \frac{t(1 - 4t^2)}{1 - t^2} \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} x = \frac{t^2}{t^2 - 1} \\ y = \frac{t^2 + 1}{t + 2} \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} x = \operatorname{arctg} t \\ y = t^3 - t \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} x = t^2 \\ y = \frac{t^3 + 2t^2 + t}{t + 2} \end{cases}$$

**Задание 3.** Построить график кривой в полярной системе координат:

1.  $\rho = a \operatorname{tg} \varphi$
2.  $\rho = \frac{a}{\sqrt{\cos 3\varphi}}$
3.  $\rho = \operatorname{tg} 2\varphi$
4.  $\rho = \sqrt{\frac{\pi}{\varphi}}$
5.  $\rho = a(1 + b \cos \varphi)$ ,  $a > 0$ ,  $b > 1$
6.  $\rho = \frac{2}{\cos \varphi} + 1$
7.  $\rho = \frac{1}{\cos^2 \varphi}$

8.  $\rho = \sin^3 \varphi$
9.  $\rho = 1 + 2 \cos \varphi$
10.  $\rho = e^{2\varphi}$
11.  $\rho = \frac{1}{\sin^2 \varphi}$
12.  $\rho = \frac{1}{\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi}$
13.  $\rho = a(\operatorname{tg} \varphi - 1)$
14.  $\rho = \frac{1}{\cos^3 \varphi}$
15.  $\rho = \varphi + \frac{1}{\varphi}$
16.  $\rho = \frac{2}{\cos \varphi} - 1$
17.  $\rho = \frac{a}{\varphi - \frac{\pi}{4}}$
18.  $\rho = \frac{3}{\cos \varphi} + 1$
19.  $\rho = \frac{1}{\sin^3 \varphi}$
20.  $\rho = a \sin 3\varphi$

**Задание 4.** Построить кривую, заданную неявно:

1.  $(y - x)^2 = x^5$
2.  $y^2 = x^3 - x$
3.  $y^2 = x(x - 1)^2$
4.  $3xy^2 = x^3 - 2$
5.  $y^2 = \frac{x^2(2 + x)}{2 - x}$
6.  $(y - x^2)^2 = x^5$
7.  $9y^2 = 4x^3 - x^4$
8.  $y^2 = x(1 - x^2)^3$
9.  $y^3 = x^2(x^2 - 4)^3$
10.  $y^2 = x^2 - x^4$
11.  $y^2(2 - x) = x^3$
12.  $x^2y^2 = (x - 1)(x - 2)$
13.  $x^4y^2 = (x^2 - 1)^3$
14.  $x^3(y - x) = x^3 + 1$
15.  $x^2y^2 = 4(x - 1)$

$$16. y^2 = x^2(x+1)^2(1-x)$$

$$17. \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$$

$$18. x^3 + y^3 = 6x^2$$

$$19. y^2 = x^2(x-1)$$

$$20. x^4 + y^4 = 4(x^2 + y^2)$$

**Задание 5.** Привести уравнение каждой кривой к каноническому виду, определить тип кривой и ее эксцентриситет, изобразить ее на одном чертеже в старых и новых координатах:

$$1. 5x^2 + 6xy + 5y^2 - 16x - 16y - 16 = 0$$

$$2. 7x^2 + 16xy - 23y^2 - 14x - 16y - 218 = 0$$

$$3. 6x^2 + y^2 + 12x - 2y - 2 = 0$$

$$4. 4x^2 - 4xy + y^2 - 4y - 4x + 7 = 0$$

$$5. x^2 - y - 4x - 5 = 0$$

$$6. 10xy - 2y^2 + 6x + 4y - 21 = 0$$

$$7. 3x^2 + 2y^2 + 12x + 4y - 3 = 0$$

$$8. 25x^2 - 9y^2 - 100x + 18y - 316 = 0$$

$$9. 5x^2 + 10y = 10x + 2$$

$$10. 4x^2 + 2xy + 4y^2 + 6x + 2y + 3 = 0$$

$$11. x^2 + 2xy - y^2 + 8x + 4y - 8 = 0$$

$$12. 5x^2 - 6y^2 - 10x + 12y - 31 = 0$$

$$13. y - 4x - x^2 - 4 = 0$$

$$14. 5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0$$

$$15. 6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$$

$$16. x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$$

$$17. 4x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 14y + 7 = 0$$

$$18. x^2 + 2xy + y^2 - x - 2y + 3 = 0$$

$$19. 4x^2 - 4xy + y^2 - x - 2 = 0$$

$$20. 2x^2 - 3xy - x + 3y + 4 = 0$$

$$x^2 + 6y^2 + 2x + 12y - 2 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 12x + 2y - 2 = 0$$

$$x^2 + 2xy + y^2 - 8y + 4$$

$$25x^2 - 9y^2 + 100x - 18y - 316 = 0$$

$$5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$$

$$x^2 - y^2 - 6x + 4y + 1 = 0$$

$$x^2 - 3xy + y^2 + 1 = 0$$

$$2x^2 + 6xy + 2y^2 - 2x - 6y - 16 = 0$$

$$2x^2 + 3xy - 2y^2 - 8x - 11y = 0$$

$$5x^2 - 6y^2 + 10x + 12y - 31 = 0$$

$$x^2 - 4y - 4x + 6 = 0$$

$$7x^2 - 24xy - 38x + 24y + 175 = 0$$

$$5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$$

$$9y - 4x - x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 - 4y^2 + 6x + 5 = 0$$

$$9y^2 + 4x - x^2 - 22 = 0$$

$$x^2 - 4y^2 + 6x + 16y + 1 = 0$$

$$x^2 + 4y^2 + 4x - 8y - 8 = 0$$

$$x^2 - 6x - 6y + 10 = 0$$

$$2x^2 - 12x + 3y + 4 = 0$$

**Задание 6.** Привести уравнение поверхности второго порядка к каноническому виду и определить ее вид:

$$1. 7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 6x - 24y + 18z + 30 = 0$$

$$2. 2x^2 - 7y^2 - 4z^2 + 4xy - 16xz + 20yz + 60x - 12y + 12z + 90 = 0$$

$$3. 2x^2 + 2y^2 - 5z^2 + 2xy - 2x - 4y - 4z + 2 = 0$$

$$4. 2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 2xz + 2yz - 4x + 6y - 2z + 3 = 0$$

$$5. 4x^2 + y^2 + 4z^2 - 4xy - 8xz + 4yz - 28x + 2y + 16z + 45 = 0$$

$$6. 2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xy - 4xz + 2yz + 2x - 10y - 2z - 1 = 0$$

$$7. x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz - 2x + 6y + 2z + = 0$$

$$8. x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 4xz + 4yz + 2x + 4y - 10z - 1 = 0$$

$$9. x^2 + 5y^2 + z^2 + 5xy + 5xz + 2yz - 6 = 0$$

$$10. 2x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz + x - 4y - 3z + 2 = 0$$

11.  $9x^2 - 4y^2 - 91z^2 - 40yz + 18xz - 36 = 0$
12.  $x^2 - 5z^2 + 3xy + 2yz - 7x - 6y - 2z + 10 = 0$
13.  $x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 2xy - 4yz + 2x - 2y - 4 = 0$
14.  $7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 6x - 24y + 18z + 30 = 0$
15.  $6x - 2y^2 + 6z^2 + 4xz + 8x - 4y - 8z + 1 = 0$
16.  $5x^2 + 6y^2 + 7z^2 - 4xy + 4yz - 10x + 8y + 14z - 6 = 0$
17.  $2x^2 + 5y^2 + 11z^2 - 20xy + 4xz + 16yz - 24x - 6y - 6z - 18 = 0$
18.  $x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 12x - 8xz - 4yz + 14x + 16y - 12z - 33 = 0$
19.  $3x^2 - 2y^2 - z^2 + 4xy + 8xz - 12yz + 18x - 4y - 14z = 0$
20.  $y^2 - z^2 + 4xy - 4xz - 6x + 4y + 2z + 8 = 0$

## Литература

1. Веселов А.П., Троицкий Е.В. Лекции по аналитической геометрии. Учебное пособие. М.: Изд-во Центра прикладных исследований при механико-математическом ф-те МГУ. 2002. – 160 с.
2. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988. – 416 с.
3. Графики функций: Справочник/ Вирченко Н.А., Ляшко И.И., Швецов К.И. – Киев: "Наукова думка", 1979. – 320 с.
4. Балк М.Б., Болтянский В.Г. Геометрия масс. М.: "Наука", 1987. – 160 с.
5. Ефимов Н.В. Высшая геометрия. М.: "Наука", 1971. – 576 с.
6. Кузютин В.Ф., Зенкевич Н.А., Еремеев В.В. Геометрия: Учебник для вузов. – СПб.: Издательство "Лань", 2003. – 416 с.
7. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: "Наука", 1966. – 576 с.
8. Ильин В.А., Поздняк Э.Г. Аналитическая геометрия. М.: "Наука", 1999. – 224 с.
9. Прасолов В.В., Тихомиров В.М. Геометрия. М.: Изд-во МЦНМО, 2007. – 328 с.
10. Конвей Дж. Х., Смит Д.А. О кватернионах и октавах, об их геометрии, арифметики и симметриях. М.: Изд-во МЦНМО, 2009. – 184 с.
11. Гордеев В.Н. Кватернионы и трехмерная геометрия. Киев, 2012. – 60 с.
12. Ефимов Н.В. Квадратичные формы и матрицы. М.: "Наука", 1967. – 159 с.
13. Виноградов О.Л. Математический анализ: в 4-х частях. СПб, Издательский Дом СПбГУ, 2012.
14. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. М.: "Наука", 1971. – 272 с.
15. Райхмист Р.Б. Графики функций: Справ. пособие для вузов. – М.: "Высшая школа", 1991. – 160 с.
16. Линейная алгебра: учеб.-практ. пособие/ Е.С. Баранова [и др.]; под ред. М.С. Попова; Балт. гос. техн. ун-т. – СПб., – 2015. – 168 с.
17. Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. – М.: Наука, 1973. – 320 с.

