МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«УЛЬЯНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО И ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Методические указания к типовому расчету

Составители: **П. К. Маценко**
Ю. А. Решетников
Н. В. Савинов

Ульяновск
УлГТУ
2012

УДК 519.2 (076)
ББК 32.97 я 7
Т34

Рецензент – заведующий кафедрой «Прикладная математика» УлГУ доктор физико-математических наук профессор А. А. Бутов

Одобрено секцией методических пособий
научно-методического совета УлГТУ

Т 34 **Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление** : методические указания к типовому расчету / сост.: П. К. Маценко, Ю. А. Решетников, Н. В. Савинов. – Ульяновск : УлГТУ, 2012. – 43 с.

Изложена методика выполнения типового расчета по теме «Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление» из «Сборника заданий по специальным курсам высшей математики» В. Ф. Чудесенко. Методические указания составлены в соответствии с программой курсов «ТФКП», «Математический анализ», «Математика» для направлений: 231300 «Прикладная математика», 200100 «Приборостроение», 210400 «Радиотехника», 210700 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи», 211199 «Конструирование и технология электронных средств», 150700 «Машиностроение», 140400 «Электроэнергетика и электротехника».

Работа выполнена на кафедре «Высшая математика».

УДК 681.3 (076)
ББК 32.97 я 7

СОДЕРЖАНИЕ

1. ВВЕДЕНИЕ В КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ

Комплексное число – это сумма вида $z = x + iy$, где $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица, x, y – действительные числа. При этом $x = \operatorname{Re} z$ и $y = \operatorname{Im} z$ называются соответственно действительной и мнимой частью комплексного числа z. Комплексное число z имеет простую геометрическую интерпретацию. Если на плоскости выбрать декартову систему координат, по оси абсцисс отложить действительную, а по оси ординат – мнимую части комплексного числа, то само комплексное число $z = x + iy$ изображается в виде точки (x, y) или ее радиус-вектора (см. рис. 1). Модуль и аргумент комплексного числа находятся по формулам

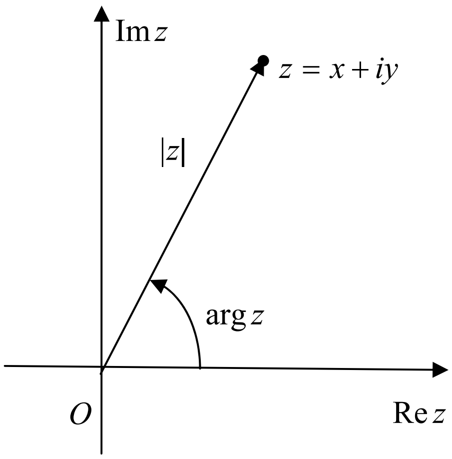

Рис. 1

$$|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2},$$

$$\arg z = \begin{cases} arctg\left(\dfrac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}\right), \text{если } \operatorname{Re} z > 0, \\ \pi + arctg\left(\dfrac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}\right), \text{если } \operatorname{Re} z < 0, \operatorname{Im} z \geq 0, \\ -\pi + arctg\left(\dfrac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}\right), \text{если } \operatorname{Re} z < 0, \operatorname{Im} z < 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, \text{ если } \operatorname{Re} z = 0, \operatorname{Im} z > 0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, \text{ если } \operatorname{Re} z = 0, \operatorname{Im} z < 0. \end{cases}$$

При этом $-\pi < \arg z \leq \pi$.

1.1. Указания к задаче 1

Для каждого, отличного от нуля, комплексного числа z существуют n различных корней n-й степени $w_k = \sqrt[n]{z}$, и все они находятся по формуле

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \qquad (1.1)$$

в которой $\varphi = \arg z$.

Пример 1. Найти все значения корня $\sqrt[4]{-\frac{1}{32}+i\frac{\sqrt{3}}{32}}$.

Решение. Используем формулу (1.1), в которой полагаем $n=4$, $z=-\frac{1}{32}+i\frac{\sqrt{3}}{32}$ Поскольку $\operatorname{Re} z=-\frac{1}{32}$, $\operatorname{Im} z=\frac{\sqrt{3}}{32}$, то легко видеть, что

$$|z|=\sqrt{\left(-\frac{1}{32}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{32}\right)^2}=\sqrt{\frac{1+3}{32^2}}=\frac{1}{16},$$

$$\arg z=\pi+arctg\left(\frac{\sqrt{3}/32}{-1/32}\right)=\pi-arctg\left(\sqrt{3}\right)=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}.$$

Поэтому для нашего случая формула (1.1) примет вид

$$w_k=\sqrt[4]{\frac{1}{16}}\left(\cos\frac{2\pi/3+2k\pi}{4}+i\sin\frac{2\pi/3+2k\pi}{4}\right),\qquad k=0,1,2,3.$$

Из этой формулы для $k=0$ получим:

$$w_0=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}+i\frac{1}{4},$$

для $k=1$ получим:

$$w_1=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4},$$

для $k=2$ получим:

$$w_2=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{4}-i\frac{1}{4},$$

для $k=3$ получим:

$$w_3=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{4}+i\frac{1}{4},\ -\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4},\ -\frac{\sqrt{3}}{4}-i\frac{1}{4},\ \frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{4}$.

1.2. Указания к задачам 2, 3

Для вычисления значений функций в задачах 2, 3 нужно использовать следующие формулы:

$$e^z=e^{x+iy}=e^x\left(\cos y+i\sin y\right), \tag{1.2}$$

$$Ln\,z=\ln|z|+i\left(\arg z+2k\pi\right),\ \ k=0,\pm1,\pm2,\ldots, \tag{1.3}$$

$$z^w=e^{w\cdot Ln\,z},\quad z\neq0, \tag{1.4}$$

$$Arc\sin z = -i\,Ln\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right), \tag{1.5}$$
$$Arc\cos z = -i\,Ln\left(z + \sqrt{z^2-1}\right),$$
$$Arctg\,z = -\frac{i}{2}Ln\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right), \qquad Arcctg\,z = \frac{i}{2}Ln\left(\frac{z-i}{z+i}\right).$$
$$Arsh\,z = Ln\left(z+\sqrt{z^2+1}\right), \qquad Arch\,z = Ln\left(z+\sqrt{z^2-1}\right),$$
$$Arthz = \frac{1}{2}Ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right), \qquad Arcth\,z = \frac{1}{2}Ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right).$$
$$\begin{aligned} &\cos(iz) = chz, \qquad \sin(iz) = i\,shz,\\ &ch(iz) = \cos z, \qquad sh(iz) = i\sin z, \end{aligned} \tag{1.6}$$
$$\begin{aligned} &ch(z_1 \pm z_2) = chz_1 \cdot chz_2 \pm shz_1 \cdot shz_2,\\ &sh(z_1 \pm z_2) = shz_1 \cdot chz_2 \pm chz_1 \cdot shz_2. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Отметим, что в формулах, содержащих квадратный корень, нужно учитывать оба его значения (см. пример 3).

Пример 2.1. Представить $sh\left(3 - i\dfrac{\pi}{4}\right)$ в алгебраической форме.

Решение. Согласно формулам (1.7), (1.6) имеем

$$sh\left(3-\tfrac{i\pi}{4}\right) = sh3\cdot ch\tfrac{i\pi}{4} - ch3\cdot sh\tfrac{i\pi}{4} = sh3\cdot\cos\tfrac{\pi}{4} - ch3\cdot i\cdot\sin\tfrac{\pi}{4} = \tfrac{\sqrt{2}}{2}\left(sh3 - i\,ch3\right).$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(sh3 - i\,ch3\right)$.

Пример 2.2. Представить $(-i)^{7i}$ в алгебраической форме.

Решение. Согласно формуле (1.4) представим: $(-i)^{7i} = e^{7iLn(-i)}$. Величину $Ln(-i)$ преобразуем по формуле (1.3)

$$Ln(-i) = \ln|-i| + i\left(\arg(-i) + 2k\pi\right) = i\left(-\tfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

При этом учтено, что $\ln|-i| = \ln 1 = 0$, $\arg(-i) = -i\,\frac{\pi}{2}$. Следовательно

$$(-i)^{7i} = \exp\left(7i^2\left(-\tfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right) = \exp\left(\tfrac{7\pi}{2} - 14k\pi\right), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Ответ: $\exp\left(\frac{7\pi}{2} + 14k\pi\right)$, $\quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ..$

Пример 3. Представить $Arc\sin\left(\sqrt{2}\right)$ в алгебраической форме.

Решение. Используем формулу (1.5) и находим

$$Arc\sin\left(\sqrt{2}\right) = -iLn\left(i\sqrt{2} + \sqrt{1-\left(\sqrt{2}\right)^2}\right) = -iLn\left(i\sqrt{2} \pm i\right) =$$

$$= -i\left\{\ln\left|i\sqrt{2} \pm i\right| + i\left(\arg\left(i\sqrt{2} \pm i\right) + 2k\pi\right)\right\} = -i\left\{\ln\left(\sqrt{2} \pm 1\right) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right\} =$$

$$= \frac{\pi}{2} + 2k\pi - i\ln\left(\sqrt{2} \pm 1\right), \ k = 0, \pm 1, \pm 2, ..$$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2k\pi - i\ln\left(\sqrt{2} \pm 1\right), \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

1.3. Указания к задачам 4, 5

Чтобы изобразить область, заданную несколькими неравенствами, нужно изобразить области, задаваемые отдельными неравенствами, а затем найти их общую часть. При этом для изображения области, заданной отдельным неравенством, нужно изобразить на плоскости линию, являющуюся границей области, а затем в соответствии со знаком неравенства выбрать ту часть плоскости, в которой выполняется нужное нам неравенство. Для изображения линии, которая является границей области, нужно записать комплексное уравнение границы; для этого надо поставить в исходном неравенстве знак равенства. Затем уравнение границы следует записать параметрической форме, установить по уравнению вид линии и изобразить эту линию на рисунке.

Замечание. При решении задачи 4 следует помнить, что $-\pi < \arg z \le \pi$.

Полезно помнить комплексные уравнения некоторых часто встречающихся линий. Например,

- $|z - z_0| = R$ – уравнение окружности радиуса R с центром в точке z_0,
- $\operatorname{Re} z = a$ – уравнение вертикальной прямой, все точки которой имеют абсциссу $x = a$,
- $\operatorname{Im} z = b$ – уравнение горизонтальной прямой, все точки которой имеют ординату $y = b$,
- $\arg(z - z_0) = \theta$ – уравнение луча, выходящего из точки z_0 и образующего угол θ с положительным направлением действительной оси.

Пример 4. Вычертить область, задаваемую неравенствами: $z \cdot \bar{z} < 16$, $|z - 2i| \ge 2, \ 0 < \arg(z + 2) \le \pi/4$.

Решение. Изобразим область: $z \cdot \bar{z} < 16$. Сначала построим ее границу $z \cdot \bar{z} = 16$. Пусть $z = x + iy$, тогда $\bar{z} = x - iy$, и уравнение границы примет вид: $x^2 + y^2 = 16$. Это окружность радиуса 4 с центром в начале координат. Поскольку точка $z = 0$ удовлетворяет неравенству $z \cdot \bar{z} < 16$, то данное неравенство задает внутренность круга, изображенного на рис. 2а. Граница круга не входит в область, поэтому на рис. 2а она изображена тонкой линией. Границей области $|z - 2i| \ge 2$ является окружность радиуса 2 с центром в точке $2i$. Так как точка $z = 2i$ неравенству $|z - 2i| \ge 2$ не удовлетворяет, то это неравенство описывает внешность круга (см. рис. 2б). При этом граница области выделена жирной линией, поскольку точки границы входят в область. Аналогично неравенство $0 < \arg(z+2) \le \pi/4$ определяет сектор, изображенный на рис. 2в. Точки луча $\arg(z+2) = \pi/4$ содержатся в области, поэтому этот луч на рис. 2в выделен жирной линией. Пересекая построенные области, получим

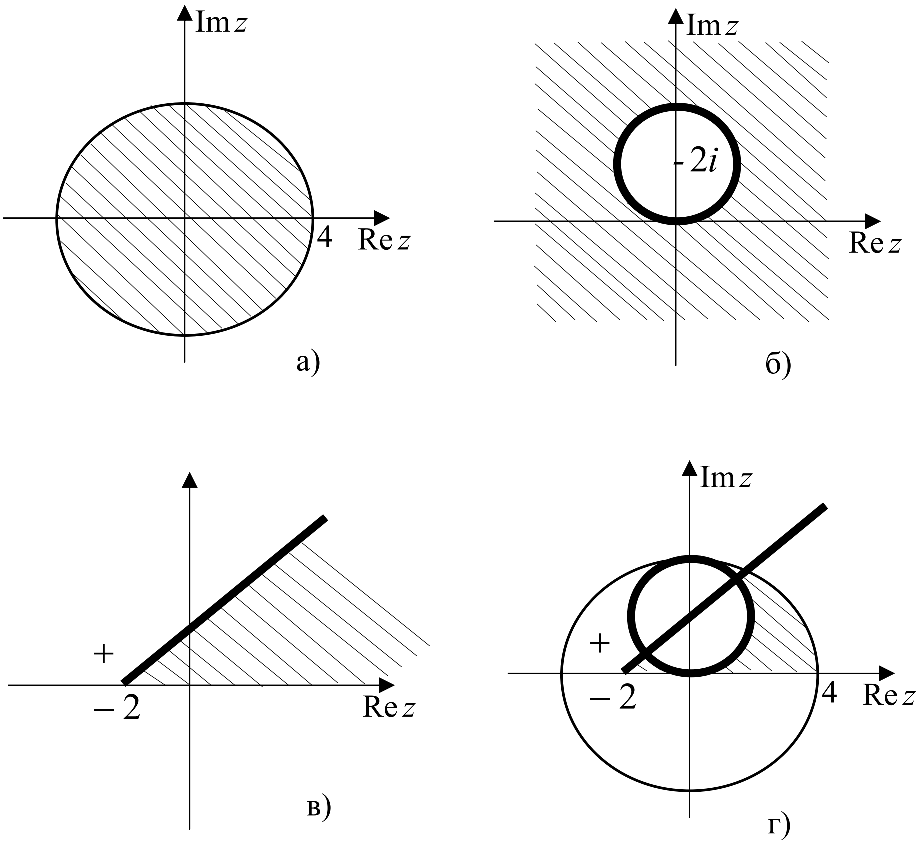

Рис. 2

искомую область, выделенную на рис. 2г штриховкой.

Пример 5. Определить вид кривой $z = 2\,ch3t - i\,sh3t$.

Решение. Запишем параметрическое уравнение кривой. Имеем $x = 2ch3t,\ \ y = -sh3t$. Тогда $ch3t = x/2,\ \ sh3t = -y$, следовательно

$$\left(x/2\right)^2 - \left(-y\right)^2 = ch^2 3t - sh^2 3t = 1.$$

Получили уравнение гиперболы $\dfrac{x^2}{4} - y^2 = 1$. Но так как $x = 2ch3t > 0$, то искомой кривой будет правая ветвь гиперболы.

Ответ: Правая ветвь гиперболы $\dfrac{x^2}{4} - y^2 = 1$.

2. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ

2.1. Указания к задаче 6

Чтобы восстановить аналитическую функцию $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$ по ее действительной $u(x, y)$ (или мнимой $v(x, y)$) части, нужно:

- проверить гармоничность функции $u(x, y)$ (или $v(x, y)$);
- неизвестную функцию выразить через известную путем интегрирования одного из условий Коши-Римана: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ или $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$ по одному из аргументов x или y; при этом неизвестная функция двух аргументов будет найдена с точностью до произвольной функции $A(y)$ или $A(x)$, зависящей от одного аргумента;
- полученное равенство продифференцировать по другому аргументу (y или x) и воспользоваться другим условием Коши-Римана; из полученного соотношения определить функцию $A(y)$ или $A(x)$ с точностью до константы;
- определить константу, исходя из заданного значения функции.

Пример 6. Проверить, что функция $v = \dfrac{y}{x^2 + y^2} + 2y$ является мнимой частью аналитической функции. Восстановить аналитическую в окрестности точки $z_0 = 1$ функцию $f(z)$ по известной мнимой части $v(x, y)$ и значению $f(1) = 4$.

Решение. Проверяем гармоничность функции $v(x, y)$. Находим частные производные

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{2xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{x^2 - y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} + 2,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{6x^2 y - 2y^3}{\left(x^2 + y^2\right)^3}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{2y^3 - 6x^2 y}{\left(x^2 + y^2\right)^3}.$$

Так как выполняется условие: $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$, то $v(x, y)$ – гармоническая функция. Значит, $v(x, y)$ является мнимой частью некоторой аналитической функции.

Восстановим эту аналитическую функцию. Используя второе условие Коши-Римана: $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$, находим

$$u=\int\frac{\partial u}{\partial y}dy=-\int\frac{\partial v}{\partial x}dy=\int\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}dy=-\frac{x}{x^2+y^2}+A(x)\,. \qquad (2.1)$$

Дифференцируем полученное выражение по переменной x

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}+A'(x)$$

и используем первое условие Коши-Римана: $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$. В итоге получаем уравнение

$$\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}+A'(x)=\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}+2,$$

из которого находим $A'(x)=2,\quad A(x)=2x+c$. Подставив $A(x)$ в (2.1), находим $u=-\frac{x}{x^2+y^2}+2x+c$. Следовательно,

$$f(z)=u+i\,v=-\frac{x}{x^2+y^2}+2x+c+i\left(\frac{y}{x^2+y^2}+2y\right)=$$

$$=2\left(x+iy\right)-\frac{x-iy}{x^2+y^2}+c=2z-\frac{1}{z}+c\,.$$

Вычисляем $f(1)=1+c$. С другой стороны, согласно условию задачи $f(1)=4$. Значит, $c=3$.

Ответ: $f(z)=2z-\frac{1}{z}+3$.

2.2. Указания к задаче 7

Если линия интегрирования L задана в комплексной $z-$плоскости параметрически: $z=z(t),\ \ \alpha\le t\le\beta$, то интеграл вычисляется по формуле

$$\int\limits_L f(z)dz=\int\limits_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)dt\,. \qquad (2.2)$$

Если функция $f(z)$ аналитична в некоторой области, и кривая AB лежит в этой области, то

$$\int\limits_{AB} f(z)dz=F(z_B)-F(z_A), \qquad (2.3)$$

где $F(z)-$ первообразная функции $f(z)$.

Пример 7. Вычислить интеграл $\int\limits_{AB} \operatorname{Im} z\, dz$, где $AB-$ отрезок прямой, $z_A = 1,\ z_B = i$.

Решение. Составляем уравнение прямой AB по двум точкам $A(1,0)$ и $B(0,1)$, получим $y = 1 - x$ (см. рис. 3). Значит, уравнение прямой AB в комплексной форме имеет вид: $z = x + i(1 - x)$, причем x меняется от 1 до 0. Находим: $dz = (1 - i)dx,\quad \operatorname{Im} z = 1 - x$. Поэтому согласно формуле (2.2)

$$\int\limits_{AB} \operatorname{Im} z\, dz = \int\limits_{1}^{0} (1 - x)(1 - i)dx = (1 - i)(x - \frac{x^2}{2})\Big|_{1}^{0} = -\frac{1}{2}(1 - i).$$

Ответ: $-0{,}5(1 - i)$.

Пример 7.1. Вычислить интеграл $\int\limits_{L} \frac{\operatorname{Re} z}{z^2} dz,\quad L = \{|z| = 3,\ \operatorname{Re} z \ge 0\}$.

Решение. Линия интегрирования изображена на рис. 4. В интеграле делаем замену: $z = 3e^{i\varphi},\ -\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$. Тогда $dz = 3i\, e^{i\varphi} d\varphi,\ \operatorname{Re} z = 3\cos\varphi$, и интеграл примет вид

$$\int\limits_{L} \frac{\operatorname{Re} z}{z^2} dz = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{9} e^{-2i\varphi} \cdot 3\cos\varphi \cdot 3i\, e^{i\varphi} d\varphi = i \cdot \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-i\varphi} \cos\varphi\, d\varphi =$$

$$= i \cdot \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \varphi\, d\varphi + \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin\varphi \cos\varphi\, d\varphi = \frac{i\pi}{2}.$$

Ответ: $0{,}5\pi\, i$.

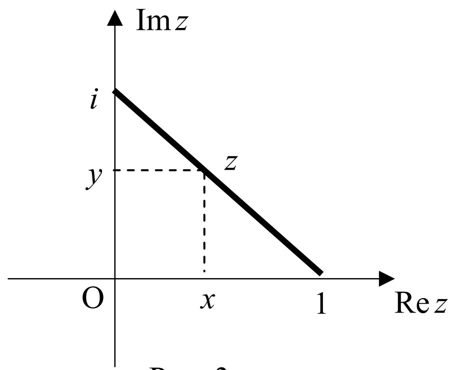

Рис. 3

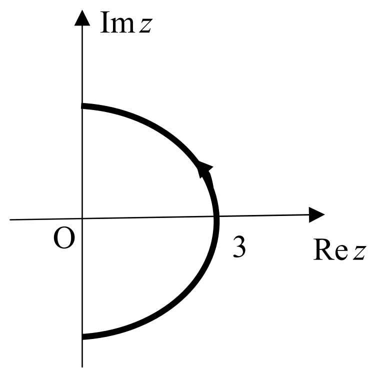

Рис. 4

Пример 7.2. Вычислить интеграл $\int\limits_{AB} \left(z + e^z\right)dz,\quad AB-$ отрезок прямой, $z_A = 1 - i,\quad z_B = 1 + i$.

Решение. Так как функция $f(z) = z + e^z$ имеет первообразную $F(z) = \frac{z^2}{2} + e^z$, то согласно (2.3)

$$\int\limits_{AB} \left(z + e^z\right)dz = \left(\frac{z^2}{2} + e^z\right)\Big|_{1-i}^{1+i} = \left(\frac{(1+i)^2}{2} + e^{1+i}\right) - \left(\frac{(1-i)^2}{2} + e^{1-i}\right) = 2i\left(1 + e\sin 1\right).$$

Ответ: $2i\left(1 + e\sin 1\right)$.

3. ЛОРАНОВСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ФУНКЦИИ

Функция $f(z)$ называется аналитической в точке z_0, если она дифференцируема в окрестности точки z_0, включая саму точку z_0. Конечные точки, в которых функция не является аналитической, называются особыми точками функции. Точка $z = \infty$ всегда считается особой точкой функции $f(z)$. Точка z_0 называется изолированной особой, если отсутствует последовательность особых точек функции, сходящаяся к z_0. В окрестности изолированной особой точки z_0 аналитическую функцию $f(z)$ можно разложить в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\left(z - z_0\right)^k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(z - z_0\right)^k . \tag{3.1}$$

Первый ряд справа в формуле (3.1) называется главной частью, второй ряд – правильной частью ряда Лорана.

При разложении произвольной аналитической функции в ряд Лорана в окрестности изолированной особой точки используют, насколько это возможно, известные разложения элементарных функций в ряд Тейлора. Вот неполный список этих разложений:

$$\frac{1}{1-w} = \sum_{k=0}^{\infty} w^k = 1 + w + w^2 + w^3 + w^4 + \ldots, \qquad |w| < 1, \tag{3.2}$$

$$e^w = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!} = 1 + w + \frac{w^2}{2!} + \frac{w^3}{3!} + \frac{w^4}{4!} + \frac{w^5}{5!} + \ldots, \qquad |w| < \infty, \tag{3.3}$$

$$\cos w = \sum_{k=0}^{\infty} \left(-1\right)^k \frac{w^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{w^2}{2!} + \frac{w^4}{4!} - \frac{w^6}{6!} + \ldots +, \qquad |w| < \infty, \tag{3.4}$$

$$\sin w = \sum_{k=0}^{\infty} \left(-1\right)^k \frac{w^{2k+1}}{(2k+1)!} = w - \frac{w^3}{3!} + \frac{w^5}{5!} - \frac{w^7}{7!} + \ldots, \qquad |w| < \infty, \tag{3.5}$$

$$\ln\left(1 + w\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(-1\right)^{k-1} \frac{w^k}{k} = w - \frac{w^2}{2} + \frac{w^3}{3} - \frac{w^4}{4} + \ldots, \qquad |w| < 1. \tag{3.6}$$

3.1. Указания к задачам 8, 9

Разложение дробно-рациональной функции $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $z - z_0$ нужно вести в следующей последовательности:

- знаменатель дроби разложить на линейные множители, затем степень $(z - z_0)^k$ вынести из числителя и знаменателя (если она там имеется);
- корни знаменателя $z_1, z_2, \ldots, z_n$ занумеровать так, чтобы выполнялись неравенства: $|z_1 - z_0| < |z_2 - z_0| < \ldots < |z_n - z_0|$;
- дробь разложить на простейшие, используя метод неопределенных коэффициентов;
- в каждой из простейших дробей сделать замену $z - z_0 = w$, и вновь полученную дробь вида $\dfrac{A}{a - w}$ разложить по степеням w в областях $|w| < |a|$ и $|w| > |a|$; для этого в знаменателе нужно вначале вынести за скобки большее по модулю слагаемое; и воспользоваться формулой (3.2);
- сделать обратную замену $w = z - z_0$ в каждой из областей, задаваемых неравенствами: $0 < |z - z_0| < |z_1 - z_0|$, $|z_1 - z_0| < |z - z_0| < |z_2 - z_0|$, ..., $|z_{n-1} - z_0| < |z - z_0| < |z_n - z_0|$, $|z_n - z_0| < |z - z_0| < \infty$;
- провести сложение полученных рядов.

Пример 8. Найти все лорановские разложения по степеням z функции $f(z) = \dfrac{6 - 4z}{z^5 - 4z^4 + 3z^3}$.

Решение. Разложим знаменатель дроби на множители и представим исходную дробь в виде

$$f(z) = \frac{1}{z^3} \cdot \frac{6 - 4z}{z^2 - 4z + 3} = -\frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{z-1} + \frac{3}{z-3}\right). \tag{3.7}$$

При этом вторую дробь мы разложили на простейшие, используя метод неопределенных коэффициентов. Теперь, используя стандартное разложение (3.2), разложим обе дроби в скобках по степеням z.

$$\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{1-z} = -\sum_{k=0}^{\infty} z^k, \qquad \text{если } |z| < 1, \tag{3.8}$$

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - z^{-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^{k+1}}, \qquad \text{если } |z| > 1, \tag{3.9}$$

$$\frac{3}{z-3} = -\frac{1}{1 - z/3} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{3^k}, \qquad \text{если } |z| < 3, \tag{3.10}$$

$$\frac{3}{z-3}=\frac{3}{z}\cdot\frac{1}{1-3z^{-1}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3^{k+1}}{z^{k+1}}, \qquad \text{если } |z|>3. \tag{3.11}$$

Рассмотрим несколько случаев. Пусть сначала $|z|<1$. Тогда справедливы разложения (3.8) и (3.10), и на основании формулы (3.7) получим разложение

$$f(z)=-\frac{1}{z^3}\left(-\sum_{k=0}^{\infty}z^k-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{3^k}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{3^k}\right)z^{k-3}=\sum_{k=-3}^{\infty}\left(1+\frac{1}{3^{k+3}}\right)z^k .$$

Пусть теперь $1<|z|<3$. В этом случае справедливы разложения (3.9) и (3.10), и на основании формулы (3.7) получим разложение

$$f(z)=-\frac{1}{z^3}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{z^{k+1}}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{3^k}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{-1}{z^{k+4}}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{k-3}}{3^k}=\sum_{k=4}^{\infty}\frac{-1}{z^k}+\sum_{k=-3}^{\infty}\frac{z^k}{3^{k+3}}.$$

Наконец, пусть $|z|>3$. Теперь справедливы разложения (3.9) и (3.11), и на основании формулы (3.7) получим разложение

$$f(z)=-\frac{1}{z^3}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{z^{k+1}}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3^{k+1}}{z^{k+1}}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(-1-3^{k+1}\right)\frac{1}{z^{k+4}}=\sum_{k=4}^{\infty}\frac{\left(-1-3^{k-3}\right)}{z^k}.$$

Пример 9. Найти все лорановские разложения функции $f(z)=\dfrac{2z}{z^2-9}$ по степеням $z-z_0$, где $z_0=3+i$.

Решение. Исходную дробь разложим на сумму простейших дробей

$$f(z)=\frac{2z}{z^2-9}=\frac{1}{z-3}+\frac{1}{z+3}$$

и сделаем замену $z-3-i=w$, т. е. $z=w+3+i$. Тогда

$$f(z)=\frac{1}{w+i}+\frac{1}{w+6+i}. \tag{3.12}$$

Используя стандартное разложение (3.2), разложим элементарные дроби в формуле (3.12) по степеням w.

$$\frac{1}{w+i}=-i\frac{1}{1-iw}=-i\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(iw)^k=-\sum_{k=0}^{\infty}i^{k+1}w^k, \quad \text{если } |w|<1, \tag{3.13}$$

$$\frac{1}{w+i}=\frac{1}{w}\cdot\frac{1}{1+i/w}=\frac{1}{w}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{i}{w}\right)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-i)^k}{w^{k+1}}, \quad \text{если } |w|>1, \tag{3.14}$$

$$\frac{1}{w+6+i}=\frac{1}{6+i}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{w}{6+i}}=\frac{1}{6+i}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{w}{6+i}\right)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k w^k}{(6+i)^{k+1}}, \tag{3.15}$$

$$\text{если } |w|<|6+i|=\sqrt{37},$$

$$\frac{1}{w+6+i}=\frac{1}{w}\cdot\frac{1}{1+\frac{6+i}{w}}=\frac{1}{w}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{6+i}{w}\right)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(6+i)^k}{w^{k+1}}, \qquad (3.16)$$

если $|w|>\sqrt{37}$.

Рассмотрим несколько случаев. Пусть сначала $|w|<1$, тогда справедливы разложения (3.13) и (3.15). На основании формулы (3.12) получим разложение

$$f(z)=-\sum_{k=0}^{\infty}i^{k+1}w^k+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k w^k}{(6+i)^{k+1}}=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^k}{(6+i)^{k+1}}-i^{k+1}\right]w^k .$$

Сделав обратную подстановку $w=z-3-i$, получим разложение

$f(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^k}{(6+i)^{k+1}}-i^{k+1}\right](z-3-i)^k$, справедливое для $|z-3-i|<1$.

Пусть теперь $1<|w|<\sqrt{37}$. В этом случае справедливы разложения (3.14) и (3.15). Подставив эти разложения в формулу (3.12) и сделав обратную подстановку $w=z-3-i$, получим следующее разложение:

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-i)^k}{w^{k+1}}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k w^k}{(6+i)^{k+1}}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-i)^{k-1}}{(z-3-i)^k}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(z-3-i)^k}{(6+i)^{k+1}},$$

справедливое для $1<|z-3-i|<\sqrt{37}$.

Наконец, пусть $|w|>\sqrt{37}$. Теперь справедливы разложения (3.14) и (3.16); на основании формулы (3.12) получим разложение

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-i)^k}{w^{k+1}}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(6+i)^k}{w^{k+1}}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}\left[i^{k-1}+(6+i)^{k-1}\right]}{w^k}.$$

Сделав обратную подстановку $w=z-3-i$, получим следующее разложение:

$f(z)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}\left(i^{k-1}+(6+i)^{k-1}\right)}{(z-3-i)^k}$, справедливое для $|z-3-i|>\sqrt{37}$.

3.2. Указания к задаче 10

Для разложения функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_0 сначала делают замену $z-z_0=w$, затем функцию $f(z_0+w)$ преобразуют так, чтобы она была представлена по аргументу w или $\frac{1}{w}$ в виде линейной комбинации функций из списка (3.2) – (3. 6). Затем каждую функцию линейной комбинации заменяют ее рядом Тейлора и группируют слагаемые с одинаковыми степенями w. В полученном ряде Лорана по степеням w делают обратную подстановку $w = z - z_0$.

Пример 10. Функцию $f(z) = z\cos\dfrac{z}{z+1}$ разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = -1$.

Решение. В исходной функции сделаем замену $z + 1 = w$, т. е. $z = w - 1$. Исходная функция преобразуется так

$$z\cos\frac{z}{z+1} = (w-1)\cos\left(1 - \frac{1}{w}\right) = (w-1)\cos 1\cdot\cos\frac{1}{w} + (w-1)\sin 1\cdot\sin\frac{1}{w}. \qquad (3.17)$$

Функции $\cos\dfrac{1}{w}$, $\sin\dfrac{1}{w}$ разложим в ряды Тейлора по формулам (3.4), (3.5)

$$\cos\frac{1}{w} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(2k)!}\cdot\frac{1}{w^{2k}}, \qquad \sin\frac{1}{w} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(2k+1)!}\cdot\frac{1}{w^{2k+1}}.$$

Эти разложения подставим в формулу (3.17) и получим

$$z\cos\frac{z}{z+1} = (w-1)\cos 1\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\cdot\frac{1}{w^{2k}} + (w-1)\sin 1\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\cdot\frac{1}{w^{2k+1}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\cdot\frac{\cos 1}{w^{2k-1}} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\cdot\frac{\cos 1}{w^{2k}} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\cdot\frac{\sin 1}{w^{2k}} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\cdot\frac{\sin 1}{w^{2k+1}}.$$

От первого ряда отделим нулевое слагаемое, затем в оставшейся части ряда сделаем замену индекса суммирования: $j = k - 1$. В итоге первый ряд преобразуется к виду

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\cdot\frac{\cos 1}{w^{2k-1}} = w\cos 1 + \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{j+1}}{(2j+2)!}\cdot\frac{\cos 1}{w^{2j+1}} = w\cos 1 + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+2)!}\cdot\frac{\cos 1}{w^{2k+1}}.$$

В последнем преобразовании индекс суммирования j мы заменили на k. Теперь в разложении функции $z\cos\dfrac{z}{z+1}$ сложим первый и четвертый, второй и третий ряды; в итоге получим

$$z\cos\frac{z}{z+1} = w\cos 1 + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}[\cos 1 + (2k+2)\sin 1]}{(2k+2)!}\cdot\frac{1}{w^{2k+1}} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k[\sin 1 - (2k+1)\cos 1]}{(2k+1)!}\cdot\frac{1}{w^{2k}}.$$

Сделав обратную замену $w = z + 1$, получим разложение исходной функции

$$f(z)=(z+1)\cos 1+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}\left[\cos 1+(2k+2)\sin 1\right]}{(2k+2)!}\cdot\frac{1}{(z+1)^{2k+1}}+$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k}\left[\sin 1-(2k+1)\cos 1\right]}{(2k+1)!}\cdot\frac{1}{(z+1)^{2k}}.$$

3.3. Указания к задачам 11, 12

В зависимости от количества членов в главной части ряда Лорана (3.1) особые точки делятся на три типа: устранимые особые, полюса и существенно особые. Если главная часть ряда Лорана (3.1) отсутствует, то z_0 – устранимая особая точка. Если главная часть ряда Лорана содержит конечное число членов: $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{c_k}{(z-z_0)^k}$, то z_0 – полюс порядка n. Наконец, если главная часть ряда Лорана содержит бесконечное число членов, то z_0 – существенно особая точка.

Тип особой точки можно определить также с помощью предела следующим образом:

- если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$ – конечен, то z_0 – устранимая особая точка;
- если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$, то z_0 – полюс;
- если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ не существует, то z_0 – существенно особая точка.

При этом порядок полюса можно определить, исходя из следующих условий: если

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^n f(z)=A \text{ – конечен, но } \lim_{z\to z_0}(z-z_0)^{n-1} f(z)=\infty,$$

то z_0 – полюс порядка n.

При определении порядка полюса часто полезны следующие теоремы.

Теорема 3.1. Функция $f(z)$ имеет в точке z_0 полюс порядка n тогда и только тогда, когда функция $g(z)=1/f(z)$ имеет в точке z_0 нуль порядка n.

Для определения порядка нуля функции $g(z)$ можно использовать следующую теорему.

Теорема 3.2. Точка z_0 является нулем n-го порядка функции $g(z)$, если выполняется одно из следующих эквивалентных условий:

- $g(z_0)=g'(z_0)=g''(z_0)=\ldots=g^{(n-1)}(z_0)=0$*, но* $g^{(n)}(z_0)\neq 0$*;*
- *функцию $g(z)$ можно представить в виде $g(z)=(z-z_0)^n h(z)$, причем $h(z_0)\neq 0,\infty$.*

При определении порядка полюса можно также использовать теорему.

Теорема 3.3. Пусть функция $f(z)$ *представлена в виде:* $f(z)=\dfrac{g(z)}{h(x)}$, *причем в точке* z_0 *функция* $g(z)$ *имеет нуль порядка* n, *а функция* $h(z)-$ *нуль порядка* k. *Тогда:*

- *если* $n \geq k$, *то* z_0 *– устранимая особая точка функции* $f(z)$;
- *если* $n < k$, *то* z_0 *– полюс порядка* $k-n$ *функции* $f(z)$.

Пример 11. Определить тип особой точки $z=0$ для функций: а) $ze^{\frac{1}{z}}$, б) $\dfrac{e^{z^2}-1}{\cos z^5-1}$.

Решение. а) В разложении (3.3) функции e^w положим $w=\dfrac{1}{z}$, затем полученный ряд умножим на z. В итоге будем иметь

$$ze^{\frac{1}{z}}=z\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\cdot\frac{1}{z^k}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\cdot\frac{1}{z^{k-1}}=z+1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+1)!}\cdot\frac{1}{z^k}.$$

Главная часть ряда Лорана содержит бесконечное число членов, значит, $z=0$ – существенно особая точка.

б) В разложении (3.3) функции e^w положим $w=z^2$, затем из полученного ряда вычтем 1. Тогда числитель $g(z)$ исходной функции можно представить в виде

$$g(z)=e^{z^2}-1=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{k!}-1=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^{2k}}{k!}=z^2\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\frac{z^{2j}}{(j+1)!}=z^2\varphi(z), \qquad (3.18)$$

где $\varphi(z)=\sum\limits_{j=0}^{\infty}\dfrac{z^{2j}}{(j+1)!}$. Отметим, что при переходе к последнему ряду в (3.18) мы сделали замену индекса суммирования: $k=j+1$. Поскольку $\varphi(0)=1\neq 0$, то на основе представления (3.18) точка $z=0$ для функции $g(z)$ является нулем порядка 2.

Далее в разложении (3.4) функции $\cos w$ положим $w=z^5$ и из полученного ряда вычтем единицу. В итоге знаменатель $h(z)$ исходной функции можно представить в виде

$$h(z)=\cos z^5-1=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\left(z^5\right)^{2k}}{(2k)!}-1=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{10k}}{(2k)!}=$$

$$=z^{10}\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{j+1}z^{10j}}{(2j+2)!}=z^{10}\psi(z), \qquad (3.19)$$

где $\psi(z)=\sum\limits_{j=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{j+1}z^{10j}}{(2j+2)!}$. Отметим, что при переходе к последнему ряду мы снова сделали замену индекса суммирования: $k=j+1$. Поскольку $\psi(0)=-{}^1\!/_2\neq 0$, то на основе представления (3.19) точка $z=0$ для функции $h(z)$ является нулем порядка 10. Значит, применяя теорему 3.3, получаем, что исходная функция $\dfrac{e^{z^2}-1}{\cos z^5-1}$ в точке $z=0$ имеет полюс порядка 8.

Ответ: а) существенно особая точка, б) полюс порядка 8.

Пример 12. Для данных функций найти изолированные особые точки и определить их тип: а) $\dfrac{1}{e^z+4}$, б) $\dfrac{1}{\cos z-1}+\dfrac{2}{z^2}$, в) $e^{\frac{1}{z}}ctg\dfrac{1}{z}$, г) $ze^{1/z}\sin z$.

Решение. а) Особыми точками функции $\dfrac{1}{e^z+4}$ будут точка $z=\infty$ и нули знаменателя e^z+4, т. е. точки $z_n=\ln 4+\pi(2n+1)i,\ n\in Z$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=\infty$, точка $z=\infty$ не является изолированной. В точках z_n производная $\left(e^z+4\right)'$ отлична от 0, поэтому точки z_n являются нулями первого порядка знаменателя e^z+4, следовательно, полюсами первого порядка исходной функции.

б) Особыми точками функции $\dfrac{1}{\cos z-1}+\dfrac{2}{z^2}$ будут точка $z=\infty$ и нули знаменателей z^2 и $\cos z-1$, т. е. точки $z_n=2\pi n,\ n\in Z$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=\infty$, точка $z=\infty$ не является изолированной.

Далее в окрестностях точек z_n исходная функция представима в виде: $\dfrac{2\left(\cos z-1+0{,}5z^2\right)}{z^2(\cos z-1)}$, т. е. в виде отношения: $\dfrac{g(z)}{h(x)}$, где $g(z)=\dfrac{2\left(\cos z-1+0{,}5z^2\right)}{z^2}$, $h(z)=\cos z-1$. В точках $z_n\neq 0$ имеем: $g(z_n)\neq 0,\ h(z_n)=h'(z_n)=0,\ h''(z_n)\neq 0$. Значит, согласно теореме 3.3 точки z_n $(n=\pm 1,\pm 2,...)$ – полюса второго порядка.

В окрестности точки $z_0=0$ функцию $\cos z$ согласно формуле (3.4) можно представить в виде: $\cos z=1-0{,}5z^2+\dfrac{1}{4!}z^4+o(1)z^4$, где $o(1)-$ бесконечно малая функция. Поэтому для исходной функции

$$\lim_{z\to 0}\frac{2\left(\cos z-1+0{,}5z^2\right)}{z^2\left(\cos z-1\right)}=\lim_{z\to 0}\frac{2\left(1-0{,}5z^2+\frac{1}{4!}z^4+o(1)z^4-1+0{,}5z^2\right)}{z^2\left(1-0{,}5z^2+\frac{1}{4!}z^4+o(1)z^4-1\right)}=$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{\frac{1}{12}z^4+o(1)z^4}{-0{,}5z^4+\frac{1}{4}z^6+o(1)z^6}=-\frac{1}{6}.$$

Значит, $z_0=0$ – устранимая особая точка.

в) Особыми точками функции $e^{\frac{1}{z}}ctg\frac{1}{z}$ будут точки $0,\infty$ и точки, в которых $ctg\frac{1}{z}$ не существует, т. е. точки $z_n={1}/{\pi n},\, n\in Z\setminus\{0\}$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=0$, особая точка $z=0$ не является изолированной.

Для исследования точки $z=\infty$ сделаем замену $z^{-1}=w$, тогда исходная функция примет вид: $\frac{g(w)}{h(w)}$, где $g(w)=e^w\cos w,\ h(w)=\sin w$. На основании теоремы 3.3 точка $w=0$ будет полюсом первого порядка функции $\frac{g(w)}{h(w)}$, поскольку $g(0)=1\neq 0$, $h(0)=0,\ h'(0)=1\neq 0$. Значит, точка $z=\infty$ будет полюсом первого порядка исходной функции.

Точки $w_n=\pi n,\, n\in Z\setminus\{0\}$ являются полюсами первого порядка функции $\frac{g(w)}{h(w)}$, так как $g(w_n)\neq 0$, $h(w_n)=0,\ h'(w_n)\neq 0$. Значит, точки $z_n={1}/{\pi n}$, $n\in Z\setminus\{0\}$ будут полюсами первого порядка исходной функции.

г) Исходная функция имеет особые точки 0 и ∞. В окрестности точки $z=\infty$ представим исходную функцию в виде: $ze^{1/z}\sin z=\frac{\sin z}{z}\cdot z^2e^{1/z}$. При этом $\lim\limits_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}=1$, а предел функции $z^2e^{1/z}$ в точке $z=0$ не существует, поскольку в силу лорановского разложения: $z^2e^{1/z}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^{2-k}$ точка $z=0$ является существенно особой точкой этой функции. Значит, $\lim\limits_{z\to 0} ze^{1/z}\sin z$ не существует, и $z=0$ будет существенно особой точкой исходной функции.

В окрестности точки $z=\infty$ сделаем замену $z^{-1}=w$, тогда исходная функция примет вид: $ze^{1/z}\sin z = e^w \cdot \frac{1}{w}\sin\frac{1}{w}$. Далее $\lim\limits_{w\to 0} e^w = 1$, а $\lim\limits_{w\to 0}\frac{1}{w}\sin\frac{1}{w}$ не существует, поскольку $w=0$ – существенно особая точка функции $\frac{1}{w}\sin\frac{1}{w}$. Поэтому $\lim\limits_{w\to 0} e^w\frac{1}{w}\sin\frac{1}{w}$ не существует, и $w=0$ – существенно особая точка функции $e^w\frac{1}{w}\sin\frac{1}{w}$. Следовательно, $z=\infty$ – существенно особая точка исходной функции.

Ответ: а) точки $z_n = \ln 4 + \pi(2n+1)i,\ n\in Z$ – полюса первого порядка, б) точки $z_n = 2\pi n,\ n\in Z\setminus\{0\}$ – полюса второго порядка, точка $z_0 = 0$ – устранимая особая, в) точки $z_n = 1/\pi n,\ n\in Z\setminus\{0\},\ z=\infty$ – полюса первого порядка, г) точки $z=0,\ z=\infty$ – существенно особые.

4. ВЫЧЕТЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Важнейшим понятием теории аналитических функций является понятие вычета. Известно, что если функцию $f(z)$ разложить в ряд Лорана (3.1) в окрестности изолированной особой точки z_0, то ее вычет в точке z_0 равен коэффициенту ряда Лорана перед степенью $(z-z_0)^{-1}$, т. е.

$$res_{z_0} f(z) = c_1. \tag{4.1}$$

Ясно, что в устранимой особой точке вычет всегда равен нулю.

Если z_0 – полюс порядка n функции $f(z)$, то вычет можно найти по формуле

$$res_{z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!}\cdot\lim_{z\to z_0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left((z-z_0)^n f(z)\right). \tag{4.2}$$

В частности, если z_0 – полюс 1-го порядка функции $f(z)$, то вычет находится по формуле

$$res_{z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z). \tag{4.3}$$

Если же в случае полюса 1-го порядка функция $f(z)$ представлена в виде $f(z)=\frac{g(z)}{h(z)}$, причем $g(z_0)\neq 0$, то вычет можно найти и по формуле

$$res_{z_0} f(z) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

4.1. Указания к задачам 13 – 16

Если подынтегральная функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D за исключением конечного числа особых точек, а замкнутый контур Γ лежит внутри D и не содержит особых точек, то контурный интеграл можно найти по формуле

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} res_{z_k} f(z), \tag{4.4}$$

где $z_1, z_2, \ldots, z_n$ – особые точки $f(z)$, попавшие внутрь контура Γ. Поэтому для вычисления контурного интеграла по формуле (4.4) нужно:

- найти все особые точки функции $f(z)$;
- оставить в рассмотрении только те особые точки, которые попали внутрь контура Γ, остальные – отбросить;
- определить тип каждой оставленной точки и найти в ней вычет;
- найденные вычеты подставить в формулу (4.4).

Пример 13. Вычислить интегралы:

$$\text{а)} \oint_{|z-i|=2} \frac{dz}{z^2\left(z^2+4\right)}, \qquad \text{б)} \oint_{|z-1|=1} \frac{2z^2-\pi z}{\cos z}dz.$$

Решение. а) Контур интегрирования – окружность радиуса 2 с центром в точке i (см. рис. 5). Особые точки функции: $z_1 = 0$ – полюс второго порядка, $z_2 = 2i$, $z_3 = -2i$ – полюса первого порядка. Точка $z_3 = -2i$ лежит вне контура интегрирования, поэтому ее отбрасываем. В итоге формула (4.4) принимает вид

$$\oint_{|z-i|=2} \frac{dz}{z^2\left(z^2+4\right)} = 2\pi i \cdot \left[res_{z_1} \frac{1}{z^2\left(z^2+4\right)} + res_{z_2} \frac{1}{z^2\left(z^2+4\right)} \right]. \tag{4.5}$$

Вычет в точке z_1 находим по формуле (4.2).

$$res_{z_1} \frac{1}{z^2\left(z^2+4\right)} = \frac{1}{1!} \lim_{z\to 0} \left(z^2 \frac{1}{z^2\left(z^2+4\right)} \right)' = \lim_{z\to 0} \frac{-2z}{\left(z^2+4\right)^2} = 0.$$

(Знак $(.)'$ в предыдущей формуле означает производную по переменной z.)

Вычет в точке z_2 находим по формуле (4.3).

$$res_{z_2} \frac{1}{z^2\left(z^2+4\right)} = \lim_{z\to 2i} \left((z-2i) \frac{1}{z^2\left(z^2+4\right)} \right) = \lim_{z\to 2i} \frac{1}{z^2(z+2i)} = \frac{i}{16}.$$

Найденные значения вычетов подставляем в формулу (4.5) и получаем

$$\oint_{|z-i|=2} \frac{dz}{z^2\left(z^2+4\right)} = 2\pi i \cdot \frac{i}{16} = -\frac{\pi}{8}.$$

б) Контур интегрирования – окружность радиуса 1 с центром в точке 1 (см. рис. 6). Особые точки функции: $z_k = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$. Внутри контура интегрирования лежит только одна точка $z_0 = \frac{\pi}{2}$. Она является устранимой особой точкой, поэтому вычет в ней равен 0. Значит, согласно формуле (4.4) контурный интеграл равен 0.

Ответ: а) $-\pi/8$, б) 0.

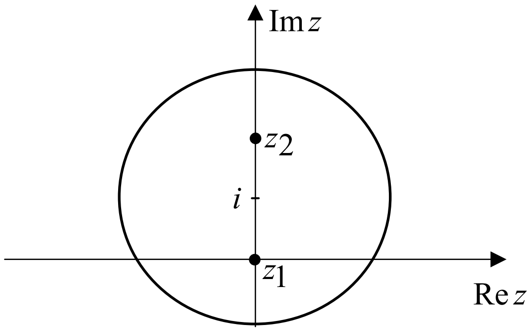

Рис. 5

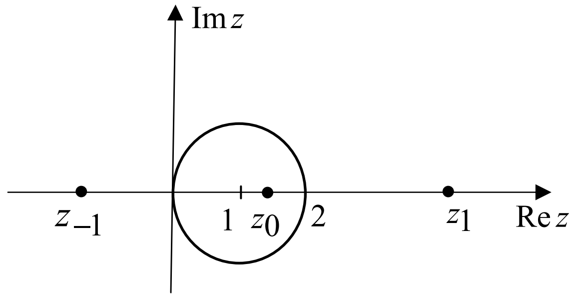

Рис. 6

Пример 14. Вычислить интегралы:

а) $\oint\limits_{|z|=\pi} \frac{1-\cos z^3}{z^5}dz$, б) $\oint\limits_{|z|=e} \frac{z^5 - 2z^4 + 4z^3 + 3z^2 + 5z - 6}{z^2}dz$.

Решение. а) Контур интегрирования – окружность радиуса π с центром в начале координат. Особая точка подынтегральной функции $z = 0$; она лежит внутри контура интегрирования. Значит, согласно формуле (4.4)

$$\oint\limits_{|z|=\pi} \frac{1-\cos z^3}{z^5}dz = 2\pi i \cdot res_0 \frac{1-\cos z^3}{z^5}. \qquad (4.6)$$

Найдем вычет подынтегральной функции в точке $z = 0$. Согласно формуле (3.4) имеем $\cos z^3 = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{6k}}{(2k)!}$. Следовательно,

$$\frac{1-\cos z^3}{z^5} = -\frac{1}{z^5}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{z^{6k}}{(2k)!} = \frac{z}{2!} - \frac{z^7}{4!} + \frac{z^{13}}{6!} - \frac{z^{19}}{8!} + \ldots$$

Из полученного разложения видим, что $z = 0$ – устранимая особая точка, поэтому вычет в ней равен 0. Значит, на основании формулы (4.6) контурный интеграл равен 0.

б) Контур интегрирования – окружность радиуса e с центром в начале координат. Особая точка подынтегральной функции $z = 0$; она лежит внутри контура интегрирования. Значит, согласно формуле (4.4)

$$\oint\limits_{|z|=e} \frac{z^5-2z^4+4z^3+3z^2+5z-6}{z^2}dz = 2\pi i\cdot res_0 \frac{z^5-2z^4+4z^3+3z^2+5z-6}{z^2}.$$

Подынтегральная функция в точке $z=0$ имеет следующее разложение в ряд Лорана:

$$\frac{z^5-2z^4+4z^3+3z^2+5z-6}{z^2} = z^3-2z^2+4z+3+\frac{5}{z}-\frac{6}{z^2}.$$

Теперь согласно формуле (4.1) искомый вычет равен коэффициенту перед $\frac{1}{z}$, т. е. равен 5. Значит, контурный интеграл равен $2\pi i\cdot 5 = 10\pi i$.

Ответ: а) 0, б) $10\pi i$.

Пример 15. Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\cos z - chz}{z^2 shz}dz$.

Решение. Контур интегрирования – окружность радиуса 2 с центром в начале координат. Особые точки подынтегральной функции $z_k=\pi ki,\ k=0,\pm1,\pm2,\ldots,$ причем внутри контура интегрирования лежит лишь точка $z_0=0$. Значит, согласно формуле (4.4)

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{\cos z - chz}{z^2 shz}dz = 2\pi i\cdot res_{z_0}\frac{\cos z - chz}{z^2 shz}.$$

Числитель $\cos z - chz$ подынтегральной функции в точке $z_0=0$ имеет нуль второго порядка, а знаменатель $z^2 shz$ – нуль третьего порядка; поэтому согласно теореме 3.3 предыдущего раздела подынтегральная функция в точке $z_0=0$ имеет полюс первого порядка. Применив формулу (4.3), находим

$$res_{z_0}\frac{\cos z - chz}{z^2 shz} = \lim_{z\to0} z\cdot\frac{\cos z - chz}{z^2 shz} = \left| \ shz \sim z \ \right| = \lim_{z\to0}\frac{\cos z - chz}{z^2} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{z\to0}\frac{(\cos z - chz)'}{\left(z^2\right)'} = \lim_{z\to0}\frac{-\sin z - shz}{2z} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{z\to0}\frac{-\cos z - chz}{2} = -1.$$

Следовательно, исходный интеграл равен $-2\pi i$.

Ответ: $-2\pi i$.

Пример 16. Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z-2i|=3}\left(\frac{2\pi}{e^{0,5\pi z}+1}+\frac{\sin\left(\dfrac{\pi z}{2+2i}\right)}{(z-1-i)^2(z-1+i)}\right)dz\ .$$

Решение. Особыми точками подынтегральной функции будут $1 \pm i$ и корни уравнения $e^{0,5\pi z} + 1 = 0$, т. е. точки $z_k = (4k+2)i$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Контур интегрирования – окружность радиуса 3 с центром в точке $2i$, внутри контура окажутся только две особых точки $1+i$ и $2i$. Поэтому согласно формуле (4.4) исходный интеграл (обозначим его через Q) равен

$$Q = 2\pi i \cdot \{res_{1+i} f(z) + res_{2i} f(z)\}, \tag{4.7}$$

где

$$f(z) = \frac{2\pi}{e^{0,5\pi z} + 1} + \frac{\sin\left(\dfrac{\pi z}{2+2i}\right)}{(z-1-i)^2 (z-1+i)}.$$

В точке $1+i$ функция $\dfrac{2\pi}{e^{0,5\pi z}+1}$ аналитична, и ее вычет равен 0, а функция $\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi z}{2+2i}\right)}{(z-1-i)^2(z-1+i)}$ имеет полюс второго порядка. Поэтому

$$res_{1+i} f(z) = res_{1+i} \frac{2\pi}{e^{0,5\pi z}+1} + res_{1+i} \frac{\sin\left(\dfrac{\pi z}{2+2i}\right)}{(z-1-i)^2(z-1+i)} =$$

$$= \frac{1}{1!} \lim_{z \to 1+i} \left(\frac{\sin\left(\dfrac{\pi z}{2+2i}\right)}{(z-1+i)} \right)' = \lim_{z \to 1+i} \frac{\cos\left(\dfrac{\pi z}{2+2i}\right) \cdot \dfrac{\pi}{2+2i} \cdot (z-1+i) - \sin\left(\dfrac{\pi z}{2+2i}\right)}{(z-1+i)^2} =$$

$$= \frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) \cdot \dfrac{\pi}{2+2i} \cdot (2i) - \sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)}{(2i)^2} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

В точке $2i$ функция $\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi z}{2+2i}\right)}{(z-1-i)^2(z-1+i)}$ аналитична, и ее вычет равен 0, а функция $\dfrac{2\pi}{e^{0,5\pi z}+1}$ имеет полюс первого порядка. Поэтому

$$res_{2i} f(z) = res_{2i} \frac{2\pi}{e^{0,5\pi z}+1} + res_{2i} \frac{\sin\left(\dfrac{\pi z}{2+2i}\right)}{(z-1-i)^2(z-1+i)} = \lim_{z \to 2i} \left(\frac{(z-2i) \cdot 2\pi}{e^{0,5\pi z}+1} \right) =$$

$$=\left(\frac{0}{0}\right)=2\pi\cdot\lim_{z\to 2i}\frac{\left(z-2i\right)'}{\left(e^{0,5\pi z}+1\right)'}=\lim_{z\to 2i}\frac{2\pi}{0,5\pi\cdot e^{0,5\pi z}}=\frac{4}{e^{i\pi}}=-4\,.$$

Подставив найденные вычеты в формулу (4.7), найдем величину исходного интеграла $Q=2\pi\, i\cdot\left(0,25-4\right)=-7,5\pi\, i$.

Ответ: $-7,5\pi\, i$.

4.2. Указания к задачам 17, 18

Для вычисления интеграла вида $\int\limits_0^{2\pi}R(\cos t,\sin t)dt$, где $R(u,v)$ – рациональная функция переменных u,v, вводят новую переменную z по формуле $z=e^{it}$. Тогда $dz=e^{it}idt=zidt$, откуда $dt=\frac{dz}{iz}$. По формулам Эйлера

$$\cos t=\frac{1}{2}\left(e^{it}+e^{-it}\right)=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\quad \sin t=\frac{1}{2i}\left(e^{it}-e^{-it}\right)=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right).$$

Кроме того отрезок интегрирования $0\le t\le 2\pi$ перейдет в контур интегрирования $|z|=1$, обходимый против хода часовой стрелки. В итоге исходный интеграл преобразуется к виду

$$\int\limits_0^{2\pi}R(\cos t,\sin t)dt=\oint\limits_{|z|=1}R\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)\frac{dz}{iz}=\oint\limits_{|z|=1}R_1(z)dz,$$

где $R_1(z)$ – новая рациональная функция переменной z. Эта функция будет аналитической во всей z-плоскости, за исключением конечного числа изолированных особых точек. Для вычисления полученного контурного интеграла следует использовать методику, изложенную в пункте 4.1.

Пример 17. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{2\pi}\frac{dt}{5+3\cos t}$.

Решение. Сделаем замену переменной по формуле $z=e^{it}$. Тогда $dt=\frac{dz}{iz}$, $\cos t=\frac{1}{2}\left(e^{it}+e^{-it}\right)=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$, и исходный интеграл примет вид

$$\oint\limits_{|z|=1}\frac{dz}{iz\left(5+\frac{3}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)}=\frac{2}{i}\oint\limits_{|z|=1}\frac{dz}{3z^2+10z+3}.$$

Особыми точками подынтегральной функции являются $z_1 = -\dfrac{1}{3}$, $z_2 = -3$. Внутри окружности $|z| = 1$ лежит только точка z_1, являющаяся полюсом первого порядка. Поэтому

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{5+3\cos t} = \frac{2}{i} \cdot 2\pi i \cdot res_{z_1} \frac{1}{3z^2+10z+3} = 4\pi \cdot \lim_{z \to -\frac{1}{3}} \frac{z+\frac{1}{3}}{3z^2+10z+3} = 4\pi \cdot \frac{1}{8} = \frac{\pi}{2}.$$

Ответ: $\pi/2$.

Пример 18. Вычислить интеграл $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(5+3\sin t)^2}$.

Решение. Сделаем замену переменной по формуле $z = e^{it}$. Тогда $dt = \dfrac{dz}{iz}$, $\sin t = \dfrac{1}{2i}\left(e^{it} - e^{-it}\right) = \dfrac{1}{2i}\left(z - \dfrac{1}{z}\right)$, и исходный интеграл примет вид

$$\oint_{|z|=1} \frac{dz}{iz\left(5+\frac{3}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)^2} = 4i \oint_{|z|=1} \frac{zdz}{\left(3z^2+10iz-3\right)^2}.$$

Особыми точками подынтегральной функции являются $z_1 = -\frac{1}{3}i$, $z_2 = -3i$. Внутри окружности $|z| = 1$ лежит только точка z_1, являющаяся полюсом второго порядка. Поэтому исходный интеграл равен

$$4i \cdot 2\pi i \cdot res_{z_1} \frac{z}{\left(3z^2+10iz-3\right)^2} = -8\pi \cdot \lim_{z \to -\frac{1}{3}i} \left(\frac{\left(z+\frac{1}{3}i\right)^2 z}{9\left(z+\frac{1}{3}i\right)^2 (z+3i)^2} \right)' =$$

$$= -\frac{8\pi}{9} \cdot \lim_{z \to -\frac{1}{3}i} \frac{-z+3i}{(z+3i)^3} = -\frac{8\pi}{9} \cdot \frac{\frac{10}{3}i}{-\frac{512}{27}i} = \frac{5\pi}{32}.$$

Ответ: $5\pi/32$.

4.3. Указания к задачам 19, 20

Пусть $R(z)=\dfrac{P_m(z)}{Q_n(z)}$ – рациональная функция комплексного аргумента $z=x+iy$, $P_m(z)$, $Q_n(z)$ – многочлены степени m и n соответственно. Предположим также, что $R(z)$ непрерывна на действительной оси $z=x$. Тогда:

- если $n-m\geq 2$, то

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x)dx = 2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{n} res_{z_k} R(z); \tag{4.8}$$

- если $n-m\geq 1,\quad \lambda>0$, то

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x)\cos\lambda x dx = \mathrm{Re}\left(2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{n} res_{z_k} R(z)e^{i\lambda z}\right), \tag{4.9}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x)\sin\lambda x dx = \mathrm{Im}\left(2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{n} res_{z_k} R(z)e^{i\lambda z}\right). \tag{4.10}$$

Следует помнить, что в формулах (4.8) – (4.10) вычеты берутся только по тем полюсам функции $R(z)$, которые лежат в верхней полуплоскости $\mathrm{Im}\, z>0$.

Пример 19. Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2+4\right)^2\left(x^2+1\right)}$.

Решение. Имеем $R(z)=\dfrac{1}{\left(z^2+4\right)^2\left(z^2+1\right)}$. Функция $R(z)$ непрерывна на всей действительной оси $z=x$ и $m=0$, $n=6$, т. е. $n-m\geq 2$. Поэтому для вычисления интеграла можно использовать формулу (4.8).

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2+4\right)^2\left(x^2+1\right)} = 2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{n} res_{z_k} R(z),$$

причем вычеты берутся только по тем полюсам, которые лежат в верхней полуплоскости $\mathrm{Im}\, z>0$. Функция $R(z)$ имеет в верхней полуплоскости два полюса: простой полюс в точке $z=i$ и полюс второго порядка в точке $z=2i$. Найдем вычеты в этих точках.

$$res_i R(z)=\lim_{z\to i}\frac{z-i}{\left(z^2+4\right)^2\left(z^2+1\right)}=\lim_{z\to i}\frac{1}{\left(z^2+4\right)^2(z+i)}=-\frac{i}{18},$$

$$res_{2i}R(z)=\lim_{z\to 2i}\left(\frac{(z-2i)^2}{(z^2+4)^2(z^2+1)}\right)'=\lim_{z\to 2i}\left(\frac{1}{(z+2i)^2(z^2+1)}\right)'=$$

$$=\lim_{z\to 2i}\left(\frac{-(4z^2+4iz+2)}{(z+2i)^3(z^2+1)^2}\right)=\frac{11i}{288}.$$

Следовательно $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+4)^2(x^2+1)}=2\pi i\left(-\frac{i}{18}+\frac{11i}{288}\right)=\frac{5\pi}{144}$.

Ответ: $5\pi/144$.

Пример 20. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-1)\sin 3x\,dx}{x^2-2x+5}$.

Решение. Имеем $R(z)=\frac{z-1}{z^2-2z+5}$ и воспользуемся формулой (4.10). Поскольку $\lambda=3$, то согласно формуле (4.10) будем иметь

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-1)\sin 3x\,dx}{x^2-2x+5}=\mathrm{Im}\left(2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{n}res_{z_k}R(z)e^{3iz}\right), \qquad (4.11)$$

причем вычеты берутся только по тем полюсам функции $R(z)$, которые лежат в верхней полуплоскости $\mathrm{Im}\,z>0$. Функция $R(z)$ имеет два простых полюса $z=1\pm 2i$, причем только $z_1=1+2i$ лежит в верхней полуплоскости. Находим

$$res_{1+2i}R(z)e^{3iz}=\lim_{z\to 1+2i}\frac{(z-1-2i)(z-1)e^{3iz}}{z^2-2z+5}=\lim_{z\to 1+2i}\frac{(z-1)e^{3iz}}{z-1+2i}=\frac{1}{2}e^{-6+3i}.$$

Подставив найденный вычет в формулу (4.11), будем иметь

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-1)\sin 3x\,dx}{x^2-2x+5}=\mathrm{Im}\left(2\pi i\cdot\frac{e^{-6+3i}}{2}\right)=\mathrm{Im}\left(\pi i e^{-6}(\cos 3+i\sin 3)\right)=\pi e^{-6}\cos 3.$$

Ответ: $\pi e^{-6}\cos 3$.

5. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Операционное исчисление является мощным математическим методом решения различных прикладных задач. В его основе лежат два понятия: оригинал $f(t)$ и изображение $F(p)$. Оригинал $f(t)$ – это любая непрерывная или кусочно-непрерывная на интервале $(-\infty,+\infty)$ функция, равная 0 при $t<0$ и удовлетворяющая на промежутке $[0,+\infty)$ неравенству $|f(t)|\le Me^{\sigma t}$, где M,σ – некоторые положительные константы. Простейшим примером оригинала является функция Хевисайда $\eta(t)$, определяемая следующим образом: $\eta(t)=0$ при $t<0$, $\eta(t)=1$ при $t\ge 0$. Изображением $F(p)$ называется функция $F(p)=\int\limits_0^\infty e^{-pt}f(t)dt$. Тот факт, что $f(t)$ – оригинал, а $F(p)$ – его изображение, коротко записывается так: $f(t)\risingdotseq F(p)$. Процесс нахождения изображения $F(p)$ по его оригиналу $f(t)$ называется преобразованием Лапласа.

Отметим некоторые свойства преобразования Лапласа.

а) Преобразование Лапласа линейно, т. е. изображение от линейной комбинации оригиналов равно линейной комбинации их изображений. Например, если $f_1(t)\risingdotseq F_1(p)$, $f_2(t)\risingdotseq F_2(p)$, α_1,α_2 – некоторые константы, то $\alpha_1 f_1(t)+\alpha_2 f_2(t)\risingdotseq \alpha_1 F_1(p)+\alpha_2 F_2(p)$.

Далее, пусть $f(t)$ – оригинал, а $F(p)$ – его изображение, т. е. $f(t)\risingdotseq F(p)$. Тогда справедливы следующие формулы операционного исчисления:

б) $f^{(n)}(t)\risingdotseq p^nF(p)-p^{n-1}f(0)-p^{n-2}f'(0)-...-pf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)$;

в частности: $f'(t)\risingdotseq pF(p)-f(0)$, $\quad f''(t)\risingdotseq p^2F(p)-pf(0)-f'(0)$;

в) $\int\limits_0^t f(\tau)d\tau\risingdotseq\dfrac{1}{p}F(p)$;

г) $e^{\alpha t}f(t)\risingdotseq F(p-\alpha)$;

д) $f(t-a)\risingdotseq e^{-ap}F(p)$;

е) $f(\alpha t)\risingdotseq\dfrac{1}{\alpha}F(\dfrac{p}{\alpha})$;

ж) $(-t)^n f(t)\risingdotseq\dfrac{d^n}{dp^n}F(p)$; в частности $-tf(t)\risingdotseq F'(p)$;

з) $\dfrac{f(t)}{t}\risingdotseq\int\limits_p^\infty F(z)dz$.

Ниже приведена таблица изображений для основных элементарных функций. Следует иметь в виду, что в левых частях формул должны стоять не сами элементарные функции, а их произведения на функцию Хевисайда $\eta(t)$, поскольку сами элементарные функции оригиналами не являются. Множитель $\eta(t)$ мы опускаем ради простоты записи формул.

1) $1 \risingdotseq \frac{1}{p}$	7) $sh\omega t \risingdotseq \frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$
2) $e^{\alpha t} \risingdotseq \frac{1}{p-\alpha}$	8) $e^{\alpha t} \cos\omega t \risingdotseq \frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2 + \omega^2}$
3) $t^n \risingdotseq \frac{n!}{p^{n+1}}$	9) $e^{\alpha t} \sin\omega t \risingdotseq \frac{\omega}{(p-\alpha)^2 + \omega^2}$
4) $\cos\omega t \risingdotseq \frac{p}{p^2 + \omega^2}$	10) $e^{\alpha t} ch\omega t \risingdotseq \frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2 - \omega^2}$
5) $\sin\omega t \risingdotseq \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	11) $e^{\alpha t} sh\omega t \risingdotseq \frac{\omega}{(p-\alpha)^2 - \omega^2}$
6) $ch\omega t \risingdotseq \frac{p}{p^2 - \omega^2}$	12) $t\cos\omega t \risingdotseq \frac{p^2 - \omega^2}{\left(p^2 + \omega^2\right)^2}$

5.1. Указания к задаче 21

Пусть оригинал $y = f(t)$ является кусочно-линейной функцией. График такой функции состоит из отрезков прямых; он изображен на рис. 7. Пусть τ_k $(k = 1,2,...,n)$ – точки разрыва $f(t)$ или $f'(t)$. Обозначим:

- $\sigma_k = f(\tau_k + 0) - f(\tau_k - 0)$ – скачок функции в точке τ_k;
- $\beta_k = tg\alpha_{k+1} - tg\alpha_k = f'(\tau_k + 0) - f'(\tau_k - 0)$ – скачок производной в точке τ_k.

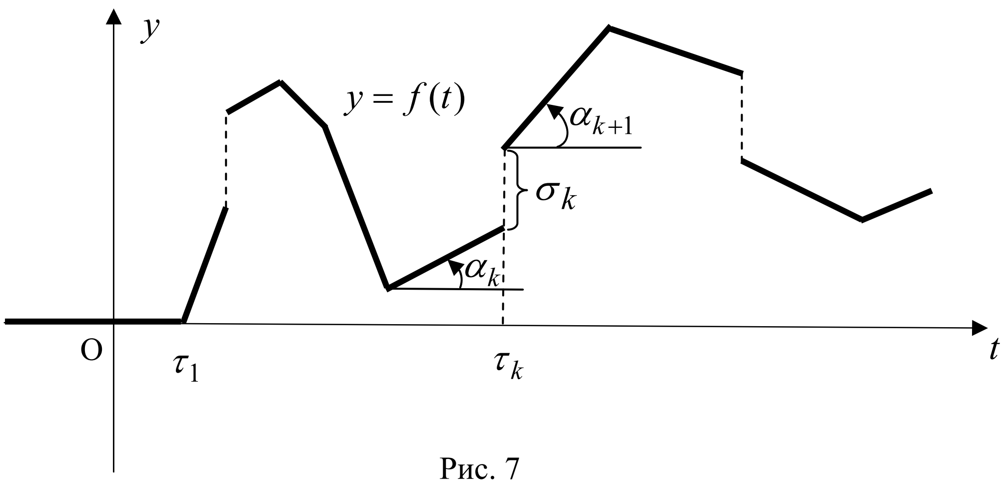

Рис. 7

Изображение такой функции будет иметь вид

$$F(p)=\sum_{k=1}^{n} e^{-p\tau_k}\left(\frac{\sigma_k}{p}-\frac{\beta_k}{p^2}\right). \qquad (5.1)$$

Пример 21. Найти изображение кусочно-линейной функции, график которой изображен на рис. 8.

Решение. По рисунку определяем точки разрыва функции и ее производной, а также их скачки в этих точках. Такими точками являются: $\tau_1=a$, $\tau_2=2a$, $\tau_3=3a$, $\tau_4=5a$. Скачки $f(t)$, $f'(t)$ в этих точках равны: $\sigma_1=0,\quad \beta_1=\frac{1}{a};\quad \sigma_2=1,\quad \beta_2=-\frac{1}{a};$ $\sigma_3=0,\quad \beta_3=-\frac{1}{2a};\quad \sigma_4=1,\quad \beta_4=\frac{1}{2a}.$

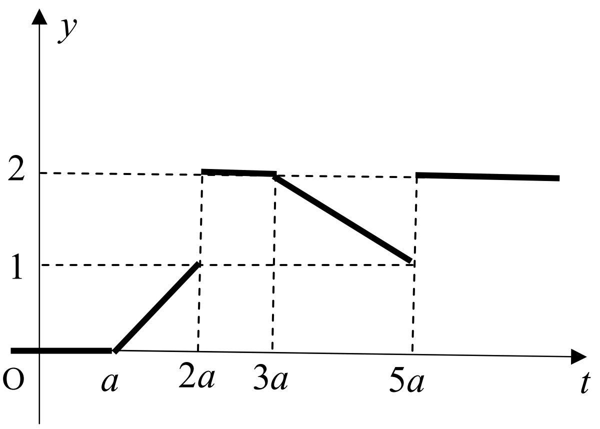

Рис. 8

По формуле (5.1) находим

$$F(p)=\frac{1}{ap^2}e^{-ap}+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{ap^2}\right)e^{-2ap}-$$
$$-\frac{1}{2ap^2}e^{-3ap}+\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{2ap^2}\right)e^{-5ap}.$$

Ответ: $\frac{1}{ap^2}e^{-ap}+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{ap^2}\right)e^{-2ap}-\frac{1}{2ap^2}e^{-3ap}+\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{2ap^2}\right)e^{-5ap}.$

5.2. Указания к задаче 22

Будем искать оригинал $f(t)$ по заданному изображению $F(p)$ в случае, когда $F(p)$ является правильной рациональной дробью. В этом случае $F(p)$ сначала разлагают на сумму простейших дробей методом неопределенных коэффициентов. Затем для каждой простейшей дроби находят оригинал, используя таблицу оригиналов и изображений и свойства преобразования Лапласа.

Пример 22. Найти оригинал $f(t)$ по заданному изображению

$$F(p)=\frac{9p+10}{(p-1)\left(p^2+6p+12\right)}.$$

Решение. Разложим $F(p)$ на сумму простейших дробей. Имеем

$$\frac{9p+10}{(p-1)\left(p^2+6p+12\right)}=\frac{A}{p-1}+\frac{Bp+C}{p^2+6p+12}.$$

Отсюда $9p+10=A\left(p^2+6p+12\right)+\left(Bp+C\right)\left(p-1\right)$. Полагая сначала $p=1$, затем $p=0$ и $p=-1$, получим систему трех уравнений: $19=19A;\ 10=12A-C;\ 1=7A+2\left(B-C\right)$, из которой находим $A=1,\ B=-1,\ C=2$. Следовательно

$$\frac{9p+10}{(p-1)\left(p^2+6p+12\right)}=\frac{1}{p-1}-\frac{p-2}{p^2+6p+12}.$$

По таблице оригиналов и изображений находим

$$\frac{1}{p-1}\risingdotseq e^t,\qquad \frac{p-2}{p^2+6p+12}=\frac{p-2}{(p+3)^2+3}=$$

$$=\frac{p+3}{(p+3)^2+\sqrt{3}^2}-\frac{5}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{(p+3)^2+\sqrt{3}^2}\risingdotseq e^{-3t}\cos\left(\sqrt{3}t\right)-\frac{5}{\sqrt{3}}e^{-3t}\sin\left(\sqrt{3}t\right).$$

Поэтому

$$\frac{9p+10}{(p-1)\left(p^2+6p+12\right)}\risingdotseq f(t)=e^t+e^{-3t}\cos\left(\sqrt{3}t\right)-\frac{5}{\sqrt{3}}e^{-3t}\sin\left(\sqrt{3}t\right).$$

Ответ: $e^t+e^{-3t}\left(\cos\left(\sqrt{3}t\right)-\frac{5}{\sqrt{3}}\sin\left(\sqrt{3}t\right)\right)$.

5.3. Указания к задачам 23, 24

Для решения операционным методом линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$y''+a_1y'+a_2y=f(t) \qquad (5.2)$$

и начальными условиями

$$y(0)=\beta_0,\quad y'(0)=\beta_1 \qquad (5.3)$$

нужно к обеим частям уравнения (5.2) применить преобразование Лапласа. Итак, обозначим $y(t)\risingdotseq Y(p)$. Используя теорему об изображении производных и учитывая начальные условия (5.3), имеем: $y'(t)\risingdotseq pY-y(0)=pY-\beta_0$, $y''(t)\risingdotseq p^2Y-py(0)-y'(0)=p^2Y-p\beta_0-\beta_1$. Находим изображение правой части уравнения: $f(t)\risingdotseq F(p)$. В итоге вместо дифференциального уравнения (5.2) получим алгебраическое уравнение относительно изображения $Y(p)$: $p^2Y-p\beta_0-\beta_1+a_1\left(pY-\beta_0\right)+a_2Y=F(p)$. Решая его, находим

$$Y=\frac{F(p)+\beta_0p+\beta_1+a_1\beta_0}{p^2+a_1p+a_2}.$$

Теперь по известному изображению $Y(p)$ находим оригинал $y(t)$, который и будет являться решением исходной задачи.

Замечание. Если решается дифференциальное уравнение (5.2) с нулевыми начальными условиями: $y(0)=0,\ y'(0)=0$, то его решение можно найти с помощью одной из формул Дюамеля:

$$y(t)=\int_0^t y_1'(\tau)f(t-\tau)d\tau \quad \text{или} \quad y(t)=\int_0^t y_1'(t-\tau)f(\tau)d\tau, \tag{5.4}$$

где $y_1(t)-$ решение вспомогательной задачи Коши

$$y''+a_1y'+a_2y=1,\ y(0)=0,\ y'(0)=0.$$

Пример 23. Найти решение дифференциального уравнения

$$y''+y=\frac{1}{2+\sin t},$$

удовлетворяющее начальным условиям: $y(0)=0,\ y'(0)=0$.

Решение. В данном случае изображение правой части уравнения найти достаточно трудно, поэтому для решения поставленной задачи воспользуемся второй формулой Дюамеля (5.4). Для этого предварительно найдем функцию $y_1(t)$, решив следующую вспомогательную задачу:

$$y''+y=1,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=0.$$

Эту задачу решаем операционным методом. Пусть $y(t)\risingdotseq Y(p)$, тогда $y'(t)\risingdotseq pY$, $y''(t)\risingdotseq p^2Y$, $1\risingdotseq\frac{1}{p}$, и вместо дифференциального получаем алгебраическое уравнение $p^2Y+Y=\frac{1}{p}$, которое имеет решение $Y=\frac{1}{p\left(p^2+1\right)}$. Эту дробь разложим на сумму простейших, используя метод неопределенных коэффициентов. В итоге получим $Y=\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+1}$. Теперь для каждой простейшей дроби находим ее оригинал: $\frac{1}{p}\risingdotseq1$, $\frac{p}{p^2+1}\risingdotseq\cos t$ и получаем решение вспомогательной задачи: $y_1(t)=1-\cos t$.

Решение исходной задачи находим по второй формуле Дюамеля, в которой положим $f(t)=\frac{1}{2+\sin t}$, $y_1'(t)=\left(1-\cos t\right)'=\sin t$. Тогда

$$y(t)=\int_0^t\sin\left(t-\tau\right)\frac{1}{2+\sin\tau}d\tau=\sin t\cdot\int_0^t\frac{\cos\tau\,d\tau}{2+\sin\tau}-\cos t\cdot\int_0^t\frac{\sin\tau\,d\tau}{2+\sin\tau}. \tag{5.5}$$

Первый интеграл в формуле (5.5) находится достаточно просто.

$$\int_0^t\frac{\cos\tau\,d\tau}{2+\sin\tau}=\int_0^t\frac{d\left(2+\sin\tau\right)}{2+\sin\tau}=\ln\left(2+\sin\tau\right)\Big|_0^t=\ln\left(2+\sin t\right)-\ln2=\ln\left(1+\frac{1}{2}\sin t\right). \tag{5.6}$$

Второй интеграл в формуле (5.5) находится с помощью универсальной тригонометрической подстановки $tg\dfrac{\tau}{2}=u$. При этом имеем: $\tau=2arctgu$, $d\tau=\dfrac{2du}{1+u^2}$, $\sin\tau=\dfrac{2u}{1+u^2}$. Тогда

$$\int\limits_0^t\frac{\sin\tau\,d\tau}{2+\sin\tau}=\int\limits_0^{tg(t/2)}\frac{\frac{2u}{1+u^2}\cdot\frac{2du}{1+u^2}}{2+\frac{2u}{1+u^2}}=\int\limits_0^{tg(t/2)}\frac{2u\,du}{\left(1+u^2\right)\left(1+u+u^2\right)}.$$

Используя метод неопределенных коэффициентов, разложим подынтегральную функцию на разность простейших дробей

$$\frac{2u}{\left(1+u^2\right)\left(1+u+u^2\right)}=\frac{2}{1+u^2}-\frac{2}{1+u+u^2}.$$

Поэтому

$$\int\limits_0^t\frac{\sin\tau\,d\tau}{2+\sin\tau}=\int\limits_0^{tg(t/2)}\frac{2du}{1+u^2}-\int\limits_0^{tg(t/2)}\frac{2du}{\left(u+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=2\,arctg\,u\,\Big|_0^{tg(t/2)}-$$

$$-\tfrac{4}{\sqrt{3}}arctg\left(\frac{2u+1}{\sqrt{3}}\right)\Big|_0^{tg(t/2)}=2\,arctg\left(tg\tfrac{t}{2}\right)-\tfrac{4}{\sqrt{3}}arctg\left(\frac{2}{\sqrt{3}}tg\tfrac{t}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{4}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6};$$

$$\int\limits_0^t\frac{\sin\tau\,d\tau}{2+\sin\tau}=t+\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}-\tfrac{4}{\sqrt{3}}arctg\left(\frac{2}{\sqrt{3}}tg\tfrac{t}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right). \tag{5.7}$$

Подставив формулы (5.6), (5.7) в формулу (5.5), получим решение исходной задачи

$$y(t)=\sin t\cdot\ln\left(1+\frac{1}{2}\sin t\right)-\cos t\cdot\left(t+\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}-\tfrac{4}{\sqrt{3}}arctg\left(\frac{2}{\sqrt{3}}tg\tfrac{t}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right).$$

Ответ: $y(t)=\sin t\cdot\ln\left(1+\dfrac{1}{2}\sin t\right)-\cos t\cdot\left(t+\dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}-\tfrac{4}{\sqrt{3}}arctg\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}tg\tfrac{t}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$.

Пример 24. Операционным методом решить задачу Коши

$$y''-3y'+2y=te^t,\ \ y(0)=1,\ y'(0)=-2.$$

Решение. Пусть $y(t)\risingdotseq Y(p)$. Используя начальные условия, будем иметь $y'(t)\risingdotseq pY-y(0)=pY-1$, $y''(t)\risingdotseq p^2Y-py(0)-y'(0)=p^2Y-p+2$. Находим изображение правой части: $te^t\risingdotseq\dfrac{1}{(p-1)^2}$. В итоге вместо исходного дифференциального уравнения получим алгебраическое уравнение

$$p^2Y - p + 2 - 3(pY - 1) + 2Y = \frac{1}{(p-1)^2},$$

из которого находим

$$\left(p^2 - 3p + 2\right)Y = p - 5 + \frac{1}{(p-1)^2},$$

$$Y = \frac{1}{p^2 - 3p + 2}\left(p - 5 + \frac{1}{(p-1)^2}\right) = \frac{p^3 - 7p^2 + 11p - 4}{(p-1)^3(p-2)}.$$

Применяя метод неопределенных коэффициентов, разложим Y на сумму и разность простейших дробей

$$Y = \frac{3}{p-1} - \frac{1}{(p-1)^2} - \frac{1}{(p-1)^3} - \frac{2}{p-2}. \tag{5.8}$$

Находим оригинал от каждой дроби:

$$\frac{3}{p-1} \risingdotseq 3e^t, \quad \frac{1}{(p-1)^2} \risingdotseq te^t, \quad \frac{1}{(p-1)^3} \risingdotseq \frac{1}{2}t^2e^t, \quad \frac{2}{p-2} \risingdotseq 2e^{2t}.$$

Теперь с учетом представления (5.8) находим оригинал для Y, который и является решением исходной задачи: $y(t) = 3e^t - te^t - \frac{1}{2}t^2e^t - 2e^{2t}$.

Ответ: $y(t) = \left(3 - t - \frac{1}{2}t^2\right)e^t - 2e^{2t}$.

5.4. Указания к задаче 25

Для решения задачи о движении материальной точки на прямой следует воспользоваться физическим смыслом производных первого и второго порядков: если материальная точка движется прямолинейно по закону $x = x(t)$, то $x'(t) -$ ее скорость, $x''(t) -$ ее ускорение в момент времени t. Тогда согласно второму закону Ньютона $m\,x'' = F$, где $m -$ масса точки, $F -$ равнодействующая всех сил, действующих на точку. Перемещение точки за время от t_1 до t_2 находится по формуле

$$\Delta x = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt. \tag{5.9}$$

Пример 25.1. Материальная точка массы m движется прямолинейно под действием возмущающей силы $f = 2m\sin t$ и силы сопротивления $R = mv$, где $v -$ скорость точки. Найти закон движения $x = x(t)$ точки, если в начальный момент времени $x(0) = 0,\ v(0) = 1$.

Решение. Найдем равнодействующую сил. $F = f - R = 2m\sin t - mx'$. Согласно второму закону Ньютона получаем уравнение движения точки: $m\,x'' = 2m\sin t - mx'$. Таким образом, для определения закона движения точки получается следующая задача Коши

$$x'' + x' = 2\sin t,\ \ x(0) = 0,\quad x'(0) = 1.$$

Эту задачу решаем операционным методом. Обозначим $x(t) \risingdotseq X(p)$, тогда $x'(t) \risingdotseq pX$, $\quad x''(t) \risingdotseq p^2 X - 1$, $\quad \sin t \risingdotseq \dfrac{1}{p^2+1}$. В итоге получим уравнение для изображения: $p^2 X - 1 + pX = \dfrac{2}{p^2+1}$, из которого находим

$$X = \frac{1}{p^2+p}\left(1 + \frac{2}{p^2+1}\right) = \frac{p^2+3}{p(p+1)\left(p^2+1\right)}.$$

Методом неопределенных коэффициентов разложим X на сумму и разность простейших дробей

$$X = \frac{3}{p} - \frac{2}{p+1} - \frac{p+1}{p^2+1} = \frac{3}{p} - \frac{2}{p+1} - \frac{p}{p^2+1} - \frac{1}{p^2+1}.$$

Находим оригинал от каждой простейшей дроби и получаем решение исходной задачи $x(t) = 3 - 2e^{-t} - \cos t - \sin t$.

Ответ: $x = 3 - 2e^{-t} - \cos t - \sin t$.

Пример 25.2. На материальную точку массы m действует сила сопротивления $R = 0{,}5mv$, пропорциональная скорости v. Какое расстояние пройдет точка за неограниченное время, если ей сообщена начальная скорость $v_0 = 4$ м/с.

Решение. Так как $v'(t)$ – ускорение, то по второму закону Ньютона мы получаем уравнение движения точки $mv' = -0{,}5mv$. Таким образом, для определения скорости движения точки получаем следующую задачу Коши:

$$v' + 0{,}5v = 0,\ \ v(0) = 4.$$

Эту задачу решаем операционным методом. Обозначим $v(t) \risingdotseq V(p)$, тогда $v'(t) \risingdotseq pV - v(0) = pV - 4$. В итоге получим уравнение $pV - 4 + 0{,}5V = 0$, из которого находим $V = \dfrac{4}{p+0{,}5}$. Находим оригинал от дроби и получаем решение задачи Коши $v(t) = 4e^{-0{,}5t}$.

Поскольку $v(t) > 0$, направление движения точки не меняется и пройденный ею путь совпадает с ее перемещением. Поэтому согласно формуле (5.9) пройденный точкой за время t путь равен

$$S(t)=\int_0^t v(t)dt=\int_0^t 4e^{-0,5t}dt=-8e^{-0,5t}\Big|_0^t=8\left(1-e^{-0,5t}\right).$$

Находим $\lim\limits_{t\to\infty} S(t)=\lim\limits_{t\to\infty} 8\left(1-e^{-0,5t}\right)=8$.

Ответ: 8.

5.5. Указания к задаче 26

Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами решаются операционным методом совершенно так же, как и отдельные уравнения. К каждому дифференциальному уравнению применяют преобразование Лапласа и вместо одного уравнения получают систему линейных алгебраических уравнений относительно изображений искомых функций. Решая полученную систему, находят изображение каждой искомой функции и по ним восстанавливают оригиналы, которые и будут решением исходной дифференциальной системы.

Пример 26. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases}\dot{x}=-x-y,\\ \dot{y}=2x+y-1,\end{cases}\qquad x(0)=2,\ y(0)=-2.$$

Решение. Пусть $x(t)\risingdotseq X(p)$, $y(t)\risingdotseq Y(p)$, тогда $\dot{x}\risingdotseq pX-2$, $\dot{y}\risingdotseq pY+2$, $1\risingdotseq\dfrac{1}{p}$. Вместо исходной дифференциальной системы получили алгебраическую систему для изображений

$$\begin{cases}pX-2=-X-Y,\\ pY+2=2X+Y-\dfrac{1}{p};\end{cases}\qquad \begin{cases}(p+1)X+Y=2,\\ -2X+(p-1)Y=-2-\dfrac{1}{p}.\end{cases}$$

Полученную систему решаем по формулам Крамера.

$$\Delta=\begin{vmatrix}p+1 & 1\\ -2 & p-1\end{vmatrix}=p^2+1,\qquad \Delta_1=\begin{vmatrix}2 & 1\\ -2-\dfrac{1}{p} & p-1\end{vmatrix}=2p+\frac{1}{p}=\frac{2p^2+1}{p},$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}p+1 & 2\\ -2 & -2-\dfrac{1}{p}\end{vmatrix}=-2p+1-\frac{1}{p}=\frac{-2p^2+p-1}{p},$$

$$X=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{2p^2+1}{p\left(p^2+1\right)},\qquad Y=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{-2p^2+p-1}{p\left(p^2+1\right)}.$$

Разлагая X и Y на простейшие дроби, получаем

$$X=\frac{1}{p}+\frac{p}{p^2+1},\quad Y=-\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+1}+\frac{1}{p^2+1}.$$

Следовательно, $x(t)=1+\cos t,\;\; y(t)=-1-\cos t+\sin t$.

Ответ: $x=\cos t+1,\;\; y=\sin t-\cos t-1$.

6. КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

6.1. Указания к задаче 27

Чтобы найти образ односвязной области D с границей C при конформном отображении, реализуемом аналитической функцией $w=f(z)$, нужно сначала найти образ линии C. Если линия C (или ее часть) задана параметрическим уравнением $z=x(t)+iy(t)$ на комплексной z-плоскости, то, находя значения функции $w=f\big(x(t)+iy(t)\big)$, получаем параметрическое уравнение $w=U(t)+iV(t)$ линии $\widetilde{C}$ на комплексной w-плоскости. Линия $\widetilde{C}$ будет образом линии C при конформном отображении $w=f(z)$. Тогда согласно принципу соответствия границ функция $w=f(z)$ осуществляет конформное отображение области D с границей C на область $\widetilde{D}$ с границей $\widetilde{C}$.

Если линия $\widetilde{C}$ содержит бесконечно удаленную точку, то, выбирая область $\widetilde{D}$, необходимо помнить, что при конформном отображении направление обхода границ сохраняется: если при обходе линии C область D остается слева, то ее образом должна быть область $\widetilde{D}$, которая остается слева при соответствующем обходе контура $\widetilde{C}$ точками $w(t)=f(z(t))$.

Пример 27.1. Выяснить, во что преобразуется прямоугольная сетка $\operatorname{Re} z=c,\; \operatorname{Im} z=c$ при отображении функцией $w=sh\, z$.

Решение. Положим $z=x+iy,\; w=u+iv$, тогда

$$u+iv=sh\big(x+iy\big)=shx\cdot chiy+chx\cdot shiy=shx\cdot\cos y+ichx\cdot\sin y.$$

Отсюда находим

$$u=shx\cdot\cos y,\;\; v=chx\cdot\sin y. \tag{6.1}$$

Определим вид образов линий прямоугольной сетки. Если $x=c$, $-\infty<y<\infty$, то из формул (6.1) следует уравнение $\dfrac{u^2}{sh^2c}+\dfrac{v^2}{ch^2c}=1$. Значит, образом прямой $x=c$ является эллипс с полуосями $|shc|$, chc и фокусами на оси $\operatorname{Im} w$ при $c\neq 0$ или отрезок от $-i$ до i при $c=0$.

Если $-\infty < x < \infty$, $y = c$, то из формул (6.1) следует уравнение $\dfrac{v^2}{\sin^2 c} - \dfrac{u^2}{\cos^2 c} = 1$. Значит, образом прямой $y = c$ является гипербола с полуосями $|\sin c|$, $|\cos c|$ и фокусами на оси $\operatorname{Im} w$. Точнее, верхняя ветвь гиперболы в случае $\sin c > 0$ или нижняя ветвь гиперболы в случае $\sin c < 0$. Образ прямоугольной сетки изображен на рис. 9.

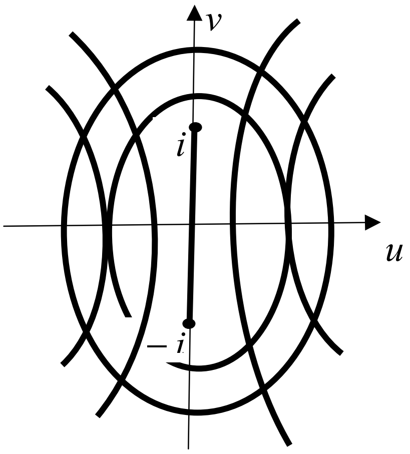

Рис. 9

Пример 27.2. Выяснить, во что преобразуется полуполоса $0 < \operatorname{Re} z < \dfrac{\pi}{2}$, $\operatorname{Im} z > 0$ при отображении функцией $w = ctg\, z$.

Решение. Так как справедливо следующее представление: $ctgz = \dfrac{\cos z}{\sin z} = \dfrac{i\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)}{e^{iz} - e^{-iz}} = \dfrac{i\left(e^{2iz} + 1\right)}{e^{2iz} - 1}$, то исходную функцию $w = ctgz$ можно представить как суперпозицию двух функций: $\zeta = e^{2iz}$ и $w = \dfrac{i(\zeta + 1)}{\zeta - 1}$.

Найдем образ полуполосы $0 < \operatorname{Re} z < \dfrac{\pi}{2}$, $\operatorname{Im} z > 0$ (см. рис. 10) при отображении $\zeta = e^{2iz}$. Положим $z = x + iy$. На участке OA границы имеем: $z = x$, $\zeta = e^{2ix} = \cos 2x + i \sin 2x$. Следовательно, при изменении z от 0 до $\pi/2$ точка ζ опишет на комплексной ζ-плоскости верхнюю полуокружность радиуса 1 с центром в точке $\zeta = 0$, которая пробегается в положительном направлении (см. рис. 11).

На левой вертикальной части границы (см. рис. 10) имеем $z = iy$, причем y меняется от $+\infty$ до 0. Значит, $\zeta = e^{2i^2 y} = e^{-2y}$, т. е. на комплексной ζ-плоскости точка ζ пробегает отрезок от $\zeta = 0$ до $\zeta = 1$ (см. рис. 11).

Наконец, на правой вертикальной части границы (см. рис. 10) имеем $z = \pi/2 + iy$, причем y меняется от 0 до $+\infty$. Значит, $\zeta = e^{2i(\pi/2 + iy)} = -e^{-2y}$, т. е. на комплексной ζ-плоскости точка ζ пробегает отрезок от $\zeta = -1$ до $\zeta = 0$ (см. рис. 11). На рис. 10 при обходе границы полуполоса остается слева. Чтобы на рис. 11 при обходе границы область оставалась слева, нужно в качестве области взять внутренность полукруга. Таким образом, при отображении $\zeta = e^{2iz}$ полуполоса $0 < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{Im} z > 0$ отображается в верхний полукруг, изображенный на рис.11.

Теперь найдем образ полученного полукруга при отображении $w = \frac{i(\zeta + 1)}{\zeta - 1}$. Это отображение является дробно-линейным. Известно, что дробно-линейное преобразование отображает окружность в окружность. (Прямая линия тоже считается окружностью бесконечного радиуса.)

Найдем образ полуокружности при отображении $w = \frac{i(\zeta + 1)}{\zeta - 1}$. Для этого выберем на полуокружности три точки: $\zeta = 1$, $\zeta = i$, $\zeta = -1$ и найдем их образы $w(1) = \infty$, $w(i) = \frac{i(i+1)}{i-1} = \frac{i(i+1)^2}{i^2 - 1} = 1$, $w(-1) = 0$. Следовательно, образом полуокружности является положительная часть действительной полуоси w-плоскости (см. рис. 12).

На прямолинейном участке границы (см. рис. 11) переменная ζ принимает только действительные значения и меняется от $\zeta = -1$ до $\zeta = 1$. При этом переменная $w = \frac{i(\zeta + 1)}{\zeta - 1}$ принимает только мнимые значения и меняется от 0 до $-i\infty$. Значит, отрезок $[-1,1]$ ζ – плоскости отображается в отрицательную часть мнимой оси w-плоскости (см. рис. 12).

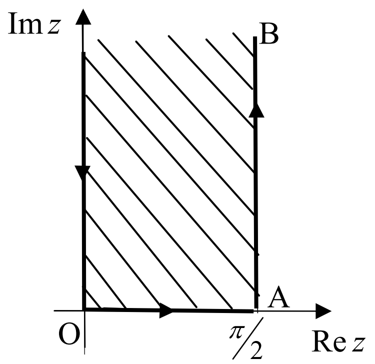

Рис. 10

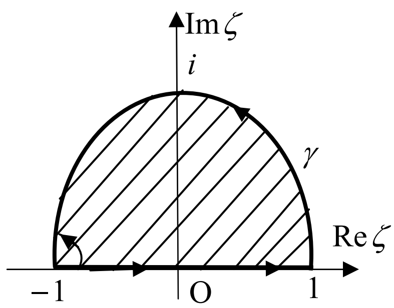

Рис. 11

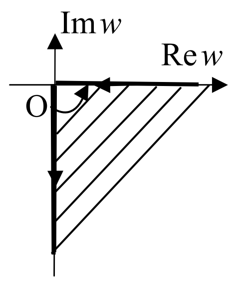

Рис. 12

Ввиду конформности отображения в точке $\zeta = -1$ угол между кривыми и их образами сохраняется как по величине, так и по направлению. Поэтому в качестве образа полукруга в ζ-плоскости нужно взять 4 квадрант w-плоскости.[1]

[1] Этот же результат будет получен, если использовать принцип сохранения направления обхода границы.

Пример 27.3. Выяснить, во что преобразуется первый квадрант при отображении функцией $w = \arccos z$.

Решение. Воспользуемся следующим представлением арккосинуса:

$$\arccos z = -i\ln\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right), \text{ где } \ln\zeta = \ln|\zeta| + i\arg\zeta, \quad -\pi < \arg\zeta \le \pi.$$

Поэтому исходное отображение примет вид

$$w = -i\left(\ln\left|z + \sqrt{z^2 - 1}\right| + i\arg\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)\right), \quad -\pi < \arg\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right) \le \pi. \quad (6.2)$$

Поскольку функция $\sqrt{z^2 - 1}$ является двузначной, фиксируем ту ветвь функции, на которой $\sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 - 1} > 0$ для $\operatorname{Re} z > 1$.

Чтобы найти образ первого квадранта при отображении (6.2), найдем образ его границы. Выясним сначала, во что преобразуется полуось AO (см. рис. 13). На оси AO имеем: $z = iy$, причем y меняется от $+\infty$ до 0. Тогда согласно (6.2)

$$w = -i\left(\ln\left|iy + \sqrt{-y^2 - 1}\right| + i\arg\left(iy + \sqrt{-y^2 - 1}\right)\right) = -i\left(\ln\left|y + \sqrt{y^2 + 1}\right| + i\frac{\pi}{2}\right).$$

Итак, $w = \dfrac{\pi}{2} - i\ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right)$, причем y меняется от $+\infty$ до 0. Значит w меняется от $\dfrac{\pi}{2} - i\infty$ до $\dfrac{\pi}{2}$, т. е. полупрямая AO при отображении (6.2) переходит в полупрямую CE (см. рис. 14).

Теперь выясним, во что преобразуется отрезок OK z-плоскости. Имеем: $z = x$, причем x меняется от 0 до 1. Тогда согласно (6.2)

$$w = -i\left(\ln\left|x + \sqrt{x^2 - 1}\right| + i\arg\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)\right) = -i\left(\ln\left|x + i\sqrt{1 - x^2}\right| + \right.$$

$$\left. + i\arg\left(x + i\sqrt{1 - x^2}\right)\right) = -i\left(\ln 1 + i\,arctg\left(\frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}\right)\right) = arctg\left(\frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}\right).$$

Значит, если x меняется от 0 до 1, то w меняется от $\dfrac{\pi}{2}$ до 0. Следовательно, отрезок OK z-плоскости при отображении (6.2) переходит в отрезок EO w-плоскости (см. рис. 14).

Наконец, выясним, во что преобразуется полупрямая KB z-плоскости. Имеем: $z = x$, причем x меняется от 1 до $+\infty$. Тогда согласно (6.2)

$$w = -i\left(\ln\left|x + \sqrt{x^2 - 1}\right| + i\arg\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)\right) = -i\ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right).$$

Значит, если x меняется от 1 до $+\infty$, то w меняется от 0 до $-i\infty$. Следовательно, полупрямая KB z-плоскости при отображении (6.2) переходит в полупрямую OD w-плоскости (см. рис. 14).

Чтобы сохранить положительное направление обхода границы, в качестве образа первого квадранта z-плоскости следует выбрать полуполосу: $0 < \operatorname{Re} w < \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{Im} w < 0$, изображенную на рис. 14.

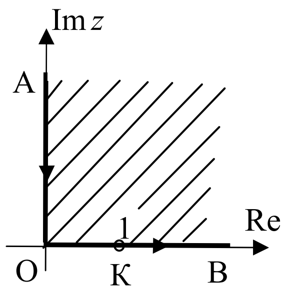

Рис. 13

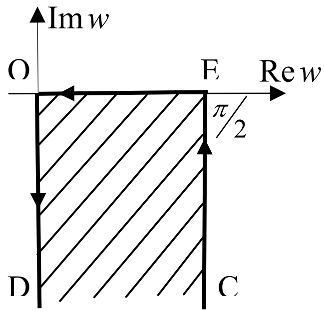

Рис. 14

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Привалов, И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного : учебник / И. И. Привалов. – СПб. : Лань, 2009. – 432 с.
2. Половинкин, Е. С. Курс лекций по теории функций комплексного переменного / Е. С. Половинкин. – М. : Физматкнига, 2003. – 203 с.
3. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления : учебное пособие для втузов / Н. С. Пискунов. – М. : Интеграл-Пресс, 2004. – Т. 2. – 544 с.
4. Чудесенко, В. Ф. Сборник задач по специальным курсам высшей математики: Типовые расчеты : учебное пособие / В. Ф. Чудесенко. – СПб. : Лань, 2005. – 128 с.
5. Пантелеев, А. В. Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах : учебное пособие для втузов / А. В. Пантелеев, А. С. Яковлева. – М. : Высш. шк., 2001. – 445 с.
6. Тарарощенко, Н. С. Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах : учебное пособие для вузов / Н. С. Тарарощенко, А. С. Якимова, Л. Н. Сердюк. – М. : МАИ, 2001. – 264 с.
7. Лаврентьев, М. А. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. – М. : Лань, 2002. – 688 с.
8. Бугров, Я. С. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – М. : Наука, 1999. – 464 с.

Учебное электронное издание

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО И ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Методические указания

Составители: **Маценко** Петр Константинович,
Решетников Юрий Андреевич,
Савинов Николай Васильевич

Редактор М. В. Теленкова

Объем данных 0,85 Мб. ЭИ № 148.

Ульяновский государственный технический университет
432027, г. Ульяновск, ул. Сев. Венец, д. 32.
Типография УлГТУ, 432027, г. Ульяновск, ул. Сев. Венец, д. 32.
Тел.: (8422) 778-113.
E-mail: venec@ulstu.ru
http://www.venec.ulstu.ru