

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. Ломоносова

Бакинский филиал

ХИМИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Э. М. Галеев

Математический анализ-2

Баку - 2015

Учебное пособие

Галеев Э.М.

Математический анализ-2. Учебное пособие по математическому анализу для 1 курса химического факультета Бакинского филиала МГУ им. М. В. Ломоносова. Издательство филиала МГУ им. М. В. Ломоносова в г. Баку.

Данное пособие содержит материал лекций по математическому анализу, читающихся во втором семестре первого курса на химическом факультете Бакинского филиала МГУ.

Издательство филиала МГУ им. М. В. Ломоносова в г. Баку.,
2016 г.

Оглавление

1	Неопределенный интеграл	5
1	Первообразная и ее простейшие свойства.	5
2	Неопределенный интеграл. Основные приемы интегрирования.	7
3	Криволинейная трапеция и определение ее площади.	14
2	Определенный интеграл.	17
1	Понятие определенного интеграла.	17
2	Свойства линейности и аддитивности определенного интеграла.	19
3	Неравенства и определенный интеграл.	21
4	Теорема о среднем.	23
5	Свойство определенного интеграла с переменным верхним пределом.	24
6	Формула Ньютона–Лейбница.	26
7	Замена переменных в определенном интеграле.	28
8	Интегрирование по частям.	31
9	Несобственные интегралы и их простейшие свойства.	34
3	Геометрические приложения определенного интеграла.	38
1	Длина кривой.	38
2	Объем тела вращения.	45
3	Площадь поверхности вращения.	49

2	Функции нескольких переменных.	51
1	Непрерывные функции нескольких переменных и их свойства.	51
2	Частные производные. Достаточные условия дифференцируемости.	58
3	Простейшие свойства дифференцируемых функций нескольких переменных.	61
4	Производная по направлению. Градиент.	64
5	Производные высших порядков.	68
6	Достаточное условие симметричности частных производных высших порядков.	72
7	Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.	75
8	Локальные экстремумы функций многих переменных.	79
9	Теорема о неявной функции.	90
	Литература	94
	Программа экзамена по математике	95

Глава 1

Неопределенный интеграл

1 Первообразная и ее простейшие свойства.

Основной задачей дифференциального исчисления является вычисление производной заданной функции. Основной задачей интегрального исчисления является обратная задача: по заданной производной найти исходную функцию. Эту обратную задачу называют еще *задачей нахождения первообразной*.

Определение. Пусть нам дана функция $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Функция $\Phi(x)$ называется первообразной функцией для функции $f(x)$, если для любого $x \in [a, b]$ выполняется равенство: $\Phi'(x) = f(x)$.

Пример 1.1. Найти первообразную от функции $f(x) = x^2$.

Нетрудно видеть, что функция $\Phi(x) = \frac{x^3}{3}$ является первообразной, так как $\Phi'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2 = f(x)$.

Отметим, однако, что функция $\Phi(x) = \frac{x^3}{3} + 1$ также является первообразной. Первообразными также являются функции $\Phi(x) = \frac{x^3}{3} + C$, где C — произвольная константа, поскольку

$$\left(\frac{x^3}{3} + C\right)' = x^2.$$

С другой стороны, можно доказать, что любая первообразная записывается в виде $\Phi(x) = \frac{x^3}{3} + C$. На самом деле верна следующая теорема.

Теорема 1.1. Пусть Φ_1, Φ_2 — две первообразные от функции f на отрезке $[a, b]$. Тогда $\Phi_1(x) - \Phi_2(x) = C$, где C — константа.

Доказательство. Рассмотрим разность $\Phi_1(x) - \Phi_2(x)$. Производная этой функции

$$(\Phi_1(x) - \Phi_2(x))' = (\Phi_1(x))' - (\Phi_2(x))' = f(x) - f(x) = 0.$$

Согласно критерию постоянства функции, выведенного из теоремы Лагранжа, производная равняется нулю только у константы, следовательно, $\Phi_1(x) - \Phi_2(x) = C$, что и требовалось доказать. $\square$

Следствие. Если Φ — какая-либо первообразная для f , то любая другая первообразная для f имеет вид $\Phi(x) + C$, где C — константа.

Пример 1.2. Найти первообразную от функции $f(x) = \frac{1}{x}$.

Функция $\Phi(x) = \ln x$ является первообразной на полупрямой $(0; +\infty)$, так как $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Функция $\Phi(x) = \ln(-x)$ является первообразной на полупрямой $(-\infty; 0)$, так как $(\ln(-x))' = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$.

Значит, функция $\Phi(x) = \ln|x|$ является первообразной для $f(x)$ при всех $x \neq 0$.

Пример 1.3. Найти первообразную от функции

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Функция $\Phi(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}, & x \geq 0, \\ -\frac{x^2}{2}, & x < 0, \end{cases}$ является первообразной. Дей-

ствительно, при $x > 0$ $\Phi'(x) = x = f(x)$; при $x < 0$ $\Phi'(x) = -x = f(x)$. А производная $\Phi'(0)$ существует и $\Phi'(0) = 0 = f(0)$.

Пример 1.4. Найти первообразную от функции

$$f(x) = \operatorname{sign} x = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ +1, & x > 0. \end{cases}$$

Эта функция имеет первообразную $\Phi(x) = -x$ на полупрямой $(-\infty; 0)$; имеет первообразную $\Phi(x) = -x$ на полупрямой $(0; +\infty)$; но не имеет первообразной на всей числовой прямой $\mathbb{R}$, так как функция $|x|$ не дифференцируема в нуле.

2 Неопределенный интеграл. Основные приемы интегрирования.

2.1 Неопределенный интеграл.

Определение. Совокупность всех первообразных от функции $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ называется неопределенным интегралом f и обозначается символом $\int f(x) dx$. Функцию f при этом называют *подынтегральной*.

По доказанному ранее совокупность всех первообразных имеет структуру $\{\Phi(x) + C\}$, где $\Phi(x)$ — произвольная первообразная, а C — произвольная постоянная. Это записывается в виде

$$\int f(x) dx = \Phi(x) + C, \quad (*)$$

в котором первая часть равенства обозначает не одну из функций, а все семейство функций, образующих интеграл.

Согласно определению выполнено равенство $\Phi'(x) = f(x)$ и, значит, $d\Phi(x) = \Phi'(x) dx = f(x) dx$. Поэтому соотношение $(*)$ можно записать в виде

$$\int d\Phi(x) = \Phi(x) + C.$$

Таким образом, в определенном смысле, операции интегрирования и дифференцирования являются взаимно обратными.

2.2 Свойства неопределенного интеграла.

Свойства неопределенного интеграла являются следствием этой взаимной обратимости операции интегрирования и дифференцирования и линейности операции дифференцирования.

Теорема 2.1. Пусть функции f и g обладают первообразными. Тогда

$$1. \int af(x) dx = a \int f(x) dx, \quad a \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0;$$

$$2. \int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

Доказательство. 1. При $a = 0$ формула 1 не верна, так как правая часть в формуле равна 0 и не совпадает с ее левой частью, которая равна константе ($\int 0 dx = C$). Для доказательства равенства 1 возьмем производные от его левой и правой частей:

$$\left(\int af(x) dx \right)' = af(x), \quad \left(a \int f(x) dx \right)' = a \left(\int f(x) dx \right)' = af(x).$$

Производные равны, следовательно, разность двух любых функций, стоящих слева и справа в равенстве 1, есть постоянная. В этом смысле и понимаются такие равенства.

2. Для доказательства равенства 2 возьмем производные от его левой и правой частей:

$$\begin{aligned} \left(\int (f(x) \pm g(x)) dx \right)' &= f(x) \pm g(x), \\ \left(\int f(x) dx \pm \int g(x) dx \right)' &= \left(\int f(x) dx \right)' \pm \left(\int g(x) dx \right)' = f(x) \pm g(x). \end{aligned}$$

Производные равны, следовательно, разность двух любых функций, стоящих слева и справа в равенстве 2, есть постоянная. $\square$

2.3 Замена переменной интегрирования.

Перейдем к изучению приема интегрирования с помощью замены переменной. Предположим, что

$$\int f(x) dx = \Phi(x) + C.$$

Сделаем замену переменных, положив $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — непрерывная функция с непрерывной производной, имеющая обратную функцию. Тогда $dx = d(\varphi(t)) = \varphi'(t) dt$. Докажем, что

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \Phi(\varphi(t)) + C.$$

Для этого возьмем производную правой части равенства. Имеем по теореме о производной сложной функции:

$$\left(\Phi(\varphi(t))\right)' = \Phi'_{\varphi}(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Значит, функция $\Phi(\varphi(t)) + C$ является первообразной функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$. Подставляя в правой части равенства вместо t его выражение через x из формулы $x = \varphi(t)$, получим, что

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \Phi(x) + C.$$

Таким образом, пришли к равенству

$$\boxed{\int f(x) dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt}.$$

Эта формула называется *формулой замены переменной*.

Метод замены переменной является одним из основных методов вычисления неопределенных интегралов. Даже в тех случаях, когда мы интегрируем каким-либо другим методом, нам часто приходится в промежуточных вычислениях использовать замену переменной. Успех интегрирования зависит в значительной мере от того, сумеем ли мы подобрать такую удачную замену переменной, которая упростила бы данный интеграл.

При вычислении неопределенных интегралов полезно иметь в виду следующие правила.

Пусть $\int f(x) dx = \Phi(x) + C$. Тогда

$$1. \int f(x+b) dx = \Phi(x+b) + C.$$

Доказательство. Действительно, положим $t = x + b$. Тогда $dt = d(x+b) = dx \Leftrightarrow dx = dt$ и

$$\begin{aligned} \int f(x+b) dx &= \int f(x+b) d(x+b) = \\ &= \int f(t) dt = \Phi(t) + C = \Phi(x+b) + C. \quad \square \end{aligned}$$

$$2. \int f(ax) dx = \frac{1}{a} \Phi(ax) + C, \quad a \neq 0.$$

Доказательство. Действительно, положим $t = ax$. Тогда $dt = d(ax) = a dx \Leftrightarrow dx = \frac{dt}{a}$ и

$$\int f(ax) dx = \int f(t) \frac{dt}{a} = \frac{1}{a} \int f(t) dt = \frac{1}{a} (\Phi(t) + C') = \frac{1}{a} \Phi(ax) + C. \quad \square$$

Замечание. При интегрировании часто подбирается замена не в виде $x = \varphi(t)$, а $t = \psi(x)$.

Проиллюстрируем это на примере.

Пример. Вычислить интеграл $\int \frac{\psi'(x) dx}{\psi(x)}$.

Сделаем замену переменной $t = \psi(x)$. Тогда $dt = \psi'(x) dx$ и

$$\int \frac{\psi'(x) dx}{\psi(x)} = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln |\psi(x)| + C.$$

2.4 Интегрирование по частям.

Теорема 2.2. Пусть $u(x)$, $v(x)$ — дифференцируемые функции и пусть функция $u'(x)v(x)$ имеет первообразную, т. е. существует интеграл $\int u'(x)v(x) dx$. Тогда интеграл $\int u(x)v'(x) dx$ также существует и выполняется равенство

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) dx.$$

Доказательство. По правилу дифференцирования произведения функций

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Откуда следует, что

$$u(x)v'(x) = (u(x)v(x))' - u'(x)v(x).$$

Функция $(u(x)v(x))'$ имеет первообразную $u(x)v(x)$, функция $u'(x)v(x)$ имеет первообразную по условию теоремы. Значит, функция $u(x)v'(x)$ также имеет первообразную и при этом

$$\begin{aligned} \int u(x)v'(x) dx &= \int \left((u(x)v(x))' - u'(x)v(x) \right) dx = \\ &= u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) dx, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. □

В сокращенном виде эту формулу можно записать в виде

$$\boxed{\int u v' dx = u v - \int u' v dx}.$$

Формула в прямоугольнике носит название *формулы интегрирования по частям*. Здесь мы не писали произвольной постоянной первого интеграла потому, что такая постоянная имеется во втором интеграле (сумма двух произвольных постоянных — произвольная постоянная).

Замечание. Поскольку $v'(x) dx = dv$, $u'(x) dx = du$, то формулу интегрирования по частям можно записать в виде

$$\boxed{\int u dv = uv - \int v du}.$$

Смысл интегрирования по частям состоит в том, что вычисление интеграла $\int u dv$ сводится к вычислению интеграла $\int v du$, который может оказаться проще исходного интеграла.

Пример 2.1. Вычислить интеграл

$$\int x e^x dx = \int x d(e^x) = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C.$$

Пример 2.2. Вычислить интеграл

$$\begin{aligned} \int x \sin x dx &= \int x d(-\cos x) = -x \cos x - \int (-\cos x) dx = \\ &= -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C. \end{aligned}$$

Пример 2.3. Вычислить интеграл

$$\begin{aligned} \int \operatorname{arctg} x dx &= x \operatorname{arctg} x - \int x d(\operatorname{arctg} x) = \\ &= x \operatorname{arctg} x - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2} dx = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} d(1+x^2) = \\ &= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln |1+x^2| + C. \end{aligned}$$

Правило интегрирования по частям применяется во многих случаях. Так, например, интегралы вида

$$\int x^k \sin x dx, \quad \int x^k \cos ax dx, \quad \int x^k e^{ax} dx, \quad \int x^k \ln x dx,$$

некоторые интегралы, содержащие обратные тригонометрические функции, вычисляются с помощью интегрирования по частям.

2.5 Таблица основных интегралов.

$$\int 0 \, dx = C;$$

$$\int 1 \, dx = x + C;$$

$$\int x^a \, dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad (a \in \mathbb{R}, \, a \neq -1);$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C;$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C;$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C;$$

$$\int e^x \, dx = e^x + C;$$

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, \, a \neq 1);$$

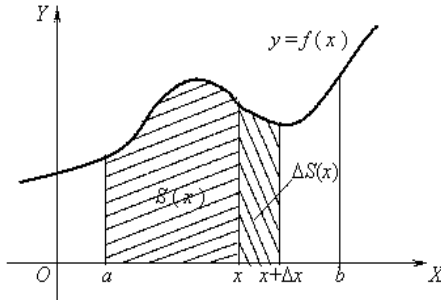
$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C \quad (a > 0) \text{ (высокий логарифм)};$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a}| + C \quad (a \neq 0) \text{ (длинный логарифм)}.$$

3 Криволинейная трапеция и определение ее площади.

Рассмотрим непрерывную функцию $y = f(x)$, заданную на отрезке $[a; b]$ ($a < b$) и сохраняющую на этом отрезке свой знак.

Фигура, ограниченная графиком этой функции, отрезком $[a; b]$ и прямыми $x = a$ и $x = b$, называется *криволинейной трапецией*.



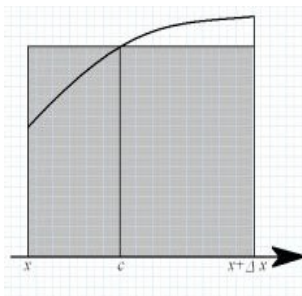
Для вычисления площадей криволинейных трапеций используется следующая теорема.

Теорема. Если f — непрерывная, неотрицательная функция на отрезке $[a; b]$ и Φ — её первообразная на этом отрезке, то площадь соответствующей криволинейной трапеции равна приращению первообразной на отрезке $[a; b]$, т.е.

$$S = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $S(x)$, заданную на отрезке $[a; b]$. Если $a < x \leq b$, то $S(x)$ — площадь части криволинейной трапеции, лежащей слева от вертикальной прямой, проходящей через точку $(x, 0)$. Отметим, что если $x = a$, то $S(a) = 0$, а $S(b) = S$ (S — площадь всей криволинейной трапеции).

Рассмотрим часть криволинейной трапеции на отрезке $[x; x + \Delta x]$.



Для простоты рассмотрим случай $\Delta x > 0$. Поскольку $\Delta S(x) = S(x + \Delta x) - S(x)$, то $\Delta S(x)$ — площадь заштрихованной фигуры. Возьмем теперь прямоугольник той же площади $\Delta S(x)$, опирающийся на отрезок $[x; x + \Delta x]$.

В силу непрерывности функции f верхняя сторона прямоугольника пересекает график функции в некоторой точке с абсциссой $c \in [x; x + \Delta x]$ (в противном случае этот прямоугольник либо содержится в части криволинейной трапеции над отрезком $[x; x + \Delta x]$, либо содержит ее; соответственно его площадь будет меньше или больше площади $\Delta S(x)$). Высота прямоугольника равна $f(c)$. По формуле площади прямоугольника имеем $\Delta S(x) = f(c) \cdot \Delta x$, откуда $\frac{\Delta S(x)}{\Delta x} = f(c)$. (Эта формула верна и при $\Delta x < 0$). Поскольку точка c лежит между x и Δx , то c стремится к x при $\Delta x \rightarrow 0$. Так как функция f непрерывна, то $f(c) \rightarrow f(x)$ при $\Delta x \rightarrow 0$. Итак, $\frac{\Delta S(x)}{\Delta x} \rightarrow f(x)$ при $\Delta x \rightarrow 0$. Поэтому

$$S'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{S(x + \Delta x) - S(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta S(x)}{\Delta x} = f(x).$$

Мы получили, что $S(x)$ есть первообразная для $f(x)$. Поэтому в силу основного свойства первообразных для всех $x \in [a; b]$ имеем: $S(x) = \Phi(x) + C$, где C — некоторая постоянная, а $\Phi(x)$ — одна из первообразных для функции f . Для нахождения константы C подставим $x = a$: $S(a) = \Phi(a) + C = 0$, откуда $C = -\Phi(a)$. Следовательно, $S(x) = \Phi(x) - \Phi(a)$. Поскольку площадь криволинейной трапеции равна $S(b)$, подставляя $x = b$ в формулу, получим: $S = \Phi(b) - \Phi(a)$. $\square$

Пример 3.1. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y = x^2$ и прямыми $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$.

Решение. Одна из первообразных функции $f(x) = x^2$ есть функция $\Phi(x) = \frac{x^3}{3}$. Действительно, $(\frac{x^3}{3})' = x^2 \Leftrightarrow \Phi'(x) = f(x)$. Тогда

$$S = \Phi(2) - \Phi(1) = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

Пример 3.2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями.

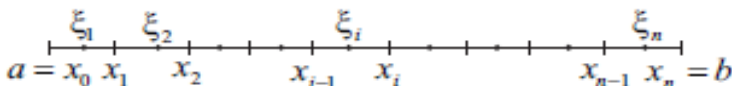
- а) $y = x^2$, $y = 0$, $x = 3$;
- б) $y = \cos x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$;
- в) $y = \frac{1}{x^2}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$.

Глава 2

Определенный интеграл.

1 Понятие определенного интеграла.

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a; b]$ ($a < b$). Выберем на отрезке $[a; b]$ произвольным образом точки $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ так, что $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$:



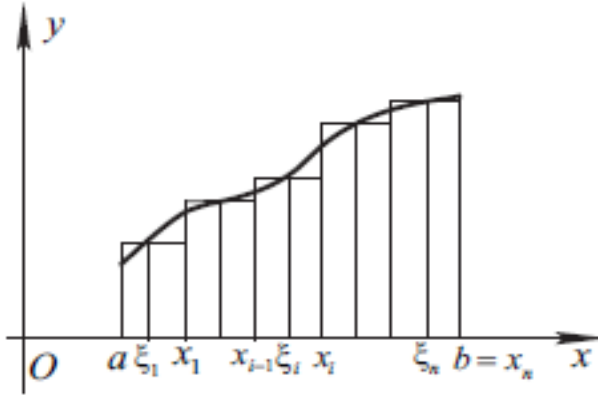
Определенный выбор точек $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ назовем *разбиением отрезка* $[a; b]$, сами точки $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ назовем *точками разбиения*, а отрезки $[x_{i-1}; x_i]$ ($i = 1, \dots, n$) *частичными отрезками*. На каждом частичном отрезке $[x_{i-1}; x_i]$ возьмем какую-нибудь точку ξ_i . Точки ξ_i называются *промежуточными точками*.

Положим $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ (заметим, что $\Delta x_i > 0$) и составим сумму

$$I(x_i, \xi_i) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i.$$

Число $I(x_i, \xi_i)$ называется *интегральной суммой* функции $f(x)$, соответствующей данному разбиению отрезка $[a; b]$ и данному выбору промежуточных точек ξ_i на частичных отрезках $[x_{i-1}; x_i]$.

Геометрический смысл интегральной суммы для $f(x) > 0$ это площадь ступенчатой фигуры.



Пусть $\Delta = \max_{i=1, \dots, n} \Delta x_i$. Величину Δ называют *диаметром разбиения*.

Определение. Число I называется *пределом интегральных сумм* $I(x_i, \xi_i)$ при $\Delta \rightarrow 0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения отрезка $[a; b]$, у которого $\Delta < \delta$, и любого выбора точек ξ_i выполняется неравенство

$$|I(x_i, \xi_i) - I| < \varepsilon.$$

Если существует $\lim_{\Delta \rightarrow 0} I(x_i, \xi_i) = I$, то функция $f(x)$ называется *интегрируемой* (по Риману) на отрезке $[a; b]$, а число I называется *определенным интегралом* от функции $f(x)$ по отрезку $[a; b]$ и обозначается так:

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

Геометрический смысл определенного интеграла.

Для непрерывной функции $f(x) > 0$: интеграл $I = \int_a^b f(x) dx$ равен площади криволинейной трапеции.

2 Свойства линейности и аддитивности определенного интеграла.

Свойство 1. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a; b]$, то для любого числа k функция $kf(x)$ интегрируема на отрезке $[a; b]$ и

$$\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx.$$

Доказательство. По определению определенного интеграла

$$\begin{aligned} \int_a^b kf(x) dx &= \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n kf(\xi_i) \Delta x_i = \\ &= k \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = k \int_a^b f(x) dx. \quad \square \end{aligned}$$

Свойство 2. Если функции $f(x)$, $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a; b]$, то функция $f(x) + g(x)$ интегрируема на отрезке $[a; b]$ и

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

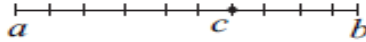
Доказательство. По определению определенного интеграла

$$\begin{aligned} \int_a^b (f(x) + g(x)) dx &= \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (f(\xi_i) + g(\xi_i)) \Delta x_i = \\ &= \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i + \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \Delta x_i = \\ &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx. \quad \square \end{aligned}$$

Свойство 3. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a; b]$ и точка $c \in (a; b)$, то

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Доказательство. Рассмотрим такие разбиения отрезка $[a; b]$, для которых точка C является точкой разбиения.



Для таких разбиений

$$\sum_a^b f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_a^c f(\xi_i) \Delta x_i + \sum_c^b f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Переходя к пределу при $\max \Delta x_i \rightarrow 0$ получим требуемое утверждение. $\square$

3 Неравенства и определенный интеграл.

Свойство 4. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a; b]$ ($a < b$) и $f(x) \geq g(x)$ для любого $x \in [a; b]$, то

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx.$$

Доказательство. Рассмотрим разность

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx &= \int_a^b (f(x) - g(x)) dx = \\ &= \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum (f(\xi_i) - g(\xi_i)) \Delta x_i. \end{aligned}$$

Здесь каждая разность $f(\xi_i) - g(\xi_i) \geq 0$ и $\Delta x_i \geq 0$. Значит, и их произведение $(f(\xi_i) - g(\xi_i)) \Delta x_i \geq 0$. Таким образом, каждое слагаемое в сумме неотрицательно, неотрицательна вся сумма и неотрицателен ее предел, т. е.

$$\int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx \geq 0 \iff \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx. \quad \square$$

Следствие. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a; b]$ ($a < b$) и $f(x) \geq 0$ для любого $x \in [a; b]$, то

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

Действительно, по свойству 4 с функцией $g(x) = 0$ имеем

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b 0 dx = 0.$$

Свойство 5. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a; b]$ ($a < b$) и $m \leq f(x) \leq M$ для любого $x \in [a; b]$, то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

Доказательство. Так как по условию $m \leq f(x) \leq M$, то по свойству 4

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx.$$

Но

$$\int_a^b m dx = m(b-a), \quad \int_a^b M dx = M(b-a),$$

следовательно, $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$

□

4 Теорема о среднем.

Теорема (о среднем). Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a; b]$ ($a < b$) и $m \leq f(x) \leq M$ для любого $x \in [a; b]$. Тогда существует μ такое, что $m \leq \mu \leq M$ и

$$\int_a^b f(x) dx = \mu(b - a).$$

Если кроме того функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то существует точка $\xi \in [a; b]$ такая, что

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a).$$

Доказательство. По свойству 5

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a).$$

Разделив все части неравенства на $b - a$, получим

$$m \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx \leq M.$$

Обозначим $\mu = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx$. Тогда $m \leq \mu \leq M$ и

$$\int_a^b f(x) dx = \mu(b - a).$$

Так как функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она принимает все промежуточные значения, заключенные между m и M . Значит, существует точка ξ такая, что $\mu = f(\xi)$, т. е.

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a).$$

□

5 Свойство определенного интеграла с переменным верхним пределом.

Пусть в определенном интеграле $\int_a^b f(x) dx$ нижний предел a закреплён, а верхний предел b меняется. Тогда будет меняться и значение интеграла. Тем самым интеграл есть функция верхнего предела. Числовую переменную, изменяющуюся от a до x , обозначим буквой t , и рассмотрим интеграл $\int_a^x f(t) dt$. Он называется *интегралом с переменным верхним пределом*. Обозначим его $\Phi(x)$:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Найдем производную от $\Phi(x)$ по x , т. е. найдем производную определенного интеграла по верхнему пределу.

Теорема. Пусть $f(x)$ — непрерывная функция на отрезке $[a; b]$

$$\text{и } \Phi(x) = \int_a^x f(t) dt. \text{ Тогда}$$

$$\Phi'(x) = f(x).$$

Иными словами, производная определенного интеграла по верхнему пределу равна подинтегральной функции, в которую вместо переменной интегрирования поставлено значение верхнего предела.

Доказательство. Пусть для определенности $\Delta x > 0$ (случай $\Delta x < 0$ рассматривается аналогично). Тогда

$$\begin{aligned} \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) &= \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = \\ &= \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt = \end{aligned}$$

(по теореме о среднем для определенного интеграла)

$$= f(\xi)(x + \Delta x - x) = f(\xi)\Delta x,$$

где точка $\xi \in [x; x + \Delta x]$. Следовательно,

$$\Phi'(x) := \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\xi) = f(x),$$

поскольку $f(\xi) \rightarrow f(x)$ при $\Delta x \rightarrow 0$. □

6 Формула Ньютона–Лейбница.

Теорема 6.1. Пусть $\Phi(x)$ — какая-либо первообразная от непрерывной на отрезке $[a; b]$ функции $f(x)$. Тогда выполняется формула

$$\int_a^b f(x) dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Эта формула называется *формулой Ньютона–Лейбница* и считается основной формулой интегрального исчисления. Она связывает определенный интеграл с неопределенным.

Доказательство. Пусть $\Phi(x)$ — какая-либо первообразная от функции $f(x)$. Но функция $\int_a^x f(t) dt$ также является первообразной от $f(x)$. Известно, что две любые первообразные от одной функции отличаются на константу. Следовательно,

$$\int_a^x f(t) dt = \Phi(x) + C.$$

Это равенство верно для любого x . Положим $x = a$. Тогда

$$\int_a^a f(t) dt = \Phi(a) + C \implies 0 = \Phi(a) + C \iff C = -\Phi(a).$$

Полагая $x = b$, получаем формулу Ньютона–Лейбница

$$\int_a^b f(t) dt = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Заменив обозначение переменной интегрирования на x , приходим к доказываемой формуле. $\square$

Отметим, что разность $\Phi(b) - \Phi(a)$ не зависит от выбора первообразной Φ , так как все первообразные отличаются на постоянную величину, которая при вычитании все равно уничтожается.

Принято обозначать $\Phi(b) - \Phi(a) = \Phi(x)|_a^b$. Тогда формулу Ньютона–Лейбница можно переписать в виде

$$\int_a^b f(t) dt = \Phi(x)|_a^b.$$

Пример 6.1. Вычислить интеграл $\int_a^b x dx$.

Решение.
$$\int_a^b x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Пример 6.2. Вычислить интеграл $\int_0^\pi \sin x dx$.

Решение.
$$\int_0^\pi \sin x dx = -\cos x \Big|_0^\pi = -\cos \pi - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2.$$

Пример 6.3. Вычислить интеграл $\int_a^b e^x dx$.

Решение.
$$\int_a^b e^x dx = e^x \Big|_a^b = e^b - e^a.$$

Пример 6.4. Вычислить интеграл $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2}$.

Решение.
$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x \Big|_{-1}^1 = \arctg 1 - \arctg(-1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

7 Замена переменных в определенном интеграле.

Теорема. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$; функция $x = g(t)$ имеет непрерывную производную на отрезке $[\alpha; \beta]$, причем $a \leq g(t) \leq b$ при $t \in [\alpha; \beta]$, $g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$. Тогда справедливо равенство

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))g'(t) dt.$$

Это равенство называется *формулой замены переменной в определенном интеграле*.

Доказательство. Пусть $\Phi(x)$ — какая-либо первообразная от функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$, то есть $\Phi'(x) = f(x)$. По формуле Ньютона–Лейбница

$$\int_a^b f(x) dx = \Phi(b) - \Phi(a). \quad (1)$$

Функция $\Phi(g(t))$ является первообразной для функции $f(g(t))g'(t)$ на отрезке $[\alpha; \beta]$, так как

$$\frac{d}{dt}\Phi(g(t)) = \Phi'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t).$$

Применяя снова формулу Ньютона–Лейбница уже для функции $f(g(t))g'(t)$, получаем

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))g'(t) dt = \Phi(g(\beta)) - \Phi(g(\alpha)) = \Phi(b) - \Phi(a). \quad (2)$$

Из равенств (1) и (2) следует искомая формула. $\square$

Пример 7.1. Вычислить интеграл $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$.

Решение. Сделаем замену переменной $x = \sin t$. Если x изменяется от 0 до 1, то t изменяется от 0 до $\frac{\pi}{2}$; $dx = d \sin t = \cos t dt$. Следовательно, Если $x = 0$, то $0 = \sin t \Leftrightarrow t = k\pi$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{\sin \pi}{4} - \left(\frac{0}{2} + \frac{\sin 0}{4} \right) = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Геометрический смысл этого интеграла: функция $y = \sqrt{1-x^2}$ $\Leftrightarrow y^2 = 1-x^2 \Leftrightarrow y^2 + x^2 = 1$, $0 \leq x \leq 1$, $y \geq 0$, задает на отрезке $[0; 1]$ четверть окружности с радиусом $R = 1$. Поэтому

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \text{ есть площадь четверти круга: } S = \frac{\pi R^2}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Пример 7.2. Вычислить интеграл $\int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$.

Решение. Сделаем замену переменной $x = a \sin t$. Если x изменяется от $-a$ до a , то t изменяется от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$; $dx = da \sin t = a \cos t dt$. Следовательно, Если $x = -a$, то $-a = a \sin t \Leftrightarrow t = -\pi + 2k\pi$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - \sin^2 t} a \cos t dt = a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \\ &= a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = a^2 \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= 2a^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\sin \pi}{4} \right) = a^2 \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Геометрический смысл этого интеграла: функция $y = \sqrt{1 - x^2}$ $\Leftrightarrow y^2 = 1 - x^2 \Leftrightarrow y^2 + x^2 = 1$, $0 \leq x \leq 1$, $y \geq 0$, задает на отрезке $[0; 1]$ четверть окружности с радиусом $R = 1$. Поэтому $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx$ есть площадь четверти круга: $S = \frac{\pi R^2}{4} = \frac{\pi}{4}$.

8 Интегрирование по частям.

Теорема 8.1. Пусть $u(x), v(x)$ — непрерывно дифференцируемые функции на отрезке $[a; b]$. Тогда

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) \Big|_a^b - \int_a^b u'(x) v(x) dx.$$

Доказательство. По правилу дифференцирования произведения функций

$$(u(x) v(x))' = u'(x) v(x) + u(x) v'(x).$$

Откуда, с одной стороны, согласно формуле Ньютона–Лейбница

$$\int_a^b (u(x) v(x))' dx = u(b) v(b) - u(a) v(a) = u(x) v(x) \Big|_a^b,$$

с другой стороны,

$$\begin{aligned} \int_a^b ((u(x) v(x))' dx &= \int_a^b (u'(x) v(x) + u(x) v'(x)) dx = \\ &= \int_a^b u'(x) v(x) dx + \int_a^b u(x) v'(x) dx. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$u(x) v(x) \Big|_a^b = \int_a^b u'(x) v(x) dx + \int_a^b u(x) v'(x) dx.$$

Откуда следует, что

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) \Big|_a^b - \int_a^b u'(x) v(x) dx. \quad \square$$

Замечание. Поскольку $v'(x) dx = dv$, $u'(x) dx = du$, то формулу интегрирования по частям можно записать в виде

$$\boxed{\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.}$$

В таком виде чаще всего эта формула и используется при вычислении определенных интегралов с помощью интегрирования по частям.

Пример 8.1. Вычислить интеграл $\int_0^1 x e^x dx$.

Решение. Интегрируя по частям, получим

$$\int_0^1 x e^x dx = \int_0^1 x d(e^x) = x e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - e^x \Big|_0^1 = e - e + 1 = 1.$$

Пример 8.2. Вычислить интеграл $\int_0^\pi x \sin x dx$.

Решение. Интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} \int_0^\pi x \sin x dx &= \int_0^\pi x d(-\cos x) = -x \cos x \Big|_0^\pi - \int_0^\pi (-\cos x) dx = \\ &= -\pi \cos \pi - (-0 \cos 0) + \int_0^\pi \cos x dx = \pi - \sin x \Big|_0^\pi = \pi. \end{aligned}$$

Пример 8.3. Вычислить интеграл $\int_0^1 \operatorname{arctg} x \, dx$.

Решение. Интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} \int_0^1 \operatorname{arctg} x \, dx &= x \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 - \int_0^1 x d(\operatorname{arctg} x) = \\ &= \operatorname{arctg} 1 - \int_0^1 x \cdot \frac{1}{1+x^2} dx \stackrel{\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}}{=} \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} d(1+x^2) = \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln |1+x^2| \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2. \end{aligned}$$

Правило интегрирования по частям применяется во многих случаях. Так, например, считаются определенные интегралы от функций $x^k \sin ax$, $x^k \cos ax$, $x^k e^{ax}$, $x^k \ln ax$, а также некоторые определенные интегралы, содержащие обратные тригонометрические функции.

9 Несобственные интегралы и их простейшие свойства.

9.1 Бесконечные пределы интегрирования.

Пусть $f(x)$ является непрерывной функцией на промежутке $[a; +\infty)$. *Несобственный интеграл* определяется через предел следующим образом:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^n f(x) dx.$$

Рассмотрим также случай, когда функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $(-\infty; b]$. В этом случае *несобственный интеграл* определяется как

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow -\infty} \int_n^b f(x) dx.$$

Если указанные выше пределы существуют и конечны, то говорят, что несобственные интегралы *сходятся*. В противном случае интегралы *расходятся*.

Пусть $f(x)$ является непрерывной функцией на множестве действительных чисел. Тогда справедливо соотношение

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx.$$

Если для некоторого действительного числа c оба интеграла в правой части сходятся, то говорят, что *несобственный интеграл*

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ также *сходится*; в противном случае он *расходится*.

Теорема 9.1. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ являются непрерывными функциями в промежутке $[a; +\infty)$. Предположим, что

$0 \leq g(x) \leq f(x)$ для всех x в промежутке $[a; +\infty)$.

Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Если $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ сходится, то $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ также сходится.
2. Если $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ расходится, то $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ также расходится.
3. Если $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$.

В этом случае последний интеграл называется *абсолютно сходящимся*.

9.2 Несобственные интегралы на конечном промежутке.

Пусть $f(x)$ является непрерывной функцией на любом отрезке $[a; \beta]$, $\beta < b$. А в точке b значение функции $f(x)$ либо не определено, либо функция терпит разрыв. В этом случае определяется *несобственный интеграл* как предел слева:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\beta \rightarrow b-0} \int_a^{\beta} f(x) dx.$$

Если функция $f(x)$ терпит разрыв в левом конце отрезка $[a; b]$, то определяется *несобственный интеграл* как предел справа:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\alpha \rightarrow a+0} \int_{\alpha}^b f(x) dx.$$

Если функция $f(x)$ терпит разрыв в некоторой точке $c \in (a; b)$, то полагают

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx,$$

если оба интеграла в правой части равенства существуют.

Пример 9.1. Вычислить интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Решение. По определению несобственного интеграла

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctg x \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctg b = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Вычисления можно записывать также следующим образом:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x \Big|_0^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctg x - \arctg 0 = \frac{\pi}{2}$$

или более кратко:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

Пример 9.2. Вычислить при каких значениях p интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ сходится и при каких значениях расходится.

Решение. Если $p \neq 1$, то

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \Big|_1^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1} - \frac{1}{-p+1} = \begin{cases} +\infty, & p < 1, \\ \frac{1}{p-1}, & p > 1, \end{cases}$$

Если $p = 1$, то

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \ln |x| \Big|_1^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x - \ln 1 = +\infty.$$

Значит, при $p > 1$ интеграл сходится и равен $\frac{1}{p-1}$, при $p \leq 1$ интеграл расходится.

Пример 9.3. Вычислить при каких значениях p интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ сходится и при каких значениях расходится.

Решение. Если $p \neq 1$, то

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{x^p} &= \left. \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right|_0^1 = \frac{1}{-p+1} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{-p+1}}{-p+1} = \\ &= \frac{1}{-p+1} - \begin{cases} 0, & p < 1, \\ -\infty, & p > 1, \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{-p+1}, & p < 1, \\ +\infty, & p > 1, \end{cases} \end{aligned}$$

Если $p = 1$, то

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_0^1 = \ln 1 - \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = +\infty.$$

Значит, при $p < 1$ интеграл сходится и равен $\frac{1}{1-p}$, при $p \geq 1$ интеграл расходится.

Глава 3

Геометрические приложения определенного интеграла.

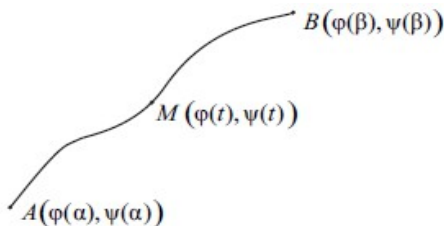
1 Длина кривой.

1.1 Длина кривой, заданной в параметрической форме.

Рассмотрим кривую на плоскости, координаты точек которой в прямоугольной системе координат Oxy заданы уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta. \quad (*)$$

Переменная t называется *параметром*, а уравнения — *параметрическими уравнениями кривой*. Если различным значениям $t \in [\alpha; \beta]$ соответствуют различные точки $(\varphi(t), \psi(t))$, то есть нет кратных точек, то кривая называется *простой незамкнутой кривой*. Если точки $A(\varphi(\alpha), \psi(\alpha))$ и $B(\varphi(\beta), \psi(\beta))$ совпадают, а остальные точки не являются кратными, то кривая называется *простой замкнутой кривой*.



Кривая может быть замкнутой, то есть точки A и B могут совпадать. Для простой (незамкнутой или замкнутой) кривой, заданной уравнениями (*), рассмотрим произвольное разбиение отрезка $[\alpha; \beta]$ точками $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$. Ему соответствует разбиение кривой точками $A = M_0, M_1, \dots, M_n = B$, где $M_i = M(\varphi(t_i), \psi(t_i))$. Впишем в кривую ломаную $A, M_1, \dots, M_{n-1}, B$. Обозначим длину ломаной через $l(M_i)$ и положим $\Delta t = \max_{i=1, \dots, n} (t_i - t_{i-1})$.

Определение. Число l называется пределом длин ломаных $l(M_i)$ при $\Delta t \rightarrow 0$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения отрезка $[\alpha; \beta]$ с $\Delta t < \delta$ выполняется неравенство

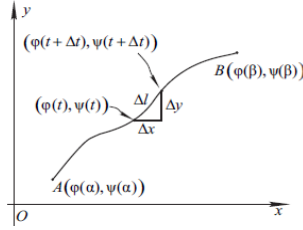
$$l - l(M_i) < \varepsilon.$$

Если существует $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} l(M_i) = l$, то кривая называется *спрямляемой*, а число l — *длиной кривой* (или *длиной дуги кривой*).

Теорема 1.1. Если простая кривая задана уравнениями (*), причем функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[\alpha; \beta]$, то кривая спрямляема, а ее длина выражается формулой

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt.$$

Обоснование этой формулы будет проведено ниже. Для того, чтобы наглядно представить себе, как получается эта формула, рассмотрим следующий рисунок:



$$\Delta l \approx \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}, \quad \Delta x \approx dx = \varphi'(t) dt, \quad \Delta y \approx dy = \psi'(t) dt.$$

Отсюда получаем

$$\Delta l = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} \Delta t \implies l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt.$$

1.2 Длина пространственной кривой, заданной в параметрической форме.

Рассмотрим кривую в пространстве, координаты точек которой в прямоугольной системе координат $Oxyz$ заданы уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta. \quad (*)$$

Определяя длину дуги пространственной кривой как и в плоском случае, можно вычислить ее длину по следующей формуле.

Теорема 1.2. *Если простая кривая задана уравнениями (*), причем функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ и $\chi(t)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[\alpha; \beta]$, то кривая спрямляема, а ее длина выражается формулой*

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t)} dt.$$

1.3 Длина кривой, заданной уравнением $y = f(x)$.

Если кривая задана уравнением $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, то, полагая $x = t$, $y = f(t)$, $a \leq t \leq b$ и применяя формулу из теоремы 1.1, получаем выражение для длины кривой в декартовых координатах. Сформулируем это утверждение в виде теоремы.

Теорема 1.3. *Если простая кривая задана уравнением $y = f(x)$, причем функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[a; b]$, то кривая спрямляема, а ее длина выражается формулой*

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx.$$

Доказательство. Обозначим $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$. Тогда

$$\Delta l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i.$$

По теореме Лагранжа

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(\xi_i),$$

где $\xi_i \in (x_{i-1}; x_i)$. Следовательно, $\Delta l_i = \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \Delta x_i$.

Таким образом, длина вписанной ломаной

$$l(M_i) = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \Delta x_i.$$

По условию функция $f'(x)$ непрерывна. Значит, функция $\sqrt{1 + f'^2(x)}$ тоже непрерывна. Поэтому существует предел интегральной суммы, который равен определенному интегралу:

$$l = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx. \quad \square$$

Пример 1.1. Вычислить длину окружности радиуса R , задавая ее в параметрическом виде.

Решение. Положим $x = \varphi(t) = R \cos t$, $y = \psi(t) = R \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Уравнения задают окружность в параметрической форме радиуса R с центром в начале координат. По формуле длины кривой $l = \int_0^{2\pi} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt$ длина окружности

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-R \sin t)^2 + (R \cos t)^2} dt = \int_0^{2\pi} R dt = Rt \Big|_0^{2\pi} = 2\pi R.$$

Пример 1.2. Вычислить длину окружности радиуса R , задавая ее функцией $y = f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$.

Решение. Вычислим длину четвертой части окружности, лежащей в первом квадранте. По формуле длины кривой

$$\frac{l}{4} = \int_0^R \sqrt{1 + f'^2(x)} dx \text{ имеем}$$

$$\begin{aligned} \frac{l}{4} &= \int_0^R \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}} \right)^2} dx = \int_0^R \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} dx = \\ &= \int_0^R \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = R \arcsin \frac{x}{R} \Big|_0^R = R(\arcsin 1 - \arcsin 0) = R \cdot \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Отсюда длина окружности $l = 2\pi R$.

Пример 1.3. Вычислить длину дуги винтовой линии $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = amt$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Решение. По формуле длины кривой

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t)} dt \text{ имеем}$$

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-a \sin t)^2 + (a \cos t)^2 + (am)^2} dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + a^2 m^2} dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 + m^2)} dt = \sqrt{a^2(1 + m^2)} t \Big|_0^{2\pi} = 2\pi a \sqrt{1 + m^2}.$$

Пример 1.4. Вычислить длину астрои́ды: $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$.

Решение. Поскольку кривая симметрична относительно обеих координатных осей, то вычислим сначала длину ее четвертой части, расположенной в первой четверти. По формуле длины кривой

$$\frac{l}{4} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt \text{ длина четверти астрои́ды}$$

$$\frac{l}{4} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-3a \cos^2 t \sin t)^2 + (3a \sin^2 t \cos t)^2} dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9a^2 \cos^4 t \sin^2 t + 9a^2 \sin^4 t \cos^2 t} dt =$$

$$= 3a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2 t \cos^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t)} dt =$$

$$= 3a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2 t \cos^2 t} dt = 3a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t dt =$$

$$= 3a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2t}{2} dt = -3a \frac{\cos 2t}{4} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -3a \left(\frac{\cos \pi}{4} - \frac{\cos 0}{4} \right) = \frac{3a}{2}.$$

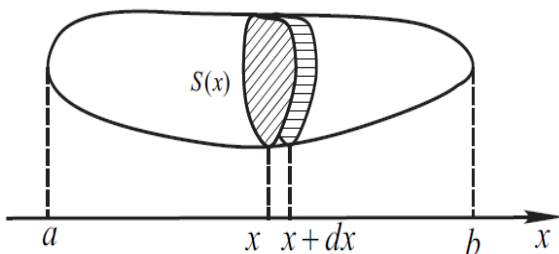
Отсюда длина астрои́ды $l = 6a$.

2 Объем тела вращения.

2.1 Вычисление объема тела по площади параллельных сечений.

Пусть имеем некоторое тело T . Предположим, что известна площадь любого сечения этого тела плоскостью, перпендикулярной к оси Ox . Эта площадь будет зависеть от положения секущей плоскости, т. е. будет функцией от x . Площадь сечения тела плоскостью $x = \text{const}$ обозначим $S(x)$.

Предположим, что $S(x)$ — непрерывная функция от x . Найдем объем этого тела. Пусть функция $S(x)$ определена на отрезке $[a; b]$ ($a < b$).



Выберем на отрезке $[a; b]$ произвольным образом точки $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ так, что $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1} < x_n = b$. Обозначим это разбиение отрезка через $\bar{x}$. Проведем вертикальные плоскости $x = x_0, x = x_1, \dots, x = x_n$. Эти плоскости разобьют тело на слои. В каждом частичном промежутке выберем произвольную точку ξ_i . Обозначим этот выбор точек ξ_i на разбиении отрезка $\bar{x}$ через $\bar{\xi}$. Для каждого $i = 1, \dots, n$ построим цилиндр, образующая которого параллельна оси Ox , а направляющая представляет собой контур сечения тела T плоскостью $x = \xi_i$. Объем такого элементарного цилиндра V_i с площадью основания $S(\xi_i)$, $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$, и высотой Δx_i вычисляется по формуле $V_i = S(\xi_i)\Delta x_i$. Объем всех цилиндров будет

$$V(\bar{x}, \bar{\xi}) = \sum_{i=1}^n V_i = \sum_{i=1}^n S(\xi_i)\Delta x_i.$$

Предел этой суммы при $\max \Delta x_i \rightarrow 0$ называется *объемом данного тела*.

$$V = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n S(\xi_i) \Delta x_i.$$

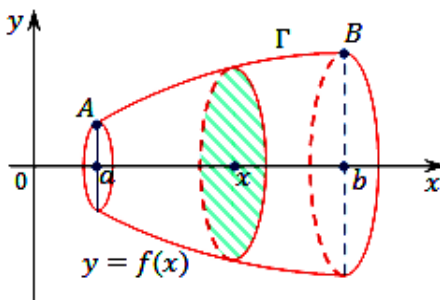
Так как $V(\bar{x}, \bar{\xi})$ представляет собой, интегральную сумму для непрерывной функции $S(x)$ на отрезке $[a; b]$, то указанный предел существует и является определенным интегралом

$$V = \int_a^b S(x) dx.$$

2.2 Объем тела вращения.

Пусть криволинейная трапеция $aABb$, то есть фигура, ограниченная осью Ox , прямыми $x = a$, $x = b$ и графиком непрерывной неотрицательной функции $y = f(x)$, вращается вокруг оси Ox , вследствие чего образуется тело вращения.

Сечение этого тела плоскостью, перпендикулярной оси Ox , есть



круг или точка. На интервале $(a; b)$ выберем точку x . Сечение, проведенное через эту точку перпендикулярно оси Ox , есть круг площадью $S(x) = \pi f^2(x)$. Объем части тела вращения, ограниченной сечениями, проведенными через точки a и x , обозначим через $V(x)$, а объем данного тела вращения — через V . Применяя общую формулу для вычисления объема тела с известной площа-

дью сечения $S(x) = \pi f^2(x)$, получим объем тела вращения равен

$$V = \int_a^b S(x) dx = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Пример 2.1. Найти площадь эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Решение. Из заданного уравнения найдем y :

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} = \frac{a^2 - x^2}{a^2} \iff y^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot (a^2 - x^2) \iff y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

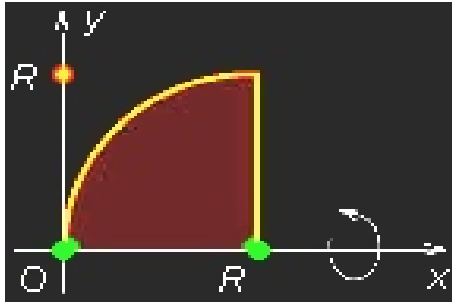
По формуле площади криволинейной трапеции $l = \int_a^b f(x) dx$

$$\frac{l}{2} = \int_{-a}^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{b}{a} \cdot \frac{\pi a^2}{2} = ab \frac{\pi}{2}.$$

Отсюда площадь эллипса равна πab .

Пример 2.2. Вычислить объем шара радиуса R .

Решение. На рисунке изображена четверть круга радиуса



R с центром в точке $(R, 0)$. Уравнение окружности этого круга $(x - R)^2 + y^2 = R^2$, откуда $y^2 = R^2 - (x - R)^2 = 2Rx - x^2$. Функция $y = \sqrt{2Rx - x^2}$ непрерывная, возрастающая, неотрицательная, следовательно, для нахождения объема тела вращения можно использовать предыдущую теорему. Вследствие вращения четверти круга вокруг оси Ox образуется полушар. Следовательно,

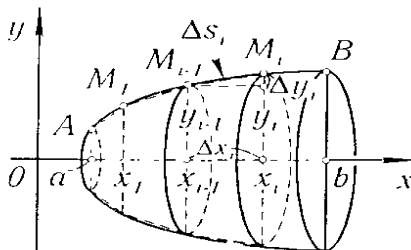
по формуле объема тела вращения $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}V &= \pi \int_0^R (2Rx - x^2) dx = \pi \left(2R \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^R = \\ &= \pi \left(R^3 - \frac{R^3}{3} \right) = \frac{2}{3}\pi R^3. \end{aligned}$$

Отсюда объем шара радиуса R равен $\frac{4}{3}\pi R^3$.

3 Площадь поверхности вращения.

Пусть нам дана поверхность, образованная вращением кривой $y = f(x)$ ($f(x) \geq 0$) вокруг оси Ox . Определим площадь этой поверхности на участке $a \leq x \leq b$. Функцию $f(x)$ предположим непрерывной и имеющей непрерывную производную во всех точках отрезка $[a; b]$.



Проведем хорды $AM_1, M_1M_2, \dots, M_{n-1}B$, длины которых обозначим через $\Delta l_1, \Delta l_2, \dots, \Delta l_n$.

Каждая хорда длины Δl_i при вращении опишет усеченный конус, площадь поверхности которого $\Delta S_i = \pi(y_{i-1} + y_i)\Delta l_i^1$. При подсчете длины дуги было найдено, что $\Delta l_i = \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \Delta x_i$, где $\xi_i \in (x_{i-1}; x_i)$. Следовательно,

$$\Delta S_i = \pi(y_{i-1} + y_i)\sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \Delta x_i,$$

а площадь поверхности, описанная всей ломаной будет равна

$$\sum_{i=1}^n \Delta S_i = \sum_{i=1}^n \pi(y_{i-1} + y_i)\sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \Delta x_i.$$

Предел этой суммы, когда наибольшее звено ломаной Δl_i стремится к нулю, называется *площадью рассматриваемой поверхности вращения*. Можно доказать, что предел выписанной суммы равняется пределу интегральной суммы для функции $2\pi f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)} dx$,

¹Напомним, что боковая поверхность усеченного конуса считается по формуле $S = \pi(R_1 + R_2)l$, где l — образующая усеченного конуса, R_1, R_2 — радиусы верхнего и нижнего оснований усеченного конуса.

т. е.

$$\begin{aligned}
 S &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \pi(y_{i-1} + y_i) \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \Delta x_i = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n 2\pi f(\xi_i) \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \Delta x_i = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx,
 \end{aligned}$$

где $\Delta x = \max_{i=1, \dots, n} \Delta x_i$. Таким образом,

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx.$$

Пример 3.1. Вычислить площадь сферы радиуса R .

Решение. Уравнение сферы радиуса R : $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Сфера получается при вращении окружности $x^2 + y^2 = R^2$ вокруг оси Ox , откуда $y^2 = R^2 - x^2$. Функция $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ при $x \in [-R; R]$ непрерывная неотрицательная, следовательно, для нахождения объема тела вращения можно использовать формулу

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx. \text{ Следовательно,}$$

$$\begin{aligned}
 S &= 2\pi \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} dx = \\
 &= 2\pi \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2}} dx = 2\pi \int_{-R}^R R dx = \\
 &= 2\pi R x \Big|_{-R}^R = 2\pi R(R - (-R)) = 4\pi R^2.
 \end{aligned}$$

Отсюда площадь сферы радиуса R равна $4\pi R^2$.

Глава 2

Функции нескольких переменных.

1 Непрерывные функции нескольких переменных и их свойства.

1.1 Конечномерное пространство $\mathbb{R}^n$.

Зафиксируем некоторое число $n \in \mathbb{N}$ и рассмотрим множество векторов (точек) $x = (x_1, \dots, x_n)$, образующих пространство $\mathbb{R}^n$.

Расстоянием между точками $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, \dots, y_n)$ пространства $\mathbb{R}^n$ называется величина

$$\rho = \rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

Открытым шаром в пространстве $\mathbb{R}^n$ радиуса $r > 0$ с центром в точке x называется множество

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \rho(x, y) < r\}.$$

Замкнутым шаром в пространстве $\mathbb{R}^n$ радиуса $r > 0$ с центром в точке x называется множество

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \rho(x, y) \leq r\}.$$

Пример 1.1. Если $n = 1$, то $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ — прямая. Расстоянием между двумя точками с координатами x и y на прямой является величина $|x - y|$, т. е. длина соединяющего их отрезка. Открытый шар радиуса r с центром в точке x — это интервал $(x - r; x + r)$, а замкнутый — отрезок $[x - r; x + r]$.

Пример 1.2. Если $n = 2$, то $\mathbb{R}^2$ — плоскость. Расстояние на плоскости — это $\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$, т. е. “самое обычное” расстояние. Двумерным открытым шаром является круг без границы, а замкнутым — тот же круг, но вместе с описывающей его окружностью.

Пример 1.3. В трёхмерном пространстве расстоянием также является длина отрезка, соединяющего соответствующие точки, открытым шаром — “обычный” шар (без граничной сферы), а замкнутым — тот же шар, но уже с ограничивающей его сферой.

Открытый шар, содержащий некоторую точку, называется ее *окрестностью*.

Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ называется *открытым*, если у любой точки $x \in M$ найдется окрестность, целиком содержащаяся в M .

Пример 1.4. Любой открытый шар является открытым множеством в смысле определения. Открытыми являются пустое множество и всё пространство $\mathbb{R}^n$.

Рассмотрим некоторое множество $M \subset \mathbb{R}^n$. *Замыканием* множества M называется множество $\overline{M} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid B(x, r) \cap M \neq \emptyset \forall r > 0\}$. Множество называется *замкнутым*, если оно совпадает со своим замыканием.

Пример 1.5. Замыканием открытого шара $B(x, r)$ является замкнутый шар $\overline{B}(x, r)$ и, значит, последний замкнут. Пустое множество $\emptyset$ и всё пространство $\mathbb{R}^n$ также замкнуты.

Замечание. Замыкание множества состоит из точек этого множества, а также точек, которые невозможно отделить от рассматриваемого множества, “бесконечно к нему близких”. Такими, например, являются крайние точки a и b по отношению к интервалу $(a; b)$.

Граница множества D (часто обозначается ∂D) — множество всех точек, расположенных сколь угодно близко как к точкам во множестве D , так и к точкам вне множества D , т.е. точка x принадлежит границе множества D , если любой шар с центром в точке x содержит как точки из множества D , так и точки, не принадлежащие множеству D .

Кривая в n -мерном пространстве записывается в виде $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, где $t \in [a; b]$, $x_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, — непрерывные функции.

Определение. Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ называется *связным*, если для любых двух точек можно построить кривую, проходящую через эти две точки и лежащую в этом множестве.

Пример 1.6. Любой шар, открытый или замкнутый, связан. Связным также является всё пространство $\mathbb{R}^n$. Множество $M = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 1\}$ несвязно — оно является объединением двух непересекающихся подмножеств $M_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$, $M_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\}$, и ни одну точку из M_- нельзя связать с точкой из M_+ кривой, целиком лежащей в M .

Определение. *Открытой областью* называется открытое связное множество.

Замкнутой областью называется замкнутое связное множество.

1.2 Пределы.

Теория пределов для функций нескольких аргументов является непосредственным обобщением теории пределов, изученной нами для функций одного действительного аргумента.

Для функций нескольких переменных справедливы те же теоремы о пределах суммы, разности, произведения и частного пределов, которые доказываются аналогично одномерному случаю.

Определение. Рассмотрим функцию $f(x_1, \dots, x_n)$. Говорят, что число A является *пределом функции* f в точке a (и пишут $A = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$), если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое число $\delta > 0$, что для любой точки $x \in B(a, r)$ выполнено неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, если $r < \delta$.

Определение. Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ — функция n переменных. Функция называется *непрерывной в точке* $a = (a_1, \dots, a_n)$, если $\lim_{x \rightarrow a} f(x_1, \dots, x_n) = f(a_1, \dots, a_n)$. Функция называется *непрерывной в некоторой области*, если она непрерывна в каждой точке этой области.

Пример 1.7. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x_1^3 x_2}{x_1^2 + x_2^2}$.

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x_1^3 x_2}{x_1^2 + x_2^2} = \lim_{x_2 \rightarrow 0} \left(\lim_{x_1 \rightarrow 0} \frac{x_1^3 x_2}{x_1^2 + x_2^2} \right) = \lim_{x_2 \rightarrow 0} 0 = 0.$$

Пример 1.8. Показать, что предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}$ не существует.

Решение. Пусть $x_1 = x_2 = \alpha \rightarrow 0$, тогда $x = (\alpha, \alpha) \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow 0$,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha \cdot \alpha}{\alpha^2 + \alpha^2} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha^2}{2\alpha^2} = \frac{1}{2}.$$

Если $x_1 = \beta$, $x_2 = -\beta$, то $x = (\beta, -\beta) \rightarrow 0$ при $\beta \rightarrow 0$,

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{\beta \cdot (-\beta)}{\beta^2 + \beta^2} = \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{-\beta^2}{2\beta^2} = -\frac{1}{2}.$$

Значит, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}$ не существует.

Вычислять пределы функций нескольких переменных, пользуясь только их определением, может оказаться трудным. Часто при вычислении таких пределов используется ниже формулируемая теорема. Суть её такова (для простоты мы рассмотрим случай двух переменных). Предположим, нам нужно вычислить предел $\lim_{x \rightarrow a} f(x_1, x_2)$ и точка a имеет координаты (a_1, a_2) . Стремление точки x к a означает, что $x_1 \rightarrow a_1$ и $x_2 \rightarrow a_2$, и можно попытаться сделать следующее. Зафиксируем какое-нибудь значение переменной x_2 и рассмотрим предел $\lim_{x_1 \rightarrow a_1} f(x_1, x_2)$. Последний, если он существует, является функцией переменной x_2 , и мы можем рассмотреть так называемый повторный предел $\lim_{x_2 \rightarrow a_2} \lim_{x_1 \rightarrow a_1} f(x_1, x_2)$. Возникает естественный вопрос: справедливо ли равенство

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x_1, x_2) = \lim_{x_2 \rightarrow a_2} \lim_{x_1 \rightarrow a_1} f(x_1, x_2)?$$

Теорема 1.1. Пусть: 1) существует (конечный или бесконечный) предел $\lim_{x \rightarrow a} f(x_1, x_2)$; 2) при любом x_2 существует конечный предел $g(x_2) = \lim_{x_1 \rightarrow a_1} f(x_1, x_2)$. Тогда существует повторный предел $\lim_{x_2 \rightarrow a_2} g(x_2) = \lim_{x_2 \rightarrow a_2} \lim_{x_1 \rightarrow a_1} f(x_1, x_2)$ и совпадают двойной и повторный пределы:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x_1, x_2) = \lim_{x_2 \rightarrow a_2} \lim_{x_1 \rightarrow a_1} f(x_1, x_2).$$

1.3 Свойства непрерывных функций.

Опишем основные свойства непрерывных функций нескольких переменных.

Предложение 1. Пусть функция $f(x_1, \dots, x_n)$ непрерывна в точке a как функция n переменных. Тогда она непрерывна и как функция каждой из переменных x_i , $i = 1, \dots, n$.

Предложение 2. Пусть функции $f(x_1, \dots, x_n)$ и $g(x_1, \dots, x_n)$ непрерывны в точке a . Тогда функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ также непрерывны в этой точке. Функция $\frac{f(x)}{g(x)}$ непрерывна во всех точках a , где $g(a) \neq 0$.

Лемма (о сохранении знака). Пусть функция $f(x_1, \dots, x_n)$ непрерывна в точке $x = \hat{x}$ и $f(\hat{x}) = A > 0$. Тогда существует окрестность $U(\hat{x})$ точки $\hat{x}$, такая что для любого $x \in U(\hat{x})$ выполняется неравенство $f(x) > 0$.

Доказательство. Поскольку функция $\alpha(x) = f(x) - A$ является бесконечно малой при $x \rightarrow \hat{x}$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует проколотая окрестность $U(\hat{x})$ точки $\hat{x}$, такая что для любого $x \in U(\hat{x})$ выполняется неравенство $|\alpha(x)| < \varepsilon$. Возьмем $\varepsilon = A$. Тогда $|\alpha(x)| < A$. Поэтому $|\alpha(x)| = |f(x) - A| = |A - f(x)| < A$, откуда следует неравенство $A - f(x) < A$ или $f(x) > 0$ для любого $x \in U(\hat{x})$. Теорема доказана. $\square$

Определение. Рассмотрим функцию n переменных $f(x_1, \dots, x_n)$ и совокупность

$$x_1 = \varphi_1(t_1, \dots, t_k), \quad \dots, \quad \varphi_n(t_1, \dots, t_k),$$

состоящую из n функций, зависящих от k аргументов. Тогда функция $f(\varphi_1(t_1, \dots, t_k), \dots, \varphi_n(t_1, \dots, t_k))$ называется *суперпозицией функций* (или, иначе, *сложной функцией*).

Предложение 3. Если функция $f(x_1, \dots, x_n)$ непрерывна в точке $a = (a_1, \dots, a_n)$, функции $x_1 = \varphi_1(t_1, \dots, t_k), \dots, x_n = \varphi_n(t_1, \dots, t_k)$, непрерывны в точке $b = (b_1, \dots, b_k)$ и $a_1 = \varphi_1(b_1, \dots, b_k), \dots, a_n = \varphi_n(b_1, \dots, b_k)$, то их суперпозиция непрерывна в точке b .

Для функций нескольких переменных справедливы следующие теоремы.

Теорема 1.2. Пусть функция $f(x_1, \dots, x_n)$ определена и непрерывна в области D и в некоторых точках $a, b \in D$ принимает значения разных знаков. Тогда найдётся точка $C \in D$, в которой функция принимает нулевое значение.

Следствие. Пусть функция $f(x_1, \dots, x_n)$ определена и непрерывна в области D и в некоторых точках $a, b \in D$ принимает значения разных знаков. Тогда на отрезке $[a; b]$ найдётся точка c , в которой функция принимает нулевое значение, т. е. $f(c) = 0$.

Теорема 1.3. Пусть функция $f(x_1, \dots, x_n)$ определена и непрерывна в области D и в некоторых точках $a, b \in D$ принимает значения $A = f(a)$ и $B = f(b)$, $A < B$. Тогда для любого числа $C \in [A; B]$ найдётся точка $c \in D$, в которой функция принимает значение C .

Область $D \subset \mathbb{R}^n$ называется *ограниченной*, если существует шар, целиком её содержащий: $D \subset B(x, r)$.

Определение. Замкнутое ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$ называется *компактом*.

Теорема 1.4. Пусть функция $f(x_1, \dots, x_n)$ определена и непрерывна на компакте D . Тогда она ограничена сверху и снизу в этой области, т. е. существуют такие числа m и M , что

$$m \leq f(x) \leq M$$

для любой точки $x \in D$.

Теорема 1.5 (Вейерштрасс). Пусть функция $f(x_1, \dots, x_n)$ определена и непрерывна на компакте D . Тогда в этой области она достигает своих точных верхней и нижней граней.

2 Частные производные. Достаточные условия дифференцируемости.

Пусть функция $f(x_1, \dots, x_n)$ определена в некоторой окрестности точки $x = (x_1, \dots, x_n)$. Рассмотрим приращение Δx переменной x_i и положим

$$\Delta_i f = f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + \Delta x, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Определение. Предел (если он существует)

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_i f}{\Delta x}$$

называется *частной производной функции f по переменной x_i* .

Теперь определим для функций нескольких переменных понятие дифференцируемости. Рассмотрим функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ и точку x , принадлежащую области её определения. Зададим каждому аргументу x_i приращение Δx_i , $i = 1, \dots, n$, и положим

$$\rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + \dots + (\Delta x_n)^2}.$$

Таким образом, величина ρ измеряет расстояние, на которое точка отстоит от исходной после приращения её координат. Положим

$$\Delta f = f(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, \dots, x_n).$$

Определение. Функция $f(x_1, \dots, x_n)$ называется *дифференцируемой в точке x* , если в рассматриваемой точке её приращение имеет вид

$$\Delta f = \alpha_1 \Delta x_1 + \dots + \alpha_n \Delta x_n + o(\rho),$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — постоянные, а $o(\rho)$ — величина, бесконечно малая по отношению к ρ . Величина

$$df = \alpha_1 dx_1 + \dots + \alpha_n dx_n$$

называется *главной частью приращения функции*, или её *дифференциалом*.

Определение. Функция $f(x_1, \dots, x_n)$ называется *непрерывно дифференцируемой в точке x* , если все ее частные производные непрерывны в этой точке как функции нескольких переменных.

Если функция f непрерывно дифференцируема во всех точках некоторой области D , то она называется *непрерывно дифференцируемой в области D* .

Теорема. Если у функции $f(x_1, \dots, x_n)$ существуют непрерывные частные производные в некоторой окрестности точки x , то она дифференцируема в этой точке, причём её дифференциал имеет вид

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n.$$

Доказательство. Для простоты записи проведем для случая функции двух переменных $f(x, y)$. Рассмотрим приращение

$$\begin{aligned} \Delta f(\hat{x}, \hat{y}) &= f(\hat{x} + \Delta x, \hat{y} + \Delta y) - f(\hat{x}, \hat{y}) = \\ &= (f(\hat{x} + \Delta x, \hat{y} + \Delta y) - f(\hat{x}, \hat{y} + \Delta y)) + (f(\hat{x}, \hat{y} + \Delta y) - f(\hat{x}, \hat{y})). \end{aligned}$$

Непрерывность частных производных функции в точке $(\hat{x}, \hat{y})$ включает предположение об их существовании в некоторой окрестности этой точки. По теореме Лагранжа о конечных приращениях

$$\Delta f(\hat{x}, \hat{y}) = \frac{\partial f(\xi, \hat{y} + \Delta y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(\hat{x}, \eta)}{\partial y} \Delta y,$$

где $\xi \in (\hat{x}; \hat{x} + \Delta x)$, $\eta \in (\hat{y}; \hat{y} + \Delta y)$. В силу непрерывности частных производных (по условию теоремы)

$$\frac{\partial f(\xi, \hat{y} + \Delta y)}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial f(\hat{x}, \hat{y})}{\partial x}, \quad \frac{\partial f(\hat{x}, \eta)}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial f(\hat{x}, \hat{y})}{\partial y}$$

при $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \rightarrow 0$. Следовательно,

$$\Delta f(\hat{x}, \hat{y}) = \frac{\partial f(\hat{x}, \hat{y})}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(\hat{x}, \hat{y})}{\partial y} \Delta y + o(\rho).$$

Значит, функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке $(\hat{x}, \hat{y})$ и

$$df(\hat{x}, \hat{y}) = \frac{\partial f(\hat{x}, \hat{y})}{\partial x} dx + \frac{\partial f(\hat{x}, \hat{y})}{\partial y} dy.$$

□

Пример 2.1. Вычислить частные производные функции $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Решение. Для функции $r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$ получаем:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}(2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}(2y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Пример 2.2. Вычислить частные производные функции $f = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.

Решение. Для функции $f = \operatorname{arctg}(yx^{-1})$ получаем:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(yx^{-1})'_x}{1 + (yx^{-1})^2} = \frac{-yx^{-2}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = -\frac{y}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(yx^{-1})'_y}{1 + (yx^{-1})^2} = \frac{x^{-1}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Пример 2.3. Вычислить дифференциал функции $f = x^y$.

Решение. По определению дифференциала функции $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$. Поэтому

$$df = yx^{y-1}dx + x^y \ln x dy.$$

3 Простейшие свойства дифференцируемых функций нескольких переменных.

3.1 Производная функций нескольких переменных.

Пусть функция $f(x_1, \dots, x_n)$ определена в некоторой окрестности точки $x = (x_1, \dots, x_n)$ и дифференцируема в точке x . Тем самым определен дифференциал функции

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n.$$

Определение. Производной функции нескольких переменных $f(x_1, \dots, x_n)$ называется вектор частных производных

$$f'(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right).$$

Как и для функций одной переменной

$$(\lambda f(x))' = \lambda f'(x) = \lambda \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \pm \frac{\partial g(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \pm \frac{\partial g(x)}{\partial x_n} \right).$$

Выполняются следующие формулы для дифференциалов элементарных арифметических выражений:

$$\begin{aligned} d(\lambda f) &= \lambda df, & d(f \pm g) &= df \pm dg, \\ d(fg) &= f dg + g df, & d\left(\frac{f}{g}\right) &= \frac{g df - f dg}{g^2} \quad (g \neq 0), \end{aligned}$$

где λ — постоянная, а f и g — функции произвольного числа аргументов.

Теорема 3.1. Если функция f дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в этой точке.

Доказательство. Действительно, если функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой точке $\hat{x}$, то её приращение имеет вид

$$\Delta f = f(\hat{x} + \Delta x) - f(\hat{x}) = \alpha_1 \Delta x_1 + \dots + \alpha_n \Delta x_n + o(\rho),$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — постоянные, а $o(\rho)$ — величина, бесконечно малая по отношению к $\rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + \dots + (\Delta x_n)^2}$. Отсюда следует, что $f(\hat{x} + \Delta x) - f(\hat{x}) \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$, т. е. непрерывность функции в точке $\hat{x}$. $\square$

3.2 Дифференцирование сложных функций.

Теорема 3.2. Пусть функция $f(x_1, \dots, x_n)$ дифференцируема в точке $\hat{x} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$, функции $x_i(t)$ являются дифференцируемыми в точке $t = \hat{t}$ и $x_i(\hat{t}) = \hat{x}_i$, $i = 1, \dots, n$. Тогда сложная функция $f(x_1(t), \dots, x_n(t))$ имеет в точке $t = \hat{t}$ производную, которая вычисляется по формуле

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{dx_n}{dt}$$

или подробнее

$$\frac{df(x_1(\hat{t}), \dots, x_n(\hat{t}))}{dt} = \frac{\partial f(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1(\hat{t})}{dt} + \dots + \frac{\partial f(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)}{\partial x_n} \cdot \frac{dx_n(\hat{t})}{dt}.$$

Доказательство. Дифференцируемость функции $f(x_1, \dots, x_n)$ означает, что полное приращение

$$\Delta f = f(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, \dots, x_n)$$

представимо в виде

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_n + o(\rho), \quad (1)$$

где $\rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + \dots + (\Delta x_n)^2}$. Обозначим Δt — приращение переменной t и $\Delta x_i = x_i(\hat{t} + \Delta t) - x_i(\hat{t})$. Разделим обе части равенства (1) на Δt . Получим

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\Delta x_1}{\Delta t} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{\Delta x_n}{\Delta t} + \frac{o(\rho)}{\Delta t}. \quad (2)$$

При $\Delta t \rightarrow 0$ в силу непрерывности функций $x_i(t)$ в точке $\hat{t}$ приращение $\Delta x_i \rightarrow 0$, а значит, и $\rho \rightarrow 0$. Поэтому при $\Delta t \rightarrow 0$ отношение $\frac{o(\rho)}{\Delta t} = \frac{o(\rho)}{\rho} \cdot \frac{\rho}{\Delta t} \rightarrow 0$, поскольку $\frac{o(\rho)}{\rho} \rightarrow 0$, а $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\rho}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(\Delta x_1)^2 + \dots + (\Delta x_n)^2}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sqrt{\left(\frac{\Delta x_1}{\Delta t}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\Delta x_n}{\Delta t}\right)^2} = \sqrt{x_1'^2(\hat{t}) + \dots + x_n'^2(\hat{t})}$ — конечная величина. Таким образом, при $\Delta t \rightarrow 0$ правая часть соотношения (2) стремится к конечному пределу $\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{dx_n}{dt}$. Поэтому и левая часть этой формулы $\frac{\Delta f}{\Delta t}$ стремится к тому же самому пределу, а это означает, что в точке t_0 существует производная $\frac{df}{dt}$ и выражается доказываемой формулой. $\square$

4 Производная по направлению. Градиент.

4.1 Производная по направлению.

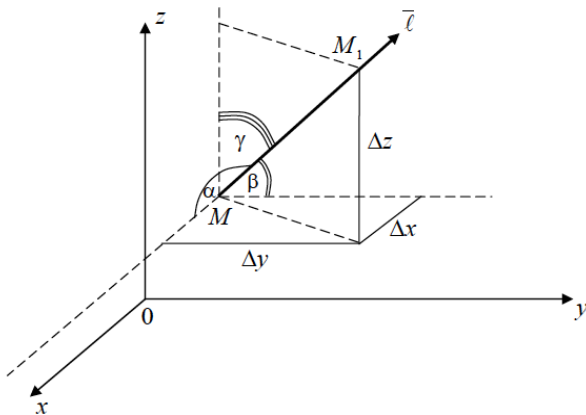
Фиксируем точку $x = \hat{x} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$. Возьмем $l = (l_1, \dots, l_n)$ — единичный вектор ($|l| = \sqrt{l_1^2 + \dots + l_n^2} = 1$). Так как все координаты единичного вектора по модулю не превосходят единицы, то для каждой из этих координат найдется такой угол α_i , что $l_i = \cos \alpha_i$, $\alpha_i \in [0; \pi]$. Таким образом, единичный вектор l можно записать в виде $l = (\cos \alpha_1, \dots, \cos \alpha_n)$. Величины $\cos \alpha_1, \dots, \cos \alpha_n$ обычно называют *направляющими косинусами*.

Будем говорить, что функция $f(x_1, \dots, x_n)$ имеет в точке $\hat{x}$ *производную по направлению* l , если существует предел справа

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \lim_{\lambda \rightarrow +0} \frac{f(\hat{x} + \lambda l) - f(\hat{x})}{\lambda}.$$

Заметим, что если производная функции f в точке $M(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$ по данному направлению l положительная, то функция f по этому направлению возрастает, если же $\frac{\partial f}{\partial l} < 0$, то функция f по направлению l убывает. Производная по направлению характеризует скорость изменения функции в данной точке в данном направлении.

Получим формулу для вычисления производной по направлению. Проиллюстрируем для случая трех переменных.



Заметим, что приращения Δx , Δy , Δz координат точки M связаны с длиной отрезка MM_1 и направляющими косинусами вектора l следующими соотношениями:

$$\Delta x = \Delta l \cdot \cos \alpha, \quad \Delta y = \Delta l \cdot \cos \beta, \quad \Delta z = \Delta l \cdot \cos \gamma.$$

В общем случае

$$\Delta x_i = \Delta l \cdot \cos \alpha_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Так как функция f по условию дифференцируемая, то ее приращение $\Delta_l f$ в точке $\hat{x}$ по направлению l можно представить в виде

$$\Delta_l f = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_n + o(\rho),$$

где $\rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + \dots + (\Delta x_n)^2} = \Delta l$. Тогда

$$\Delta_l f = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta l \cdot \cos \alpha_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta l \cdot \cos \alpha_n + o(\rho).$$

Деля обе части этого равенства на Δl и переходя к пределу при $\Delta l \rightarrow 0$, получаем

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \cos \alpha_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \cos \alpha_n. \quad (*)$$

Из этой формулы следует, что производная по направлению является линейной комбинацией частных производных, причем направляющие косинусы являются как бы весовыми множителями, которые показывают вклад в производную по направлению соответствующей частной производной.

Если вектор l совпадает с одним из ортов, например, $l = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, то $\cos \alpha_i = 1$ (остальные косинусы равны нулю) и производная f по направлению l совпадает с частной производной этой функции $\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x_i}$.

Иногда в определении производной по направлению рассматривается вектор $h = (h_1, \dots, h_n)$, который не является единичным. В этом случае коллинеарный единичный вектор l определяется по формуле $l = \left(\frac{h_1}{|h|}, \dots, \frac{h_n}{|h|} \right)$.

4.2 Градиент функции.

Представим выражение в правой части соотношения (*) в виде скалярного произведения вектора производной и направляющего вектора l . Получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial l} &= \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right), (\cos \alpha_1, \dots, \cos \alpha_n) \right\rangle = \\ &= \langle f'(\hat{x}), l \rangle = |f'(\hat{x})| \cdot |l| \cos \varphi = |f'(\hat{x})| \cos \varphi,\end{aligned}$$

так как $|l| = 1$, а φ — угол между векторами $f'(\hat{x})$ и l .

Скалярное произведение векторов максимально, если угол φ равен нулю. В этом случае вектор l коллинеарен вектору производной $f'(\hat{x})$.

Определение. Вектор, направление которого совпадает с направлением наибо́льшего роста функции, а величина равна скорости роста функции в этом направлении называется *градиентом функции*.

Градиент функции f обозначается $\text{grad } f^1$ или ∇f .

Заметим, что в двумерном случае коллинеарный единичный вектор, определяющий направление l , имеет координаты $l = (\cos \alpha, \sin \alpha)$. Поэтому в этом случае формула принимает вид

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \sin \alpha.$$

¹Термин впервые появился в метеорологии, а в математику был введён Максвеллом в 1873 г. Обозначение grad тоже предложил Максвелл.

Пример 4.1. Найти производную функции $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ в точке $\hat{x} = (3, 2, 1)$ по направлению вектора $h = (1, 2, 3)$.

Решение. Определим коллинеарный вектору $h = (1, 2, 3)$ единичный вектор l . Имеем

$$|h| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}.$$

Следовательно, единичный вектор l определяется как

$$l = \left(\frac{h_1}{|h|}, \frac{h_2}{|h|}, \frac{h_3}{|h|} \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}} \right).$$

Воспользуемся формулой

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \cos \alpha_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \cos \alpha_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} \cdot \cos \alpha_3.$$

$$\text{У нас } \cos \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{14}}, \cos \alpha_2 = \frac{2}{\sqrt{14}}, \cos \alpha_3 = \frac{3}{\sqrt{14}},$$

частные производные

$$\frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x_1} = 2x_1 \Big|_{(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) = (3, 2, 1)} = 6,$$

$$\frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x_2} = 2x_2 \Big|_{(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) = (3, 2, 1)} = 4,$$

$$\frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x_3} = 2x_3 \Big|_{(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) = (3, 2, 1)} = 2.$$

Поэтому

$$\frac{\partial f}{\partial l} = 6 \cdot \frac{1}{\sqrt{14}} + 4 \cdot \frac{2}{\sqrt{14}} + 2 \cdot \frac{3}{\sqrt{14}} = \frac{20}{\sqrt{14}}.$$

5 Производные высших порядков.

5.1 Частные производные высших порядков.

Рассмотрим для простоты изложения и краткости записи случай функции двух переменных. Пусть $f = f(x, y)$. Предположим, что функция имеет частные производные

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x(x, y), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = f'_y(x, y),$$

которые являются функциями двух переменных. Их называют *частными производными первого порядка*. Предположим, что они дифференцируемы.

Определение. Частные производные от частных производных первого порядка называются *частными производными второго порядка*.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx}, & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = (f'_x)'_y = f''_{xy}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = (f'_y)'_x = f''_{yx}, & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy}. \end{aligned}$$

Вторые производные функции f по x и по y $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ называются *смешанными производными*. Если полученные частные производные второго порядка являются дифференцируемыми функциями, то частные производные от них называются *частными производными третьего порядка*. Например,

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) = \frac{\partial f}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \right).$$

Определение. Частной производной k -го порядка называется частная производная от частной производной $(k-1)$ -го порядка.

Частных производных k -го порядка от функции двух переменных 2^k штук.

Частная производная порядка k функции $f(x_1, \dots, x_n)$ имеет вид $\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n}}$, где $k_1 + \dots + k_n = k$, $0 \leq k_i \leq k$, $i = 1, \dots, n$.

5.2 Дифференциал высшего порядка функции одной переменной.

Дифференциалом порядка n , где $n > 1$, от функции $f(x)$ в некоторой точке называется дифференциал в этой точке от дифференциала порядка $(n - 1)$, то есть

$$d^n f = d(d^{n-1} f).$$

Для функции, зависящей от одной переменной $f(x)$ второй и третий дифференциалы определяются следующим образом:

$$d^2 f = d(df) = d(f' dx) = d(f') dx = (f'' dx) dx = f'' dx^2.$$

$$d^3 f = d(d^2 f) = d(f'' dx^2) = d(f'') dx^2 = (f''' dx) dx^2 = f''' dx^3.$$

Отсюда можно вывести общий вид дифференциала n -го порядка от функции $f(x)$:

$$d^n f = f^{(n)} dx^n.$$

При вычислении дифференциалов высших порядков очень важно, что дифференциал dx при дифференцировании по x следует рассматривать как постоянный множитель.

Пример 5.1. Найти дифференциал третьего порядка функции $f(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5$.

Решение. Считаем дифференциал третьего порядка по формуле $d^3 f = f''' dx^3$. Найдем производную третьего порядка:

$$f'(x) = 4x^3 + 6x^2 + 6x + 4,$$

$$f''(x) = 12x^2 + 12x + 6,$$

$$f'''(x) = 24x + 12.$$

Следовательно,

$$d^3 f(x) = (24x + 12) dx^3.$$

5.3 Дифференциал высшего порядка функции нескольких переменных.

Если функция $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные второго порядка, то дифференциал второго порядка определяется как

$$d^2 f = d(df).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} d^2 f &= d\left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy\right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy\right) dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy\right) dy = \\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dy\right) dx + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy\right) dy = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2. \end{aligned}$$

Можно записать как

$$d^2 f = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^2 f.$$

Символически общий вид дифференциала n -го порядка от функции $f(x_1, \dots, x_n)$ выглядит следующим образом:

$$d^n f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n\right)^n f,$$

где $dx_1, \dots, dx_n$ — произвольные приращения независимых переменных. Приращения $dx_1, \dots, dx_n$ рассматриваются как постоянные и остаются одними и теми же при переходе от одного дифференциала к следующему. Сложность выражения дифференциала возрастает с увеличением числа переменных.

Пример 5.2. Найти частные производные второго порядка функции $f(x, y) = x^2 - 2xy^2 + y^3$.

Решение. Частные производные первого порядка

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -4xy + 3y^2.$$

Частные производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (2x - 2y^2) = 2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (2x - 2y^2) = -4y,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (-4xy + 3y^2) = -4y,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (-4xy + 3y^2) = -4x + 6y.$$

Пример 5.3. Найти дифференциал второго порядка функции $f(x, y) = e^{xy^2}$.

Решение. Найдем частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (e^{xy^2} y^2) = e^{xy^2} y^4,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (e^{xy^2} y^2) = e^{xy^2} (2xy y^2 + 2y) = e^{xy^2} 2y(xy^2 + 1),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (e^{xy^2} 2xy) = e^{xy^2} (y^2 2xy + 2y) = e^{xy^2} 2y(xy^2 + 1),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (e^{xy^2} 2xy) = e^{xy^2} (2xy 2xy + 2x) = e^{xy^2} 2x(2xy^2 + 1).$$

По формуле для второго дифференциала получим

$$\begin{aligned} d^2 f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 = \\ &= e^{xy^2} y^4 dx^2 + e^{xy^2} 4y(xy^2 + 1) dx dy + e^{xy^2} 2x(2xy^2 + 1) dy^2. \end{aligned}$$

6 Достаточное условие симметричности частных производных высших порядков.

Заметим, что в рассмотренном выше примере вторые производные функции f по x и по y , взятые в разном порядке, совпадают. Этот факт не случаен, и справедлив следующий результат.

Теорема 6.1. Пусть $f(x, y)$ определена в открытой области D и пусть в этой области существуют $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Если $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ непрерывны в точке $(\hat{x}, \hat{y})$, то они равны:

$$\frac{\partial^2 f(\hat{x}, \hat{y})}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(\hat{x}, \hat{y})}{\partial y \partial x}.$$

Доказательство. Рассмотрим величину

$$A = f(\hat{x} + \Delta x, \hat{y} + \Delta y) - f(\hat{x} + \Delta x, \hat{y}) - f(\hat{x}, \hat{y} + \Delta y) + f(\hat{x}, \hat{y})$$

1) Введем вспомогательную функцию $\varphi(x)$ по формуле:

$$\varphi(x) = f(x, \hat{y} + \Delta y) - f(x, \hat{y}).$$

Тогда

$$A = \varphi(\hat{x} + \Delta x) - \varphi(\hat{x}) = \varphi'(\xi)(\hat{x} + \Delta x - \hat{x}) = \varphi'(\xi)\Delta x.$$

Здесь мы использовали существование производной f'_x в окрестности точки $(\hat{x}, \hat{y})$ и теорему Лагранжа, где точка $\xi \in (\hat{x}; \hat{x} + \Delta x)$. Но

$$\varphi'(\xi) = f'_x(\xi, \hat{y} + \Delta y) - f'_x(\xi, \hat{y}) = f''_{xy}(\hat{y} + \Delta y - \hat{y}) = f''_{xy}(\xi, \eta)\Delta y.$$

Здесь мы использовали существование производной по y функции f'_x , т. е. существование f''_{xy} в окрестности точки $(\hat{x}, \hat{y})$ и теорему Лагранжа, где точка $\eta \in (\hat{y}; \hat{y} + \Delta y)$. Следовательно,

$$A = f''_{xy}(\xi, \eta)\Delta y\Delta x. \quad (1)$$

2) Введем вспомогательную функцию $\psi(y)$ по формуле:

$$\psi(y) = f(\hat{x} + \Delta x, y) - f(\hat{x}, y).$$

Тогда

$$A = \psi(\hat{y} + \Delta y) - \psi(\hat{y}) = \psi'(\beta)(\hat{y} + \Delta y - \hat{y}) = \psi'(\beta)\Delta y.$$

Здесь мы использовали существование производной f'_y в окрестности точки $(\hat{x}, \hat{y})$ и теорему Лагранжа, где точка $\beta \in (\hat{y}; \hat{y} + \Delta y)$. Но

$$\psi'(\beta) = f'_y(\hat{x} + \Delta x, \beta) - f'_y(\hat{x}, \beta) = f''_{yx}(\hat{x} + \Delta x - \hat{x}) = f''_{yx}(\alpha, \beta)\Delta x.$$

Здесь мы использовали существование производной по x функции f'_y , т. е. существование f''_{yx} в окрестности точки $(\hat{x}, \hat{y})$ и теорему Лагранжа, где точка $\alpha \in (\hat{x}; \hat{x} + \Delta x)$. Следовательно,

$$A = f''_{yx}(\alpha, \beta)\Delta x\Delta y. \quad (2)$$

Левые части равенств (1) и (2) равны одной и той же величине A , следовательно, равны и правые:

$$f''_{xy}(\xi, \eta)\Delta y\Delta x = f''_{yx}(\alpha, \beta)\Delta x\Delta y \iff f''_{xy}(\xi, \eta) = f''_{yx}(\alpha, \beta).$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$ и $\Delta y \rightarrow 0$ получим

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} f''_{xy}(\xi, \eta) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} f''_{yx}(\alpha, \beta) \iff f''_{xy}(\hat{x}, \hat{y}) = f''_{yx}(\hat{x}, \hat{y}),$$

так как производные $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ непрерывны в точке $(\hat{x}, \hat{y})$. $\square$

Для смешанных частных производных k -го порядка имеет место теорема, аналогичная теореме 6.1.

Теорема 6.2. Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ определена в открытой области D и пусть в этой области существуют все частные производные k -го порядка. Если смешанные частные производные k -го порядка непрерывны, то значение любой k -ой смешанной производной не зависит от того порядка, в котором производится последовательное дифференцирование.

Непрерывность смешанных производных существенна для того, чтобы утверждение теоремы 6.1 оставалось справедливым.

Пример 6.1 (Шварц). Найти смешанные частные производные

первого порядка функции $f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq 0, \\ 0, & (x, y) = 0, \end{cases}$

в точке $(0, 0)$.

Решение. Нетрудно понять, что функция $f(x, y)$ является непрерывной во всех точках, в том числе и в точке $(0, 0)$. Найдем частные производные первого порядка. Производная по x :

$$\begin{aligned} \left(xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right)'_x &= y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \\ &+ xy \frac{(x^2 - y^2)'_x (x^2 + y^2) - (x^2 - y^2)(x^2 + y^2)'_x}{(x^2 + y^2)^2} = y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \\ &+ xy \frac{2x(x^2 + y^2) - (x^2 - y^2)2x}{(x^2 + y^2)^2} = y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + xy \frac{4xy^2}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned}$$

Поскольку $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left(y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + y \frac{4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) = 0$, то

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + y \frac{4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2}, & (x, y) \neq 0, \\ 0, & (x, y) = 0, \end{cases}$$

Производная по y :

$$\begin{aligned} \left(xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right)'_y &= x \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \\ &+ xy \frac{(x^2 - y^2)'_y (x^2 + y^2) - (x^2 - y^2)(x^2 + y^2)'_y}{(x^2 + y^2)^2} = x \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \\ &+ xy \frac{-2y(x^2 + y^2) - (x^2 - y^2)2y}{(x^2 + y^2)^2} = x \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + xy \frac{-4x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned}$$

Поскольку $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left(x \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - x \frac{4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) = 0$, то

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} x \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - x \frac{4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2}, & (x, y) \neq 0, \\ 0, & (x, y) = 0, \end{cases}$$

Откуда следует, что $\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right|_{(0,0)} = -1$, $\left. \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right|_{(0,0)} = 1$.

7 Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

Выведем формулу Тейлора для функций двух переменных и сформулируем в общем случае.

Если функция $f(x, y)$ непрерывна вместе со своими частными производными до $(n + 1)$ -го порядка включительно в точке $(\hat{x}, \hat{y})$ и в некоторой её окрестности, то можно показать, что такая функция представима в виде суммы многочлена n -й степени относительно $(x - \hat{x})$ и $(y - \hat{y})$ и некоторого остаточного члена.

В случае $n = 2$ это представление будет выглядеть следующим образом:

$$f(x, y) = F + D(x - \hat{x}) + E(y - \hat{y}) + \\ + A(x - \hat{x})^2 + B(x - \hat{x})(y - \hat{y}) + C(y - \hat{y})^2 + R_2,$$

где A, B, C, D, E, F — числа, R_2 — остаточный член.

Исходной для вывода такой формулы является формула Тейлора второго порядка для функции одной переменной, в которой для краткости записи будем обозначать $x - \hat{x} = \Delta x$, $y - \hat{y} = \Delta y$:

$$f(x) = f(\hat{x}) + f'(\hat{x})\Delta x + \frac{f''(\hat{x})}{2!}(\Delta x)^2 + o((\Delta x)^2).$$

Запишем эту формулу для функции $f(x, y)$, считая пока аргумент y постоянным:

$$f(x, y) = f(\hat{x}, y) + f'_x(\hat{x}, y)\Delta x + \frac{f''_{xx}(\hat{x}, y)}{2!}(\Delta x)^2 + o((\Delta x)^2).$$

Теперь записываем по формуле Тейлора функции, зависящие только от y :

$$f(\hat{x}, y) = f(\hat{x}, \hat{y}) + f'_y(\hat{x}, \hat{y})\Delta y + \frac{f''_{yy}(\hat{x}, \hat{y})}{2!}(\Delta y)^2 + o((\Delta y)^2),$$

$$f'_x(\hat{x}, y) = f'_x(\hat{x}, \hat{y}) + f''_{xy}(\hat{x}, \hat{y})\Delta y + o(\Delta y),$$

$$f''_{xx}(\hat{x}, y) = f''_{xx}(\hat{x}, \hat{y}) + f'''_{xxy}(\eta)\Delta y, \quad \eta \in (\hat{y}; \hat{y} + \Delta y),$$

(последняя формула по теореме Лагранжа). Сделаем подстановку этих функций в равенство для $f(x, y)$:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(\hat{x}, y) + f'_x(\hat{x}, y)\Delta x + \frac{f''_{xx}(\hat{x}, y)}{2!}(\Delta x)^2 + o((\Delta x)^2) = \\ &= f(\hat{x}, \hat{y}) + f'_y(\hat{x}, \hat{y})\Delta y + \frac{f''_{yy}(\hat{x}, \hat{y})}{2!}(\Delta y)^2 + o((\Delta y)^2) + \\ &\quad + (f'_x(\hat{x}, \hat{y}) + f''_{xy}(\hat{x}, \hat{y})\Delta y + o(\Delta y))\Delta x + \\ &\quad + \frac{f''_{xx}(\hat{x}, \hat{y}) + f'''_{xxy}(\eta)\Delta y}{2!}(\Delta x)^2 + o((\Delta x)^2) \end{aligned}$$

Расположим слагаемые в порядке возрастания степеней Δx и Δy :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(\hat{x}, \hat{y}) + f'_x(\hat{x}, \hat{y})\Delta x + f'_y(\hat{x}, \hat{y})\Delta y + \\ &\quad + \frac{1}{2!} \left(f''_{xx}(\hat{x}, \hat{y})(\Delta x)^2 + 2f''_{xy}(\hat{x}, \hat{y})\Delta x\Delta y + f''_{yy}(\hat{x}, \hat{y})(\Delta y)^2 \right) + \\ &\quad + o((\Delta x)^2) + o(\Delta x\Delta y) + o((\Delta y)^2). \end{aligned}$$

Последние три слагаемых можно записать как $o(\rho^2)$, где $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(x - \hat{x})^2 + (y - \hat{y})^2}$. Действительно, поскольку $\frac{o(\Delta x^2)}{\rho^2} = \frac{o(\Delta x^2)}{(\Delta x)^2} \cdot \frac{(\Delta x)^2}{\rho^2} \rightarrow 0$, так как величина $\frac{(\Delta x)^2}{\rho^2} \leq 1$. Аналогично рассматриваются остальные слагаемые.

Таким образом, формула Тейлора второго порядка для функций двух переменных имеет вид:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(\hat{x}, \hat{y}) + f'_x(\hat{x}, \hat{y})(x - \hat{x}) + f'_y(\hat{x}, \hat{y})(y - \hat{y}) + \\ &\quad + \frac{1}{2!} \left(f''_{xx}(\hat{x}, \hat{y})(x - \hat{x})^2 + 2f''_{xy}(\hat{x}, \hat{y})(x - \hat{x})(y - \hat{y}) + f''_{yy}(\hat{x}, \hat{y})(y - \hat{y})^2 \right) + \\ &\quad + o(\rho^2). \end{aligned}$$

Остаточный член записан в этой формуле в форме Пеано. Наиболее просто записывается разложение функции в точке $(0, 0)$. Это разложение называется формулой Маклорена второго порядка для функций двух переменных:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(0, 0) + f'_x(0, 0)x + f'_y(0, 0)y + \\ &\quad + \frac{1}{2!} \left(f''_{xx}(0, 0)x^2 + 2f''_{xy}(0, 0)xy + f''_{yy}(0, 0)y^2 \right) + o(\rho^2). \end{aligned}$$

Из формулы следует, что в некоторой малой окрестности точки остаточным членом можно пренебречь вследствие его малости и записать приближенное выражение функции $f(x, y)$ в виде многочлена второй степени по разностям $x - \hat{x}$ и $y - \hat{y}$:

$$f(x, y) \approx f(\hat{x}, \hat{y}) + f'_x(\hat{x}, \hat{y})(x - \hat{x}) + f'_y(\hat{x}, \hat{y})(y - \hat{y}) + \frac{1}{2!} \left(f''_{xx}(\hat{x}, \hat{y})(x - \hat{x})^2 + 2f''_{xy}(\hat{x}, \hat{y})(x - \hat{x})(y - \hat{y}) + f''_{yy}(\hat{x}, \hat{y})(y - \hat{y})^2 \right).$$

Выражение в правой части последней формулы называется *многочленом Тейлора второй степени, соответствующим функции $f(x, y)$* . Особенно просто выглядит представление функции ее многочленом Тейлора в окрестности точки $(0, 0)$:

$$f(x, y) \approx f(0, 0) + f'_x(0, 0)x + f'_y(0, 0)y + \frac{1}{2!} \left(f''_{xx}(0, 0)x^2 + 2f''_{xy}(0, 0)xy + f''_{yy}(0, 0)y^2 \right).$$

Пример 7.1. Разложить функцию $f(x, y) = e^{2x+3y}$ в ряд Тейлора в точке $(0, 0)$ с производными до второго порядка включительно и остаточным членом в форме Пеано.

Решение. Посчитаем все производные заданной функции до второго порядка включительно:

$$\begin{aligned} f(0, 0) &= 1, \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= 2e^{2x+3y} \implies 2e^{2x+3y} \Big|_{(0,0)} = 2, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 3e^{2x+3y} \implies 3e^{2x+3y} \Big|_{(0,0)} = 3, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 4e^{2x+3y} \implies 4e^{2x+3y} \Big|_{(0,0)} = 4, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= 6e^{2x+3y} \implies 6e^{2x+3y} \Big|_{(0,0)} = 6, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 9e^{2x+3y} \implies 9e^{2x+3y} \Big|_{(0,0)} = 9. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$e^{2x+3y} = 1 + 2x + 3y + \frac{1}{2!} (4x^2 + 12xy + 9y^2) + o(\rho^2),$$

где $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Пример 7.2. Разложить функцию $f(x, y) = e^x \sin y$ в ряд Тейлора в точке $(0, 0)$ с производными до третьего порядка включительно и остаточным членом в форме Пеано.

Решение. Посчитаем все производные заданной функции до третьего порядка включительно:

$$f(0, 0) = 1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x \sin y \Rightarrow e^x \sin y \Big|_{(0,0)} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^x \cos y \Rightarrow e^x \cos y \Big|_{(0,0)} = 1,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^x \sin y \Rightarrow e^x \sin y \Big|_{(0,0)} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = e^x \cos y \Rightarrow e^x \cos y \Big|_{(0,0)} = 1,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -e^x \sin y \Rightarrow -e^x \sin y \Big|_{(0,0)} = 0,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = e^x \sin y \Rightarrow e^x \sin y \Big|_{(0,0)} = 0,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = e^x \cos y \Rightarrow e^x \cos y \Big|_{(0,0)} = 1$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = -e^x \sin y \Rightarrow -e^x \sin y \Big|_{(0,0)} = 0,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = -e^x \cos y \Rightarrow -e^x \cos y \Big|_{(0,0)} = -1.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} e^x \sin y &= f(0, 0) + f'_x(0, 0)x + f'_y(0, 0)y + \\ &\quad + \frac{1}{2!} \left(f''_{xx}(0, 0)x^2 + 2f''_{xy}(0, 0)xy + f''_{yy}(0, 0)y^2 \right) + \\ &\quad + \frac{1}{3!} \left(f'''_{xxx}(0, 0)x^3 + 3f'''_{xxy}(0, 0)x^2y + 3f'''_{xyy}(0, 0)xy^2 + f'''_{yyy}(0, 0)y^3 \right) + o(\rho^3) = \\ &= y + xy + \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{6}y^3 + o(\rho^3), \end{aligned}$$

где $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

8 Локальные экстремумы функций многих переменных.

8.1 Постановка задачи

Пусть $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — функция n действительных переменных, обладающая некоторой гладкостью. Под гладкостью мы понимаем определенную дифференцируемость функции. Если функция f дифференцируема k раз в точке $\hat{x}$, мы пишем $f \in D^k(\hat{x})$.

Определение 1. Точка $\hat{x}$ является *точкой локального минимума* функции f , если существует окрестность $B(\hat{x}, \varepsilon) = \{x \mid |x - \hat{x}| < \varepsilon\}$ точки $\hat{x}$ такая, что $f(x) \geq f(\hat{x})$ для любой точки x из этой окрестности. При этом мы пишем $\hat{x} \in \text{locmin } f$.

Определение 2. Точка $\hat{x}$ является *точкой локального максимума* функции f , если существует окрестность $B(\hat{x}, \varepsilon)$ точки $\hat{x}$ такая, что $f(x) \leq f(\hat{x})$ для любой точки x из этой окрестности. При этом мы пишем $\hat{x} \in \text{locmax } f$.

Если речь идет о минимуме или максимуме, то пишем $\hat{x} \in \text{locextr } f$ (говорим *локальный экстремум* функции).

Определение 3. Точка $\hat{x}$ является *точкой абсолютного минимума* функции f (иногда говорят, *глобального минимума*), если $f(x) \geq f(\hat{x})$ для любой точки $x \in \mathbb{R}^n$. При этом мы пишем $\hat{x} \in \text{absmin } f$.

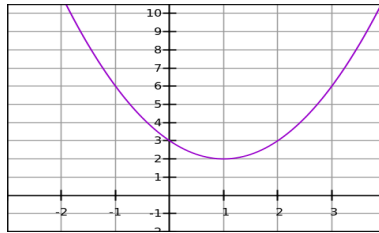
Значение абсолютного минимума обозначается S_{absmin} . В том случае, если значение абсолютного минимума достигается в точке $\hat{x}$, то пишем, $\hat{x} \in \text{absmin}$, при этом $f(\hat{x}) = S_{\text{absmin}}$.

Определение 4. Точка $\hat{x}$ является *точкой абсолютного максимума* функции f (иногда говорят, *глобального максимума*), если $f(x) \leq f(\hat{x})$ для любой точки $x \in \mathbb{R}^n$. При этом мы пишем $\hat{x} \in \text{absmax } f$.

Значение абсолютного максимума обозначается S_{absmax} . В том случае, если значение абсолютного максимума достигается в точке $\hat{x}$, то пишем, $\hat{x} \in \text{absmax}$, при этом $f(\hat{x}) = S_{\text{absmax}}$.

Пример. Найти локальные и абсолютные экстремумы функции $y = x^2 - 2x + 3$.

Решение. Построим график функции $y = x^2 - 2x + 3 = (x - 1)^2 + 2$. Это парабола с вершиной в точке $x = 1$, $y = 2$, и ветвями, направленными вверх.



Минимальное значение функции достигается в точке $x = 1$ и равно значению $y = f(1) = 2$. Точка $\hat{x} = 1$ является точкой и локального, и абсолютного минимума. Мы пишем $\hat{x} \in \text{absmin } f$, $S_{\text{absmin}} = f(\hat{x}) = 2$. Абсолютный максимум равен $+\infty$. Он достигается на последовательности, например, $x_n = n$: $f(x_n) = f(n) = n^2 - 2n + 3 \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow +\infty$.

8.2 Функции одной переменной

Теорема (Ферма). Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — функция одной действительной переменной. Если $\hat{x} \in \text{locextr } f$ — точка локального экстремума функции f и функция f дифференцируема в точке $\hat{x}$, то $f'(\hat{x}) = 0$.

Это соотношение мы называем *условием стационарности* или необходимым условием экстремума I порядка. Точки, удовлетворяющие условию стационарности, называются *стационарными*.

Теорема Ферма дает необходимое условие I порядка для существования локального экстремума. Сформулируем достаточные условия экстремума.

Теорема (достаточные условия локального экстремума). Пусть функция f дифференцируема в окрестности точки $\hat{x}$ и имеет вторую производную в точке $\hat{x}$. Тогда, если $f'(\hat{x}) = 0$ и $f''(\hat{x}) > 0$, то $\hat{x}$ — локальный минимум, а если $f'(\hat{x}) = 0$ и $f''(\hat{x}) < 0$, то $\hat{x}$ — локальный максимум.

8.3 Функции нескольких переменных

Сформулируем необходимое условие I порядка локального экстремума функции n -переменных $f(x_1, \dots, x_n)$, являющееся аналогом теоремы Ферма.

Теорема 8.1. *Если $\hat{x} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n) \in \text{locextr } f$ — точка локального экстремума функции n переменных и функция $f \in D(\hat{x})$ дифференцируема в точке $\hat{x}$, то $f'(\hat{x}) = 0$.*

Поскольку производная функции нескольких переменных есть вектор $f'(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right)$, то равенство $f'(\hat{x}) = 0$ означает, что $\frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x_n} = 0$.

Доказательство. Рассмотрим функцию одной переменной $\varphi(x_i) = f(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{i-1}, x_i, \hat{x}_{i+1}, \dots, \hat{x}_n)$. Поскольку $\hat{x} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n) \in \text{locextr } f$, то $\hat{x}_i \in \text{locextr } \varphi$. Кроме того $\varphi \in D(\hat{x}_i)$. По необходимому условию экстремума для функций одной переменной — теореме Ферма $\varphi'(\hat{x}_i) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x_i} = 0$. $\square$

Сформулируем необходимые и достаточные условия II порядка локального экстремума функции нескольких переменных. Предварительно напомним, что второй производной функции нескольких переменных является симметричная матрица вторых производных

$$A = f''(\hat{x}) = \left(\frac{\partial^2 f(\hat{x})}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1}^n = (a_{ij})_{i,j=1}^n,$$

а также приведем определения знакоопределенностей симметричных матриц.

Для дважды непрерывно дифференцируемой функции двух переменных второй производной является симметричная матрица вторых производных

$$A = f''(\hat{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(\hat{x})}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(\hat{x})}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f(\hat{x})}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\hat{x})}{\partial x_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Матрица A называется *неотрицательно определенной* (пишем $A \geq 0$), если

$$\langle Ah, h \rangle \geq 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n \quad \left(\Leftrightarrow \sum_{i,j=1}^n a_{ij} h_i h_j \geq 0 \quad \forall h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n \right).$$

Матрица A называется *положительно определенной* ($A > 0$), если

$$\langle Ah, h \rangle > 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n, \quad h \neq 0.$$

Матрица A называется *строго положительно определенной*, если

$$\exists \alpha > 0 \mid \langle Ah, h \rangle \geq \alpha |h|^2 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n.$$

Отметим, что в конечномерном пространстве условие положительной определенности симметричной матрицы A эквивалентно условию строгой положительности матрицы A .

$$\langle Ah, h \rangle > 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n, \quad h \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \alpha > 0 \mid \langle Ah, h \rangle \geq \alpha |h|^2 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n.$$

(В бесконечномерных пространствах это не так, то есть условие положительной определенности не является условием строгой положительности.)

Аналогично определяются неположительная, отрицательная и строго отрицательная матрицы.

Для функций двух переменных выражение $\langle Ah, h \rangle$ записывается в виде

$$\begin{aligned} \langle Ah, h \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}, (h_1, h_2) \right\rangle = \\ &= \langle (a_{11}h_1 + a_{12}h_2, a_{21}h_1 + a_{22}h_2), (h_1, h_2) \rangle = \\ &= a_{11}h_1^2 + a_{12}h_1h_2 + a_{21}h_1h_2 + a_{22}h_2^2 = \\ &= a_{11}h_1^2 + 2a_{12}h_1h_2 + a_{22}h_2^2. \end{aligned}$$

Теорема 8.2. Необходимые условия экстремума: если $\hat{x} \in \text{locmin } f$ — точка локального минимума функции f и функция f дважды дифференцируема в точке $\hat{x} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$, то

$$f'(\hat{x}) = 0, \quad \langle f''(\hat{x})h, h \rangle \geq 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n.$$

Достаточные условия экстремума: если

$$f'(\hat{x}) = 0, \quad \langle f''(\hat{x})h, h \rangle > 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n, \quad h \neq 0,$$

то $\hat{x} \in \text{locmin } f$ — точка локального минимума функции f .

Доказательство. По формуле Тейлора

$$f(\hat{x} + h) = f(\hat{x}) + \langle f'(\hat{x}), h \rangle + \frac{1}{2} \langle f''(\hat{x})h, h \rangle + r(h), \quad r(h) = o(|h|^2).$$

Необходимость. Поскольку $\hat{x} \in \text{locmin } f$, то по необходимому условию экстремума I порядка в конечномерной задаче без ограничений $f'(\hat{x}) = 0$. Поэтому в силу формулы Тейлора

$$f(\hat{x} + \lambda h) - f(\hat{x}) = \frac{\lambda^2}{2} \langle f''(\hat{x})h, h \rangle + r(\lambda h), \quad r(\lambda h) = o(|\lambda|^2)$$

при достаточно малых λ и фиксированном h . Поскольку $\hat{x} \in \text{locmin } f$, то $f(\hat{x} + \lambda h) - f(\hat{x}) \geq 0$ при малых λ . Поэтому

$$\frac{\lambda^2}{2} \langle f''(\hat{x})h, h \rangle + r(\lambda h) \geq 0.$$

Разделим обе части последнего неравенства на λ^2 и устремим λ к нулю. Поскольку $\frac{r(\lambda h)}{\lambda^2} \rightarrow 0$, то получим, что

$$\langle f''(\hat{x})h, h \rangle \geq 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n.$$

Достаточность. Так как $f'(\hat{x}) = 0$, то по формуле Тейлора

$$f(\hat{x} + h) - f(\hat{x}) = \frac{1}{2} \langle f''(\hat{x})h, h \rangle + r(h), \quad r(h) = o(|h|^2).$$

Поскольку в конечномерном пространстве условие положительности эквивалентно условию строгой положительности, то $\langle f''(\hat{x})h, h \rangle \geq \alpha|h|^2$ с некоторой константой $\alpha > 0$. Тогда из формулы Тейлора

$$\frac{1}{2} \langle f''(\hat{x})h, h \rangle + r(h) \geq 0$$

при достаточно малых h , так как $r(h) = o(|h|^2)$. Следовательно, $\hat{x} \in \text{locmin } f$. □

Для локального максимума неравенства имеют противоположный вид: $\langle f''(\hat{x})h, h \rangle \leq 0$ и $\langle f''(\hat{x})h, h \rangle < 0$ соответственно.

В терминах положительно и отрицательно определенных матриц предыдущую теорему можно сформулировать следующим образом.

Теорема 8.3. Необходимые условия экстремума: если $\hat{x} \in \text{locmin } f$ — точка локального минимума функции f и функция f дважды дифференцируема в точке $\hat{x} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$, то $f'(\hat{x}) = 0$, а матрица $A = f''(\hat{x})$ неотрицательно определена.

Достаточные условия экстремума: если $f'(\hat{x}) = 0$, а матрица A положительно определена, то $\hat{x} \in \text{locmin } f$ — точка локального минимума функции f .

8.4 Квадратично-линейная задача

Рассмотрим задачу с квадратично-линейным функционалом:

$$f(x) = \langle Ax, x \rangle + \langle b, x \rangle + c = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_i x_i + c \rightarrow \text{extr.}$$

Здесь A — симметричная матрица, вектор $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$.

Теорема. Пусть $\hat{x}$ — стационарная точка в задаче ($f'(\hat{x}) = 0$). Если матрица A положительно определена ($A > 0$), то $\hat{x} \in \text{absmin } f$. Если для матрицы A не выполнено условие $A \geq 0$, то $S_{\text{absmin}} = -\infty$.

Доказательство. Отметим, что для квадратично-линейных функционалов по формуле Тейлора имеет место равенство

$$f(\hat{x} + h) = f(\hat{x}) + \langle f'(\hat{x}), h \rangle + \frac{1}{2} \langle f''(\hat{x})h, h \rangle. \quad (*)$$

По условию $f'(\hat{x}) = 0$, значит, $\langle f'(\hat{x}), h \rangle = 0 \ \forall h \in \mathbb{R}^n$. Поскольку $\langle f'(x), h \rangle = 2\langle Ax, h \rangle + \langle b, h \rangle$, то $\frac{1}{2} \langle f''(\hat{x})h, h \rangle = \langle Ah, h \rangle$ и из формулы Тейлора (*) имеем:

$$f(\hat{x} + h) - f(\hat{x}) = \langle Ah, h \rangle \quad \forall h \in \mathbb{R}^n.$$

Следовательно, если матрица $A > 0$ ($\Leftrightarrow \langle Ah, h \rangle > 0 \ \forall h \neq 0$), то $f(\hat{x} + h) - f(\hat{x}) > 0 \ \forall h \neq 0$. А это означает, что $\hat{x} \in \text{absmin } f$.

Если $A \not\geq 0$, то существует вектор $h \neq 0$, для которого $\langle Ah, h \rangle < 0$. Тогда $f(\hat{x} + \lambda h) = f(\hat{x}) + \langle A\lambda h, \lambda h \rangle = f(\hat{x}) + \lambda^2 \langle Ah, h \rangle \rightarrow -\infty$ при $\lambda \rightarrow \infty$. Значит, $S_{\text{absmin}} = -\infty$. $\square$

Аналогичная теорема верна и для задачи на максимум.

8.5 Критерий Сильвестра

Знакоопределенность матрицы устанавливается с помощью критерия Сильвестра.

Напомним, что *последовательными главными минорами* матрицы A называются определители $A_{1\dots k} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix}$, $k = 1, \dots, n$.

Главным минором $A_{i_1\dots i_k}$ матрицы A называется определитель матрицы размера $k \times k$, составленной из строк и столбцов с номерами $i_1, \dots, i_k$, $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n$: $A_{i_1\dots i_k} := \det \begin{pmatrix} a_{i_1 i_1} & \dots & a_{i_1 i_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_k i_1} & \dots & a_{i_k i_k} \end{pmatrix}$, $k = 1, \dots, n$.

Теорема (критерий Сильвестра). Пусть A — симметричная матрица. Тогда

1. Матрица A положительно определена ($A > 0$) тогда и только тогда, когда все ее последовательные главные миноры положительны, т. е. $A_{1\dots k} > 0$, $k = 1, \dots, n$.

2. Матрица A отрицательно определена ($A < 0$) тогда и только тогда, когда все ее последовательные главные миноры чередуют знак, начиная с отрицательного, т. е. $(-1)^k A_{1\dots k} > 0$, $k = 1, \dots, n$.

3. Матрица A неотрицательно определена ($A \geq 0$) тогда и только тогда, когда все ее главные миноры неотрицательны, т. е. $A_{i_1\dots i_k} \geq 0$, $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n$, $k = 1, \dots, n$.

4. Матрица A неположительно определена ($A \leq 0$) тогда и только тогда, когда все ее главные миноры чередуют знак, начиная с неположительно, т. е. $(-1)^k A_{i_1\dots i_k} \geq 0$, $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n$, $k = 1, \dots, n$.

Из критерия Сильвестра следует, что в случае функции двух переменных матрица $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ положительно определена тогда и только тогда, когда $a_{11} > 0$, $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0$; отрицательно определена тогда и только тогда, когда $a_{11} < 0$, $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0$.

Пример 8.1. Установить знакоопределенность матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение. Имеем $A_1 = 2 > 0$, $A_{12} = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 6 - 1 = 5 > 0$.

По критерию Сильвестра матрица положительно определена.

Пример 8.2. Установить знакоопределенность матрицы $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Решение. Имеем $A_1 = -2 < 0$, $A_{12} = \det \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = 6 - 1 = 5 > 0$. По критерию Сильвестра матрица отрицательно определена.

Пример 8.3. Установить знакоопределенность матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Решение. Имеем $A_1 = 1 > 0$, $A_{12} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = -1 - 4 = -5 < 0$. По критерию Сильвестра матрица не является ни положительно определенной, ни отрицательно определенной.

Нетрудно видеть, что единичная матрица $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ по критерию Сильвестра является положительно определенной, а матрица $\begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}$ по критерию Сильвестра является отрицательно определенной.

8.6 Теорема Вейерштрасса и следствие из нее.

Пусть $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — функция n переменных. При исследовании вопроса о достижении функцией n переменных экстремума часто используется следующая теорема.

Теорема. Непрерывная функция на непустом ограниченном замкнутом подмножестве конечномерного пространства (компакте) достигает своих абсолютных максимума и минимума.

Выделим простое следствие из этой теоремы, которое часто будем использовать.

Следствие. Если функция f непрерывна на $\mathbb{R}^n$ и $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$, то она достигает своего абсолютного минимума на любом замкнутом подмножестве из $\mathbb{R}^n$ (не обязательно конечном).

Аналогичное утверждение для абсолютного максимума выполняется, если $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$.

Пример 8.4. Найти локальные и абсолютные экстремумы функции $f(x) = f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1 + x_2$.

Решение. Необходимое условие локального экстремума I порядка:

$$f'(x) = 0 \iff \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = 0 \iff \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 + 1 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, находим единственную стационарную точку $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2) = (1, 0)$. Для проверки условий II порядка выпишем матрицу вторых производных и проверим ее знакоопределенность:

$$A = \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1}^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A_1 = 2 > 0, \quad A_{12} = \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 3 > 0.$$

Матрица A по критерию Сильвестра положительно определена. По достаточному условию экстремума функции нескольких переменных точка $\hat{x}$ доставляет локальный минимум функции f .

Поскольку функционал линейно-квадратичный, то точка $\hat{x}$ будет доставлять не только локальный, но и абсолютный минимум, $S_{\text{absmin}} = f(1, 0) = -1$.

Покажем, что $S_{\text{absmax}} = +\infty$. Действительно, для $x_n = (n, 0)$ $f(x_n) = n^2 - 2n \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Ответ. $(1, 0) \in \text{absmin}$, $S_{\text{absmin}} = -1$; $S_{\text{absmax}} = +\infty$.

Пример 8.5. Найти локальные и абсолютные экстремумы функции $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 - 4x_1 + 6x_2$.

Решение. Необходимое условие локального экстремума I порядка:

$$\begin{aligned} f'(\hat{x}) = 0 &\iff \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = 0 \\ &\iff \begin{cases} 2x_1 - 4 = 0, \\ -2x_2 + 6 = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Получили единственную стационарную точку $\hat{x} = (2, 3)$. Для проверки условий II порядка выпишем матрицу вторых производных и проверим ее знакоопределенность:

$$A = \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_1 = 2 > 0, \quad A_{12} = -4 < 0.$$

Матрица A по критерию Сильвестра не является ни неотрицательно, ни неположительно определенной. Не выполняются необходимые условия ни локального минимума, ни локального максимума. Поэтому точка $\hat{x}$ не является ни точкой локального минимума, ни точкой локального максимума.

Поскольку $f(0, t) = -t^2 + 6t \rightarrow -\infty$ при $t \rightarrow +\infty$, а $f(t, 0) = t^2 - 4t \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$, то $S_{\text{absmin}} = -\infty$ и $S_{\text{absmax}} = +\infty$.

Ответ. $(2, 3) \notin \text{locextr}$, $S_{\text{absmin}} = -\infty$; $S_{\text{absmax}} = +\infty$.

Пример 8.6. Найти локальные и абсолютные экстремумы функции $f(x) = f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4 - x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2$.

Решение. Необходимое условие локального экстремума I порядка:

$$f'(\hat{x}) = 0 \iff \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = 0 \iff \begin{cases} 4x_1^3 - 2x_1 - 2x_2 = 0, \\ 4x_2^3 - 2x_1 - 2x_2 = 0. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения системы второе, получим $4x_1^3 - 4x_2^3 = 0 \Leftrightarrow x_1^3 = x_2^3 \Leftrightarrow x_1 = x_2$. Подставляя $x_2 = x_1$ в первое уравнение системы, находим x_1 и x_2 : $4x_1^3 - 2x_1 - 2x_1 = 0 \Leftrightarrow x_1^3 = x_1 \Leftrightarrow$

$x_1 = -1; 0; 1$, соответственно $x_2 = -1; 0; 1$. Получили три стационарные точки $\hat{x}^1 = (1, 1)$, $\hat{x}^2 = (-1, -1)$, $\hat{x}^3 = (0, 0)$. Для проверки условий II порядка выписываем матрицу вторых производных в каждой точке стационарности:

$$A = \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1}^2 = \begin{pmatrix} 12x_1^2 - 2 & -2 \\ -2 & 12x_2^2 - 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A|_{(1,1)} = A|_{(-1,-1)} = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}, \quad A|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Матрица $\begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$ по критерию Сильвестра положительно определена: $A_1 = 10 > 0$, $A_{12} = \det \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix} = 100 - 4 = 96 > 0$. По достаточному условию локального экстремума функции нескольких переменных точки $(1, 1)$ и $(-1, -1)$ доставляют локальный минимум функции f . Поскольку

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x_1, x_2) = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} (x_1^4 + x_2^4 - (x_1 + x_2)^2) = +\infty,$$

то по следствию из теоремы Вейерштрасса абсолютный минимум в задаче должен достигаться. Значит, эти точки будут доставлять не только локальный, но и абсолютный минимум, $S_{\text{absmin}} = f(1, 1) = -2$.

Матрица $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ по критерию Сильвестра не является ни положительно, ни отрицательно определенной: $A_1 = -2 < 0$, $A_{12} = \det \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = 0$. Она является неположительно определенной матрицей ($A \leq 0$) и не является неотрицательно определенной матрицей ($A \not\geq 0$). Следовательно, не выполняется необходимое условие локального минимума. Поэтому $\hat{x}^3 = (0, 0) \notin \text{locmin} f$. Проверим, доставляет ли точка локальный максимум. Поскольку $f(h, -h) = 2h^4 > 0 = f(\hat{x}^3)$ при малых $h \neq 0$, то $\hat{x}^3 \notin \text{locmax} f$. Таким образом, точка $(0, 0) \notin \text{locextr} f$.

Выше показали, что $S_{\text{absmax}} = +\infty$.

Ответ. $(0, 0) \notin \text{locextr}$; $(-1, -1), (1, 1) \in \text{absmin}$, $S_{\text{absmin}} = -2$; $S_{\text{absmax}} = +\infty$.

9 Теорема о неявной функции.

Термин «неявная функция» относится к способу задания функциональной зависимости между x и y и означает, что вместо явной формулы $y = f(x)$ эта зависимость представлена уравнением $F(x, y) = 0$.

Следует отметить, что уравнение $F(x, y) = 0$ не всегда определяет функцию $y = f(x)$. Например, уравнение $x = 1$ функцию $y = f(x)$ не определяет.

Кроме того, уравнение $F(x, y) = 0$ не всегда позволяет однозначно выразить y через x . Например, уравнение $x^2 + y^2 = 1$, задающее окружность на плоскости, определяет при $-1 \leq x \leq 1$ две непрерывные функции $y_1 = \sqrt{1 - x^2}$ и $y_2 = -\sqrt{1 - x^2}$.

В этом примере можно, например, дополнительно потребовать, чтобы выполнялось неравенство $y \geq 0$. Тогда мы получим только $y_1 = \sqrt{1 - x^2}$.

В общей ситуации условия, при которых существует единственная функция $y = f(x)$, задаваемая уравнением $F(x, y) = 0$ дает следующая теорема.

Теорема 9.1. Пусть функция $F(x, y)$ и частные производные $\frac{\partial F}{\partial x}$ и $\frac{\partial F}{\partial y}$ определены и непрерывны в окрестности точки $(\hat{x}, \hat{y})$; кроме того, $F(\hat{x}, \hat{y}) = 0$ и $\frac{\partial F(\hat{x}, \hat{y})}{\partial y} \neq 0$. Тогда существуют δ_1 и δ_2 такие, что на множестве $\{(x, y) \mid |x - \hat{x}| < \delta_1, |y - \hat{y}| < \delta_2\}$ уравнение $F(x, y) = 0$ равносильно² уравнению $y = f(x)$, где $f(x)$ непрерывная и дифференцируемая на отрезке $[\hat{x} - \delta_1; \hat{x} + \delta_1]$ функция, и

$$f'(x) = - \frac{\frac{\partial F(x, y)}{\partial x}}{\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}} \bigg|_{y=f(x)}.$$

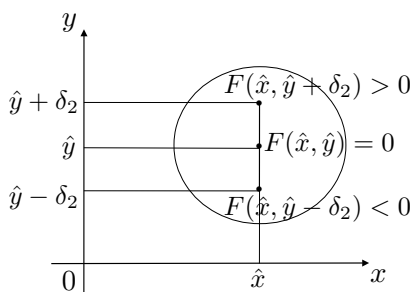
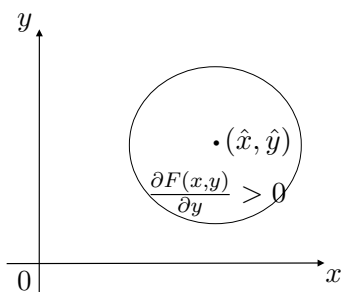
Справедлива аналогичная сформулированной теорема о неявной функции для функции многих переменных и систем таких функций.

²Равносильность $F(x, y) = 0$ и $y = f(x)$ означает, что уравнение $F(x, y) = 0$ однозначно определяет в рассматриваемой области дифференцируемую функцию $y = f(x)$ такую, что $\hat{y} = f(\hat{x})$ и вообще, $F(x, f(x)) = 0$ при $x \in [\hat{x} - \delta_1; \hat{x} + \delta_1]$.

Доказательство. По условию $\frac{\partial F(\hat{x}, \hat{y})}{\partial y} \neq 0$. Пусть для определённости $\frac{\partial F(\hat{x}, \hat{y})}{\partial y} > 0$. Ввиду непрерывности $\frac{\partial F}{\partial y}$ в точке $(\hat{x}, \hat{y})$ это неравенство выполняется при всех (x, y) из некоторой окрестности точки $(\hat{x}, \hat{y})$. Следовательно, существует $\delta_2 > 0$ такое, что функция $F(\hat{x}, y)$ обладает на отрезке $[\hat{y} - \delta_2; \hat{y} + \delta_2]$ положительной производной и, значит, возрастает. Поскольку $F(\hat{x}, \hat{y}) = 0$, то из возрастания функции по y следует, что функция

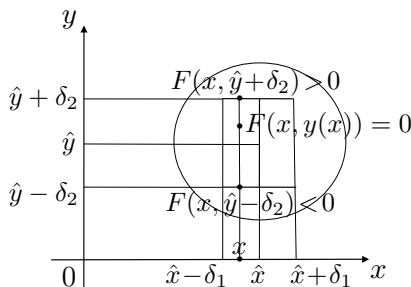
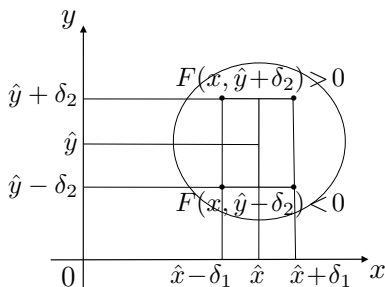
$F(\hat{x}, y) < 0$ при $\hat{y} - \delta_2 \leq y \leq \hat{y}$ и $F(\hat{x}, y) > 0$ при $\hat{y} \leq y \leq \hat{y} + \delta_2$, в том числе в крайних точках

$$F(\hat{x}, \hat{y} - \delta_2) < 0, F(\hat{x}, \hat{y} + \delta_2) > 0.$$



Так как функция F непрерывна, то она сохраняет знак в некоторой окрестности любой точки, где она положительна или отрицательна. Поэтому существует δ_1 -окрестность точки $\hat{x}$, в которой знаки сохраняются. Т. е.

$$F(x, \hat{y} - \delta_2) < 0, F(x, \hat{y} + \delta_2) > 0 \quad \forall x \in [\hat{x} - \delta_1; \hat{x} + \delta_1].$$



При любом фиксированном $x \in [\hat{x} - \delta_1; \hat{x} + \delta_1]$ функция $F(x, y)$ возрастает по y на отрезке $[\hat{y} - \delta_2; \hat{y} + \delta_2]$. При этом $F(x, \hat{y} - \delta_2) < 0$,

$F(x, \hat{y} + \delta_2) > 0$. Поэтому существует, притом единственное значение y такое, что $F(x, y) = 0$. Это значение соответствует точке x . Это соответствие и обозначается $y = f(x)$.

Таким образом, искомая функция построена. При этом, по построению, $F(x, f(x)) = 0$ при $x \in [\hat{x} - \delta_1; \hat{x} + \delta_1]$.

Докажем, что f дифференцируема в точке x .

Пусть приращению Δx соответствует приращение $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. Тогда

$F(x + \Delta x, y + \Delta y) = F(x + \Delta x, y + f(x + \Delta x) - f(x)) = F(x + \Delta x, f(x + \Delta x)) = 0$ по построению f . Но F — дифференцируемая функция, поэтому

$$0 = F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \Delta y + o(\rho),$$

где $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$. Из этого равенства следует, что

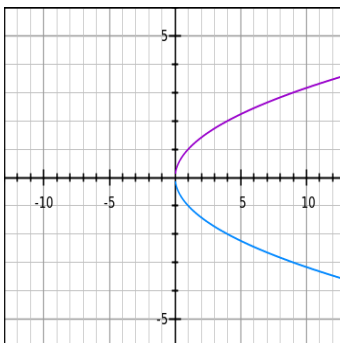
$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y} \Delta y = -\frac{\partial F}{\partial x} \Delta x + o(\rho) &\iff \Delta y = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \Delta x + o\left(\frac{\rho}{\frac{\partial F}{\partial y}}\right) \\ &\iff \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} + o\left(\frac{\rho}{\frac{\partial F}{\partial y} \Delta x}\right), \end{aligned}$$

т. к. $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$. Отсюда $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$. Из существования производной следует непрерывность функции f в точке x . $\square$

Пример 9.1. Применить теорему об неявной функции к функции заданной неявно уравнением $F(x, y) = y^2 - x = 0$.

Решение. Имеем $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y$. Значит, в точке $y = 0$ ($y^2 - x = 0 \Rightarrow x = 0$) частная производная $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$. Поэтому теорему об неявной функции в этой точке нельзя применять. Поскольку $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y \neq 0$ при $y \neq 0$ и, следовательно, в некоторой окрестности решения уравнения $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y^2 - x = 0, y \neq 0$ теорему об неявной функции можно применить.

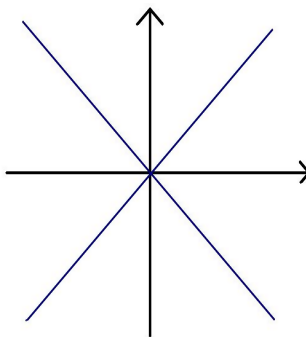
Выберем теперь какое-нибудь одно ненулевое решение данного



уравнения, точку $(\hat{x}, \hat{y})$. Тогда в окрестности точки $\hat{x}$ найдётся единственная непрерывная функция, неявно определяемая данным уравнением. В зависимости от того, какой знак, “+” или “-” имеет выбранное число $\hat{y}$, эта функция будет или $y = \sqrt{x}$, или $y = -\sqrt{x}$.

Пример 9.2. Применить теорему об неявной функции к функции заданной неявно уравнением $F(x, y) = x^2 - y^2 = 0$.

Решение. Имеем $\frac{\partial F}{\partial y} = -2y$. Значит, в точке $y = 0$ ($\overset{x^2 - y^2 = 0}{\Rightarrow} x = 0$) частная производная $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ и, следовательно, теорему об неявной функции в этой точке нельзя применять. Поскольку $\frac{\partial F}{\partial y} = -2y \neq 0$ при $y \neq 0$ и, следовательно, в некоторой окрестности решения уравнения $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow |x| = |y| \neq 0$ теорему об неявной функции можно применить.



Как видно на рисунке, однозначное явное определение y как функции x в точке $(0, 0)$ невозможно.

Литература

- [1] Демидович Б. Р. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов. Москва. 2001.
- [2] Макаров Ю. Н. Лекции по математическому анализу для студентов первого курса Химфака МГУ. <http://chembaby.com/matematiceskij-analiz/>
- [3] Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Том 1. Москва.: Изд-во ФИЗМАТЛИТ, 1996.
- [4] Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа. Том 1. Москва.: Изд-во Наука, 1998.
- [5] Чирский В. Г. Пособие для подготовки к экзамену по математическому анализу для студентов общего потока. Второй семестр. Москва.: Изд-во химического факультета МГУ, 2010.

**Программа экзамена по математике
для студентов 1 курса (2 семестр) химического факультета.**

1. Первообразная и ее простейшие свойства.
2. Неопрделенный интеграл. Основные приемы интегрирования.
3. Криволинейная трапеция и определение ее площади.
4. Определенный интеграл.
5. Свойства линейности и аддитивности определенного интеграла.
6. Неравенства и определенный интеграл.
7. Теорема о среднем.
8. Свойство определенного интеграла с переменным верхним пределом.
9. Формула Ньютона-Лейбница.
10. Замена переменных в определенном интеграле.
11. Интегрирование по частям.
12. Несобственные интегралы и их простейшие свойства.
13. Длина кривой.
14. Объем тела вращения.
15. Площадь поверхности вращения.
16. Непрерывные функции многих переменных и их свойства.
17. Частные производные. Достаточные условия дифференцируемости.
18. Производная по направлению. Градиент.
19. Простейшие свойства дифференцируемых функций многих переменных.
20. Производные высших порядков.
21. Достаточное условие симметричности частных производных высших порядков.
22. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.
23. Локальные экстремумы функций многих переменных.
24. Теорема о неявной функции.