

А. П. ПОТАПОВ

Математический анализ, часть 1

Теория, задачи и упражнения

Учебное пособие

Оглавление

I. Теория.

Раздел 1. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Глава 1. Производная и дифференциал	...	2
Глава 2. Основные теоремы дифференциального исчисления	...	27
Глава 3. Исследование функций	...	53

Раздел 2. Интегральное исчисление функций одной переменной

Глава 4. Неопределенный интеграл	...	85
Глава 5. Определенный интеграл	...	119
Глава 6. Приложения определенного интеграла	...	142
Глава 7. Несобственные интегралы	...	172

II. Задачи и упражнения.

Задачи к главе 1	...	201
Задачи к главе 2	...	205
Задачи к главе 3	...	207
Задачи к главе 4	...	210
Задачи к главе 5	...	213
Задачи к главе 6	...	215
Задачи к главе 7	...	217

Ответы	...	219
---------------	-----	-----

Литература	...	231
-------------------	-----	-----

I. Теория.

Раздел 1. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Глава 1. Производная и дифференциал

Содержание

§ 1. Производная функции	3
§ 2. Производные основных элементарных функций	9
§ 3. Понятие дифференцируемости	11
§ 4. Правила вычисления производных.....	13
§ 5. Специальные методы дифференцирования функций	19
§ 6. Дифференциал функции	21

§ 1. Производная функции.

Дана функция $y = f(x)$ с областью определения D_f . Пусть x_0 — внутренняя точка множества D_f , т.е. x_0 входит в множество D_f вместе с некоторой своей окрестностью: $U(x_0) \subset D_f$.

Пусть $x \in U(x_0)$, тогда величина $x - x_0$ называется *приращением аргумента* (приращением независимой переменной) в точке x_0 , а величина $f(x) - f(x_0)$ называется *приращением функции* (приращением зависимой переменной) в точке x_0 . Обозначения:

$\Delta x = x - x_0$ - приращение аргумента;

$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ - приращение функции.

Приращения аргумента и функции могут принимать любые значения (положительные, отрицательные или нулевые).

Поведение функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 можно описать "качественно" или "количественно", если известна некоторая зависимость *приращения функции* Δy от *приращения аргумента* Δx . Например, если $\Delta y \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$, то функция $f(x)$ является *непрерывной* в точке x_0 .

Для более точной характеристики поведения функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 служит понятие *производной* — одно из фундаментальных понятий в математическом анализе.

Определение. Если существует предел $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ (конечный или бесконечный), то этот предел называется *производной* функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \\ f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \\ f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \end{aligned}$$

Если производная функции $f(x)$ вычисляется в произвольной точке $x \in D_f$, то применяется формула:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Примеры.

1. $f(x) = ax + b$, где $a, b = \text{const}$;

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (a(x + \Delta x) + b) - (ax + b) = a \cdot \Delta x;$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a \cdot \Delta x}{\Delta x} = a; \quad (ax + b)' = a; \quad \text{в частности: } (x)' = 1.$$

2. $f(x) = x^2$;

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2;$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x; \quad (x^2)' = 2x.$$

3. $f(x) = x^3, x_0 = 1;$

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(1 + \Delta x) - f(1) = (1 + \Delta x)^3 - 1^3 = 3\Delta x + 3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3;$$

$$f'(1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3\Delta x + 3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3 + 3\Delta x + (\Delta x)^2) = 3; (x^3)'(1) = 3.$$

4. $f(x) = \sqrt[3]{x}; x_0 = 0;$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \infty; (\sqrt[3]{x})'(0) = \infty.$$

5. $f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{если } x \neq 0; \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}; x_0 = 0;$

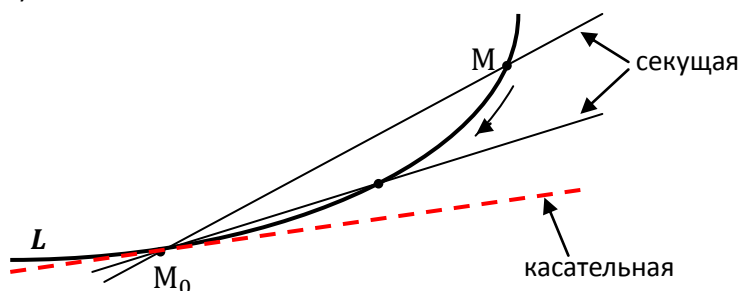
$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \text{не существует}; f'(0) - \nexists.$$

6. $f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{если } x \neq 0; \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}; x_0 = 0;$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0; f'(0) = 0.$$

Геометрический смысл производной.

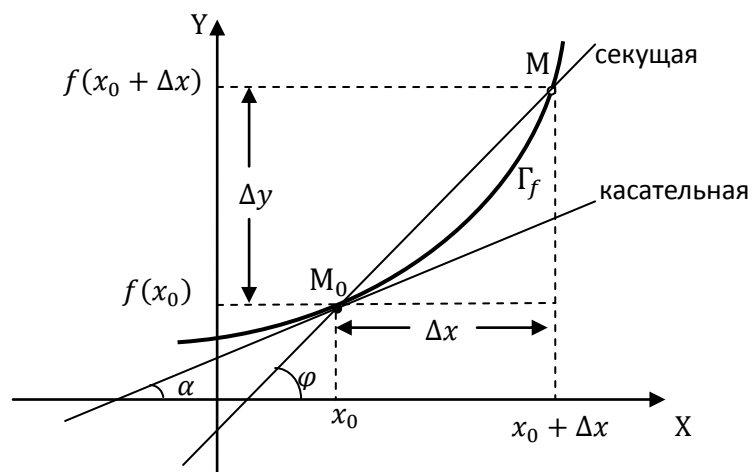
Рассмотрим на плоскости некоторую кривую L и точку M_0 , лежащую на этой кривой. Проведем секущую через точку M_0 и через другую точку M , также лежащую на кривой L . Далее перемещаем точку M вдоль кривой L , неограниченно приближая к точке M_0 (см. рис.)



Определение. Предельное положение секущей $[M_0M]$ при неограниченном приближении точки M вдоль кривой L к точке M_0 называется касательной к кривой L в точке M_0 .

Используя понятие касательной, сформулируем геометрический смысл производной.

Для этого рассмотрим график Γ_f непрерывной функции $f(x)$ и точку $M_0(x_0, y_0)$, где $y_0 = f(x_0)$. Проведем секущую $[M_0M]$ и касательную к графику Γ_f в точке M_0 . Пусть φ — угол между секущей и осью OX , α — угол между касательной и осью OX , k — угловой коэффициент касательной ($k = \operatorname{tg} \alpha$).



Из рисунка видно, что $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. При $\Delta x \rightarrow 0$ точка М неограниченно приближается к точке M_0 вдоль графика Γ_f и, следовательно, секущая $[M_0M]$ переходит в пределе в касательную. При этом $\varphi \rightarrow \alpha$ и $\operatorname{tg} \varphi \rightarrow \operatorname{tg} \alpha$.

Если $f'(x_0)$ существует, то $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\varphi \rightarrow \alpha} \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \alpha = k$.

Таким образом, производная функции $f(x)$ в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику функции в точке $M_0(x_0, f(x_0))$:

$$\boxed{f'(x_0) = k = \operatorname{tg} \alpha}.$$

Уравнение касательной: $y - y_0 = k(x - x_0)$ или: $\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$.

Прямая, перпендикулярная касательной в точке касания, называется *нормалью* к кривой.

Уравнение нормали: $y - y_0 = -\frac{1}{k} \cdot (x - x_0)$ или: $\boxed{y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)}$.

Пример 7.

Составим уравнения касательной и нормали к графику функции $f(x) = x^2$ в точке $x_0 = 1$.

Здесь $f(x_0) = 1^2 = 1$, $f'(x) = 2x$, $f'(x_0) = 2 \cdot 1 = 2$.

Уравнение касательной: $y = 1 + 2(x - 1)$ или $y = 2x - 1$.

Уравнение нормали: $y = 1 - \frac{1}{2} \cdot (x - 1)$ или $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

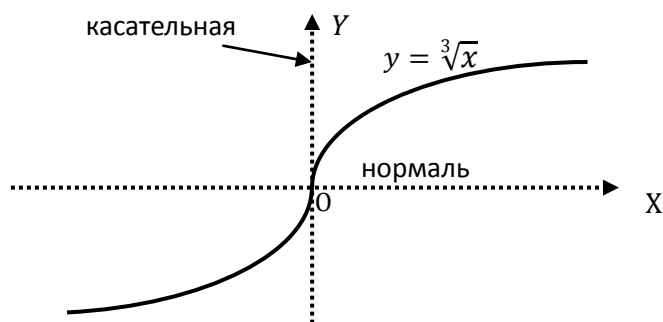
Из геометрического смысла производной следует:

$$f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0; \quad f'(x_0) = \infty \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

В случае $f'(x_0) = 0$ имеем *горизонтальную касательную* с уравнением: $y = f(x_0)$ и *вертикальную нормаль* с уравнением: $x = x_0$.

В случае $f'(x_0) = \infty$ имеем *вертикальную касательную* с уравнением: $x = x_0$ и *горизонтальную нормаль* с уравнением: $y = f(x_0)$.

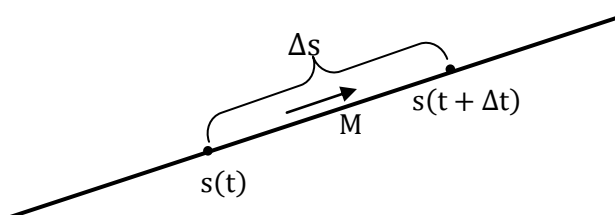
Пример 8. Для функции $f(x) = \sqrt[3]{x}$ в точке $x_0 = 0$ имеем $f'(x_0) = \infty$ (см. Пример 4), поэтому касательная к графику функции в этой точке будет *вертикальной* ($x = 0$) и будет совпадать с осью ОУ, а нормаль будет *горизонтальной* ($y = 0$) и будет совпадать с осью ОХ (см. рис.)



Физический смысл производной.

1. Скорость и ускорение движения (механический смысл производной).

Пусть $S = S(t)$ — путь, пройденный материальной точкой M за время t при прямолинейном движении. Тогда $\Delta S = S(t + \Delta t) - S(t)$ — путь, пройденный за время Δt . Отношение $\frac{\Delta S}{\Delta t} = v_{\text{ср}}$ — средняя скорость движения на этом промежутке.



Чем меньше Δt , тем точнее средняя скорость выражает скорость движения точки в данный момент времени t .

Скоростью движения точки в момент времени t (или мгновенной скоростью) называется предел средней скорости движения при стремлении к нулю промежутка времени Δt : $v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = S'(t)$.

Таким образом, скорость прямолинейного движения материальной точки в момент времени t есть производная пути S по времени t :

$$\boxed{v(t) = S'(t)}.$$

Аналогично устанавливается, что ускорение $a(t)$ прямолинейного движения материальной точки в момент времени t есть производная скорости v по времени t :

$$\boxed{a(t) = v'(t)}.$$

2. Сила тока.

Пусть $Q = Q(t)$ — количество электричества, протекающего через поперечное сечение проводника за время t . Тогда $\Delta Q = Q(t + \Delta t) - Q(t)$ — количество электричества, протекающего за время Δt . Отношение $\frac{\Delta Q}{\Delta t} = I_{\text{ср}}$ — средняя сила тока за промежуток Δt .

Силой тока в момент времени t называется предел средней силы тока при стремлении к нулю промежутка времени Δt : $I(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} I_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = Q'(t)$.

Таким образом, сила тока в момент времени t есть производная количества электричества Q по времени t :

$$\boxed{I(t) = Q'(t)}.$$

3. Теплоемкость тела.

Пусть $W = W(T)$ — количество тепла, необходимого при нагревании тела от 0° до температуры T° . Тогда $\Delta W = W(T + \Delta T) - W(T)$ — количество тепла, необходимого при нагревании тела на температуру ΔT° . Отношение $\frac{\Delta W}{\Delta T} = C_{\text{ср}}$ — средняя теплоемкость при нагревании от T° до $T^\circ + \Delta T^\circ$.

Теплоемкостью тела при температуре T называется предел средней теплоемкости при стремлении к нулю величины ΔT : $C(t) = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} C_{\text{ср}} = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta T} = W'(T)$.

Таким образом, теплоемкость тела при температуре T есть производная количества тепла W по температуре T :

$$C(T) = W'(T).$$

Обобщая вышеприведенные примеры, можно сформулировать *физический смысл* производной:

если функция $y = f(x)$ описывает какой-либо физический процесс, то ее производная $y' = f'(x)$ есть "скорость" протекания этого процесса.

Односторонние производные.

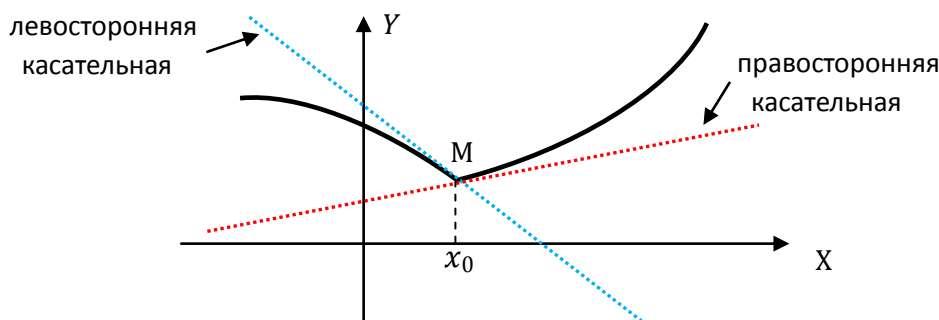
Если в определении производной функции ограничиться лишь значениями $x > x_0$ (справа от точки x_0), то получим определение производной справа (*правосторонней* производной); если ограничиться лишь значениями $x < x_0$ (слева от точки x_0), то получим определение производной слева (*левосторонней* производной):

$$f'(x_0 + 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}; \quad f'(x_0 - 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Очевидно, что для существования «обычной» конечной производной необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные производные справа и слева и они были бы равны:

$$\exists f'(x_0) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists f'(x_0 + 0) \\ \exists f'(x_0 - 0) \\ f'(x_0 + 0) = f'(x_0 - 0) = f'(x_0) \end{cases}.$$

Если $\exists f'(x_0 + 0)$, $\exists f'(x_0 - 0)$, но $f'(x_0 + 0) \neq f'(x_0 - 0)$, то $f'(x_0)$ — не существует. В этом случае касательная к графику функции $f(x)$ в точке x_0 — также не существует, но в этой точке есть *левосторонняя* и *правосторонняя* касательные (см. рис.) При этом точка $M(x_0, f(x_0))$ на графике называется *угловой точкой*.



В случае бесконечных значений производных справа и слева имеем следующую картину:

- если $f'(x_0 - 0) = -\infty$ и $f'(x_0 + 0) = -\infty$, то и $f'(x_0) = -\infty$;
- если $f'(x_0 - 0) = +\infty$ и $f'(x_0 + 0) = +\infty$, то и $f'(x_0) = +\infty$.

В этих случаях касательная к графику в точке x_0 является вертикальной (см. Пример 8).

Если $f'(x_0 - 0) = -\infty$, $f'(x_0 + 0) = +\infty$, или $f'(x_0 - 0) = +\infty$, $f'(x_0 + 0) = -\infty$, т.е. $f'(x_0 + 0) \neq f'(x_0 - 0)$, то в этом случае $f'(x_0) = \infty$, при этом левосторонняя и правосторонняя касательные — вертикальны и совпадают (см. Пример ниже).

Примеры.

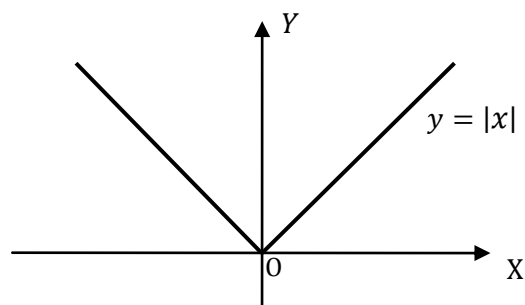
9. $f(x) = |x|$, $x_0 = 0$.

$$f'(0+) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+} 1 = 1;$$

$$f'(0-) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-} \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-} -1 = -1.$$

Так как $f'(0+) \neq f'(0-)$, то $f'(0)$ — не существует.

Геометрически это означает, что в точке $x_0 = 0$ касательная к графику функции $f(x) = |x|$ не существует.



10. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, $x_0 = 0$.

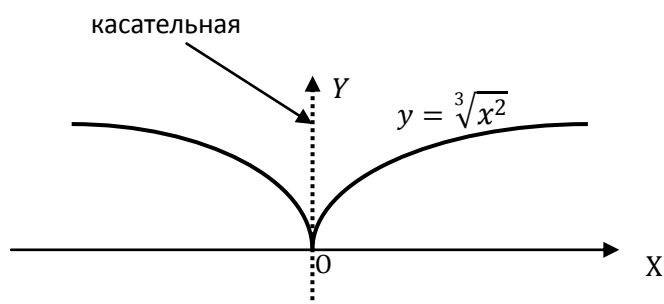
$$\Delta y = f(0 + \Delta x) - f(0) = f(\Delta x) - 0 = \sqrt[3]{(\Delta x)^2};$$

$$f'(0+) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}} = +\infty;$$

$$f'(0-) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-} \frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-} \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}} = -\infty;$$

$$(\sqrt[3]{x^2})'(0) = \infty.$$

Здесь левосторонняя и правосторонняя касательные — вертикальны и совпадают.



Замечание.

В определении производной функции $f(x)$ в некоторой точке x_0 предполагалось, что x_0 — внутренняя точка области определения D_f . Теперь можно допустить, что эта точка не является внутренней для D_f , но при обязательном условии, чтобы множество D_f содержало некоторый промежуток вида $[x_0; x_0 + \delta)$ или $(x_0 - \delta; x_0]$, где $\delta > 0$. Тогда производная в точке x_0 будет пониматься как односторонняя производная.

§ 2. Производные основных элементарных функций.

Вычислим производные основных элементарных функций.

1. Постоянная функция: $f(x) = C = const$.

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = C - C = 0;$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0; \quad \boxed{(C)' = 0}.$$

2. Степенная функция. Частные случаи.

2.1. $f(x) = x^n$, $n \in N$ (n – натуральное число).

$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^n - x^n$. По формуле бинома Ньютона имеем:

$$\begin{aligned} \Delta y &= \left(x^n + nx^{n-1} \cdot \Delta x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} \cdot (\Delta x)^2 + \dots + (\Delta x)^n \right) - x^n = \\ &= nx^{n-1} \cdot \Delta x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} \cdot (\Delta x)^2 + \dots + (\Delta x)^n; \end{aligned}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} \cdot \Delta x + \dots + (\Delta x)^{n-1};$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} \cdot \Delta x + \dots + (\Delta x)^{n-1} \right) = nx^{n-1};$$

$$\boxed{(x^n)' = nx^{n-1}}.$$

Например: $(x^3)' = 3x^2$; $(x^2)' = 2x$; $(x)' = 1$.

2.2. $f(x) = \frac{1}{x}$.

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = -\frac{\Delta x}{x(x + \Delta x)}; \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{x(x + \Delta x)};$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{x(x + \Delta x)} = -\frac{1}{x^2}; \quad \boxed{\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}}.$$

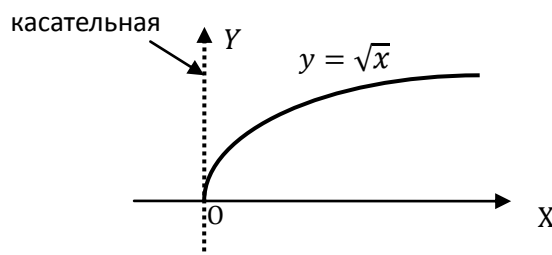
2.3. $f(x) = \sqrt{x}$.

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x} = \frac{\Delta x}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}; \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}};$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}; \quad \boxed{(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}}.$$

Замечание. При $x = 0$ имеем правостороннюю производную:

$$f'(0+) = (\sqrt{x})'(0+) = +\infty.$$



3. Степенная функция. Общий случай: $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in R$.

$$3.1. \quad x \neq 0; \quad \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^\alpha - x^\alpha = x^\alpha \cdot \left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^\alpha - 1 \right];$$

$$\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^\alpha - 1 \sim \alpha \cdot \frac{\Delta x}{x} \text{ при } \Delta x \rightarrow 0;$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^\alpha \cdot \alpha \cdot \frac{\Delta x}{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(x^\alpha \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} \right) = \alpha x^{\alpha-1};$$

$$\boxed{(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}}.$$

3.2. $x = 0$; в этом случае $\alpha > 0$.

$$\Delta y = f(0 + \Delta x) - f(0) = (\Delta x)^\alpha - 0 = (\Delta x)^\alpha;$$

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^\alpha}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x)^{\alpha-1} = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha > 1 \\ 1, & \text{если } \alpha = 1 \\ \infty, & \text{если } \alpha < 1 \end{cases}.$$

$$\text{Например: } \left(\sqrt[3]{x^2}\right)'(0) = \left(x^{\frac{2}{3}}\right)'(0) = \infty; \quad \left(\sqrt{x^3}\right)'(0) = \left(x^{\frac{3}{2}}\right)'(0) = 0.$$

4. Показательная функция: $f(x) = a^x$, где $a \in R$, $a > 0$, $a \neq 1$.

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x \cdot (a^{\Delta x} - 1);$$

$$a^{\Delta x} - 1 \sim \Delta x \cdot \ln a \text{ при } \Delta x \rightarrow 0;$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^x \cdot (a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^x \cdot \Delta x \cdot \ln a}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (a^x \cdot \ln a) = a^x \cdot \ln a;$$

$$\boxed{(a^x)' = a^x \cdot \ln a}; \text{ в частности: } \boxed{(e^x)' = e^x}.$$

5. Логарифмическая функция: $f(x) = \log_a x$, где $a \in R$, $a > 0$, $a \neq 1$.

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \log_a(x + \Delta x) - \log_a x = \log_a \left(\frac{x + \Delta x}{x} \right) = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right);$$

$$\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right) \sim \frac{\Delta x}{x \cdot \ln a} \text{ при } \Delta x \rightarrow 0;$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta x}{x \cdot \ln a}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x \cdot \ln a} \right) = \frac{1}{x \cdot \ln a};$$

$$\boxed{(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}}; \text{ в частности: } \boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}}.$$

6. Тригонометрические функции.

$$6.1. \quad f(x) = \sin x;$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right);$$

$$\sin \frac{\Delta x}{2} \sim \frac{\Delta x}{2} \text{ при } \Delta x \rightarrow 0;$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x; \quad \boxed{(\sin x)' = \cos x}.$$

6.2. $f(x) = \cos x$;

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \cos(x + \Delta x) - \cos x = -2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \sin \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right);$$

$$\sin \frac{\Delta x}{2} \sim \frac{\Delta x}{2} \quad \text{при } \Delta x \rightarrow 0;$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \sin \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-2 \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot \sin \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$= -\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = -\sin x; \quad \boxed{(\cos x)' = -\sin x}.$$

Ниже будут выведены формулы для производных функций $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$, а также обратных тригонометрических функций.

Замечание.

Все рассмотренные выше основные элементарные функции имеют конечные производные в любой точке из области определения этих функций за единственным исключением: производная степенной функции $y = x^\alpha$ при $0 < \alpha < 1$ в точке 0 равна ∞ .

§ 3. Понятие дифференцируемости.

Дана функция $y = f(x)$ с областью определения D_f и $x_0 \in D_f$. Предполагается, что $U(x_0) \subset D_f$, или $[x_0; x_0 + \delta) \subset D_f$, или $(x_0 - \delta; x_0] \subset D_f$ при некотором $\delta > 0$.

Пусть $x \in D_f$, $\Delta x = x - x_0$ - *приращение аргумента*; $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ - *приращение функции*.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *дифференцируемой* в точке x_0 , если ее приращение Δy может быть представлено в виде:

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x,$$

где A — некоторое число, не зависящее от Δx , а $\alpha(\Delta x) \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$.

Или иначе: функция $y = f(x)$ называется *дифференцируемой* в точке x_0 , если ее приращение Δy может быть представлено в виде суммы 2-х бесконечно малых функций: 1) линейной относительно Δx и 2) бесконечно малой более высокого порядка, чем Δx , т.е.

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + o(\Delta x) \quad \text{при } \Delta x \rightarrow 0.$$

Замечание.

Число A (коэффициент *линейной части* приращения Δy) не зависит от Δx , но может зависеть от точки x_0 . При этом если $A \neq 0$, то, как известно, величина $A \cdot \Delta x$ является *главной частью* приращения Δy : $\Delta y \sim A \cdot \Delta x$ при $\Delta x \rightarrow 0$ (см. [9], глава 4, §9).

Пример. $f(x) = x^2$, $x_0 = 1$;

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (1 + \Delta x)^2 - 1^2 = 2 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2;$$

здесь $A = 2$, $A \cdot \Delta x = 2 \cdot \Delta x$, $\alpha(\Delta x) = \Delta x$, $o(\Delta x) = (\Delta x)^2$; $\Delta y = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$;

Следовательно, функция $f(x) = x^2$ дифференцируема в точке $x_0 = 1$.

Теорема (критерий дифференцируемости).

Для того чтобы функция $f(x)$ была дифференцируемой в точке x_0 , необходимо и достаточно, чтобы она имела в этой точке конечную производную:

$f(x)$ – дифференцируема в точке $x_0 \Leftrightarrow \exists f'(x_0)$ и конечна.

Доказательство.

Необходимость. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 , т.е.

$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$, где $A = \text{const}$, $\alpha(\Delta x) \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$; тогда

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x)$, где $\alpha(\Delta x) \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$; следовательно,

$\exists \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A$, т.е. $\exists f'(x_0) = A$.

Достаточность. Пусть $\exists f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A$; тогда

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x)$, где $\alpha(\Delta x) \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$;

умножая обе части равенства на Δx , получим:

$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$, где $A = \text{const}$, $\alpha(\Delta x) \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$;

следовательно, функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 .

Теорема доказана.

Из этой теоремы следует, что дифференцируемость функции в заданной точке равносильна наличию конечной производной функции в этой точке.

Все рассмотренные в §5 основные элементарные функции – дифференцируемы в любой точке из области определения этих функций за единственным исключением: степенная функция $y = x^\alpha$ при $0 < \alpha < 1$ в точке $x = 0$ не дифференцируема, так как ее производная в этой точке равна ∞ .

Примером не дифференцируемой функции является также функция

$f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{если } x \neq 0 \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}$, которая не дифференцируема в точке $x = 0$: в этой

точке производная не существует (см. Пример 5 из §1).

В дальнейшем термин "дифференцирование" функции будет означать процесс нахождения ее производной.

Замечание.

Из доказательства теоремы следует, что если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 , то ее приращение в этой точке выражается равенством:

$$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x,$$

где $\alpha(\Delta x) \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$. В дальнейшем дополнительно будем считать, что $\alpha(0) = 0$.

Связь между непрерывностью и дифференцируемостью функции.

Теорема (необходимое условие дифференцируемости).

Если функция $f(x)$ — дифференцируема в точке x_0 , то она и непрерывна в точке x_0 .

Доказательство.

Если функция $f(x)$ — дифференцируема в точке x_0 , то $\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$, где A — некоторое число, не зависящее от Δx , а $\alpha(\Delta x) \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$. Тогда

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x) = 0, \text{ т.е. имеем: } \Delta y \rightarrow 0 \text{ при } \Delta x \rightarrow 0,$$

а это означает непрерывность функции $f(x)$ в точке x_0 (см. [9], глава 5, §1).

Теорема доказана.

Замечание.

Обратное утверждение неверно: из непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 не следует ее дифференцируемость в этой точке.

Например, функция $f(x) = |x|$ непрерывна в точке $x = 0$, но она в этой точке не дифференцируема, т.к. $f'(0)$ не существует (см. §1).

Другим примером непрерывной, но не дифференцируемой функции будет

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{если } x \neq 0; \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}; \text{ эта функция не дифференцируема в точке } x = 0, \text{ но она}$$

непрерывна в этой точке, т.к. $f(0) = 0$ и $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ (т.к. произведение бесконечно малой на ограниченную — есть бесконечно малая).

§ 4. Правила вычисления производных.

Теорема 1.

Пусть функции $u = u(x)$, $v = v(x)$ — дифференцируемые функции, $C = \text{const}$. Тогда дифференцируемы также функции $C \cdot u$, $C \cdot v$, $u + v$, $u - v$, $u \cdot v$ и справедливы следующие правила:

1. $(C \cdot u)' = C \cdot u'$, $(C \cdot v)' = C \cdot v'$
(постоянный множитель можно вынести за знак производной);
2. $(u + v)' = u' + v'$, $(u - v)' = u' - v'$
(производная суммы и разности равна сумме и разности производных);
3. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$.

Если $v(x) \neq 0$, то дифференцируемы также функции $\frac{1}{v}$, $\frac{u}{v}$ и справедливы равенства:

$$4. \left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}.$$

$$5. \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}.$$

Доказательство.

1. Пусть $y = C \cdot u$; тогда

$$\Delta y = C \cdot u(x + \Delta x) - C \cdot u(x) = C \cdot (u(x + \Delta x) - u(x)) = C \cdot \Delta u;$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{C \cdot \Delta u}{\Delta x} = C \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} C \cdot u', \text{ т. е. } \exists (C \cdot u)' = C \cdot u'. \quad \text{Правило 1 — доказано.}$$

2. Пусть $y = u + v$; тогда

$$\begin{aligned} \Delta y &= (u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x)) - (u(x) + v(x)) = \\ &= (u(x + \Delta x) - u(x)) + (v(x + \Delta x) - v(x)) = \Delta u + \Delta v; \end{aligned}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} u' + v', \text{ т. е. } \exists (u + v)' = u' + v'.$$

Аналогично для функции $u - v$. Правило 2 — доказано.

3. Пусть $y = u \cdot v$; тогда

$$\begin{aligned} \Delta y &= u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x) = \\ &= (u(x) + \Delta u) \cdot (v(x) + \Delta v) - u(x) \cdot v(x) = u(x) \cdot \Delta v + \Delta u \cdot v(x) + \Delta u \cdot \Delta v; \end{aligned}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u(x) \cdot \Delta v + \Delta u \cdot v(x) + \Delta u \cdot \Delta v}{\Delta x} = u(x) \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + v(x) \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \Delta v;$$

так как $\Delta v \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} 0$ (из непрерывности дифференцируемой функции), то получим:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} u(x) \cdot v' + v(x) \cdot u' + u' \cdot 0 = u' \cdot v + u \cdot v', \text{ т. е. } (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

Правило 3 — доказано.

4. Пусть $y = \frac{1}{v}$; тогда

$$\Delta y = \frac{1}{v(x + \Delta x)} - \frac{1}{v(x)} = \frac{v(x) - v(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x) \cdot v(x)} = \frac{-\Delta v}{(v(x) + \Delta v) \cdot v(x)};$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = - \frac{\frac{\Delta v}{\Delta x}}{(v(x) + \Delta v) \cdot v(x)} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} - \frac{v'}{(v(x) + 0) \cdot v(x)} = - \frac{v'}{v^2}, \text{ т. е. } \left(\frac{1}{v}\right)' = - \frac{v'}{v^2}.$$

Правило 4 — доказано.

$$\begin{aligned} 5. \quad y &= \frac{u}{v} = u \cdot \frac{1}{v}; \text{ по формулам 3 и 4 имеем: } \left(\frac{u}{v}\right)' = \left(u \cdot \frac{1}{v}\right)' = u' \cdot \frac{1}{v} + u \cdot \left(\frac{1}{v}\right)' = \\ &= u' \cdot \frac{1}{v} + u \cdot \left(-\frac{v'}{v^2}\right) = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}. \text{ Правило 5 — доказано.} \end{aligned}$$

Примеры.

$$1) \quad \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x};$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$2) \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x};$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = \frac{(\cos x)' \cdot \sin x - \cos x \cdot (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = - \frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$\boxed{(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}},$$

$$\boxed{(\operatorname{ctg} x)' = - \frac{1}{\sin^2 x}}.$$

Производная сложной функции.

Рассмотрим сложную функцию $y = F(x) = f(\varphi(x))$, которая является композицией функций: $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$.

Теорема 2. Пусть функция $\varphi(x)$ дифференцируема в точке x_0 , а функция $f(u)$ дифференцируема в точке u_0 , где $u_0 = \varphi(x_0)$. Тогда сложная функция $F(x) = f(\varphi(x))$ дифференцируема в точке x_0 и справедливо следующее равенство (*правило цепочки*):

$$F'(x_0) = f'(u_0) \cdot \varphi'(x_0).$$

Доказательство.

Из дифференцируемости функции $y = f(u)$ имеем равенство:

$$\Delta y = f'(u_0) \cdot \Delta u + \alpha(\Delta u) \cdot \Delta u, \quad \text{где } \alpha(\Delta u) \rightarrow 0 \text{ при } \Delta u \rightarrow 0.$$

$$\text{Тогда } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f'(u_0) \cdot \Delta u + \alpha(\Delta u) \cdot \Delta u}{\Delta x} = f'(u_0) \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha(\Delta u) \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x};$$

Из дифференцируемости функции $u = \varphi(x)$ следует:

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} \varphi'(x_0) \text{ и } \Delta u \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} 0 \text{ (ввиду непрерывности дифференцируемой функции),}$$

тогда и $\alpha(\Delta u) \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$. Переходя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, получим:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u_0) \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha(\Delta u) \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} f'(u_0) \cdot \varphi'(x_0) + 0 \cdot \varphi'(x_0) = f'(u_0) \cdot \varphi'(x_0).$$

Теорема доказана.

Замечание. При вычислении производных *правило цепочки* удобно записывать в виде:

$$\boxed{y'_x = y'_u \cdot u'_x},$$

подробнее: $F'(x) = (f(\varphi(x)))' = [u = \varphi(x)] = (f(u))'_x = f'(u) \cdot u'_x = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$.

Примеры.

$$1) y = e^{-x};$$

$$y'_x = (e^{-x})' = [u = -x] = (e^u)' = e^u \cdot u'_x = e^{-x} \cdot (-x)' = e^{-x} \cdot (-1) = -e^{-x}.$$

$$2) y = \sin(x^2);$$

$$y'_x = (\sin(x^2))' = [u = x^2] = (\sin u)' = \cos u \cdot u'_x = \cos(x^2) \cdot (x^2)' = \cos(x^2) \cdot 2x = 2x \cdot \cos(x^2).$$

$$3) y = \sin^5 x;$$

$$y'_x = (\sin^5 x)' = ((\sin x)^5)' = [u = \sin x] = (u^5)' = 5u^4 \cdot u'_x = 5(\sin x)^4 \cdot (\sin x)' = 5\sin^4 x \cdot \cos x.$$

Правило цепочки остается в силе, если сложная функция является композицией более чем 2-х функций. Например, для композиции 3-х функций имеем:

$$y = f(u), \quad u = \varphi(v), \quad v = g(x); \quad y = f(\varphi(g(x))) \Rightarrow y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot g'_x = f'_u \cdot \varphi'_v \cdot g'_x.$$

$$4) y = \ln^3(\operatorname{tg} x);$$

$$\begin{aligned} y'_x &= (\ln^3(\operatorname{tg} x))' = ((\ln(\operatorname{tg} x))^3)' = [u = \ln(\operatorname{tg} x)] = (u^3)' = 3u^2 \cdot u'_x = \\ &= 3(\ln(\operatorname{tg} x))^2 \cdot (\ln(\operatorname{tg} x))' = [v = \operatorname{tg} x] = 3\ln^2(\operatorname{tg} x) \cdot (\ln v)' = 3\ln^2(\operatorname{tg} x) \cdot \frac{1}{v} \cdot v'_x = \\ &= 3\ln^2(\operatorname{tg} x) \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot (\operatorname{tg} x)' = 3\ln^2(\operatorname{tg} x) \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{3\ln^2(\operatorname{tg} x)}{\sin x \cdot \cos x}. \end{aligned}$$

$$5) y = 2^{\sqrt{x^3+2x}};$$

$$\begin{aligned} y'_x &= (2^{\sqrt{x^3+2x}})' = [u = \sqrt{x^3+2x}] = (2^u)' = 2^u \cdot \ln 2 \cdot u'_x = 2^{\sqrt{x^3+2x}} \cdot \ln 2 \cdot (\sqrt{x^3+2x})' = \\ &= [v = x^3+2x] = 2^{\sqrt{x^3+2x}} \cdot \ln 2 \cdot (\sqrt{v})' = 2^{\sqrt{x^3+2x}} \cdot \ln 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{v}} \cdot v'_x = \\ &= 2^{\sqrt{x^3+2x}} \cdot \ln 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^3+2x}} \cdot (x^3+2x)' = 2^{\sqrt{x^3+2x}} \cdot \ln 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^3+2x}} \cdot (3x^2+2). \end{aligned}$$

Производные гиперболических функций.

$$1) \text{ Функция гиперболический синус: } sh\,x = \frac{1}{2} \cdot (e^x - e^{-x});$$

$$(sh\,x)' = \frac{1}{2} \cdot (e^x - e^{-x})' = \frac{1}{2} \cdot ((e^x)' - (e^{-x})') = \frac{1}{2} \cdot (e^x - (-e^{-x})) = \frac{1}{2} \cdot (e^x + e^{-x}).$$

$$5) \text{ Функция гиперболический косинус: } ch\,x = \frac{1}{2} \cdot (e^x + e^{-x});$$

$$(ch\,x)' = \frac{1}{2} \cdot (e^x + e^{-x})' = \frac{1}{2} \cdot ((e^x)' + (e^{-x})') = \frac{1}{2} \cdot (e^x + (-e^{-x})) = \frac{1}{2} \cdot (e^x - e^{-x}).$$

$$6) \text{ Функция гиперболический тангенс: } th\,x = \frac{sh\,x}{ch\,x};$$

$$(th\,x)' = \frac{(sh\,x)' \cdot ch\,x - sh\,x \cdot (ch\,x)'}{ch^2 x} = \frac{ch^2 x - sh^2 x}{ch^2 x} = \frac{1}{ch^2 x}.$$

$$7) \text{ Функция гиперболический котангенс: } cth\,x = \frac{ch\,x}{sh\,x};$$

$$(cth\,x)' = \frac{(ch\,x)' \cdot sh\,x - ch\,x \cdot (sh\,x)'}{sh^2 x} = \frac{sh^2 x - ch^2 x}{sh^2 x} = -\frac{1}{sh^2 x}.$$

Таким образом, получили формулы для производных гиперболических функций:

$$\boxed{\begin{matrix} (sh\,x)' = ch\,x \\ (ch\,x)' = sh\,x \end{matrix}}, \quad \boxed{(th\,x)' = \frac{1}{ch^2 x}}, \quad \boxed{(cth\,x)' = -\frac{1}{sh^2 x}}.$$

Производная обратной функции.

Рассмотрим функцию $f(x)$ — строго монотонную и непрерывную на некотором промежутке D с областью значений E . Тогда, как известно, существует обратная функция $f^{-1}(y)$, которая является непрерывной на множестве E (см. [9], глава 5, §5).

Теорема.

Пусть $y = f(x)$ — строго монотонная и непрерывная функция на промежутке D , $x_0 \in D$, $y_0 = f(x_0)$. Пусть $f(x)$ — дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) \neq 0$. Тогда обратная функция $x = f^{-1}(y)$ — дифференцируема в точке y_0 , при этом:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Доказательство.

Если Δy – приращение функции $f(x)$, то Δx – приращение обратной функции $f^{-1}(y)$: $\Delta x = f^{-1}(y_0 + \Delta y) - f^{-1}(y_0)$.

Из непрерывности обратной функции следует, что если $\Delta y \rightarrow 0$, то и $\Delta x \rightarrow 0$, причем если $\Delta y \neq 0$, то и $\Delta x \neq 0$, и наоборот (ввиду строгой монотонности этих функций).

Тогда имеем:

$$\begin{aligned}(f^{-1})'(y_0) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(y_0 + \Delta y) - f^{-1}(y_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \\ &= \frac{1}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x_0)}.\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Замечание. Формулы для производных взаимно-обратных функций можно записать в

виде: $y'_x = \frac{1}{x'_y}$ или $x'_y = \frac{1}{y'_x}$.

Производные обратных тригонометрических функций.

8) $y = \arcsin x$; $x = \sin y$; $x \in [-1; 1]$; $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ при } x \neq \pm 1 (\cos y \neq 0).$$

9) $y = \arccos x$; $x = \cos y$; $x \in [-1; 1]$; $y \in [0; \pi]$.

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\cos y)'} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sin(\arccos x)} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ при } x \neq \pm 1 (\sin y \neq 0).$$

10) $y = \operatorname{arctg} x$; $x = \operatorname{tg} y$; $x \in (-\infty; +\infty)$; $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \cos^2 y = \cos^2(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

11) $y = \operatorname{arcc tg} x$; $x = \operatorname{ctg} y$; $x \in (-\infty; +\infty)$; $y \in (0; \pi)$.

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\operatorname{ctg} y)'} = -\sin^2 y = -\sin^2(\operatorname{arcc tg} x) = -\frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2(\operatorname{arcc tg} x)} = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

Таким образом, имеем формулы для производных обратных тригонометрических функций:

$$\boxed{(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}, \quad \boxed{(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}, \quad x \in (-1; +1);$$

$$\boxed{(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}}, \quad \boxed{(\operatorname{arcc tg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}}, \quad x \in (-\infty; +\infty).$$

Замечание.

Функции $\operatorname{arctg} x$ и $\operatorname{arcc tg} x$ имеют конечные производные в любой точке из области определения; функции $\arcsin x$ и $\arccos x$ имеют конечные производные в любой точке из области определения за исключением точек $x = \pm 1$, в которых производные равны ∞ .

Полученные формулы для производных основных элементарных функций, а также правила вычисления производных сведем в таблицы.

Таблица производных.

1.	$y = 1$	$y' = 0$
2.	$y = x$	$y' = 1$
3.	$y = x^\alpha$	$y' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$
	$y = \frac{1}{x}$	$y' = -\frac{1}{x^2}$
	$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
4.	$y = a^x$	$y' = a^x \cdot \ln a$
	$y = e^x$	$y' = e^x$
5.	$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$
	$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
6.	$y = \sin x$	$y' = \cos x$
7.	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
8.	$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$
9.	$y = \operatorname{ctg} x$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
10.	$y = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
11.	$y = \arccos x$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12.	$y = \operatorname{arctg} x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$
13.	$y = \operatorname{arctg} x$	$y' = -\frac{1}{1+x^2}$
14.	$y = \operatorname{sh} x$	$y' = \operatorname{ch} x$
15.	$y = \operatorname{ch} x$	$y' = \operatorname{sh} x$
16.	$y = \operatorname{th} x$	$y' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
17.	$y = \operatorname{cth} x$	$y' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$

Правила вычисления производных.

$$u = u(x), \quad v = v(x), \quad C = \text{const.}$$

- $(C)' = 0$
- $(C \cdot u)' = C \cdot u', \quad (C \cdot v)' = C \cdot v'$
- $(u \pm v)' = u' \pm v'$
- $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$
- $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$
- $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
- $y = f(u), \quad u = \varphi(x) \Rightarrow y'_x = y'_u \cdot u'_x$
- $y = f(x), \quad x = f^{-1}(y) \Rightarrow y'_x = \frac{1}{x'_y}$

§ 5. Специальные методы дифференцирования функций.

До сих пор мы рассматривали функции, заданные в явном виде: $y = f(x)$ или

$y = \begin{cases} f_1(x), & x \in X_1 \\ \dots & \dots \\ f_k(x), & x \in X_k \end{cases}$. Однако есть функции, заданные аналитически, но не в явном виде. И для таких функций также возникает вопрос об их дифференцировании.

1. Дифференцирование неявных функций.

Пусть дано уравнение вида:

$$F(x, y) = 0,$$

связывающее две переменные x и y . Если для каждого фиксированного значения x из некоторого множества X уравнение имеет единственное решение y , то говорят, что это уравнение задает *неявную функцию* $y = y(x)$, $x \in X$.

Из определения *неявной функции* следует, что для всех $x \in X$ выполняется равенство:

$$F(x, y(x)) = 0.$$

Всякую явно заданную функцию $y = f(x)$ можно записать как неявно заданную уравнением: $y - f(x) = 0$, но не наоборот: не любую неявно заданную функцию можно записать в виде явной функции.

Например, неявную функцию, заданную уравнением $5x - 3y = 0$, можно задать и явно: $y = \frac{5}{3}x$, а неявную функцию, заданную уравнением $5x - 3y = \cos y$, явно задать не удастся.

Не всегда уравнение вида: $F(x, y) = 0$ — задает какую-либо неявную функцию. Например, уравнение $x^2 + y^2 + 1 = 0$ — не задает никакой функции.

Вопросы существования неявной функции, ее непрерывности и дифференцируемости рассматриваются в последующих разделах математического анализа.

Здесь мы рассмотрим лишь метод вычисления производных неявных функций, предполагая дифференцируемость этих функций.

Основная идея метода заключается в том, чтобы продифференцировать обе части уравнения $F(x, y) = 0$ по переменной x , рассматривая при этом y как функцию от x , и полученное затем уравнение разрешить относительно y' . Полученное значение y' будет выражаться через аргумент x и неявную (неизвестную) функцию y .

Примеры.

1) $x^3 + y^3 - 3xy = 0;$

$$(x^3 + y^3 - 3xy)'_x = (0)'_x = 0; \quad 3x^2 + 3y^2 \cdot y' - 3(1 \cdot y + x \cdot y') = 0;$$

$$x^2 + y^2 \cdot y' - y - x \cdot y' = 0; \quad y^2 \cdot y' - x \cdot y' = y - x^2;$$

$$(y^2 - x) \cdot y' = y - x^2 \Rightarrow y' = \frac{y - x^2}{y^2 - x} \quad (y^2 - x \neq 0).$$

$$2) \quad xy = \arctg \frac{x}{y};$$

$$(xy)'_x = \left(\arctg \frac{x}{y} \right)'_x; \quad 1 \cdot y + x \cdot y' = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y} \right)^2} \cdot \left(\frac{x}{y} \right)'_x;$$

$$y + x \cdot y' = \frac{y^2}{x^2 + y^2} \cdot \frac{1 \cdot y - x \cdot y'}{y^2}; \quad (x^2 + y^2) \cdot (y + x \cdot y') = y - x \cdot y';$$

$$(x^2 + y^2) \cdot x \cdot y' + x \cdot y' = y - (x^2 + y^2) \cdot y;$$

$$(x^2 + y^2 + 1) \cdot x \cdot y' = (1 - x^2 - y^2) \cdot y \Rightarrow y' = \frac{y \cdot (1 - x^2 - y^2)}{x \cdot (1 + x^2 + y^2)}.$$

2. Дифференцирование параметрически заданных функций.

Зависимость между переменными x и y может быть выражена через вспомогательную переменную, называемую *параметром*:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in T \quad (t - \text{параметр, } T - \text{некоторый промежуток}).$$

Если функция $x(t)$ имеет обратную функцию $t(x)$, то $y = y(t(x))$ – сложная функция от x . Пусть функции $x(t)$ и $y(t)$ – дифференцируемы по переменной t , тогда

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Полученное значение y'_x также будет выражаться через параметр t .

Таким образом, для параметрически заданной функции имеем:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \Rightarrow \boxed{y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}}.$$

Пример 3.

$$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases} \Rightarrow y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(1 - \cos t)'_t}{(t - \sin t)'_t} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \frac{2 \sin \frac{t}{2} \cdot \cos \frac{t}{2}}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} = \frac{\cos \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{t}{2}.$$

3. Логарифмическое дифференцирование.

При вычислении производных некоторых функций целесообразно сначала *прологарифмировать* (по любому основанию) заданные функции, а затем результат продифференцировать. Такая операция называется *логарифмическим дифференцированием*:

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Rightarrow \ln y = \ln f(x) = \varphi(x) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\ln y)' = \varphi'(x) \Rightarrow \frac{y'}{y} = \varphi'(x) \Rightarrow y' = y \cdot \varphi'(x) = f(x) \cdot \varphi'(x). \end{aligned}$$

Естественно, что логарифмирование целесообразно применять в тех случаях, когда выражение $\ln f(x)$ можно упростить для последующего дифференцирования.

Упрощение этого выражения возможно, например, при использовании свойств логарифма (логарифм произведения и частного, логарифм степени) в следующих случаях:

$$\begin{aligned}
 1) \quad y &= \frac{u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_k}{v_1 \cdot v_2 \cdot \dots \cdot v_m}, \quad u_i = u_i(x), \quad v_j = v_j(x) \Rightarrow \\
 \ln y &= \ln u_1 + \ln u_2 + \dots + \ln u_k - \ln v_1 - \ln v_2 - \dots - \ln v_m \Rightarrow \\
 \frac{y'}{y} &= \frac{u_1'}{u_1} + \frac{u_2'}{u_2} + \dots + \frac{u_k'}{u_k} - \frac{v_1'}{v_1} - \frac{v_2'}{v_2} - \dots - \frac{v_m'}{v_m} \Rightarrow \\
 y' &= y \cdot \left(\frac{u_1'}{u_1} + \frac{u_2'}{u_2} + \dots + \frac{u_k'}{u_k} - \frac{v_1'}{v_1} - \frac{v_2'}{v_2} - \dots - \frac{v_m'}{v_m} \right) \Rightarrow \\
 y' &= \frac{u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_k}{v_1 \cdot v_2 \cdot \dots \cdot v_m} \cdot \left(\frac{u_1'}{u_1} + \frac{u_2'}{u_2} + \dots + \frac{u_k'}{u_k} - \frac{v_1'}{v_1} - \frac{v_2'}{v_2} - \dots - \frac{v_m'}{v_m} \right); \\
 2) \quad y &= u^v \text{ (степенно-показательная функция), } u = u(x), v = v(x) \Rightarrow \\
 \ln y &= \ln u^v = v \cdot \ln u \Rightarrow \frac{y'}{y} = (v \cdot \ln u)' = v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{u'}{u} \Rightarrow \\
 y' &= y \cdot \left(v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{u'}{u} \right) = u^v \cdot \left(v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{u'}{u} \right).
 \end{aligned}$$

Примеры.

$$\begin{aligned}
 4) \quad y &= \frac{(x^3 + 1) \cdot \sqrt[4]{2x-3} \cdot \operatorname{tg} x}{\sqrt[5]{(x+2)^7} \cdot (3x-1)^6}; \\
 \ln y &= \ln(x^3 + 1) + \frac{1}{4} \cdot \ln(2x-3) + \ln(\operatorname{tg} x) - \frac{7}{5} \cdot \ln(x+2) - 6 \cdot \ln(3x-1) \Rightarrow \\
 \frac{y'}{y} &= \frac{3x^2}{x^3+1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{2x-3} + \frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{7}{5} \cdot \frac{1}{x+2} - 6 \cdot \frac{3}{3x-1} \Rightarrow \\
 y' &= \frac{(x^3+1) \cdot \sqrt[4]{2x-3} \cdot \operatorname{tg} x}{\sqrt[5]{(x+2)^7} \cdot (3x-1)^6} \cdot \left(\frac{3x^2}{x^3+1} + \frac{1}{2 \cdot (2x-3)} + \frac{1}{\sin x \cdot \cos x} - \frac{7}{5 \cdot (x+2)} - \frac{18}{3x-1} \right). \\
 5) \quad y &= (\sin x)^{\cos x}; \\
 \ln y &= \ln(\sin x)^{\cos x} = \cos x \cdot \ln(\sin x) \Rightarrow \\
 \frac{y'}{y} &= (\cos x \cdot \ln(\sin x))' = -\sin x \cdot \ln(\sin x) + \cos x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow \\
 y' &= (\sin x)^{\cos x} \cdot \left(\frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x \cdot \ln(\sin x) \right).
 \end{aligned}$$

§ 6. Дифференциал функции.

Пусть функция $y = f(x)$ — дифференцируема в точке x_0 (см. §3); тогда приращение Δy может быть представлено в виде суммы двух бесконечно малых функций:

- главной части (линейной относительно Δx) и
- бесконечно малой более высокого порядка, чем Δx :

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + o(\Delta x) \text{ при } \Delta x \rightarrow 0, \text{ где } A = f'(x_0).$$

Определение. Дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется главная часть (линейная относительно Δx) приращения Δy функции $y = f(x)$, т.е. слагаемое $A \cdot \Delta x$, где $A = f'(x_0)$. Обозначения: $dy(x_0)$, $df(x_0)$, или dy , df .

Итак, по определению:

$$dy(x_0) = A \cdot \Delta x = f'(x_0) \cdot \Delta x, \text{ или } df(x_0) = A \cdot \Delta x = f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

Если точка x_0 — не указана, то пишут: $dy = y' \cdot \Delta x$, или $df = f'(x) \cdot \Delta x$.

Примеры.

1) $f(x) = x^3$, $x_0 = 2$, $\Delta x = 0,5$;

$$dy(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x, \quad f'(x) = 3x^2, \quad f'(x_0) = 12 \Rightarrow dy(x_0) = 12 \cdot 0,5 = 6.$$

2) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$;

$$dy(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x, \quad f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad f'(x_0) = 4 \Rightarrow dy(x_0) = 4 \cdot \Delta x.$$

3) $f(x) = \ln x$;

$$dy = y' \cdot \Delta x = \frac{1}{x} \cdot \Delta x.$$

Замечание.

Дифференциал dy функции $f(x)$ в точке x_0 зависит только от Δx , т.е. является функцией (линейной) одной переменной Δx . Если точка x_0 — произвольная, то dy зависит не только от Δx , но и от x_0 , т.е. является функцией двух переменных x_0 и Δx .

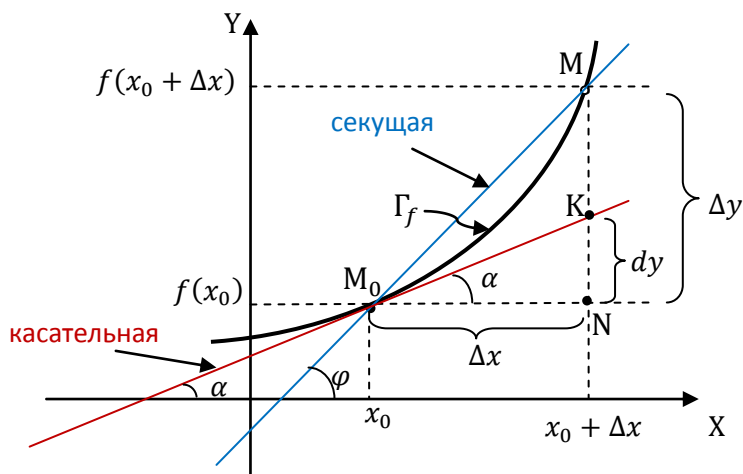
Геометрический смысл дифференциала.

Рассмотрим график Γ_f непрерывной функции $y = f(x)$ и точку $M_0(x_0, y_0)$ на этом графике. Проведем секущую $[M_0M]$ и касательную $[M_0K]$ к графику Γ_f в точке M_0 (см. рис.) Пусть α — угол между касательной и осью OX и Δx — приращение аргумента; тогда $M_0N = \Delta x$, $MN = \Delta y$ — приращение функции (приращение *ординаты* кривой).

Из геометрического смысла производной:

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha,$$

а также из формулы: $dy = f'(x_0) \cdot \Delta x$, — имеем: $dy = \operatorname{tg} \alpha \cdot M_0N = KN$ (приращение *ординаты* касательной).



Таким образом, дифференциал функции в точке равен приращению ординаты касательной, проведенной к графику функции в данной точке.

Механический смысл дифференциала.

Пусть $S = S(t)$ – путь, пройденный материальной точкой за время t при прямолинейном движении. Тогда $\Delta S = S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)$ – путь, пройденный точкой за время Δt .

Из механического смысла производной: $S'(t) = v(t)$, а также из формулы: $dS = S'(t_0) \cdot \Delta t$, – имеем: $dS = v(t_0) \cdot \Delta t$.

Таким образом, дифференциал функции $S = S(t)$ в момент времени t_0 равен пути, который прошла бы материальная точка за время Δt , если бы она двигалась все это время равномерно со скоростью $v(t_0) = S'(t_0)$.

Замечание.

Если применить формулу $dy = y' \cdot \Delta x$ для функции $f(x) = x$, то получим: $d(x) = (x)' \cdot \Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$, или:

$$\boxed{dx = \Delta x}.$$

Это означает, что дифференциал независимой переменной равен приращению этой переменной (дифференциал аргумента функции равен приращению этого аргумента).

Учитывая это равенство, в дальнейшем вместо Δx будем писать dx , а формула для дифференциала примет вид:

$$\boxed{dy = y' \cdot dx}.$$

Дифференциалы основных элементарных функций.

Дифференциал dy лишь множителем dx отличается от производной y' . Поэтому из таблицы производных легко получается таблица дифференциалов.

Таблица дифференциалов.

1.	$y = 1$	$dy = 0$
2.	$y = x$	$dy = dx$
3.	$y = x^\alpha$	$dy = \alpha \cdot x^{\alpha-1} dx$
	$y = \frac{1}{x}$	$dy = -\frac{dx}{x^2}$
	$y = \sqrt{x}$	$dy = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$
4.	$y = a^x$	$dy = a^x \cdot \ln a \, dx$
	$y = e^x$	$dy = e^x dx$
5.	$y = \log_a x$	$dy = \frac{dx}{x \cdot \ln a}$
	$y = \ln x$	$dy = \frac{dx}{x}$
6.	$y = \sin x$	$dy = \cos x \, dx$
7.	$y = \cos x$	$dy = -\sin x \, dx$

8.	$y = \operatorname{tg} x$	$dy = \frac{dx}{\cos^2 x}$
9.	$y = \operatorname{ctg} x$	$dy = -\frac{dx}{\sin^2 x}$
10.	$y = \arcsin x$	$dy = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
11.	$y = \arccos x$	$dy = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
12.	$y = \operatorname{arctg} x$	$dy = \frac{dx}{1+x^2}$
13.	$y = \operatorname{arctg} x$	$dy = -\frac{dx}{1+x^2}$
14.	$y = \operatorname{sh} x$	$dy = \operatorname{ch} x \, dx$
15.	$y = \operatorname{ch} x$	$dy = \operatorname{sh} x \, dx$
16.	$y = \operatorname{th} x$	$dy = \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x}$
17.	$y = \operatorname{cth} x$	$dy = -\frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x}$

Инвариантность формы дифференциала.

Если $y = f(u)$ – дифференцируемая функция, u – независимая переменная, то

$$dy = f'(u) \cdot du.$$

Пусть u – зависимая переменная, т.е. функция от другой переменной: $u = \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ – дифференцируемая функция; тогда $du = \varphi'(x) \cdot dx$.

Рассмотрим сложную функцию $y = f(\varphi(x))$ от переменной x и вычислим ее дифференциал: $dy = y'_x \cdot dx = y'_u \cdot u'_x \cdot dx = f'(u) \cdot (u'_x \cdot dx) = f'(u) \cdot du$, т.е. для сложной функции $y = f(u)$ форма дифференциала имеет тот же вид:

$$dy = f'(u) \cdot du.$$

Полученное свойство называется *инвариантностью* формы дифференциала.

Форма дифференциала не зависит от того, является ли аргумент функции зависимой переменной (т.е. функцией) или же независимой переменной.

Замечание.

Свойство *инвариантности* касается только формы дифференциала, а не его «содержания»: в случае независимой переменной u мы имеем: $du = \Delta u$; а в случае зависимой переменной u , вообще говоря, $du \neq \Delta u$.

Свойство инвариантности формы дифференциала удобно использовать при вычислении дифференциалов сложных функций.

Примеры.

4) $y = \sin(x^3);$

$$dy = d(\sin(x^3)) = [u = x^3] = d(\sin u) = \cos u \cdot du = \cos(x^3) \cdot d(x^3) = 3x^2 \cdot \cos(x^3) \, dx.$$

5) $y = \sin^3 x;$

$$dy = d(\sin^3 x) = [u = \sin x] = d(u^3) = 3u^2 \cdot du = 3\sin^2 x \cdot d(\sin x) = 3\sin^2 x \cdot \cos x \, dx.$$

Из правил вычисления производных (см. §4) сразу можно получить правила дифференцирования (т.е. правила вычисления дифференциалов).

Правила дифференцирования.

$$u = u(x), \quad v = v(x), \quad C = \text{const.}$$

1. $d(C) = 0$
2. $d(C \cdot u) = C \cdot du, \quad d(C \cdot v) = C \cdot dv$
3. $d(u \pm v) = du \pm dv$
4. $d(u \cdot v) = du \cdot v + u \cdot dv$
5. $d\left(\frac{1}{v}\right) = -\frac{dv}{v^2}$
6. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{du \cdot v - u \cdot dv}{v^2}$
7. $y = f(u), \quad u = \varphi(x) \Rightarrow dy = f'(u) \cdot du$
8. $y = f(x), \quad x = f^{-1}(y) \Rightarrow dy = \frac{dx}{x'_y}$

Например, формула 4 получается из следующих выкладок:

$$\begin{aligned} d(u \cdot v) &= (u \cdot v)' \cdot dx = (u' \cdot v + u \cdot v') \cdot dx = u' \cdot v \cdot dx + u \cdot v' \cdot dx = \\ &= (u' \cdot dx) \cdot v + u \cdot (v' \cdot dx) = du \cdot v + u \cdot dv. \end{aligned}$$

Аналогично — для остальных формул.

Применение дифференциала в приближенных вычислениях.

По определению дифференциала функции $y = f(x)$ в точке x_0 имеем:

$$\Delta y = dy + o(\Delta x) \text{ при } \Delta x \rightarrow 0.$$

Это означает, что $\Delta y \sim dy$ при $\Delta x \rightarrow 0$ (если $f'(x_0) \neq 0$), т.е. разность между приращением функции Δy и ее дифференциалом dy представляет собой бесконечно малую величину более высокого порядка, чем приращение аргумента Δx :

$$\frac{\Delta y - dy}{\Delta x} \rightarrow 0 \text{ при } \Delta x \rightarrow 0.$$

Это обстоятельство позволяет заменить величину Δy на величину dy и составить приближенное равенство:

$$\boxed{\Delta y \approx dy}.$$

При этом относительная погрешность приближенного равенства становится *сколь угодно малой при достаточно малом Δx* .

Выгода замены приращения функции Δy ее дифференциалом dy состоит в том, что dy зависит от приращения аргумента Δx линейно, в то время как Δy представляет собой обычно более сложную функцию от Δx .

Подставляя в приближенное равенство значения Δy и dy , получим:
 $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot \Delta x$, или:

$$\boxed{f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x}.$$

Например, для степенной функции $f(x) = x^\alpha$ имеем приближенное равенство:

$$(x_0 + \Delta x)^\alpha \approx x_0^\alpha + \alpha \cdot x_0^{\alpha-1} \cdot \Delta x.$$

Пусть $x_0 = 1$, тогда получим: $(1 + \Delta x)^\alpha \approx 1 + \alpha \cdot \Delta x$, в частности:

$$(1 + \Delta x)^2 \approx 1 + 2 \cdot \Delta x, \quad (1 + \Delta x)^3 \approx 1 + 3 \cdot \Delta x, \\ \sqrt{1 + \Delta x} \approx 1 + \frac{1}{2} \cdot \Delta x, \quad \sqrt[3]{1 + \Delta x} \approx 1 + \frac{1}{3} \cdot \Delta x \text{ и т.д.}$$

Если в приближенное равенство подставить $\Delta x = x - x_0$, то получим:

$$\boxed{f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)}.$$

Геометрически это означает замену участка графика функции, примыкающего к точке $M_0(x_0, f(x_0))$, отрезком касательной к графику функции в этой точке (см. рис. в начале этого параграфа: кривая M_0M заменяется отрезком M_0K).

Замечание.

Вопрос об оценке точности полученного приближенного равенства мы обсудим в главе 2 (в более общем случае). Здесь мы даем лишь «качественную» оценку точности: относительная погрешность становится *сколь угодно малой при достаточно малом Δx* .

Пример 6.

Вычислим приближенно значение $(2,01)^3$ и сравним его с точным значением.

Здесь $f(x) = x^3$, $x_0 = 2$, $\Delta x = 0,01$; $f(x_0) = 2^3 = 8$, $f'(x) = 3x^2$, $f'(x_0) = 3 \cdot 2^2 = 12$.

По формуле: $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$ — получим: $(2,01)^3 \approx 8 + 12 \cdot 0,01 = 8,12$.

Итак, приближенное значение: $(2,01)^3 \approx 8,12$;

точное значение: $(2,01)^3 = 8,120601$; $\Delta y = 0,120601$; $dy = 0,12$;

абсолютная погрешность: $0,000601 < 0,001$;

относительная погрешность формулы: $\frac{0,000601}{0,120601} = 0,00498 < 0,005$ ($= 0,5\%$);

относительная погрешность вычислений: $\frac{0,000601}{8,120601} = 0,000074 < 0,00008$ ($= 0,008\%$).

Глава 2. Основные теоремы дифференциального исчисления

Содержание

§ 1. Понятие экстремума. Теорема Ферма	28
§ 2. Теоремы Ролля, Лагранжа и Коши	30
§ 3. Производные высших порядков	34
§ 4. Формула Тейлора	40
§ 5. Раскрытие неопределенностей. Правило Лопиталья	50

§ 1. Понятие экстремума. Теорема Ферма.

Дана функция $y = f(x)$ с областью определения D_f и x_0 — внутренняя точка множества D_f .

Определение. Точка x_0 называется *точкой максимума* функции $y = f(x)$, если в **некоторой окрестности** этой точки значение $f(x_0)$ является наибольшим, т.е.

$$\exists U(x_0) \subset D_f: f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in U(x_0).$$

Значение $y_0 = f(x_0)$ называется *максимумом*.

Определение. Точка x_0 называется *точкой минимума* функции $y = f(x)$, если в **некоторой окрестности** этой точки значение $f(x_0)$ является наименьшим, т.е.

$$\exists U(x_0) \subset D_f: f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in U(x_0).$$

Значение $y_0 = f(x_0)$ называется *минимумом*.

Точки минимума и максимума называются *точками экстремума*. Значение функции в точке экстремума называется *экстремумом*.

Если в этих определениях выполняются строгие неравенства, то соответствующие точки называются *точками строгого экстремума*, а значения функции в этих точках — строгими экстремумами.

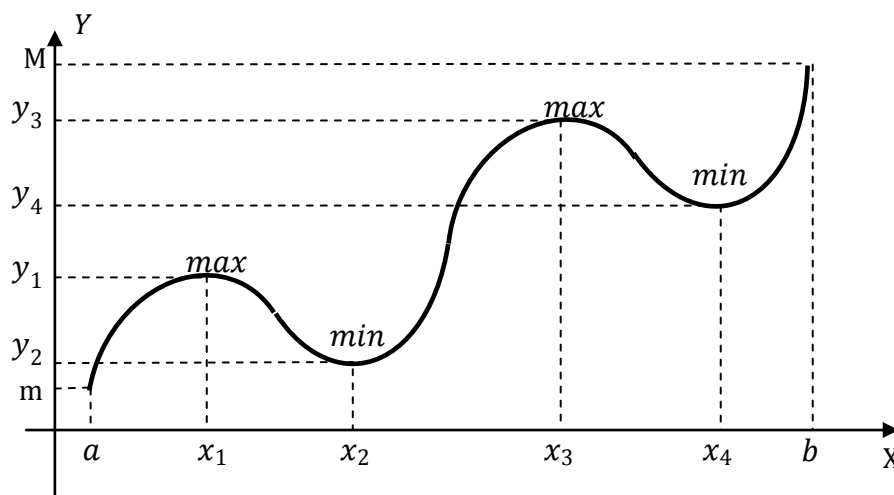
Замечание 1.

Точки экстремума называют еще точками *локального* экстремума, подчеркивая тем самым, что значение функции в точке экстремума сравнивается со значениями в точках из некоторой окрестности этой точки (т.е. в точках, сколь угодно близких к точке экстремума).

Замечание 2.

Если D_f — промежуток, то на этом промежутке может быть несколько точек экстремума и все они должны быть внутренними точками этого промежутка. Никакая точка экстремума не может совпадать с концом промежутка.

Кроме того, наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке могут достигаться в точках, отличных от точек экстремума (см. рис.)



На этом рисунке точки x_1, x_3 — точки максимума, точки x_2, x_4 — точки минимума; $y_4 > y_1$ (минимум больше максимума!); m — наименьшее значение функции, M — наибольшее значение функции; наименьшее и наибольшее значения функции здесь достигаются на концах промежутка ***a*** и ***b***.

Замечание 3.

Если наибольшее значение функции $f(x)$ на промежутке D_f достигается в некоторой внутренней точке c из этого промежутка, то эта точка c является точкой (одной из точек) максимума функции $f(x)$. Аналогично для наименьшего значения.

Понятие экстремума можно ввести, используя понятия приращений Δx и Δy .

Пусть $x \in U(x_0) \subset D_f$, $\Delta x = x - x_0$ — *приращение аргумента*;

$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ — *приращение функции*;

$$f(x_0) \geq f(x) \Leftrightarrow f(x) - f(x_0) \leq 0 \Leftrightarrow \Delta y \leq 0;$$

$$f(x_0) \leq f(x) \Leftrightarrow f(x) - f(x_0) \geq 0 \Leftrightarrow \Delta y \geq 0.$$

Условие: $x \in U(x_0)$ — равносильно условию: $\Delta x \in U(0)$ (здесь U — общее обозначение окрестности какой-нибудь точки, $U(x_0)$ и $U(0)$ — это разные окрестности).

Определение.

x_0 — т. *max* $\Leftrightarrow \exists U(0): \Delta y \leq 0 \quad \forall \Delta x \in U(0)$ (т.е. для всех достаточно малых Δx);

x_0 — т. *min* $\Leftrightarrow \exists U(0): \Delta y \geq 0 \quad \forall \Delta x \in U(0)$ (т.е. для всех достаточно малых Δx).

Теорема Ферма.

Пусть x_0 — точка экстремума функции $y = f(x)$. Если функция дифференцируема в точке x_0 , то ее производная в этой точке равна нулю:

$$x_0 \text{ — т. экстр.}, \exists f'(x_0) \text{ (конечная)} \Rightarrow f'(x_0) = 0.$$

Доказательство.

Пусть x_0 — точка *max*, тогда $\exists U(0): \Delta y \leq 0 \quad \forall \Delta x \in U(0)$.

Рассмотрим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$; для $\forall \Delta x > 0$ выполняется неравенство: $\frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0$,

а для $\forall \Delta x < 0$ — неравенство: $\frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$. Переходя к пределу в неравенствах, получим:

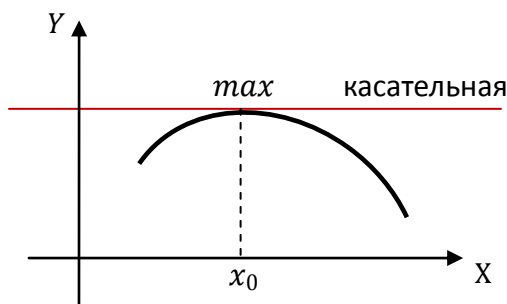
$$f'(x_0 + 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0,$$

$$f'(x_0 - 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-} \frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0.$$

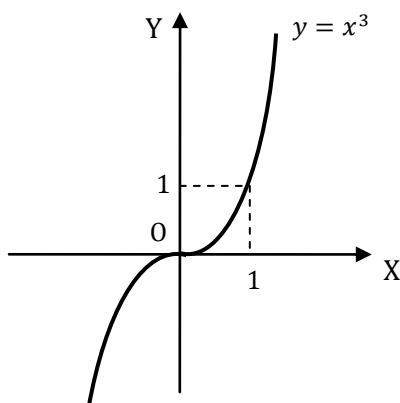
Так как функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 , то $f'(x_0 + 0) = f'(x_0 - 0) = f'(x_0)$. Следовательно, $f'(x_0) \leq 0$ и $f'(x_0) \geq 0$, но это возможно лишь при условии, что $f'(x_0) = 0$.

Аналогично доказывается в случае, когда x_0 — точка *min*. Теорема доказана.

Геометрический смысл теоремы Ферма заключается в том, что если в точке экстремума касательная к графику существует, то она параллельна оси OX (см. рис.)



Обратное утверждение к теореме Ферма неверно: если $f'(x_0) = 0$, то x_0 — может и не быть точкой экстремума. Например, функция $y = x^3$ в точке $x_0 = 0$ имеет производную, равную нулю: $f'(x) = 3x^2$, $f'(0) = 0$; однако эта точка не является точкой экстремума (см. рис.)



§ 2. Теоремы Ролля, Лагранжа и Коши.

В этом параграфе рассматриваются функции $y = f(x)$, заданные на отрезке $[a; b]$ и обладающие следующими свойствами:

- $f(x)$ — непрерывна на $[a; b]$;
- $f(x)$ — дифференцируема на $(a; b)$.

Так как из дифференцируемости функции на $(a; b)$ следует ее непрерывность на $(a; b)$, то вместо непрерывности на отрезке $[a; b]$ можно было бы потребовать лишь непрерывность на концах отрезка: в точках a и b (в точке a — непрерывность справа, в точке b — непрерывность слева).

Теорема Ролля (о корнях производной).

Пусть функция $f(x)$ определена на $[a; b]$ и обладает следующими свойствами:

- 1) $f(x)$ — непрерывна на $[a; b]$;
- 2) $f(x)$ — дифференцируема на $(a; b)$;
- 3) $f(a) = f(b)$, т.е. на концах промежутка функция принимает равные значения.

Тогда внутри промежутка $(a; b)$ найдется такая точка, в которой производная равна нулю:

$$\exists c \in (a; b): f'(c) = 0.$$

Доказательство.

Так как функция $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, то по теоремам Вейерштрасса (см. [9], глава 5, §4) $f(x)$ ограничена на $[a; b]$ и достигает в этом промежутке своего наибольшего и наименьшего значений:

$$M = \sup \{f(x), x \in [a; b]\}, \quad m = \inf \{f(x), x \in [a; b]\};$$

$$m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a; b];$$

$$\exists x_1, x_2 \in [a; b]: f(x_1) = m, f(x_2) = M.$$

Возможны два случая: 1) $m = M$ и 2) $m < M$.

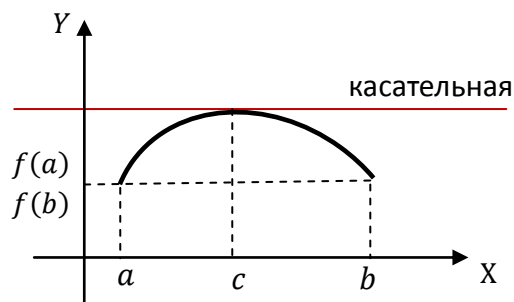
1) если $m = M$, то $m \leq f(x) \leq m \quad \forall x \in [a; b]$, т.е. $f(x) = m = \text{const}$ на $[a; b]$; следовательно: $f'(x) = (\text{const})' = 0 \quad \forall x \in (a; b)$.

2) $m < M$. В этом случае по крайней мере одна из точек x_1 или x_2 лежит внутри промежутка $(a; b)$. Действительно, если бы обе точки являлись концами отрезка $[a; b]$, то значения функции в этих точках совпадали бы: $f(a) = f(b) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow m = M$.

Пусть c — та из точек (x_1 или x_2), которая лежит внутри промежутка $(a; b)$. В точке c функция $f(x)$ принимает наименьшее или наибольшее значение и точка c — является внутренней точкой промежутка $(a; b)$. Следовательно, c — точка экстремума.

Так как функция $f(x)$ — дифференцируема на $(a; b)$, то она дифференцируема и в точке c . Тогда по теореме Ферма $f'(c) = 0$. Теорема доказана.

Геометрический смысл теоремы Ролля заключается в том, что если крайние ординаты графика функции $y = f(x)$ равны, то на этом графике найдется точка, касательная в которой к графику функции параллельна оси OX (см. рис.)

Следствие 1.

Между двумя корнями (нулями) дифференцируемой функции всегда есть хотя бы один корень (нуль) ее производной.

Действительно, пусть x_1, x_2 — корни функции $f(x)$, т.е. $f(x_1) = 0$ и $f(x_2) = 0$, тогда $f(x_1) = f(x_2)$ и по теореме Ролля между x_1 и x_2 найдется значение c : $f'(c) = 0$, т.е. найдется число c , которое является корнем производной $f'(x)$.

Следствие 2.

Пусть $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ — многочлен степени $n \geq 2$.

Если все его корни действительны и различны, то корни производной многочлена

$P'_n(x)$ — также действительны и различны, и лежат между корнями многочлена $P_n(x)$.

Действительно, расположим все корни многочлена $P_n(x)$ в порядке возрастания:

$x_1 < x_2 < \dots < x_n$; тогда по Следствию 1 между x_i и x_{i+1} найдется c_i – корень производной $P'_n(x)$; все значения $c_i, i = 1, \dots, n-1$ будут различны.

Теорема Лагранжа (о конечных приращениях).

Пусть функция $f(x)$ определена на $[a; b]$ и обладает следующими свойствами:

- 1) $f(x)$ – непрерывна на $[a; b]$;
- 2) $f(x)$ – дифференцируема на $(a; b)$;

Тогда внутри промежутка $(a; b)$ найдется такая точка c , в которой выполняется равенство:

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a).$$

Доказательство.

Введем вспомогательную функцию: $F(x) = f(x) - f(a) - k \cdot (x - a)$,

где $k = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \text{const}$. Вычислим значения функции $F(x)$ на концах отрезка $[a; b]$:

$$F(a) = f(a) - f(a) - k \cdot (a - a) = 0;$$

$$F(b) = f(b) - f(a) - k \cdot (b - a) = f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (b - a) = 0.$$

Итак, получили: $F(a) = F(b)$.

Кроме того, функция $F(x)$ дифференцируема на $(a; b)$ как разность дифференцируемых функций $f(x)$ и $f(a) + k \cdot (x - a)$ и непрерывна на $[a; b]$ как разность тех же непрерывных функций.

Таким образом, функция $F(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля.

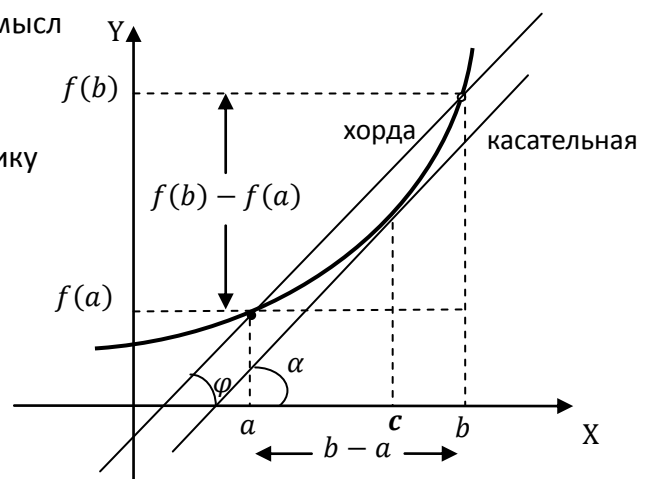
Следовательно, $\exists c \in (a; b): F'(c) = 0$. Так как $F'(x) = f'(x) - k$, то $F'(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c) - k = 0 \Leftrightarrow f'(c) = k \Leftrightarrow f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Leftrightarrow f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$.

Теорема доказана.

Геометрический смысл теоремы Лагранжа.

Утверждение теоремы можно записать в виде: $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, где $f'(c) = \text{tg} \alpha$ – угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции в точке с абсциссой c ; $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = k = \text{tg} \varphi$ – угловой коэффициент хорды (секущей), соединяющей концы графика функции на промежутке $[a; b]$ (см. рис.) Так как $\text{tg} \alpha = \text{tg} \varphi$, то $\alpha = \varphi$, т.е. касательная параллельна хорде.

Таким образом, геометрический смысл теоремы Лагранжа состоит в следующем: на графике функции найдется хотя бы одна точка, в которой касательная к графику параллельна хорде, соединяющей концы графика.



Замечание.

Доказанное равенство: $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$ — можно записать в виде: $f(a) - f(b) = f'(c) \cdot (a - b)$, откуда следует, что в этом равенстве не важно: $a < b$ или $a > b$, а важно лишь то, что точка c лежит между a и b .

Обозначим: $a = x$, $b = x + \Delta x$, $\Delta x > 0$ или $\Delta x < 0$;
 $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f(b) - f(a)$; тогда по теореме Лагранжа имеем:

$$\Delta y = f'(c) \cdot \Delta x,$$

где $x < c < x + \Delta x$, или $x + \Delta x < c < x$.

Последнее равенство дает точное выражение для приращения функции Δy при любом конечном приращении Δx . Отсюда и название «формула конечных приращений».

Для практических вычислений значений функций эта формула, однако, не годится, так как значение c , как правило, неизвестно. В этом случае вместо точной формулы конечных приращений применяют приближенную формулу бесконечно малых приращений:

$$\Delta y \approx f'(x) \cdot \Delta x \quad (\text{см. §6 главы 1}).$$

Теорема Коши.

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на $[a; b]$ и обладают следующими свойствами:

- 1) $f(x)$ и $g(x)$ — непрерывны на $[a; b]$;
- 2) $f(x)$ и $g(x)$ — дифференцируемы на $(a; b)$;
- 3) $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a; b)$.

Тогда внутри промежутка $(a; b)$ найдется такая точка c , в которой выполняется равенство:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Доказательство.

Заметим, что $g(b) - g(a) \neq 0$, т.е. $g(b) \neq g(a)$. Действительно, если $g(b) = g(a)$, то по теореме Ролля $\exists c \in (a; b)$: $g'(c) = 0$, что противоречит условию 3).

Введем вспомогательную функцию: $F(x) = f(x) - f(a) - k \cdot (g(x) - g(a))$,

где $k = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \text{const}$. Вычислим значения функции $F(x)$ на концах отрезка $[a; b]$:

$$F(a) = f(a) - f(a) - k \cdot (g(a) - g(a)) = 0;$$

$$F(b) = f(b) - f(a) - k \cdot (g(b) - g(a)) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot (g(b) - g(a)) = 0.$$

Итак, получили: $F(a) = F(b)$.

Кроме того, функция $F(x)$ дифференцируема на $(a; b)$ как разность дифференцируемых функций $f(x)$ и $f(a) + k \cdot (g(x) - g(a))$ и непрерывна на $[a; b]$ как разность тех же непрерывных функций.

Таким образом, функция $F(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля.

Следовательно, $\exists c \in (a; b)$: $F'(c) = 0$. Так как $F'(x) = f'(x) - k \cdot g'(x)$, то $F'(c) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f'(c) - k \cdot g'(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c) = k \cdot g'(c) \Leftrightarrow \frac{f'(c)}{g'(c)} = k \Leftrightarrow \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Теорема доказана.

Замечания.

- 1) Формула: $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ — верна и в случае, когда $a > b$.
- 2) Теорема Лагранжа является частным случаем теоремы Коши, когда $g(x) = x$, $x \in [a; b]$.

§3. Производные высших порядков.

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на некотором множестве D_1 . Тогда в каждой точке этого множества существует конечная производная:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad x \in D_1.$$

Возникает новая функция $f'(x)$, $x \in D_1$. Если эта новая функция дифференцируема в точке x , т.е. существует конечная производная:

$$(f'(x))' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x},$$

то она называется производной 2-го порядка или второй производной функции $f(x)$ и обозначается: $f''(x)$. Таким образом, по определению: $f''(x) = (f'(x))'$.

Пусть функция $f'(x)$ дифференцируема на некотором множестве $D_2 \subset D_1$. Тогда возникает новая функция $f''(x)$, $x \in D_2$.

Если эта функция $f''(x)$ дифференцируема на некотором множестве $D_3 \subset D_2$, то ее производная называется производной 3-го порядка или третьей производной функции $f(x)$ и обозначается: $f'''(x)$. Таким образом, по определению: $f'''(x) = (f''(x))'$.

Аналогично определяется производная n -го порядка через производную $(n - 1)$ -го порядка:

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'.$$

При обозначении производных 1-го, 2-го и 3-го порядков применяются «штрихи», а начиная с 4-й производной, их обозначают римскими цифрами или числами в скобках.

Примеры.

$$1) f(x) = e^x;$$

$$f^{(n)}(x) = e^x \Rightarrow \boxed{(e^x)^{(n)} = e^x} \quad \forall n \in N.$$

$$2) f(x) = e^{\lambda x}; \lambda = const;$$

$$f'(x) = \lambda \cdot e^{\lambda x}, \quad f''(x) = (\lambda \cdot e^{\lambda x})' = \lambda \cdot (e^{\lambda x})' = \lambda \cdot \lambda \cdot e^{\lambda x} = \lambda^2 \cdot e^{\lambda x}, \dots,$$

$$f^{(n)}(x) = \lambda^n \cdot e^{\lambda x} \Rightarrow \boxed{(e^{\lambda x})^{(n)} = \lambda^n \cdot e^{\lambda x}} \quad \forall n \in N.$$

$$3) f(x) = x^n, \quad n \in N;$$

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1},$$

$$f''(x) = n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2},$$

$$f'''(x) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot x^{n-3},$$

...

$$f^{(n-1)}(x) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \cdot x,$$

$$f^{(n)}(x) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n! \Rightarrow \boxed{(x^n)^{(n)} = n!} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$f^{(n+1)}(x) = 0, f^{(n+2)}(x) = 0, \dots, f^{(k)}(x) = 0 \Rightarrow \boxed{(x^n)^{(k)} = 0} \quad \forall k > n.$$

$$4) f(x) = \ln(1+x);$$

$$f'(x) = (1+x)^{-1},$$

$$f''(x) = -1 \cdot (1+x)^{-2},$$

$$f'''(x) = (-1) \cdot (-2) \cdot (1+x)^{-3},$$

$$f^{IV}(x) = (-1) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot (1+x)^{-4},$$

...

$$f^{(n)}(x) = (-1) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot \dots \cdot (-n+1) \cdot (1+x)^{-n} = \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{(1+x)^n} \Rightarrow$$

$$\boxed{(\ln(1+x))^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{(1+x)^n}} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$5) f(x) = \sin x;$$

$$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f''(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$

$$f'''(x) = \cos\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$

$$f^{IV}(x) = \cos\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 4 \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$

...

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \boxed{(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$6) f(x) = \cos x;$$

$$f'(x) = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$f''(x) = -\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$

$$f'''(x) = -\sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$

$$f^{IV}(x) = -\sin\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + 4 \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$

...

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \boxed{(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Область определения n -й производной может сужаться по сравнению с областью определения $(n-1)$ -й производной ($D_n \subset D_{n-1}$) за счет появления точек, в которых новая функция не дифференцируема. Например:

$$7) f(x) = x^{\frac{7}{3}}, x \in \mathbb{R}; \quad f'(x) = \frac{7}{3} \cdot x^{\frac{4}{3}}, x \in \mathbb{R}; \quad f''(x) = \frac{7}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}}, x \in \mathbb{R};$$

$$f'''(x) = \frac{7}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}, x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty). \text{ Здесь } D_1 = D_2 = \mathbb{R}, D_3 \subset \mathbb{R}, D_3 \neq \mathbb{R}.$$

$$8) f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}, x \in \mathbb{R}; \text{ если } x \neq 0, \text{ то } f'(x) = \left(x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)' =$$

$$= 2x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right); \text{ при } x = 0, \text{ как известно, } f'(0) = 0 \text{ (см. Пример 6 §1 главы 1);}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}, x \in \mathbb{R};$$

Первая производная функции $f(x)$ существует для $\forall x \in \mathbb{R}$. Легко проверить, что для $\forall x \neq 0$ вторая производная функции $f(x)$ также существует. Но при $x = 0$ это уже не так. Действительно, покажем, что $f'(x)$ не дифференцируема в точке 0.

Для этого заметим, что $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ — не существует, т.е. $f'(x)$ не является непрерывной в точке 0. Следовательно, $f'(x)$ и не дифференцируема в точке 0.

Таким образом, конечной второй производной $f''(0)$ — не существует (можно показать, что и бесконечной $f''(0)$ — также не существует).

В этом примере $D_1 = \mathbb{R}$, $D_2 = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Механический смысл второй производной.

Как известно, скорость прямолинейного движения материальной точки в момент времени t есть производная пройденного пути S по времени t : $v(t) = S'(t)$, а ускорение $a(t)$ прямолинейного движения материальной точки в момент времени t есть производная скорости v по времени t : $a(t) = v'(t)$.

Следовательно, вторая производная пройденного пути S по времени t есть ускорение $a(t)$ в момент времени t :

$$S''(t) = a(t).$$

Свойства производных высших порядков.

Теорема.

Пусть функции $u = u(x)$, $v = v(x)$ — n -раз дифференцируемы, $n \in \mathbb{N}$, $C = \text{const}$. Тогда n -раз дифференцируемы также функции $C \cdot u$, $C \cdot v$, $u \pm v$, $u \cdot v$ и справедливы следующие равенства:

1. $(C \cdot u)^{(n)} = C \cdot u^{(n)}$, $(C \cdot v)^{(n)} = C \cdot v^{(n)}$;
2. $(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$;
3. Формула Лейбница: $(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$, или в развернутом виде:

$$(u \cdot v)^{(n)} = C_n^0 u^{(n)} v^{(0)} + C_n^1 u^{(n-1)} v^{(1)} + C_n^2 u^{(n-2)} v^{(2)} + \dots + C_n^{n-1} u^{(1)} v^{(n-1)} + C_n^n u^{(0)} v^{(n)}$$

Здесь $u^{(0)} = u$, $u^{(1)} = u'$, $u^{(2)} = u''$, и т.д., аналогично для функции v .

Первые две формулы легко получаются последовательным применением аналогичных формул для первой производной.

Вывод **формулы Лейбница** можно найти, например, в [1], [3]. Для первых 3-х значений n эта формула, как легко проверить, имеет вид:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v';$$

$$(u \cdot v)'' = u'' \cdot v + 2 \cdot u' \cdot v' + u \cdot v'';$$

$$(u \cdot v)''' = u''' \cdot v + 3 \cdot u'' \cdot v' + 3 \cdot u' \cdot v'' + u \cdot v'''.$$

Пример 9.

Найдем при помощи формулы Лейбница $(x^2 \cdot \cos x)^{(50)}$.

Пусть $u = \cos x$, $v = x^2$; тогда

$$u^{(k)} = \cos\left(x + k \cdot \frac{\pi}{2}\right), \quad v' = 2x, \quad v'' = 2, \quad v''' = v^{IV} = \dots = 0.$$

Таким образом, в формуле Лейбница все слагаемые, кроме первых трех, равны нулю:

$$\begin{aligned} (x^2 \cdot \cos x)^{(50)} &= \\ &= 1 \cdot x^2 \cdot \cos\left(x + 50 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + 50 \cdot 2x \cdot \cos\left(x + 49 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + \frac{50 \cdot 49}{2} \cdot 2 \cdot \cos\left(x + 48 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= x^2 \cdot \cos(x + 25 \cdot \pi) + 100x \cdot \cos(x + 24,5 \cdot \pi) + 2450 \cdot \cos(x + 24 \cdot \pi) = \\ &= -x^2 \cdot \cos x - 100x \cdot \sin x + 2450 \cdot \cos x = (2450 - x^2) \cdot \cos x - 100x \cdot \sin x. \end{aligned}$$

Производные высших порядков неявных и параметрически заданных функций.

Пусть функция $y = y(x)$ задана *неявно* уравнением $F(x, y) = 0$ (см. § 5 главы 1). Продифференцировав обе части уравнения $F(x, y) = 0$ по переменной x , найдем первую производную y' . Продифференцировав по x первую производную y' , найдем вторую производную y'' . В нее войдут x , y и y' . Подставляя уже найденное значение y' во вторую производную, выразим y'' через x и y .

Аналогично поступаем для нахождения производных более высоких порядков.

Пример 10.

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0;$$

$$(x^3 + y^3 - 3xy)'_x = (0)'_x = 0; \quad 3x^2 + 3y^2 \cdot y' - 3(1 \cdot y + x \cdot y') = 0;$$

$$x^2 + y^2 \cdot y' - y - x \cdot y' = 0; \quad y^2 \cdot y' - x \cdot y' = y - x^2;$$

$$(y^2 - x) \cdot y' = y - x^2 \Rightarrow y' = \frac{y - x^2}{y^2 - x} \quad (y^2 - x \neq 0);$$

$$y'' = \left(\frac{y - x^2}{y^2 - x} \right)'_x = \frac{(y' - 2x) \cdot (y^2 - x) - (y - x^2) \cdot (2yy' - 1)}{(y^2 - x)^2} = \frac{y' \cdot (2x^2y - x - y^2) + x^2 + y - 2xy^2}{(y^2 - x)^2} =$$

$$= \frac{\frac{y-x^2}{y^2-x} \cdot (2x^2y-x-y^2) + x^2 + y - 2xy^2}{(y^2-x)^2} = \frac{(y-x^2) \cdot (2x^2y-x-y^2) + (y^2-x)(x^2+y-2xy^2)}{(y^2-x)^3} = \frac{2xy}{(x-y^2)^3}.$$

Пусть функция $y = y(x)$ задана параметрическими уравнениями: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$.

Как известно (см. § 5 главы 1), первая производная y'_x вычисляется по формуле:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

и выражается через параметр t . Чтобы найти вторую производную y''_{xx} , запишем первую

производную y'_x в параметрическом виде: $\begin{cases} x = x(t) \\ y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} \end{cases}$. Тогда $y''_{xx} = (y'_x)'_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$.

Аналогично вычисляются третья и последующие производные: $y'''_{xxx} = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t}$ и т. д.

Пример 11.

$$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases} \Rightarrow y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(1-\cos t)'_t}{(t-\sin t)'_t} = \frac{\sin t}{1-\cos t} = \frac{2 \sin \frac{t}{2} \cdot \cos \frac{t}{2}}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} = \frac{\cos \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{t}{2}.$$

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{(\operatorname{ctg} \frac{t}{2})'_t}{1-\cos t} = \frac{-\frac{1}{2 \cdot \sin^2 \frac{t}{2}}}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} = -\frac{1}{4 \cdot \sin^4 \frac{t}{2}} = -\frac{1}{4} \cdot \sin^{-4} \frac{t}{2};$$

$$y'''_{xxx} = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t} = \frac{(-\frac{1}{4} \sin^{-4} \frac{t}{2})'_t}{1-\cos t} = \frac{\frac{1}{2} \sin^{-5} \frac{t}{2} \cdot \cos \frac{t}{2}}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} = \frac{\cos \frac{t}{2}}{4 \cdot \sin^7 \frac{t}{2}}.$$

Дифференциалы высших порядков.

Если функция $y = f(x)$ — дифференцируема в точке x_0 , то ее дифференциал в этой точке равен $dy(x_0) = f'(x_0) \cdot dx$; если x_0 — произвольная точка, то

$$dy = y' \cdot dx = f'(x) \cdot dx.$$

Дифференциал dy (далее будем его называть *первым дифференциалом* или дифференциалом первого порядка) зависит от двух независимых переменных x и dx .

Если зафиксировать dx , то dy будет зависеть только от одной переменной x . Это позволяет говорить о дифференцируемости функции dy как функции от x и находить от нее производную и дифференциал.

Дифференциалом второго порядка (*вторым дифференциалом*) будем называть дифференциал от первого дифференциала при фиксированном (постоянном) dx :

$$d^2y = d(dy).$$

Дифференциалом третьего порядка (*третьим дифференциалом*) будем называть дифференциал от второго дифференциала при фиксированном (постоянном) dx :

$$d^3y = d(d^2y).$$

Вообще, дифференциалом n -го порядка (n -м дифференциалом) будем называть

дифференциал от $(n - 1)$ -го дифференциала при фиксированном (постоянном) dx :

$$d^n y = d(d^{n-1} y).$$

При вычислении дифференциалов высших порядков важно помнить, что dx – это произвольное и не зависящее от x число, которое при дифференцировании следует рассматривать как постоянный множитель.

Выведем формулы для вычисления дифференциалов высших порядков:

$$d^2 y = d(dy) = d(y' \cdot dx) = (y' \cdot dx)' \cdot dx = (y')' \cdot dx \cdot dx = y'' \cdot (dx)^2;$$

$$d^3 y = d(d^2 y) = d(y'' \cdot (dx)^2) = (y'' \cdot (dx)^2)' \cdot dx = (y'')' \cdot (dx)^2 \cdot dx = y''' \cdot (dx)^3 \text{ и т. д.}$$

Легко доказать, что в общем виде получаем формулу: $d^n y = y^{(n)} \cdot (dx)^n$.

Таким образом, имеем следующие формулы для вычисления дифференциалов любого порядка:

$$dy = y' \cdot dx; \quad d^2 y = y'' \cdot (dx)^2; \quad d^3 y = y''' \cdot (dx)^3; \quad \dots; \quad d^n y = y^{(n)} \cdot (dx)^n.$$

В частности, значения дифференциалов любого порядка функции $y = f(x)$ в заданной точке x_0 вычисляются по формулам:

$$df(x_0) = f'(x_0) \cdot dx,$$

$$d^2 f(x_0) = f''(x_0) \cdot (dx)^2,$$

$$d^3 f(x_0) = f'''(x_0) \cdot (dx)^3,$$

.....

$$d^n f(x_0) = f^{(n)}(x_0) \cdot (dx)^n.$$

Свойства дифференциалов высших порядков.

Теорема.

Пусть функции $u = u(x)$, $v = v(x)$ – n -раз дифференцируемы, $n \in \mathbb{N}$, $C = \text{const}$. Тогда n -раз дифференцируемы также функции $C \cdot u$, $C \cdot v$, $u \pm v$, $u \cdot v$ и справедливы следующие равенства:

$$1. \quad d^n(C \cdot u) = C \cdot d^n u, \quad d^n(C \cdot v) = C \cdot d^n v;$$

$$2. \quad d^n(u \pm v) = d^n u \pm d^n v;$$

$$3. \quad d^n(u \cdot v) = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot d^{(n-k)} u \cdot d^{(k)} v, \text{ или в развернутом виде:}$$

$$d^n(u \cdot v) = C_n^0 \cdot d^n u \cdot d^0 v + C_n^1 \cdot d^{n-1} u \cdot d^1 v + \dots + C_n^{n-1} \cdot d^1 u \cdot d^{n-1} v + C_n^n \cdot d^0 u \cdot d^n v$$

Здесь $d^{(0)} u = u$, $d^{(0)} v = v$, $d^{(1)} u = du$, $d^{(1)} v = dv$ и т.д.

Эти свойства вытекают из соответствующих свойств для производных высших порядков после умножения каждого равенства на величину $(dx)^n$.

Пример 12.

$$\begin{aligned}
d^3(x \cdot \ln x) &= d^3(\ln x) \cdot x + 3 \cdot d^2(\ln x) \cdot dx + 3 \cdot d(\ln x) \cdot d^2(x) + \ln x \cdot d^3(x) = \\
&= \left[\begin{aligned} d^2(x) &= (x)'' \cdot (dx)^2 = 0 \cdot (dx)^2 = 0; & d^3(x) &= d(d^2(x)) = d(0) = 0 \\ d(\ln x) &= \frac{dx}{x}; & d^2(\ln x) &= d\left(\frac{dx}{x}\right) = -\frac{(dx)^2}{x^2}; & d^3(\ln x) &= d\left(-\frac{(dx)^2}{x^2}\right) = 2\frac{(dx)^3}{x^3} \end{aligned} \right] = \\
&= 2\frac{(dx)^3}{x^3} \cdot x - 3\frac{(dx)^2}{x^2} \cdot dx + 3\frac{dx}{x} \cdot 0 + \ln x \cdot 0 = -\frac{1}{x^2} \cdot (dx)^3.
\end{aligned}$$

§4. Формула Тейлора.Формула Тейлора для многочлена.

Постановка задачи. Пусть заданы многочлен степени n :

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n, \quad a_n \neq 0 \text{ и произвольное число } x_0 \in R.$$

Требуется разложить многочлен $P(x)$ по степеням $(x - x_0)$, т.е. записать его в виде:

$$P(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + b_3(x - x_0)^3 + \dots + b_n(x - x_0)^n,$$

где неизвестные коэффициенты b_i должны быть выражены через заданные числа a_i и x_0 .

Решение задачи.

Последовательно n раз дифференцируя многочлен $P(x)$, получим:

$$P(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + b_3(x - x_0)^3 + \dots + b_n(x - x_0)^n,$$

$$P'(x) = 1 \cdot b_1 + 2 \cdot b_2(x - x_0) + 3 \cdot b_3(x - x_0)^2 + \dots + n \cdot b_n(x - x_0)^{n-1},$$

$$P''(x) = 1 \cdot 2 \cdot b_2 + 2 \cdot 3 \cdot b_3(x - x_0) + \dots + (n-1) \cdot n \cdot b_n(x - x_0)^{n-2},$$

$$P'''(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot b_3 + \dots + (n-2) \cdot (n-1) \cdot n \cdot b_n(x - x_0)^{n-3},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$P^{(n)}(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n \cdot b_n = n! \cdot b_n.$$

Подставим значение $x = x_0$ в каждую производную:

$$P(x_0) = b_0, \quad P'(x_0) = 1 \cdot b_1, \quad P''(x_0) = 1 \cdot 2 \cdot b_2, \quad P'''(x_0) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot b_3, \dots, \quad P^{(n)}(x_0) = n! \cdot b_n.$$

Получаем значения неизвестных коэффициентов b_i :

$$b_0 = P(x_0), \quad b_1 = \frac{P'(x_0)}{1!}, \quad b_2 = \frac{P''(x_0)}{2!}, \quad b_3 = \frac{P'''(x_0)}{3!}, \quad \dots, \quad b_n = \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Тем самым коэффициенты b_i выражены через значения многочлена $P(x)$ и его производных в точке x_0 , т.е. выражены через заданные числа a_i и x_0 . Задача решена.

Полученный многочлен (т.е. другая форма записи заданного многочлена) имеет вид:

$$P(x) = P(x_0) + \frac{P'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{P''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{P'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots + \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Эта формула называется *формулой Тейлора* для многочлена.

При $x_0 = 0$ формулу Тейлора называют *формулой Маклорена*:

$$P(x) = P(0) + \frac{P'(0)}{1!}x + \frac{P''(0)}{2!}x^2 + \frac{P'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{P^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Пример 1.

Разложить многочлен $P(x) = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3$ по степеням $(x + 1)$.

Здесь $x_0 = -1$, $P(x_0) = P(-1) = 10$.

Найдем все производные многочлена $P(x)$ до 3-го порядка:

$$P'(x) = -2 + 6x - 12x^2, \quad P''(x) = 6 - 24x, \quad P'''(x) = -24.$$

Вычислим значения производных в точке $x_0 = -1$:

$$P'(-1) = -20, \quad P''(-1) = 30, \quad P'''(-1) = -24.$$

Подставим найденные значения в формулу Тейлора:

$$P(x) = 10 + \frac{-20}{1!}(x + 1) + \frac{30}{2!}(x + 1)^2 + \frac{-24}{3!}(x + 1)^3;$$

$$P(x) = 10 - 20(x + 1) + 15(x + 1)^2 - 4(x + 1)^3.$$

Ответ: $1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 = 10 - 20(x + 1) + 15(x + 1)^2 - 4(x + 1)^3$.

Бином Ньютона.

Применим формулу Тейлора (Маклорена) к многочлену $P(x) = (a + x)^n$ в точке $x_0 = 0$.

$$P(x) = (a + x)^n, \quad P(0) = a^n;$$

$$P'(x) = n \cdot (a + x)^{n-1}, \quad P'(0) = n \cdot a^{n-1};$$

$$P''(x) = n \cdot (n - 1) \cdot (a + x)^{n-2}, \quad P''(0) = n \cdot (n - 1) \cdot a^{n-2};$$

$$P'''(x) = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot (a + x)^{n-3}, \quad P'''(0) = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot a^{n-3};$$

.....

$$P^{(n)}(x) = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \cdot (a + x)^0, \quad P^{(n)}(0) = n!$$

$$\begin{aligned} P(x) &= P(0) + \frac{P'(0)}{1!}x + \frac{P''(0)}{2!}x^2 + \frac{P'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{P^{(n)}(0)}{n!}x^n = \\ &= a^n + \frac{n \cdot a^{n-1}}{1!} \cdot x + \frac{n \cdot (n-1) \cdot a^{n-2}}{2!}x^2 + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot a^{n-3}}{3!}x^3 + \dots + \frac{n!}{n!}x^n = \end{aligned}$$

$$= a^n + \frac{n}{1!} a^{n-1} \cdot x + \frac{n \cdot (n-1)}{2!} a^{n-2} \cdot x^2 + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{3!} a^{n-3} \cdot x^3 + \dots + x^n.$$

Получили формулу бинома Ньютона:

$$(a+x)^n = a^n + \frac{n}{1!} a^{n-1} \cdot x + \frac{n \cdot (n-1)}{2!} a^{n-2} \cdot x^2 + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{3!} a^{n-3} \cdot x^3 + \dots + x^n,$$

или в сокращенной форме:

$$(a+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot x^k, \text{ где } C_n^k = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

При $x = b$ получаем более привычную форму записи: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$.

Формула Тейлора для произвольной функции.

Постановка задачи. Пусть заданы функция $y = f(x)$ и произвольное число $x_0 \in D_f$. Предполагается, что для функции $f(x)$ существуют все производные до n -го порядка ($n \in \mathbb{N}$) в точке x_0 . Это означает, что $\exists f'(x), f''(x), \dots, f^{(n-1)}(x)$ в окрестности $U(x_0)$ и $\exists f^{(n)}(x_0)$ в самой точке.

Требуется найти такой многочлен $P(x)$, который отличался бы от функции $f(x)$ на бесконечно малую величину порядка выше n -го по сравнению с $(x - x_0)$ при $x \rightarrow x_0$:

$$f(x) - P(x) = o((x - x_0)^n) \text{ при } x \rightarrow x_0, \text{ т.е. } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Решение задачи.

Введем понятие *многочлена Тейлора* для заданной функции $f(x)$ и точки x_0 :

$$P(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} (x - x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

Многочлен Тейлора $P(x)$ обладает, как показано выше, следующими свойствами:

$$\begin{aligned} P(x_0) &= f(x_0), \\ P'(x_0) &= f'(x_0), \\ P''(x_0) &= f''(x_0), \\ &\dots \dots \dots \\ P^{(n)}(x_0) &= f^{(n)}(x_0), \end{aligned}$$

т.е. этот многочлен и все его производные до n -го порядка в точке x_0 имеют те же значения, что и функция $f(x)$ и ее производные.

Докажем, что многочлен Тейлора $P(x)$ и является решением поставленной задачи.

Введем обозначение:

$$R(x) = f(x) - P(x).$$

Заметим, что для $R(x)$ имеют место равенства:

$$R(x_0) = R'(x_0) = R''(x_0) = \dots = R^{(n)}(x_0) = 0.$$

Теорема 1.

Если для функции $R(x)$, имеющей все производные до n -го порядка в точке x_0 , выполнены равенства: $R(x_0) = R'(x_0) = R''(x_0) = \dots = R^{(n)}(x_0) = 0$, то

$$R(x) = o((x - x_0)^n) \text{ при } x \rightarrow x_0.$$

Доказательство. Докажем это утверждение методом математической индукции.

1) база индукции: $n = 1$; пусть $R(x_0) = R'(x_0) = 0$; тогда

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x) - R(x_0)}{x - x_0} = R'(x_0) = 0 \Rightarrow R(x) = o(x - x_0) \text{ при } x \rightarrow x_0.$$

2) индукционный переход; пусть утверждение верно для $n = m$:

$$R(x_0) = R'(x_0) = R''(x_0) = \dots = R^{(m)}(x_0) = 0 \Rightarrow R(x) = o((x - x_0)^m) \text{ при } x \rightarrow x_0;$$

надо доказать, что оно верно и для $n = m + 1$:

$$R(x_0) = R'(x_0) = R''(x_0) = \dots = R^{(m+1)}(x_0) = 0 \Rightarrow R(x) = o((x - x_0)^{m+1}) \text{ при } x \rightarrow x_0.$$

Пусть $r(x) = R'(x)$, тогда для функции $r(x)$ имеем равенства:

$$r(x_0) = r'(x_0) = r''(x_0) = \dots = r^{(m)}(x_0) = 0,$$

следовательно: $r(x) = o((x - x_0)^m) \text{ при } x \rightarrow x_0$.

Далее по теореме Лагранжа: $R(x) = R(x) - R(x_0) = R'(c) \cdot (x - x_0) = r(c) \cdot (x - x_0)$, где точка c лежит между точками x и x_0 : $|c - x_0| < |x - x_0|$.

Так как $r(c) = o((c - x_0)^m)$, то $\frac{r(c)}{(c - x_0)^m} \rightarrow 0$ при $c \rightarrow x_0$ и

$$\frac{r(c)}{(x - x_0)^m} = \frac{r(c)}{(c - x_0)^m} \cdot \frac{(c - x_0)^m}{(x - x_0)^m} = \frac{r(c)}{(c - x_0)^m} \cdot \left(\frac{c - x_0}{x - x_0}\right)^m, \text{ где } \left|\frac{c - x_0}{x - x_0}\right|^m < 1. \text{ Следовательно:}$$

$\frac{r(c)}{(x - x_0)^m} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow x_0$ (произведение бесконечно малой на ограниченную величину), т.е. $r(c) = o((x - x_0)^m)$. Тогда $R(x) = r(c) \cdot (x - x_0) = o((x - x_0)^m) \cdot (x - x_0) = o((x - x_0)^{m+1})$. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы следует формула:

$$f(x) = P(x) + R(x), \text{ где } R(x) = o((x - x_0)^n), \text{ или:}$$

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R(x),}$$

$$R(x) = o((x - x_0)^n)$$

которая называется формулой Тейлора для функции $f(x)$ в точке x_0 .

Разность функции $f(x)$ и многочлена Тейлора: $R(x) = f(x) - P(x)$ — называется остаточным членом формулы Тейлора.

Запись: $R(x) = o((x - x_0)^n)$ — называется остаточным членом в форме Пеано, а сама формула называется формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

При $n = 1$ формула Тейлора имеет вид:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + o((x - x_0)),$$

т.е. является выражением функции $f(x)$ с точностью до бесконечно малой порядка выше первого через линейную функцию $f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.

Эта формула совпадает с формулой (см. §3 главы 1), связывающей приращение функции Δy с ее дифференциалом dy :

$$\Delta y = dy + o(\Delta x),$$

где $\Delta y = f(x) - f(x_0)$, $\Delta x = x - x_0$, $dy = \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x$.

В общем случае формула Тейлора выражает функцию $f(x)$ многочленом n -й степени с точностью до бесконечно малой порядка выше n -го.

Пример 2.

Составим формулу Тейлора для функции $f(x) = x^x$ в точке $x_0 = 1$ при $n = 3$. Найдем все производные до 3-го порядка; для заданной функции применим логарифмическое дифференцирование (см. §5 главы 1):

$$y = x^x; \quad \ln y = \ln x^x = x \cdot \ln x;$$

$$\frac{y'}{y} = (x \cdot \ln x)' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = 1 + \ln x; \quad y' = x^x \cdot (1 + \ln x);$$

$$y'' = (x^x)' \cdot (1 + \ln x) + x^x \cdot (1 + \ln x)' = x^x \cdot (1 + \ln x)^2 + x^x \cdot \frac{1}{x};$$

$$y''' = (x^x)' \cdot (1 + \ln x)^2 + x^x \cdot ((1 + \ln x)^2)' + (x^x)' \cdot \frac{1}{x} + x^x \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = x^x \cdot (1 + \ln x)^3 + x^x \cdot 3(1 + \ln x) \cdot \frac{1}{x} + x^x \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = x^x \left((1 + \ln x)^3 + 3(1 + \ln x) \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right).$$

Вычислим значение функции и ее производных в точке $x_0 = 1$:

$$f(x_0) = 1; \quad f'(x_0) = 1; \quad f''(x_0) = 2; \quad f'''(x_0) = 3.$$

Подставим найденные значения в формулу Тейлора:

$$f(x) = 1 + (x - 1) + \frac{2}{2!}(x - 1)^2 + \frac{3}{3!}(x - 1)^3 + o((x - 1)^3).$$

Ответ: $x^x = 1 + (x - 1) + (x - 1)^2 + \frac{1}{2}(x - 1)^3 + o((x - 1)^3)$.

Используя понятие дифференциалов высших порядков и формулы для их вычисления (см. §3), формулу Тейлора можно записать в виде:

$$\Delta f(x_0) = df(x_0) + \frac{1}{2!}d^2f(x_0) + \frac{1}{3!}d^3f(x_0) + \dots + \frac{1}{n!}d^nf(x_0) + o((\Delta x)^n).$$

При $x_0 = 0$ формула Тейлора называется *формулой Маклорена*:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R(x),$$

$$R(x) = o(x^n)$$

Разложение основных элементарных функций по формуле Маклорена.

Выражение заданной функции $f(x)$ через многочлен Тейлора с остаточным членом называется *разложением функции* по формуле Тейлора (Маклорена).

Составим разложения по формуле Маклорена следующих функций: e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$. При этом воспользуемся формулами для производных высших порядков этих функций (см. §3).

$$1. f(x) = e^x, f(0) = 1; f^{(n)}(x) = e^x, f^{(n)}(0) = 1 \quad \forall n \in N;$$

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n).$$

$$2. f(x) = \sin x, f(0) = 0; f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right) \quad \forall n \in N;$$

$$f^{(n)}(0) = \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ (-1)^{k-1}, & n = 2k - 1 \end{cases};$$

$$\begin{aligned} \sin x &= 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots + \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}x^{2k-1} + \frac{0}{(2k)!}x^{2k} + o(x^{2k}) = \\ &= \frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots + \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}x^{2k-1} + o(x^{2k}). \end{aligned}$$

$$3. f(x) = \cos x, f(0) = 1; f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right) \quad \forall n \in N;$$

$$f^{(n)}(0) = \cos\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & n = 2k - 1 \\ (-1)^k, & n = 2k \end{cases};$$

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 + \frac{0}{1!}x - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots + \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} + \frac{0}{(2k+1)!}x^{2k+1} + o(x^{2k+1}) = \\ &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \dots + \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} + o(x^{2k+1}). \end{aligned}$$

$$4. f(x) = \ln(1+x), f(0) = 0; f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{(1+x)^n},$$

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \quad \forall n \in N;$$

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= 0 + \frac{1}{1!}x - \frac{1!}{2!}x^2 + \frac{2!}{3!}x^3 - \frac{3!}{4!}x^4 + \dots + \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{n!}x^n + o(x^n) = \\ &= \frac{1}{1}x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + o(x^n). \end{aligned}$$

$$5. f(x) = (1+x)^\alpha, f(0) = 1;$$

$$f^{(n)}(x) = \alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot (\alpha - 2) \cdot \dots \cdot (\alpha - n + 1) \cdot (1+x)^{\alpha-n},$$

$$f^{(n)}(0) = \alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot (\alpha - 2) \cdot \dots \cdot (\alpha - n + 1) \quad \forall n \in N;$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot (\alpha - 2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot (\alpha - 2) \cdot \dots \cdot (\alpha - n + 1)}{n!}x^n + o(x^n).$$

В частности, при $\alpha = -1$ и $\alpha = \frac{1}{2}$ получаем:

$$\frac{1}{1+x} = 1 + \frac{-1}{1!}x + \frac{-1 \cdot (-2)}{2!}x^2 + \frac{-1 \cdot (-2) \cdot (-3)}{3!}x^3 + \dots + \frac{-1 \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot \dots \cdot (-n)}{n!}x^n + o(x^n);$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n \cdot x^n + o(x^n).$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)\dots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!}x^n + o(x^n);$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{3!}x^3 + \dots + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\dots(-\frac{2n-3}{2})}{n!}x^n + o(x^n) =$$

$$= 1 + \frac{1}{2 \cdot 1!}x - \frac{1}{2^2 \cdot 2!}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2^3 \cdot 3!}x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^4 \cdot 4!}x^4 \dots + (-1)^n \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-3)}{2^n \cdot n!}x^n + o(x^n).$$

Таким образом, имеем следующие разложения:

$$1) e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n).$$

$$2) \sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1} + o(x^{2n}).$$

$$3) \cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \dots + (-1)^n \cdot \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n+1}).$$

$$4) \ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}x^n + o(x^n).$$

$$5) (1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n),$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2 \cdot 1!}x - \frac{1!!}{2^2 \cdot 2!}x^2 + \frac{3!!}{2^3 \cdot 3!}x^3 - \frac{5!!}{2^4 \cdot 4!}x^4 \dots + (-1)^n \cdot \frac{(2n-3)!!}{2^n \cdot n!}x^n + o(x^n),$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n \cdot x^n + o(x^n).$$

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

Остаточный член $R(x)$ в формуле Тейлора может служить оценкой погрешности при замене функции $f(x)$ ее многочленом Тейлора $P(x)$. Но для этого нужно, чтобы вид остаточного члена $R(x)$ позволял ответить на вопрос, как на величину погрешности влияет: а) «близость» числа x к x_0 ; б) изменение степени n многочлена $P(x)$.

Форма Пеано остаточного члена $R(x)$, характеризующая лишь стремление $R(x)$ к нулю при $x \rightarrow x_0$, не дает ответ на этот вопрос.

Поэтому придуманы были и другие формы дополнительного члена. Одна из таких форм называется *формой Лагранжа*.

Для получения вида остаточного члена в форме Лагранжа требуется дополнительно к условиям Теоремы 1 еще и существование $(n + 1)$ -й производной функции $f(x)$ в точке x_0 и в некоторой окрестности этой точки.

Обозначим многочлен Тейлора для функции $f(x)$ в точке x_0 через $P_n(x)$ (с указанием его степени n), соответственно – остаточный член: $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$.

Теорема 2.

Пусть функция $f(x)$ имеет все производные до $(n + 1)$ -го порядка в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 . Тогда найдется такая точка c , лежащая между точками x и x_0 , что справедлива формула:

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x), \text{ где } R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}, \text{ или:}$$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x),$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}, \quad x_0 \leq c \leq x.$$

Доказательство этой теоремы можно найти в [1], [3].

Заметим, что остаточный член $R_n(x)$ в форме Лагранжа напоминает очередной член формулы Тейлора, только $(n + 1)$ -я производная функции $f(x)$ вычисляется не в точке x_0 , а в некоторой промежуточной точке c между x и x_0 .

Промежуточную точку c можно задать равенством:

$$c = x_0 + \theta(x - x_0), \text{ где } 0 < \theta < 1.$$

Формула Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа примет вид:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x),$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta \cdot x)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Разложения основных элементарных функций по формуле Маклорена и с остаточным членом в форме Лагранжа имеют вид:

$$1) e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{e^c}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}, \quad 0 \leq c \leq x.$$

$$2) \sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1} + \frac{(-1)^n \cdot \cos c}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}, \quad 0 \leq c \leq x.$$

$$3) \cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \dots + (-1)^n \cdot \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \frac{(-1)^{n+1} \cdot \cos c}{(2n+2)!} \cdot x^{2n+2}, \quad 0 \leq c \leq x.$$

$$4) \ln(1 + x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}x^n + \frac{(-1)^n}{(n+1) \cdot (1+c)^{n+1}} \cdot x^{n+1}, \quad 0 \leq c \leq x.$$

$$5) (1 + x)^\alpha =$$

$$= 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)\cdot(1+c)^{\alpha-n-1}}{(n+1)!} \cdot x^{n+1},$$

$$\sqrt{1+x} =$$

$$1 + \frac{1}{2 \cdot 1!}x - \frac{1!!}{2^2 \cdot 2!}x^2 + \frac{3!!}{2^3 \cdot 3!}x^3 - \dots + (-1)^n \cdot \frac{(2n-3)!!}{2^n \cdot n!}x^n + \frac{(-1)^{n+1} \cdot (2n-1)!!}{\sqrt{1+c} \cdot (1+c)^n \cdot 2^{n+1} \cdot (n+1)!} \cdot x^{n+1},$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n \cdot x^n + \frac{(-1)^{n+1}}{(1+c)^{n+2}} \cdot x^{n+1}, \quad 0 \leq c \leq x.$$

Приближенные вычисления по формуле Тейлора.

Формула Тейлора с *остаточным членом в форме Лагранжа* дает возможность вычислять приближенно значения функции $f(x)$ с заданной точностью $\varepsilon > 0$ в произвольной точке x , если известны значения этой функции и всех ее производных до n -го порядка в некоторой точке x_0 .

Для этого в формуле Тейлора:

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

отбрасываем остаточный член $R_n(x)$ и получаем приближенную формулу:

$$f(x) \approx P_n(x),$$

где $P_n(x)$ — многочлен Тейлора:

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Для вычисления значения $P_n(x)$ требуется знать значения $f(x_0)$, $f'(x_0)$, ..., $f^{(n)}(x_0)$.

Погрешность этой приближенной формулы равна значению $|R_n(x)|$, т.е. остаточному члену, взятому по абсолютной величине; и чем меньше значение $|R_n(x)|$, тем точнее приближенная формула.

Для вычисления значения $f(x)$ с заданной точностью ε должно выполняться неравенство: $|R_n(x)| \leq \varepsilon$, т.е. неравенство:

$$\left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1} \right| \leq \varepsilon \Leftrightarrow \frac{|f^{(n+1)}(c)|}{(n+1)!} \cdot |x - x_0|^{n+1} \leq \varepsilon, \quad \text{где } x_0 \leq c \leq x.$$

Из этих неравенств видно, что оценка погрешности приближенной формулы зависит:

а) от «близости» δ точки x к точке x_0 : $|x - x_0| \leq \delta$,

б) от величины n — степени многочлена Тейлора,

а именно: чем меньше δ и чем больше n , тем меньше погрешность.

Следовательно, для обеспечения заданной точности нужно уменьшать число δ (например, взять $\delta \leq 1$), т.е. в качестве точки x_0 брать ближайшую точку, в которой можно вычислить коэффициенты многочлена Тейлора $P_n(x)$, а также увеличивать степень n этого многочлена.

Заметим, что если $(n+1)$ -я производная функции $f(x)$ ограничена в окрестности точки x_0 : $|f^{(n+1)}(x)| \leq M \quad \forall x \in U(x_0)$, то для обеспечения заданной точности ($|R_n(x)| \leq \varepsilon$) достаточно потребовать выполнение условия:

$$\frac{M}{(n+1)!} \cdot \delta^{n+1} \leq \varepsilon.$$

Так как последовательность $\frac{M}{(n+1)!} \cdot \delta^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, то начиная с некоторого номера n указанное неравенство будет выполняться.

Таким образом, для вычисления значения функции $f(x)$ с заданной точностью ε нужно выбрать ближайшую к точке x точку x_0 , оценить величину δ : $|x - x_0| \leq \delta$, затем подобрать степень многочлена n так, чтобы выполнялось неравенство:

$$\frac{|f^{(n+1)}(c)|}{(n+1)!} \cdot \delta^{n+1} \leq \varepsilon, \quad \forall c: x_0 \leq c \leq x.$$

После этого (с выбранными значениями n и x_0) вычислить $f(x) \approx P_n(x)$.

Пример 3.

Вычислить $0,9^{0,9}$ с точностью до 0,001.

Рассмотрим функцию $f(x) = x^x$; надо вычислить значение функции при $x = 0,9$; возьмем $x_0 = 1$; $\delta = |x - x_0| = 0,1$.

Для этой функции имеем значения производных (см. Пример 2):

$$f'(x) = x^x \cdot (1 + \ln x); \quad f''(x) = x^x \cdot (1 + \ln x)^2 + x^x \cdot \frac{1}{x};$$

$$f'''(x) = x^x \left((1 + \ln x)^3 + 3(1 + \ln x) \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right).$$

Оценим значение $f'''(c)$ при $0,9 < c < 1$.

Учитывая, что $0 < c^c < 1$, $0 < 1 + \ln c < 1$, $1 < \frac{1}{c} < \frac{10}{9}$, $1 < \frac{1}{c^2} < \frac{5}{4}$,

получаем оценку сверху: $|f'''(c)| \leq 3 \quad \forall c \in (0,9; 1)$.

Следовательно, должно выполняться неравенство: $\frac{3}{(n+1)!} \cdot 0,1^{n+1} \leq 0,001$.

Можно взять $n = 2$, так как $\frac{3}{(2+1)!} \cdot 0,1^{2+1} = \frac{3}{6} \cdot 0,001 < 0,001$.

Многочлен Тейлора степени $n = 2$ для функции x^x имеет вид (см. тот же Пример):

$$P_2(x) = 1 + (x - 1) + (x - 1)^2.$$

Вычисляя приближенное значение по формуле:

$$x^x \approx 1 + (x - 1) + (x - 1)^2,$$

получаем: $0,9^{0,9} \approx 1 - 0,1 + 0,01 = 0,91 = 0,910$.

Ответ: $0,9^{0,9} \approx 0,910$.

Пример 4.

Вычислить число e с точностью до 0,0001.

Рассмотрим функцию $f(x) = e^x$; надо вычислить значение функции при $x = 1$; возьмем $x_0 = 0$; $\delta = |x - x_0| = 1$.

Для этой функции имеем значения производных: $f^{(n)}(x) = e^x \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

$$|f^{(n+1)}(c)| = e^c < e^1 < 3 \quad \forall c \in (0; 1).$$

Для обеспечения неравенства: $\frac{|f^{(n+1)}(c)|}{(n+1)!} \cdot \delta^{n+1} \leq \varepsilon$ — достаточно выполнения

неравенства: $\frac{3}{(n+1)!} \leq 0,0001 \Leftrightarrow (n+1)! \geq 3 \cdot 10^4 = 30000 \Leftrightarrow n \geq 7$.

Таким образом, для вычисления числа e с заданной точностью нужно взять $n = 7$ и найти значение многочлена Тейлора $P_7(x)$ для функции e^x в точке $x = 1$:

$$e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{7!}x^7;$$

$$e = e^1 \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040} =$$

$$= 2 + \frac{1}{2} + \frac{5}{24} + \frac{7}{720} + \frac{1}{5040} = 2 + \frac{17}{24} + \frac{25}{2520} = 2\frac{181}{252} = 2,71825 \dots \approx 2,7182.$$

Ответ: $e \approx 2,7182$.

§5. Раскрытие неопределенностей. Правило Лопиталя.

Неопределенности типа $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Теорема 1 (правило Лопиталя для неопределенности типа $\frac{0}{0}$).

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на $U^0(a)$ – проколотой окрестности точки a и обладают следующими свойствами:

- 1) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$;
- 2) $f(x)$ и $g(x)$ – дифференцируемы на $U^0(a)$;
- 3) $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in U^0(a)$.

Тогда если существует $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (конечный или бесконечный), то существует и $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$, при этом выполняется равенство:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказательство.

Доопределим функции $f(x)$ и $g(x)$ в точке a :

$$f_0(x) = \begin{cases} f(x), & x \in U^0(a) \\ 0, & x = a \end{cases}, \quad g_0(x) = \begin{cases} g(x), & x \in U^0(a) \\ 0, & x = a \end{cases}.$$

Функции $f_0(x)$ и $g_0(x)$ непрерывны в точке a и на каждом из промежутков $[a; x]$ и $[x; a]$, где $x \in U^0(a)$, удовлетворяют условиям теоремы Коши (см. §2). Следовательно:

$$\exists c \in U^0(a) \quad (a \leq c \leq x): \quad \frac{f_0(x) - f_0(a)}{g_0(x) - g_0(a)} = \frac{f_0'(c)}{g_0'(c)}.$$

Так как $f_0(x) = f(x), g_0(x) = g(x)$ при $x \in U^0(a)$,

$f_0(a) = g_0(a) = 0, f_0'(c) = f'(c), g_0'(c) = g'(c)$, то

$$\frac{f_0(x) - f_0(a)}{g_0(x) - g_0(a)} = \frac{f_0'(c)}{g_0'(c)} \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Перейдем в последнем равенстве к пределу при $x \rightarrow a$ (при этом также и $c \rightarrow a$, т.к. точка c лежит между точками a и x):

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{c \rightarrow a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Теорема доказана.

Пример 1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a^x - b^x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x \ln a - b^x \ln b}{1} = \ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}.$$

Неопределенности типа $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$.

Теорема 2 (правило Лопиталя для неопределенности типа $\frac{\infty}{\infty}$).

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на $U^0(a)$ – проколотой окрестности точки a и обладают следующими свойствами:

- 1) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$;
- 2) $f(x)$ и $g(x)$ – дифференцируемы на $U^0(a)$;
- 3) $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in U^0(a)$.

Тогда если существует $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (конечный или бесконечный), то существует и $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$, при этом выполняется равенство:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказательство этой теоремы можно найти в [1], [3].

Замечание. Теоремы 1 и 2 справедливы и в случае односторонних пределов: $x \rightarrow a \pm 0$ и в случае пределов на бесконечности: $x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow +\infty$.

Пример 2.

$$\text{Пусть } p > 0; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^p} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x^p)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{p \cdot x^{p-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{p \cdot x^p} = 0,$$

т.е. при $x \rightarrow +\infty$ логарифмическая функция $\ln x$ растет медленнее, чем любая степенная функция с положительным показателем степени.

Пример 3.

$$\text{Пусть } p > 0; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^p}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^p)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{p \cdot x^{p-1}}{e^x} = p \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{p-1}}{e^x}.$$

Если $p > 1$, то снова можно применить правило Лопиталя, если $p \leq 1$, то предел равен нулю.

Пусть $n - 1 < p \leq n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$; тогда после n - кратного применения правила Лопиталя, получим:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^p}{e^x} = p \cdot (p - 1) \cdot \dots \cdot (p - n + 1) \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{p-n}}{e^x} = 0, \text{ т.е. любая степенная}$$

функция с положительным показателем степени растет медленнее, чем показательная функция e^x .

Другие типы неопределенностей.

Кроме рассмотренных неопределенностей типа $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$ есть неопределенности типа: $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0 , ∞^0 , 1^∞ (см. [9], глава 4, §10).

Неопределенности $[0 \cdot \infty]$ и $[\infty - \infty]$ легко сводятся к неопределенностям $\left[\frac{0}{0}\right]$ и $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Покажем это на примерах.

Пример 4.

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x \cdot \ln x = [0 \cdot \infty] = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0+} (-x) = 0.$$

Пример 5.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) &= [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1-\ln x}{\ln x \cdot (x-1)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1-\ln x)'}{(\ln x \cdot (x-1))'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\frac{1}{x}}{\frac{x-1}{x} + \ln x} = \\ &= \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

В случае неопределенностей типа 0^0 , ∞^0 , 1^∞ рекомендуется эти выражения предварительно прологарифмировать и тем самым свести их к уже рассмотренным неопределенностям.

Пусть $y = u^v$, где $u = u(x)$, $v = v(x)$; $\ln y = v \cdot \ln u$; тогда $\lim \ln y$ представляет собой неопределенность уже изученного типа $[0 \cdot \infty]$.

Если $\lim \ln y = A$, то $\lim y = \lim e^{\ln y} = e^{\lim \ln y} = e^A$.

Пример 6.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} x^x &= [0^0] = ? \quad y = x^x \Rightarrow \ln y = x \cdot \ln x; \\ \lim_{x \rightarrow 0+} \ln y &= \lim_{x \rightarrow 0+} x \cdot \ln x = [0 \cdot \infty] = 0 \text{ (см. Пример 4)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0+} x^x = e^0 = 1. \end{aligned}$$

Пример 7.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}} &= [\infty^0] = ? \quad y = (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}} \Rightarrow \ln y = \frac{\ln (\operatorname{ctg} x)}{\ln x}; \\ \lim_{x \rightarrow 0+} \ln y &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln (\operatorname{ctg} x)}{\ln x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{(\ln (\operatorname{ctg} x))'}{(\ln x)'} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{-\frac{1}{\operatorname{ctg} x} \cdot \frac{1}{\sin^2 x}}{\frac{1}{x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{-x}{\cos x \cdot \sin x} = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0+} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{-1}. \end{aligned}$$

Пример 8.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}} &= [1^\infty] = ? \quad y = (\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}} \Rightarrow \ln y = \frac{\ln (\cos 2x)}{x^2}; \\ \lim_{x \rightarrow 0} \ln y &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln (\cos 2x)}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln (\cos 2x))'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{2}{\cos 2x} \cdot \sin 2x}{2x} = \\ &= -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{x} = -2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-2}. \end{aligned}$$

Глава 3. Исследование функций

Содержание

§ 1. Исследование функций на монотонность	54
§ 2. Исследование функций на экстремумы	59
§ 3. Исследование функций на выпуклость (вогнутость)	68
§ 4. Построение графиков функций	75
Расчетное задание	81

§ 1. Исследование функций на монотонность.

Рассматриваемые в этом параграфе функции $f(x)$ с областью определения D_f предполагаются непрерывными на промежутке $X \subset D_f$ и дифференцируемыми внутри него. При этом промежуток X может быть замкнутым, открытым, полуоткрытым, ограниченным или неограниченным. Через X° обозначим внутреннюю часть X .

Признак постоянства функции.

Теорема 1.

Для того чтобы $f(x)$ была *постоянной* на промежутке X , необходимо и достаточно, чтобы производная функции тождественно равнялась нулю внутри X :

$$f(x) = \text{const на } X \Leftrightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \in X^\circ.$$

Доказательство.

Необходимость. Пусть $f(x) = C = \text{const}$ на X . Тогда $f'(x) = (C)' = 0 \quad \forall x \in X$.

Достаточность. Пусть $f'(x) = 0 \quad \forall x \in X^\circ$. Возьмем произвольные точки $x_1, x_2 \in X$, $x_1 < x_2$. По *теореме Лагранжа* (см. §2 главы 2) найдется точка $c \in (x_1; x_2)$ такая, что

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c) \cdot (x_2 - x_1).$$

Так как $f'(x) = 0 \quad \forall x \in X^\circ$, то $f'(c) = 0$ и $f(x_2) - f(x_1) = 0 \cdot (x_2 - x_1) = 0$, т.е.

$$f(x_2) = f(x_1) \quad \forall x_1, x_2 \in X.$$

Это означает, что функция $f(x)$ принимает одно и то же значение во всех точках промежутка X , т.е. $f(x)$ *постоянна* на промежутке X .

Теорема доказана.

Используя признак постоянства функции, можно доказать, например, известные в тригонометрии тождества:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in [-1; 1];$$

$$\text{arctg } x + \text{arcctg } x = \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in (-\infty; +\infty).$$

Действительно: пусть $f(x) = \arcsin x + \arccos x$, тогда

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \quad \forall x \in [-1; 1] \Rightarrow f(x) = C \quad \forall x \in [-1; 1] \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \arcsin x + \arccos x = C \quad \forall x \in [-1; 1]$. Подставим в это равенство $x = 0$:

$$\arcsin 0 + \arccos 0 = C \Leftrightarrow 0 + \frac{\pi}{2} = C \Leftrightarrow C = \frac{\pi}{2}. \text{ Следовательно:}$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in [-1; 1]. \text{ Первое тождество доказано.}$$

Аналогично можно доказать и второе тождество.

Следствие.

Если две функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют равные производные внутри промежутка X , то эти функции могут отличаться, лишь на постоянное слагаемое на этом промежутке:

$$f'(x) = g'(x) \quad \forall x \in X^\circ \Rightarrow f(x) = g(x) + C \quad \text{на } X.$$

Доказательство.

Пусть $\varphi(x) = f(x) - g(x)$, тогда $\varphi'(x) = f'(x) - g'(x) = 0 \quad \forall x \in X^\circ \Rightarrow$
 $\varphi(x) = C = \text{const}$ на $X \Rightarrow f(x) - g(x) = C \Rightarrow f(x) = g(x) + C$ на X .

Следствие доказано.

Пример 1.

Рассмотрим две функции: $f(x) = \arctg x$ и $g(x) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}; \quad g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{1} \cdot \frac{1}{(1+x^2) \cdot \sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$f'(x) = g'(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = g(x) + C \text{ на } \mathbb{R} \Rightarrow \arctg x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Найдем значение константы C ; для этого в последнее равенство подставим $x = 0$:

$$\arctg 0 = \arcsin 0 + C \Leftrightarrow 0 = 0 + C \Leftrightarrow C = 0. \text{ Следовательно:}$$

$$\arctg x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Замечание. Аналогично доказывается равенство:

$$\arcsin x = \arctg \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in (-1; 1).$$

Пример 2.

Рассмотрим две функции: $f(x) = \arctg x$ и $g(x) = \frac{1}{2} \arctg \frac{2x}{1-x^2}$, $x \neq \pm 1$.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}; \quad g'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{4x^2}{(1-x^2)^2}} \cdot \frac{2(1-x^2)+4x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(1-x^2)^2}{(1-x^2)^2+4x^2} \cdot \frac{2(1-x^2)+4x^2}{(1-x^2)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2(1+x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{1+x^2}. \quad f'(x) = g'(x) \quad \forall x \neq \pm 1 \Rightarrow$$

$$f(x) = g(x) + C \quad \forall x \neq \pm 1 \Rightarrow \arctg x = \frac{1}{2} \arctg \frac{2x}{1-x^2} + C \quad \forall x \neq \pm 1.$$

Здесь константа C может быть различной на каждом из интервалов:

$$(-\infty; -1), \quad (-1; 1), \quad (1; +\infty).$$

Подставляя значения: $x = \sqrt{3}$, $x = 0$, $x = -\sqrt{3}$, получим соответственно значения C :

$$C = \frac{\pi}{2}, \quad C = 0, \quad C = -\frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, имеем следующие тождества:

$$\frac{1}{2} \arctg \frac{2x}{1-x^2} = \arctg x + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \arctg \frac{2x}{1-x^2} = 2\arctg x + \pi \quad \forall x \in (-\infty; -1);$$

$$\frac{1}{2} \arctg \frac{2x}{1-x^2} = \arctg x \Leftrightarrow \arctg \frac{2x}{1-x^2} = 2\arctg x \quad \forall x \in (-1; 1);$$

$$\frac{1}{2} \arctg \frac{2x}{1-x^2} = \arctg x - \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \arctg \frac{2x}{1-x^2} = 2\arctg x - \pi \quad \forall x \in (1; +\infty).$$

Признаки монотонности функции.

Теорема 2 (признак монотонности).

1) для того чтобы функция $f(x)$ была *возрастающей* на промежутке X , необходимо и достаточно, чтобы производная функции была неотрицательна внутри X :

$$f(x) \nearrow \text{ на } X \Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in X^\circ.$$

2) для того чтобы функция $f(x)$ была *убывающей* на промежутке X , необходимо и достаточно, чтобы производная функции была неположительна внутри X :

$$f(x) \searrow \text{ на } X \Leftrightarrow f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in X^\circ.$$

Доказательство.

Докажем первое утверждение; второе утверждение доказывается аналогично.

Необходимость. Пусть $f(x) \nearrow$ на X , $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ - приращение функции; тогда $\Delta y \geq 0 \quad \forall \Delta x > 0$ и $\Delta y \leq 0 \quad \forall \Delta x < 0$, т.е. $\frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0 \quad \forall \Delta x$.

Перейдем в последнем неравенстве к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$, т.е. $f'(x) \geq 0$.

Достаточность. Пусть $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in X^\circ$. Возьмем произвольные точки $x_1, x_2 \in X$, $x_1 < x_2$. По *теореме Лагранжа* найдется точка $c \in (x_1; x_2)$ такая, что

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c) \cdot (x_2 - x_1).$$

Так как $x_2 - x_1 > 0$ и $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in X^\circ$, то $f'(c) \geq 0$ и $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$, т.е. $f(x_2) \geq f(x_1) \quad \forall x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2$. Это означает, что $f(x) \nearrow$ на X .

Теорема доказана.

Теорема 3 (признак *строгой* монотонности).

1) для того чтобы функция $f(x)$ была *строго возрастающей* на промежутке X , необходимо и достаточно, чтобы выполнялись одновременно следующие два условия:

- а) $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in X^\circ$; б) внутри X не существует интервала $(p; q)$, в котором $f'(x) = 0$ тождественно, т.е. $\forall x \in (p; q)$.

2) для того чтобы функция $f(x)$ была *строго убывающей* на промежутке X , необходимо и достаточно, чтобы выполнялись одновременно следующие два условия:

- а) $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in X^\circ$; б) внутри X не существует интервала $(p; q)$, в котором $f'(x) = 0$ тождественно, т.е. $\forall x \in (p; q)$.

Доказательство.

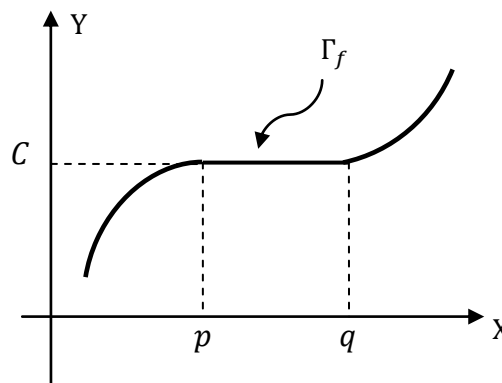
Докажем первое утверждение; второе утверждение доказывается аналогично.

Необходимость. Пусть $f(x)$ *строго* $\nearrow$ на X , тогда $f(x) \nearrow$ на X и по Теореме 2 имеем: $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in X^\circ \Rightarrow$ условие а) - выполнено. Условие б) - докажем методом *от противного*; пусть найдется такой интервал $(p; q)$, в котором $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (p; q)$; тогда по Теореме 1 имеем: $f(x) = \text{const}$ на $(p; q)$, но это противоречит условию *строгой* монотонности функции на промежутке X . Поэтому условие б) - также выполнено.

Достаточность. Пусть выполнены условия а) и б). Из условия а) по Теореме 2 следует, что $f(x) \nearrow$ на X . Докажем, что $f(x)$ строго $\nearrow$ на X методом от противного. Пусть найдутся такие значения $x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2$, что $f(x_1) = f(x_2)$. В силу возрастания функции имеем неравенства: $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$; так как $f(x_1) = f(x_2)$, то $f(x) = \text{const} = f(x_1) = f(x_2) \quad \forall x \in (x_1; x_2)$; следовательно: $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (x_1; x_2)$, но это противоречит условию б). Поэтому $f(x)$ строго $\nearrow$ на X .

Теорема доказана.

Здесь на рисунке приведен график монотонной функции, которая не является строго монотонной, т.к. есть интервал $(p; q)$, на котором функция постоянна.



Теорема 4 (достаточное условие строгой монотонности).

- 1) если $f'(x) > 0 \quad \forall x \in X^\circ$, то $f(x)$ строго возрастает на промежутке X ;
- 2) если $f'(x) < 0 \quad \forall x \in X^\circ$, то $f(x)$ строго убывает на промежутке X .

Доказательство.

1) возьмем произвольные точки $x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2$. По теореме Лагранжа найдется точка $c \in (x_1; x_2)$ такая, что

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c) \cdot (x_2 - x_1).$$

Так как $x_2 - x_1 > 0$ и $f'(x) > 0 \quad \forall x \in X^\circ$, то $f'(c) > 0$ и $f(x_2) - f(x_1) > 0$, т.е. $f(x_2) > f(x_1) \quad \forall x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2$. Это означает, что $f(x)$ строго $\nearrow$ на X .

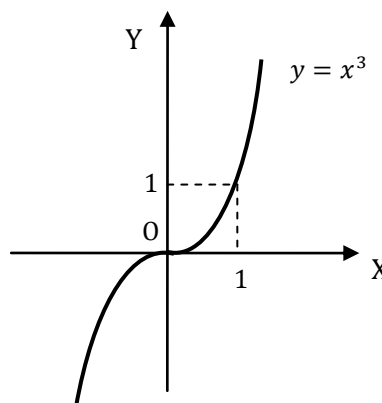
Аналогично доказывается пункт 2). Теорема доказана.

Замечание.

Достаточное условие строгой монотонности не является необходимым, т.е. если функция строго монотонна на некотором промежутке X , то не обязательно, чтобы выполнялось и строгое неравенство для ее производной: $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) $\forall x \in X$.

Из строгой монотонности, как и обычной монотонности, следует лишь нестрогое неравенство: $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) $\forall x \in X$.

Например, функция $y = x^3$ строго возрастает на $(-\infty; +\infty)$. Но ее производная $f'(x) = 3x^2$ обращается в нуль при $x = 0$: $f'(0) = 0$.



Обобщением Теоремы 4 является следующее утверждение.

Теорема 5 (достаточное условие *строгой* монотонности).

1) если $f'(x) > 0 \quad \forall x \in X^\circ$ за исключением (быть может) лишь конечного числа значений x , в которых $f'(x) = 0$, то $f(x)$ *строго возрастает* на промежутке X ;

2) если $f'(x) < 0 \quad \forall x \in X^\circ$ за исключением (быть может) лишь конечного числа значений x , в которых $f'(x) = 0$, то $f(x)$ *строго убывает* на промежутке X .

Доказательство теоремы 5 проводится на основе предыдущих утверждений и никакой сложности не представляет.

Пример 3. $f(x) = x - \sin x$;

$$f'(x) = 1 - \cos x \geq 0 \quad \forall x \in R, \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2\pi k, \quad k \in Z \Rightarrow$$

$$f'(x) > 0 \quad \forall x \in R, \quad x \neq 2\pi k, \quad k \in Z.$$

Итак, на любом конечном промежутке, согласно Теореме 5, функция $f(x)$ *строго возрастает*. Следовательно, функция $f(x)$ *строго возрастает* и на $(-\infty; +\infty)$.

Изложенные *признаки монотонности* функций успешно применяются при доказательстве неравенств.

Пример 4. Доказать неравенство: $\cos x > 1 - \frac{1}{2}x^2 \quad \forall x \neq 0$.

Пусть $f(x) = \cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2$; тогда $f'(x) = x - \sin x$. Как известно: $\sin x < x \quad \forall x > 0$ (см. [9], глава 4, §5, Лемма 1), поэтому $f'(x) > 0 \quad \forall x > 0$. Следовательно, функция $f(x)$ строго возрастает на промежутке $[0; +\infty)$, т.е. $f(x) > f(0) \quad \forall x > 0$.

Так как $f(0) = \cos 0 - 1 = 0$, то получаем:

$$f(x) > 0 \quad \forall x > 0 \Leftrightarrow \cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2 > 0 \quad \forall x > 0 \Leftrightarrow \cos x > 1 - \frac{1}{2}x^2 \quad \forall x > 0.$$

Учитывая, что в обеих частях неравенства стоят *четные* функции, получаем:

$$\cos x > 1 - \frac{1}{2}x^2 \quad \forall x \neq 0. \text{ Неравенство доказано.}$$

Пример 5. Доказать неравенство: $\sin x > x - \frac{1}{6}x^3 \quad \forall x > 0$.

$$\text{Пусть } f(x) = \sin x - x + \frac{1}{6}x^3; \text{ тогда } f'(x) = \cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2.$$

$$\text{Из предыдущего примера имеем: } \cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2 > 0 \quad \forall x > 0 \Leftrightarrow f'(x) > 0 \quad \forall x > 0.$$

Следовательно, функция $f(x)$ строго возрастает на промежутке $[0; +\infty)$,

т.е. $f(x) > f(0) \quad \forall x > 0$. Так как $f(0) = 0$, то получаем: $f(x) > 0 \quad \forall x > 0 \Leftrightarrow$

$$\sin x - x + \frac{1}{6}x^3 > 0 \quad \forall x > 0 \Leftrightarrow \sin x > x - \frac{1}{6}x^3 \quad \forall x > 0. \text{ Неравенство доказано.}$$

Пример 6. Доказать неравенство: $\ln(1+x) < x \quad \forall x > 0$.

$$\text{Пусть } f(x) = \ln(1+x) - x; \text{ тогда } f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 < 0 \quad \forall x > 0. \text{ Следовательно,}$$

функция $f(x)$ строго убывает на промежутке $[0; +\infty)$, т.е. $f(x) < f(0) = 0 \quad \forall x > 0 \Leftrightarrow$

$$\ln(1+x) - x < 0 \quad \forall x > 0 \Leftrightarrow \ln(1+x) < x \quad \forall x > 0. \text{ Неравенство доказано.}$$

§ 2. Исследование функций на экстремумы.

Необходимые условия экстремума.

Напомним некоторые сведения, связанные с понятием *экстремума*, введенные в §1 главы 2.

Определение. Точка x_0 называется *точкой максимума* функции $y = f(x)$, если в некоторой окрестности этой точки значение $f(x_0)$ является наибольшим, т.е.

$\exists U(x_0) \subset D_f: f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in U(x_0)$. Значение $y_0 = f(x_0)$ называется *максимумом*.

Точка x_0 называется *точкой минимума* функции $y = f(x)$, если в некоторой окрестности этой точки значение $f(x_0)$ является наименьшим, т.е.

$\exists U(x_0) \subset D_f: f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in U(x_0)$. Значение $y_0 = f(x_0)$ называется *минимумом*.

Точки *минимума* и *максимума* называются *точками экстремума*. Значение функции в точке *экстремума* называется *экстремумом*.

Для точек экстремума была доказана следующая теорема (см. §1 главы 2).

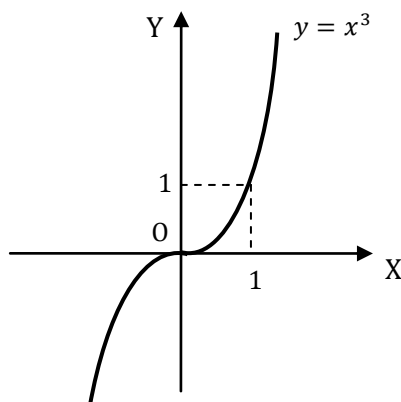
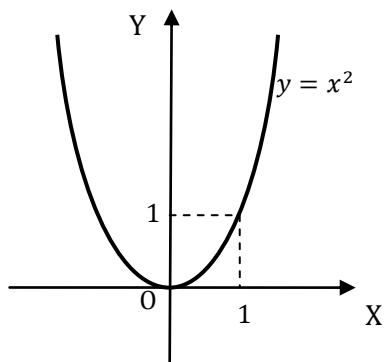
Теорема Ферма.

Пусть x_0 — точка экстремума функции $y = f(x)$. Если функция дифференцируема в точке x_0 , то ее производная в этой точке равна нулю:

$$x_0 - \text{т. экстр.}, \exists f'(x_0) \text{ (конечная)} \Rightarrow f'(x_0) = 0.$$

Например, функция $y = x^2$ в точке $x_0 = 0$ имеет минимум и производная в этой точке равна нулю: $f'(x) = 2x$, $f'(0) = 0$.

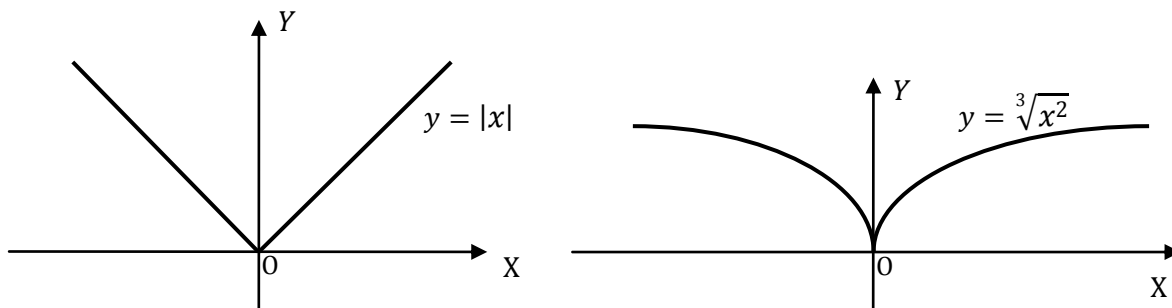
Надо заметить, что обратное утверждение к теореме Ферма неверно: если $f'(x_0) = 0$, то x_0 — может и не быть точкой экстремума. Например, функция $y = x^3$ в точке $x_0 = 0$ имеет производную, равную нулю: $f'(x) = 3x^2$, $f'(0) = 0$; однако эта точка не является точкой экстремума (см. рис.)



Из теоремы Ферма следует, что если функция имеет точки экстремума, то это те точки, в которых производная либо равна нулю, либо равна ∞ , либо не существует.

Например:

- функция $y = |x|$ в точке $x_0 = 0$ имеет минимум, $f'(x_0)$ — не существует (см. рис.);
- функция $y = \sqrt[3]{x^2}$ в точке $x_0 = 0$ имеет минимум, $f'(x_0) = \infty$ (см. рис.).



Далее, исследуя функцию $f(x)$ на экстремум, будем предполагать, что она непрерывна на D_f .

Определение. Точки, в которых производная функции $f(x)$ равна нулю, либо равна ∞ , либо не существует, называются *критическими точками* функции $f(x)$ (или точками, подозрительными на экстремум).

Таким образом, имеем необходимые условия экстремума:

если x_0 — точка экстремума функции $f(x)$, то x_0 — критическая точка функции $f(x)$.

Точки, в которых производная функции $f(x)$ равна нулю, называются *стационарными точками*.

Экстремум функции $f(x)$, достигаемый в *стационарной* точке, называется *гладким экстремумом*. Если экстремум достигается в точке, в которой производная $f'(x_0)$ не существует, но существуют конечные $f'(x_0 \pm 0)$, то экстремум называется *угловым*. Если же в точке экстремума $f'(x_0) = \infty$, то такой экстремум называется *острым*.

Например:

- функция $y = x^2$ в точке $x_0 = 0$ имеет *гладкий* минимум;
- функция $y = |x|$ в точке $x_0 = 0$ имеет *угловой* минимум;
- функция $y = \sqrt[3]{x^2}$ в точке $x_0 = 0$ имеет *острый* минимум.

Необходимые условия экстремума не являются достаточными: если x_0 — критическая точка функции $f(x)$, то x_0 — не обязательно точка экстремума. Например, для функции $y = x^3$ точка $x_0 = 0$ — критическая (стационарная) точка, но она не является точкой экстремума.

Необходимые условия экстремума позволяют сузить поиск *экстремальных* точек функции от множества всех точек D_f до множества *критических* точек данной функции.

Решение задачи нахождения точек экстремума заданной *непрерывной* функции начинается с поиска всех *критических* точек данной функции.

После этого каждая *критическая* точка подвергается «испытанию»: проверке дополнительных условий, обеспечивающих наличие или отсутствие экстремума в данной точке. Эти дополнительные условия называются *достаточными условиями* экстремума.

Достаточные условия экстремума по первой производной.

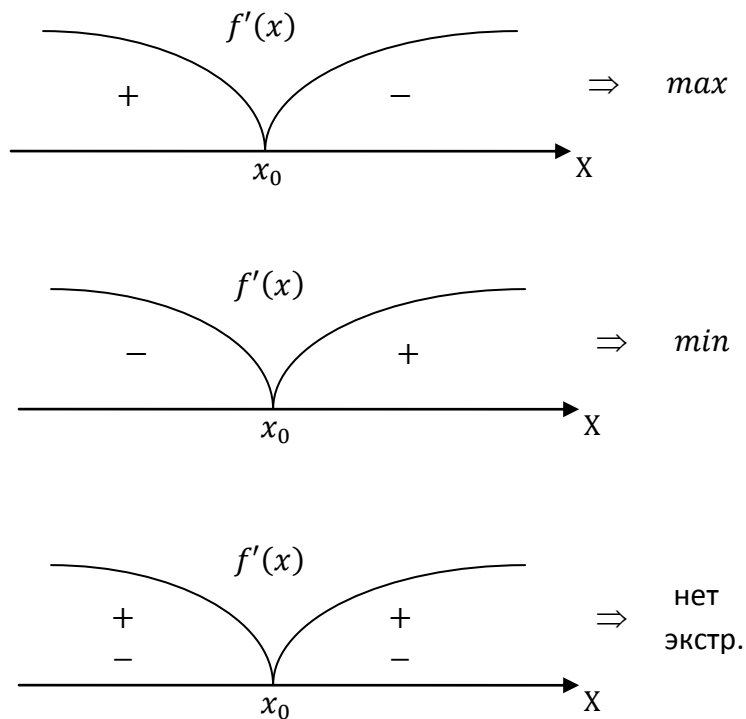
Рассматривается функция $y = f(x)$ — непрерывная в точке x_0 и дифференцируемая в проколотой окрестности $U^0(x_0)$, т.е. для функции $f(x)$ существует конечная производная $f'(x) \forall x \in U^0(x_0)$.

Теорема 1 (достаточные условия экстремума по первой производной).

Пусть x_0 — критическая точка функции $f(x)$, а производная $f'(x)$ сохраняет знак в некоторой окрестности $U_-^0(x_0)$ (слева от точки x_0) и в $U_+^0(x_0)$ (справа от точки x_0).

Тогда:

- 1) если производная $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак " + " на " - ", то x_0 — точка максимума функции;
- 2) если производная $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак " - " на " + ", то x_0 — точка минимума функции;
- 3) если производная $f'(x)$ при переходе через точку x_0 не меняет знака, то x_0 — не является точкой экстремума функции.



Доказательство.

Применим признак строгой монотонности функции (см. Теорему 4 из §1).

- 1) $f(x) \nearrow$ (строго) на $U_-^0(x_0)$ и $f(x) \searrow$ (строго) на $U_+^0(x_0) \Rightarrow f(x_0) > f(x) \forall x \in U_-^0(x_0)$ и $f(x_0) > f(x) \forall x \in U_+^0(x_0) \Rightarrow x_0$ — точка *max* - а.
- 2) $f(x) \searrow$ (строго) на $U_-^0(x_0)$ и $f(x) \nearrow$ (строго) на $U_+^0(x_0) \Rightarrow f(x_0) < f(x) \forall x \in U_-^0(x_0)$ и $f(x_0) < f(x) \forall x \in U_+^0(x_0) \Rightarrow x_0$ — точка *min* - а.

3) $f(x) \nearrow$ (строго) на $U_{-}^0(x_0)$ и $f(x) \nearrow$ (строго) на $U_{+}^0(x_0) \Rightarrow f(x) \nearrow$ (строго) на $U^0(x_0)$ или $f(x) \searrow$ (строго) на $U_{-}^0(x_0)$ и $f(x) \searrow$ (строго) на $U_{+}^0(x_0) \Rightarrow f(x) \searrow$ (строго) на $U^0(x_0)$.

В любом случае x_0 не является точкой экстремума функции.

Теорема доказана.

Достаточные условия экстремума по первой производной позволяют полностью решить вопрос о нахождении экстремума функции в случае, когда на рассматриваемом промежутке X имеется конечное число критических точек: $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Ведь тогда на каждом интервале $(x_k; x_{k+1})$ функция $f(x)$ дифференцируема и ее производная $f'(x)$ сохраняет в нем постоянный знак.

Пример 1.

Найти экстремумы функции $f(x) = (x + 2)^2 \cdot (x - 1)^3$.

$$f'(x) = 2(x + 2) \cdot (x - 1)^3 + 3(x + 2)^2 \cdot (x - 1)^2 = (x + 2) \cdot (x - 1)^2 \cdot (5x + 4).$$

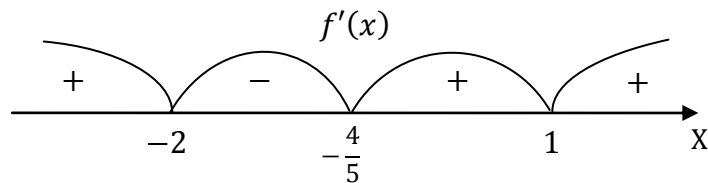
Так как функция $f(x)$ везде дифференцируема, то все критические точки — это стационарные точки функции, т.е. корни уравнения $f'(x) = 0$.

Стационарными точками будут: $x_1 = -2$; $x_2 = -\frac{4}{5}$; $x_3 = 1$.

Эти точки разбивают числовую ось на интервалы:

$$(-\infty; -2), \quad \left(-2; -\frac{4}{5}\right), \quad \left(-\frac{4}{5}; 1\right), \quad (1; +\infty).$$

Расставим знаки производной в каждом интервале (см. рис.)



Из этой картинки ясно, что $x_1 = -2$ - точка *max* - а; $x_2 = -\frac{4}{5}$ - точка *min* - а; $x_3 = 1$ - не является точкой экстремума.

Найдем значения максимума и минимума:

$$y_{\max} = f(-2) = 0; \quad y_{\min} = f\left(-\frac{4}{5}\right) = -8 \frac{1244}{3125} \approx -8,4.$$

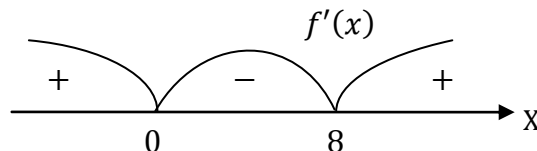
Пример 2.

Найти экстремумы функции $f(x) = \frac{x}{3} - \sqrt[3]{x^2}$.

Здесь $f'(x) = \frac{1}{3} - \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}} = \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}$. Критические точки: $x_1 = 0$; $x_2 = 8$.

Эти точки разбивают числовую ось на интервалы: $(-\infty; 0)$, $(0; 8)$, $(8; +\infty)$.

Расставляем знаки производной в каждом интервале (см. рис.)



Из рисунка видно, что $x_1 = 0$ - точка *max* - а; $x_2 = 8$ - точка *min* - а.

Найдем значения максимума и минимума: $y_{\max} = f(0) = 0$; $y_{\min} = f(8) = -\frac{4}{3}$.

Ответ: $y_{\max} = f(0) = 0$; $y_{\min} = f(8) = -\frac{4}{3}$.

Достаточные условия экстремума по второй производной.

Рассматривается функция $y = f(x)$, дифференцируемая в некоторой окрестности $U(x_0)$, т.е. для функции $f(x)$ существует конечная производная $f'(x) \forall x \in U(x_0)$.

Теорема 2 (достаточные условия экстремума по второй производной).

Пусть x_0 — стационарная точка функции $f(x)$, т.е. $f'(x_0) = 0$, пусть $\exists f''(x_0) \neq 0$.

Тогда:

- 1) если $f''(x_0) < 0$, то x_0 — точка максимума функции;
- 2) если $f''(x_0) > 0$, то x_0 — точка минимума функции.

Доказательство.

$$1) f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0} < 0.$$

По свойству пределов функций (см. [9], глава 4, §2) указанное неравенство верно и для всех точек x из некоторой проколотой окрестности $\tilde{U}^0(x_0)$ точки x_0 :

$$\frac{f'(x)}{x - x_0} < 0 \quad \forall x \in \tilde{U}^0(x_0).$$

Тогда при $x > x_0$ выполняется неравенство $f'(x) < 0$, а при $x < x_0$ — неравенство $f'(x) > 0$, т.е.

$$f'(x) > 0 \quad \forall x \in \tilde{U}_-^0(x_0), \quad f'(x) < 0 \quad \forall x \in \tilde{U}_+^0(x_0).$$

Это значит, что при переходе через точку x_0 производная $f'(x)$ меняет знак " + " на " - ". Согласно Теореме 1 точка x_0 — максимума функции.

Аналогично доказывается пункт 2). Теорема доказана.

Пример 3.

Найти экстремумы функции $f(x) = \sin x + \cos x$ на промежутке $[0; 2\pi]$.

Здесь $f'(x) = \cos x - \sin x$; найдем стационарные точки: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \cos x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \cos x = \sin x \Leftrightarrow x = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{4} \\ \frac{5\pi}{4} \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{4}, x_2 = \frac{5\pi}{4} \text{ — стационарные точки.}$$

$$f''(x) = -\sin x - \cos x; f''(x_1) = -\sqrt{2} < 0 \Rightarrow x_1 \text{ — точка } \textit{max} \text{ — а;}$$

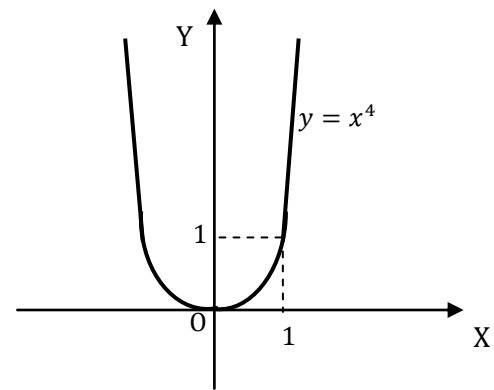
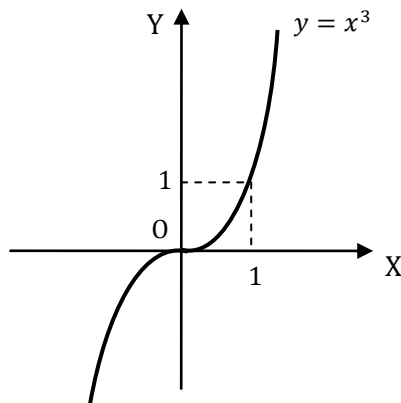
$$f''(x_2) = \sqrt{2} > 0 \Rightarrow x_2 \text{ — точка } \textit{min} \text{ — а;}$$

Ответ: $y_{\max} = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$; $y_{\min} = f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$.

Замечание.

В случае $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) = 0$ вопрос о наличии экстремума в точке x_0 остается открытым. В этом случае возможны разные варианты: x_0 — может быть точкой экстремума, а может и не быть. Например, для функций $y = x^3$ и $y = x^4$ в точке $x_0 = 0$

выполнено: $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$, но для первой функции точка x_0 не является точкой экстремума, а для второй является точкой минимума (см. рис.)



Рассмотрим следующую задачу геометрического содержания.

Задача. На кривой $y = f(x)$ найти точку M , ближайшую к началу координат.

Пусть $M(x; y) \in \Gamma_f$; расстояние от начала координат до точки M равно:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + f^2(x)}.$$

Для решения задачи надо найти точку x_0 , для которой величина d принимает наименьшее значение.

Для удобства вычислений вместо величины d введем величину

$$r = \frac{1}{2} \cdot d^2 = \frac{1}{2} \cdot (x^2 + f^2(x)).$$

Ясно, что когда величина d принимает наименьшее значение, тогда и величина r принимает наименьшее значение и наоборот.

Для новой функции $r = r(x)$ применим необходимые и достаточные условия экстремума. Вычислим первую и вторую производные функции $r(x)$:

$$r'(x) = x + f(x) \cdot f'(x); \quad r''(x) = 1 + (f'(x))^2 + f(x) \cdot f''(x).$$

Тогда для искомой точки x_0 должны выполняться условия:

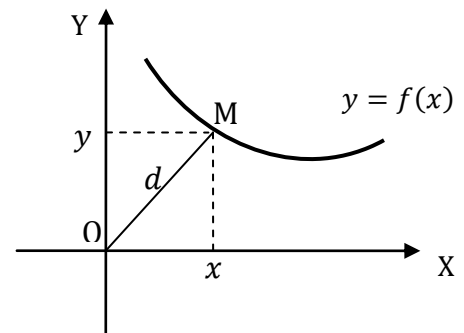
$$(*) \quad \begin{cases} x + f(x) \cdot f'(x) = 0 \\ 1 + (f'(x))^2 + f(x) \cdot f''(x) > 0 \end{cases}$$

Пример 4.

На параболе $y = 1 - x^2$ найти точку, ближайшую к началу координат. Здесь $f(x) = 1 - x^2$, $f'(x) = -2x$, $f''(x) = -2$. Составим систему (*):

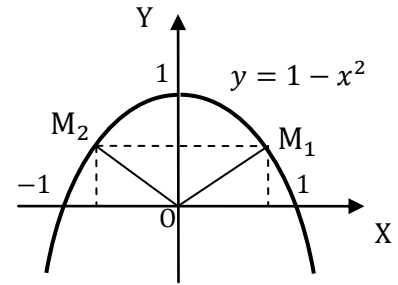
$$\begin{cases} x - 2x \cdot (1 - x^2) = 0 \\ 1 + 4x^2 - 2 \cdot (1 - x^2) > 0 \end{cases}$$

Из уравнения системы находим его корни: $x_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$, $x_3 = 0$.



Подставляя эти значения в неравенство системы, выясняем, что подходят лишь значения $x_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$, при этом $y_{1,2} = \frac{1}{2}$.

Таким образом, на параболке $y = 1 - x^2$ ближайшими к началу координат точками будут $M_{1,2} \left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{2} \right)$, лежащие на расстоянии $d = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



Достаточные условия экстремума по производным высших порядков.

Рассматривается функция $y = f(x)$, n раз дифференцируемая в точке x_0 .

Теорема 3 (достаточные условия экстремума по производным высших порядков).

Пусть $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, а $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тогда:

- 1) если n четное число, то x_0 — точка экстремума функции, а именно:
 при $f^{(n)}(x_0) < 0$ — точка максимума;
 при $f^{(n)}(x_0) > 0$ — точка минимума;
- 2) если n нечетное число, то x_0 — не является точкой экстремума.

Доказательство.

Для функции $f(x)$ составим формулу Тейлора n -го порядка с остаточным членом в форме Пеано (см. §4 главы 2):

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n).$$

Так как $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, то получаем формулу:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n).$$

Пусть $\alpha(x) = \frac{o((x-x_0)^n)}{(x-x_0)^n}$, тогда $\alpha(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow x_0$ и $o((x - x_0)^n) = \alpha(x) \cdot (x - x_0)^n$.

Теперь формула Тейлора запишется в виде:

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \alpha(x) \cdot (x - x_0)^n = \left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \alpha(x) \right) \cdot (x - x_0)^n = \\ &= (A + \alpha(x)) \cdot (x - x_0)^n, \text{ где } A = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \alpha(x) \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow x_0. \end{aligned}$$

Так как $A + \alpha(x) \rightarrow A$ при $x \rightarrow x_0$, то по свойству пределов функций (см. [9], глава 4, §2) выражение $A + \alpha(x)$ будет иметь в некоторой окрестности $U^0(x_0)$ тот же знак, что и знак A , т.е. знак $f^{(n)}(x_0)$:

$$f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow A + \alpha(x) < 0 \quad \forall x \in U^0(x_0), \quad f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow A + \alpha(x) > 0 \quad \forall x \in U^0(x_0).$$

Пусть n четное число; тогда $(x - x_0)^n > 0 \quad \forall x \in U^0(x_0)$; если при этом $f^{(n)}(x_0) < 0$, то $A < 0$ и $f(x) - f(x_0) = (A + \alpha(x)) \cdot (x - x_0)^n < 0 \quad \forall x \in U^0(x_0)$, т.е.

$f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in U^0(x_0) \Rightarrow x_0$ — точка максимума;

если же $f^{(n)}(x_0) > 0$, то $A > 0$ и $f(x) - f(x_0) = (A + \alpha(x)) \cdot (x - x_0)^n > 0 \quad \forall x \in U^0(x_0)$, т.е. $f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in U^0(x_0) \Rightarrow x_0$ — точка минимума.

Пусть n нечетное число; тогда $(x - x_0)^n > 0$ при $x > x_0$ и $(x - x_0)^n < 0$ при $x < x_0$; в этом случае независимо от знака $f^{(n)}(x_0)$ выражение $(A + \alpha(x)) \cdot (x - x_0)^n$ меняет знак при переходе через точку x_0 .

Следовательно, разность $f(x) - f(x_0)$ также меняет знак, т.е. $f(x) > f(x_0)$ с одной стороны от точки x_0 и $f(x) < f(x_0)$ с другой стороны от точки x_0 . Это означает, что в точке x_0 экстремума нет.

Теорема доказана.

Пример 5.

$f(x) = x^3$, $x_0 = 0$; $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$, $f'''(x) = 6$;
 $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow n = 3$ — нечетное число $\Rightarrow$ в точке x_0 экстремума нет.

$f(x) = x^4$, $x_0 = 0$; $f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = 12x^2$, $f'''(x) = 24x$, $f^{IV}(x) = 24$;
 $f'(x_0) = f''(x_0) = f'''(x_0) = 0$, $f^{IV}(x_0) \neq 0 \Rightarrow n = 4$ — четное число $\Rightarrow x_0$ — точка экстремума; $f^{IV}(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ — точка минимума.

Замечание.

Полученный критерий для нахождения экстремума (Теорема 3) охватывает весьма широкий класс случаев. Однако он не является всеобъемлющим: есть функции, не являющиеся постоянными, но имеющие производные любого порядка в окрестности данной точки, которые в этой точке все обращаются в нуль.

Например (пример, предложенный **Коши**), функция:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{если } x \neq 0 \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}$$

в точке 0 имеет производные любого порядка, причем $f^{(n)}(0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (см. [1]).

Хотя ясно, что $f(x)$ имеет в точке $x = 0$ минимум, но установить этот факт с помощью доказанного критерия (Теоремы 3) — не удалось бы.

Наибольшее и наименьшее значения функции.

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a; b]$. По теореме Вейерштрасса (см. [9], глава 5, §4) функция достигает своего наименьшего и наибольшего значений на этом отрезке, т.е.

$$\exists x_1 \in [a; b]: f(x_1) = m, \text{ где } m = \inf \{f(x), x \in [a; b]\},$$

$$\exists x_2 \in [a; b]: f(x_2) = M, \text{ где } M = \sup \{f(x), x \in [a; b]\}.$$

Требуется найти числа m и M , а также соответствующие им значения x_1 и x_2 .

Наибольшее и наименьшее значения функции могут достигаться либо внутри промежутка $[a; b]$, либо на его концах, т.е. в точках a и b .

Если эти значения достигаются внутри $[a; b]$, то они являются экстремумами; значит, надо искать их среди критических точек функции $f(x)$.

Таким образом, намечается следующая последовательность действий для нахождения наименьшего и наибольшего значений функции на отрезке:

- 1) найти все критические точки $x_1, \dots, x_n$ функции $f(x)$ на интервале $(a; b)$;
- 2) вычислить значения функции в найденных критических точках $f(x_1), \dots, f(x_n)$, а также значения на концах промежутка $f(a)$ и $f(b)$;
- 3) среди вычисленных значений выбрать наименьшее и наибольшее.

Пример 6.

Найти наименьшее и наибольшее значения функции

$$y = 2x^3 - 18x^2 + 48x + 1 \text{ на промежутке } [1; 3].$$

- 1) найдем критические точки на интервале $(1; 3)$:

$$y' = 6x^2 - 36x + 48 = 6(x^2 - 6x + 8), \quad x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix},$$

$4 \notin (1; 3) \Rightarrow x_1 = 2$ — единственная критическая точка на интервале $(1; 3)$;

- 2) вычислим значения функции в точке x_1 и в точках a и b :

$$f(x_1) = f(2) = 41; \quad f(a) = f(1) = 33; \quad f(b) = f(3) = 37;$$

- 3) $m = 33; M = 41$.

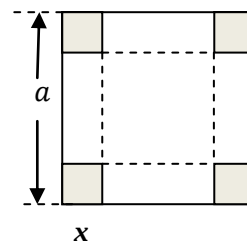
Ответ: $m = f(1) = 33$ — наименьшее значение функции;

$M = f(2) = 41$ — наибольшее значение функции.

Пример 7.

Из квадратного листа жести со стороной a , вырезая по углам равные квадратики и сгибая края, составляют прямоугольную открытую коробку (см. рис.)

Как получить коробку наибольшей вместимости?



Если сторону вырезаемого квадратика обозначить через x , то объем коробки выразится так: $V = x(a - 2x)^2$, где $x \in \left[0; \frac{a}{2}\right]$. Надо найти наибольшее значение функции V на этом промежутке.

- 1) найдем критические точки: $V' = (a - 2x)^2 - 4x(a - 2x) = (a - 2x)(a - 6x)$;

$$x_1 = \frac{a}{6} \in \left(0; \frac{a}{2}\right), \quad x_2 = \frac{a}{2} \notin \left(0; \frac{a}{2}\right);$$

- 2) вычислим значения функции V в точке x_1 и в точках 0 и $\frac{a}{2}$:

$$V(x_1) = V\left(\frac{a}{6}\right) = \frac{a}{6} \left(a - \frac{a}{3}\right)^2 = \frac{2a^3}{27}; \quad V(0) = V\left(\frac{a}{2}\right) = 0;$$

$$3) M = \frac{2a^3}{27}.$$

Ответ: Коробку наибольшей вместимости $M = \frac{2a^3}{27}$ можно получить, если вырезать квадратики со стороной $\frac{a}{6}$.

§ 3. Исследование функций на выпуклость (вогнутость).

Понятия выпуклой и вогнутой функции.

Дана функция $y = f(x)$, непрерывная на промежутке $X \subset D_f$.

Определение.

Функция $y = f(x)$ называется *выпуклой* (выпуклой вниз) на промежутке X , если для любых точек x_1 и $x_2 \in X$ выполняется неравенство:

$$f(\alpha \cdot x_1 + \beta \cdot x_2) \leq \alpha \cdot f(x_1) + \beta \cdot f(x_2)$$

для любых чисел α, β таких, что $\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$.

Определение.

Функция $y = f(x)$ называется *вогнутой* (выпуклой вверх) на промежутке X , если для любых точек x_1 и $x_2 \in X$ выполняется неравенство:

$$f(\alpha \cdot x_1 + \beta \cdot x_2) \geq \alpha \cdot f(x_1) + \beta \cdot f(x_2)$$

для любых чисел α, β таких, что $\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$.

Замечание.

Из определений следует, что если функция $y = f(x)$ *выпукла* (выпукла вниз), то функция $y = -f(x)$ - *вогнута* (выпукла вверх) и наоборот. Это обстоятельство позволяет во многих случаях ограничиваться изучением лишь выпуклых функций.

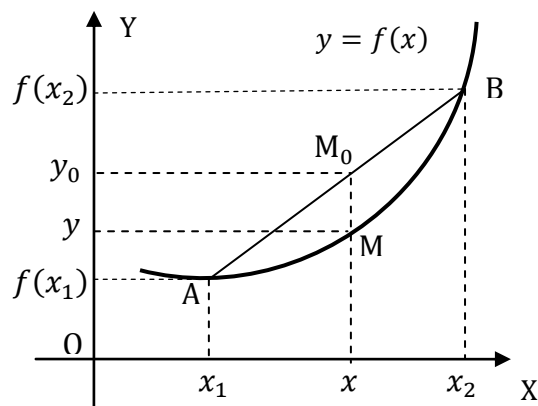
Выясним геометрический смысл *выпуклости* и *вогнутости* функции.

На графике функции $y = f(x)$ отметим точки $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ и проведем хорду (прямую), соединяющую точки A и B (см. рис.). Уравнение этой хорды:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \text{ где } x_1 \leq x \leq x_2, y_1 \leq y \leq y_2.$$

Заметим, что при $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ и $\alpha + \beta = 1$ точка $x = \alpha \cdot x_1 + \beta \cdot x_2 = \alpha \cdot x_1 + (1 - \alpha) \cdot x_2$ лежит между точками x_1 и x_2 на оси абсцисс; если $\alpha = 1, \beta = 0$, то $x = x_1$, а если $\alpha = 0, \beta = 1$, то $x = x_2$.

Соответственно, точка $y_0 = \alpha \cdot y_1 + \beta \cdot y_2 = \alpha \cdot y_1 + (1 - \alpha) \cdot y_2$ лежит между точкам y_1 и y_2 на оси ординат, где $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$.



При этом точка $M(x, f(x))$ лежит на графике функции $y = f(x)$, а точка $M_0(x, y_0)$ лежит на хорде, так как ее координаты удовлетворяют уравнению хорды:

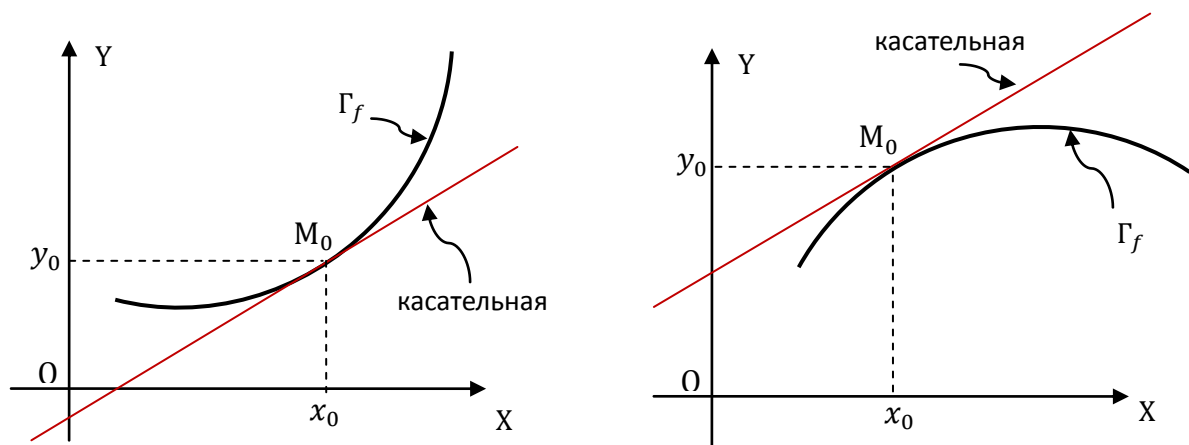
$$\frac{y_0 - y_1}{x - x_1} = \frac{\alpha \cdot y_1 + (1-\alpha) \cdot y_2 - y_1}{\alpha \cdot x_1 + (1-\alpha) \cdot x_2 - x_1} = \frac{(1-\alpha) \cdot y_2 - (1-\alpha) \cdot y_1}{(1-\alpha) \cdot x_2 - (1-\alpha) \cdot x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Неравенство: $f(\alpha \cdot x_1 + \beta \cdot x_2) \leq \alpha \cdot f(x_1) + \beta \cdot f(x_2)$ — означает, что точка M на графике лежит ниже соответствующей точки M_0 на хорде.

Таким образом, выпуклость (выпуклость вниз) функции означает, что все точки графика лежат ниже (точнее, не выше) точек соответствующей хорды.

Аналогично, вогнутость (выпуклость вверх) функции означает, что все точки графика лежат выше (точнее, не ниже) точек соответствующей хорды.

Сформулируем без доказательства (см. [1], [3]) еще один геометрический смысл выпуклости и вогнутости функции.



Для выпуклой (выпуклой вниз) функции все точки касательной лежат ниже (точнее, не выше) соответствующих точек графика функции (см. рис. слева).

Для вогнутой (выпуклой вверх) функции все точки касательной лежат выше (точнее, не ниже) соответствующих точек графика функции (см. рис. справа).

Примеры выпуклых функций.

1) Линейная функция: $y = kx + b$ является одновременно и выпуклой и вогнутой функцией на всей числовой оси, так как с одной стороны:

$$f(\alpha \cdot x_1 + \beta \cdot x_2) = k(\alpha \cdot x_1 + \beta \cdot x_2) + b = \alpha \cdot kx_1 + \beta \cdot kx_2 + b,$$

а с другой стороны:

$$\alpha \cdot f(x_1) + \beta \cdot f(x_2) = \alpha(k \cdot x_1 + b) + \beta(k \cdot x_2 + b) = \alpha \cdot kx_1 + \beta \cdot kx_2 + (\alpha + \beta)b = \alpha \cdot kx_1 + \beta \cdot kx_2 + b, \text{ т.е. } f(\alpha \cdot x_1 + \beta \cdot x_2) = \alpha \cdot f(x_1) + \beta \cdot f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

2) Рассмотрим квадратичную функцию: $y = x^2$.

$$\text{Здесь } f(\alpha \cdot x_1 + \beta \cdot x_2) = (\alpha \cdot x_1 + \beta \cdot x_2)^2 = \alpha^2 \cdot x_1^2 + 2\alpha\beta \cdot x_1x_2 + \beta^2 \cdot x_2^2;$$

$$\alpha \cdot f(x_1) + \beta \cdot f(x_2) = \alpha \cdot x_1^2 + \beta \cdot x_2^2.$$

$$\text{Найдем разность этих выражений: } \alpha \cdot f(x_1) + \beta \cdot f(x_2) - f(\alpha \cdot x_1 + \beta \cdot x_2) = \alpha \cdot x_1^2 + \beta \cdot x_2^2 - \alpha^2 \cdot x_1^2 - 2\alpha\beta \cdot x_1x_2 - \beta^2 \cdot x_2^2 =$$

$$\begin{aligned}
&= (\alpha - \alpha^2) \cdot x_1^2 - 2\alpha\beta \cdot x_1x_2 + (\beta - \beta^2) \cdot x_2^2 = \\
&= \alpha(1 - \alpha) \cdot x_1^2 - 2\alpha\beta \cdot x_1x_2 + \beta(1 - \beta) \cdot x_2^2 = \alpha\beta \cdot x_1^2 - 2\alpha\beta \cdot x_1x_2 + \beta\alpha \cdot x_2^2 = \\
&= \alpha\beta \cdot (x_1 - x_2)^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Получили неравенство: $\alpha \cdot f(x_1) + \beta \cdot f(x_2) - f(\alpha \cdot x_1 + \beta \cdot x_2) \geq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f(\alpha \cdot x_1 + \beta \cdot x_2) \leq \alpha \cdot f(x_1) + \beta \cdot f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Следовательно, функция $f(x) = x^2$ является *выпуклой* (выпуклой вниз) на всей числовой оси.

Отметим простейшие свойства выпуклых функций.

- 1) если $f(x)$ — выпуклая функция и $C = \text{const}$, $C > 0$, то $C \cdot f(x)$ — также выпуклая функция.
- 2) сумма двух или нескольких выпуклых функций также выпуклая функция.

Условия выпуклости функции.

Пусть $f(x)$ — выпуклая функция на промежутке $X \subset D_f$, т.е. $\forall x_1, x_2 \in X$ и $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ таких, что $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$, выполняется неравенство:

$$f(\alpha \cdot x_1 + \beta \cdot x_2) \leq \alpha \cdot f(x_1) + \beta \cdot f(x_2).$$

Пусть $x_1 < x_2$, $x = \alpha \cdot x_1 + \beta \cdot x_2$ и $x_1 < x < x_2$, т.е. $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$.

Выразим числа α и β через x :

$$x = \alpha \cdot x_1 + \beta \cdot x_2 = \alpha \cdot x_1 + (1 - \alpha) \cdot x_2 = x_2 - \alpha \cdot (x_2 - x_1) \Rightarrow$$

$$\alpha = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, \quad \beta = 1 - \alpha = 1 - \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Итак, $\alpha = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$, $\beta = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$. Тогда условие выпуклости функции запишется в виде:

$\forall x_1, x_2 \in X$, $x_1 < x_2$ и $\forall x \in (x_1; x_2)$ выполняется неравенство:

$$f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \cdot f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \cdot f(x_2).$$

Учитывая, что $x_2 - x_1 > 0$, последнее неравенство можно записать в виде:

$$(*) \quad \boxed{(x_2 - x_1) \cdot f(x) \leq (x_2 - x) \cdot f(x_1) + (x - x_1) \cdot f(x_2)}.$$

Неравенство (*) является условием выпуклости функции $f(x)$ на промежутке $X \subset D_f$.

Преобразуем неравенство (*):

$$\begin{aligned}
&(x_2 - x_1) \cdot f(x) \leq (x_2 - x) \cdot f(x_1) + (x - x_1) \cdot f(x_2) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (x_2 - x_1) \cdot f(x) - (x_2 - x) \cdot f(x_1) \leq (x - x_1) \cdot f(x_2) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (x_2 - x_1) \cdot f(x) - (x_2 - x) \cdot f(x_1) - (x - x_1) \cdot f(x) \leq (x - x_1) \cdot f(x_2) - (x - x_1) \cdot f(x) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (x_2 - x) \cdot (f(x) - f(x_1)) \leq (x - x_1) \cdot (f(x_2) - f(x)).
\end{aligned}$$

Учитывая, что $x_2 - x > 0$ и $x - x_1 > 0$, получим неравенство:

$$(**) \quad \boxed{\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}}.$$

Неравенство (**) является еще одним условием выпуклости функции $f(x)$ на промежутке $X \subset D_f$.

Таким образом, можно дать следующее определение выпуклости функции $f(x)$ на промежутке $X \subset D_f$.

Определение.

Функция $y = f(x)$ называется *выпуклой* на промежутке X , если $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2$ и $\forall x \in (x_1; x_2)$ выполняется неравенство (*) или равносильное ему неравенство (**).

Теорема 1.

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на промежутке $X \subset D_f$. Для того, чтобы $f(x)$ была выпуклой на X , необходимо и достаточно, чтобы ее производная $f'(x)$ была возрастающей на X .

Доказательство.

Необходимость. Пусть функция $f(x)$ выпукла на X . Тогда $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2$ и $\forall x \in (x_1; x_2)$ выполняется неравенство (**):

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Переходя к пределу в этом неравенстве при $x \rightarrow x_1$, получим:

$$f'(x_1) = \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Переходя к пределу в том же неравенстве при $x \rightarrow x_2$, получим:

$$f'(x_2) = \lim_{x \rightarrow x_2} \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \geq \lim_{x \rightarrow x_2} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

В результате имеем:

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2), \text{ т.е. } f'(x_1) \leq f'(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2.$$

Это значит, что $f'(x)$ возрастает на X .

Достаточность. Пусть $f'(x)$ возрастает на X . По теореме Лагранжа

$$\exists c_1 \in (x_1; x): \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(c_1) \text{ и } \exists c_2 \in (x; x_2): \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(c_2),$$

причем $x_1 < c_1 < x < c_2 < x_2$, т.е. $c_1 < c_2$; тогда $f'(c_1) \leq f'(c_2)$ и значит,

$$\text{выполнено неравенство: } \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}, \text{ т.е. } \forall x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2 \text{ и}$$

$\forall x \in (x_1; x_2)$ выполняется неравенство (**). Следовательно, функция $f(x)$ выпукла на X .

Теорема доказана.

Теорема 2.

Пусть функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема внутри промежутка $X \subset D_f$.
 Для того, чтобы $f(x)$ была выпуклой на X , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство:

$$f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in X^0.$$

Доказательство.

По теореме 1 выпуклость функции $f(x)$ на промежутке X равносильна возрастанию производной $f'(x)$ на X . Это в свою очередь, равносильно (см. §1) условию:

$$f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in X^0.$$

Теорема доказана.

Следствие.

Пусть функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема внутри промежутка $X \subset D_f$.
 Для того, чтобы $f(x)$ была вогнутой на X , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство:

$$f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in X^0.$$

Это следует из утверждения: $f(x)$ вогнута на $X \Leftrightarrow -f(x)$ выпукла на X .

Эти теоремы позволяют достаточно просто определять выпуклость или вогнутость функций.

Примеры.

$$3) y = a^x, a > 0, a \neq 1; y'' = a^x \cdot \ln^2 a > 0 \quad \forall x \in R \Rightarrow$$

$y = a^x$ — выпуклая функция на $(-\infty; +\infty)$.

$$4) y = \log_a x, a > 0, a \neq 1, x > 0; y'' = -\frac{1}{x^2 \cdot \ln a} < 0 \quad \forall x > 0 \Rightarrow$$

$y = \log_a x$ — вогнутая функция на $(0; +\infty)$.

$$5) y = x \ln x, x > 0; y'' = (x \ln x)'' = (\ln x + 1)' = \frac{1}{x} > 0 \quad \forall x > 0 \Rightarrow$$

$y = x \ln x$ — выпуклая функция на $(0; +\infty)$.

$$6) y = x^\alpha, x > 0; y'' = \alpha \cdot (\alpha - 1)x^{\alpha-2};$$

если $\alpha < 0$ или $\alpha > 1$, то $y = x^\alpha$ — выпуклая функция на $(0; +\infty)$;

если $0 < \alpha < 1$, то $y = x^\alpha$ — вогнутая функция на $(0; +\infty)$.

Условия выпуклости функций можно применять при доказательстве неравенств.

Примеры.

$$7) \text{ Доказать неравенство: } \left(\frac{a+b}{2}\right)^n \leq \frac{a^n + b^n}{2} \quad \forall n > 1, a, b > 0.$$

Так как функция $f(x) = x^n$ при $n > 1$ является выпуклой на $(0; +\infty)$, то выполняется неравенство:

$$f(\alpha \cdot x_1 + \beta \cdot x_2) \leq \alpha \cdot f(x_1) + \beta \cdot f(x_2)$$

$\forall x_1, x_2 > 0$ и $\forall \alpha, \beta \in R$ таких, что $\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$.

Возьмем $\alpha = \beta = \frac{1}{2}, x_1 = a, x_2 = b$, тогда

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \quad \text{или} \quad \left(\frac{a+b}{2}\right)^n \leq \frac{a^n+b^n}{2}. \quad \text{Неравенство доказано.}$$

8) Доказать неравенство: $\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{\ln a + \ln b}{2} \quad \forall a, b > 0$.

Так как функция $f(x) = \ln x$ является вогнутой на $(0; +\infty)$, то выполняется неравенство:

$$f(\alpha \cdot x_1 + \beta \cdot x_2) \geq \alpha \cdot f(x_1) + \beta \cdot f(x_2)$$

$\forall x_1, x_2 > 0$ и $\forall \alpha, \beta \in R$ таких, что $\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$.

Возьмем $\alpha = \beta = \frac{1}{2}, x_1 = a, x_2 = b$, тогда

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{f(a)+f(b)}{2} \quad \text{или} \quad \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{\ln a + \ln b}{2}. \quad \text{Неравенство доказано.}$$

Точки перегиба функции.

Дана функция $y = f(x)$, непрерывная на промежутке $X \subset D_f$; Γ_f — график функции; M — точка на этом графике: $M \in \Gamma_f$.

Определение.

Точка M называется *точкой перегиба* графика функции, если она отделяет участок выпуклости (выпуклости вниз) функции от участка вогнутости (выпуклости вверх).

Другими словами, *точка перегиба* — это точка на графике функции, в которой меняется направление выпуклости кривой (т.е. функции).

Пример 9.

Для функции $f(x) = x^3$ имеем:

$$f''(x) = 6x,$$

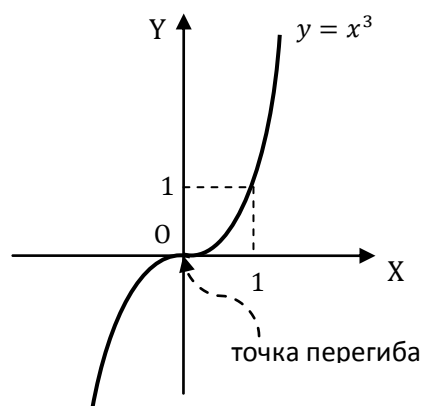
$$f''(x) > 0 \quad \forall x > 0 \Rightarrow$$

$f(x)$ — выпуклая функция на $[0; +\infty)$,

$$f''(x) < 0 \quad \forall x < 0 \Rightarrow$$

$f(x)$ — вогнутая функция на $(-\infty; 0] \Rightarrow$

$O(0; 0)$ — точка перегиба, т.к. эта точка отделяет участок выпуклости кривой от участка вогнутости (см. рис.)



Из условий выпуклости функции $f(x)$ (см. выше) следует необходимое условие точек перегиба:

$$f''(x) = 0, \text{ или } f''(x) = \infty, \text{ или } f''(x) \text{ не } \exists.$$

Точки $M(x, f(x))$ на графике функции, в которых $f''(x) = 0$, или $f''(x) = \infty$, или $f''(x)$ не $\exists$, называются точками, подозрительными на точки перегиба.

Точки, подозрительные на точки перегиба, не обязательно будут точками перегиба.

Например, для функции $f(x) = x^4$ точка $O(0; 0)$ — точка, подозрительная на точку перегиба, т.к. $f''(0) = 0$, но эта точка не является точкой перегиба (см. Пример 5 из §2), т.к. $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in R \Rightarrow f(x)$ — выпуклая функция на $(-\infty; +\infty)$.

Из тех же условий выпуклости функции $f(x)$ (см. Теоремы 1 и 2) получаем достаточное условие существования точек перегиба.

Теорема 3 (достаточное условие существования точек перегиба).

Пусть x_0 — точка, подозрительная на точку перегиба, а вторая производная $f''(x)$ сохраняет знак в некоторой окрестности $U_-^0(x_0)$ (слева от точки x_0) и в $U_+^0(x_0)$ (справа от точки x_0). Тогда:

- 1) если вторая производная $f''(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак, то x_0 — точка перегиба;
- 2) если вторая производная $f''(x)$ при переходе через точку x_0 не меняет знак, то x_0 — не является точкой перегиба.

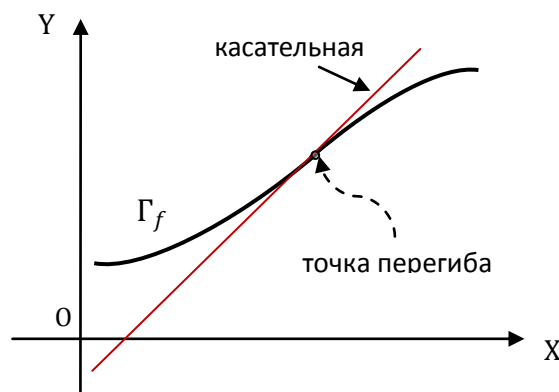
Пример 10.

$$f(x) = \sin x; \quad f''(x) = -\sin x; \quad f''(x) \text{ — меняет знак в точках } x = \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Следовательно, все точки синусоиды, лежащие на оси OX , являются точками перегиба.

В заключение отметим интересное свойство кривой $y = f(x)$, т.е. графика Γ_f , относительно касательной к ней в точке перегиба:

*кривая переходит в точке перегиба
с одной стороны касательной
на другую ее сторону.*



§ 4. Построение графиков функций.

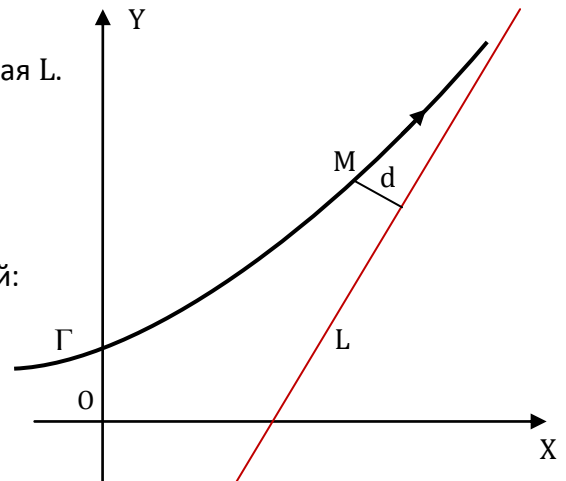
Асимптоты кривой.

Пусть имеются на плоскости кривая Γ и прямая L .

Определение. Прямая L называется *асимптотой* кривой Γ , если расстояние от точки на кривой Γ до прямой L стремится к нулю при неограниченном удалении от начала координат этой точки по кривой:

$$d(M, L) \rightarrow 0 \text{ при } d(M, O) \rightarrow \infty, M \in \Gamma.$$

Асимптоты могут быть *вертикальными* или *наклонными* (в частности, *горизонтальными*).



Рассмотрим кривую $y = f(x)$, т.е. график Γ_f функции $f(x)$. Выясним, какие асимптоты может иметь эта кривая.

Вертикальные асимптоты.

Пусть x_0 — точка сгущения D_f и выполнено условие:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \text{ или } \lim_{x \rightarrow x_0 \pm 0} f(x) = \infty.$$

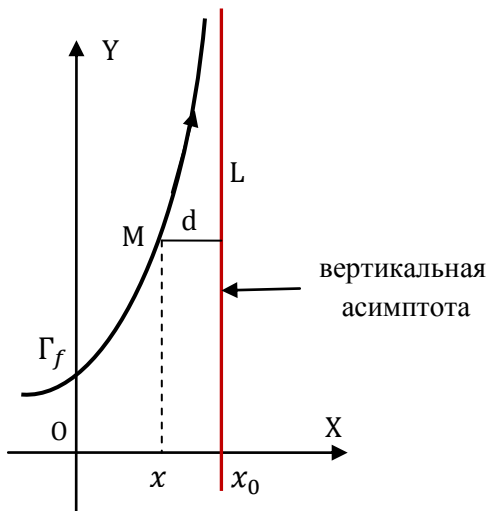
Тогда $d = d(M, L) = |x - x_0| \rightarrow 0$ (см. рис.) и

$$d(M, O) = \sqrt{x^2 + f^2(x)} \rightarrow \infty \text{ при } x \rightarrow x_0.$$

Следовательно, если

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ или $\lim_{x \rightarrow x_0 \pm 0} f(x) = \infty$, то кривая $y = f(x)$ имеет вертикальную асимптоту:

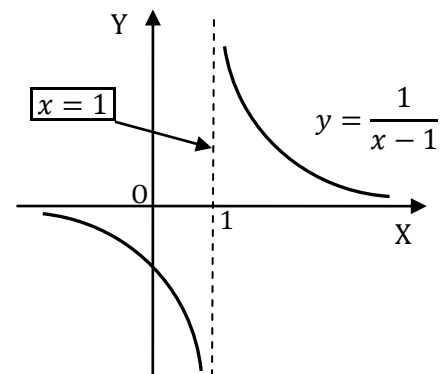
$$\boxed{x = x_0}.$$



Пример 1.

Функция $y = \frac{1}{x-1}$, $D_f = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

Здесь $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = \infty$, поэтому график функции имеет вертикальную асимптоту: $\boxed{x = 1}$ (см. рис.)



Пример 2.

Функция $y = \ln x$, $D_f = (0; +\infty)$.

Здесь $\lim_{x \rightarrow 0+} \ln x = -\infty$, поэтому график функции имеет вертикальную асимптоту: $\boxed{x = 0}$.

Наклонные асимптоты.

Пусть кривая $y = f(x)$ имеет наклонную асимптоту $L: y = kx + b$; тогда расстояние $d(M, L)$ от точки $M(x, f(x))$, лежащей на графике, до прямой L должно стремиться к нулю:

$$d(M, L) = \frac{|f(x) - kx - b|}{\sqrt{k^2 + 1}} \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow \infty \Leftrightarrow |f(x) - kx - b| \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow \infty.$$

Таким образом, наличие наклонной асимптоты кривой $y = f(x)$ равносильно следующему условию:

$$(*) \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx - b) = 0}.$$

Условие $(*)$ можно записать так: $f(x) - kx - b = \alpha(x)$, где $\alpha(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$, или:

$$(**) \quad \boxed{f(x) = kx + b + \alpha(x)}, \text{ где } \alpha(x) \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow \infty.$$

Из условия $(**)$ получаем:

$$1) f(x) - kx = b + \alpha(x) \rightarrow b \text{ при } x \rightarrow \infty, \text{ т.е. } \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = b;$$

$$2) \frac{f(x)}{x} = k + \frac{b + \alpha(x)}{x} \rightarrow k \text{ при } x \rightarrow \infty, \text{ т.е. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = k.$$

Итак, кривая $y = f(x)$ имеет наклонную асимптоту $y = kx + b$, тогда и только тогда, когда существуют конечные пределы:

$$\boxed{k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}}, \quad \boxed{b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx)}.$$

Если хотя бы один из этих пределов не существует или равен ∞ , то наклонной асимптоты у кривой нет.

При $k = 0$ асимптота называется *горизонтальной*.

Замечание.

У кривой могут быть разные асимптоты при $x \rightarrow +\infty$ и $x \rightarrow -\infty$.

Пример 3. Функция $y = xe^x$.

Здесь $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, поэтому при $x \rightarrow +\infty$ график функции наклонной асимптоты не имеет.

При $x \rightarrow -\infty$ получим:

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xe^x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \quad b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x - 0 \cdot x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} = [\text{правило Лопиталя}] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-e^x) = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, при $x \rightarrow -\infty$ график функции имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$.

Пример 4. Найти асимптоты графика функции $y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x}$.

Здесь $x_0 = 0$ является точкой разрыва 2-го рода: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x - 1}{x} = \infty$, поэтому прямая $x = 0$ является вертикальной асимптотой графика функции.

Далее имеем:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2} = 1 \Rightarrow k = 1;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2x - 1}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 1}{x} = 2 \Rightarrow b = 2.$$

Ответ: прямая $x = 0$ является вертикальной асимптотой, а прямая $y = x + 2$ является наклонной асимптотой графика функции.

Знание асимптот графика функции значительно облегчает построение этого графика. Например, если имеется наклонная асимптота $y = kx + b$, то при $x \rightarrow \infty$ функция $f(x)$ может быть заменена линейной функцией $kx + b$.

Общая схема исследования функции.

Дана функция $y = f(x)$. Для полного исследования функции требуется выполнить некоторую последовательность действий, в результате которых нужно получить ответы на следующие вопросы.

1. Область определения функции D_f
2. Свойства четности, нечетности, периодичности
3. Точки пересечения графика с осями координат
4. Пределы функции на границах D_f
5. Промежутки непрерывности и точки разрыва
6. Асимптоты
7. $f'(x)$
8. Промежутки монотонности и точки экстремума
9. $f''(x)$
10. Промежутки выпуклости и точки перегиба
11. Таблица значений функции
12. График функции Γ_f
13. Область значений функции E_f

Рассмотрим применение этой схемы на примерах.

Пример 5. Функция $y = \frac{1-x^3}{x^2}$.

1. $D_f = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
2. $f(-x) = \frac{1-(-x)^3}{(-x)^2} = \frac{1+x^3}{x^2} \neq \pm f(x) \Rightarrow f(x)$ — общего вида;
 $f(x)$ — непериодическая функция
3. $x \neq 0 \Rightarrow \Gamma_f \cap OY = \emptyset$; $y = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow \Gamma_f \cap OX = (1; 0)$
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-x^3}{x^2} = \infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$;
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-x^3}{x^2} = +\infty$
5. $f(x)$ — непрерывна на $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; $x_0 = 0$ — точка разрыва 2-го рода

6. Вертикальная асимптота: $x = 0$; наклонная асимптота: $y = kx + b$;

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-x^3}{x^3} = -1 \Rightarrow k = -1;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1-x^3}{x^2} + x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow b = 0;$$

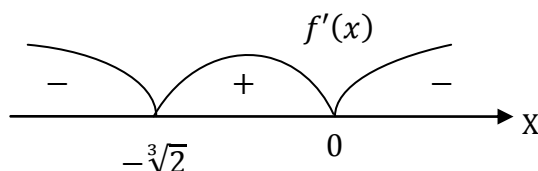
наклонная асимптота: $y = -x$

$$7. f'(x) = \left(\frac{1-x^3}{x^2} \right)' = \frac{-3x^2 \cdot x^2 - 2x \cdot (1-x^3)}{x^4} = \frac{-x^4 - 2x}{x^4} = \frac{-x^3 - 2}{x^3} = -\frac{x^3 + 2}{x^3}$$

$$8. f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{2};$$

$$f(x) \searrow \text{ на } (-\infty; -\sqrt[3]{2}],$$

$$f(x) \searrow \text{ на } (0; +\infty),$$



$$f(x) \nearrow \text{ на } [-\sqrt[3]{2}; 0); \quad -\sqrt[3]{2} - \text{ точка } \min, \quad x_{\min} = -\sqrt[3]{2}, \quad y_{\min} = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$$

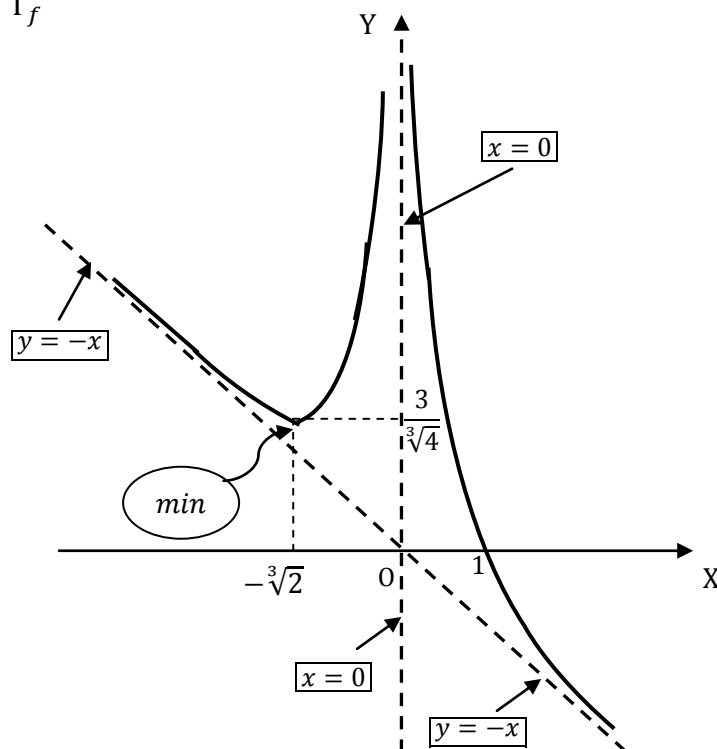
$$9. f''(x) = \left(-\frac{x^3+2}{x^3} \right)' = -\frac{3x^2 \cdot x^3 - 3x^2 \cdot (2+x^3)}{x^6} = \frac{6}{x^4};$$

10. $f''(x) > 0 \quad \forall x \neq 0 \Rightarrow f(x)$ – выпукла вниз на $(-\infty; 0)$ и на $(0; +\infty)$;
точек перегиба нет

11.

x	1	$-\sqrt[3]{2} \approx -1,3$	2	-1	-2	0,5	-0,5
y	0	$\frac{3}{\sqrt[3]{4}} \approx 1,9$	-1,75	2	2,25	3,5	4,5

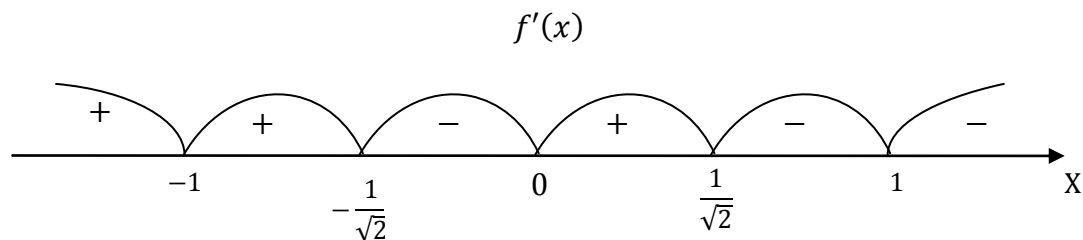
12. График функции Γ_f



$$13. E_f = (-\infty; +\infty).$$

Пример 6. Функция $y = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2 - 1}$.

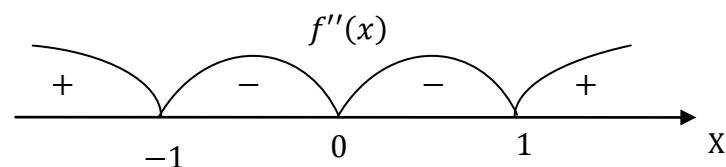
1. $D_f = (-\infty; +\infty)$
2. $f(-x) = \sqrt[3]{(-x)^2} - \sqrt[3]{(-x)^2 - 1} = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2 - 1} = f(x) \Rightarrow f(x) - \text{четная};$
 $f(x) - \text{непериодическая функция}$
3. $x = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow \Gamma_f \cap OY = (0; 1); y \neq 0 \Rightarrow \Gamma_f \cap OX = \emptyset$
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2 - 1}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[3]{x^2 - 1} + \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}} = 0$
5. $f(x) - \text{непрерывна на } (-\infty; +\infty); \text{ точек разрыва нет}$
6. Вертикальных асимптот нет; наклонная асимптота: $y = kx + b;$
 $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2 - 1}}{x} = 0 \Rightarrow k = 0;$
 $b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2 - 1}) = 0 \Rightarrow b = 0;$
 горизонтальная асимптота: $y = 0$
7. $f'(x) = (\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2 - 1})' = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{2}{3} \cdot \frac{x}{\sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt[3]{(x^2 - 1)^2} - \sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}}$
8. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}; f'(x) = \infty \Leftrightarrow x = \pm 1 \text{ или } x = 0;$



$f(x) \nearrow$ на $(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}]$, $f(x) \searrow$ на $[-\frac{1}{\sqrt{2}}; 0]$, $f(x) \nearrow$ на $[0; \frac{1}{\sqrt{2}}]$, $f(x) \searrow$ на $[\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty)$;
 $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ - точки $\max$, $x_{\max} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$, $y_{\max} = \frac{2}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{4};$
 0 - точка $\min$, $x_{\min} = 0$, $y_{\min} = 1$

$$9. f''(x) = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{2}{3} \cdot \frac{x}{\sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}} \right)' = \frac{2}{9} \cdot \frac{(3x^2 + 1) \cdot x^{\frac{4}{3}} - (x^2 - 1)^{\frac{5}{3}}}{(x^2 - 1)^{\frac{5}{3}} \cdot x^{\frac{4}{3}}}$$

10. $f''(x) \neq 0 \forall x \in D_f$ (без доказательства); $f''(x) = \infty$ при $x = 0$ и $x = \pm 1$;



$f(x) - \text{выпукла вниз на } (-\infty; -1] \text{ и на } [1; +\infty);$

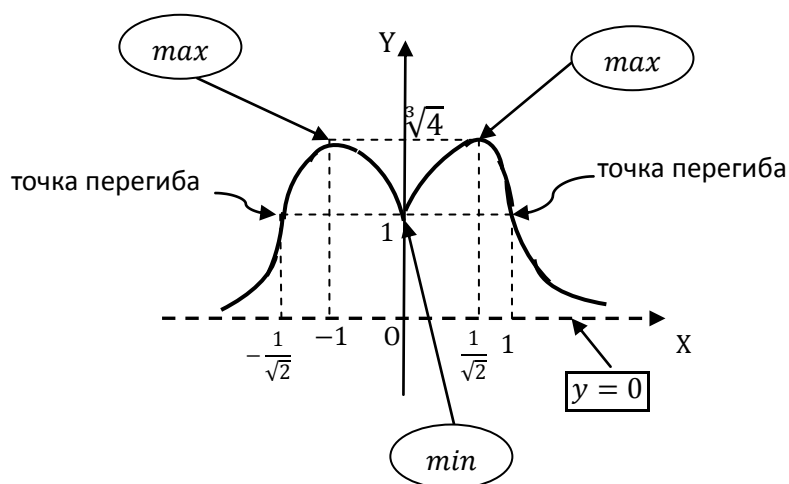
$f(x) - \text{выпукла вверх на } [-1; 0] \text{ и на } [0; 1];$

точки перегиба:

$$x_1 = -1, y_1 = f(-1) = 1; x_2 = 0, y_2 = f(0) = 1; x_3 = 1, y_3 = f(1) = 1$$

11.

x	0	± 1	$\pm \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7$	± 2
y	1	1	$\sqrt[3]{4} \approx 1,6$	$\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{3} \approx 0,15$

12. График функции Γ_f 13. $E_f = (0; \sqrt[3]{4}]$.Кривая Гаусса.

Кривой Гаусса называется график функции $y = e^{-x^2}$, играющей важную роль в приложениях математики, особенно в теории вероятностей и математической статистике. Этой функцией задается закон *нормального распределения* случайной величины.

Название дано в честь «короля математиков» Карла Фридриха Гаусса (1777 - 1855), выдающегося немецкого математика, механика, физика, астронома, геодезиста.

Проведем исследование этой функции и построим ее график.

Функция $y = e^{-x^2}$.

1. $D_f = (-\infty; +\infty)$
2. $f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} = f(x) \Rightarrow f(x)$ – четная; $f(x)$ – непериодическая функция
3. $x = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow \Gamma_f \cap OY = (0; 1)$; $y \neq 0 \Rightarrow \Gamma_f \cap OX = \emptyset$
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x^2} = 0$
5. $f(x)$ – непрерывна на $(-\infty; +\infty)$; точек разрыва нет

6. Вертикальных асимптот нет; наклонная асимптота: $y = kx + b$;

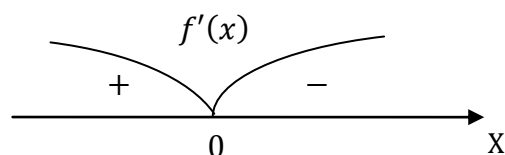
$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-x^2}}{x} = 0 \Rightarrow k = 0;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x^2} = 0 \Rightarrow b = 0;$$

горизонтальная асимптота: $y = 0$

7. $f'(x) = (e^{-x^2})' = -2x \cdot e^{-x^2}$

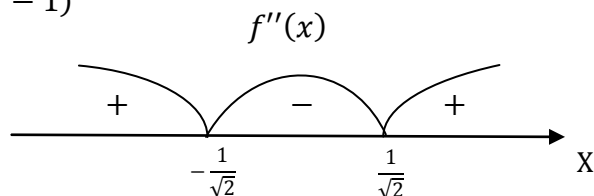
8. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$



$f(x) \nearrow$ на $(-\infty; 0]$, $f(x) \searrow$ на $[0; +\infty)$; 0 - точка *max*, $x_{max} = 0$, $y_{max} = 1$

$$9. f''(x) = (-2x \cdot e^{-x^2})' = 2e^{-x^2} \cdot (2x^2 - 1)$$

$$10. f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}};$$



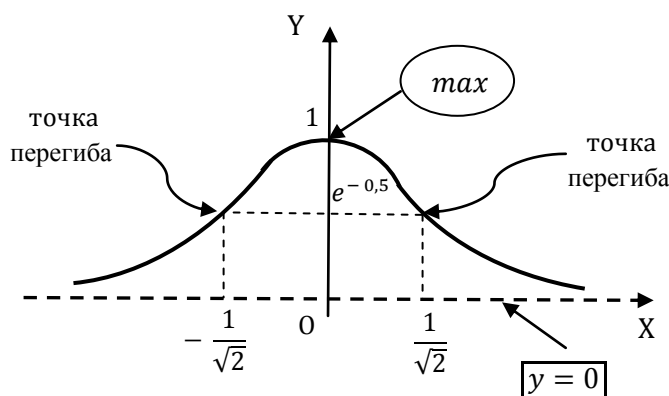
$f(x)$ – выпукла вниз на $(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}]$ и на $[\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty)$; $f(x)$ – выпукла вверх на $[-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}]$;

точки перегиба: $x_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$, $y_{1,2} = f\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

11.

x	0	$\pm \frac{1}{\sqrt{2}} \approx \pm 0,7$	± 1	± 2
y	1	$e^{-\frac{1}{2}} \approx 0,6$	$e^{-1} \approx 0,4$	$e^{-4} \approx 0,02$

12. График функции Γ_f



13. $E_f = (0; 1]$.

По данной теме предполагается выдача расчетного задания.

Расчетное задание: «Исследование функций и построение графиков».

Провести полное исследование функции $y = f(x)$ по следующей схеме:

1. Область определения функции D_f
2. Свойства четности, нечетности, периодичности
3. Точки пересечения графика с осями координат
4. Пределы функции на границах D_f
5. Промежутки непрерывности и точки разрыва
6. Асимптоты
7. $f'(x)$
8. Промежутки монотонности и точки экстремума
9. $f''(x)$
10. Промежутки выпуклости, вогнутости и точки перегиба
11. Таблица значений функции
12. График функции Γ_f
13. Область значений функции E_f

Примерные варианты заданий (№ 1 ÷ 20):

№ п/п	А	В	С
	Рациональная функция	Иррациональная функция	Трансцендентная функция
1	$y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$	$y = \sqrt[3]{x(x-1)^2}$	$y = 1 + \ln\left(\frac{x}{x+2}\right)$
2	$y = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$	$y = \sqrt[3]{(x-1)^2} - \sqrt[3]{x^2}$	$y = \sqrt{\sin x}$
3	$y = \frac{4 - x^3}{x^2}$	$y = \sqrt[3]{(x-3)x^2}$	$y = \frac{e^{x+3}}{x+3}$
4	$y = \frac{x^2 - 4x + 1}{x - 4}$	$y = \sqrt[3]{(x-2)^2} - \sqrt[3]{(x-3)^2}$	$y = x^x$
5	$y = \frac{2x^3 + 1}{x^2}$	$y = \sqrt[3]{x(x+3)^2}$	$y = x \cdot \arctg x$
6	$y = \frac{3x^4 + 1}{x^3}$	$y = \sqrt[3]{(x-6)x^2}$	$y = \ln\left(\frac{x}{x-2}\right) - 2$
7	$y = \frac{1 - 2x^3}{x^2}$	$y = \sqrt[3]{x(x-6)^2}$	$y = \sqrt{\cos x}$
8	$y = \frac{x^3 - 4}{x^2}$	$y = \sqrt[3]{x(x+6)^2}$	$y = \frac{e^{2-x}}{2-x}$
9	$y = \frac{x^3 - 32}{x^2}$	$y = \sqrt[3]{x(x-3)^2}$	$y = x^{\frac{1}{x}}$
10	$y = \frac{x^3}{2(x-1)^2}$	$y = \sqrt[3]{x(x+3)^2}$	$y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$
11	$y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$	$y = \sqrt[3]{(x+2)^2} - \sqrt[3]{(x+3)^2}$	$y = 2 + \ln\left(\frac{x-5}{x}\right)$
12	$y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$	$y = \sqrt[3]{(x-1)^2} - \sqrt[3]{(x-2)^2}$	$y = \sqrt[3]{\sin x}$
13	$y = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$	$y = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2 + 1}$	$y = \frac{e^{3-x}}{3-x}$
14	$y = \frac{4x}{(x+1)^2}$	$y = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x+2)^2}$	$y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$
15	$y = \frac{3x-2}{x^3}$	$y = \sqrt[3]{x^2(x+2)^2}$	$y = \sin^4\left(\frac{x}{2}\right) + \cos^4\left(\frac{x}{2}\right)$
16	$y = \frac{x^3 + 1}{x}$	$y = \sqrt[3]{x^2(x-2)^2}$	$y = \ln\left(\frac{x+6}{x}\right) - 1$
17	$y = \frac{x^2}{(x-1)^2}$	$y = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}$	$y = \sqrt[3]{\cos x}$
18	$y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2$	$y = 2x + 2 - 3\sqrt[3]{(x+1)^2}$	$y = \frac{e^{x-3}}{x-3}$
19	$y = \frac{(x-1)^2}{x^2}$	$y = \sqrt[3]{x^2(x+4)^2}$	$y = x \cdot \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x, x > 0$
20	$y = \frac{x^2 + 2x - 7}{x^2 + 2x - 3}$	$y = \sqrt[3]{x^2(x-4)^2}$	$y = \frac{x}{2} + \operatorname{arctg} x$

Титульный лист (образец оформления).

Расчетное задание по Высшей математике

«Исследование функций и построение графиков»

Студент _____

Группа _____

Оценка: _____

Вариант № ____

Задание № 1. Рациональная функция $y = \frac{1 - x^3}{x^2}$

Задание № 2. Иррациональная функция $y = \sqrt[3]{(x - 4)x^2}$

Задание № 3. Трансцендентная функция $y = x + \arctg x$

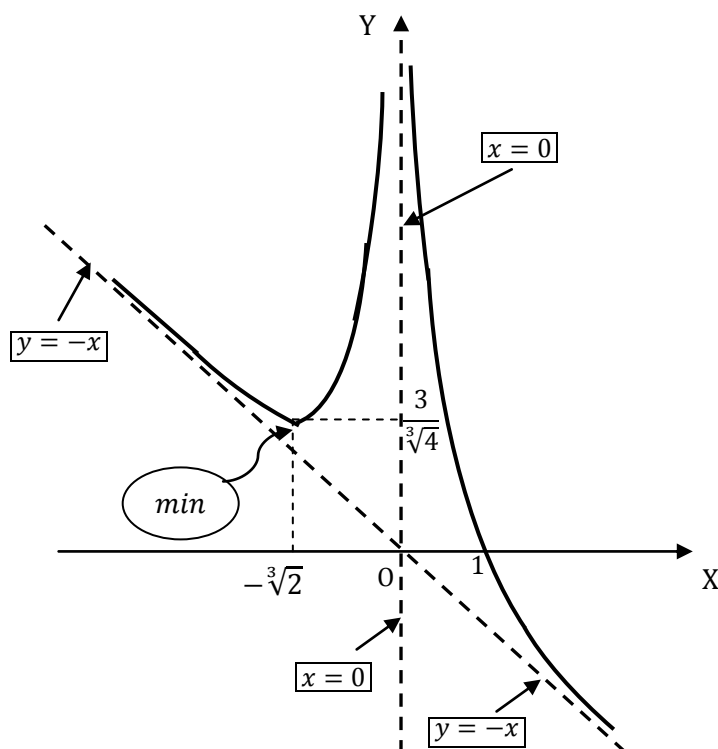
Лист с ответами (пример оформления каждого задания).

Функция $y = \frac{1-x^3}{x^2}$

1. $D_f = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
2. $f(x)$ – общего вида, непериодическая функция
3. $\Gamma_f \cap OY = \emptyset$, $\Gamma_f \cap OX = (1; 0)$
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$
5. $f(x)$ – непрерывна на $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; $x_0 = 0$ – точка разрыва 2-го рода
6. Вертикальная асимптота: $x = 0$, наклонная асимптота: $y = -x$
7. $f'(x) = -\frac{x^3+2}{x^3}$
8. $f(x) \searrow$ на $(-\infty; -\sqrt[3]{2}]$ и на $(0; +\infty)$, $f(x) \nearrow$ на $[-\sqrt[3]{2}; 0)$; $x_{\min} = -\sqrt[3]{2}$, $y_{\min} = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$
9. $f''(x) = \frac{6}{x^4}$
10. $f(x)$ – выпукла вниз на $(-\infty; 0)$ и на $(0; +\infty)$; точек перегиба нет
11. Таблица значений:

x	1	$-\sqrt[3]{2} \approx -1,3$	2	-1	-2	0,5	-0,5
y	0	$\frac{3}{\sqrt[3]{4}} \approx 1,9$	-1,75	2	2,25	3,5	4,5

12. График функции Γ_f (рисуеться на отдельном листе - миллиметровке)



13. $E_f = (-\infty; +\infty)$.

Замечание. Все необходимые расчеты должны быть приложены к этому **листу с ответами** на отдельных листах.

Раздел 2. Интегральное исчисление функций одной переменной

Глава 4. Неопределенный интеграл

Содержание

§ 1. Первообразная функция и неопределенный интеграл	86
§ 2. Основные методы интегрирования	91
§ 3. Интегрирование рациональных функций	99
§ 4. Интегрирование иррациональных функций	107
§ 5. Интегрирование тригонометрических функций	114

§ 1. Первообразная функция и неопределенный интеграл.

Одной из основных задач *дифференциального* исчисления является нахождение для данной функции $f(x)$ ее производной $f'(x)$ (или дифференциала $df(x)$). Например, по известному закону движения $S = S(t)$ найти скорость движения $v(t) = S'(t)$ или дифференциал $dS(t)$, а также ускорение $a(t) = v'(t)$.

В *интегральном* исчислении решается обратная задача: по известной производной $f'(x)$ (или дифференциалу $df(x)$) найти саму функцию $f(x)$. Например, по заданной скорости движения $v(t)$ или ускорению $a(t)$ найти закон движения $S = S(t)$.

Пусть функция $f(x)$ определена на $\langle a; b \rangle$, где $\langle a; b \rangle$ — это один из промежутков: $[a; b]$, или $(a; b)$, или $(a; b]$, или $[a; b)$.

Определение. Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на $\langle a; b \rangle$, если для всех $x \in \langle a; b \rangle$ выполняется равенство:

$$F'(x) = f(x) \quad (\text{или } dF(x) = f(x)dx).$$

Например, для функции $f(x) = x^2$ первообразной будет функция $F(x) = \frac{x^3}{3}$, так как $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2 \quad \forall x \in (-\infty; +\infty)$.

Очевидно, что первообразными для функции $f(x) = x^2$ являются также функции $F_1(x) = \frac{x^3}{3} + 5$, $F_2(x) = \frac{x^3}{3} - 2$ и, вообще, все функции вида $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$, где $C = \text{const}$, так как $\left(\frac{x^3}{3} + C\right)' = x^2 \quad \forall x \in (-\infty; +\infty)$.

Задача нахождения для данной функции всех ее первообразных называется *интегрированием* функции.

Теорема 1 (общий вид всех первообразных).

Пусть $F(x)$ — какая-нибудь первообразная для $f(x)$ на $\langle a; b \rangle$. Тогда множество всех первообразных для $f(x)$ имеет вид: $F(x) + C$, где C — произвольная постоянная.

Доказательство.

1. Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, то $F(x) + C$ — также первообразная, так как $(F(x) + C)' = F'(x) + (C)' = f(x) + 0 = f(x)$.
2. Пусть $\Phi(x)$ — любая первообразная для $f(x)$ на $\langle a; b \rangle$, т.е. $\Phi'(x) = f(x) \quad \forall x \in \langle a; b \rangle$. Тогда $(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0 \quad \forall x \in \langle a; b \rangle$.

Согласно признаку постоянства функции равенство нулю производной на промежутке является необходимым и достаточным условием постоянства этой функции: $\Phi(x) - F(x) = C$, т.е. $\Phi(x) = F(x) + C \quad \forall x \in \langle a; b \rangle$.

Таким образом, действительно множество всех первообразных для $f(x)$ имеет вид: $F(x) + C$, где $C = \text{const}$. Теорема доказана.

Из теоремы следует, что достаточно найти для данной функции $f(x)$ только одну первообразную $F(x)$, чтобы знать все первообразные, так как они отличаются друг от друга постоянными слагаемыми.

Определение. Множество всех первообразных функции $f(x)$ называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ и обозначается символом:

$$\int f(x)dx.$$

Здесь символ $\int$ — знак интеграла, x — переменная интегрирования, $f(x)$ — *подынтегральная функция*, $f(x)dx$ — *подынтегральное выражение*.

Итак, по определению

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad x \in \langle a; b \rangle,$$

где $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in \langle a; b \rangle, C = \text{const}$.

Например: $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$.

Замечание. Переменная интегрирования x может быть обозначена любым другим символом, например: u, t, z и т.д. Тогда неопределенный интеграл запишется в виде:

$$\int f(u)du = F(u) + C, \text{ или } \int f(t)dt = F(t) + C \text{ и т.д. Например: } \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C.$$

Вопрос о существовании неопределенного интеграла решается следующим утверждением.

Теорема 2 (о существовании первообразной).

Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $\langle a; b \rangle$, то для нее существует первообразная $F(x)$ на этом промежутке.

Эта теорема будет доказана в главе 2.

Итак, если $f(x)$ — непрерывная функция, то для нее существует первообразная и, значит, существует и неопределенный интеграл от этой функции.

Если какая-нибудь конкретная функция имеет точки разрыва, то неопределенный интеграл от этой функции будет рассматриваться, лишь в промежутках ее непрерывности.

Свойства неопределенного интеграла.

1. Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, а дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$(\int f(x)dx)' = f(x), \quad d(\int f(x)dx) = f(x)dx \quad \forall x \in \langle a; b \rangle.$$

2. Неопределенный интеграл от производной и от дифференциала функции равен самой функции «плюс» C :

$$\int F'(x)dx = F(x) + C, \quad \int dF(x) = F(x) + C, \quad C = \text{const} \quad \forall x \in \langle a; b \rangle.$$

Справедливость этих свойств следует из определения неопределенного интеграла:

$$\begin{aligned} (\int f(x)dx)' &= (F(x) + C)' = f(x); \quad d(\int f(x)dx) = d(F(x) + C) = f(x)dx; \\ \int F'(x)dx &= \int f(x)dx = F(x) + C; \quad \int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C. \end{aligned}$$

Замечание. Из свойств **1** и **2** следует, что действия «интегрирование» и «дифференцирование» взаимно-обратны. При этом знаки d и $\int$, стоящие рядом, взаимно сокращаются; знаки $\int$ и d , стоящие рядом, также взаимно сокращаются, но добавляется произвольная постоянная.

Свойство **1** означает также, что правильность интегрирования можно проверить путем дифференцирования.

Например, $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$, так как при $x > 0$ имеем: $(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$, а при $x < 0$ имеем: $(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$.

Или: $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C$, так как $\left(\ln(x + \sqrt{x^2+1})\right)' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} \cdot (x + \sqrt{x^2+1})' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Используя это свойство, из таблицы производных и дифференциалов можно получить таблицу неопределенных интегралов.

Основная таблица интегралов.

- | | |
|---|--|
| 1. $\int 0 \cdot dx = C$ | 2. $\int 1 dx = x + C$ |
| 3. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$ | 4. $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$ |
| 5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ | 6. $\int e^x dx = e^x + C$ |
| 7. $\int \cos x dx = \sin x + C$ | 8. $\int \sin x dx = -\cos x + C$ |
| 9. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$ | 10. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$ |
| 11. $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$ | 12. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$ |
| 13. $\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} dx = \operatorname{th} x + C$ | 14. $\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} dx = -\operatorname{cth} x + C$ |
| 15. $\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \cdot \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + C$ | 16. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln \left x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right + C$ |
| 17. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + C = -\operatorname{arc} \operatorname{ctg} x + C$ | |
| 18. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arc} \sin x + C = -\operatorname{arc} \cos x + C$ | |
| 19. $\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{a} + C$ | 20. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \operatorname{arc} \sin \frac{x}{a} + C$ |

Справедливость каждого равенства из этой таблицы проверяется путем дифференцирования.

Правила интегрирования.

1. Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла:

$$\int C \cdot f(x) dx = C \cdot \int f(x) dx, \quad C = \text{const}$$

2. Неопределенный интеграл от суммы или разности функций равен сумме или разности неопределенных интегралов от этих функций:

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

Эти равенства следует понимать как равенства множеств (всех первообразных).

Справедливость этих формул проверяется дифференцированием правых частей выражений:

$$(C \cdot \int f(x) dx)' = C \cdot (\int f(x) dx)' = C \cdot f(x) \Rightarrow C \cdot \int f(x) dx = \int C \cdot f(x) dx.$$

$$(\int f(x) dx \pm \int g(x) dx)' = (\int f(x) dx)' \pm (\int g(x) dx)' = f(x) \pm g(x) \Rightarrow \int f(x) dx \pm \int g(x) dx = \int (f(x) \pm g(x)) dx.$$

Эти правила интегрирования выражают свойство линейности неопределенного интеграла:

$$\int (\alpha \cdot f(x) \pm \beta \cdot g(x)) dx = \alpha \cdot \int f(x) dx \pm \beta \cdot \int g(x) dx \quad \forall \alpha, \beta = \text{const}.$$

Очевидно, что свойство линейности распространяется на любое конечное число слагаемых.

3. Линейная замена переменной:

если $\int f(x) dx = F(x) + C$ и $k, b = \text{const}$, $k \neq 0$, то

$$\int f(kx + b) dx = \frac{1}{k} \cdot F(kx + b) + C.$$

Это вытекает из следующего свойства: если $F'(x) = f(x)$, то

$$\left(\frac{1}{k} \cdot F(kx + b) \right)' = \frac{1}{k} \cdot F'(kx + b) \cdot (kx + b)' = \frac{1}{k} \cdot f(kx + b) \cdot k = f(kx + b).$$

В частности:

- $\int f(x + b) dx = F(x + b) + C,$
- $\int f(kx) dx = \frac{1}{k} \cdot F(kx) + C.$

Например:

$$\begin{aligned} \int (kx + b)^\alpha \cdot dx &= \frac{1}{k} \cdot \frac{(kx+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, & \int (x + b)^\alpha \cdot dx &= \frac{(x+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1), \\ \int e^{kx+b} \cdot dx &= \frac{1}{k} \cdot e^{kx+b} + C, & \int e^{kx} \cdot dx &= \frac{1}{k} \cdot e^{kx} + C, \\ \int \frac{1}{kx+b} dx &= \frac{1}{k} \cdot \ln|kx + b| + C, & \int \frac{1}{x+b} dx &= \ln|x + b| + C, \\ \int \cos kx \cdot dx &= \frac{1}{k} \cdot \sin kx + C, & \int \sin kx \cdot dx &= -\cos kx + C, \\ \int \frac{1}{\cos^2(kx)} dx &= \frac{1}{k} \cdot \operatorname{tg}(kx) + C, & \int \frac{1}{\sin^2(kx)} dx &= -\frac{1}{k} \cdot \operatorname{ctg}(kx) + C, \\ \int \frac{1}{\sqrt{1-(kx)^2}} dx &= \frac{1}{k} \cdot \arcsin(kx) + C, & \int \frac{1}{1+(kx)^2} dx &= \frac{1}{k} \cdot \operatorname{arctg}(kx) + C. \end{aligned}$$

Используя линейную замену переменной, выведем еще несколько табличных формул.

$$1) \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \frac{1}{a} \cdot \int \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} dx = \frac{1}{a} \cdot a \cdot \arcsin \frac{x}{a} + C = \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

$$2) \int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a^2} \cdot \int \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} dx = \frac{1}{a^2} \cdot a \cdot \arctg \frac{x}{a} + C = \frac{1}{a} \cdot \arctg \frac{x}{a} + C.$$

$$3) \int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \int \frac{1}{(x-a) \cdot (x+a)} dx = \int \frac{1}{2a} \cdot \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2a} \cdot \left(\int \frac{1}{x-a} dx - \int \frac{1}{x+a} dx \right) = \frac{1}{2a} \cdot (\ln|x-a| - \ln|x+a|) = \frac{1}{2a} \cdot \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$$

$$4) \int \frac{1}{(x+a) \cdot (x+b)} dx = \int \frac{1}{a-b} \cdot \left(\frac{1}{x+b} - \frac{1}{x+a} \right) dx = \frac{1}{a-b} \cdot \ln \left| \frac{x+b}{x+a} \right| + C.$$

$$5) \int \frac{ax+b}{cx+d} dx = \int \frac{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}{c\left(x+\frac{d}{c}\right)} dx = \frac{a}{c} \cdot \int \frac{x+\frac{b}{a}}{x+\frac{d}{c}} dx = \frac{a}{c} \cdot \int \frac{\left(x+\frac{d}{c}\right) + \left(\frac{b}{a}-\frac{d}{c}\right)}{x+\frac{d}{c}} dx =$$

$$= \frac{a}{c} \cdot \int \left(1 + \frac{\frac{b}{a}-\frac{d}{c}}{x+\frac{d}{c}} \right) dx = \frac{a}{c} \cdot \left(\int dx - \frac{ad-bc}{ac} \cdot \int \frac{1}{x+\frac{d}{c}} dx \right) = \frac{a}{c} \cdot \left(x - \frac{\Delta}{ac} \cdot \ln \left| x + \frac{d}{c} \right| \right) =$$

$$= \frac{a}{c} x - \frac{\Delta}{c^2} \cdot \ln \left| x + \frac{d}{c} \right| + C = \frac{a}{c} x - \frac{\Delta}{c^2} \cdot \ln|cx+d| + C, \text{ где } \Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Таким образом, получили следующие табличные интегралы:

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C,$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \cdot \arctg \frac{x}{a} + C,$$

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \cdot \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C,$$

$$\int \frac{1}{(x+a) \cdot (x+b)} dx = \frac{1}{a-b} \cdot \ln \left| \frac{x+b}{x+a} \right| + C,$$

$$\int \frac{ax+b}{cx+d} dx = \frac{a}{c} x - \frac{\Delta}{c^2} \cdot \ln|cx+d| + C, \Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Примеры.

$$1. \int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{3} + C \quad 2. \int \frac{1}{3+x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \arctg \frac{x}{\sqrt{3}} + C$$

$$3. \int \frac{1}{x^2-5} dx = \frac{1}{2\sqrt{5}} \cdot \ln \left| \frac{x-\sqrt{5}}{x+\sqrt{5}} \right| + C \quad 4. \int \frac{1}{(x-2) \cdot (x-3)} dx = \ln \left| \frac{x-3}{x-2} \right| + C$$

$$5. \int \frac{2x-5}{3x+1} dx = \frac{2}{3} x - \frac{\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{9} \cdot \ln|3x+1| + C = \frac{2}{3} x - \frac{17}{9} \cdot \ln|3x+1| + C.$$

§ 2. Основные методы интегрирования.

К основным методам интегрирования относятся:

- метод непосредственного интегрирования;
- метод замены переменной;
- метод интегрирования по частям.

1. Непосредственное интегрирование.

Этот метод состоит в применении основной таблицы интегралов и правил интегрирования путем тождественных преобразований с использованием известных формул элементарной математики. Рассмотрим примеры.

Пример 1.

$$\int (6x^2 - 3x + 5)dx = \int 6x^2 dx - \int 3x dx + \int 5dx = 6 \int x^2 dx - 3 \int x dx + 5 \int dx = \\ = 2x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5x + C.$$

Пример 2.

$$\int (2x^2 + 1)^3 dx = \int (8x^6 + 12x^4 + 6x^2 + 1)dx = 8 \int x^6 dx + 12 \int x^4 dx + 6 \int x^2 dx + \\ + \int dx = \frac{8}{7}x^7 + \frac{12}{5}x^5 + 2x^3 + x + C.$$

Пример 3.

$$\int \frac{(x - \sqrt{x}) \cdot (1 + \sqrt{x})}{\sqrt[3]{x}} dx = \int \frac{x\sqrt{x} - \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} dx = \int \left(x^{\frac{7}{6}} - x^{\frac{1}{6}} \right) dx = \int x^{\frac{7}{6}} dx - \int x^{\frac{1}{6}} dx = \\ = \frac{6}{13} x^{\frac{13}{6}} - \frac{6}{7} x^{\frac{7}{6}} + C = \frac{6}{13} \sqrt[6]{x^{13}} - \frac{6}{7} \sqrt[6]{x^7} + C.$$

Пример 4.

$$\int tg^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int 1 dx = \\ = tg x - x + C;$$

$$\int ctg^2 x dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx - \int 1 dx = \\ = -ctg x - x + C.$$

Пример 5.

$$\int \frac{(e^x - 1) \cdot (e^{2x} + 1)}{e^x} dx = \int (e^{2x} - e^x + 1 - e^{-x}) dx = \int e^{2x} dx - \int e^x dx + \int 1 dx - \\ - \int e^{-x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} - e^x + x + e^{-x} + C.$$

Пример 6.

$$\int \sin^2 x \, dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx = \frac{1}{2} \cdot \int (1 - \cos 2x) \, dx = \frac{1}{2} \cdot (\int 1 \, dx - \int \cos 2x \, dx) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(x - \frac{1}{2} \cdot \sin 2x \right) + C = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \cdot \sin 2x + C;$$

$$\int \cos^2 x \, dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} \, dx = \frac{1}{2} \cdot \int (1 + \cos 2x) \, dx = \frac{1}{2} \cdot (\int 1 \, dx + \int \cos 2x \, dx) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(x + \frac{1}{2} \cdot \sin 2x \right) + C = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \cdot \sin 2x + C.$$

2. Замена переменной (метод подстановки или подведения под знак дифференциала).

Метод замены переменной основан на следующем факте.

Если $\int f(x) \, dx = F(x) + C$, то и $\int f(u) \, du = F(u) + C$, где u — произвольная независимая переменная. Оказывается, если u — зависимая переменная: $u = \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ — дифференцируемая функция, то это равенство остается верным, т.е.

$$\int f(\varphi(x)) d(\varphi(x)) = F(\varphi(x)) + C, \text{ или иначе:}$$

$$\boxed{\int f(\varphi(x)) \varphi'(x) \, dx = F(\varphi(x)) + C} \text{ — формула замены переменной.}$$

Это следует из равенства:

$$(F(\varphi(x)))' = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x).$$

Частным случаем этой формулы является *линейная замена переменной*:

$$\int f(kx + b) \, dx = \frac{1}{k} \cdot F(kx + b) + C.$$

Формула замены переменной может применяться в следующем виде:

$$\int f(\varphi(x)) \varphi'(x) \, dx = \int f(\varphi(x)) d(\varphi(x)) =$$

$$= [u = \varphi(x)] = \int f(u) \, du = F(u) + C = F(\varphi(x)) + C, \text{ или:}$$

$$\int f(\varphi(x)) \varphi'(x) \, dx = \left[\begin{array}{l} u = \varphi(x) \\ du = \varphi'(x) \, dx \end{array} \right] = \int f(u) \, du = F(u) + C = F(\varphi(x)) + C,$$

такой метод называется еще *подведением под знак дифференциала*.

Например:

$$\int \sin^3 x \cdot \cos x \, dx = \int \sin^2 x \, d(\sin x) = [u = \sin x] = \int u^2 \, du = \frac{1}{3} u^3 + C = \frac{1}{3} \sin^3 x + C;$$

$$\int 2x \cdot e^{x^2} \, dx = \left[\begin{array}{l} u = x^2 \\ du = 2x \, dx \end{array} \right] = \int e^u \, du = e^u + C = e^{x^2} + C.$$

Применение формулы замены переменной возможно и в следующей форме (метод подстановки):

$$\int f(x)dx = \left[\begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \end{array} \right] = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int g(t)dt = G(t) + C = \\ = G(\varphi^{-1}(x)) + C = F(x) + C.$$

Здесь $\varphi(t)$ – взаимно-однозначная и дифференцируемая функция, $g(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$, $G(t)$ – первообразная функции $g(t)$, $\varphi^{-1}(x)$ – функция, обратная к функции $\varphi(t)$, $F(x) = G(\varphi^{-1}(x))$.

Например:

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \left[\begin{array}{l} x = \sin t, \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ dx = \cos t dt, \quad t = \arcsin x \\ \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t \end{array} \right] = \int \cos^2 t dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \cdot \sin 2t + C = \\ = \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{2} \sin t \cdot \cos t + C = \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{2} x \cdot \sqrt{1-x^2} + C.$$

Замену переменной в неопределенном интеграле можно применять в тех случаях, когда невозможно непосредственное интегрирование. В случае «удачной» замены исходный интеграл сводится к табличному интегралу или к интегралу, к которому можно применить непосредственное интегрирование.

Общих методов подбора нужной замены переменной не существует. Лишь в отдельных случаях можно дать рекомендации, облегчающие поиск нужной замены переменной. Умение подобрать подходящую замену приходит с опытом и приобретается упражнениями и практикой.

Случаи, когда можно рекомендовать подходящую замену переменной, связаны с известными формулами для дифференциалов:

$$dx = \frac{1}{k} \cdot d(kx + b), \text{ где } k, b = \text{const}, k \neq 0; \\ x \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot d(x^2), \quad x^2 \cdot dx = \frac{1}{3} \cdot d(x^3), \dots, \quad x^n \cdot dx = \frac{1}{n+1} \cdot d(x^{n+1}); \\ \cos x \cdot dx = d(\sin x), \quad \sin x \cdot dx = -d(\cos x); \\ \frac{1}{x} \cdot dx = d(\ln x); \\ \frac{1}{\cos^2 x} \cdot dx = d(\operatorname{tg} x), \quad \frac{1}{\sin^2 x} \cdot dx = -d(\operatorname{ctg} x) \text{ и т.д.}$$

Рассмотрим некоторые интегралы, в которых встречаются эти выражения для дифференциалов, и укажем нужную замену (подстановку) переменной.

$$1). \quad \int f(x^2)x dx = \frac{1}{2} \cdot \int f(x^2) \cdot d(x^2) = [u = x^2] = \frac{1}{2} \cdot \int f(u)du; \\ \int f(x^3)x^2 dx = \frac{1}{3} \cdot \int f(x^3) \cdot d(x^3) = [u = x^3] = \frac{1}{3} \cdot \int f(u)du; \text{ и т.д.}$$

Например:

$$\int \frac{x dx}{1+x^4} = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{d(x^2)}{1+(x^2)^2} = [u = x^2] = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} u + C = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} (x^2) + C.$$

$$2). \int f(\ln x) \frac{dx}{x} = \int f(\ln x) \cdot d(\ln x) = [u = \ln x] = \int f(u) du.$$

Например:

$$\int \frac{dx}{x \cdot \ln x} = \int \frac{d(\ln x)}{\ln x} = [u = \ln x] = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|\ln x| + C.$$

$$\begin{aligned} 3). \int f(\sin x) \cos x dx &= [u = \sin x] = \int f(u) \cdot du; \\ \int f(\cos x) \sin x dx &= [u = \cos x] = - \int f(u) \cdot du; \\ \int f(\operatorname{tg} x) \frac{dx}{\cos^2 x} &= [u = \operatorname{tg} x] = \int f(u) \cdot du. \end{aligned}$$

Например:

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg} x dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = [u = \cos x] = - \int \frac{du}{u} = - \ln|u| + C = - \ln|\cos x| + C; \\ \int \operatorname{ctg} x dx &= \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = [u = \sin x] = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|\sin x| + C; \\ \int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos x} &= \int \frac{dx}{\operatorname{tg} x \cdot \cos^2 x} = [u = \operatorname{tg} x] = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|\operatorname{tg} x| + C; \\ \int \frac{dx}{\sin x} &= \int \frac{dx}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \int \frac{d(\frac{x}{2})}{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = [u = \frac{x}{2}] = \int \frac{du}{\sin u \cdot \cos u} = \ln|\operatorname{tg} u| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} \right) \right| + C; \\ \int \frac{dx}{\cos x} &= \int \frac{d(x + \frac{\pi}{2})}{\sin(x + \frac{\pi}{2})} = [u = x + \frac{\pi}{2}] = \int \frac{du}{\sin u} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{u}{2} \right) \right| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C. \end{aligned}$$

$$4). \int f(a^2 \pm x^2) dx, \quad a = \operatorname{const}, \quad a > 0.$$

Простейшие интегралы такого типа рассмотрены в §1:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx &= \operatorname{arc} \sin \frac{x}{a} + C, & \int \frac{1}{a^2 + x^2} dx &= \frac{1}{a} \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{a} + C, \\ \int \frac{1}{x^2 - a^2} dx &= \frac{1}{2a} \cdot \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, & \int \frac{1}{a^2 - x^2} dx &= \frac{1}{2a} \cdot \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right| + C. \end{aligned}$$

В общем случае, если непосредственное интегрирование к результату не приводит, то можно рекомендовать тригонометрические или гиперболические подстановки:

$$\begin{aligned} x &= a \cdot \sin t, \quad x = a \cdot \cos t, \quad x = a \cdot \operatorname{tg} t, \quad x = a \cdot \operatorname{ctg} t, \quad x = \frac{a}{\cos t}, \quad x = \frac{a}{\sin t}, \\ x &= a \cdot \operatorname{sh} t, \quad x = a \cdot \operatorname{ch} t, \quad x = a \cdot \operatorname{th} t. \end{aligned}$$

При этом используются известные соотношения между этими функциями:

$$\begin{aligned} \sin^2 t + \cos^2 t &= 1; \quad 1 + \operatorname{tg}^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}; \quad \sin 2t = \frac{2 \operatorname{tg} t}{1 + \operatorname{tg}^2 t}; \quad \cos 2t = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 t}{1 + \operatorname{tg}^2 t}; \quad \operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t = e^t; \\ \operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t &= 1; \quad 1 - \operatorname{th}^2 t = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}; \quad \operatorname{sh} 2t = 2 \operatorname{sh} t \cdot \operatorname{ch} t; \quad \operatorname{ch} 2t = \operatorname{sh}^2 t + \operatorname{ch}^2 t; \\ x = \operatorname{sh} t &\Rightarrow t = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}); \quad x = \operatorname{ch} t, \quad t > 0 \Rightarrow t = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}). \end{aligned}$$

Например:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \left[\begin{array}{l} x = a \cdot \sin t, \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ dx = a \cdot \cos t dt, \quad t = \arcsin \frac{x}{a} \\ \sqrt{a^2 - x^2} = a \cdot \cos t \end{array} \right] = a^2 \cdot \int \cos^2 t dt =$$

$$= a^2 \cdot \left(\frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \cdot \sin 2t \right) = a^2 \cdot \left(\frac{1}{2} t + \frac{1}{2} \cdot \sin t \cdot \cos t \right) = \frac{a^2}{2} \cdot \left(\arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{a} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a} \right) +$$

$$+ C = \frac{a^2}{2} \cdot \arcsin \frac{x}{a} + \frac{1}{2} x \cdot \sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

$$\int \frac{1}{(a^2 + x^2)^2} dx = \left[\begin{array}{l} x = a \cdot \operatorname{tg} t, \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \\ dx = \frac{a \cdot dt}{\cos^2 t}, \quad t = \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \\ a^2 + x^2 = \frac{a^2}{\cos^2 t} \end{array} \right] = \int \frac{\cos^4 t}{a^4} \cdot \frac{a \cdot dt}{\cos^2 t} = \frac{1}{a^3} \cdot \int \cos^2 t dt =$$

$$= \frac{1}{a^3} \cdot \left(\frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \cdot \sin 2t \right) + C = \frac{1}{2a^3} \cdot \left(t + \frac{1}{2} \cdot \sin 2t \right) + C = \frac{1}{2a^3} \cdot \left(t + \frac{\operatorname{tg} t}{1 + \operatorname{tg}^2 t} \right) + C =$$

$$= \frac{1}{2a^3} \cdot \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{\frac{x}{a}}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} \right) + C = \frac{1}{2a^3} \cdot \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{a \cdot x}{a^2 + x^2} \right) + C;$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \left[\begin{array}{l} x = a \cdot \operatorname{ch} t, \quad t > 0 \\ dx = a \cdot \operatorname{sh} t dt, \quad t = \ln \left(\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1} \right) \\ \sqrt{x^2 - a^2} = a \cdot \operatorname{sh} t \end{array} \right] = \int \frac{1}{a \cdot \operatorname{sh} t} \cdot a \cdot \operatorname{sh} t dt =$$

$$= \int 1 \cdot dt = t + C = \ln \left(\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1} \right) + C = \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) + C.$$

Аналогично можно показать, что

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C.$$

$$\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \left[\begin{array}{l} x = a \cdot \operatorname{sh} t, \quad dx = a \cdot \operatorname{ch} t \\ \operatorname{sh} t = \frac{x}{a}, \quad \operatorname{ch} t = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{a} \\ e^t = \operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t = \frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a} \\ \sqrt{x^2 + a^2} = a \cdot \operatorname{ch} t \end{array} \right] = a^2 \cdot \int \operatorname{ch}^2 t dt = a^2 \cdot \int \frac{1 + \operatorname{ch} 2t}{2} dt =$$

$$= \frac{a^2}{2} \cdot \left(t + \frac{1}{2} \cdot \operatorname{sh} 2t \right) + C = \frac{a^2}{2} \cdot \left(t + \operatorname{sh} t \cdot \operatorname{ch} t \right) + C =$$

$$= \frac{a^2}{2} \cdot \left(\ln \left(\frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a} \right) + \frac{x}{a} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{a} \right) + C = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \cdot \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C.$$

Аналогично можно показать, что

$$\int \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \cdot \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C.$$

3. Интегрирование по частям.

Пусть $u = u(x)$, $v = v(x)$ – дифференцируемые функции. Тогда по правилу дифференцирования произведения имеем:

$$d(u(x) \cdot v(x)) = du(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot dv(x), \text{ или сокращенно:} \\ d(u \cdot v) = du \cdot v + u \cdot dv.$$

Интегрируя это равенство, получим:

$$\int d(u \cdot v) = \int v \cdot du + \int u \cdot dv, \text{ или } u \cdot v = \int v \cdot du + \int u \cdot dv.$$

Получаем *формулу интегрирования по частям*:

$$\boxed{\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du}.$$

Эта формула позволяет свести интегрирование выражения $u \cdot dv = u(x) \cdot dv(x)$ – к интегрированию выражения $v \cdot du = v(x) \cdot du(x)$. Применяя формулу интегрирования по частям, надо стараться, чтобы нахождение функции $v = \int dv$ – не представляло трудностей и чтобы интеграл $\int v \cdot du$ оказался проще исходного интеграла $\int u \cdot dv$.

Например:

$$\int \ln x \, dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array} \right] = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x \cdot \ln x - \int dx = x \cdot \ln x - x + C;$$

$$\int \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \, dx = \left[\begin{array}{l} u = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \Rightarrow du = \frac{dx}{1+x^2} \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array} \right] = x \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - \int x \cdot \frac{dx}{1+x^2} = x \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - \\ - \frac{1}{2} \cdot \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = x \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - \frac{1}{2} \cdot \ln(1+x^2) + C;$$

$$\int \operatorname{arc} \sin x \, dx = \left[\begin{array}{l} u = \operatorname{arc} \sin x \Rightarrow du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array} \right] = x \cdot \operatorname{arc} \sin x - \int x \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \\ = x \cdot \operatorname{arc} \sin x + \frac{1}{2} \cdot \int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = [t = 1 - x^2] = x \cdot \operatorname{arc} \sin x + \frac{1}{2} \cdot \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = x \cdot \operatorname{arc} \sin x + \\ + \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{t} + C = x \cdot \operatorname{arc} \sin x + \sqrt{1-x^2} + C;$$

$$\int x \cdot e^x \, dx = \left[\begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x \end{array} \right] = x \cdot e^x - \int e^x \cdot dx = x \cdot e^x - e^x + C;$$

$$\int x \cdot \cos x \, dx = \left[\begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \cos x \, dx \Rightarrow v = \sin x \end{array} \right] = x \cdot \sin x - \int \sin x \cdot dx = \\ = x \cdot \sin x + \cos x + C;$$

$$\int x^3 \cdot \ln x \, dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x} \\ dv = x^3 \cdot dx \Rightarrow v = \frac{1}{4}x^4 \end{array} \right] = \frac{1}{4}x^4 \cdot \ln x - \int \frac{1}{4}x^4 \cdot \frac{dx}{x} = \frac{1}{4}x^4 \cdot \ln x - \\ - \frac{1}{4} \int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 \cdot \ln x - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}x^4 + C = \frac{1}{4}x^4 \cdot \ln x - \frac{1}{16}x^4 + C.$$

Иногда при вычислении интегралов приходится применять формулу *интегрирования по частям* несколько раз.

Например:

$$\begin{aligned} \int \arcsin^2 x \, dx &= \left[\begin{array}{l} u = \arcsin^2 x \Rightarrow du = 2 \arcsin x \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array} \right] = x \cdot \arcsin^2 x - \\ &- \int 2x \cdot \arcsin x \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\begin{array}{l} u = \arcsin x \Rightarrow du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = \frac{2xdx}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow v = \int \frac{2xdx}{\sqrt{1-x^2}} = -\int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = -2\sqrt{1-x^2} \end{array} \right] = \\ &= x \cdot \arcsin^2 x + 2\sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x - \int 2\sqrt{1-x^2} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = x \cdot \arcsin^2 x + \\ &+ 2\sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x - \int 2 \, dx = x \cdot \arcsin^2 x + 2\sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x - 2x + C. \end{aligned}$$

В некоторых случаях после применения формулы *интегрирования по частям* получается исходный интеграл. В этих случаях полученное равенство нужно рассматривать как *уравнение* относительно неизвестного интеграла и решить его.

Например:

$$\begin{aligned} 1). \int e^x \cdot \sin x \, dx &= \left[\begin{array}{l} u = \sin x \Rightarrow du = \cos x \, dx \\ dv = e^x \cdot dx \Rightarrow v = e^x \end{array} \right] = e^x \cdot \sin x - \int e^x \cdot \cos x \, dx = \\ &= \left[\begin{array}{l} u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x \, dx \\ dv = e^x \cdot dx \Rightarrow v = e^x \end{array} \right] = e^x \cdot \sin x - (e^x \cdot \cos x + \int e^x \cdot \sin x \, dx) = \\ &= e^x \cdot \sin x - e^x \cdot \cos x - \int e^x \cdot \sin x \, dx; \text{ пусть } I = \int e^x \cdot \sin x \, dx, \end{aligned}$$

тогда получаем уравнение: $I = e^x \cdot \sin x - e^x \cdot \cos x - I$. Решая это уравнение относительно неизвестного I , получаем: $I = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x)$, или:

$$\int e^x \cdot \sin x \, dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C.$$

$$\begin{aligned} 2). \int e^x \cdot \cos x \, dx &= \left[\begin{array}{l} u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x \, dx \\ dv = e^x \cdot dx \Rightarrow v = e^x \end{array} \right] = e^x \cdot \cos x + \int e^x \cdot \sin x \, dx = \\ &= \left[\begin{array}{l} u = \sin x \Rightarrow du = \cos x \, dx \\ dv = e^x \cdot dx \Rightarrow v = e^x \end{array} \right] = e^x \cdot \cos x + (e^x \cdot \sin x - \int e^x \cdot \cos x \, dx) = \\ &= e^x \cdot \cos x + e^x \cdot \sin x - \int e^x \cdot \cos x \, dx; \text{ пусть } I = \int e^x \cdot \cos x \, dx, \end{aligned}$$

тогда получаем уравнение: $I = e^x \cdot \cos x + e^x \cdot \sin x - I$. Решая это уравнение относительно неизвестного I , получаем: $I = \frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x)$, или:

$$\int e^x \cdot \cos x \, dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x) + C.$$

Отметим, что метод *интегрирования по частям* имеет более ограниченную область применения, чем метод *замены переменной*. Но есть интегралы, которые вычисляются именно методом *интегрирования по частям*. Эти интегралы можно условно разбить на следующие 3 типа:

а) интегралы, у которых подынтегральная функция содержит в качестве множителя одну из следующих функций:

$$\ln x, \arcsin x, \arccos x, \operatorname{arctg} x, \arcsin^2 x, \arccos^2 x, \operatorname{arctg}^2 x, \dots;$$

б) интегралы:

$$\int P(x) \cdot e^{ax} dx, \int P(x) \cdot \cos bx dx, \int P(x) \cdot \sin bx dx,$$

где $P(x)$ – некоторый многочлен;

с) интегралы:

$$\int e^{ax} \cdot \cos bx dx, \int e^{ax} \cdot \sin bx dx, \int \sin(\ln x) dx, \int \cos(\ln x) dx, \dots$$

Метод *интегрирования по частям* позволяет иногда получать *рекуррентные* соотношения.

В качестве примера рассмотрим интеграл $I_n = \int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^n}$, $n = 1, 2, 3, \dots$

При $n = 1$ и 2 имеем (опуская постоянную C):

$$I_1 = \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{a},$$

$$I_2 = \int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^2} = \frac{1}{2a^3} \cdot \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{a \cdot x}{a^2 + x^2} \right).$$

Пусть $n > 1$.

$$I_n = \int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^n} = \left[\begin{array}{l} u = \frac{1}{(a^2 + x^2)^n} \Rightarrow du = -\frac{2nx \cdot dx}{(a^2 + x^2)^{n+1}} \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array} \right] = \frac{x}{(a^2 + x^2)^n} + 2n \int \frac{x^2 dx}{(a^2 + x^2)^{n+1}}.$$

Преобразуем последний интеграл:

$$\int \frac{x^2 dx}{(a^2 + x^2)^{n+1}} = \int \frac{(x^2 + a^2) - a^2}{(a^2 + x^2)^{n+1}} dx = \int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^n} - a^2 \cdot \int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{n+1}} = I_n - a^2 \cdot I_{n+1}.$$

Подставляя это выражение в предыдущее равенство, получим соотношение:

$$I_n = \frac{x}{(a^2 + x^2)^n} + 2n \cdot I_n - 2na^2 \cdot I_{n+1},$$

откуда

$$\boxed{I_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \cdot \frac{x}{(a^2 + x^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2} \cdot I_n}.$$

По этой рекуррентной формуле вычисление интеграла I_{n+1} сводится к вычислению интеграла I_n .

Например:

$$I_2 = \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{x}{a^2 + x^2} + \frac{1}{2a^2} \cdot I_1 = \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{x}{a^2 + x^2} + \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{1}{a} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{a}, \text{ или:}$$

$$I_2 = \int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^2} = \frac{1}{2a^3} \cdot \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{a \cdot x}{a^2 + x^2} \right);$$

$$I_3 = \frac{1}{4a^2} \cdot \frac{x}{(a^2 + x^2)^2} + \frac{3}{4a^2} \cdot I_2 = \frac{1}{4a^2} \cdot \frac{x}{(a^2 + x^2)^2} + \frac{3}{4a^2} \cdot \frac{1}{2a^3} \cdot \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{a \cdot x}{a^2 + x^2} \right) =$$

$$= \frac{1}{4a^2} \cdot \frac{x}{(a^2 + x^2)^2} + \frac{3}{8a^5} \cdot \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{a \cdot x}{a^2 + x^2} \right), \text{ или:}$$

$$I_3 = \int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^3} = \frac{1}{4a^2} \cdot \frac{x}{(a^2 + x^2)^2} + \frac{3}{8a^5} \cdot \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{a \cdot x}{a^2 + x^2} \right) \text{ и т.д.}$$

В заключение дополним основную таблицу интегралов некоторыми полученными здесь формулами, имеющими широкое применение в приложениях.

Дополнение к основной таблице интегралов.

1. $\int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln|\cos x| + C$
2. $\int \operatorname{ctg} x \, dx = \ln|\sin x| + C$
3. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C$
4. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C$
5. $\int \frac{1}{(x+a)(x+b)} dx = \frac{1}{a-b} \cdot \ln \left| \frac{x+b}{x+a} \right| + C$
6. $\int \ln x \, dx = x \cdot \ln x - x + C$
7. $\int \operatorname{arctg} x \, dx = x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \cdot \ln(1+x^2) + C$
8. $\int \operatorname{arcsin} x \, dx = x \cdot \operatorname{arcsin} x + \sqrt{1-x^2} + C$
9. $\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = \frac{a^2}{2} \cdot \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + \frac{1}{2} x \cdot \sqrt{a^2 - x^2} + C$
10. $\int \sqrt{x^2 \pm a^2} \, dx = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \cdot \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$
11. $\int e^x \cdot \sin x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C$
12. $\int e^x \cdot \cos x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + C$

§ 3. Интегрирование рациональных функций.

«Берущиеся» и «неберущиеся» интегралы.

В дифференциальном исчислении было показано, что производная любой элементарной функции также является элементарной функцией, т.е. операция дифференцирования не выводит за пределы множества элементарных функций.

С операцией интегрирования дело обстоит уже иначе. Есть элементарные функции, для которых их первообразная не является элементарной функцией, т.е. не выражается через основные элементарные функции с помощью арифметических действий и суперпозиции этих функций.

Наиболее известными примерами таких интегралов могут служить следующие:

- $\int e^{-x^2} dx$ — интеграл Пуассона;
- $\int \frac{dx}{\ln x}$ — интегральный логарифм;
- $\int \frac{\sin x}{x} dx$, $\int \frac{\cos x}{x} dx$ — интегральные синус и косинус;
- $\int \sin(x^2) dx$, $\int \cos(x^2) dx$ — интегралы Френеля и другие.

Хотя эти интегралы и существуют, как интегралы от непрерывных функций, но они не выражаются через элементарные функции. Такого типа интегралы называются

«неберущимися» интегралами. В отличие от них все остальные интегралы называются «берущимися» интегралами.

Существует не так много классов элементарных функций с «берущимися» интегралами, т.е. классов функций, для которых интегрирование может быть выполнено в конечном виде и привести обязательно к какой-нибудь элементарной функции.

Среди таких классов функций на первом месте по значению стоит класс *рациональных функций*.

Переходим к изучению интегралов вида: $\int R(x) dx$, где $R(x)$ — *рациональная функция*.

Здесь необходимо напомнить некоторые сведения об *алгебраических многочленах* и *рациональных функциях* (см. [9], глава 7).

Рациональные функции.

Рациональной функцией, как известно, называется отношение двух многочленов:

$$R(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{\beta_0 x^m + \beta_1 x^{m-1} + \dots + \beta_{m-1} x + \beta_m}{\alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} x + \alpha_n}, \text{ где } m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \alpha_0 \cdot \beta_0 \neq 0.$$

Многочлен является частным случаем рациональной дроби при $n = 0$.

Любой многочлен можно разложить на линейные и квадратичные множители с вещественными коэффициентами:

$$P_n(x) = \alpha_0 (x - a_1)^{n_1} \cdot \dots \cdot (x - a_k)^{n_k} \cdot (x^2 + p_1 x + q_1)^{m_1} \cdot \dots \cdot (x^2 + p_l x + q_l)^{m_l},$$

где $n_1 + n_2 + \dots + n_k + 2(m_1 + m_2 + \dots + m_l) = n$, $D_i = p_i^2 - 4q_i < 0$, $i = 1, \dots, l$.

Условие: $D_i < 0$ - означает, что квадратичные множители не имеют действительных корней, и они уже не могут быть разложены в произведение линейных множителей с вещественными коэффициентами.

Рациональная дробь называется *правильной*, если степень числителя меньше степени знаменателя ($m < n$), в противном случае ($m \geq n$) — дробь называется *неправильной*.

Если рациональная дробь — *неправильная*, то ее можно представить в виде суммы многочлена и *правильной* рациональной дроби, используя операцию *деления с остатком*. Это действие называется *выделением целой части* из дроби.

Например:

$$\frac{x^3 - 1}{x^2 + 1} = x + \frac{-x - 1}{x^2 + 1};$$

здесь $\frac{x^3 - 1}{x^2 + 1}$ - *неправильная дробь*, x - *целая часть*, а $\frac{-x - 1}{x^2 + 1}$ - *правильная дробь*.

Среди *правильных дробей* выделяют так называемые *простейшие дроби*.

Определение.

Простейшими рациональными дробями называются дроби следующих типов:

$$\text{I. } \frac{A}{x-a}, \quad \text{II. } \frac{A}{(x-a)^n}, \quad \text{III. } \frac{Ax+B}{x^2+px+q}, \quad \text{IV. } \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n},$$

где A, B, a, p, q – заданные вещественные числа, x – вещественная переменная, n – натуральное число, $n \geq 2$, $D = p^2 - 4q < 0$.

Примеры простейших дробей:

$$\begin{array}{ll} \frac{5}{x+3} - \text{дробь I типа}; & \frac{-2}{(x-1)^3} - \text{дробь II типа}; \\ \frac{2x+3}{x^2+x+1} - \text{дробь III типа}; & \frac{-x+1}{(x^2+3x+5)^2} - \text{дробь IV типа}. \end{array}$$

Из приведенной ниже теоремы следует, что любая *правильная дробь* может быть выражена через *простейшие дроби*.

Теорема.

Пусть $R(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$ – правильная рациональная дробь и знаменатель $P(x)$

разложен на линейные и квадратичные множители:

$$P(x) = \alpha_0(x-a_1)^{n_1} \cdot \dots \cdot (x-a_k)^{n_k} \cdot (x^2+p_1x+q_1)^{m_1} \cdot \dots \cdot (x^2+p_lx+q_l)^{m_l}.$$

Тогда дробь $R(x)$ может быть разложена в сумму простейших дробей I ÷ IV типов, при этом:

- каждому *простому* множителю $(x-a)$ соответствует простейшая дробь I типа $\frac{A}{x-a}$;

- каждому *кратному* множителю $(x-a)^k$ соответствует сумма простейших дробей I и II типов $\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-a)^k}$;

- каждому *простому* множителю (x^2+px+q) соответствует простейшая дробь III типа $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$;

- каждому *кратному* множителю $(x^2+px+q)^k$ соответствует сумма простейших дробей III и IV типов $\frac{A_1x+B_1}{x^2+px+q} + \frac{A_2x+B_2}{(x^2+px+q)^2} + \dots + \frac{A_kx+B_k}{(x^2+px+q)^k}$.

При этом возникающие коэффициенты $A_1, A_2, \dots, A_k, B_1, B_2, \dots, B_k$ - называются *неопределенными коэффициентами*; они подлежат определению.

Например:

$$\begin{array}{l} 1) \frac{Q_m(x)}{(x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}, (m < 3); \\ 2) \frac{Q_m(x)}{x \cdot (x+2)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2} + \frac{D}{(x+2)^3}, (m < 4); \\ 3) \frac{Q_m(x)}{(x^2+x+1) \cdot (x^2+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}, (m < 4); \\ 4) \frac{Q_m(x)}{(x-1)^2 \cdot (x^2+4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+4}, (m < 4). \end{array}$$

Эти равенства справедливы при любых допустимых значениях x , т.е. представляют собой тождества.

Для вычисления неопределенных коэффициентов есть несколько методов.

Основной метод заключается в следующем. От равенства дробей переходим к равенству многочленов, которые получаются слева и справа от знака равенства после умножения на общий знаменатель.

Равенство (тождество) многочленов означает равенство их коэффициентов при одинаковых степенях x . Составляем систему уравнений, приравнявая неопределенные коэффициенты с одной стороны и конкретные значения с другой стороны. Решая эту систему, найдем неопределенные коэффициенты.

Иногда удобнее применять другой метод: подставлять конкретные значения переменной x в эти многочлены и получать значения неопределенных коэффициентов, или уравнения относительно них.

Можно также и комбинировать эти 2 метода.

Примеры.

$$1) \frac{-2x^2 + x + 5}{(x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}.$$

Умножим обе части этого равенства на общий знаменатель:

$$-2x^2 + x + 5 = A(x-2) \cdot (x-3) + B(x-1) \cdot (x-3) + C(x-1) \cdot (x-2).$$

Подставляя в это равенство значения $x = 1, x = 2, x = 3$, получим:

$$4 = A \cdot 2 \Rightarrow A = 2; \quad -1 = B \cdot (-1) \Rightarrow B = 1; \quad -10 = C \cdot 2 \Rightarrow C = -5.$$

$$\text{Следовательно: } \frac{-2x^2 + x + 5}{(x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3)} = \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x-2} - \frac{5}{x-3}.$$

$$2) \frac{x^3 + 8x^2 + 13x + 8}{x \cdot (x+2)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2} + \frac{D}{(x+2)^3}.$$

$$x^3 + 8x^2 + 13x + 8 = A(x+2)^3 + Bx \cdot (x+2)^2 + Cx \cdot (x+2) + Dx.$$

Подставляя в это равенство значения $x = 0, x = -2, x = -1, x = 1$, получим:

$$8 = A \cdot 8 \Rightarrow A = 1; \quad 6 = D \cdot (-2) \Rightarrow D = -3;$$

$$2 = 1 - B - C + 3 \Rightarrow B + C = 2; \quad 30 = 27 + 9B + 3C - 3 \Rightarrow 3B + C = 2;$$

$$\begin{cases} B + C = 2 \\ 3B + C = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 0 \\ C = 2 \end{cases}.$$

$$\text{Следовательно: } \frac{x^3 + 8x^2 + 13x + 8}{x \cdot (x+2)^3} = \frac{1}{x} + \frac{2}{(x+2)^2} - \frac{3}{(x+2)^3}.$$

$$3) \frac{x^2 + 2}{(x^2 + x + 1) \cdot (x^2 + 1)} = \frac{Ax + B}{x^2 + x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}.$$

$$x^2 + 2 = (Ax + B) \cdot (x^2 + 1) + (Cx + D) \cdot (x^2 + x + 1).$$

Раскрываем скобки в правой части этого тождества:

$$Ax^3 + Bx^2 + Ax + B + Cx^3 + Dx^2 + Cx^2 + Dx + Cx + D =$$

$$= (A + C)x^3 + (B + C + D)x^2 + (A + C + D)x + (B + D).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x многочленов, стоящих слева и справа от знака равенства, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ B + C + D = 1 \\ A + C + D = 0 \\ B + D = 2 \end{cases} \text{ Решая эту систему, получим: } \begin{cases} A = 1 \\ B = 2 \\ C = -1 \\ D = 0 \end{cases}.$$

Следовательно: $\frac{x^2+2}{(x^2+x+1)(x^2+1)} = \frac{x+2}{x^2+x+1} - \frac{x}{x^2+1}.$

$$4) \frac{3x^3-2x^2+3x-9}{(x-1)^2(x^2+4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+4}.$$

$$3x^3 - 2x^2 + 3x - 9 = A(x-1) \cdot (x^2+4) + B \cdot (x^2+4) + (Cx+D) \cdot (x-1)^2.$$

Подставляя в это равенство значение $x = 1$, получим: $-5 = B \cdot 5 \Rightarrow B = -1.$

Раскрываем скобки в правой части тождества:

$$\begin{aligned} A(x^3 - x^2 + 4x - 4) - (x^2 + 4) + (Cx + D)(x^2 - 2x + 1) &= \\ = Ax^3 - Ax^2 + 4Ax - 4A - x^2 - 4 + Cx^3 - 2Cx^2 + Cx + Dx^2 - 2Dx + D &= \\ = (A + C)x^3 + (-A - 1 - 2C + D)x^2 + (4A + C - 2D)x + (-4A - 4 + D). \end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x многочленов, стоящих слева и справа от знака равенства:

$$\begin{cases} A + C = 3 \\ -A - 1 - 2C + D = -2 \\ 4A + C - 2D = 3 \\ -4A - 4 + D = -9 \end{cases} \text{ Решая эту систему, получим: } \begin{cases} A = 2 \\ C = 1 \\ D = 3 \end{cases}.$$

Следовательно: $\frac{3x^3-2x^2+3x-9}{(x-1)^2(x^2+4)} = \frac{2}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{x+3}{x^2+4}.$

Итак, любую правильную рациональную дробь можно представить в виде суммы *простейших дробей* 4-х типов. Следовательно, интегрирование рациональной функции сводится к интегрированию *простейших дробей* I ÷ IV типов.

Интегрирование простейших дробей.

I.

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \cdot \int \frac{d(x-a)}{x-a} = A \cdot \ln|x-a| + C.$$

Например: $\int \frac{5}{x-1} dx = 5 \cdot \int \frac{d(x-1)}{x-1} = 5 \cdot \ln|x-1| + C.$

II.

$$\int \frac{A}{(x-a)^n} dx = A \cdot \int (x-a)^{-n} d(x-a) = A \cdot \frac{1}{-n+1} (x-a)^{-n+1} + C = \frac{A}{1-n} \cdot \frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C.$$

Например: $\int \frac{2}{(x+4)^3} dx = 2 \cdot \int (x+4)^{-3} d(x+4) = 2 \cdot \frac{1}{-2} (x+4)^{-2} + C = -\frac{1}{(x+4)^2} + C.$

III.

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx = \left[\begin{array}{l} \text{в знаменателе выделяем полный} \\ \text{квадрат и вводим обозначение:} \\ a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}} \end{array} \right] = \int \frac{Ax+B}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+a^2} dx =$$

$$= \left[\begin{array}{l} t = x + \frac{p}{2} \\ x = t - \frac{p}{2} \\ dx = dt \end{array} \right] = \int \frac{A(t-\frac{p}{2})+B}{t^2+a^2} dt = A \cdot \int \frac{t}{t^2+a^2} dt + \left(B - A \cdot \frac{p}{2}\right) \cdot \int \frac{1}{t^2+a^2} dt =$$

$$= \frac{A}{2} \cdot \ln(t^2+a^2) + \left(B - A \cdot \frac{p}{2}\right) \cdot \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C =$$

$$= \frac{A}{2} \cdot \ln(x^2+px+q) + \left(B - A \cdot \frac{p}{2}\right) \cdot \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{2x+p}{2a} + C.$$

Например: $\int \frac{4x+1}{x^2+6x+10} dx = \int \frac{4x+1}{(x+3)^2+1} dx = \left[\begin{array}{l} t = x+3 \\ x = t-3 \\ dx = dt \end{array} \right] = \int \frac{4(t-3)+1}{t^2+1} dt =$

$$= 4 \cdot \int \frac{t}{t^2+1} dt - 11 \cdot \int \frac{1}{t^2+1} dt = 2 \cdot \ln(t^2+1) - 11 \cdot \operatorname{arctg} t + C =$$

$$= 2\ln(x^2+6x+10) - 11\operatorname{arctg}(x+3) + C.$$

IV.

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n} dx = \int \frac{Ax+B}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+a^2\right)^n} dx = \left[\begin{array}{l} t = x + \frac{p}{2} \\ x = t - \frac{p}{2} \\ dx = dt \end{array} \right] = \int \frac{A(t-\frac{p}{2})+B}{(t^2+a^2)^n} dt =$$

$$= A \cdot \int \frac{t}{(t^2+a^2)^n} dt + \left(B - A \cdot \frac{p}{2}\right) \cdot \int \frac{1}{(t^2+a^2)^n} dt = \frac{A}{2} \cdot \int \frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^n} + \left(B - A \cdot \frac{p}{2}\right) \cdot I_n =$$

$$= \frac{A}{2} \cdot \frac{1}{-n+1} (t^2+a^2)^{-n+1} + \left(B - A \cdot \frac{p}{2}\right) \cdot I_n = \frac{A}{2} \cdot \frac{1}{-n+1} (x^2+px+q)^{-n+1} + \left(B - A \cdot \frac{p}{2}\right) I_n,$$

где $I_n = \int \frac{1}{(t^2+a^2)^n} dt$ - вычисляется по рекуррентной формуле (см. §2).

Например: $\int \frac{4x+1}{(x^2+6x+10)^2} dx = \int \frac{4x+1}{((x+3)^2+1)^2} dx = \left[\begin{array}{l} t = x+3 \\ x = t-3 \\ dx = dt \end{array} \right] = \int \frac{4(t-3)+1}{(t^2+1)^2} dt =$

$$= 4 \cdot \int \frac{t}{(t^2+1)^2} dt - 11 \cdot \int \frac{1}{(t^2+1)^2} dt = 2 \cdot \int \frac{d(t^2+1)}{(t^2+1)^2} - 11 \cdot I_2 + C =$$

$$= -2 \cdot (t^2+a^2)^{-1} - 11 \cdot \frac{1}{2} \left(\operatorname{arctg} t + \frac{t}{1+t^2} \right) + C = \frac{-2}{x^2+6x+10} - \frac{11}{2} \left(\operatorname{arctg}(x+3) + \right.$$

$$\left. +x+3x^2+6x+10+C = -11x+372x^2+6x+10-112\operatorname{arctg} x+3+C.$$

Таким образом, все простейшие дроби I ÷ IV типов интегрируются за конечное число шагов. При этом интеграл от простейшей дроби выражается через рациональную дробь, логарифм и арктангенс.

Так как любая рациональная функция может быть представлена в виде суммы многочлена и простейших дробей, то можно сделать следующий вывод:

интеграл от любой рациональной функции является «берущимся» и выражается в конечном виде через рациональную функцию, логарифм и арктангенс.

Из всего вышесказанного можно сформулировать следующее правило.

Правило вычисления интеграла $\int R(x)dx$ от рациональной функции.

1. Если дробь неправильная, то надо представить ее в виде суммы многочлена и правильной дроби.
2. Знаменатель правильной рациональной дроби разложить на линейные и квадратичные множители.
3. Представить правильную рациональную дробь в виде суммы простейших дробей.
4. Проинтегрировать многочлен и сумму простейших дробей.

Рассмотрим примеры.

Пример 5.

$$\int \frac{3x^3 + 1}{x^2 - 1} dx.$$

1. Здесь $R(x) = \frac{3x^3 + 1}{x^2 - 1}$ - неправильная дробь; выделим из нее целую часть путем деления «уголком»:

$$\begin{array}{r|l} 3x^3 + 1 & x^2 - 1 \\ 3x^3 - 3x & 3x \\ \hline & 3x + 1 \end{array} \Rightarrow \frac{3x^3 + 1}{x^2 - 1} = 3x + \frac{3x + 1}{x^2 - 1}$$

$$\int \frac{3x^3 + 1}{x^2 - 1} dx = \int \left(3x + \frac{3x + 1}{x^2 - 1} \right) dx = \int 3x dx + \int \frac{3x + 1}{x^2 - 1} dx = \frac{3}{2}x^2 + \int \frac{3x + 1}{x^2 - 1} dx.$$

2. $x^2 - 1 = (x - 1) \cdot (x + 1).$

3. $\frac{3x + 1}{x^2 - 1} = \frac{3x + 1}{(x - 1) \cdot (x + 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1}$ - разложение в сумму простейших дробей.

Найдем неопределенные коэффициенты A и B .

$$\frac{3x + 1}{(x - 1) \cdot (x + 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} \Leftrightarrow 3x + 1 = A \cdot (x + 1) + B \cdot (x - 1).$$

Подставим в это равенство $x = 1$, тогда получим: $4 = A \cdot 2 \Rightarrow A = 2$;

подставим в это равенство $x = -1$, тогда получим: $-2 = B \cdot (-2) \Rightarrow B = 1$.

Итак: $\frac{3x + 1}{x^2 - 1} = \frac{2}{x - 1} + \frac{1}{x + 1}.$

$$4. \int \frac{3x^3 + 1}{x^2 - 1} dx = \frac{3}{2}x^2 + \int \frac{3x + 1}{x^2 - 1} dx = \frac{3}{2}x^2 + \int \left(\frac{2}{x - 1} + \frac{1}{x + 1} \right) dx =$$

$$= \frac{3}{2}x^2 + \int \frac{2}{x - 1} dx + \int \frac{1}{x + 1} dx = \frac{3}{2}x^2 + 2\ln|x - 1| + \ln|x + 1| + C.$$

Ответ: $\int \frac{3x^3 + 1}{x^2 - 1} dx = \frac{3}{2}x^2 + 2\ln|x - 1| + \ln|x + 1| + C.$

Пример 6.

$$\int \frac{x^3 + 4x^2 + 4x + 2}{(x+1)^2 \cdot (x^2 + x + 1)} dx.$$

1. Здесь $R(x) = \frac{x^3 + 4x^2 + 4x + 2}{(x+1)^2 \cdot (x^2 + x + 1)}$ - правильная дробь.

2. Знаменатель дроби разложен на линейные и квадратичные множители.

3. Разложим дробь в сумму простейших дробей:

$$\frac{x^3 + 4x^2 + 4x + 2}{(x+1)^2 \cdot (x^2 + x + 1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2 + x + 1}$$

Найдем *неопределенные коэффициенты* A, B, C и D.

$$x^3 + 4x^2 + 4x + 2 = A(x+1)(x^2 + x + 1) + B(x^2 + x + 1) + (Cx + D)(x+1)^2 \Leftrightarrow$$

$$x^3 + 4x^2 + 4x + 2 = A(x^3 + 2x^2 + 2x + 1) + B(x^2 + x + 1) + (Cx + D)(x^2 + 2x + 1).$$

В правой части этого равенства раскроем скобки и приравняем коэффициенты слева и справа полученного равенства при одинаковых степенях x :

$$\begin{cases} 1 = A + C \\ 4 = 2A + B + 2C + D \\ 4 = 2A + B + C + 2D \\ 2 = A + B + D \end{cases} \cdot \text{Решая эту систему, получим: } \begin{cases} A = 0 \\ B = 1 \\ C = 1 \\ D = 1 \end{cases}.$$

$$\text{Итак: } \frac{x^3 + 4x^2 + 4x + 2}{(x+1)^2 \cdot (x^2 + x + 1)} = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{x+1}{x^2 + x + 1}.$$

$$4. \int \frac{x^3 + 4x^2 + 4x + 2}{(x+1)^2 \cdot (x^2 + x + 1)} dx = \int \frac{1}{(x+1)^2} dx + \int \frac{x+1}{x^2 + x + 1} dx = -\frac{1}{x+1} + \int \frac{x+1}{x^2 + x + 1} dx.$$

$$\int \frac{x+1}{x^2 + x + 1} dx = \int \frac{x+1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx = \left[\begin{matrix} t = x + \frac{1}{2} \\ x = t - \frac{1}{2} \\ dx = dt \end{matrix} \right] = \int \frac{\left(t - \frac{1}{2}\right) + 1}{t^2 + \frac{3}{4}} dt = \int \frac{t}{t^2 + \frac{3}{4}} dt +$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{t^2 + \frac{3}{4}} dt = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(t^2 + \frac{3}{4}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \ln(x^2 + x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

$$\text{Ответ: } \int \frac{x+1}{x^2 + x + 1} dx = -\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \cdot \ln(x^2 + x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Пример 7.

$$\int \frac{x^3 - 6x^2 + 13x - 6}{(x+2) \cdot (x-2)^3} dx.$$

1. Здесь $R(x) = \frac{x^3 - 6x^2 + 13x - 6}{(x+2) \cdot (x-2)^3}$ - правильная дробь.

2. Знаменатель дроби разложен на линейные множители.

3. Разложим дробь в сумму простейших дробей:

$$\frac{x^3 - 6x^2 + 13x - 6}{(x+2) \cdot (x-2)^3} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2} + \frac{D}{(x-2)^3}$$

Найдем *неопределенные коэффициенты* A, B, C и D.

$$x^3 - 6x^2 + 13x - 6 = A(x - 2)^3 + B(x + 2)(x - 2)^2 + C(x + 2)(x - 2) + D(x + 2).$$

Подставим в это равенство $x = 2$, тогда получим: $4 = D \cdot 4 \Rightarrow D = 1$;

подставим в это равенство $x = -2$, тогда получим: $-64 = A \cdot (-64) \Rightarrow A = 1$;

подставляя значения $x = 0$ и $x = 1$, получим систему уравнений: $\begin{cases} 4B - 2C = 0 \\ B - C = 0 \end{cases}$.

Решая систему, получим: $\begin{cases} B = 0 \\ C = 0 \end{cases}$.

Итак: $\frac{x^3 - 6x^2 + 13x - 6}{(x + 2) \cdot (x - 2)^3} = \frac{1}{x + 2} + \frac{1}{(x - 2)^3}$.

$$4. \int \frac{x^3 - 6x^2 + 13x - 6}{(x + 2) \cdot (x - 2)^3} dx = \int \frac{1}{x + 2} dx + \int \frac{1}{(x - 2)^3} dx = \ln|x + 2| - \frac{1}{2(x - 2)^2} + C.$$

Ответ: $\int \frac{x^3 - 6x^2 + 13x - 6}{(x + 2) \cdot (x - 2)^3} dx = \ln|x + 2| - \frac{1}{2(x - 2)^2} + C.$

§ 4. Интегрирование иррациональных функций.

Интегралы от иррациональных функций в основном являются «неберущимися». Однако есть частные случаи, когда подынтегральную функцию с помощью замены переменной удастся «рационализировать», т.е. свести к рациональной функции и тем самым вычислить интеграл.

Здесь мы рассмотрим три вида иррациональностей:

- линейные и дробно-линейные иррациональности;
- дифференциальные биномы;
- квадратичные иррациональности.

Как обычно, через $R(x)$ обозначаем рациональную функцию одной переменной:

$R(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$ - отношение многочленов; а через $R(x, y)$ обозначим рациональную

функцию двух переменных: $R(x, y) = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}$ - отношение многочленов двух переменных.

Стоит напомнить о том, что многочлен представляет собой сумму степенных функций с целыми неотрицательными показателями и вещественными коэффициентами.

1. Линейные и дробно-линейные иррациональности.

Рассмотрим интегралы вида: $\int R(x, \sqrt[n]{ax + b}) dx$ и $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax + b}{cx + d}}\right) dx$, где

$R(x, y)$ — рациональная функция двух переменных.

Покажем, что с помощью подходящей замены переменной подынтегральные выражения «рационализуются».

Для интеграла $\int R(x, \sqrt[n]{ax + b}) dx$ сделаем замену переменной: $t = \sqrt[n]{ax + b}$; тогда $x = \frac{1}{a}(t^n - b)$, $dx = \frac{1}{a}n \cdot t^{n-1} dt$ и

$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b}) dx = \int \frac{1}{a} n \cdot R\left(\frac{t^{n-b}}{a}, t\right) \cdot t^{n-1} dt = \int \tilde{R}(t) dt$, где $\tilde{R}(t)$ – рациональная функция переменной t .

Для интеграла $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$ сделаем замену переменной: $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$;

нетрудно показать, что и в этом случае подынтегральное выражение также «рационализируется».

Пример 1.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} &= \left[\begin{array}{l} t = \sqrt[6]{x} \Rightarrow x = t^6 \\ dx = 6t^5 dt \\ \sqrt{x} = t^3; \sqrt[3]{x} = t^2 \end{array} \right] = \int \frac{6t^5 dt}{t^3 + t^2} = 6 \int \frac{t^3}{t+1} dt = 6 \int \frac{(t^3+1)-1}{t+1} dt = \\ &= 6 \int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1} \right) dt = 6 \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|t+1| \right) + C = \\ &= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - \ln(\sqrt[6]{x} + 1) + C. \end{aligned}$$

Пример 2.

$$\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx = \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \Rightarrow \frac{1+x}{1-x} = t^2 \\ x = \frac{t^2-1}{t^2+1} \Rightarrow dx = \frac{4t}{(t^2+1)^2} dt \end{array} \right] = \int \frac{t^2+1}{t^2-1} \cdot t \cdot \frac{4t}{(t^2+1)^2} dt =$$

$= 4 \int \frac{t^2}{(t^2-1)(t^2+1)} dt$. Получили интеграл от рациональной функции.

Далее применяем схему интегрирования рациональной функции.

$$\frac{t^2}{(t^2-1)(t^2+1)} = [u = t^2] = \frac{u}{(u-1)(u+1)} = \frac{A}{u+1} + \frac{B}{u-1}; \quad u = A(u-1) + B(u+1);$$

$$u = 1 \Rightarrow 1 = 2B \Rightarrow B = \frac{1}{2}; \quad u = -1 \Rightarrow -1 = -2A \Rightarrow A = \frac{1}{2};$$

$$\frac{t^2}{(t^2-1)(t^2+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{u+1} + \frac{1}{u-1} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t^2+1} + \frac{1}{t^2-1} \right).$$

$$4 \int \frac{t^2}{(t^2-1)(t^2+1)} dt = 2 \int \left(\frac{1}{t^2+1} + \frac{1}{t^2-1} \right) dt = 2 \arctg t + \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C =$$

$$= 2 \arctg \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - 1}{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + 1} \right| + C = 2 \arctg \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \ln \left| \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \right| + C.$$

2. Дифференциальные биномы.

Рассмотрим интегралы вида: $\int x^m (ax^n + b)^p dx$,

где m, n, p – рациональные числа, a и b – действительные числа.

Если m, n, p – целые числа, то подынтегральная функция является рациональной функцией и, следовательно, интеграл берется в конечном виде.

Пусть среди чисел m, n, p есть дробные числа. Тогда интеграл берется в конечном виде, если оказывается целым хотя бы одно из следующих чисел:

$$p, \quad \frac{m+1}{n}, \quad \frac{m+1}{n} + p,$$

а именно, имеет место следующее утверждение.

Теорема. Дифференциальный бином «рационализируется» с помощью следующих замен переменной:

- если p – целое число, то $t = \sqrt[N]{x}$, где N – общий знаменатель дробей m и n ;
- если $\frac{m+1}{n}$ – целое число, то $t = \sqrt[N]{ax^n + b}$, где N – знаменатель дроби p ;
- если $\frac{m+1}{n} + p$ – целое число, то $t = \sqrt[N]{\frac{ax^n + b}{x^n}}$, где N – знаменатель дроби p .

Доказательство этой теоремы можно найти в [2], [3].

Во всех иных случаях интегралы от дифференциального бинома являются «неберущимися». Этот факт был установлен П. Л. Чебышевым.

Например, для интеграла $\int \sqrt{x^3 + 1} dx$ имеем: $m = 0$, $n = 3$, $p = \frac{1}{2}$; здесь все три числа p , $\frac{m+1}{n}$, $\frac{m+1}{n} + p$ – не целые числа, следовательно, данный интеграл – «неберущийся».

Пример 3.

$$\int \frac{dx}{x^3 \cdot \sqrt[5]{1 + \frac{1}{x}}}.$$

Здесь $m = -3$, $n = -1$, $p = -\frac{1}{5}$; p – не целое число, $\frac{m+1}{n} = 2$ – целое число.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^3 \cdot \sqrt[5]{1 + \frac{1}{x}}} &= \left[t = \sqrt[5]{1 + \frac{1}{x}}; x = (t^5 - 1)^{-1}; x^3 = (t^5 - 1)^{-3}; dx = -5t^4 \cdot (t^5 - 1)^{-2} dt \right] = \\ &= 5 \cdot \int (t^3 - t^8) dt = \frac{5}{4} t^4 - \frac{5}{9} t^9 + C, \text{ где } t = \sqrt[5]{1 + \frac{1}{x}}. \end{aligned}$$

Пример 4.

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1 + x^3}}.$$

Здесь $m = 0$, $n = 3$, $p = -\frac{1}{3}$; p и $\frac{m+1}{n}$ – не целые числа, $\frac{m+1}{n} + p = 0$ – целое число.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt[3]{1 + x^3}} &= \left[t = \sqrt[3]{\frac{1 + x^3}{x^3}} = \sqrt[3]{1 + x^{-3}}; x = (t^3 - 1)^{-\frac{1}{3}}; dx = -t^2 (t^3 - 1)^{-\frac{4}{3}} \cdot dt \right] = \\ &= - \int \frac{t}{t^3 - 1} dt. \end{aligned}$$

Подынтегральное выражение «рационализировано». Далее применяем схему интегрирования рациональной функции.

$$\begin{aligned} \frac{t}{t^3 - 1} &= \frac{t}{(t-1)(t^2 + t + 1)} = \frac{A}{t-1} + \frac{Bt+C}{t^2 + t + 1}; \quad t = A(t^2 + t + 1) + (Bt + C)(t - 1); \\ t = 1 &\Rightarrow 1 = 3A \Rightarrow A = \frac{1}{3}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t = 0 &\Rightarrow 0 = \frac{1}{3} - C \Rightarrow C = \frac{1}{3}; \\
t = 2 &\Rightarrow 2 = \frac{7}{3} + 2B + \frac{1}{3} \Rightarrow B = -\frac{1}{3}. \\
-\int \frac{t}{t^3-1} dt &= \frac{1}{3} \int \left(\frac{t-1}{t^2+t+1} - \frac{1}{t-1} \right) dt = \frac{1}{3} \int \frac{t-1}{t^2+t+1} dt - \frac{1}{3} \ln|t-1| = \\
&= \frac{1}{3} \int \frac{t-1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dt - \frac{1}{3} \ln|t-1| = \left[\begin{array}{l} u = t + \frac{1}{2} \\ t = u - \frac{1}{2} \\ dt = du \end{array} \right] = \frac{1}{3} \int \frac{\left(u-\frac{1}{2}\right)-1}{u^2+\frac{3}{4}} du - \frac{1}{3} \ln|t-1| = \\
&= \frac{1}{3} \int \frac{u}{u^2+\frac{3}{4}} du - \frac{1}{2} \int \frac{1}{u^2+\frac{3}{4}} du - \frac{1}{3} \ln|t-1| = \frac{1}{6} \cdot \ln\left(u^2 + \frac{3}{4}\right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2u}{\sqrt{3}} - \\
&- \frac{1}{3} \ln|t-1| + C = \frac{1}{6} \cdot \ln(t^2 + t + 1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3} \ln|t-1| + C. \\
\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}} &= \frac{1}{6} \cdot \ln(t^2 + t + 1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3} \ln|t-1| + C, \text{ где } t = \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}.
\end{aligned}$$

3. Квадратичные иррациональности.

Рассмотрим интегралы вида: $\int R(x; \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$, где $R(x; y)$ – рациональная функция своих аргументов.

Исследуем сначала частные случаи таких интегралов.

1). Интегралы вида:

$$\int R(x; \sqrt{a^2 - x^2}) dx, \int R(x; \sqrt{a^2 + x^2}) dx, \int R(x; \sqrt{x^2 - a^2}) dx.$$

В частности, интегралы такого типа были рассмотрены в § 2:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx &= \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C, \\
\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx &= \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C, \\
\int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \frac{a^2}{2} \cdot \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + \frac{1}{2} x \cdot \sqrt{a^2 - x^2} + C, \\
\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx &= \frac{x}{2} \cdot \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \cdot \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C.
\end{aligned}$$

Некоторые интегралы можно свести к этому типу интегралов.

Пример 5.

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2 + b}} dx, \quad a \neq 0.$$

$$\text{Если } a > 0, \text{ то } \int \frac{1}{\sqrt{ax^2 + b}} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + \frac{b}{a}}} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| x + \sqrt{x^2 + \frac{b}{a}} \right| + C.$$

Если $a < 0$, то в этом случае должно быть $b > 0$ и

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2 + b}} dx = \frac{1}{\sqrt{-a}} \cdot \int \frac{1}{\sqrt{\frac{b}{-a} - x^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \operatorname{arcsin} \frac{x}{\sqrt{\frac{b}{|a|}}} + C = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \operatorname{arcsin} \left(x \cdot \sqrt{\frac{|a|}{b}} \right) + C.$$

Таким образом, получаем:

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+b}} dx = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| x + \sqrt{x^2 + \frac{b}{a}} \right| + C, & \text{если } a > 0 \\ \frac{1}{\sqrt{|a|}} \arcsin \left(x \cdot \sqrt{\frac{|a|}{b}} \right) + C, & \text{если } a < 0 \end{cases}.$$

В общем виде эти интегралы приводятся к интегралам вида $\int R(\sin t; \cos t) dt$ с помощью тригонометрических подстановок:

$$x = a \cdot \sin t, \quad x = a \cdot \operatorname{tg} t \quad \text{или} \quad x = \frac{a}{\cos t}.$$

Как будет показано в §5, интегралы от функций $R(\sin t; \cos t)$, рационально зависящих от функций $\sin t$ и $\cos t$, берутся в конечном виде.

2). Интегралы вида:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad \int \sqrt{ax^2+bx+c} dx, \quad \int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx.$$

Эти интегралы вычисляются путем *выделения полного квадрата* из квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ и дальнейшей замены переменной.

Пример 6.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+2x+1}} &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{16}}} = \begin{bmatrix} t = x + \frac{1}{4} \\ x = t - \frac{1}{4} \\ dx = dt \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+\frac{3}{16}}} = \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| t + \sqrt{t^2+\frac{3}{16}} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| x + \frac{1}{4} + \sqrt{4x^2+2x+1} \right| + C. \end{aligned}$$

Пример 7.

$$\begin{aligned} \int \frac{x+4}{\sqrt{6-2x-x^2}} dx &= \int \frac{x+4}{\sqrt{-(x^2+2x-6)}} dx = \int \frac{x+4}{\sqrt{-((x+1)^2-7)}} dx = \int \frac{x+4}{\sqrt{7-(x+1)^2}} dx = \\ &= \begin{bmatrix} t = x+1 \\ x = t-1 \\ dx = dt \end{bmatrix} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+\frac{3}{16}}} = \int \frac{t+3}{\sqrt{7-t^2}} dt = \int \frac{t}{\sqrt{7-t^2}} dt + \int \frac{3}{\sqrt{7-t^2}} dt = -\frac{1}{2} \int \frac{d(7-t^2)}{\sqrt{7-t^2}} + \\ &+ 3 \int \frac{dt}{\sqrt{7-t^2}} = -\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{7-t^2} + 3 \arcsin \frac{t}{\sqrt{7}} + C = 3 \arcsin \frac{x+1}{\sqrt{7}} - \sqrt{6-2x-x^2} + C. \end{aligned}$$

3). Интегралы вида:

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx, \quad \text{где } P_n(x) \text{ — многочлен степени } n.$$

Эти интегралы вычисляются методом *неопределенных коэффициентов* с использованием формулы:

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = Q_{n-1}(x) \cdot \sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

где λ — неопределенный коэффициент, $Q_{n-1}(x)$ — многочлен степени $(n-1)$ с неопределенными коэффициентами.

Для нахождения неопределенных коэффициентов нужно продифференцировать обе части этого равенства и упростить полученное выражение:

$$\begin{aligned}\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} &= (Q_{n-1}(x) \cdot \sqrt{ax^2+bx+c})' + \frac{\lambda}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \\ \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} &= Q'_{n-1}(x) \cdot \sqrt{ax^2+bx+c} + Q_{n-1}(x) \cdot \frac{ax+\frac{b}{2}}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + \frac{\lambda}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \\ P_n(x) &= Q'_{n-1}(x) \cdot (ax^2+bx+c) + Q_{n-1}(x) \cdot \left(ax + \frac{b}{2}\right) + \lambda.\end{aligned}$$

Затем следует приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x многочленов, полученных в обеих частях этого равенства.

Пример 8.

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}} dx &= (Ax+B) \cdot \sqrt{1-2x-x^2} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}, \\ \frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}} &= ((Ax+B) \cdot \sqrt{1-2x-x^2})' + \frac{\lambda}{\sqrt{1-2x-x^2}}, \\ \frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}} &= A \cdot \sqrt{1-2x-x^2} + (Ax+B) \cdot \frac{-x-1}{\sqrt{1-2x-x^2}} + \frac{\lambda}{\sqrt{1-2x-x^2}}, \\ x^2 &= A \cdot (1-2x-x^2) + (Ax+B) \cdot (-x-1) + \lambda, \\ x^2 &= A - 2Ax - Ax^2 - Ax^2 - Ax - Bx - B + \lambda.\end{aligned}$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x :

$$\begin{cases} -2A = 1 \\ -3A - B = 0 \\ A - B + \lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{2} \\ B = \frac{3}{2} \\ \lambda = 2 \end{cases}.$$

$$\begin{aligned}\text{Следовательно: } \int \frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}} dx &= \left(-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\right) \cdot \sqrt{1-2x-x^2} + 2 \int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}} = \\ &= \left(-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\right) \cdot \sqrt{1-2x-x^2} + 2 \int \frac{dx}{\sqrt{2-(x+1)^2}} = \\ &= \left(-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\right) \cdot \sqrt{1-2x-x^2} + 2 \arcsin \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C.\end{aligned}$$

4). Интегралы вида:

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^k \cdot \sqrt{ax^2+bx+c}}, \text{ где } k \text{ — натуральное число.}$$

Такие интегралы «рационализируются» с помощью замены переменной: $t = \frac{1}{x-\alpha}$.

Действительно: $x - \alpha = \frac{1}{t}$, $x = \alpha + \frac{1}{t}$, $dx = -\frac{dt}{t^2}$, $ax^2 + bx + c =$

$$= a\left(\alpha + \frac{1}{t}\right)^2 + b\left(\alpha + \frac{1}{t}\right) + c = \frac{\tilde{a}t^2 + \tilde{b}t + \tilde{c}}{t^2} \Rightarrow \sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{\sqrt{\tilde{a}t^2 + \tilde{b}t + \tilde{c}}}{t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{(x-\alpha)^k \sqrt{ax^2+bx+c}} = \int \frac{-\frac{dt}{t^2} \cdot t^k}{\frac{\sqrt{\tilde{a}t^2+\tilde{b}t+\tilde{c}}}{t}} = - \int \frac{t^{k-1} dt}{\sqrt{\tilde{a}t^2+\tilde{b}t+\tilde{c}}}.$$

В результате получаем интеграл вида $\int \frac{P_n(t)}{\sqrt{at^2+bt+c}} dt$, рассмотренный в предыдущем пункте.

Пример 9.

$$\int \frac{dx}{(x-1)^3 \sqrt{x^2-2x-1}} = \left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{x-1} \Rightarrow x = 1 + \frac{1}{t} \Rightarrow dx = -\frac{dt}{t^2} \\ x^2 - 2x - 1 = \left(1 + \frac{1}{t}\right)^2 - 2\left(1 + \frac{1}{t}\right) - 1 = \frac{1-2t^2}{t^2} \end{array} \right] = \int \frac{-\frac{dt}{t^2} \cdot t^3}{\frac{\sqrt{1-2t^2}}{t}} =$$

$$= \int \frac{-t^2 dt}{\sqrt{1-2t^2}}. \text{ Далее применим метод неопределенных коэффициентов.}$$

$$\int \frac{-t^2 dt}{\sqrt{1-2t^2}} = (At+B) \cdot \sqrt{1-2t^2} + \lambda \int \frac{dt}{\sqrt{1-2t^2}},$$

$$\frac{-t^2}{\sqrt{1-2t^2}} = \left((At+B) \cdot \sqrt{1-2t^2} \right)' + \frac{\lambda}{\sqrt{1-2t^2}},$$

$$\frac{-t^2}{\sqrt{1-2t^2}} = A \cdot \sqrt{1-2t^2} + (At+B) \cdot \frac{-2t}{\sqrt{1-2t^2}} + \frac{\lambda}{\sqrt{1-2t^2}},$$

$$-t^2 = A \cdot (1-2t^2) + (At+B) \cdot (-2t) + \lambda,$$

$$-t^2 = A - 2At^2 - 2At^2 - 2Bt + \lambda.$$

$$\begin{cases} -4A = -1 \\ -2B = 0 \\ A + \lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{4} \\ B = 0 \\ \lambda = -\frac{1}{4} \end{cases}.$$

$$\int \frac{-t^2 dt}{\sqrt{1-2t^2}} = \frac{1}{4} t \cdot \sqrt{1-2t^2} - \frac{1}{4} \int \frac{dt}{\sqrt{1-2t^2}} = \frac{1}{4} t \cdot \sqrt{1-2t^2} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \int \frac{dt}{\sqrt{\frac{1}{2}-t^2}} =$$

$$= \frac{1}{4} t \cdot \sqrt{1-2t^2} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \arcsin(t\sqrt{2}) + C = \frac{\sqrt{x^2-2x-1}}{4(x-1)^2} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{x-1}\right) + C.$$

Рассмотрим общий случай интегралов вида: $\int R(x; \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$.

Если ни один из разобранных частных случаев не имеет места, то можно предложить универсальный метод для таких интегралов – метод *подстановок Эйлера*.

I подстановка **Эйлера**: если $a > 0$, то

$$t = \sqrt{ax^2+bx+c} + \sqrt{a} \cdot x \text{ или } t = \sqrt{ax^2+bx+c} - \sqrt{a} \cdot x.$$

II подстановка **Эйлера**: если $c > 0$, то

$$t = \frac{1}{x} (\sqrt{ax^2+bx+c} - \sqrt{c}) \text{ или } t = \frac{1}{x} (\sqrt{ax^2+bx+c} + \sqrt{c}).$$

III подстановка **Эйлера**: если $D = b^2 - 4ac > 0$, то

$t = \frac{1}{x-\alpha} \sqrt{ax^2 + bx + c}$ или $t = \frac{1}{x-\beta} \sqrt{ax^2 + bx + c}$, где α, β – корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$.

Эйлеровы подстановки всегда «рационализируют» подынтегральное выражение (доказательство можно найти в [2], [3]) и, следовательно, интегралы такого типа берутся в конечном виде.

Однако, как правило, эти подстановки приводят к достаточно громоздким вычислениям. Поэтому к ним целесообразно прибегать только в тех случаях, когда другие методы не применимы.

Пример 10.

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}.$$

Здесь $a > 0$, применим I-ую подстановку Эйлера: $t = \sqrt{x^2 + x + 1} + x$; тогда имеем:

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = t - x \Rightarrow x^2 + x + 1 = (t - x)^2 \Rightarrow x^2 + x + 1 = t^2 - 2tx + x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + 1 = t^2 - 2tx \Rightarrow x(1 + 2t) = t^2 - 1 \Rightarrow x = \frac{t^2 - 1}{1 + 2t} \Rightarrow dx = \frac{2t^2 + 2t + 2}{(1 + 2t)^2} dt.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}} &= \int \frac{1}{t} \cdot \frac{2t^2 + 2t + 2}{(1 + 2t)^2} dt = \int \frac{2t^2 + 2t + 2}{t \cdot (1 + 2t)^2} dt = \int \left(\frac{2}{t} - \frac{3}{1 + 2t} - \frac{3}{(1 + 2t)^2} \right) dt = \\ &= 2\ln|t| - \frac{3}{2}\ln|1 + 2t| + \frac{3}{2 \cdot (1 + 2t)} + C, \text{ где } t = \sqrt{x^2 + x + 1} + x. \end{aligned}$$

§ 5. Интегрирование тригонометрических функций.

Нам известны следующие интегралы от тригонометрических функций (см. § 1 и 2):

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int \operatorname{ctg} x \, dx = \ln|\sin x| + C$$

$$\int \operatorname{tg}^2 x \, dx = \operatorname{tg} x - x + C$$

$$\int \operatorname{ctg}^2 x \, dx = -\operatorname{ctg} x - x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C$$

$$\int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

$$\int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

$$\int \sin x \cdot \cos x \, dx = \frac{1}{2}\sin^2 x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos x} = \ln|\operatorname{tg} x| + C.$$

Рассмотрим другие случаи конечного интегрирования тригонометрических функций.

1. Интегралы вида: $\int \sin \alpha x \cdot \cos \beta x \, dx$, $\int \sin \alpha x \cdot \sin \beta x \, dx$, $\int \cos \alpha x \cdot \cos \beta x \, dx$.

Для отыскания интегралов этого вида применяются формулы тригонометрии:

$$\begin{aligned}\sin \alpha x \cdot \cos \beta x &= \frac{1}{2} (\sin (\alpha + \beta)x + \sin (\alpha - \beta)x), \\ \sin \alpha x \cdot \sin \beta x &= \frac{1}{2} (\cos (\alpha - \beta)x - \cos (\alpha + \beta)x), \\ \cos \alpha x \cdot \cos \beta x &= \frac{1}{2} (\cos (\alpha + \beta)x + \cos (\alpha - \beta)x).\end{aligned}$$

Пример 1.

$$\int \sin 3x \cdot \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} \int (\sin 5x + \sin x) \, dx = -\frac{1}{10} \cos 5x - \frac{1}{2} \cos x + C.$$

2. Интегралы от функций, рационально зависящих от функций $\sin x$ и $\cos x$:

$$\int R(\sin x; \cos x) \, dx.$$

Эти интегралы «рационализируются» с помощью, так называемой *универсальной тригонометрической подстановки* [у.т.п.]: $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ ($-\pi < x < \pi$).

Действительно, по формулам тригонометрии имеем:

$$\begin{aligned}\sin x &= \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \text{ и кроме того} \\ \frac{x}{2} &= \operatorname{arc} \operatorname{tg} t \Rightarrow x = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} t \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}.\end{aligned}$$

Следовательно: $\int R(\sin x; \cos x) \, dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}; \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2} = \int \tilde{R}(t) \, dt$,
где $\tilde{R}(t)$ – рациональная функция.

Пример 2.

$$\int \frac{dx}{2 + \cos x} = [\text{у.т.п.}] = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{3+t^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{t}{\sqrt{3}} + C = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} \right) + C.$$

Пример 3.

$$\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x} = [\text{у.т.п.}] = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1 + \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{1+t} = \ln|1+t| + C = \ln \left| 1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

Универсальная тригонометрическая подстановка приводит, как правило, к громоздким вычислениям (в отличие от приведенных примеров).

Иногда целесообразны другие подстановки, например:

- если функция $R(\sin x; \cos x)$ нечетна относительно $\sin x$, т.е.

$R(-\sin x; \cos x) = -R(\sin x; \cos x)$, то рекомендуется подстановка $t = \cos x$;

- если функция $R(\sin x; \cos x)$ нечетна относительно $\cos x$, т.е.

$R(\sin x; -\cos x) = -R(\sin x; \cos x)$, то рекомендуется подстановка $t = \sin x$;

- если функция $R(\sin x; \cos x)$ четна относительно $\sin x$ и $\cos x$, т.е.

$R(-\sin x; -\cos x) = R(\sin x; \cos x)$, то рекомендуется подстановка $t = \operatorname{tg} x$;

- если функция $R(\sin x; \cos x) = \tilde{R}(\operatorname{tg} x)$, то также рекомендуется подстановка $t = \operatorname{tg} x$.

Пример 4.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos 2x} &= \int \frac{dx}{\sin x \cdot (2\cos^2 x - 1)} = [t = \cos x] = \int \frac{dt}{(t^2 - 1) \cdot (2t^2 - 1)} = \int \left(\frac{1}{t^2 - 1} - \frac{1}{t^2 - \frac{1}{2}} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2}t+1}{\sqrt{2}t-1} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2}\cos x + 1}{\sqrt{2}\cos x - 1} \right| + C = \\ &= \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1 + \sqrt{2}\cos x}{1 - \sqrt{2}\cos x} \right| + C. \end{aligned}$$

Пример 5.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1 + \sin^2 x} &= \left[t = \operatorname{tg} x \Rightarrow x = \operatorname{arc} \operatorname{tg} t \Rightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2} \right] = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{1 + \frac{t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{2t^2 + 1} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + \frac{1}{2}} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg}(t\sqrt{2}) + C = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg}(\operatorname{tg} x \cdot \sqrt{2}) + C. \end{aligned}$$

3. Интегралы вида: $\int \sin^\alpha x \cdot \cos^\beta x dx$, где α, β – рациональные числа.

В случае, когда α и β – целые числа, имеем интеграл вида $\int R(\sin x; \cos x) dx$, разобранный в предыдущем пункте.

Выясним, при каких еще значениях α и β интегралы такого типа являются «берущимися».

$$\begin{aligned} \text{Преобразуем подынтегральное выражение: } \sin^\alpha x \cdot \cos^\beta x dx &= \\ &= \sin^{\alpha-1} x \cdot \cos^{\beta-1} x \cdot \sin x \cdot \cos x dx = \frac{1}{2} (\sin^2 x)^{\frac{\alpha-1}{2}} \cdot (\cos^2 x)^{\frac{\beta-1}{2}} \cdot d(\sin^2 x). \end{aligned}$$

Сделав замену переменной: $t = \sin^2 x$, получим: $\int \sin^\alpha x \cdot \cos^\beta x dx =$

$$= \frac{1}{2} \int t^{\frac{\alpha-1}{2}} \cdot (1-t)^{\frac{\beta-1}{2}} dt, \text{ т.е. получим интеграл от дифференциального бинома вида:}$$

$$\int t^m (at^n + b)^p dt, \text{ где } m = \frac{\alpha-1}{2}, n = 1, p = \frac{\beta-1}{2} \text{ (см. § 4).}$$

Данный интеграл берется в конечном виде, если оказывается целым хотя бы одно из следующих чисел: $p, \frac{m+1}{n}, \frac{m+1}{n} + p$, т.е. если оказывается целым хотя бы одно из чисел $p = \frac{\beta-1}{2}, m = \frac{\alpha-1}{2}$ или $p + m = \frac{\alpha+\beta}{2}$.

Это означает, что интеграл $\int \sin^\alpha x \cdot \cos^\beta x dx$ является «берущимся» тогда и только тогда, когда хотя бы одно из чисел α или β есть целое нечетное число, либо когда $\alpha + \beta$ есть целое четное число.

Замечание.

Подстановка $t = \sin^2 x$, как правило, приводит к громоздким вычислениям. В конкретных примерах лучше применять другие подстановки.

Пример 6.

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\sin x} \cdot \cos^3 x dx &= [t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx] = \int \sqrt{t} \cdot (1 - t^2) dt = \\ &= \int \sqrt{t} dt - \int t^{\frac{5}{2}} dt = \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{7} t^{\frac{7}{2}} + C, \text{ где } t = \sin x. \end{aligned}$$

Рассмотрим примеры интегралов $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$, где m, n — целые числа.

Если m и n — натуральные числа, причем хотя бы одно из них — нечетное, то применяется подстановка: $t = \cos x$ (при нечетном m) или $t = \sin x$ (при нечетном n); если же оба числа — четные, то применяются сначала формулы понижения степени:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \quad \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x.$$

Пример 7.

$$\begin{aligned} \int \sin^4 x \cdot \cos^2 x dx &= \int (\sin x \cdot \cos x)^2 \cdot \sin^2 x dx = \int \frac{1}{4} \sin^2 2x \cdot \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) dx = \\ &= \frac{1}{8} \int \sin^2 2x dx - \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \cdot \cos 2x dx = \frac{1}{8} \int \frac{1}{2} (1 - \cos 4x) dx - \frac{1}{16} \int \sin^2 2x \cdot d(\sin 2x) = \\ &= \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x - \frac{1}{48} \sin^3 2x + C. \end{aligned}$$

Если m и n — отрицательные целые числа, причем $m + n$ — четное, то применяется подстановка: $t = \operatorname{tg} x$.

Пример 8.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\cos^3 x \cdot \sin x} &= \int \frac{\cos x}{\cos^2 x \cdot \sin x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x) \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \\ &= \left[t = \operatorname{tg} x \Rightarrow dt = \frac{dx}{\cos^2 x} \right] = \int (1 + t^2) \cdot \frac{1}{t} \cdot dt = \int \frac{1}{t} dt + \int t dt = \ln |t| + \frac{t^2}{2} + C = \\ &= \ln |\operatorname{tg} x| + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + C. \end{aligned}$$

4. Интегралы вида:

$$\int \sin^n x dx, \int \cos^n x dx, \int \frac{1}{\sin^n x} dx, \int \frac{1}{\cos^n x} dx, \int \operatorname{tg}^n x dx, \int \operatorname{ctg}^n x dx,$$

где n — натуральное число, $n \geq 3$.

Пусть $I_n = \int \sin^n x dx$; при $n = 1$ и 2 имеем:

$$I_1 = \int \sin x \, dx = -\cos x + C, \quad I_2 = \int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

Пусть $n \geq 3$; применим формулу интегрирования по частям.

$$\begin{aligned} I_n &= \int \sin^n x \, dx = \int \sin^{n-1} x \cdot \sin x \, dx = \\ &\left[\begin{array}{l} u = \sin^{n-1} x \Rightarrow du = (n-1)\sin^{n-2} x \cdot \cos x \, dx \\ dv = \sin x \, dx \Rightarrow v = -\cos x \end{array} \right] = -\sin^{n-1} x \cdot \cos x + \\ &+ (n-1) \cdot \int \sin^{n-2} x \cdot \cos^2 x \, dx = -\sin^{n-1} x \cdot \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \cdot (1 - \sin^2 x) \, dx = \\ &= -\sin^{n-1} x \cdot \cos x + (n-1) \cdot (\int \sin^{n-2} x \, dx - \int \sin^n x \, dx) = -\sin^{n-1} x \cdot \cos x + \\ &+ (n-1) \cdot (I_{n-2} - I_n). \end{aligned}$$

Итак, получаем: $I_n = -\sin^{n-1} x \cdot \cos x + (n-1) \cdot (I_{n-2} - I_n)$ или:

$$\boxed{I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} - \frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cdot \cos x + C}, \text{ где } I_n = \int \sin^n x \, dx, \quad n = 3, 4, \dots$$

Например:

$$\int \sin^3 x \, dx = I_3 = \frac{2}{3} I_1 - \frac{1}{3} \sin^2 x \cdot \cos x + C = -\frac{2}{3} \cos x - \frac{1}{3} \sin^2 x \cdot \cos x + C.$$

Аналогично выводятся формулы:

$$\boxed{J_n = \frac{n-1}{n} J_{n-2} - \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \cdot \sin x + C}, \text{ где } J_n = \int \cos^n x \, dx, \quad n = 3, 4, \dots$$

$$(J_1 = \int \cos x \, dx = \sin x + C, \quad J_2 = \int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C);$$

$$\boxed{K_n = \frac{n-2}{n-1} K_{n-2} - \frac{1}{n-1} \cdot \frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} + C}, \text{ где } K_n = \int \frac{1}{\sin^n x} \, dx, \quad n = 3, 4, \dots$$

$$(K_1 = \int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C, \quad K_2 = \int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\operatorname{ctg} x + C);$$

$$\boxed{L_n = \frac{n-2}{n-1} L_{n-2} - \frac{1}{n-1} \cdot \frac{\sin x}{\cos^{n-1} x} + C}, \text{ где } L_n = \int \frac{1}{\cos^n x} \, dx, \quad n = 3, 4, \dots$$

$$(L_1 = \int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C, \quad L_2 = \int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \operatorname{tg} x + C);$$

$$\boxed{P_n = \frac{1}{n-1} \cdot \operatorname{tg}^{n-1} x - P_{n-2} + C}, \text{ где } P_n = \int \operatorname{tg}^n x \, dx, \quad n = 3, 4, \dots$$

$$(P_1 = \int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln |\cos x| + C, \quad P_2 = \int \operatorname{tg}^2 x \, dx = \operatorname{tg} x - x + C);$$

$$\boxed{Q_n = -\frac{1}{n-1} \cdot \operatorname{ctg}^{n-1} x - Q_{n-2} + C}, \text{ где } Q_n = \int \operatorname{ctg}^n x \, dx, \quad n = 3, 4, \dots$$

$$(Q_1 = \int \operatorname{ctg} x \, dx = \ln |\sin x| + C, \quad Q_2 = \int \operatorname{ctg}^2 x \, dx = -\operatorname{ctg} x - x + C).$$

Глава 5. Определенный интеграл

Содержание

§ 1. Понятие определенного интеграла	120
§ 2. Условия интегрируемости функции	124
§ 3. Свойства определенного интеграла	128
§ 4. Основная формула интегрального исчисления	133
§ 5. Методы вычисления определенных интегралов	136

§ 1. Понятие определенного интеграла.

Рассмотрим задачи физического и геометрического содержания, которые приводят к понятию *определенного интеграла*.

Задача 1 (о пройденном пути).

Пусть материальная точка движется прямолинейно с переменной скоростью $v(t)$, $t \in [0; T]$. Требуется найти путь s , пройденный ею за промежуток времени от 0 до T .

Решение.

Разбиваем промежуток времени $[0; T]$ произвольным образом на n частичных промежутков $[t_{k-1}; t_k]$, $k = 1, 2, \dots, n$: $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = T$.

Пусть $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$, $\lambda = \max \{\Delta t_1, \Delta t_2, \dots, \Delta t_n\}$ — *ранг разбиения* (дробления).

Предполагаем частичные промежутки столь малыми, что в течение промежутка $[t_{k-1}; t_k]$ скорость $v(t)$ точки меняется незначительно, и можно приближенно считать ее постоянной, равной значению $v(\tau_k)$ в некоторый момент времени $\tau_k \in [t_{k-1}; t_k]$.

Тогда значение пути Δs_k , пройденного точкой за промежуток времени от $t = t_{k-1}$ до $t = t_k$ приближенно вычисляется по формуле:

$$\Delta s_k \approx v(\tau_k) \cdot (t_k - t_{k-1}) = v(\tau_k) \cdot \Delta t_k.$$

Весь путь s , пройденный точкой за промежуток времени от 0 до T , будет приближенно выражаться суммой:

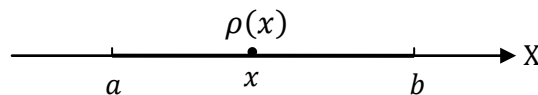
$$s \approx v(\tau_1) \cdot \Delta t_1 + v(\tau_2) \cdot \Delta t_2 + \dots + v(\tau_n) \cdot \Delta t_n = \sum_{k=1}^n v(\tau_k) \cdot \Delta t_k.$$

Чем меньше частичные промежутки времени $[t_{k-1}; t_k]$, т.е. чем меньше *ранг разбиения* λ , тем точнее это приближенное равенство. Точное равенство достигается в пределе при $\lambda \rightarrow 0$:

$$s = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n v(\tau_k) \cdot \Delta t_k.$$

Задача 2 (о массе неоднородного стержня).

Имеется прямолинейный стержень, расположенный на отрезке $[a; b]$ оси абсцисс с линейной плотностью распределения массы $\rho(x)$. Требуется найти массу m этого стержня.



Решение.

Разбиваем стержень произвольным образом на n участков $[x_{k-1}; x_k]$, $k = 1, \dots, n$: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$. Пусть $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$,

$\lambda = \max \{\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n\}$ — *ранг разбиения* (дробления).

Предполагаем эти участки столь малыми, что на них линейная плотность распределения массы $\rho(x)$ меняется незначительно, и можно приближенно считать ее постоянной, равной значению $\rho(c_k)$ в некоторой точке $c_k \in [x_{k-1}; x_k]$.

Тогда масса Δm_k участка $[x_{k-1}; x_k]$ приближенно вычисляется по формуле:

$$\Delta m_k \approx \rho(c_k) \cdot (x_k - x_{k-1}) = \rho(c_k) \cdot \Delta x_k.$$

Масса m всего стержня будет приближенно выражаться суммой:

$$m \approx \rho(c_1) \cdot \Delta x_1 + \rho(c_2) \cdot \Delta x_2 + \dots + \rho(c_n) \cdot \Delta x_n = \sum_{k=1}^n \rho(c_k) \cdot \Delta x_k.$$

Чем мельче участки $[x_{k-1}; x_k]$, т.е. чем меньше *ранг разбиения* λ , тем точнее это приближенное равенство. Точное равенство достигается в пределе при $\lambda \rightarrow 0$:

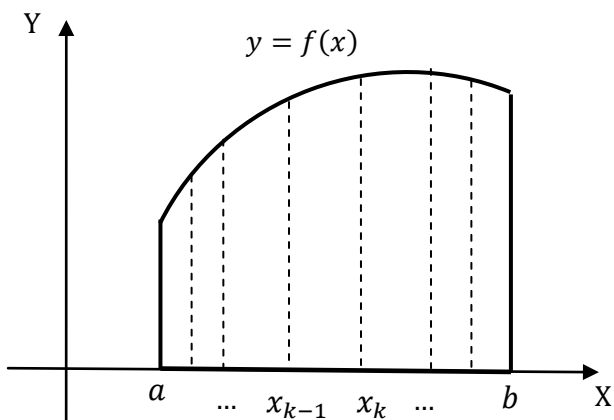
$$m = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \rho(c_k) \cdot \Delta x_k.$$

Задача 3 (о площади криволинейной трапеции).

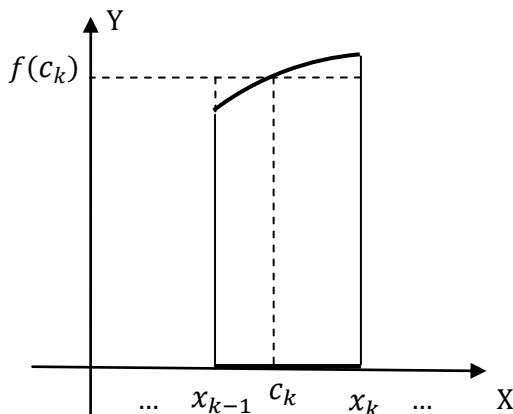
Рассматривается *криволинейная трапеция* — фигура на плоскости, ограниченная графиком функции $y = f(x)$, осью абсцисс и прямыми $x = a$ и $x = b$. Предполагается, что $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a; b]$. Требуется найти площадь S этой криволинейной трапеции.

Решение.

Разбиваем промежуток $[a; b]$ произвольным образом на n частичных промежутков $[x_{k-1}; x_k]$, $k = 1, \dots, n$: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$. Пусть $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\lambda = \max \{\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n\}$ — *ранг разбиения* (дробления).



Через точки дробления проведем отрезки прямых, параллельных оси ординат. Криволинейная трапеция разобьется при этом на n полос. Площадь k -той полосы ΔS_k приближенно равна площади прямоугольника с основанием Δx_k и высотой $f(c_k)$, где $c_k \in [x_{k-1}; x_k]$: $\Delta S_k \approx f(c_k) \cdot \Delta x_k$.



Площадь S всей криволинейной трапеции будет приближенно выражаться суммой:

$$S \approx f(c_1) \cdot \Delta x_1 + f(c_2) \cdot \Delta x_2 + \dots + f(c_n) \cdot \Delta x_n = \sum_{k=1}^n f(c_k) \cdot \Delta x_k.$$

Чем меньше частичные промежутки $[x_{k-1}; x_k]$, т.е. чем меньше *ранг разбиения* λ , тем точнее это приближенное равенство. Точное равенство достигается в пределе при $\lambda \rightarrow 0$:

$$S = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(c_k) \cdot \Delta x_k.$$

Разнообразные задачи в математическом анализе и в его приложениях, подобные разобранным выше, приводят к необходимости рассмотрения сумм специального вида, а также к понятию пределов нового типа.

Понятие определенного интеграла.

Пусть имеется функция $y = f(x)$, заданная в промежутке $[a; b]$.

Рассмотрим конечный набор точек $\{x_k\}_{k=0}^n$ таких, что

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Этот набор точек будем называть *разбиением* (или *дроблением*) промежутка $[a; b]$ и обозначать: $\{x_k\}_{k=0}^n$. В результате такого разбиения возникает набор *частичных промежутков* $[x_{k-1}; x_k]$, $k = 1, \dots, n$, объединение которых составляет весь промежуток:

$$[a; b] = [x_0; x_1] \cup [x_1; x_2] \cup \dots \cup [x_{n-1}; x_n] = \bigcup_{k=1, \dots, n} [x_{k-1}; x_k].$$

Пусть $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $k = 1, \dots, n$ — длины частичных промежутков.

Число $\lambda = \max \{\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n\}$ — максимальная из длин частичных промежутков, называется *рангом разбиения* (дробления). Ранг разбиения λ зависит от числа n и от самого *способа разбиения*.

Замечание.

Разбиение промежутка можно производить разнообразными способами, например:

если $x_k = a + \frac{b-a}{n} \cdot k$, $k = 1, \dots, n$ — то имеем *равномерное* разбиение, здесь $\Delta x_k = \lambda = \frac{b-a}{n}$, $\lambda \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$;

если $x_1 = \frac{a+b}{2}$ — середина промежутка $[a; b]$, а $\{x_2, x_3, \dots, x_n\}$ — произвольное разбиение $\left[\frac{a+b}{2}; b\right]$, то это разбиение не является равномерным, здесь $\lambda = \frac{b-a}{2} = \text{const}$ и $\lambda \nrightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Далее в каждом частичном промежутке $[x_{k-1}; x_k]$ выбираем произвольную точку $c_k \in [x_{k-1}; x_k]$, $k = 1, \dots, n$; набор точек $\{c_k\}_{k=1}^n$ будем называть набором *промежуточных точек*.

Вычисляем значения функции $y = f(x)$ в промежуточных точках и составляем суммы:

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^n f(c_k) \cdot \Delta x_k.$$

Суммы σ_n называются *интегральными суммами* (или суммами **Римана**).

Заметим, что интегральные суммы σ_n зависят не только от числа n , но и от способа разбиения $\{x_k\}_{k=0}^n$ и от выбора промежуточных точек $\{c_k\}_{k=1}^n$.

Далее введем понятие предела $I = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma_n$.

Определение.

Число I называется *пределом* интегральных сумм σ_n , если для $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ такое, что для любого разбиения промежутка $[a; b]$ с рангом разбиения $\lambda < \delta$ и при любом выборе промежуточных точек $\{c_k\}_{k=1}^n$ выполняется неравенство $|\sigma_n - I| < \varepsilon$.

Таким образом, запись: $I = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma_n$ — означает, что при $\lambda \rightarrow 0$ этот предел существует, и он не зависит ни от способа разбиения, ни от выбора промежуточных точек.

Замечание.

Условие: $\lambda \rightarrow 0$ — нельзя заменить более понятным условием: $n \rightarrow \infty$, так как оно не гарантирует, что $\lambda \rightarrow 0$ (см. Замечание выше). Другими словами, условие: $n \rightarrow \infty$ — является лишь необходимым, но не достаточным условием для того, чтобы $\lambda \rightarrow 0$.

Для введенного здесь нового типа предела остаются верными все их свойства, рассмотренные в разделе «Введение в математический анализ» (см. [9], главы 3 и 4).

Определение.

Конечный предел интегральных сумм при $\lambda \rightarrow 0$ называется *определенным интегралом* от функции $f(x)$ по промежутку $[a; b]$. Обозначение:

$$\int_a^b f(x) dx, \text{ где}$$

a, b — нижний и верхний пределы интегрирования, $\int$ — знак интеграла,
 x — переменная интегрирования, $f(x)$ — *подынтегральная функция*,
 $f(x)dx$ — *подынтегральное выражение*.

Таким образом, $\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma_n$ или:

$$\boxed{\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(c_k) \cdot \Delta x_k.}$$

Функция $f(x)$, для которой существует *определенный интеграл*, называется *интегрируемой* на промежутке $[a; b]$.

Обозначение: $f(x) \in R([a; b])$, т.е. $f(x)$ принадлежит классу R на промежутке $[a; b]$.

Теперь можно дать решения задач 1 ÷ 3, разобранных в начале параграфа, следующими формулами:

1) $s = \int_0^T v(t) dt$ — путь, пройденный материальной точкой с заданной скоростью $v(t)$ за промежуток времени от 0 до T ;

2) $m = \int_a^b \rho(x) dx$ — масса неоднородного стержня с линейной плотностью распределения массы $\rho(x)$;

3) $S = \int_a^b f(x) dx$ — площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$.

В последней формуле заключен *геометрический смысл* определенного интеграла, а в первых двух формулах — его *физический смысл*.

Пример 1.

$$\int_a^b 0 dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n 0 \cdot \Delta x_k = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n 0 = \lim_{\lambda \rightarrow 0} 0 = 0 \Rightarrow \boxed{\int_a^b 0 dx = 0}.$$

Пример 2.

$$\begin{aligned} \int_a^b 1 dx &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n 1 \cdot \Delta x_k = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \Delta x_k = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} (x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + x_3 - x_2 + \dots + x_n - x_{n-1}) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} (x_n - x_0) = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} (b - a) = b - a. \end{aligned}$$

Таким образом, имеем: $\boxed{\int_a^b 1 dx = b - a}.$

Пример 3.

$\int_a^b D(x) dx$, где $D(x)$ — функция **Дирихле**:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x - \text{рациональное число} \\ 0, & \text{если } x - \text{иррациональное число} \end{cases}.$$

Для произвольного разбиения $\{x_k\}_{k=0}^n$ промежутка $[a; b]$ в качестве промежуточных точек $\{c_k\}$ выберем в одном случае только рациональные точки, а в другом случае — только иррациональные точки.

Тогда в одном случае имеем: $\sigma_n = \sum_{k=1}^n f(c_k) \cdot \Delta x_k = \sum_{k=1}^n 1 \cdot \Delta x_k = b - a$, а в другом случае: $\sigma_n = \sum_{k=1}^n f(c_k) \cdot \Delta x_k = \sum_{k=1}^n 0 \cdot \Delta x_k = 0$.

Значит, $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma_n$ — не существует, так как он не должен зависеть от выбора промежуточных точек.

Следовательно, функция **Дирихле** не интегрируема ни на каком промежутке.

§ 2. Условия интегрируемости функции.

Необходимое условие интегрируемости.

Теорема 1.

Если функция $f(x)$ интегрируема на промежутке $[a; b]$, то она ограничена на $[a; b]$.

Доказательство.

Если функция $f(x)$ была бы не ограничена на $[a; b]$, то — при любом разбиении промежутка на части — она сохранила бы это свойство, хотя бы в одном из частичных промежутков.

Тогда за счет выбора в этой части промежуточной точки c_k можно было бы сделать значение $f(c_k)$, а вместе с ним и значение интегральной суммы σ_n , сколь угодно большим. Но в этом случае конечного предела для σ_n существовать не могло бы.

Итак, если функция интегрируема, то она и ограничена. Теорема доказана.

Обратное утверждение не имеет места. Например, функция **Дирихле** $D(x)$ — ограничена, но не интегрируема ни на каком промежутке.

Следствие.

Если функция $f(x)$ не ограничена на $[a; b]$, то она и не интегрируема на $[a; b]$.

Например, функция $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in (0; 1] \\ A, & x = 0 \end{cases}$, где A — любое число, — не интегрируема на промежутке $[0; 1]$, т.к. она не ограничена на этом промежутке.

В дальнейшем изложении функция $f(x)$ предполагается ограниченной:

$$m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a; b].$$

Для получения признаков интегрируемости функции введем новые понятия.

Для произвольного разбиения $\{x_k\}_{k=0}^n$ промежутка $[a; b]$ введем обозначения:

$$m_k = \inf \{f(x), x \in [x_{k-1}; x_k]\}, \quad M_k = \sup \{f(x), x \in [x_{k-1}; x_k]\}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Очевидно, что $m_k \leq f(x) \leq M_k \quad \forall x \in [x_{k-1}; x_k], k = 1, \dots, n.$

Определение.

Сумма $s = \sum_{k=1}^n m_k \cdot \Delta x_k$ называется *нижней интегральной суммой* (нижней суммой **Дарбу**);

Сумма $S = \sum_{k=1}^n M_k \cdot \Delta x_k$ называется *верхней интегральной суммой* (верхней суммой **Дарбу**).

Очевидно, что интегральная сумма **Римана** находится между значениями интегральных сумм **Дарбу**:

$$s \leq \sigma_n \leq S$$

для любого разбиения промежутка $[a; b]$ и любого выбора промежуточных точек $\{c_k\}$.

Теорема 2 (основной признак интегрируемости).

Для того чтобы ограниченная функция $f(x)$ была интегрируема на $[a; b]$, необходимо и достаточно, чтобы $\lim_{\lambda \rightarrow 0} (S - s) = 0$:

$$f(x) \in R([a; b]) \Leftrightarrow \lim_{\lambda \rightarrow 0} (S - s) = 0.$$

Доказательство этой теоремы можно найти в [2], [3].

Пусть $\omega_k = M_k - m_k$ — *колебание* функции $f(x)$ в промежутке $[x_{k-1}; x_k]$. Тогда $S - s = \sum_{k=1}^n M_k \cdot \Delta x_k - \sum_{k=1}^n m_k \cdot \Delta x_k = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \cdot \Delta x_k = \sum_{k=1}^n \omega_k \cdot \Delta x_k.$

Теперь основной признак интегрируемости можно сформулировать следующим образом.

Для того чтобы ограниченная функция $f(x)$ была интегрируема на $[a; b]$, необходимо и достаточно, чтобы для $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ такое, что для любого разбиения промежутка $[a; b]$ с рангом разбиения $\lambda < \delta$ выполнялось неравенство $\sum_{k=1}^n \omega_k \cdot \Delta x_k < \varepsilon.$

Классы интегрируемых функций.

Из основного признака интегрируемости можно установить классы функций, интегрируемых на заданном промежутке.

Теорема 3.

Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, то она и интегрируема на $[a; b]$.

Доказательство.

По теореме **Кантора** (см.[9], глава 5, §6) непрерывная на отрезке функция является и *равномерно непрерывной* на нем.

Значит, $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ такое, для любого разбиения промежутка $[a; b]$ с рангом разбиения $\lambda < \delta$ выполняется условие $\omega_k < \frac{\varepsilon}{b-a}$ одновременно для всех $k = 1, \dots, n$.

Тогда $\sum_{k=1}^n \omega_k \cdot \Delta x_k < \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot \Delta x_k = \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^n \Delta x_k = \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon$.

Итак, для $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ такое, что для любого разбиения промежутка $[a; b]$ с рангом разбиения $\lambda < \delta$ выполняется неравенство $\sum_{k=1}^n \omega_k \cdot \Delta x_k < \varepsilon$.

По основному признаку интегрируемости это означает, что функция $f(x)$ интегрируема на $[a; b]$. Теорема доказана.

Интегрируемость функций сохраняется и для класса *кусочно-непрерывных* функций – таких функций, которые непрерывны всюду за исключением конечного числа точек.

Теорема 4.

Если функция $f(x)$ ограничена и *кусочно-непрерывна* на $[a; b]$, то она интегрируема на $[a; b]$.

Доказательство этой теоремы есть в [2], [3].

Теорема 5.

Если функция $f(x)$ ограничена и монотонна на $[a; b]$, то она интегрируема на $[a; b]$.

Доказательство.

Пусть $f(x)$ – монотонно возрастает; тогда для любого разбиения промежутка $[a; b]$ на части $[x_{k-1}; x_k]$ будем иметь $m_k = f(x_{k-1})$, $M_k = f(x_k)$ и

$$S - s = \sum_{k=1}^n M_k \cdot \Delta x_k - \sum_{k=1}^n m_k \cdot \Delta x_k = \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1})) \cdot \Delta x_k.$$

Так как $0 < \Delta x_k \leq \lambda$, то

$$0 \leq S - s = \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1})) \cdot \Delta x_k \leq \lambda \cdot \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1})) = \lambda \cdot (f(b) - f(a)).$$

Итак, имеем: $0 \leq S - s \leq \lambda \cdot (f(b) - f(a))$.

Переходя в неравенстве к пределу при $\lambda \rightarrow 0$, получим: $\lim_{\lambda \rightarrow 0} (S - s) = 0$.

Следовательно, функция $f(x)$ интегрируема на $[a; b]$. Теорема доказана.

Таким образом, выделены некоторые классы интегрируемых на $[a; b]$ функций:

- непрерывные функции;
- ограниченные кусочно-непрерывные функции;
- монотонные и ограниченные функции (не обязательно непрерывные или кусочно-непрерывные).

Замечание. Указанными классами функций не исчерпывается множество $R([a; b])$ всех интегрируемых функций.

Для указанных классов функций существует определенный интеграл:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(c_k) \cdot \Delta x_k,$$

равный пределу интегральных сумм; причем этот предел не зависит ни от способа разбиения, ни от выбора промежуточных точек.

Для таких функций можно выбрать способ разбиения $\{x_k\}_{k=0}^n$ и набор промежуточных точек $\{c_k\}_{k=1}^n$ так, чтобы проще было вычислить указанный предел.

Например, можно выбрать равномерное разбиение промежутка $[a; b]$ и набор промежуточных точек, совпадающих с правыми (или левыми) концами частичных промежутков: $c_k = x_k = a + \frac{b-a}{n} \cdot k$, $k = 1, \dots, n$. В этом случае имеем:

$\lambda = \Delta x_k = \frac{b-a}{n}$, $\lambda \rightarrow 0 \Leftrightarrow n \rightarrow \infty$, и получаем формулу:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{b-a}{n} \cdot k\right) \cdot \frac{b-a}{n} \text{ или:}$$

$$\boxed{\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{b-a}{n} \cdot k\right)}.$$

В частности, если $[a; b] = [0; 1]$, то имеем следующую формулу:

$$\boxed{\int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right)}{n}}.$$

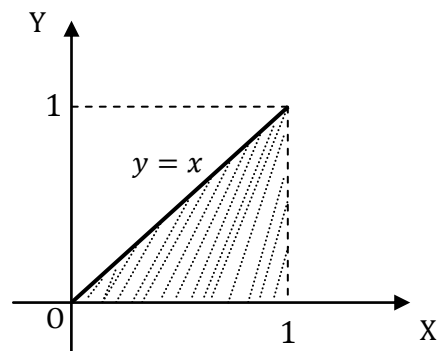
Пример 1.

$$\begin{aligned} \int_0^1 x dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \dots + \frac{n}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1+2+\dots+n}{n}\right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{n(n+1)}{2n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Теперь вычислим $\int_0^1 x dx$, используя геометрический смысл интеграла, как площадь криволинейной трапеции.

Здесь $f(x) = x$, $x \in [0; 1]$; графиком функции $y = x$ является прямая, а криволинейная трапеция в данном случае представляет собой прямоугольный треугольник.

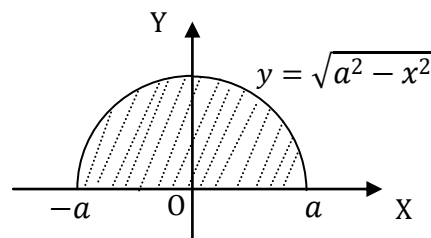
$$\int_0^1 x dx = \frac{1}{2} S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$



Пример 2.

Вычислим $\int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$, используя геометрический смысл интеграла.

Здесь $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$, $x \in [-a; a]$;
 графиком функции $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ является
 верхняя полуокружность с диаметром,
 совпадающим с отрезком $[-a; a]$ на оси OX .



$$\int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = S_{\text{полукруга}} = \frac{1}{2} \pi a^2.$$

Свойства интегрируемых функций.

1. Если функция $f(x)$ интегрируема на промежутке $[a; b]$, то $|f(x)|$ и $C \cdot f(x)$, где $C = \text{const}$ - также интегрируемы на этом промежутке.
2. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на промежутке $[a; b]$, то их сумма, разность и произведение также интегрируемы на этом промежутке.
3. Если функция $f(x)$ интегрируема на промежутке $[a; b]$, то она интегрируема и в любой части этого промежутка:

$$f(x) \in R([a; b]), [\alpha; \beta] \subset [a; b] \Rightarrow f(x) \in R([\alpha; \beta]).$$
 И наоборот, если промежуток $[a; b]$ разложен на части, и в каждой части функция $f(x)$ интегрируема, то она интегрируема и во всем промежутке $[a; b]$:

$$f(x) \in R([a; c]), f(x) \in R([c; b]) \Rightarrow f(x) \in R([a; b]).$$
4. Если изменить значения интегрируемой функции в конечном числе точек, то интегрируемость ее не нарушится, причем величина интеграла сохранит прежнее значение.

Благодаря последнему свойству мы получаем возможность говорить об интеграле $\int_a^b f(x) dx$ даже тогда, когда функция $f(x)$ не определена в конечном числе точек промежутка $[a; b]$. При этом можно приписать в этих точках нашей функции совершенно произвольные значения и рассматривать интеграл от функции, определенной таким образом во всем промежутке.

Доказательство этих свойств можно найти в [2], [3].

§ 3. Свойства определенного интеграла.

Прежде, чем переходить к свойствам определенного интеграла, сделаем следующие замечания.

- 1) Определенный интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \dots = \int_a^b f(z) dz.$$

2) По определению считаем:

$$\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx, \quad \int_a^a f(x) dx = 0.$$

Свойства определенного интеграла, выраженные равенствами.

1. Нормированность.

$$\int_a^b 1 dx = b - a$$

2. Линейность.

а) постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла:

$$\int_a^b C \cdot f(x) dx = C \cdot \int_a^b f(x) dx, \quad C = \text{const};$$

б) определенный интеграл от суммы функций равен сумме определенных интегралов от этих функций:

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

Свойство линейности можно записать и в следующем виде:

$$\int_a^b (C_1 \cdot f(x) + C_2 \cdot g(x)) dx = C_1 \cdot \int_a^b f(x) dx + C_2 \cdot \int_a^b g(x) dx \quad \forall C_1, C_2 = \text{const}.$$

3. Аддитивность.

Если промежуток интегрирования разбит на два промежутка, то определенный интеграл по всему промежутку равен сумме определенных интегралов по частичным промежуткам:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \quad a < c < b.$$

Доказательство.

1. Нормированность. Это свойство показано в Примере 2 из §1.

2. Линейность.

$$\begin{aligned} \text{а) } \int_a^b C \cdot f(x) dx &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n C \cdot f(c_k) \cdot \Delta x_k = \lim_{\lambda \rightarrow 0} C \cdot \sum_{k=1}^n f(c_k) \cdot \Delta x_k = \\ &= C \cdot \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(c_k) \cdot \Delta x_k = C \cdot \int_a^b f(x) dx. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \int_a^b (f(x) + g(x)) dx &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (f(c_k) + g(c_k)) \cdot \Delta x_k = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(c_k) \cdot \Delta x_k + \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n g(c_k) \cdot \Delta x_k = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx. \end{aligned}$$

Замечание. При доказательстве этого свойства непосредственно установили, что из интегрируемости функции $f(x)$ следует интегрируемость функции $C \cdot f(x)$, где $C = \text{const}$, а из интегрируемости функций $f(x)$ и $g(x)$ следует интегрируемость функции $f(x) + g(x)$.

3. Аддитивность.

Рассмотрим разбиение промежутка $[a; b]$ на части так, чтобы точка c также оказалась точкой деления. Введем обозначения интегральных сумм **Римана**:

$$\begin{aligned}\sigma([a; b]) &= \sum_{k=1}^n f(c_k) \cdot \Delta x_k - \text{по промежутку } [a; b]; \\ \sigma^{(1)}([a; c]) &= \sum_{k=1}^m f(c_k) \cdot \Delta x_k - \text{по промежутку } [a; c]; \\ \sigma^{(2)}([c; b]) &= \sum_{k=m+1}^n f(c_k) \cdot \Delta x_k - \text{по промежутку } [c; b].\end{aligned}$$

Тогда $\sigma([a; b]) = \sigma^{(1)}([a; c]) + \sigma^{(2)}([c; b])$. Переходя к пределу в этом равенстве при $\lambda \rightarrow 0$, получим: $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.

Замечание. Это свойство справедливо и при других расположениях точек a, b, c друг относительно друга. Например, если $a < b < c$, то также верно равенство:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx - \int_b^c f(x) dx.$$

Действительно, по доказанному свойству имеем: $\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$
 $\Rightarrow \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx - \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.

Свойства определенного интеграла, выраженные неравенствами.

1. Интегрирование неравенств.

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на промежутке $[a; b]$ и

$$f(x) \geq g(x) \quad \forall x \in [a; b], \text{ то } \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}f(c_k) \geq g(c_k) \quad \forall k &\Rightarrow f(c_k) \cdot \Delta x_k \geq g(c_k) \cdot \Delta x_k \quad \forall k \text{ (т.к. } \Delta x_k > 0) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sum_{k=1}^n f(c_k) \cdot \Delta x_k \geq \sum_{k=1}^n g(c_k) \cdot \Delta x_k \quad \text{для } \forall \{x_k\}_{k=1}^n \text{ и } \{c_k\}_{k=1}^n.\end{aligned}$$

Переходя к пределу в последнем неравенстве при $\lambda \rightarrow 0$, получим:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(c_k) \cdot \Delta x_k \geq \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n g(c_k) \cdot \Delta x_k \Leftrightarrow \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx.$$

Следствие 1.

Если функция $f(x)$ интегрируема на промежутке $[a; b]$ и

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a; b], \text{ то } \int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

Действительно: $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b 0 dx = 0$.

Следствие 2.

Если функция $f(x)$ интегрируема на промежутке $[a; b]$, то

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Действительно: $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \quad \forall x \in [a; b] \Rightarrow$

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx \Leftrightarrow \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

2. Оценки определенного интеграла.

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на промежутке $[a; b]$ и $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a; b]$, тогда

$$m \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M \cdot (b - a).$$

Действительно:

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b m dx = m \cdot \int_a^b 1 dx = m \cdot (b - a);$$

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx = M \cdot \int_a^b 1 dx = M \cdot (b - a).$$

Пример.

Оценим определенный интеграл $I = \int_1^2 2^{-\frac{x^2}{2}} dx$.

Здесь $a = 1$; $b = 2$; $b - a = 1$;

$$2^{-\frac{x^2}{2}} \leq 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \leq 0,71 \quad \text{и} \quad 2^{-\frac{x^2}{2}} \geq 2^{-2} = \frac{1}{4} = 0,25 \quad \forall x \in [1; 2].$$

Следовательно: $0,25 \leq I \leq 0,71$

Следствие 3.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a; b]$ и $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a; b]$.

Тогда если $\exists x_0 \in [a; b]$ такое, что $f(x_0) > 0$, то $\int_a^b f(x) dx > 0$.

Доказательство.

Пусть $f(x_0) = h > 0$; по свойству непрерывных функций в некоторой окрестности точки x_0 значения функции $f(x)$ сохраняют тот же знак (см. [9], глава 5, §3). Можно считать, что в некоторой δ -окрестности точки x_0 выполняется неравенство: $f(x) \geq \frac{h}{2} \quad \forall x \in [x_0 - \delta; x_0 + \delta]$. По свойству аддитивности имеем:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{x_0 - \delta} f(x) dx + \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} f(x) dx + \int_{x_0 + \delta}^b f(x) dx.$$

Так как $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a; b]$, то $\int_a^{x_0 - \delta} f(x) dx \geq 0$ и $\int_{x_0 + \delta}^b f(x) dx \geq 0$.

Следовательно: $\int_a^b f(x) dx \geq \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} f(x) dx \geq \frac{h}{2} \cdot 2\delta > 0$. Следствие доказано.

Следствие 4.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a; b]$ и $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a; b]$.

Тогда если $\int_a^b f(x) dx = 0$, то $f(x) \equiv 0$.

Действительно: если $f(x) \not\equiv 0$, то $\exists x_0 \in [a; b]$ такое, что $f(x_0) > 0$;

а в этом случае по Следствию 3 имеем: $\int_a^b f(x) dx > 0$, что противоречит условию.

3. Неравенство Коши-Буняковского.

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на промежутке $[a; b]$. Тогда

$$\left| \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2(x) dx}.$$

Доказательство.

Для любого действительного числа t имеем:

$$0 \leq \int_a^b (f(x) + t \cdot g(x))^2 dx = \int_a^b f^2(x) dx + 2t \cdot \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx + t^2 \cdot \int_a^b g^2(x) dx.$$

Введем обозначения:

$$A = \int_a^b g^2(x) dx; \quad B = \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx; \quad C = \int_a^b f^2(x) dx.$$

Тогда имеем неравенство: $At^2 + 2Bt + C \geq 0 \quad \forall t \in (-\infty; +\infty)$. Квадратный трехчлен неотрицателен на всей числовой оси лишь тогда, когда его дискриминант неположителен:

$$\begin{aligned} B^2 - AC &\leq 0 \Leftrightarrow \left(\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b g^2(x) dx \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left| \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2(x) dx}. \text{ Неравенство доказано.} \end{aligned}$$

Теорема о среднем значении.

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на $[a; b]$;

$m = \inf \{f(x), x \in [a; b]\}; \quad M = \sup \{f(x), x \in [a; b]\}$. Тогда $\exists \mu \in [m; M]$:

$$\int_a^b f(x) dx = \mu \cdot (b - a).$$

Доказательство.

Согласно оценкам определенного интеграла имеем:

$$m \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M \cdot (b - a) \Rightarrow m \leq \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) dx \leq M.$$

Введем обозначение: $\mu = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) dx$; тогда

$$\int_a^b f(x) dx = \mu \cdot (b - a), \text{ причем } m \leq \mu \leq M. \text{ Теорема доказана.}$$

Частный случай теоремы о среднем значении.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$. Тогда $\exists c \in [a; b]$:

$$\int_a^b f(x) dx = f(c) \cdot (b - a).$$

Доказательство.

По доказанной теореме имеем: $\int_a^b f(x) dx = \mu \cdot (b - a)$, где $\mu \in [m; M]$, причем m — наименьшее значение $f(x)$ на $[a; b]$, M — наибольшее значение $f(x)$ на $[a; b]$.

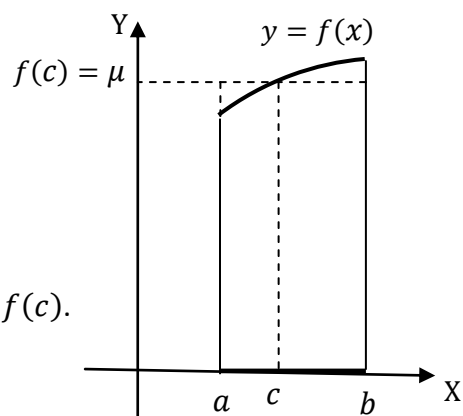
По теореме Больцано - Коши (см. [9], глава 5, §4) непрерывная функция на отрезке принимает все промежуточные значения между наименьшим и наибольшим значениями функции. Следовательно, $\exists c \in [a; b]: f(c) = \mu$.

Тогда получаем: $\int_a^b f(x) dx = \mu \cdot (b - a) = f(c) \cdot (b - a)$. Теорема доказана.

Число $\mu = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) dx$ — называется *интегральным средним значением* функции $f(x)$ на промежутке $[a; b]$.

Геометрический смысл теоремы о среднем значении.

По теореме о среднем значении имеем:
площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, осью OX и прямыми $x = a$, $x = b$ — равна площади прямоугольника с основанием $[a; b]$ и с некоторой «средней высотой» $f(c)$.



§ 4. Основная формула интегрального исчисления.

Определенный интеграл с переменным верхним пределом.

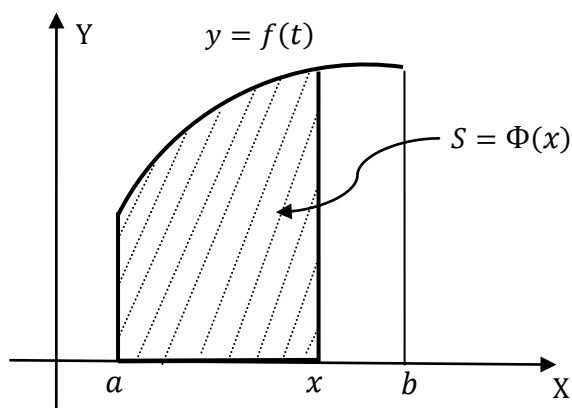
Если функция $f(t)$ интегрируема на промежутке $[a; b]$, то она интегрируема и на промежутке $[a; x]$, где x — любое значение из $[a; b]$:

$$f(t) \in R([a; b]) \Rightarrow f(t) \in R([a; x]) \quad \forall x \in [a; b].$$

Рассмотрим определенный интеграл от функции $f(t)$ на промежутке $[a; x]$: $\int_a^x f(t) dt$, — который является функцией от x и называется *определенным интегралом с переменным верхним пределом*. Введем обозначение:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad x \in [a; b], \text{ где } f(t) \in R([a; b]).$$

Если $f(t) \geq 0 \quad \forall t \in [a; b]$, то функция $\Phi(x)$ задает площадь переменной фигуры, ограниченной графиком функции $y = f(t)$, осью OX и вертикальными прямыми, проходящими через точки a и x на оси абсцисс.



Отметим некоторые свойства функции $\Phi(x)$.

Теорема (о непрерывности функции $\Phi(x)$).

Если функция $f(t)$ интегрируема на $[a; b]$, то функция $\Phi(x)$ непрерывна на $[a; b]$.

Доказательство.

Пусть x_0 — произвольная точка на $[a; b]$; тогда $\forall x \in [a; b]$ имеем:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt = \int_a^{x_0} f(t) dt + \int_{x_0}^x f(t) dt \Rightarrow$$

$$\Phi(x) - \Phi(x_0) = \int_a^x f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt = \int_{x_0}^x f(t) dt.$$

Так как $f(t) \in R([a; b])$, то $f(t)$ — ограниченная функция, т.е. $\exists K > 0$:

$|f(t)| \leq K \quad \forall t \in [a; b]$. Тогда при $x > x_0$ имеем:

$$|\Phi(x) - \Phi(x_0)| = \left| \int_{x_0}^x f(t) dt \right| \leq \int_{x_0}^x |f(t)| dt \leq \int_{x_0}^x K dt = K \cdot (x - x_0), \text{ а при } x < x_0 \text{ имеем:}$$

$$|\Phi(x) - \Phi(x_0)| = \left| \int_{x_0}^x f(t) dt \right| = \left| \int_x^{x_0} f(t) dt \right| \leq \int_x^{x_0} |f(t)| dt \leq \int_x^{x_0} K dt = K \cdot (x_0 - x).$$

Таким образом, $\forall x \in [a; b]$ имеем следующие неравенства:

$$0 \leq |\Phi(x) - \Phi(x_0)| \leq K \cdot |x - x_0|.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $x \rightarrow x_0$, получим:

$\lim_{x \rightarrow x_0} \Phi(x) = \Phi(x_0)$, что означает непрерывность функции $\Phi(x)$ в точке x_0 .

Так как x_0 — произвольная точка на $[a; b]$, то функция $\Phi(x)$ непрерывна на $[a; b]$.

Теорема доказана.

Теорема Барроу (о дифференцируемости функции $\Phi(x)$).

Пусть функция $f(t)$ непрерывна на $[a; b]$. Тогда функция $\Phi(x)$ дифференцируема на $[a; b]$ и $\Phi'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a; b]$.

Доказательство.

Пусть x_0 — произвольная точка на $[a; b]$; тогда $\forall x \in [a; b]$ имеем:

$\Phi(x) - \Phi(x_0) = \int_{x_0}^x f(t) dt$; по теореме о среднем значении имеем:

$\int_{x_0}^x f(t) dt = f(c) \cdot (x - x_0)$, где точка c лежит между точками x и x_0 , причем это

равенство справедливо и для $x > x_0$ и для $x < x_0$. Тогда

$$\frac{\Phi(x) - \Phi(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0} \cdot \int_{x_0}^x f(t) dt = \frac{1}{x - x_0} \cdot f(c) \cdot (x - x_0) = f(c).$$

Если $x \rightarrow x_0$, то $c \rightarrow x_0$, т. к. точка c лежит между x и x_0 , при этом

$\lim_{c \rightarrow x_0} f(c) = f(x_0)$ в силу непрерывности функции $f(t)$.

Тогда получаем равенство: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Phi(x) - \Phi(x_0)}{x - x_0} = \lim_{c \rightarrow x_0} f(c) = f(x_0)$, которое означает, что

$\exists \Phi'(x_0) = f(x_0)$. Так как x_0 — произвольная точка на $[a; b]$, то функция $\Phi(x)$

дифференцируема на $[a; b]$ и $\Phi'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a; b]$. Теорема доказана.

Доказана формула:

$$\left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x) \quad \forall x \in [a; b].$$

Из этой формулы следует, что функция $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$ — является первообразной для $f(x)$ на $[a; b]$. Тем самым доказана теорема о существовании первообразной для непрерывной функции (см. главу 1, §1): для функции $f(x)$ такой первообразной будет функция $\Phi(x)$.

Замечание.

Для определенного интеграла с *переменным нижним пределом*:

$\tilde{\Phi}(x) = \int_x^b f(t) dt$, $x \in [a; b]$ — справедлива формула:

$$\tilde{\Phi}'(x) = -f(x) \quad \forall x \in [a; b].$$

Это следует из равенства: $\int_x^b f(t) dt = -\int_b^x f(t) dt$.

Формула Ньютона - Лейбница.

Теорема.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, а $F(x)$ — какая-нибудь первообразная для $f(x)$ на $[a; b]$. Тогда

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Доказательство.

Так как $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, то функция $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$ — также является *первообразной* для $f(x)$ на $[a; b]$. Следовательно, функции $F(x)$ и $\Phi(x)$ отличаются на постоянную величину, как две первообразные для одной и той же функции:

$$\Phi(x) = F(x) + C \quad \forall x \in [a; b], \text{ где } C = \text{const.}$$

Подставим в это равенство $x = a$:

$$\begin{aligned} \Phi(a) = F(a) + C &\Rightarrow C = \Phi(a) - F(a) = \int_a^a f(t) dt - F(a) = 0 - F(a) = -F(a) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \Phi(x) = F(x) - F(a) \quad \forall x \in [a; b]. \end{aligned}$$

Подставляя в последнее равенство $x = b$, получим: $\Phi(b) = F(b) - F(a)$, или $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) \Leftrightarrow \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$. Теорема доказана.

Полученная формула называется формулой **Ньютона - Лейбница**:

$$\boxed{\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)}.$$

Формула **Ньютона - Лейбница** устанавливает связь между двумя изначально разными понятиями: неопределенным и определенным интегралами.

С помощью этой формулы можно вычислить определенный интеграл от непрерывной функции, если известна ее первообразная (или неопределенный интеграл).

Примеры.

$$1). \int_a^b x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_a^b = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}, n \in \mathbb{N}.$$

$$2). \int_a^b \frac{1}{x} dx = \ln |x| \Big|_a^b = \ln |b| - \ln |a| = \ln \frac{b}{a}, \quad a \cdot b > 0.$$

$$3). \int_a^b \cos x dx = \sin x \Big|_a^b = \sin b - \sin a.$$

$$4). \int_a^b \sin x dx = -\cos x \Big|_a^b = \cos a - \cos b.$$

$$5). \int_a^b 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} \Big|_a^b = \frac{2^b - 2^a}{\ln 2}.$$

$$6). \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} 0 = 1 - 0 = 1.$$

$$7). \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \Big|_0^1 = \operatorname{arc} \operatorname{tg} 1 - \operatorname{arc} \operatorname{tg} 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

$$8). \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

$$9). \int_0^{\pi} \cos^2 x dx = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

$$10). \int_{-2}^4 |x| dx = \int_{-2}^0 |x| dx + \int_0^4 |x| dx = \int_{-2}^0 -x dx + \int_0^4 x dx = -\frac{x^2}{2} \Big|_{-2}^0 + \frac{x^2}{2} \Big|_0^4 = \\ = -(0 - 2) + (8 - 0) = 10.$$

§ 5. Методы вычисления определенных интегралов.

Интегрирование по частям в определенном интеграле.

Для неопределенного интеграла формула интегрирования по частям имеет вид:

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du.$$

Соответствующую формулу получим и для определенного интеграла.

Теорема 1.

Пусть функции $u = u(x)$, $v = v(x)$ — непрерывно дифференцируемы на промежутке $[a; b]$ (т.е. $\exists u'(x)$, $v'(x)$ и $u'(x)$, $v'(x)$ — непрерывны на $[a; b]$).

Тогда справедлива формула:

$$\int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) \Big|_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x) dx, \text{ или сокращенно:}$$

$$\boxed{\int_a^b u \cdot dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v \cdot du}.$$

Доказательство.

$$\int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx + \int_a^b u'(x) \cdot v(x) dx = \int_a^b (u(x) \cdot v'(x) + u'(x) \cdot v(x)) dx = \\ = \int_a^b (u(x) \cdot v(x))' dx = u(x) \cdot v(x) \Big|_a^b. \text{ Формула доказана.}$$

Примеры.

$$1). \int_0^{\pi} x \cdot \cos x dx = \left[\begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \cos x dx \Rightarrow v = \sin x \end{array} \right] = x \cdot \sin x \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x \cdot dx = \\ = \pi \cdot \sin \pi - 0 \cdot \sin 0 + \cos x \Big|_0^{\pi} = \cos \pi - \cos 0 = -1 - 1 = -2.$$

$$2). \int_1^e \ln x dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array} \right] = x \cdot \ln x \Big|_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{dx}{x} = e \cdot \ln e - 1 \cdot \ln 1 - \int_1^e dx = \\ = e - x \Big|_1^e = e - (e - 1) = 1.$$

3). Вычислим интегралы $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$, $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx$, где $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \cdot \sin x \, dx = \\ &= \left[\begin{array}{l} u = \sin^{n-1} x \Rightarrow du = (n-1) \sin^{n-2} x \cdot \cos x \, dx \\ dv = \sin x \, dx \Rightarrow v = -\cos x \end{array} \right] = -\sin^{n-1} x \cdot \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \\ &+ (n-1) \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cdot \cos^2 x \, dx = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cdot (1 - \sin^2 x) \, dx = \\ &= (n-1) \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \, dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx \right) = (n-1) \cdot (I_{n-2} - I_n). \end{aligned}$$

Получаем рекуррентное соотношение: $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$, $n \geq 3$.

При $n = 1$ и 2 имеем:

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1; \quad I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx = \left(\frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Если $n = 2k + 1$ — нечетное число, то

$$I_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1} I_{2k-1} = \frac{2k}{2k+1} \cdot \frac{2k-2}{2k-1} I_{2k-3} = \dots = \frac{2k}{2k+1} \cdot \frac{2k-2}{2k-1} \cdot \dots \cdot \frac{2}{3} \cdot I_1 = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}.$$

Если $n = 2k$ — четное число, то

$$I_{2k} = \frac{2k-1}{2k} I_{2k-2} = \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} I_{2k-4} = \dots = \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} \cdot \dots \cdot \frac{3}{4} \cdot I_2 = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Точно такие же результаты получаются и для J_n .

Таким образом, имеем формулы:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx = \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \begin{cases} 1, & \text{если } n - \text{нечетное,} \\ \frac{\pi}{2}, & \text{если } n - \text{четное,} \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 3.$$

Например: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \, dx = \frac{2!!}{3!!} = \frac{2}{3},$
 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \, dx = \frac{3!!}{4!!} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3}{8} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{16}.$

Следствием этих формул является приведенная ниже знаменитая формула **Валлиса** (J. Wallis).

Учитывая, что $\sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x \quad \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, проинтегрируем эти неравенства в промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x \, dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \, dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x \, dx.$$

Применяя формулы для интегралов I_n , получим:

$$\begin{aligned} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} &< \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!} \quad \text{или} \\ \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \cdot \frac{1}{2n+1} &< \frac{\pi}{2} < \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \cdot \frac{1}{2n} \end{aligned}$$

Здесь число $\frac{\pi}{2}$ находится между двумя выражениями, разность между которыми стремится к 0 при $n \rightarrow \infty$:

$$\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \cdot \frac{1}{(2n+1) \cdot 2n} < \frac{1}{2n} \cdot \frac{\pi}{2} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Следовательно: $\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \cdot \frac{1}{2n+1}$ или

$$\boxed{\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n \cdot 2n}{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)}} \text{ — формула Валлиса.}$$

Формула **Валлиса** имеет исторический интерес как первое представление числа π в виде предела легко вычисляемой рациональной последовательности.

Замена переменной в определенном интеграле.

Для неопределенного интеграла формула замены переменной имеет вид:

$$\int f(x) dx = \left[\begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t) dt \end{array} \right] = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt.$$

Соответствующая формула имеет место и для определенного интеграла.

Теорема 2.

Дан определенный интеграл $\int_a^b f(x) dx$, где функция $f(x)$ — непрерывна на промежутке $[a; b]$. Пусть функция $x = \varphi(t)$ определена в некотором промежутке $[\alpha; \beta]$ и удовлетворяет следующим условиям:

- 1) значения функции $\varphi(t)$ не выходят за пределы промежутка $[a; b]$ при $t \in [\alpha; \beta]$;
- 2) функция $\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на промежутке $[\alpha; \beta]$;
- 3) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$.

Тогда справедлива формула:

$$\boxed{\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt}.$$

Доказательство.

Пусть $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$, тогда $\Phi(t) = F(\varphi(t))$ — первообразная для функции $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$. Применим формулу **Ньютона - Лейбница**.

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx.$$

Формула доказана.

Замечание.

Вычисляя неопределенный интеграл с помощью замены переменной, необходимо возвращаться к старой переменной x ; при вычислении определенного интеграла в этом нет надобности.

Пример 4.

$$\int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \left[\begin{array}{l} x = a \cdot \sin t, \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \quad dx = a \cdot \cos t dt \\ t = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = -a, \quad t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = a \\ \sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} = a \cdot \cos t \end{array} \right] = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos^2 t dt =$$

$$= a^2 \left(\frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \cdot \sin 2t \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = a^2 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4} \cdot \sin \pi \right) - a^2 \left(\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{4} \cdot \sin(-\pi) \right) = \frac{1}{2} \pi a^2.$$

Определенный интеграл от четной, нечетной и периодической функции.

Рассмотрим определенный интеграл $\int_{-a}^a f(x) dx$ по промежутку $[-a; a]$, симметричному относительно начала координат; используя свойство аддитивности определенного интеграла, разложим его в сумму двух интегралов:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx.$$

Преобразуем первый из этих интегралов.

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_{-a}^0 f(t) dt = \left[\begin{array}{l} x = -t, \quad t = -x, \quad dt = -dx \\ t = -a \Rightarrow x = a, \quad t = 0 \Rightarrow x = 0 \end{array} \right] = \int_a^0 f(-x)(-dx) =$$

$$= -\int_a^0 f(-x) dx = \int_0^a f(-x) dx. \text{ Тогда получим:}$$

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a f(-x) dx + \int_0^a f(x) dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)] dx.$$

Таким образом, для любой функции $f(x)$, непрерывной на промежутке $[-a; a]$, имеем следующее равенство:

$$\boxed{\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)] dx}.$$

Если $f(x)$ — четная функция, т.е. $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in D_f$, то

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)] dx = \int_0^a [f(x) + f(x)] dx = \int_0^a 2f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

Если $f(x)$ — нечетная функция, т.е. $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in D_f$, то

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)] dx = \int_0^a [f(x) - f(x)] dx = \int_0^a 0 dx = 0.$$

Итак, имеем:

$$\boxed{\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx} \text{ — для четной функции;}$$

$$\boxed{\int_{-a}^a f(x) dx = 0} \text{ — для нечетной функции.}$$

Например: $\int_{-\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{9}} \sin^7 x \cdot \cos 5x \cdot x^6 dx = 0$, так как подынтегральная функция —

нечетная, а промежуток интегрирования симметричен относительно начала координат.

Рассмотрим непрерывную *периодическую* функцию $f(x)$. Пусть число $T > 0$ - период функции $f(x)$, т.е. $f(x + T) = f(x) \quad \forall x \in D_f$. Тогда определенный интеграл от $f(x)$ на любом промежутке с длиной, равной периоду T , имеет одно и то же значение:

$$\boxed{\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx}.$$

Действительно:

- 1) $\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_a^0 f(x) dx + \int_0^T f(x) dx + \int_T^{a+T} f(x) dx;$
- 2) $\int_T^{a+T} f(x) dx = \left[\begin{array}{l} x = t + T, \quad t = x - T, \quad dx = dt \\ x = T \Rightarrow t = 0, \quad x = a + T \Rightarrow t = a \end{array} \right] = \int_0^a f(t + T) dt =$
 $= \int_0^a f(t) dt = - \int_a^0 f(t) dt = - \int_a^0 f(x) dx;$
- 3) $\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_a^0 f(x) dx + \int_0^T f(x) dx - \int_a^0 f(x) dx = \int_0^T f(x) dx.$

Например:

$$\int_a^{a+\pi} \sin^2 x dx = \int_0^\pi \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2}, \quad \int_a^{a+\pi} \cos^2 x dx = \int_0^\pi \cos^2 x dx = \frac{\pi}{2} \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

Определенный интеграл как предел интегральных сумм.

В §2 были получены следующие формулы:

- (1) $\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{b-a}{n} \cdot k\right) \quad \text{и}$
- (2) $\int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right)}{n}.$

С помощью этих формул можно вычислять определенные интегралы как пределы некоторых последовательностей (см. Пример 1 из §2). Однако такой способ вычисления интегралов требует значительных усилий даже для простых функций.

Применение указанных формул, тем не менее возможно, но для решения обратной задачи, а именно: для вычисления пределов последовательностей путем сведения их к определенным интегралам.

Пример 5.

Пусть $f(x) = x^p$, $p > 0$. Тогда $\int_0^1 x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{p+1}.$

С другой стороны, по формуле (2) имеем:

$$\int_0^1 x^p dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^p = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^p + \left(\frac{2}{n}\right)^p + \dots + \left(\frac{n}{n}\right)^p}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}}.$$

Таким образом, получаем предел последовательности:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}.$$

Например:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3} = \frac{1}{3}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^3 + 2^3 + \dots + n^3}{n^4} = \frac{1}{4}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}} = \frac{2}{3}.$$

Пример 6.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{n}{n}} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \frac{k}{n}} = \\ &= \left[\text{по формуле (2)} \right] = \int_0^1 \sqrt{1+x} dx = \frac{2}{3} \sqrt{(1+x)^3} \Big|_0^1 = \frac{2}{3} (2\sqrt{2} - 1). \end{aligned}$$

Пример 7.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(\frac{1}{1^2 + n^2} + \frac{1}{2^2 + n^2} + \dots + \frac{1}{n^2 + n^2} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{n^2}{1^2 + n^2} + \frac{n^2}{2^2 + n^2} + \dots + \frac{n^2}{n^2 + n^2} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{1 + \frac{1^2}{n^2}} + \frac{1}{1 + \frac{2^2}{n^2}} + \dots + \frac{1}{1 + \frac{n^2}{n^2}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{1 + \left(\frac{1}{n}\right)^2} + \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{n}\right)^2} + \dots + \frac{1}{1 + \left(\frac{n}{n}\right)^2} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2} = \left[\text{по формуле (2)} \right] = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Пример 8.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{n}{n+1} + \frac{n}{n+2} + \dots + \frac{n}{n+n} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} + \frac{1}{1 + \frac{2}{n}} + \dots + \frac{1}{1 + \frac{n}{n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} = \left[\text{по формуле (2)} \right] = \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln(1+x) \Big|_0^1 = \ln 2. \end{aligned}$$

Пример 9.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(n+n)^2} \right) &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{n^2}{(n+1)^2} + \frac{n^2}{(n+2)^2} + \dots + \frac{n^2}{(n+n)^2} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} + \frac{1}{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^2} + \dots + \frac{1}{\left(1 + \frac{n}{n}\right)^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{\left(1 + \frac{k}{n}\right)^2} = \\ &= \left[\text{по формуле (2)} \right] = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2} dx = -\frac{1}{1+x} \Big|_0^1 = -\frac{1}{1+1} + \frac{1}{1+0} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Пример 10.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{n\pi}{n} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \sin \left(\frac{\pi}{n} \cdot k \right) = \\ &= \left[\text{по формуле (1)} \right] = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^\pi \sin x dx = -\frac{1}{\pi} \cdot \cos x \Big|_0^\pi = -\frac{1}{\pi} (-1 - 1) = \frac{2}{\pi}. \end{aligned}$$

Глава 6. Приложения определенного интеграла

Содержание

§ 1. Вычисление длины дуги кривой	143
§ 2. Вычисление площади плоской фигуры	147
§ 3. Вычисление объема тела	152
§ 4. Вычисление площади поверхности	157
§ 5. Вычисление физических величин	161
Расчетное задание	167

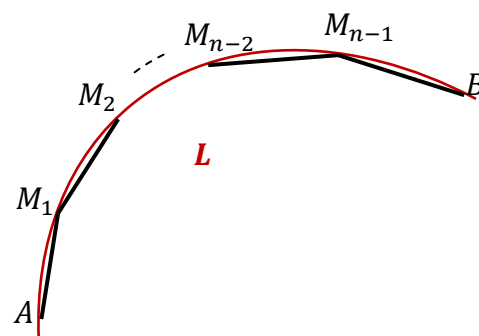
§ 1. Вычисление длины дуги кривой.

Пусть на плоскости дана непрерывная кривая L без самопересечений. Такую кривую будем называть *простой* кривой. Введем понятие длины дуги простой кривой.

Разбиваем дугу $\overline{AB}$ произвольным образом точками $M_0, M_1, \dots, M_{n-1}, M_n$, где $M_0 \equiv A, M_n \equiv B$.

Соединяя эти точки последовательно прямолинейными отрезками, мы получим ломаную линию, вписанную в дугу $\overline{AB}$. Длина этой ломаной L_n равна сумме длин всех ее сторон.

Обозначим длину наибольшей из сторон ломаной через λ : $\lambda = \max_{1 \leq k \leq n} |M_{k-1}M_k|$.



Определение.

Длиной дуги кривой называется предел длин ломаных, вписанных в данную дугу, при условии, что стремятся к нулю длины всех сторон этой ломаной (т.е. наибольшая из этих длин $\lambda \rightarrow 0$): $\lim_{\lambda \rightarrow 0} L_n$.

Если длина кривой существует, то кривая называется *спрямляемой*. Обозначения длины кривой: $|L|, |\overline{AB}|, l$. Таким образом, имеем:

$$|L| = \lim_{\lambda \rightarrow 0} L_n.$$

Рассмотрим следующие способы задания кривой:

- явное задание;
- параметрическое задание;
- задание кривой в полярных координатах.

Длина дуги кривой, заданной явным уравнением.

Теорема 1.

Пусть кривая L задается уравнением: $y = f(x)$, $x \in [a; b]$, где $f(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция. Тогда L — спрямляемая кривая и справедлива формула:

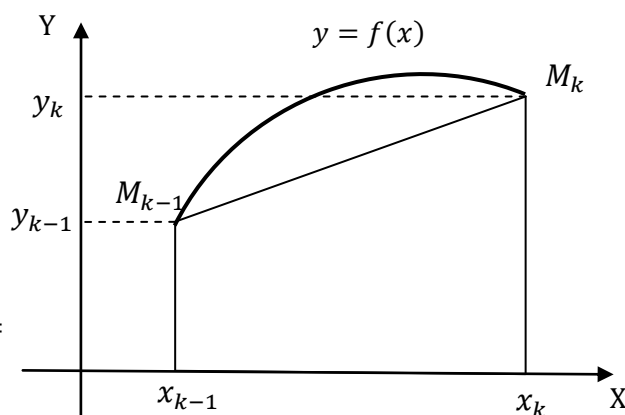
$$|L| = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx.$$

Доказательство.

Разобьем график функции $y = f(x)$ точками $M_0, M_1, \dots, M_{n-1}, M_n$, где $M_k(x_k, y_k)$, $y_k = f(x_k)$, $k = 0, 1, \dots, n$; пусть $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

Длина ломаной, вписанной в эту кривую, равна $L_n = \sum_{k=1}^n |M_{k-1}M_k|$, где

$$|M_{k-1}M_k| = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2} = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}.$$



По теореме **Лагранжа** $\exists c_k \in [x_{k-1}; x_k]: f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(c_k) \cdot (x_k - x_{k-1})$.

Тогда $|M_{k-1}M_k| = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (f'(c_k))^2 \cdot (\Delta x_k)^2} = \sqrt{1 + (f'(c_k))^2} \cdot \Delta x_k$ и

$$L_n = \sum_{k=1}^n |M_{k-1}M_k| = \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + (f'(c_k))^2} \cdot \Delta x_k.$$

L_n представляет собой интегральную сумму для определенного интеграла

$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$. Так как функция $\sqrt{1 + (f'(x))^2}$ - непрерывна на $[a; b]$, то

$$\exists \lim_{\lambda \rightarrow 0} L_n = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + (f'(c_k))^2} \cdot \Delta x_k = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Таким образом, $|L| = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx$. Теорема доказана.

Пример 1.

Найти длину дуги кривой $y = \frac{2}{3}x^{1.5}$, $x \in [0; 3]$.

$$y' = \sqrt{x}, \quad 1 + (y')^2 = 1 + x; \quad |L| = \int_0^3 \sqrt{1+x} dx = \frac{2}{3}(1+x)^{1.5} \Big|_0^3 = \frac{2}{3}(8-1) = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}.$$

Длина дуги кривой, заданной параметрически.

Теорема 2.

Пусть кривая L задана параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in [\alpha; \beta], \text{ где } x(t), y(t) - \text{непрерывно дифференцируемые функции.}$$

Тогда L - спрямляемая кривая и справедлива формула:

$$|L| = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt.$$

Доказательство.

Доказательство проведем для частного случая: $x'(t) \neq 0 \quad \forall t \in [\alpha; \beta]$; для определенности можно считать, что $x'(t) > 0 \quad \forall t \in [\alpha; \beta]$. Пусть $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$.

Воспользуемся формулой: $|L| = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx$ и сделаем замену переменной:

$$\left[\begin{array}{l} x = x(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta, \quad dx = x'(t)dt \\ t = \alpha \Rightarrow x = a, \quad t = \beta \Rightarrow x = b \\ y' = \frac{y'_t}{x'_t} \Rightarrow \sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)^2} = \frac{\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}}{x'_t} \end{array} \right]. \text{ В результате получим:}$$

$$|L| = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}}{x'_t} x'(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt. \text{ Теорема доказана.}$$

Пример 2.

Длина окружности радиуса R .

Окружность можно задать параметрическими уравнениями: $\begin{cases} x = R \cdot \cos t \\ y = R \cdot \sin t \end{cases}, t \in [0; 2\pi]$.

$$|L| = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-R \cdot \sin t)^2 + (R \cdot \cos t)^2} dt = \int_0^{2\pi} R dt = R \cdot \int_0^{2\pi} dt = 2\pi R.$$

Пример 3.

Длина эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Эллипс можно задать параметрическими уравнениями: $\begin{cases} x = a \cdot \sin t \\ y = b \cdot \cos t \end{cases}, t \in [0; 2\pi]$.

Учитывая симметричность эллипса относительно осей и начала координат, можно вычислить длину лишь одной четвертой части эллипса.

$$\begin{aligned} |L| &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(a \cdot \cos t)^2 + (-b \cdot \sin t)^2} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} dt = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \sin^2 t} dt = a \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \cdot \sin^2 t} dt = a \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cdot \sin^2 t} dt, \end{aligned}$$

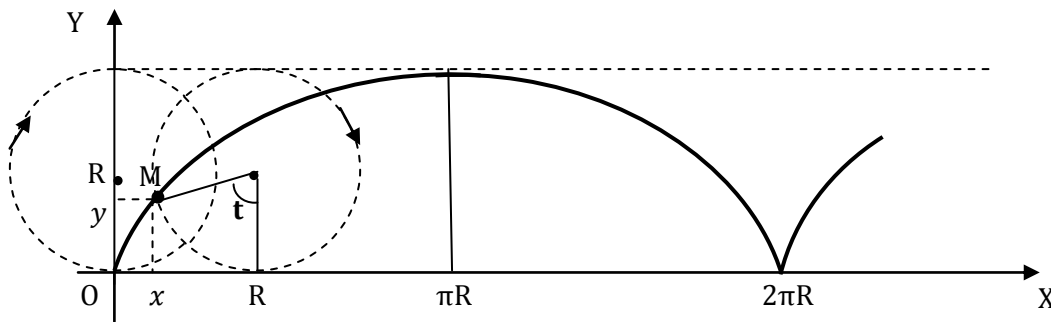
где $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ — эксцентриситет эллипса, $0 < \varepsilon < 1$.

Таким образом, длина эллипса выражается через так называемый *эллиптический* интеграл вида $I(\varepsilon) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cdot \sin^2 t} dt$, где $0 < \varepsilon < 1$.

Эллиптические интегралы относятся к числу «неберущихся» интегралов. Для их вычисления имеются специальные таблицы.

Пример 4.

Найти длину одной арки циклоиды: $\begin{cases} x = R \cdot (t - \sin t) \\ y = R \cdot (1 - \cos t) \end{cases}, t \in [0; 2\pi]$.



Здесь $x'_t = R \cdot (1 - \cos t)$, $y'_t = R \cdot \sin t$,

$$(x'_t)^2 + (y'_t)^2 = R^2(1 - \cos t)^2 + R^2 \sin^2 t = 2R^2(1 - \cos t),$$

$$\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} = R \cdot \sqrt{2 \cdot (1 - \cos t)} = 2R \cdot \sin \frac{t}{2}.$$

$$|L| = 2R \cdot \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = -4R \cdot \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = -4R \cdot (-1 - 1) = 8R.$$

Длина дуги кривой в полярных координатах.Теорема 3.

Пусть кривая L задана уравнением в полярной системе координат:

$r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha; \beta]$, где $r(\varphi)$ — непрерывно дифференцируемая функция.

Тогда L — спрямляемая кривая и справедлива формула:

$$|L| = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi.$$

Доказательство.

Перейдем к декартовым координатам: $\begin{cases} x = r \cdot \cos \varphi \\ y = r \cdot \sin \varphi \end{cases}$. Тогда кривая L будет задана параметрическими уравнениями: $\begin{cases} x = r(\varphi) \cdot \cos \varphi \\ y = r(\varphi) \cdot \sin \varphi \end{cases}$, $\varphi \in [\alpha; \beta]$; роль параметра t здесь играет полярный угол φ .

По теореме 2 имеем: $|L| = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'_{\varphi})^2 + (y'_{\varphi})^2} d\varphi$.

$$x'_{\varphi} = r'_{\varphi} \cdot \cos \varphi - r \cdot \sin \varphi; \quad y'_{\varphi} = r'_{\varphi} \cdot \sin \varphi + r \cdot \cos \varphi;$$

$$(x'_{\varphi})^2 + (y'_{\varphi})^2 = (r'_{\varphi} \cdot \cos \varphi - r \cdot \sin \varphi)^2 + (r'_{\varphi} \cdot \sin \varphi + r \cdot \cos \varphi)^2 = r^2 + (r'_{\varphi})^2.$$

$$\text{Следовательно, } |L| = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'_{\varphi})^2 + (y'_{\varphi})^2} d\varphi = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + (r'_{\varphi})^2} d\varphi.$$

Пример 5.

Длина кардиоиды $r = a \cdot (1 + \cos \varphi)$, $\varphi \in [0; 2\pi]$.

Учитывая симметричность кардиоиды относительно полярной оси $\varphi = 0$, вся ее длина равна удвоенной длине ее верхней половины.

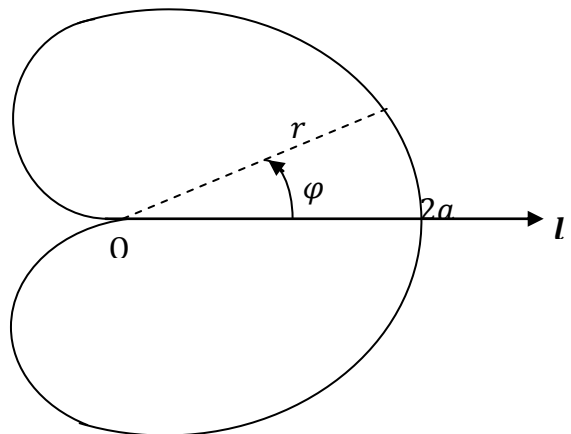
$$r'_{\varphi} = -a \cdot \sin \varphi;$$

$$r^2 + (r'_{\varphi})^2 = a^2(1 + \cos \varphi)^2 + a^2 \sin^2 \varphi =$$

$$= 2a^2 \cdot (1 + \cos \varphi) = 4a^2 \cdot \cos^2 \frac{\varphi}{2}.$$

$$|L| = 2 \cdot \int_0^{\pi} \sqrt{4a^2 \cdot \cos^2 \frac{\varphi}{2}} d\varphi =$$

$$= 4a \cdot \int_0^{\pi} \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = 8a \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \Big|_0^{\pi} = 8a.$$

Длина дуги пространственной кривой.

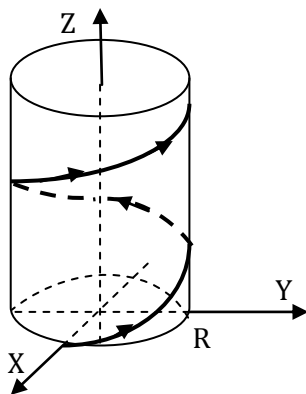
Для простой пространственной кривой определение длины дуги дается в таком же виде, как и для плоской кривой, а именно: как предел длин ломаных, вписанных в данную дугу.

В случае, когда кривая L задана параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), t \in [\alpha; \beta], \text{ где } x(t), y(t), z(t) - \text{непрерывно дифференцируемые функции,} \\ z = z(t) \end{cases}$$

формула длины дуги имеет вид: $|L| = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2} dt.$

Пример 6. Длина одного витка винтовой линии $\begin{cases} x = R \cdot \cos t \\ y = R \cdot \sin t, t \in [0; 2\pi]. \\ z = k \cdot t \end{cases}$



Здесь $x'_t = -R \cdot \sin t$, $y'_t = R \cdot \cos t$, $z'_t = k$; $\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2} = \sqrt{R^2 + k^2}$.

$$|L| = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 + k^2} dt = 2\pi \cdot \sqrt{R^2 + k^2}.$$

Замечание.

Во всех приведенных здесь формулах длины дуги предполагалось, что кривая задается уравнениями, в которых функции являются *непрерывно дифференцируемыми*. Такие кривые называются *гладкими кривыми*.

Если кривая не является гладкой, то она разбивается на части, каждая из которых является уже гладкой кривой, и вычисляется длина каждой из этих частей. Затем эти длины складываются, и вычисляется длина всей кривой.

§ 2. Вычисление площади плоской фигуры.

Площадь фигуры в прямоугольных декартовых координатах.

Из геометрического смысла определенного интеграла нам известно, что площадь S криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной функции $y = f(x)$ (где $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a; b]$), осью OX и прямыми $x = a$ и $x = b$ ($a < b$), вычисляется по формуле:

$$\boxed{S = \int_a^b f(x) dx} \quad \text{или} \quad \boxed{S = \int_a^b y dx}.$$

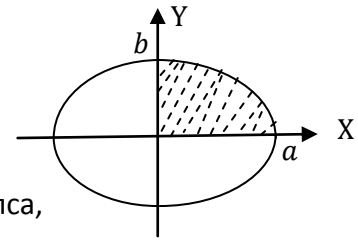
Этой формулой можно пользоваться и при параметрическом задании кривой, ограничивающей криволинейную трапецию: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in [\alpha; \beta]$. В этом случае имеем:

$$S = \int_a^b y dx = \left[\begin{matrix} x = x(t), dx = x'(t)dt, y = y(t) \\ x = a \Rightarrow t = \alpha, x = b \Rightarrow t = \beta \end{matrix} \right] = \int_{\alpha}^{\beta} y(t) x'(t) dt.$$

Таким образом, получаем формулу: $\boxed{S = \int_{\alpha}^{\beta} y(t) x'(t) dt}.$

Пример 1.

Площадь эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.



Достаточно вычислить площадь $\frac{1}{4}$ -й части эллипса, расположенной в первой четверти.

Параметрические уравнения имеют вид: $\begin{cases} x = a \cdot \sin t \\ y = b \cdot \cos t \end{cases}, t \in [0; \frac{\pi}{2}]$.

По формуле площади фигуры для случая параметрического задания кривой получим:

$$\begin{aligned} \frac{S}{4} &= \int_{\alpha}^{\beta} y(t) x'(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} b \cdot \cos t \cdot a \cdot \cos t dt = a b \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{a b}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = \\ &= \frac{a b}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a b}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi a b}{4} \Rightarrow S = \pi a b. \end{aligned}$$

Таким образом, площадь эллипса равна: $S_{\text{эллипса}} = \pi a b$.

В частности, при $a = b = R$ получаем площадь круга: $S_{\text{круга}} = \pi R^2$.

Пример 2.

Найти площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды $\begin{cases} x = R \cdot (t - \sin t) \\ y = R \cdot (1 - \cos t) \end{cases}$.

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} y(t) x'(t) dt = \int_0^{2\pi} R^2 (1 - \cos t)^2 dt = R^2 \cdot \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t) dt = \\ &= R^2 (t - 2\sin t) \Big|_0^{2\pi} + \frac{R^2}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2t) dt = 2\pi R^2 + \frac{R^2}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{2\pi} = \\ &= 2\pi R^2 + \pi R^2 = 3\pi R^2. \end{aligned}$$

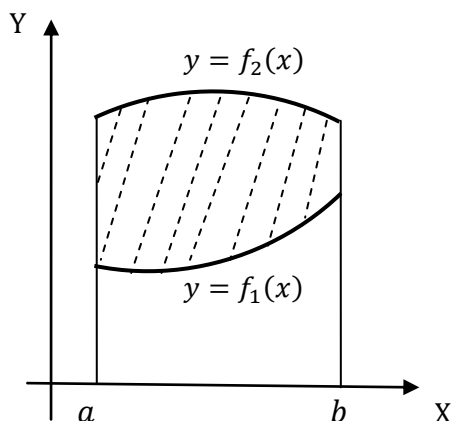
Если криволинейная трапеция ограничена графиком непрерывной функции $x = f(y)$ (где $f(y) \geq 0 \forall y \in [c; d]$), осью OY , прямыми $y = c$ и $y = d$ ($c < d$), то в этом случае ее площадь S вычисляется по формуле:

$$S = \int_c^d f(y) dy \quad \text{или} \quad S = \int_c^d x dy,$$

а в случае параметрического задания кривой — по формуле: $S = \int_{\alpha}^{\beta} x(t) y'(t) dt$.

Введем понятие *обобщенной* криволинейной трапеции.

Пусть функции $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ — непрерывные функции на $[a; b]$ и такие, что $f_2(x) \geq f_1(x) \geq 0 \forall x \in [a; b]$. Фигура, ограниченная графиками функций $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$, называется *обобщенной* криволинейной трапецией.



Площадь S этой фигуры равна разности площадей S_2 и S_1 криволинейных трапеций, ограниченных графиками функций $y = f_2(x)$ и $y = f_1(x)$:

$$S = S_2 - S_1 = \int_a^b f_2(x) dx - \int_a^b f_1(x) dx \Rightarrow$$

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx.$$

Формула для площади *обобщенной* криволинейной трапеции сохранится и в случае, когда нарушено условие неотрицательности: $f_1(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a; b]$.

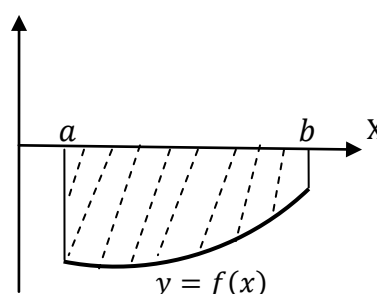
Действительно, если вся фигура или какая-то ее часть лежит ниже оси абсцисс, то перемещая ее вверх параллельно оси ординат на d единиц, получим фигуру, удовлетворяющую прежним условиям. Следовательно, для новой фигуры можно применять прежнюю формулу:

$$S = \int_a^b [(f_2(x) + d) - (f_1(x) + d)] dx = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx.$$

И остается лишь заметить, что при перемещении фигур их площади не изменяются, т.е. площадь заданной фигуры равна площади новой фигуры.

В частности, если верхней границей области является ось абсцисс, то формула для площади примет вид:

$$S = \int_a^b [0 - f(x)] dx = - \int_a^b f(x) dx = \int_a^b |f(x)| dx.$$



(Понятия «фигура» и «область» здесь и далее следует понимать как синонимы).

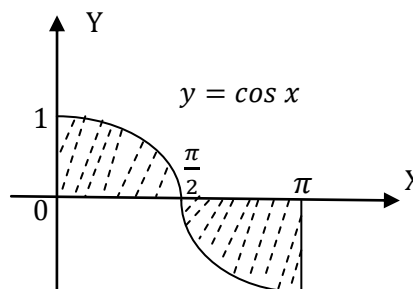
Если условие: $f_2(x) \geq f_1(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a; b]$ — не выполнено, то площадь *обобщенной* криволинейной трапеции можно записать в виде:

$$S = \int_a^b |f_2(x) - f_1(x)| dx.$$

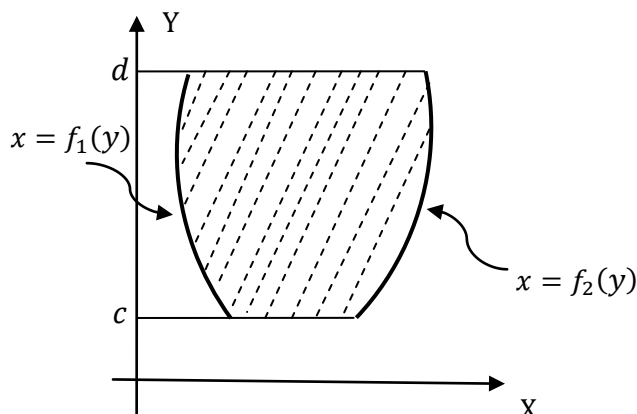
Пример 3.

Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = \cos x$ и осью абсцисс на промежутке $[0; \pi]$.

$$\begin{aligned} S &= \int_0^\pi |\cos x - 0| dx = \int_0^\pi |\cos x| dx = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos x| dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi |\cos x| dx = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi -\cos x dx = \\ &= \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \sin x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^\pi = (1 - 0) - (0 - 1) = 2. \end{aligned}$$



Обобщенная криволинейная трапеция может быть задана и как область, ограниченная графиками функций $x = f_1(y)$, $x = f_2(y)$, $y \in [c; d]$ и прямыми $y = c$, $y = d$. В этом случае площадь фигуры вычисляется по формуле:

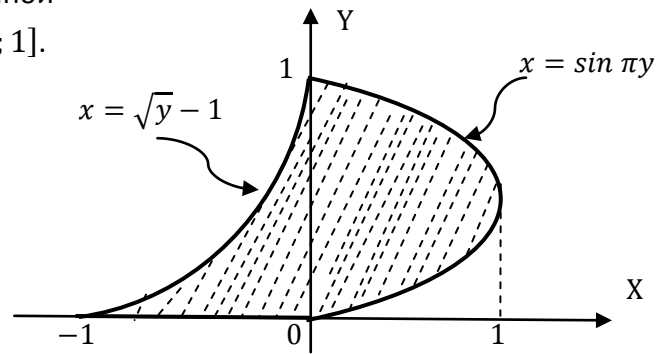


$$S = \int_c^d |f_2(y) - f_1(y)| dy.$$

Пример 4.

Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $x = \sin \pi y$, $x = \sqrt{y} - 1$, $y \in [0; 1]$.

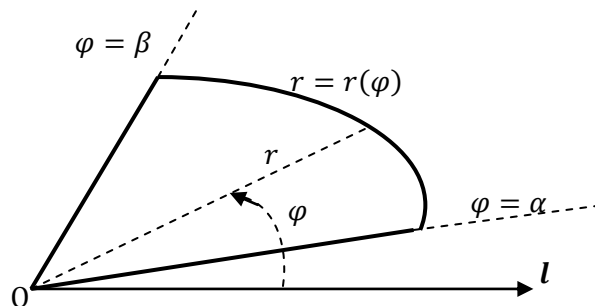
$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 |\sin \pi y - (\sqrt{y} - 1)| dy = \\ &= \int_0^1 (\sin \pi y - \sqrt{y} + 1) dy = \\ &= \left(-\frac{1}{\pi} \cdot \cos \pi y - \frac{2}{3} \cdot y\sqrt{y} + y \right) \Big|_0^1 = \\ &= \left(\frac{1}{\pi} - \frac{2}{3} + 1 \right) - \left(-\frac{1}{\pi} - 0 + 0 \right) = \frac{2}{\pi} + \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Замечание.

Если плоская фигура имеет «сложную» форму, то ее следует разбить на части так, чтобы можно было применить к каждой ее части уже известные формулы. Затем нужно сложить площади этих частей и получить площадь всей фигуры.

Площадь фигуры в полярных координатах.

Криволинейным сектором называется плоская фигура, ограниченная линией, заданной в полярной системе координат уравнением $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha; \beta]$, где $r(\varphi)$ — непрерывная функция, и двумя лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ ($\alpha < \beta$).

Теорема.

Площадь S криволинейного сектора, ограниченного линией $r = r(\varphi)$ и лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, вычисляется по формуле:

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi.$$

Доказательство.

Выполним следующие действия.

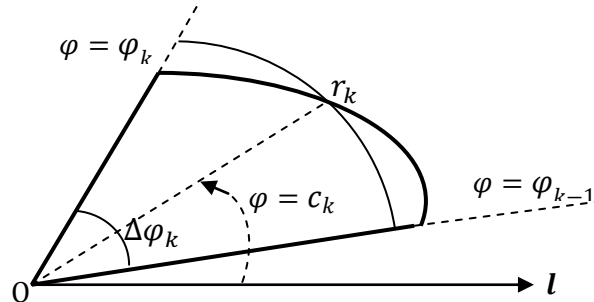
1) Разбиваем промежуток $[\alpha; \beta]$ на n частичных промежутков точками φ_k , $k = 1 \div n$, $\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \dots < \varphi_{n-1} < \varphi_n = \beta$.

2) Проведем лучи $\varphi = \varphi_k$, $k = 1, \dots, n$. Криволинейный сектор тем самым разобьется на n частичных секторов. Пусть S_k — площадь k -того сектора, тогда $S = \sum_{k=1}^n S_k$.

3) Выбираем промежуточные точки $c_k \in [\varphi_{k-1}; \varphi_k]$, $k = 1 \div n$.

Пусть $\Delta\varphi_k = \varphi_k - \varphi_{k-1}$, $\lambda = \max \{\Delta\varphi_1, \Delta\varphi_2, \dots, \Delta\varphi_n\}$ – ранг разбиения.

Площадь k -того сектора может быть вычислена приближенно, с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, как площадь *кругового сектора* с радиусом $r_k = r(c_k)$ и с центральным углом $\Delta\varphi_k$.



$$S_k \approx \frac{1}{2} r_k^2 \cdot \Delta\varphi_k.$$

Тогда вся площадь криволинейного сектора приближенно равна сумме:

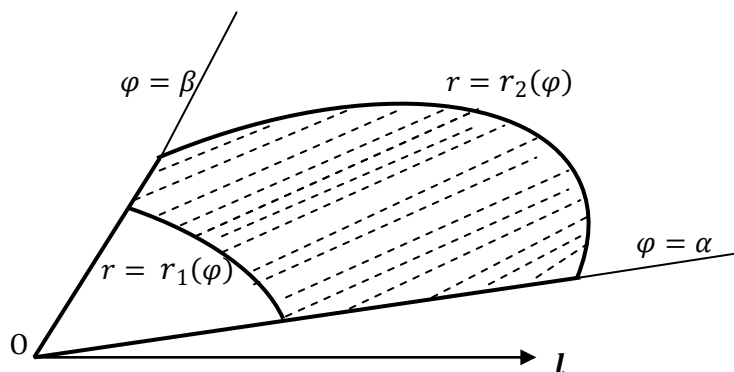
$$S \approx \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} r_k^2 \cdot \Delta\varphi_k.$$

Эти суммы являются интегральными суммами для функции $\frac{1}{2} r^2(\varphi)$. Следовательно:

$$S = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} r_k^2 \cdot \Delta\varphi_k = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi.$$

Теорема доказана.

Обобщенным криволинейным сектором называется плоская фигура, ограниченная линиями $r = r_1(\varphi)$, $r = r_2(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha; \beta]$, где $r_2(\varphi) \geq r_1(\varphi) \forall \varphi \in [\alpha; \beta]$ и двумя лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ ($\alpha < \beta$).



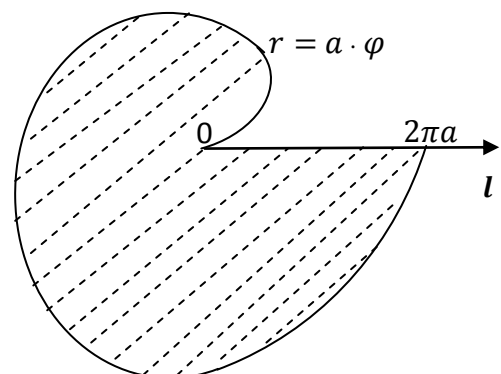
Площадь обобщенного криволинейного сектора равна:

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [r_2^2(\varphi) - r_1^2(\varphi)] d\varphi.$$

Пример 5.

Найти площадь фигуры, ограниченной полярной осью и первым витком спирали **Архимеда** $r = a \cdot \varphi$.

Эта фигура представляет собой криволинейный сектор, ограниченный лучами $\varphi = 0$, $\varphi = 2\pi$ и линией $r = a \cdot \varphi$.



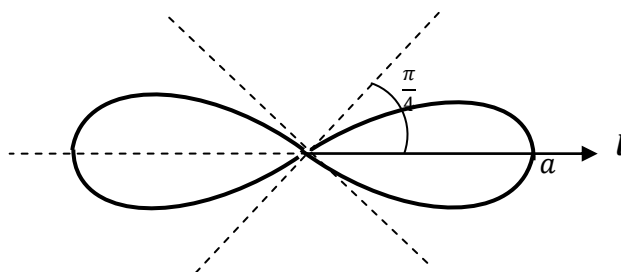
Применяя формулу для площади криволинейного сектора, получим:

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a^2 \cdot \varphi^2 d\varphi = \frac{a^2}{6} \varphi^3 \Big|_0^{2\pi} = \frac{4}{3} \pi^3 a^2.$$

Пример 6.

Найти площадь фигуры, ограниченной лемнискатой **Бернулли** $r = a \cdot \sqrt{\cos 2\varphi}$.

Область определения функции: $\cos 2\varphi \geq 0 \Leftrightarrow \varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$.



Учитывая симметричность фигуры, вычислим сначала площадь той ее части, которая лежит в первом квадранте, затем результат умножим на 4:

$$\frac{S}{4} = \frac{1}{2} \int_a^b r^2(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cdot \cos 2\varphi d\varphi = \frac{a^2}{4} \cdot \sin 2\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{4} \cdot (1 - 0) = \frac{a^2}{4} \Rightarrow S = a^2.$$

Замечание.

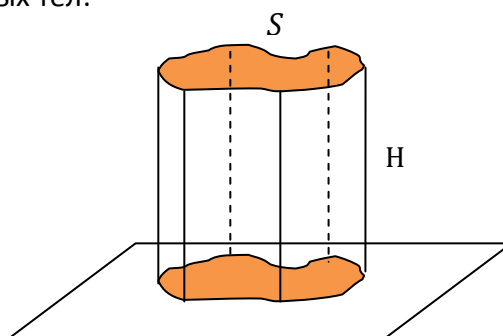
Если фигура имеет «сложную» форму, то ее следует разбить лучами, выходящими из полюса, на криволинейные секторы так, чтобы можно было применить к каждому сектору уже известные формулы. Затем нужно сложить площади этих частей и получить площадь всей фигуры.

§ 3. Вычисление объема тела.

Приступая к изложению данной темы, мы считаем известными формулы для вычисления объемов простейших пространственных тел: куба, параллелепипеда, призмы, цилиндра.

Например, объем V произвольного прямого цилиндра с площадью основания S и высотой H равен произведению площади основания на высоту:

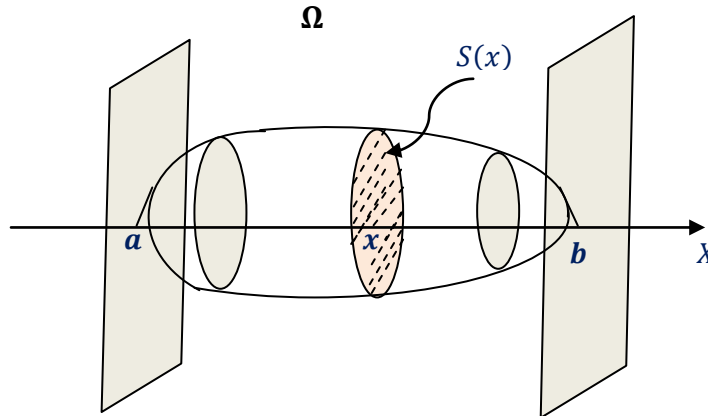
$$V = S \cdot H.$$



Выведем формулы для вычисления объемов тел достаточно произвольных форм. Пространственное тело будем обозначать здесь буквой Ω .

Вычисление объема тела по площадям поперечных сечений.

Пусть тело Ω расположено между параллельными плоскостями $x = a$ и $x = b$. Рассмотрим поперечные сечения тела Ω плоскостями, перпендикулярными к оси OX .



Пусть $S(x)$ — площадь поперечного сечения в любой точке x , $x \in [a; b]$.

Теорема.

Объем V тела с известными площадями $S(x)$ поперечных сечений выражается формулой:

$$V = \int_a^b S(x) dx.$$

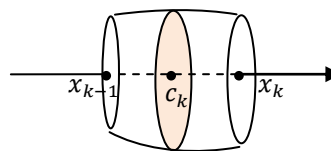
Доказательство.

Разобьем промежуток $[a; b]$ точками $\{x_k\}_{k=0}^n$ на частичные промежутки; пусть $\lambda = \max \{\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n\}$ — *ранг разбиения*. Через каждую точку деления проведем плоскость перпендикулярно к оси Ox .

Этим плоскостями тело Ω будет «разрезано» на частичные тела Ω_k , которые расположены между плоскостями $x = x_{k-1}$ и $x = x_k$, $k = 1 \div n$, при этом

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \dots \cup \Omega_n.$$

Для каждого частичного тела Ω_k выбираем промежуточную точку $c_k \in [x_{k-1}; x_k]$ и вычисляем значение $S(c_k)$.



Объем $V(\Omega_k)$ приближенно (с точностью до бесконечно малых более высокого порядка) равен объему цилиндрического тела с площадью основания $S(c_k)$ и высотой $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$: $V_k = V(\Omega_k) = S(c_k) \cdot \Delta x_k$, $k = 1 \div n$.

Тогда весь объем приближенно равен сумме: $V \approx \sum_{k=1}^n S(c_k) \cdot \Delta x_k$.

Эти суммы являются интегральными суммами для функции $S(x)$. Следовательно:

$$V = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n S(c_k) \cdot \Delta x_k = \int_a^b S(x) dx.$$

Теорема доказана.

Пример 1.

Объем кругового конуса с высотой H и радиусом основания R .

В сечении кругового конуса, проведенном в точке x перпендикулярно к оси абсцисс, будет круг некоторого радиуса r . Площадь круга равна $S(x) = \pi r^2$.

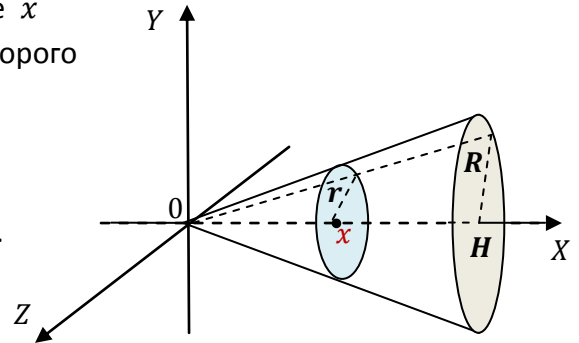
Из подобия треугольников получаем:

$$\frac{x}{r} = \frac{H}{R} \Rightarrow r = \frac{R}{H}x \Rightarrow S(x) = \pi \left(\frac{R}{H}x\right)^2 = \pi \frac{R^2}{H^2}x^2.$$

Тогда объем конуса равен:

$$V = \int_0^H S(x) dx = \int_0^H \pi \frac{R^2}{H^2} x^2 dx = \pi \frac{R^2}{H^2} \frac{x^3}{3} \Big|_0^H = \frac{1}{3} \pi R^2 H.$$

Получаем формулу объема конуса: $V_{\text{конуса}} = \frac{1}{3} \pi R^2 H$.

Пример 2.

Объем эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Уравнение эллипсоида можно записать в виде: $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$, где $-a \leq x \leq a$.

Эллипсоид расположен между плоскостями $x = -a$ и $x = a$, а его сечение в точке $x = \text{const}$ представляет собой эллипс:

$$\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2} = 1.$$

Полуоси этого эллипса равны $a_0 = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ и $b_0 = c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$. Следовательно, площадь сечения равна $S(x) = \pi a_0 \cdot b_0$ (см. Пример 1 из §2), т.е.

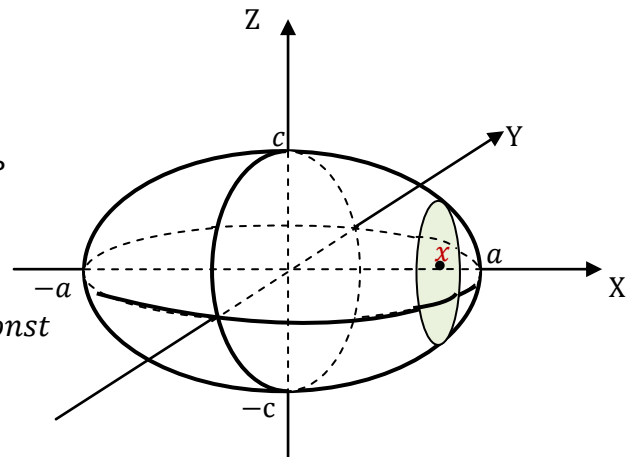
$$S(x) = \pi b \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \cdot c \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} = \pi bc \cdot \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

Тогда объем эллипсоида равен:

$$\begin{aligned} V &= \int_{-a}^a S(x) dx = \int_{-a}^a \pi bc \cdot \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \pi bc \int_{-a}^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = 2\pi bc \int_0^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \\ &= 2\pi bc \cdot \left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right) \Big|_0^a = 2\pi bc \cdot \frac{2a}{3} = \frac{4}{3} \pi abc. \end{aligned}$$

Получаем формулу объема эллипсоида: $V_{\text{эллипсоида}} = \frac{4}{3} \pi abc$.

В частности, при $a = b = c = R$ получаем объем шара: $V_{\text{шара}} = \frac{4}{3} \pi R^3$.



Пример 3.

Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

$$\frac{x^2}{4} + y^2 - z^2 = 1, \quad z = 0, \quad z = 3.$$

Здесь первое уравнение задает поверхность, которая называется *однополостный гиперболоид*, а остальные - задают плоскости, параллельные плоскости OXY .

В сечении гиперболоида плоскостью $z = \text{const}$ получаем эллипс с уравнением $\frac{x^2}{4} + y^2 = z^2 + 1$ или

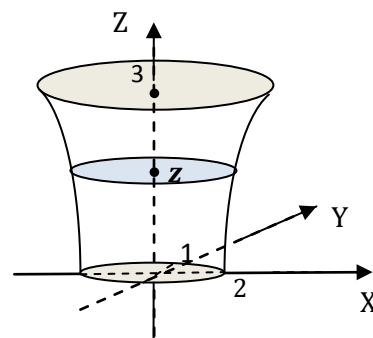
$$\frac{x^2}{(2\sqrt{1+z^2})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{1+z^2})^2} = 1, \text{ полуоси которого равны}$$

$$a_0 = 2\sqrt{1+z^2} \text{ и } b_0 = \sqrt{1+z^2}. \text{ Следовательно,}$$

$$\text{площадь сечения равна } S(z) = \pi a_0 \cdot b_0 = 2\pi(1+z^2).$$

Тогда объем тела равен:

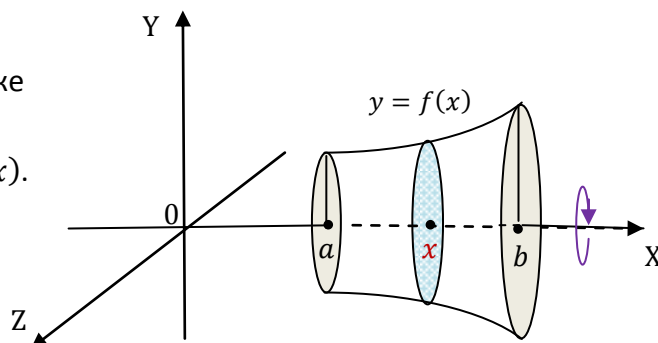
$$V = \int_0^3 S(z) dz = \int_0^3 2\pi(1+z^2) dz = 2\pi \left(z + \frac{z^3}{3} \right) \Big|_0^3 = 2\pi(3+9) = 24\pi.$$

Объем тела вращения.

Если криволинейную трапецию, ограниченную графиком непрерывной функции $y = f(x)$, осью OX и прямыми $x = a$ и $x = b$, вращать вокруг оси OX , то полученное тело называется *телом вращения*.

Сечением *тела вращения* плоскостью, перпендикулярной к оси абсцисс в любой точке $x \in [a; b]$, является круг радиуса $r = |f(x)|$, площадь которого равна $S(x) = \pi r^2 = \pi f^2(x)$. Поэтому объем тела вращения равен:

$$V_{\text{тела вращ.}} = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$



При вращении вокруг оси OX *обобщенной* криволинейной трапеции, ограниченной графиками функций $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, где $f_2(x) \geq f_1(x) \forall x \in [a; b]$, и прямыми $x = a$, $x = b$, получаем тело вращения, объем которого вычисляется по формуле:

$$V_{\text{тела вращ.}} = \pi \int_a^b [f_2^2(x) - f_1^2(x)] dx.$$

Если криволинейная трапеция, ограниченная графиком непрерывной функции $x = f(y)$, $y \in [c; d]$, осью OY и прямыми $y = c$ и $y = d$, вращается вокруг оси OY , то объем тела вращения равен:

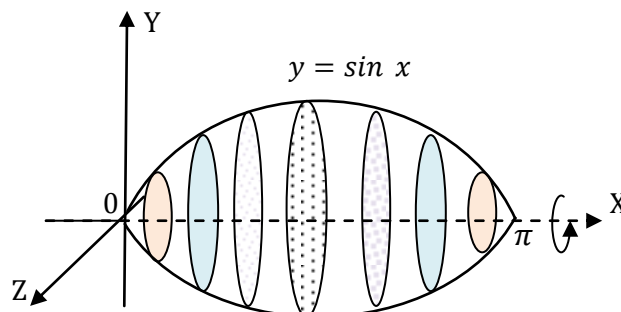
$$V_{\text{тела вращ.}} = \pi \int_c^d x^2 dy = \pi \int_c^d f^2(y) dy.$$

При вращении *обобщенной* криволинейной трапеции, ограниченной графиками функций $x = f_1(y)$, $x = f_2(y)$, где $f_2(y) \geq f_1(y) \forall y \in [c; d]$, и прямыми $y = c$ и $y = d$, получаем тело вращения, объем которого вычисляется по формуле:

$$V_{\text{тела вращ.}} = \pi \int_c^d [f_2^2(y) - f_1^2(y)] dy.$$

Пример 4.

Объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной графиком функции $y = \sin x$, $x \in [0; \pi]$ и осью OX, равен:

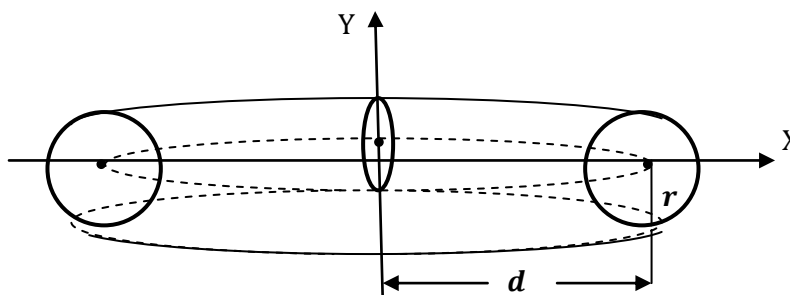


$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^\pi y^2 dx = \pi \int_0^\pi \sin^2 x dx = \\ &= \pi \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{\pi}{2} \left(x + \frac{1}{2} \cdot \sin 2x \right) \Big|_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}. \end{aligned}$$

Пример 5.

Найти объем *тора*.

Тор представляет собой тело, полученное вращением **круга** радиуса r вокруг некоторой оси, находящейся на расстоянии d от его центра ($d > r$).



Из уравнения окружности: $(x - d)^2 + y^2 = r^2$ - выразим переменную x .

$(x - d)^2 = r^2 - y^2 \Rightarrow x = d \pm \sqrt{r^2 - y^2}$ - уравнения полуокружностей.

Объем тора равен разности объемов тел, образованных вращением вокруг оси OY фигур, ограниченных этими полуокружностями:

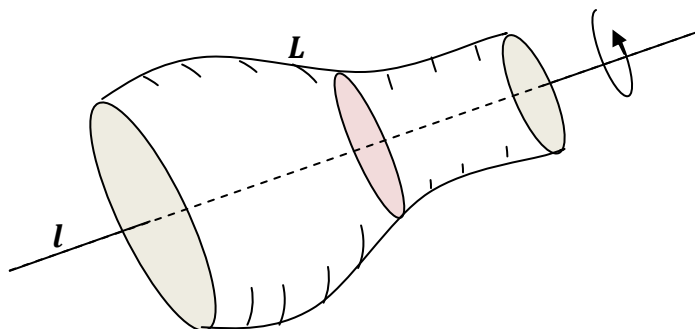
$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-r}^r (d + \sqrt{r^2 - y^2})^2 dy - \pi \int_{-r}^r (d - \sqrt{r^2 - y^2})^2 dy = \pi \int_{-r}^r 4d \cdot \sqrt{r^2 - y^2} dy = \\ &= 8d\pi \int_0^r \sqrt{r^2 - y^2} dy = \left[\begin{array}{l} y = r \cdot \sin t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \quad dy = r \cdot \cos t dt \\ t = 0 \Rightarrow y = 0, \quad t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow y = r \\ \sqrt{r^2 - y^2} = \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 t} = r \cdot \cos t \end{array} \right] = \\ &= 8d\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos^2 t dt = 8d\pi r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 4d\pi r^2 \left(t + \frac{1}{2} \cdot \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2d\pi^2 r^2. \end{aligned}$$

Таким образом, объем тора равен: $V_{\text{тора}} = 2\pi^2 r^2 d$.

§ 4. Вычисление площади поверхности.

Площадь поверхности вращения.

Пусть на плоскости даны *простая* кривая L и некоторая ось l . Если вращать кривую L вокруг этой оси, то она опишет некоторую *поверхность вращения*.



Если вписать в эту кривую *ломаную* линию и вращать ее вместе с кривой, то эта ломаная опишет некоторую поверхность. Эта поверхность может быть боковой поверхностью цилиндра, конуса или усеченного конуса, площади которых вычисляются по известным формулам элементарной геометрии.

Определение.

Площадью поверхности вращения описанной кривой называется предел площади поверхности, описанной ломаной, при стремлении к нулю наибольшей из длин сторон этой ломаной.

Приведем без доказательства формулы для вычисления площади поверхности вращения при различных способах задания кривой.

Если *гладкая* кривая задана явным уравнением: $y = f(x)$, $x \in [a; b]$, где $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [a; b]$, то площадь поверхности вращения вокруг оси OX вычисляется по формуле:

$$S_{\text{пов. вращ.}} = 2\pi \int_a^b y \cdot \sqrt{1 + (y')^2} dx = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Если *гладкая* кривая задана параметрическими уравнениями: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in [\alpha; \beta]$, где $y(t) \geq 0 \forall t \in [\alpha; \beta]$ то площадь поверхности вращения вокруг оси OX вычисляется по формуле:

$$S_{\text{пов. вращ.}} = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} y \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} y(t) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

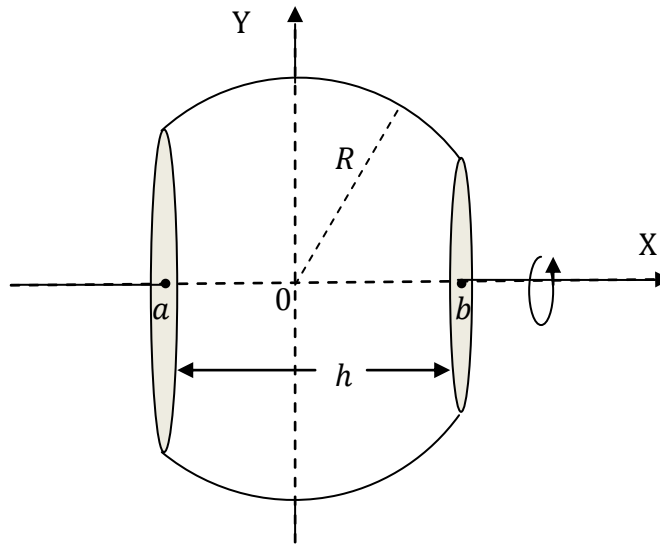
Если *гладкая* кривая задана уравнением в полярной системе координат: $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha; \beta]$, то площадь поверхности вращения вокруг полярной оси вычисляется по формуле:

$$S_{\text{пов. вращ.}} = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} r(\varphi) \cdot |\sin \varphi| \cdot \sqrt{r^2 + (r'_{\varphi})^2} d\varphi.$$

Аналогичные формулы будут и при вращении кривой вокруг оси OY.

Пример 1.

Площадь поверхности шарового пояса радиуса R и высотой h .



Шаровой пояс получается вращением вокруг оси OX части полуокружности $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, расположенной над отрезком $[a; b]$, где $b - a = h$.

$$\text{Здесь } y' = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}; \quad \sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}.$$

$$\begin{aligned} S_{\text{пов. вращ.}} &= 2\pi \int_a^b y \cdot \sqrt{1 + (y')^2} dx = 2\pi \int_a^b \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = 2\pi \int_a^b R dx = \\ &= 2\pi R (b - a) = 2\pi R \cdot h. \end{aligned}$$

Таким образом, площадь поверхности шарового пояса радиуса R и высотой h равна:

$$\boxed{S_{\text{шар. пояса}} = 2\pi R \cdot h.}$$

В частности, при $h = 2R$ получаем *площадь поверхности сферы*:

$$\boxed{S_{\text{сферы}} = 4\pi R^2.}$$

Пример 2.

Площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси OX одной арки циклоиды:

$$\begin{cases} x = R \cdot (t - \sin t) \\ y = R \cdot (1 - \cos t) \end{cases}, \quad t \in [0; 2\pi].$$

$$\begin{aligned} \text{Здесь } x'_t &= R \cdot (1 - \cos t), \quad y'_t = R \cdot \sin t, \quad (x'_t)^2 + (y'_t)^2 = R^2(1 - \cos t)^2 + \\ &+ R^2 \sin^2 t = 2R^2(1 - \cos t), \quad \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} = R \cdot \sqrt{2 \cdot (1 - \cos t)} = 2R \cdot \sin \frac{t}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{\text{пов. вращ.}} &= 2\pi \int_0^{2\pi} y \cdot \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt = 2\pi \int_0^{2\pi} R \cdot (1 - \cos t) \cdot 2R \cdot \sin \frac{t}{2} dt = \\ &= 8\pi R^2 \cdot \int_0^{2\pi} \sin^2 \frac{t}{2} \cdot \sin \frac{t}{2} dt = 16\pi R^2 \cdot \int_0^{2\pi} \left(\cos^2 \frac{t}{2} - 1 \right) \cdot d\left(\cos \frac{t}{2} \right) = \\ &= 16\pi R^2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cos^3 \frac{t}{2} - \cos \frac{t}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} = 16\pi R^2 \cdot \left(\left(-\frac{1}{3} + 1 \right) - \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \right) = \frac{64}{3} \pi R^2. \end{aligned}$$

Пример 3.

Площадь поверхности, образованной вращением вокруг полярной оси кардиоиды:
 $r = a \cdot (1 + \cos \varphi)$, $\varphi \in [0; \pi]$.

$$\text{Здесь } r'_\varphi = -a \cdot \sin \varphi; \quad r^2 + (r'_\varphi)^2 = a^2(1 + \cos \varphi)^2 + a^2 \sin^2 \varphi =$$

$$= 2a^2 \cdot (1 + \cos \varphi) = 4a^2 \cdot \cos^2 \frac{\varphi}{2}; \quad \sqrt{r^2 + (r'_\varphi)^2} = 2a \cdot \cos \frac{\varphi}{2}; \quad |\sin \varphi| = \sin \varphi.$$

$$\begin{aligned} S_{\text{пов. вращ.}} &= 2\pi \int_0^\pi r(\varphi) \cdot |\sin \varphi| \cdot \sqrt{r^2 + (r'_\varphi)^2} d\varphi = 2\pi \int_0^\pi 2a^2(1 + \cos \varphi) \sin \varphi \cdot \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = \\ &= 8\pi a^2 \int_0^\pi \cos^3 \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \varphi d\varphi = 16\pi a^2 \int_0^\pi \cos^4 \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi = -32\pi a^2 \int_0^\pi \cos^4 \frac{\varphi}{2} d\left(\cos \frac{\varphi}{2}\right) = \\ &= -32\pi a^2 \left(\frac{1}{5} \cos^5 \frac{\varphi}{2}\right) \Big|_0^\pi = -32\pi a^2 \left(0 - \frac{1}{5}\right) = \frac{32}{5} \pi a^2. \end{aligned}$$

Пример 4.

Площадь поверхности *тора*.

Тор представляет собой тело, полученное вращением круга радиуса r вокруг некоторой оси, находящейся на расстоянии d от его центра ($d > r$).

Поверхность тора можно разбить на две поверхности: «ближнюю» и «дальнюю» по отношению к центру тора; эти поверхности получаются вращениями полуокружностей: $x = d \pm \sqrt{r^2 - y^2}$. Вся площадь поверхности тора равна сумме площадей этих двух поверхностей: $S = S_1 + S_2$, где $S_{1,2} = 2\pi \int_r^{-r} x \cdot \sqrt{1 + (x')^2} dy$.

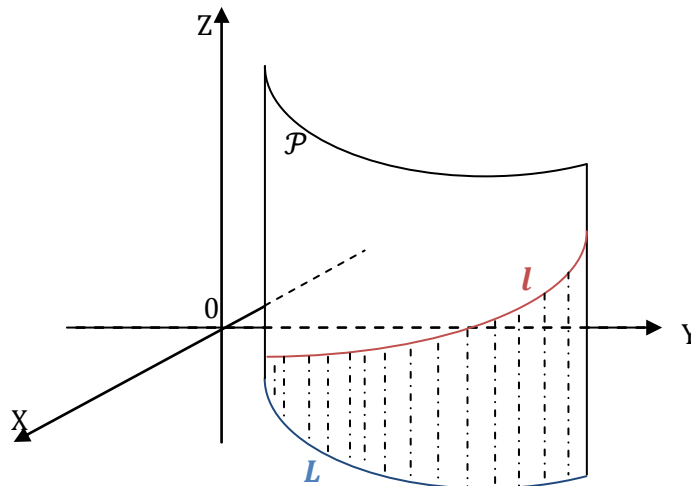
$$\text{Здесь } x' = \pm \frac{y}{\sqrt{r^2 - y^2}}; \quad \sqrt{1 + (x')^2} = \sqrt{1 + \frac{y^2}{r^2 - y^2}} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - y^2}}.$$

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_r^{-r} (d + \sqrt{r^2 - y^2}) \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 - y^2}} dy + 2\pi \int_r^{-r} (d - \sqrt{r^2 - y^2}) \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 - y^2}} dy = \\ &= 4d\pi r \int_r^{-r} \frac{1}{\sqrt{r^2 - y^2}} dy = 4d\pi r \cdot \arcsin \frac{y}{r} \Big|_r^{-r} = 4d\pi r \cdot \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 4\pi^2 r d. \end{aligned}$$

Таким образом, площадь поверхности *тора* равна: $S_{\text{пов. тора}} = 4\pi^2 r d$.

Площадь цилиндрической поверхности.

Пусть на плоскости OXY дана *простая* кривая L . Построим *цилиндрическую* поверхность $\mathcal{P}$ с направляющей L и с образующими, параллельными оси OZ.



По этой цилиндрической поверхности проведем кривую l . Предполагаем, что эта кривая лежит выше направляющей L .

Требуется вычислить площадь той части цилиндрической поверхности $\mathcal{P}$, которая лежит «под кривой» l .

Если вписать в кривую L ломаную линию, то соответствующая ломаная будет вписана и в кривую l . Соединив соответствующие вершины ломаных линий, получим боковую поверхность некоторой призмы, площадь которой вычисляется по формулам из элементарной геометрии.

Определение.

Площадью цилиндрической поверхности, ограниченной направляющей L и кривой l , называется предел площади боковой поверхности призмы, построенной на ломаных, вписанных в эти кривые, при стремлении к нулю наибольшей из длин сторон ломаной.

Приведем без доказательства формулы для вычисления площади цилиндрической поверхности при различных способах задания кривых, ограничивающих эту поверхность.

Если цилиндрическая поверхность задана явными уравнениями:
 $y = f(x)$, $x \in [a; b]$, $z = \varphi(x)$, – то площадь цилиндрической поверхности вычисляется по формуле:

$$S_{\text{пов. цил.}} = \int_a^b z \cdot \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_a^b \varphi(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Если цилиндрическая поверхность задана параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), t \in [\alpha; \beta], \\ z = z(t) \end{cases} \text{ – то площадь цилиндрической поверхности вычисляется по}$$

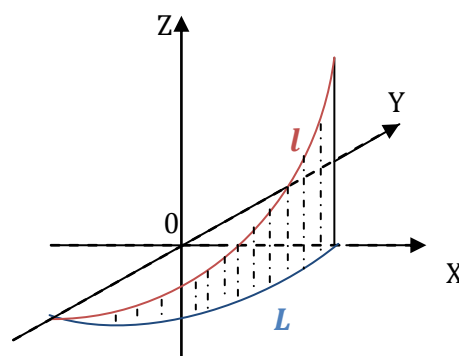
формуле:
$$S_{\text{пов. цил.}} = \int_{\alpha}^{\beta} z \cdot \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt = \int_{\alpha}^{\beta} z(t) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

Пример 5.

Найти площадь цилиндрической поверхности:

$$y = x^2 - 1, z = x, \text{ где } x \geq 0, y \leq 0.$$

$$\begin{aligned} S_{\text{пов. цил.}} &= \int_0^1 z \cdot \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_0^1 x \cdot \sqrt{1 + 4x^2} dx = \\ &= \frac{1}{8} \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2} \cdot d(1 + 4x^2) = \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} \sqrt{(1 + 4x^2)^3} \Big|_0^1 = \\ &= \frac{1}{12} \cdot (\sqrt{5^3} - 1) = \frac{1}{12} \cdot (5\sqrt{5} - 1). \end{aligned}$$



Пример 6.

Найти площадь цилиндрической поверхности: $\begin{cases} x = R \cdot \cos t \\ y = R \cdot \sin t \end{cases}, t \in [0; \frac{\pi}{2}], z = x.$

Эта цилиндрическая поверхность «похожа» на поверхность из Примера 5, только направляющей L здесь является четверть окружности из первого квадранта.

$$\begin{aligned} S_{\text{пов. цил.}} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} z \cdot \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} R \cdot \cos t \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t} dt = \\ &= R^2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = R^2 \cdot \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = R^2. \end{aligned}$$

Пример 7.

Найти площадь боковой поверхности прямого кругового цилиндра с радиусом основания R и высотой H .

Боковая поверхность прямого кругового цилиндра может быть задана параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = R \cdot \cos t \\ y = R \cdot \sin t, t \in [0; 2\pi]. \\ z = H \end{cases}$$

$$S_{\text{бок. цил.}} = \int_0^{2\pi} z \cdot \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt = \int_0^{2\pi} H \cdot \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t} dt = 2\pi R \cdot H.$$

$$\boxed{S_{\text{бок. цил.}} = 2\pi R \cdot H}.$$

§ 5. Вычисление физических величин.

Схема применения определенного интеграла.

Пусть требуется определить некоторую величину Q (геометрическую, физическую, экономическую и т.д.), связанную с промежутком $[a; b]$. Например, это может быть длина, площадь, объем, путь, масса и т.д. Говорят, что величина Q является «функцией промежутка».

Предполагается, что эта «функция промежутка» обладает свойством *аддитивности*, т.е. для любого промежутка $[\alpha; \beta] \subset [a; b]$ и для любой промежуточной точки $c \in [\alpha; \beta]$ выполнено равенство:

$$Q([\alpha; \beta]) = Q([\alpha; c]) + Q([c; \beta]).$$

Задача состоит в том, чтобы получить формулу для вычисления значения Q , отвечающего всему промежутку $[a; b]$.

Решение поставленной задачи осуществляется по следующей схеме.

1. Разбиение промежутка $[a; b]$ точками $\{x_k\}_{k=0}^n$ на частичные промежутки:

$$[a; b] = [x_0; x_1] \cup [x_1; x_2] \cup \dots \cup [x_{n-1}; x_n].$$

Пусть $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $k = 1 \div n$ — длины частичных промежутков;

$\lambda = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k$ — ранг разбиения.

При этом $Q = \sum_{k=1}^n \Delta Q_k$, где $\Delta Q_k = Q([x_{k-1}; x_k])$, $k = 1 \div n$

2. Выбор промежуточных точек $\{c_k\}_{k=1}^n$, $c_k \in [x_{k-1}; x_k]$, $k = 1 \div n$ и подбор подходящей функции $q(x)$ — такой, что $\Delta Q_k \approx q(c_k) \cdot \Delta x_k$, причем погрешность этого приближенного равенства должна быть бесконечно малой более высокого порядка, чем Δx_k при $\lambda \rightarrow 0$, т.е.

$$\Delta Q_k = q(c_k) \cdot \Delta x_k + o(\Delta x_k), k = 1 \div n.$$

3. Вычисление значения суммы $\sigma_n = \sum_{k=1}^n q(c_k) \cdot \Delta x_k$, которое является приближенным значением искомой величины Q :

$$Q = \sum_{k=1}^n (q(c_k) \cdot \Delta x_k + o(\Delta x_k)) = \sum_{k=1}^n q(c_k) \cdot \Delta x_k + \sum_{k=1}^n o(\Delta x_k) = \sigma_n + \alpha(\lambda),$$

где $\alpha(\lambda) = \sum_{k=1}^n o(\Delta x_k)$; при этом $\alpha(\lambda) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow 0$.

Действительно:

$$\text{так как } \frac{|o(\Delta x_k)|}{\Delta x_k} \rightarrow 0 \text{ при } \Delta x_k \rightarrow 0 \quad \forall k, \text{ то и } \alpha_n = \max_{1 \leq k \leq n} \frac{|o(\Delta x_k)|}{\Delta x_k} \rightarrow 0$$

при $\lambda \rightarrow 0$; далее имеем:

$$0 \leq |\alpha(\lambda)| = |\sum_{k=1}^n o(\Delta x_k)| \leq \sum_{k=1}^n |o(\Delta x_k)| = \sum_{k=1}^n \frac{|o(\Delta x_k)|}{\Delta x_k} \Delta x_k \leq \alpha_n \cdot \sum_{k=1}^n \Delta x_k = \alpha_n \cdot (b - a),$$

где $\alpha_n \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow 0$; переходя к пределу в последнем неравенстве при $\lambda \rightarrow 0$, получим: $\alpha(\lambda) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow 0$.

Следовательно:

$$Q = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma_n = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n q(c_k) \cdot \Delta x_k = \int_a^b q(x) dx.$$

Согласно этой схеме интеграл представляет собой сумму бесконечно большого числа бесконечно малых величин.

На практике эта схема реализуется в следующей краткой форме.

- 1) Рассматривается «элементарный промежуток» $[x; x + \Delta x]$, которому соответствует «элемент» $\Delta Q = Q([x; x + \Delta x])$ искомой величины Q .
- 2) Из бесконечно малого «элемента» ΔQ выделяют главную часть, линейную относительно Δx (т.е. дифференциал):

$$\Delta Q = q(x) \Delta x + o(\Delta x).$$

Как только это сделано, можно утверждать, что величина Q выражается интегралом:

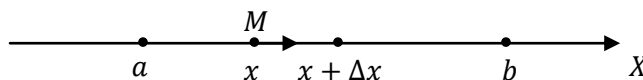
$$Q = \int_a^b q(x) dx.$$

Работа переменной силы.

Пусть материальная точка M перемещается под действием силы $\vec{F}$, направленной вдоль оси OX и имеющей переменную величину $F = F(x)$, где $F(x)$ — непрерывная функция, а x — абсцисса движущейся точки M .

Требуется найти работу A силы $\vec{F}$ по перемещению материальной точки M вдоль оси OX из точки $x = a$ в точку $x = b$.

Рассмотрим «элементарный промежуток» $[x; x + \Delta x]$.



Если значение $F(x)$ на $[x; x + \Delta x]$ постоянно, то работа силы ΔA вычисляется по формуле: $\Delta A = F(x) \cdot \Delta x$.

Если $F(x)$ — не постоянно, то значение силы на этом участке можно записать в виде $F(x) + \alpha(\Delta x)$, где $\alpha(\Delta x) \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$ (ввиду непрерывности функции $F(x)$).

Тогда работа ΔA силы $\vec{F}$ на этом участке равна:

$$\Delta A = (F(x) + \alpha(\Delta x)) \cdot \Delta x = F(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x = F(x)\Delta x + o(\Delta x).$$

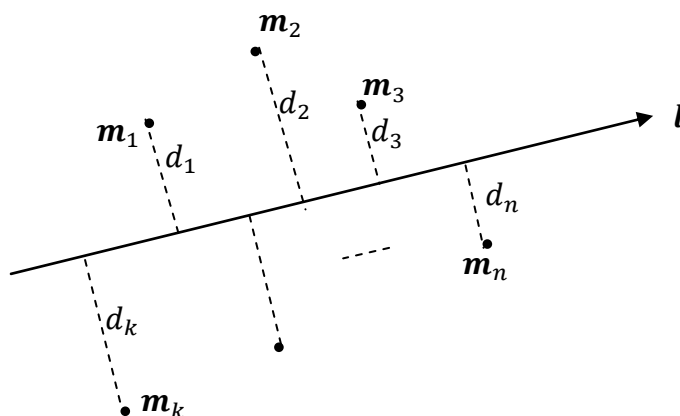
Следовательно: $A = \int_a^b F(x) dx$.

Статические моменты.

Статическим моментом относительно оси l материальной точки M , имеющей массу m и отклонение d (с учетом знака) от оси l , называется величина $M_l = m \cdot d$.

Пусть имеется система n материальных точек с массами $m_1, m_2, \dots, m_n$, лежащих в одной плоскости с осью l и имеющих отклонения $d_1, d_2, \dots, d_n$ (с учетом знаков) от этой оси.

Знаки отклонений учитываются следующим образом: точки, лежащие по одну сторону от оси l , имеют отклонения с одним знаком, а точки, лежащие по другую сторону, имеют отклонения с противоположным знаком.



Статическим моментом относительно оси l этой системы точек называется сумма

$$M_l = \sum_{k=1}^n m_k \cdot d_k.$$

В частности, если на плоскости OXY задана система точек $M_1(x_1; y_1), M_2(x_2; y_2), \dots, M_n(x_n; y_n)$ соответственно с массами $m_1, m_2, \dots, m_n$, то *статическими моментами* этой системы точек относительно осей координат называются суммы:

$$M_X = \sum_{k=1}^n m_k \cdot y_k, \quad M_Y = \sum_{k=1}^n m_k \cdot x_k.$$

Если массы сосредоточены не в отдельных точках, а расположены сплошным образом, заполняя линию или плоскую фигуру, то тогда для выражения *статических моментов* вместо суммы потребуется интеграл.

Приведем без доказательства формулы для вычисления *статических моментов* плоской кривой и плоской фигуры.

Пусть *гладкая* кривая L задана явным уравнением $y = f(x)$, $x \in [a; b]$ и $\rho(x)$ – линейная плотность распределения массы. Тогда статические моменты кривой L относительно осей координат вычисляются по формулам:

$$M_X = \int_a^b \rho \cdot y \cdot \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_a^b \rho(x) \cdot f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx,$$

$$M_Y = \int_a^b \rho \cdot x \cdot \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_a^b \rho(x) \cdot x \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Если кривая L – однородна, т.е. $\rho(x) = \rho = \text{const}$, то

$$M_X = \rho \cdot \int_a^b y \cdot \sqrt{1 + (y')^2} dx = \rho \cdot \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx,$$

$$M_Y = \rho \cdot \int_a^b x \cdot \sqrt{1 + (y')^2} dx = \rho \cdot \int_a^b x \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Пусть плоская фигура является однородной криволинейной трапецией, ограниченной графиком непрерывной функции $y = f(x)$, где $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a; b]$, осью OX и прямыми $x = a$, $x = b$. Тогда *статические моменты* этой фигуры вычисляются по формулам:

$$M_X = \frac{1}{2} \rho \cdot \int_a^b y^2 dx = \frac{1}{2} \rho \cdot \int_a^b f^2(x) dx, \quad M_Y = \rho \cdot \int_a^b x \cdot y dx = \rho \cdot \int_a^b x \cdot f(x) dx.$$

Если фигура является однородной обобщенной криволинейной трапецией, ограниченной графиками непрерывных функций $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, где $f_2(x) \geq f_1(x) \quad \forall x \in [a; b]$ и прямыми $x = a$, $x = b$, то *статические моменты* этой фигуры вычисляются по формулам:

$$M_X = \frac{1}{2} \rho \cdot \int_a^b [f_2^2(x) - f_1^2(x)] dx, \quad M_Y = \rho \cdot \int_a^b x \cdot [f_2(x) - f_1(x)] dx.$$

Замечание.

Для пространственного расположения точек понятия *статических моментов* вводятся аналогично, но только относительно плоскостей (координатных плоскостей).

Например, для системы точек $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, ..., $M_n(x_n; y_n; z_n)$ соответственно с массами $m_1, m_2, \dots, m_n$ *статическими моментами* относительно координатных плоскостей называются величины M_{XY} , M_{XZ} , M_{YZ} :

$$M_{XY} = \sum_{k=1}^n m_k \cdot z_k, \quad M_{XZ} = \sum_{k=1}^n m_k \cdot y_k, \quad M_{YZ} = \sum_{k=1}^n m_k \cdot x_k.$$

Центры тяжести (центры масс).

Определение.

Центром тяжести системы материальных точек (кривой, фигуры) называется такая точка $C(x_0; y_0)$, которая обладает следующим свойством:

если в этой точке сосредоточить всю массу заданной системы (кривой, фигуры), то статический момент этой точки относительно любой оси будет равен статическому моменту всей системы относительно той же оси.

Из этого определения следуют формулы для координат центра тяжести:

$$x_0 = \frac{1}{m} \cdot M_Y, \quad y_0 = \frac{1}{m} \cdot M_X,$$

где m — масса всей системы.

В частности, для однородной кривой L имеем: $m = \rho \cdot |L| = \rho \cdot \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx$,

$$x_0 = \frac{1}{m} \cdot \rho \cdot \int_a^b x \cdot \sqrt{1 + (y')^2} dx, \quad y_0 = \frac{1}{m} \cdot \rho \cdot \int_a^b y \cdot \sqrt{1 + (y')^2} dx, \quad \text{или:}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{|L|} \cdot \int_a^b x \cdot \sqrt{1 + (y')^2} dx = \frac{1}{\int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx} \cdot \int_a^b x \cdot \sqrt{1 + (y')^2} dx \\ y_0 &= \frac{1}{|L|} \cdot \int_a^b y \cdot \sqrt{1 + (y')^2} dx = \frac{1}{\int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx} \cdot \int_a^b y \cdot \sqrt{1 + (y')^2} dx \end{aligned}}$$

В случае однородной криволинейной трапеции ($f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a; b]$) получаем:

$$m = \rho \cdot S = \rho \cdot \int_a^b y dx, \quad x_0 = \frac{1}{m} \cdot \rho \cdot \int_a^b x \cdot y dx, \quad y_0 = \frac{1}{2m} \rho \cdot \int_a^b y^2 dx, \quad \text{или:}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{S} \cdot \int_a^b x \cdot y dx = \frac{1}{\int_a^b y dx} \cdot \int_a^b x \cdot y dx \\ y_0 &= \frac{1}{2S} \cdot \int_a^b y^2 dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\int_a^b y dx} \cdot \int_a^b y^2 dx \end{aligned}}$$

Замечание.

Если система точек (кривая, фигура) имеет ось симметрии, то центр тяжести лежит на этой оси.

Пример 1.

Найти центр тяжести однородной дуги окружности $x^2 + y^2 = R^2$, расположенной в первой координатной четверти.

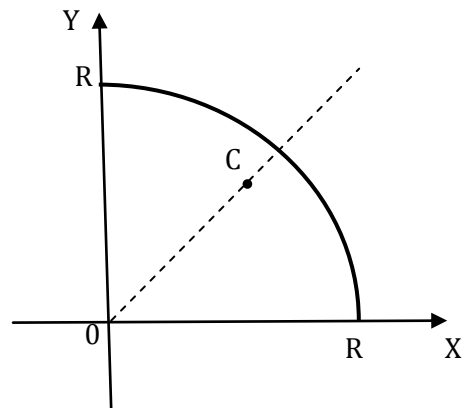
Здесь кривая симметрична относительно прямой $y = x$, поэтому центр тяжести лежит на этой же прямой: $x_0 = y_0$; $|L| = \frac{\pi R}{2}$;

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}, \quad y' = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}},$$

$$\sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}},$$

$$\int_0^R y \cdot \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx =$$

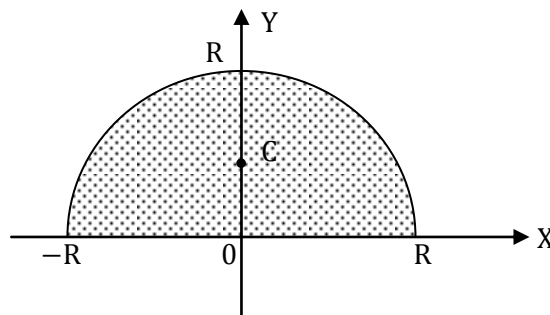
$$= \int_0^R R dx = R^2. \quad \text{Следовательно: } x_0 = y_0 = \frac{2}{\pi R} \cdot R^2 = \frac{2}{\pi} R \approx 0,64R; \quad C\left(\frac{2}{\pi} R; \frac{2}{\pi} R\right).$$



Пример 2.

Найти центр тяжести однородного полукруга $x^2 + y^2 \leq R^2, y \geq 0$.

$$\begin{aligned}
 &\text{Здесь } x_0 = 0; S = \frac{\pi R^2}{2}; \\
 &\int_{-R}^R y^2 dx = 2 \cdot \int_0^R y^2 dx = 2 \cdot \int_0^R (R^2 - x^2) dx = \\
 &= 2 \cdot \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^R = \frac{4}{3} R^3; \quad y_0 = \frac{1}{2S} \cdot \int_a^b y^2 dx = \\
 &= \frac{1}{\pi R^2} \cdot \frac{4}{3} R^3 = \frac{4}{3\pi} R \approx 0,42R; \quad C \left(0; \frac{4}{3\pi} R \right).
 \end{aligned}$$



Сравним формулы, выражающие площадь поверхности вращения некоторой кривой L , объем тела вращения некоторой фигуры вокруг оси (см. §3 и §4) и ординату центра тяжести:

$$\begin{aligned}
 S_{\text{пов. вращ.}} &= 2\pi \int_a^b y \cdot \sqrt{1 + (y')^2} dx, \quad y_0 = \frac{1}{|L|} \cdot \int_a^b y \cdot \sqrt{1 + (y')^2} dx, \\
 V_{\text{тела вращ.}} &= \pi \int_a^b y^2 dx, \quad y_0 = \frac{1}{2S} \cdot \int_a^b y^2 dx.
 \end{aligned}$$

Из этих формул следует:

- 1) $S_{\text{пов. вращ.}} = 2\pi y_0 \cdot |L|$ - это произведение длины кривой на длину окружности, описанной центром тяжести кривой.
- 2) $V_{\text{тела вращ.}} = 2\pi y_0 \cdot S$ - это произведение площади фигуры на длину окружности, описанной центром тяжести кривой.

Таким образом, приходим к следующим теоремам **Гульдена**.

Пусть имеется дуга плоской кривой и ось, лежащая в той же плоскости и не пересекающая эту кривую.

Первая теорема Гульдена.

Площадь поверхности, образованной вращением дуги кривой вокруг оси, равна произведению длины дуги кривой на длину окружности, описанной центром тяжести дуги кривой.

Пусть имеется плоская фигура и ось, лежащая в той же плоскости и не пересекающая эту фигуру.

Вторая теорема Гульдена.

Объем тела, образованного вращением фигуры вокруг оси, равна произведению площади этой фигуры на длину окружности, описанной центром тяжести фигуры.

В §§ 3 и 4 были получены формулы для объема и площади поверхности тора:

$$V_{\text{тора}} = 2\pi^2 r^2 d, \quad S_{\text{пов. тора}} = 4\pi^2 r d.$$

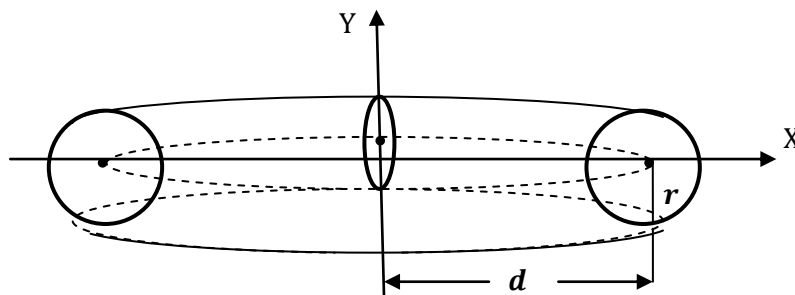
Теперь эти формулы можно получить из теорем **Гульдена**.

Действительно, так как центр тяжести окружности совпадает с ее центром, то длина окружности, описанной центром тяжести, равна $2\pi d$; длина вращаемой окружности равна $2\pi r$, а площадь вращаемого круга равна πr^2 .

Поэтому получаем:

$$V_{\text{тора}} = 2\pi d \cdot \pi r^2 = 2\pi^2 r^2 d;$$

$$S_{\text{пов. тора}} = 2\pi d \cdot 2\pi r = 4\pi^2 r d.$$



По данной теме предполагается выдача расчетного задания.

Расчетное задание: «Приложения определенного интеграла».

1. Вычислить длину дуги l кривой, заданной:
 - а) графиком функции в декартовой системе координат;
 - б) параметрическими уравнениями;
 - в) в полярной системе координат.
2. Вычислить площадь S фигуры, ограниченной линиями, заданными:
 - а) графиками функций в декартовой системе координат;
 - б) параметрическими уравнениями;
 - в) в полярной системе координат.
3. Вычислить объем V тела:
 - а) ограниченного поверхностями;
 - б) образованного вращением фигуры вокруг оси.

Ниже приведены *примерные варианты заданий* (№ 1 ÷ 10).

1. Длина дуги кривой.

№	<i>a</i>	<i>б</i>	<i>в</i>
1	$y = \ln x$ $x \in [\sqrt{3}; \sqrt{15}]$	$\begin{cases} x = 5(t - \sin t) \\ y = 5(1 - \cos t) \end{cases}$ $t \in [0; \pi]$	$r = 3e^{\frac{3}{4}\varphi}$ $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
2	$y = \frac{1}{4}(x^2 - 2\ln x)$ $x \in [1; 2]$	$\begin{cases} x = 3(2\cos t - \cos 2t) \\ y = 3(2\sin t - \sin 2t) \end{cases}$ $t \in [0; 2\pi]$	$r = \sqrt{2}e^{\varphi}$ $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
3	$y = \sqrt{1-x^2} + \arcsin x$ $x \in \left[0; \frac{7}{9}\right]$	$\begin{cases} x = 6(\cos t + t \cdot \sin t) \\ y = 6(\sin t - t \cdot \cos t) \end{cases}$ $t \in [0; \pi]$	$r = 1 - \sin \varphi$ $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{6}\right]$
4	$y = -\ln(\cos x)$ $x \in \left[0; \frac{\pi}{6}\right]$	$\begin{cases} x = 2\cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$ $t \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$	$r = 2(1 - \cos \varphi)$ $\varphi \in \left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$
5	$y = e^x$ $x \in [\ln \sqrt{8}; \ln \sqrt{15}]$	$\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t \cdot \cos t \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t \cdot \sin t \end{cases}$ $t \in [0; \pi]$	$r = 2\varphi$ $\varphi \in \left[0; \frac{3}{4}\right]$
6	$y = \sqrt{x-x^2} + \arcsin \sqrt{x}$ $x \in \left[\frac{1}{4}; 1\right]$	$\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t) \\ y = e^t(\cos t - \sin t) \end{cases}$ $t \in [0; \pi]$	$r = 6\cos \varphi$ $\varphi \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$
7	$y = \ln(x^2 - 1)$ $x \in [2; 3]$	$\begin{cases} x = \frac{1}{4}(2\cos t - \cos 2t) \\ y = \frac{1}{4}(2\sin t - \sin 2t) \end{cases}$ $t \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}\right]$	$r = 8\sin \varphi$ $\varphi \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$
8	$y = \frac{1}{2}ch 2x$ $x \in [0; 2]$	$\begin{cases} x = 3(\cos t + t \cdot \sin t) \\ y = 3(\sin t - t \cdot \cos t) \end{cases}$ $t \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$	$r = 6(1 + \sin \varphi)$ $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$
9	$y = ch x$ $x \in [0; 1]$	$\begin{cases} x = 6\cos^3 t \\ y = 6\sin^3 t \end{cases}$ $t \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$	$r = 3\varphi$ $\varphi \in \left[0; \frac{4}{3}\right]$
10	$y = \ln(\sin x)$ $x \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$	$\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t \cdot \cos t \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t \cdot \sin t \end{cases}$ $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$	$r = 8(1 - \cos \varphi)$ $\varphi \in \left[-\frac{2\pi}{3}; 0\right]$

2. Площадь плоской фигуры.

№	<i>a</i>	<i>б</i>	<i>в</i>
1	$y = (x - 2)^3, y = 4x - 8$	$\begin{cases} x = 4(t - \sin t) \\ y = 4(1 - \cos t) \end{cases}, y = 4$ ($0 < x < 8\pi, y \geq 4$)	$r = \sin 3\varphi$
2	$y = x \cdot \sqrt{9 - x^2}, y = 0$ $x \in [0; 3]$	$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}, y = 1$ ($0 < x < 2\pi, y \geq 1$)	$r = \cos 2\varphi$
3	$y = 4 - x^2, y = x^2 - 2x$	$\begin{cases} x = 4(t - \sin t) \\ y = 4(1 - \cos t) \end{cases}, y = 6$ ($0 < x < 8\pi, y \geq 6$)	$r = \cos \varphi + \sin \varphi$
4	$y = \sin x \cdot \cos^2 x, y = 0$ $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$	$\begin{cases} x = 8 \cos^3 t \\ y = 4 \sin^3 t \end{cases}, x = 3\sqrt{3}$ ($x \geq 3\sqrt{3}$)	$r = \cos \varphi - \sin \varphi$
5	$y = \sqrt{4 - x^2}, y = 0,$ $x = 0, x = 1$	$\begin{cases} x = 8 \cos^3 t \\ y = 8 \sin^3 t \end{cases}, x = 1$ ($x \geq 1$)	$r = \cos \varphi, r = \sin \varphi$ $\varphi \in [0; \frac{\pi}{2}]$
6	$y = 2x - x^2 + 3,$ $y = x^2 - 4x + 3$	$\begin{cases} x = 32 \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}, x = 4$ ($x \geq 4$)	$r = \cos \varphi, r = 2 \cos \varphi$
7	$y = x \cdot \arctg x, y = 0,$ $x = \sqrt{3}$	$\begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = 8 \sin t \end{cases}, y = 4$ ($y \geq 4$)	$r = \sin \varphi, r = 2 \sin \varphi$
8	$y = \sqrt{e^x - 1}, y = 0,$ $x = \ln 2$	$\begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 6 \sin t \end{cases}, y = 3$ ($y \geq 3$)	$r = 4 \cos 3\varphi, r = 2$ ($r \geq 2$)
9	$y = x^2 \cdot \cos x, y = 0$ $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$	$\begin{cases} x = 9 \cos t \\ y = 4 \sin t \end{cases}, y = 2$ ($y \geq 2$)	$r = \cos 3\varphi$
10	$y = \arccos x, y = 0,$ $x = 0$	$\begin{cases} x = 6 \cos t \\ y = 4 \sin t \end{cases}, y = 2\sqrt{3}$ ($y \geq 2\sqrt{3}$)	$r = \sin 6\varphi$

3. Объем тела.

№	<i>a</i>	<i>б</i>
1	$z = x^2 + 4y^2, z = 2$	$y = 5x - x^2 - 6, y = 0, \cup OX$
2	$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1, z = 2, z = 0$	$y = x^2 - 2x + 1, x = 2, y = 0, \cup OY$
3	$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1, z = 3, z = 0$	$y = x^2 + 1, y = x, x = 0, x = 1, \cup OY$
4	$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{36} = -1, z = 12$	$y = 2x - x^2, y = -x + 2, \cup OX$
5	$\frac{x^2}{9} + y^2 = 1, z = y, z = 0 (y \geq 0)$	$y = x^2, y^2 - x = 0, \cup OX$
6	$z = 2x^2 + 8y^2, z = 4$	$y = x^3, y = x^2, \cup OY$
7	$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{36} = 1, z = 3, z = 0$	$y = x^3, y = x, \cup OY$
8	$x^2 + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1, z = 3, z = 0$	$y = xe^x, y = 0, x = 1, \cup OX$
9	$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} - \frac{z^2}{100} = -1, z = 20$	$y = \arccos x, y = \arcsin x, x = 0, \cup OY$
10	$x^2 + y^2 = 9, z = y, z = 0 (y \geq 0)$	$y = x^3, y = \sqrt{x}, \cup OX$

Ниже приведен образец оформления титульного листа.

Все необходимые расчеты и рисунки выполняются *на отдельных листах*.

Титульный лист (образец оформления).

Расчетное задание по Высшей математике

«Приложения определенного интеграла»

Студент _____

Группа _____

Оценка: _____

Вариант № ____

Задание № 1. Вычислить длину $|L|$ дуги кривой.

а) $y = \ln x, x \in [\sqrt{3}; \sqrt{15}]$. Ответ: $|L| =$

б) $\begin{cases} x = 5(t - \sin t) \\ y = 5(1 - \cos t) \end{cases}, t \in [0; \pi]$. Ответ: $|L| =$

в) $r = 3e^{\frac{3}{4}\varphi}, \varphi \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. Ответ: $|L| =$

Задание № 2. Вычислить площадь S фигуры.

а) $y = 2x - x^2 + 3, y = x^2 - 4x + 3$. Ответ: $S =$

б) $\begin{cases} x = 8 \cos^3 t \\ y = 8 \sin^3 t \end{cases}, x = 1 (x \geq 1)$. Ответ: $S =$

в) $r = \cos \varphi - \sin \varphi$. Ответ: $S =$

Задание № 3. Вычислить объем V тела.

а) $z = 2x^2 + 8y^2, z = 4$. Ответ: $V =$

б) $y = x^3, y = x, \cup OY$ Ответ: $V =$

Глава 7. Несобственные интегралы

Содержание

§ 1. Несобственные интегралы 1 рода	173
§ 2. Методы вычисления несобственных интегралов 1 рода	177
§ 3. Признаки сходимости для положительных функций	180
§ 4. Признаки сходимости для произвольных функций	185
§ 5. Несобственные интегралы 2 рода	190
§ 6. Признаки сходимости несобственных интегралов 2 рода	195
§ 7. Исследование сходимости несобственных интегралов	198

Понятие определенного интеграла $\int_a^b f(x) dx$, которое было введено в главе 2, подразумевает, что промежуток интегрирования $[a; b]$ — *конечен*, а функция $f(x)$ — *ограничена* на $[a; b]$. Если хотя бы одно из этих условий не выполнено, то понятие определенного интеграла теряет смысл.

Настоящая глава посвящена обобщению понятия определенного интеграла на случай бесконечного промежутка и неограниченной функции. В этих случаях интегралы называются *несобственными* интегралами:

- 1 рода (по бесконечному промежутку);
- 2 рода (от неограниченной функции).

В контексте с *несобственными* интегралами определенный интеграл теперь можно назвать *собственным* интегралом.

§ 1. Несобственные интегралы 1 рода.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на бесконечном промежутке $[a; +\infty)$ и интегрируема на любом конечном промежутке $[a; b]$, т.е. существует

$$I(b) = \int_a^b f(x) dx \quad \forall b \geq a.$$

Поставим вопрос о существовании предела:

$$I = \lim_{b \rightarrow +\infty} I(b) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

Этот предел может быть конечным или бесконечным, а может и вовсе не существовать.

Определение.

Несобственным интегралом 1 рода от функции $f(x)$ называется символ

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx.$$

Этот символ имеет конкретное значение, равное пределу I , если этот предел существует и конечен:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx,$$

и в этом случае говорят, что несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ — *сходится*.

В случае бесконечного предела: $I = \infty$ — символу $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ также приписывают значение ∞ :

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \infty,$$

и говорят, что несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ — *расходится*.

Если предел I — не существует, то и в этом случае говорят, что несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ — *расходится*, а символу $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ не приписывают никакого значения.

Примеры.

$$1) \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctan x \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctan b = \frac{\pi}{2},$$

т.е. несобственный интеграл *сходится* и равен $\frac{\pi}{2}$: $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2}$.

$$2) \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{b} + 1 \right) = 1,$$

т.е. несобственный интеграл *сходится* и равен 1: $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1$.

$$3) \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\ln x) \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\ln b - \ln 1) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln b = \infty,$$

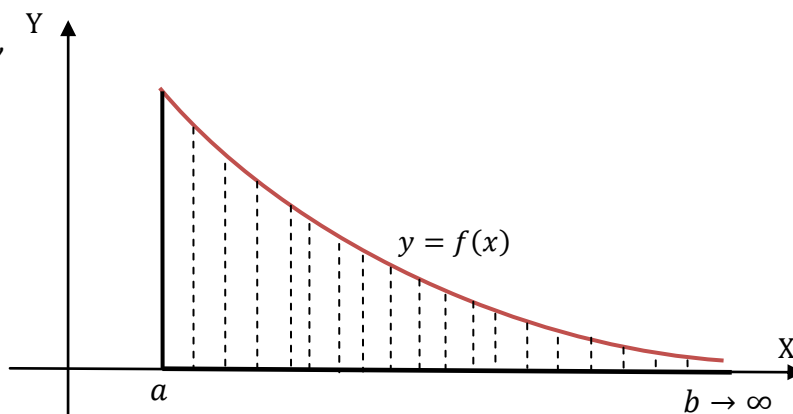
$\Rightarrow$ несобственный интеграл *расходится*: $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \infty$.

$$4) \int_0^{+\infty} \cos x dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \cos x dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \sin x \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \sin b;$$

этот предел не существует, значит, несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} \cos x dx$ расходится.

Геометрический смысл несобственного интеграла 1 рода.

Если $f(x) \geq 0$ на $[a; +\infty)$,
то несобственный интеграл
 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ равен площади
бесконечной
(неограниченной справа)
криволинейной трапеции,
ограниченной графиком
функции $y = f(x)$,
прямой $x = a$ и осью абсцисс.



При этом сходящийся несобственный интеграл задает конечную площадь, а расходящийся — бесконечную площадь.

Аналогично определяются несобственные интегралы 1 рода от функции $f(x)$ на промежутках $(-\infty; b]$ и $(-\infty; +\infty)$:

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \int_a^b f(x) dx.$$

В последнем случае переменные a и b стремятся к $\pm \infty$ независимо друг от друга.

Замечание.

Несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ можно рассматривать как сумму несобственных интегралов:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_c^{+\infty} f(x) dx + \int_{-\infty}^c f(x) dx, \text{ где } c — \text{произвольное число.}$$

Тогда *сходимость* несобственного интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ означает *сходимость* обоих слагаемых интегралов. В случае *расходимости* хотя бы одного из этих слагаемых несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ также считается *расходящимся*.

Примеры.

5) $\int_{-\infty}^0 e^x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 e^x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} e^x \Big|_a^0 = \lim_{a \rightarrow -\infty} (e^0 - e^a) = \lim_{a \rightarrow -\infty} (1 - e^a) = 1$
 $\Rightarrow$ несобственный интеграл *сходится* и равен 1: $\int_{-\infty}^0 e^x dx = 1$.

6) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \arctg x \Big|_a^0 +$
 $+ \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctg x \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctg b - \lim_{a \rightarrow -\infty} \arctg a = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$
 $\Rightarrow$ несобственный интеграл *сходится* и равен π : $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi$.

Исследование сходимости несобственного интеграла $I(p) = \int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$, где $a > 0$.

При $p = 1$ данный несобственный интеграл расходится; действительно:

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\ln x) \Big|_a^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\ln b - \ln a) = \infty.$$

Пусть $p \neq 1$, тогда

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b \frac{1}{x^p} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1-p} \cdot x^{1-p} \right) \Big|_a^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-p} \cdot (b^{1-p} - a^{1-p}).$$

Если $p > 1$, то $1-p < 0$ и $b^{1-p} \rightarrow 0$ при $b \rightarrow +\infty$;

в этом случае несобственный интеграл *сходится* и $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \frac{a^{1-p}}{p-1}$.

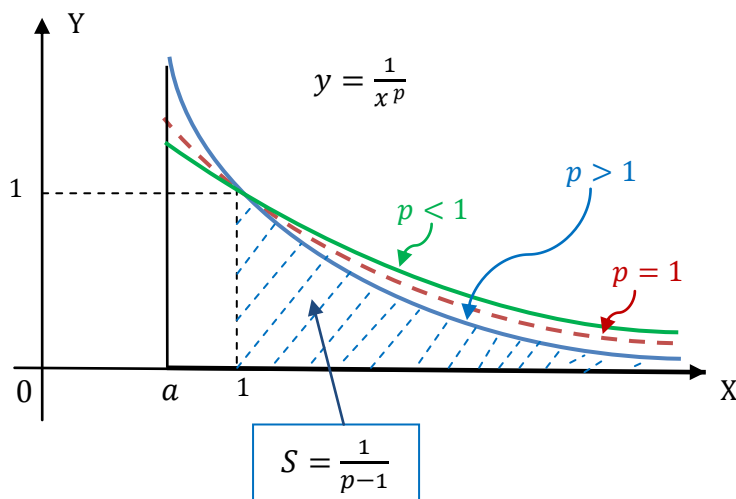
Если $p < 1$, то $1-p > 0$ и $b^{1-p} \rightarrow +\infty$ при $b \rightarrow +\infty$;

в этом случае несобственный интеграл *расходится*.

Таким образом, получаем:

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx \quad (a > 0) \quad \begin{cases} \text{сходится при } p > 1 \\ \text{расходится при } p \leq 1 \end{cases}$$

Геометрический смысл этого результата заключается в следующем.



Площадь бесконечной криволинейной трапеции «под кривой» $y = \frac{1}{x^p}$ на промежутке $[a; +\infty)$ является *конечной* при $p > 1$ и *бесконечной* при $p \leq 1$.

Это различие объясняется тем, что одни функции стремятся к нулю при $x \rightarrow +\infty$ гораздо быстрее, чем другие. Другими словами, графики этих функций «теснее прижимаются» к оси ОХ, чем графики других функций.

«Границей» между этими множествами кривых является график функции $y = \frac{1}{x}$, который ограничивает криволинейную трапецию бесконечной площади.

Пример 7.

Площадь S криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = \frac{1}{x^p}$, где $p > 1$, на промежутке $[1; +\infty)$:

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^p} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1-p} \cdot x^{1-p} \right) \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-p} \cdot (b^{1-p} - 1) = \\ &= \frac{1}{1-p} \cdot (0 - 1) = \frac{1}{p-1} \Rightarrow \boxed{S = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{p-1}} \text{ (см. рисунок).} \end{aligned}$$

$$\text{Например: } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1, \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx = \frac{1}{2}, \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} dx = 2.$$

Замечание.

В дальнейшем несобственные интегралы $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ ($a > 0$) послужат в качестве «эталонных» несобственных интегралов для «сравнения» их с другими несобственными интегралами.

Простейшие свойства несобственных интегралов 1 рода.

1. Аддитивность.

Если сходится несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$, то $\forall c > a$ сходится и несобственный интеграл $\int_c^{+\infty} f(x) dx$, при этом выполняется равенство:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx.$$

Действительно, по свойству аддитивности определенного интеграла имеем:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad \forall b > a, \text{ или:} \\ \int_c^b f(x) dx &= \int_a^b f(x) dx - \int_a^c f(x) dx. \end{aligned}$$

Переходя к пределу в последнем равенстве при $b \rightarrow +\infty$, получаем нужный результат; при этом из существования предела в правой части равенства следует существование предела в левой части равенства.

2. Линейность.

Если сходятся несобственные интегралы $\int_a^{+\infty} f_1(x) dx$ и $\int_a^{+\infty} f_2(x) dx$, то сходятся и несобственные интегралы $\int_a^{+\infty} (C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x)) dx \quad \forall C_1, C_2 = \text{const}$, при этом справедливы равенства:

$$\int_a^{+\infty} (C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x)) dx = C_1 \cdot \int_a^{+\infty} f_1(x) dx + C_2 \cdot \int_a^{+\infty} f_2(x) dx.$$

Действительно, по свойству линейности определенного интеграла имеем:

$$\int_a^b (C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x)) dx = C_1 \cdot \int_a^b f_1(x) dx + C_2 \cdot \int_a^b f_2(x) dx \quad \forall b > a.$$

Переходя к пределу в этом равенстве при $b \rightarrow +\infty$, получаем нужный результат.

3. Если несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ — сходится, то

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} \int_c^{+\infty} f(x) dx = 0.$$

Действительно, по свойству аддитивности имеем:

$$\begin{aligned} \int_c^{+\infty} f(x) dx &= \int_a^{+\infty} f(x) dx - \int_a^c f(x) dx \Rightarrow \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_c^{+\infty} f(x) dx = \\ &= \lim_{c \rightarrow +\infty} \left(\int_a^{+\infty} f(x) dx - \int_a^c f(x) dx \right) = \int_a^{+\infty} f(x) dx - \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_a^c f(x) dx = \\ &= \int_a^{+\infty} f(x) dx - \int_a^{+\infty} f(x) dx = 0. \end{aligned}$$

§ 2. Методы вычисления несобственных интегралов 1 рода.

Формула Ньютона-Лейбница.

Рассмотрим несобственный интеграл 1 рода $\int_a^{+\infty} f(x) dx$.

Пусть $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$ на $[a; +\infty)$. Тогда

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} F(x) \Big|_a^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} (F(b) - F(a)) = \lim_{b \rightarrow +\infty} F(b) - F(a).$$

Введем обозначение: $F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.

Если $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ не существует, то $F(+\infty)$ не имеет смысла; если $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \infty$, то и $F(+\infty) = \infty$.

Используя это обозначение, запишем формулу **Ньютона-Лейбница** для несобственных интегралов 1 рода:

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x) dx = F(x) \Big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a)}.$$

Аналогичные формулы получим и для других несобственных интегралов 1 рода:

$$\boxed{\int_{-\infty}^b f(x) dx = F(x) \Big|_{-\infty}^b = F(b) - F(-\infty)}, \quad \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = F(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = F(+\infty) - F(-\infty)}.$$

Примеры.

$$1) \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{+\infty} = -(e^{-\infty} - e^0) = -(0 - 1) = 1.$$

$$2) \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2(1+x^2)} dx = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2} \right) dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx - \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx =$$

$$= -\frac{1}{x} \Big|_1^{+\infty} - \arctg x \Big|_1^{+\infty} = -(0 - 1) - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

Интегрирование по частям.

Пусть функции $u = u(x)$, $v = v(x)$ — непрерывно дифференцируемы на промежутке $[a; +\infty)$. Тогда справедлива формула:

$$\int_a^{+\infty} u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) \Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} u'(x) \cdot v(x) dx, \text{ или сокращенно:}$$

$$\boxed{\int_a^{+\infty} u \cdot dv = u \cdot v \Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} v \cdot du},$$

но при условии, что существуют конечные пределы $u(x) \cdot v(x) \Big|_a^{+\infty}$ и $\int_a^{+\infty} u'(x) \cdot v(x) dx$.

Действительно, по формуле интегрирования по частям имеем:

$$\int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) \Big|_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x) dx \quad \text{для } \forall b > a$$

Переходя к пределу в этом равенстве при $b \rightarrow +\infty$, получаем нужный результат.

Аналогичные формулы имеют место и для несобственных интегралов

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx.$$

Примеры.

$$\begin{aligned} 3) \int_0^{+\infty} x \cdot e^{-x} dx &= \left[\begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{-x} dx \Rightarrow v = -e^{-x} \end{array} \right] = -x \cdot e^{-x} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \\ &= -\lim_{x \rightarrow +\infty} (x \cdot e^{-x}) - e^{-x} \Big|_0^{+\infty} = -\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} - (e^{-\infty} - e^0) = -\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} - (0 - 1) = \\ &= 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \left[\begin{array}{l} \text{правило} \\ \text{Лопиталя} \end{array} \right] = 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 1 - 0 = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \int_0^{+\infty} e^{-x} \cdot \sin x dx &= \left[\begin{array}{l} u = \sin x \Rightarrow du = \cos x dx \\ dv = e^{-x} dx \Rightarrow v = -e^{-x} \end{array} \right] = -\sin x \cdot e^{-x} \Big|_0^{+\infty} + \\ &+ \int_0^{+\infty} e^{-x} \cdot \cos x dx = \left[\begin{array}{l} u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x dx \\ dv = e^{-x} dx \Rightarrow v = -e^{-x} \end{array} \right] = -\sin x \cdot e^{-x} \Big|_0^{+\infty} - \\ &- \cos x \cdot e^{-x} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-x} \cdot \sin x dx \Rightarrow \\ \int_0^{+\infty} e^{-x} \cdot \sin x dx &= -\frac{1}{2} (\sin x \cdot e^{-x} \Big|_0^{+\infty} + \cos x \cdot e^{-x} \Big|_0^{+\infty}) = -\frac{1}{2} (\sin x + \cos x) e^{-x} \Big|_0^{+\infty} = \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin x + \cos x) e^{-x} + \frac{1}{2} (\sin 0 + \cos 0) e^0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin x + \cos x) e^{-x} = \\ &= \frac{1}{2} - \left[\begin{array}{l} \text{произведение бесконечно малой} \\ \text{функции на ограниченную функцию} \\ \text{есть бесконечно малая функция} \end{array} \right] - \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Замена переменной.

Рассмотрим несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$, где $f(x)$ — непрерывная функция на $[a; +\infty)$. Пусть функция $x = \varphi(t)$ определена в некотором промежутке $[\alpha; \beta)$, где β может быть и $\pm\infty$, и удовлетворяет следующим условиям:

- 1) функция $\varphi(t)$ строго монотонна на промежутке $[\alpha; \beta)$;
- 2) функция $\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на $[\alpha; \beta)$;
- 3) $\varphi(\alpha) = a$, $\lim_{t \rightarrow \beta} \varphi(t) = +\infty$.

Тогда справедлива формула:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt$$

при условии, что существует один из этих интегралов (существование другого интеграла отсюда уже вытекает).

Это утверждение следует из формулы замены переменной в определенном интеграле (см. §5 Главы 2) при $b \rightarrow +\infty$.

Замечание.

Если β — конечное число, то интеграл $\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$ — является *собственным* (т.е. определенным) интегралом.

Аналогичные формулы замены переменной имеют место и для несобственных интегралов $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$.

Примеры.

$$\begin{aligned} 5) \int_4^{+\infty} \frac{1}{(1+\sqrt{x})^3} dx &= \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{x}; \quad x = t^2 \Rightarrow dx = 2t dt \\ x = 4 \Rightarrow t = 2; \quad x = +\infty \Rightarrow t = +\infty \end{array} \right] = 2 \int_2^{+\infty} \frac{t}{(1+t)^3} dt = \\ &= 2 \int_2^{+\infty} \frac{(t+1)-1}{(1+t)^3} dt = 2 \int_2^{+\infty} \left(\frac{1}{(1+t)^2} - \frac{1}{(1+t)^3} \right) dt = \left(-\frac{2}{1+t} + \frac{1}{(1+t)^2} \right) \Big|_2^{+\infty} = \frac{2}{3} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9}. \end{aligned}$$

$$6) \int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx = \left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{x}, \quad dt = -\frac{1}{x^2} dx, \quad x = \frac{2}{\pi} \Rightarrow \\ t = \frac{\pi}{2}, \quad x = +\infty \Rightarrow t = 0 \end{array} \right] = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 -\sin t dt =$$

$$[\text{это собственный интеграл}] = \cos t \Big|_{\frac{\pi}{2}}^0 = \cos 0 - \cos \frac{\pi}{2} = 1.$$

$$\begin{aligned} 7) \int_0^{+\infty} \frac{\arctg x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{\arctg x}{1+x^2} dx = \\ &= \left[\begin{array}{l} t = \arctg x \Rightarrow dt = \frac{dx}{1+x^2}; \quad 0 \leq t < \frac{\pi}{2} \\ x = \tg t \Rightarrow 1+x^2 = \frac{1}{\cos^2 t} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \cos t \\ x = 0 \Rightarrow t = 0; \quad x = +\infty \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{array} \right] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot t dt \quad [\text{это собственный} \\ \text{интеграл}] &= \left[\begin{array}{l} u = t \Rightarrow du = dt \\ dv = \cos t dt \Rightarrow v = \sin t \end{array} \right] = t \cdot \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt = \frac{\pi}{2} + \cos t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1. \end{aligned}$$

§ 3. Признаки сходимости для положительных функций.

В случае, когда вычисление несобственного интеграла 1 рода: $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ или $\int_{-\infty}^b f(x) dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ — вызывает большие затруднения или когда соответствующий неопределенный интеграл $\int f(x) dx$ является «неберущимся», вопрос о существовании (сходимости) несобственного интеграла решается с помощью *признаков сходимости*.

Для определенности будем рассматривать несобственные интегралы 1 рода на промежутке $[a; +\infty)$, т.е. интегралы типа $\int_a^{+\infty} f(x) dx$. Утверждения, которые будут установлены для них, переносятся и на другие типы несобственных интегралов 1 рода.

По определению сходимость несобственного интеграла $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ означает существование конечного предела

$$I = \lim_{b \rightarrow +\infty} I(b) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx = \int_a^{+\infty} f(x) dx.$$

Прежде всего, заметим, что сходимость (расходимость) несобственного интеграла $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ равносильна сходимости (расходимости) несобственного интеграла $\int_A^{+\infty} f(x) dx$, где A — произвольное число такое, что $A > a$. Это следует из простейших свойств несобственного интеграла (см. §1).

Далее, в этом параграфе, будем рассматривать несобственные интегралы от положительных (неотрицательных) функций: $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a; +\infty)$ (учитывая приведенное выше замечание, можно считать, что $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [A; +\infty)$ для некоторого числа $A > a$).

Для положительных функций $f(x)$ соответствующая функция $I(b) = \int_a^b f(x) dx$ является *возрастающей* функцией.

Действительно, пусть $b_2 > b_1 > a$; тогда

$$I(b_2) = \int_a^{b_2} f(x) dx = \int_a^{b_1} f(x) dx + \int_{b_1}^{b_2} f(x) dx = I(b_1) + \int_{b_1}^{b_2} f(x) dx;$$

так как $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a; +\infty)$, то $\int_{b_1}^{b_2} f(x) dx \geq 0$ и следовательно: $I(b_2) \geq I(b_1)$.

Для возрастающих функций, как известно (см. [9], глава 4, §11), наличие конечного предела при $b \rightarrow +\infty$ равносильно *ограниченности* сверху этой функции:

$$I(b) \leq K \quad \forall b \geq a \quad \text{для некоторого числа } K.$$

Таким образом, *сходимость* несобственного интеграла $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ от положительной функции $f(x)$ равносильна *ограниченности* соответствующих определенных интегралов:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ — сходится} \Leftrightarrow \exists K > 0: \int_a^b f(x) dx \leq K \quad \forall b \geq a.$$

Признаки сравнения.

Рассмотрим несобственные интегралы 1 рода от положительных функций:

$$I = \int_a^{+\infty} f(x) dx, \quad J = \int_a^{+\infty} g(x) dx, \quad \text{где } f(x) \geq 0, \quad g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a; +\infty).$$

Теорема 1 (первый признак сравнения).

Пусть $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [A; +\infty)$, где A – некоторое число, $A > a$. Тогда

1) из сходимости $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ следует сходимость $\int_a^{+\infty} f(x) dx$;

2) из расходимости $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ следует расходимость $\int_a^{+\infty} g(x) dx$.

Доказательство.

1) Пусть $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ – сходится и $J = \int_a^{+\infty} g(x) dx$. Тогда $\forall b > A$ имеем неравенства: $\int_A^b f(x) dx \leq \int_A^b g(x) dx \leq \int_A^{+\infty} g(x) dx \leq \int_a^{+\infty} g(x) dx = J$.

Это означает ограниченность значений определенных интегралов от функции $f(x)$:

$$\int_A^b f(x) dx \leq J \quad \forall b > A.$$

Следовательно, $\int_A^{+\infty} f(x) dx$ – сходится и значит, $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ – также сходится.

2) Пусть $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ – расходится. Надо доказать, что $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ – расходится. Предположим, что это не так, т.е. $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ – сходится. Так как $f(x) \leq g(x)$

$\forall x \in [A; +\infty)$, то по доказанному пункту 1) должен сходиться и $\int_a^{+\infty} f(x) dx$, а это не так.

Следовательно, $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ – расходится. Теорема доказана.

Замечание 1.

Из доказательства теоремы получаем оценку для несобственного интеграла:

$$f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [A; +\infty) \Rightarrow \int_A^{+\infty} f(x) dx \leq \int_A^{+\infty} g(x) dx.$$

Пример 1.

Исследуем сходимость несобственного интеграла $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

Здесь $f(x) = e^{-x^2}$, $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0; +\infty)$, $e^{-x^2} \leq e^{-x} \quad \forall x \in [1; +\infty)$,

$\int_1^{+\infty} e^{-x} dx$ – сходится, т.к.

$$\int_1^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_1^{+\infty} = -(e^{-\infty} - e^{-1}) = \frac{1}{e}.$$

Согласно *первому признаку сравнения* несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ – сходится.

Несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ можно оценить сверху:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx;$$

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \leq 1 \cdot (1 - 0) = 1, \quad \int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx \leq \int_1^{+\infty} e^{-x} dx = \frac{1}{e}. \quad \text{Следовательно:}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \leq 1 + \frac{1}{e}.$$

Пример 2.

Исследуем сходимость несобственного интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{2 - \cos x}{1 + \sqrt{x}} dx$.

Здесь $f(x) = \frac{2 - \cos x}{1 + \sqrt{x}}$, $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [1; +\infty)$; так как $2 - \cos x \geq 1$ и $1 + \sqrt{x} \leq 1 + x$

$\forall x \in [1; +\infty)$, то $f(x) \geq \frac{1}{1+x} \quad \forall x \in [1; +\infty)$. Далее имеем:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x} dx = \ln |1+x| \Big|_1^{+\infty} = \infty \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x} dx \text{ – расходится.}$$

Согласно *первому признаку сравнения* несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{2 - \cos x}{1 + \sqrt{x}} dx$ — также расходится.

Теорема 2 (второй признак сравнения).

Пусть $f(x) > 0$, $g(x) > 0 \quad \forall x \in [a; +\infty)$ и существует предел

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K \neq \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases}.$$

Тогда оба интеграла $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ — сходятся или оба интеграла расходятся, т.е. если один из них сходится, то и другой сходится, а если один из них расходится, то и другой расходится.

Доказательство.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists A (A \geq a) \text{ такое, что } \left| \frac{f(x)}{g(x)} - K \right| < \varepsilon \quad \forall x \in [A; +\infty).$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x)}{g(x)} - K \right| < \varepsilon &\Leftrightarrow -\varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} - K < \varepsilon \Leftrightarrow K - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < K + \varepsilon \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (K - \varepsilon) \cdot g(x) < f(x) < (K + \varepsilon) \cdot g(x). \end{aligned}$$

Так как $K > 0$, то можно подобрать число ε так, чтобы $0 < \varepsilon < K$, т.е. $K - \varepsilon > 0$.

Если $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ — сходится, то и $\int_a^{+\infty} (K - \varepsilon) \cdot g(x) dx$ — сходится (по первому признаку сравнения); тогда по свойству линейности сходится и $\int_a^{+\infty} g(x) dx$, который получен из $\int_a^{+\infty} (K - \varepsilon) \cdot g(x) dx$ умножением на число $\frac{1}{K - \varepsilon}$.

Если $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ — сходится, то и $\int_a^{+\infty} (K + \varepsilon) \cdot g(x) dx$ — сходится (по свойству линейности); тогда по первому признаку сравнения сходится и $\int_a^{+\infty} f(x) dx$.

Пусть $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ — расходится. Надо доказать, что и $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ — расходится. Предположим, что $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ — сходится; тогда по уже доказанному пункту должен сходиться и $\int_a^{+\infty} f(x) dx$, а это не так. Следовательно, $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ — расходится.

Пусть $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ — расходится. Надо доказать, что и $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ — расходится. Предположим, что $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ — сходится; тогда по уже доказанному пункту должен сходиться и $\int_a^{+\infty} g(x) dx$, а это не так. Следовательно, $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ — расходится.

Теорема доказана.

Замечание 2.

Для применения признаков сравнения можно использовать «эталонные» интегралы вида:

$$I(p) = \int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx \quad (a > 0),$$

которые сходятся при $p > 1$ и расходятся при $p \leq 1$.

Пример 3.

Исследуем сходимость несобственного интеграла $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{1+x^6}} dx$.

$$\text{Здесь } f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{1+x^6}} = \frac{\sqrt{x}}{x^2 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{x^6} + 1}} = \frac{1}{x^{3/2} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{x^6} + 1}} \sim \frac{1}{x^{3/2}} \text{ при } x \rightarrow +\infty.$$

Следовательно, в качестве «эталонного» интеграла можно рассмотреть $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}} dx$, который сходится, т.к. $p > 1$ ($p = \frac{3}{2}$).

Итак, имеем: $f(x) \sim g(x)$ при $x \rightarrow +\infty$, т.е. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, где $g(x) = \frac{1}{x^{3/2}}$.

Так как $\int_1^{+\infty} g(x) dx$ — сходится, то по второму признаку сравнения и $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{1+x^6}} dx$ — сходится. Следовательно, и $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{1+x^6}} dx$ — также сходится.

Пример 4.

Исследуем сходимость несобственного интеграла $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x^4}} dx$.

$$\text{Здесь } f(x) = \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x^4}} = \frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt{\frac{1}{x} + 1}}{x^{4/3} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{x^4} + 1}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{x} + 1}}{x^{5/6} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{x^4} + 1}} \sim \frac{1}{x^{5/6}} \text{ при } x \rightarrow +\infty.$$

Следовательно, в качестве «эталонного» интеграла можно рассмотреть $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{5/6}} dx$, который расходится, т.к. $p < 1$ ($p = \frac{5}{6}$).

Итак, имеем: $f(x) \sim g(x)$ при $x \rightarrow +\infty$, т.е. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, где $g(x) = \frac{1}{x^{5/6}}$.

Так как $\int_1^{+\infty} g(x) dx$ — расходится, то по второму признаку сравнения и $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x^4}} dx$ — расходится. Следовательно, и $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x^4}} dx$ — также расходится.

Пример 5.

Исследуем сходимость несобственного интеграла $\int_0^{+\infty} x^\alpha \cdot e^{-x} dx$, где $\alpha > 0$.

Рассмотрим функцию $\frac{x^{\alpha+2}}{e^x}$; известно, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\alpha+2}}{e^x} = 0$ (это можно показать по правилу Лопиталя).

Следовательно: $\exists A$ ($A > 0$) такое, что $\frac{x^{\alpha+2}}{e^x} < 1 \quad \forall x \in [A; +\infty)$.

$$\frac{x^{\alpha+2}}{e^x} < 1 \Leftrightarrow \frac{x^\alpha \cdot x^2}{e^x} < 1 \Leftrightarrow \frac{x^\alpha}{e^x} < \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x^\alpha \cdot e^{-x} < \frac{1}{x^2}.$$

Итак, имеем: $x^\alpha \cdot e^{-x} < \frac{1}{x^2} \quad \forall x \in [A; +\infty)$. Так как $\int_A^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ — сходится, то по первому признаку сравнения сходится и $\int_A^{+\infty} x^\alpha \cdot e^{-x} dx$.

Следовательно, $\int_0^{+\infty} x^\alpha \cdot e^{-x} dx$ также сходится.

Замечание 3.

Все, что сказано в этом параграфе для положительных функций, можно перенести и для отрицательных функций (но только нельзя для знакопеременных функций).

Действительно, если функция $y = f(x)$ отрицательна, то функция $y = -f(x)$ уже положительна и для нее справедливы утверждения о сходимости и расходимости несобственных интегралов. Далее по свойству *линейности* сходимость интеграла от функции $y = f(x)$ равносильна сходимости интеграла от функции $y = -f(x)$.

Несобственный интеграл 1 рода от рациональной функции.

Рассмотрим несобственный интеграл от рациональной функции:

$$\int_a^{+\infty} \frac{Q_m(x)}{P_n(x)} dx = \int_a^{+\infty} \frac{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_{m-1} x + b_m}{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n} dx, \quad n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}, a_0 \cdot b_0 \neq 0,$$

где многочлен $P_n(x)$ не имеет корней на промежутке $[a; +\infty)$.

Для достаточно больших x подынтегральная функция сохраняет определенный знак. Поэтому можно считать (в случае надобности изменяя знак), что при некотором A , где $A > a$, выполняется неравенство: $\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} > 0 \quad \forall x \in [A; +\infty)$.

Следовательно, для несобственного интеграла $\int_A^{+\infty} \frac{Q_m(x)}{P_n(x)} dx$ можно применить *признаки сравнения*.

Пусть $f(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$, $g(x) = \frac{b_0 x^m}{a_0 x^n}$; тогда имеем:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{Q_m(x)}{P_n(x)} \cdot \frac{b_0 x^m}{a_0 x^n} = \frac{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_{m-1} x + b_m}{b_0 x^m} \cdot \frac{a_0 x^n}{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n} = \\ &= \frac{1 + \beta(x)}{1 + \alpha(x)}, \quad \text{где } \alpha(x) \rightarrow 0 \text{ и } \beta(x) \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1. \end{aligned}$$

Согласно второму признаку сравнения, сходимость интеграла от функции $\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ равносильна сходимости интеграла от функции $\frac{b_0 x^m}{a_0 x^n} = \frac{b_0}{a_0} \cdot \frac{1}{x^{n-m}}$, а по свойству линейности это равносильно сходимости интеграла от функции $\frac{1}{x^{n-m}} = \frac{1}{x^p}$.

Таким образом, несобственный интеграл $\int_A^{+\infty} \frac{Q_m(x)}{P_n(x)} dx$, а значит, и $\int_a^{+\infty} \frac{Q_m(x)}{P_n(x)} dx$ — сходятся, если $n - m > 1$, т.е. $n \geq m + 2$ (учитывая целочисленность показателей степени); при $n - m \leq 1$, т.е. при $n \leq m + 1$, несобственные интегралы расходятся.

Например:

- несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{4x^3 + 2x^2 - x + 5}{2x^4 + x^2 + 3} dx$ — расходится ($n - m = 1$);
- несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{5x^2 - 4x + 7}{2x^4 + x^2 + 3} dx$ — сходится ($n - m = 2$).

§ 4. Признаки сходимости для произвольных функций.

В предыдущем параграфе рассматривались признаки сходимости (*признаки сравнения*) несобственных интегралов 1 рода $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ от положительных (или отрицательных) функций $f(x)$.

Если функция $f(x)$, хотя бы начиная с какого-то места ($x \geq A$), имеет значения одного знака (« + » или « - »), то на промежутке $[A; +\infty)$ эта функция является положительной (или отрицательной), и для исследования сходимости несобственного интеграла $\int_A^{+\infty} f(x) dx$, а значит и $\int_a^{+\infty} f(x) dx$, также можно применять *признаки сравнения*.

Если же подынтегральная функция не сохраняет знак ни на каком промежутке вида $[A; +\infty)$, где $A > a$, то эти признаки сходимости уже не применимы.

В этом параграфе рассматриваются несобственные интегралы 1 рода $\int_a^{+\infty} f(x) dx$, где функция $f(x)$ является *знакопеременной* при $x \rightarrow +\infty$, т.е. на любом промежутке вида $[A; +\infty)$, где $A > a$, функция $f(x)$ меняет знак (как, например, функция $\sin x$ или $\cos x$).

Абсолютная сходимость несобственных интегралов.

Определение.

Несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$.

Замечание 1.

Для положительных функций $f(x)$ понятие *сходимости* несобственного интеграла от этих функций совпадает с понятием *абсолютной сходимости*, т.к. $|f(x)| = f(x)$.

Теорема 1.

Абсолютно сходящийся несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ — сходится.

Доказательство.

Имеем неравенства:

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \quad \forall x \in [a; +\infty) \Rightarrow 0 \leq f(x) + |f(x)| \leq 2|f(x)| \quad \forall x \in [a; +\infty).$$

Так как интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ — сходится, то по свойству *линейности* интеграл $\int_a^{+\infty} 2 \cdot |f(x)| dx = 2 \cdot \int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ — также сходится.

Для положительных функций $f(x) + |f(x)|$ и $2|f(x)|$ можно применить *первый признак сравнения* о сходимости несобственных интегралов:

$$\int_a^{+\infty} 2 \cdot |f(x)| dx \text{ — сходится} \Rightarrow \int_a^{+\infty} (f(x) + |f(x)|) dx \text{ — сходится.}$$

Так как $f(x) = (f(x) + |f(x)|) - |f(x)|$, то из сходимости интегралов

$\int_a^{+\infty} (f(x) + |f(x)|) dx$ и $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ – по свойству *линейности* следует сходимость интеграла $\int_a^{+\infty} f(x) dx$. Теорема доказана.

Замечание 2.

Обратное утверждение неверно, т.е. из *сходимости* несобственного интеграла не следует его *абсолютная сходимость*. Это означает, что *абсолютная сходимость* – более сильное требование, чем просто *сходимость*. Подробнее об этом – чуть ниже.

Теорема 2.

Пусть $|f(x)| \leq g(x) \quad \forall x \in [A; +\infty)$, где $A > a$. Тогда если несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ – сходится, то несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ – сходится *абсолютно*.

Доказательство.

Для положительных функций $|f(x)|$ и $g(x)$ можно применить *первый признак сравнения* о сходимости несобственных интегралов:

$\int_a^{+\infty} g(x) dx$ – сходится $\Rightarrow \int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ – сходится. Тогда по Теореме 1 несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ – сходится *абсолютно*. Теорема доказана.

Теорема 3.

Имеется несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) \cdot g(x) dx$, где $g(x)$ – ограниченная функция на промежутке $[a; +\infty)$.

Пусть несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ – сходится *абсолютно*. Тогда несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) \cdot g(x) dx$ – также сходится *абсолютно*.

Доказательство.

Так как $g(x)$ – ограниченная функция, то $|g(x)| \leq K \quad \forall x \in [a; +\infty)$ для некоторого числа $K > 0$.

Далее имеем: $|f(x) \cdot g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)| \leq K \cdot |f(x)| \quad \forall x \in [a; +\infty)$;

$\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ – сходится $\Rightarrow \int_a^{+\infty} K \cdot |f(x)| dx$ – сходится $\Rightarrow \int_a^{+\infty} |f(x) \cdot g(x)| dx$ – сходится $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x) \cdot g(x) dx$ – сходится *абсолютно*. Теорема доказана.

Пример 1.

Покажем, что $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\lambda x)}{1+x^2} dx, \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\lambda x)}{1+x^2} dx$ – сходятся *абсолютно* $\forall \lambda \in R$.

Действительно: $\left| \frac{\sin(\lambda x)}{1+x^2} \right| = \frac{|\sin(\lambda x)|}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in [0; +\infty)$; $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ – сходится, т.к.

$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg x \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$; по Теореме 2 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\lambda x)}{1+x^2} dx$ – сходится *абсолютно*.

Аналогично и для интеграла $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\lambda x)}{1+x^2} dx$.

Пример 2.

Покажем, что несобственные интегралы: $\int_a^{+\infty} \frac{\sin(\lambda x)}{x^p} dx$, $\int_a^{+\infty} \frac{\cos(\lambda x)}{x^p} dx$, где $a > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, $p > 1$ – сходятся абсолютно.

Это также можно показать по Теореме 2, но можно и по Теореме 3:

$$f(x) = \frac{1}{x^p}, \quad g(x) = \sin(\lambda x) \text{ или } g(x) = \cos(\lambda x);$$

$$\int_a^{+\infty} |f(x)| dx = \int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx - \text{сходится при } p > 1 \text{ (см. § 1);}$$

$g(x)$ – ограниченная функция на промежутке $[a; +\infty)$. Следовательно:

$$\int_a^{+\infty} f(x) \cdot g(x) dx = \int_a^{+\infty} \frac{\sin(\lambda x)}{x^p} dx \text{ (или } \int_a^{+\infty} \frac{\cos(\lambda x)}{x^p} dx) - \text{сходится абсолютно.}$$

Условная сходимость несобственных интегралов.Определение.

Несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ называется условно сходящимся, если он сходится, а несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ – расходится.

Примерами условно сходящихся несобственных интегралов будут интегралы Дирихле:

$$\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx, \text{ где } a > 0.$$

Покажем это.

Применим к этим интегралам формулу интегрирования по частям.

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx &= \left[\begin{array}{l} u = \frac{1}{x} \Rightarrow du = -\frac{1}{x^2} dx \\ dv = \sin x dx \Rightarrow v = -\cos x \end{array} \right] = -\frac{\cos x}{x} \Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx = \\ &= -\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x} + \frac{\cos a}{a} - \int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx = 0 + \frac{\cos a}{a} - \int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx = \frac{\cos a}{a} - \int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx &= \left[\begin{array}{l} u = \frac{1}{x} \Rightarrow du = -\frac{1}{x^2} dx \\ dv = \cos x dx \Rightarrow v = \sin x \end{array} \right] = \frac{\sin x}{x} \Big|_a^{+\infty} + \int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} - \frac{\sin a}{a} + \int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx = 0 - \frac{\sin a}{a} + \int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx = -\frac{\sin a}{a} + \int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx. \end{aligned}$$

Несобственные интегралы $\int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$ и $\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$ – сходятся (абсолютно), поэтому интегралы **Дирихле** сходятся.

Покажем, что абсолютной сходимости этих интегралов нет, т.е. что интегралы $\int_a^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$, $\int_a^{+\infty} \left| \frac{\cos x}{x} \right| dx$ – расходятся.

$$\text{Рассмотрим интеграл } \int_a^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = \int_a^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx.$$

Предположим, что он сходится. Так как $|\sin x| \geq \sin^2 x \quad \forall x$, то по первому признаку сравнения сходится и интеграл $\int_a^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx = \int_a^{+\infty} \frac{1 - \cos 2x}{2x} dx$; кроме того, по доказанному выше сходится и интеграл $\int_a^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x} dx = \frac{1}{2} \int_{2a}^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$.

Тогда сумма двух сходящихся интегралов тоже должна сходиться:

$\int_a^{+\infty} \frac{1 - \cos 2x}{2x} dx + \int_a^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x} dx = \int_a^{+\infty} \frac{1}{2x} dx = \frac{1}{2} \int_a^{+\infty} \frac{1}{x} dx$, но интеграл $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x} dx$, как известно (см. §1), расходится.

Полученное противоречие показывает, что на самом деле несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$ — расходится. Аналогично доказывается, что $\int_a^{+\infty} \left| \frac{\cos x}{x} \right| dx$ — расходится.

Итак, доказано, что интегралы **Дирихле** *сходятся условно*.

Очевидно, что *сходятся условно* и интегралы:

$$\int_a^{+\infty} \frac{\sin(\lambda x)}{x} dx, \quad \int_a^{+\infty} \frac{\cos(\lambda x)}{x} dx, \quad \text{где } a > 0, \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0.$$

Замечание 3.

Вместо интеграла $\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$, где $a > 0$ — можно рассмотреть интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$, который также *сходится условно*. Действительно:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^a \frac{\sin x}{x} dx + \int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx,$$

а интеграл $\int_0^a \frac{\sin x}{x} dx$ — является *собственным* (определенным) интегралом, так как подынтегральная функция $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ — ограничена на $[0; a]$ ($\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$).

Замечание 4.

На основании сходимости интегралов **Дирихле** вводятся *неэлементарные* функции *интегральный синус* **si** x и *интегральный косинус* **ci** x :

$$\mathbf{si} \, x = - \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt, \quad \mathbf{ci} \, x = - \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt, \quad x > 0.$$

Значения этих функций задаются в специальных таблицах.

Условная сходимость некоторых несобственных интегралов вида

$\int_a^{+\infty} f(x) \cdot g(x) dx$ — может быть установлена с помощью признаков **Абеля** и **Дирихле**, которые мы приведем без доказательства.

Теорема 3 (признак **Абеля**).

Пусть выполнены следующие условия:

- 1) несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ — сходится (условно или абсолютно);
- 2) функция $g(x)$ — монотонна и ограничена на промежутке $[a; +\infty)$.

Тогда несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) \cdot g(x) dx$ — сходится.

Теорема 4 (признак **Дирихле**).

Пусть выполнены следующие условия:

- 1) интегралы $\int_a^b f(x) dx$ — ограничены при $b \rightarrow +\infty$;
- 2) функция $g(x)$ — монотонна и стремится к нулю при $x \rightarrow +\infty$.

Тогда несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) \cdot g(x) dx$ — сходится.

Замечание 5.

В признаке **Дирихле** условие (1) — более слабое, чем в признаке **Абеля**, так как в нем не требуется сходимость несобственного интеграла $\int_a^{+\infty} f(x) dx$; но условие (2) — более сильное, так как вместо ограниченности функции $g(x)$ требуется стремление ее к нулю.

Пример 3.

Рассмотрим несобственные интегралы: $\int_a^{+\infty} \frac{\sin(\lambda x)}{x^p} dx$, $\int_a^{+\infty} \frac{\cos(\lambda x)}{x^p} dx$, где $a > 0$, $\lambda \in R$, $\lambda \neq 0$, $0 < p < 1$.

Применим признак **Дирихле**.

Здесь $f(x) = \sin(\lambda x)$ или $\cos(\lambda x)$, $g(x) = \frac{1}{x^p}$; $g(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \cos(\lambda x) dx \text{ или } \int_a^b f(x) dx = \int_a^b \sin(\lambda x) dx.$$

$$\int_a^b \cos(\lambda x) dx = \frac{1}{\lambda} \cdot \sin(\lambda x) \Big|_a^b = \frac{1}{\lambda} \cdot (\sin(\lambda b) - \sin(\lambda a));$$

$$\left| \int_a^b \cos(\lambda x) dx \right| = \left| \frac{1}{\lambda} \cdot (\sin(\lambda b) - \sin(\lambda a)) \right| = \frac{1}{|\lambda|} \cdot |(\sin(\lambda b) - \sin(\lambda a))| \leq \frac{2}{|\lambda|} \Rightarrow$$

интегралы $\int_a^b \cos(\lambda x) dx$ — ограничены при $b \rightarrow +\infty$; аналогично для $\int_a^b \sin(\lambda x) dx$.

По признаку **Дирихле** эти интегралы сходятся. Покажем, что они сходятся *условно*.

Так как $0 < p < 1$, то $\left| \frac{\sin(\lambda x)}{x^p} \right| = \frac{|\sin(\lambda x)|}{x^p} \geq \frac{|\sin(\lambda x)|}{x} = \left| \frac{\sin(\lambda x)}{x} \right| \quad \forall x \geq 1$. Далее имеем:

$\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin(\lambda x)}{x} \right| dx$ — расходится $\Rightarrow \int_a^{+\infty} \left| \frac{\sin(\lambda x)}{x} \right| dx$ — расходится; по первому признаку

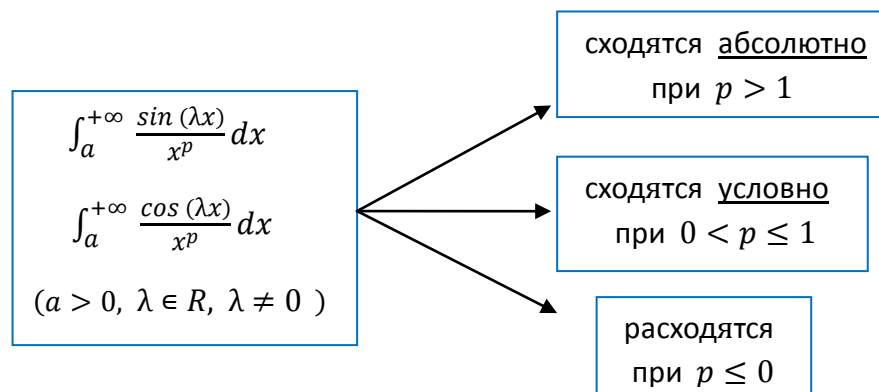
сравнения $\int_a^{+\infty} \left| \frac{\sin(\lambda x)}{x^p} \right| dx$ — расходится; аналогично и для $\int_a^{+\infty} \left| \frac{\cos(\lambda x)}{x^p} \right| dx$.

Таким образом, эти несобственные интегралы сходятся *условно*.

Можно показать (см. например, [3]), что при $p \leq 0$ несобственные интегралы:

$$\int_a^{+\infty} \frac{\sin(\lambda x)}{x^p} dx, \quad \int_a^{+\infty} \frac{\cos(\lambda x)}{x^p} dx \text{ — расходятся}. \quad \text{---}$$

Из разобранных выше примеров получаем следующий результат:



§ 5. Несобственные интегралы 2 рода.

В этом параграфе рассматриваются функции, заданные на конечном промежутке и не ограниченные на этом промежутке.

Если функция в некоторых точках промежутка не определена, то ее можно в этих точках доопределить какими-нибудь значениями; тем самым функция будет определена уже на всем промежутке. При этом изменение значений функции в нескольких точках, как известно, не меняет значение интеграла и не влияет на интегрируемость функции.

В дальнейшем будет указываться весь промежуток, на котором рассматривается функция; а точки, в которых она не ограничена (или не определена), будут называться *особыми точками*.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на промежутке $[a; b]$ и не ограничена на нем. Предположим, что единственной *особой точкой* на этом промежутке является правый конец промежутка - точка b . При этом считаем, что на любом промежутке вида $[a; b - \varepsilon]$, где ε - достаточно малое положительное число, функция $f(x)$ - интегрируема.

Рассмотрим определенный интеграл $I(\varepsilon) = \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$ и поставим вопрос о существовании предела:

$$I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} I(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx.$$

Этот предел может быть конечным или бесконечным, а может и вовсе не существовать.

Определение.

Несобственным интегралом 2 рода от функции $f(x)$ называется символ

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Этот символ имеет конкретное значение, равное пределу I , если этот предел существует и конечен:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx,$$

и в этом случае говорят, что несобственный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ - *сходится*.

В случае бесконечного предела: $I = \infty$ - символу $\int_a^b f(x) dx$ также приписывают значение ∞ :

$$\int_a^b f(x) dx = \infty, \text{ и говорят, что несобственный интеграл } \int_a^b f(x) dx - \text{расходится}.$$

Если предел I - не существует, то и в этом случае говорят, что несобственный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ - *расходится*, а символу $\int_a^b f(x) dx$ не приписывают никакого значения.

Аналогично определяется *несобственный интеграл 2 рода* в случае, когда единственной *особой точкой* является левый конец промежутка - точка a :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx.$$

Примеры.

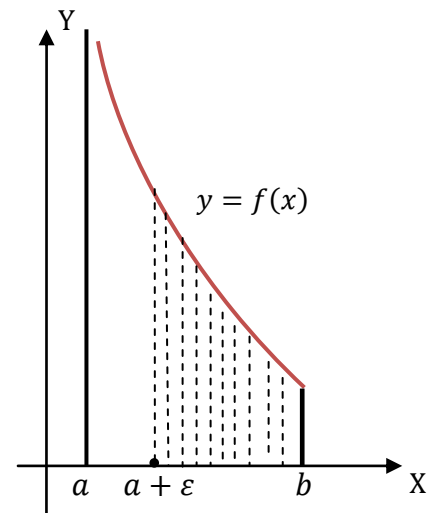
$$\begin{aligned}
 1) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= [x = 1 - \text{особая точка}] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \arcsin x \Big|_0^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} (\arcsin(1-\varepsilon) - \arcsin 0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \arcsin(1-\varepsilon) = \\
 &= \arcsin 1 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{несобственный интеграл сходится и равен } \frac{\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx &= [x = 0 - \text{особая точка}] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} 2\sqrt{x} \Big|_{\varepsilon}^1 = \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} (2 - 2\sqrt{\varepsilon}) = 2 \Rightarrow \text{несобственный интеграл сходится и равен } 2.
 \end{aligned}$$

Геометрический смысл несобственного интеграла 2 рода.

Если $f(x) \geq 0$ на $[a; b]$, то несобственный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ равен площади бесконечной (неограниченной сверху) криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью абсцисс.

При этом сходящийся несобственный интеграл задает конечную площадь, а расходящийся — бесконечную площадь.



Если оба конца промежутка $[a; b]$ являются *особыми точками*, то разбиваем этот промежуток на два промежутка произвольной точкой c :

$$[a; b] = [a; c] \cup [c; b]$$

и рассматриваем несобственный интеграл с двумя особыми точками как сумму двух несобственных интегралов с одной особой точкой:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Тогда несобственный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ называется *сходящимся*, если сходятся оба слагаемых этой суммы. Если же хотя бы одно из этих слагаемых расходится, то несобственный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ называется *расходящимся*.

Пример 3.

$$\int_0^1 \frac{1}{x(x-1)} dx = [0 \text{ и } 1 - \text{особые точки}] = \int_0^{0,5} \frac{1}{x(x-1)} dx + \int_{0,5}^1 \frac{1}{x(x-1)} dx.$$

Рассмотрим первое слагаемое: $\int_0^{0,5} \frac{1}{x(x-1)} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\varepsilon}^{0,5} \frac{1}{x(x-1)} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\varepsilon}^{0,5} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} \right) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left(\ln x - \ln(x-1) \right) \Big|_{\varepsilon}^{0,5} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} (\ln 0,5 - \ln(\varepsilon - 1)) = \ln 0,5 - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \ln(\varepsilon - 1) = \ln 0,5 - (-\infty) = \infty$ — расходится $\Rightarrow$ несобственный интеграл $\int_0^1 \frac{1}{x(x-1)} dx$ — также расходится.

Если имеется единственная особая точка c , которая лежит внутри промежутка $[a; b]$, то также разбиваем этот промежуток на два промежутка:

$$[a; b] = [a; c] \cup [c; b]$$

и рассматриваем несобственный интеграл как сумму двух несобственных интегралов с одной особой точкой c :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Тогда несобственный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ называется *сходящимся*, если сходятся оба слагаемых этой суммы. Если же хотя бы одно из этих слагаемых расходится, то несобственный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ называется *расходящимся*.

Примеры.

$$4) \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = [x = 0 - \text{особая точка}] = \int_{-1}^0 \frac{1}{x^2} dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2} dx.$$

Рассмотрим второе слагаемое:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x^2} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left(-\frac{1}{x}\right) \Big|_{\varepsilon}^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left(-1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) = \infty - \text{расходится} \Rightarrow$$

несобственный интеграл $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx$ — также расходится.

$$5) \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx = [0 - \text{особая точка}] = \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx.$$

Рассмотрим первое слагаемое:

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{-1+\varepsilon}^0 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} (3\sqrt[3]{x}) \Big|_{-1+\varepsilon}^0 = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} 3\sqrt[3]{-1+\varepsilon} = 3.$$

Рассмотрим второе слагаемое:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} (3\sqrt[3]{x}) \Big|_{\varepsilon}^1 = 3 \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} (1 - \sqrt[3]{\varepsilon}) = 3.$$

Оба слагаемых сходятся, следовательно, несобственный интеграл $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx$ — сходится и равен $3 + 3 = 6$.

Если имеется несколько *особых точек*, то разбиваем промежуток $[a; b]$ на промежутки, в каждом из которых есть только одна *особая точка*, и рассматриваем несобственный интеграл как сумму несобственных интегралов по каждому из этих промежутков.

Тогда несобственный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ называется *сходящимся*, если сходятся все слагаемые этой суммы. Если же хотя бы одно из этих слагаемых расходится, то несобственный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ называется *расходящимся*.

Исследование сходимости несобственного интеграла $I(p) = \int_0^a \frac{1}{x^p} dx$, где $a > 0$.

При $p = 1$ данный несобственный интеграл расходится; действительно:

$$\int_0^a \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\varepsilon}^a \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} (\ln|x|) \Big|_{\varepsilon}^a = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} (\ln a - \ln \varepsilon) = \infty.$$

Пусть $p \neq 1$, тогда

$$\int_0^a \frac{1}{x^p} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\varepsilon}^a \frac{1}{x^p} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left(\frac{1}{1-p} \cdot x^{1-p}\right) \Big|_{\varepsilon}^a = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{1}{1-p} \cdot (a^{1-p} - \varepsilon^{1-p}).$$

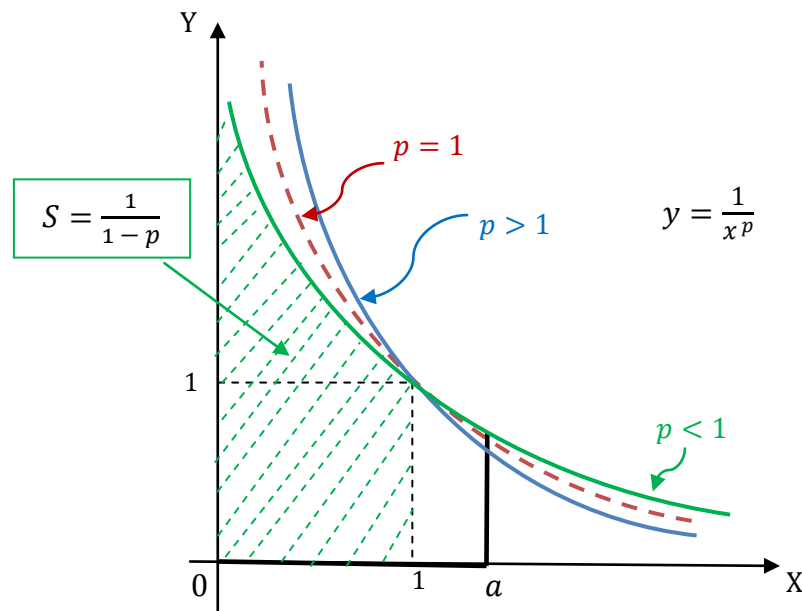
Если $p > 1$, то $1 - p < 0$ и $\varepsilon^{1-p} \rightarrow \infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$;
в этом случае несобственный интеграл $\int_0^a \frac{1}{x^p} dx$ — расходится.

Если $p < 1$, то $1 - p > 0$ и $\varepsilon^{1-p} \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$; в этом случае несобственный интеграл сходится и $\int_0^a \frac{1}{x^p} dx = \frac{a^{1-p}}{1-p}$.

Таким образом, получаем:

$$\int_0^a \frac{1}{x^p} dx \quad (a > 0) \quad \begin{cases} \text{сходится при } p < 1 \\ \text{расходится при } p \geq 1 \end{cases}$$

Геометрический смысл этого результата заключается в следующем.



Площадь бесконечной криволинейной трапеции «под кривой» $y = \frac{1}{x^p}$ на промежутке $[0; a]$ является *конечной* при $p < 1$ и *бесконечной* при $p \geq 1$.

Это различие объясняется тем, что графики одних функций «теснее прижимаются» к оси OY, чем графики других функций.

«Границей» между этими множествами кривых является график функции $y = \frac{1}{x}$, который ограничивает криволинейную трапецию бесконечной площади.

Пример 6.

Площадь S криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = \frac{1}{x^p}$, где $p < 1$, на промежутке $[0; 1]$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{x^p} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x^p} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left(\frac{1}{1-p} \cdot x^{1-p} \right) \Big|_{\varepsilon}^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{1}{1-p} \cdot (1 - \varepsilon^{1-p}) = \\ &= \frac{1}{1-p} \cdot (1 - 0) = \frac{1}{1-p} \Rightarrow \boxed{S = \int_0^1 \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{1-p}} \quad (\text{см. рисунок}). \end{aligned}$$

$$\text{Например: } \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2, \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \frac{3}{2}, \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[n]{x}} dx = \frac{n}{n-1}.$$

Простейшие свойства несобственных интегралов 2 рода.

Несобственные интегралы 2 рода обладают теми же свойствами, что и несобственные интегралы 1 рода. Сформулируем эти свойства, например, для случая, когда единственной *особой точкой* является правый конец промежутка $[a; b]$, т.е. точка b .

1. Аддитивность.

Если сходится несобственный интеграл $\int_a^b f(x) dx$, то $\forall c \in (a; b)$ сходится и несобственный интеграл $\int_c^b f(x) dx$, при этом выполняется равенство:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

2. Линейность.

Если сходятся несобственные интегралы $\int_a^b f_1(x) dx$ и $\int_a^b f_2(x) dx$, то сходятся и несобственные интегралы $\int_a^b (C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x)) dx \quad \forall C_1, C_2 = \text{const}$, при этом справедливы равенства:

$$\int_a^b (C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x)) dx = C_1 \cdot \int_a^b f_1(x) dx + C_2 \cdot \int_a^b f_2(x) dx.$$

3. Если несобственный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ — сходится, то

$$\lim_{c \rightarrow b} \int_c^b f(x) dx = 0.$$

Методы вычисления несобственных интегралов 2 рода.

Вычисление несобственных интегралов 2 рода основано на тех же формулах, что и вычисление несобственных интегралов 1 рода.

Формула Ньютона-Лейбница.

$$\boxed{\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)},$$

где $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$ на $[a; b]$ и $F(b) = \lim_{x \rightarrow b} F(x)$.

Пример 7.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = [\text{здесь } x = 1 - \text{особая точка}] = \arcsin x \Big|_0^1 = \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Интегрирование по частям.

$$\boxed{\int_a^b u \cdot dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v \cdot du}.$$

Пример 8.

$$\int_0^1 \ln x dx = [\text{здесь } x = 0 - \text{особая точка}] = \left[\begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array} \right] =$$

$$= x \cdot \ln x \Big|_0^1 - \int_0^1 dx = 0 - \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \ln x - 1 = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} - 1 = \left[\begin{array}{l} \text{правило} \\ \text{Лопиталя} \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{-1}}{x^{-2}} - 1 = \lim_{x \rightarrow 0} x - 1 = 0 - 1 = -1.$$

Замена переменной.

$$\boxed{\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt}.$$

Пример 9.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx = [\text{здесь } x = 1 - \text{особая точка}] = \left[\begin{array}{l} t = 1 - x; \quad dx = -dt \\ x = 0 \Rightarrow t = 1; \quad x = 1 \Rightarrow t = 0 \end{array} \right] = \\ = \int_1^0 \frac{1}{\sqrt{t}} (-dt) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = 2\sqrt{t} \Big|_0^1 = 2.$$

§ 6. Признаки сходимости несобственных интегралов 2 рода.

В случае, когда вычисление несобственного интеграла 2 рода $\int_a^b f(x) dx$ невозможно или затруднительно, для решения вопроса о существовании (*сходимости*) этого несобственного интеграла применяются *признаки сходимости*.

Признаки сходимости для несобственных интегралов 2 рода аналогичны признакам сходимости несобственных интегралов 1 рода.

Для определенности будем рассматривать несобственные интегралы 2 рода $\int_a^b f(x) dx$, где точка b является единственной *особой точкой* промежутка $[a; b]$. Утверждения, которые будут установлены для них, переносятся и на другие типы несобственных интегралов 2 рода.

Признаки сходимости для положительных функций.

Пусть $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a; b]$ (или, по крайней мере $\forall x \in [a; b - \varepsilon]$, где ε - достаточно малое положительное число).

Сходимость несобственного интеграла $\int_a^b f(x) dx$ от положительной функции $f(x)$ равносильна *ограниченности* соответствующих определенных интегралов:

$$\int_a^b f(x) dx - \text{сходится} \Leftrightarrow \exists K > 0: \int_a^c f(x) dx \leq K \quad \forall c \in (a; b).$$

Признаки сравнения.

Рассмотрим несобственные интегралы 2 рода от положительных функций:

$$I = \int_a^b f(x) dx, \quad J = \int_a^b g(x) dx, \quad \text{где } f(x) \geq 0, \quad g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a; b).$$

Теорема 1 (первый признак сравнения).

Пусть $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a; b)$. Тогда

1) из сходимости $\int_a^b g(x) dx$ следует сходимость $\int_a^b f(x) dx$ и справедлива оценка:

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx;$$

2) из расходимости $\int_a^b f(x) dx$ следует расходимость $\int_a^b g(x) dx$.

Пример 1.

Исследуем сходимость несобственного интеграла $\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{1-x}} dx$.

Здесь $f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{1-x}}$ - положительная функция на $[0; 1)$, $x = 1$ - особая точка,
 $\frac{\cos x}{\sqrt{1-x}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-x}} \quad \forall x \in [0; 1)$; несобственный интеграл $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx$ - сходится
 (см. Пример 9 из §5). По *первому признаку сравнения* несобственный интеграл $\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{1-x}} dx$ - также сходится.

Теорема 2 (второй признак сравнения).

Пусть $f(x) > 0$, $g(x) > 0 \quad \forall x \in [a; b)$ и существует предел

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = K \neq \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases}.$$

Тогда оба интеграла $\int_a^b f(x) dx$ и $\int_a^b g(x) dx$ - сходятся или оба интеграла расходятся, т.е. если один из них сходится, то и другой сходится, а если один из них расходится, то и другой расходится.

Пример 2.

Исследуем сходимость несобственного интеграла $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^3}} dx$.

Здесь $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^3}}$ - положительная функция на $[0; 1)$, $x = 1$ - особая точка;

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1-x^3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{1-x} \cdot \sqrt[3]{1+x+x^2}} \sim \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}} \quad \text{при } x \rightarrow 1; \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}.$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}} dx = \left[\begin{array}{l} t = 1-x; \quad dx = -dt \\ x=0 \Rightarrow t=1; \quad x=1 \Rightarrow t=0 \end{array} \right] = \int_1^0 \frac{1}{\sqrt[3]{t}} (-dt) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{t}} dt = \frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{x^2} \Big|_0^1 = \frac{3}{2}$$

$\Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}} dx$ - сходится; по *второму признаку сравнения* несобственный интеграл

$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^3}} dx$ - также сходится.

Признаки сходимости для произвольных функций.

Рассмотрим несобственные интегралы 2 рода $\int_a^b f(x) dx$, где функция $f(x)$ является *знакопеременной* при $x \rightarrow b$, т.е. на любом промежутке вида $[c; b)$, где $c \in (a; b)$, функция $f(x)$ меняет знак.

Абсолютная сходимость несобственных интегралов.

Определение.

Несобственный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится несобственный интеграл $\int_a^b |f(x)| dx$.

Теорема 3.

Абсолютно сходящийся несобственный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ — сходится.

Теорема 4.

Пусть $|f(x)| \leq g(x) \quad \forall x \in [a; b)$. Тогда

если несобственный интеграл $\int_a^b g(x) dx$ — сходится, то

несобственный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ — сходится *абсолютно*.

Теорема 5.

Имеется несобственный интеграл $\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx$, где $g(x)$ — ограниченная функция на промежутке $[a; b)$.

Пусть несобственный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ — сходится *абсолютно*. Тогда несобственный интеграл $\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx$ — также сходится *абсолютно*.

Пример 3.

Несобственные интегралы $\int_0^a \frac{\sin(\frac{1}{x})}{x^p} dx$, $\int_0^a \frac{\cos(\frac{1}{x})}{x^p} dx$, где $a > 0$, $p < 1$ — сходятся *абсолютно*.

Действительно, по Теореме 4 имеем:

$f(x) = \frac{\sin(\frac{1}{x})}{x^p}$, $g(x) = \frac{1}{x^p}$, $|f(x)| \leq g(x) \quad \forall x \in [0; 1)$; $\int_0^a \frac{1}{x^p} dx$ — сходится при $p < 1$ (см. § 5).

Следовательно, $\int_0^a \frac{\sin(\frac{1}{x})}{x^p} dx$ — сходится *абсолютно*; аналогично и для $\int_0^a \frac{\cos(\frac{1}{x})}{x^p} dx$.

Условная сходимость несобственных интегралов.Определение.

Несобственный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ называется *условно сходящимся*, если он сходится, а несобственный интеграл $\int_a^b |f(x)| dx$ — расходится.

Примеры *условно сходящихся* несобственных интегралов 2 рода:

$$\int_0^a \frac{\sin(\frac{1}{x})}{x} dx, \quad \int_0^a \frac{\cos(\frac{1}{x})}{x} dx, \quad \text{где } a > 0$$

(здесь особой точкой является левый конец промежутка — точка $x = 0$).

Действительно, сделав замену переменной, получим:

$$\int_0^a \frac{\sin(\frac{1}{x})}{x} dx = \left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{t} \Rightarrow dx = -\frac{1}{t^2} dt \\ x = 0 \Rightarrow t = +\infty; x = a \Rightarrow t = \frac{1}{a} \end{array} \right] = -\int_{+\infty}^{\frac{1}{a}} \frac{\sin t}{t} dt = \int_{\frac{1}{a}}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt — \text{этот}$$

интеграл *сходится условно* (см. §4). Аналогично и с интегралом $\int_0^a \frac{\cos(\frac{1}{x})}{x} dx$.

§ 7. Исследование сходимости несобственных интегралов.

Рассмотрим примеры на исследование сходимости несобственных интегралов.

Пример 1.

$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3 + 2x}} dx$ – несобственный интеграл от положительной функции

одновременно 1 и 2 рода, так как промежуток интегрирования – бесконечный, а подынтегральная функция – неограниченная ($x = 0$ – особая точка).

Разобьем промежуток интегрирования на два промежутка и исследуем каждый из полученных несобственных интегралов:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3 + 2x}} dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^3 + 2x}} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3 + 2x}} dx = I_1 + I_2.$$

$$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^3 + 2x}} dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x^2 + 2}} dx, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x^2 + 2}} \sim \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ при } x \rightarrow 0;$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx - \text{сходится} \Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^3 + 2x}} dx - \text{также сходится (II признак сравнения)}.$$

$$I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3 + 2x}} dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3} \cdot \sqrt{1 + \frac{2}{x^2}}} dx, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3} \cdot \sqrt{1 + \frac{2}{x^2}}} \sim \frac{1}{\sqrt{x^3}} \text{ при } x \rightarrow \infty;$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3}} dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{1,5}} dx - \text{сходится} \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3 + 2x}} dx - \text{также сходится (II признак сравнения)}.$$

$$I_1 \text{ и } I_2 - \text{сходятся} \Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3 + 2x}} dx - \text{сходится}.$$

Пример 2.

$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^4}} dx$ – несобственный интеграл одновременно 1 и 2 рода, так как

промежуток интегрирования – бесконечный, а подынтегральная функция – неограниченная ($x = 0$ – особая точка).

Разобьем промежуток интегрирования на два промежутка и исследуем каждый из полученных несобственных интегралов:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^4}} dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^4}} dx + \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^4}} dx = I_1 + I_2.$$

$I_1 = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^4}} dx$ – несобственный интеграл 1 рода от положительной функции,

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^4}} \sim \frac{x}{\sqrt[3]{x^4}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \text{ при } x \rightarrow 0; \quad \int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx - \text{сходится, по II признаку сравнения}$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^4}} dx - \text{также сходится}.$$

$I_2 = \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^4}} dx$ – несобственный интеграл 2 рода от знакопеременной функции –

$$\text{сходится абсолютно, так как } \left| \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^4}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} \text{ и } \int_{\pi}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} dx - \text{сходится}.$$

$$I_1 \text{ и } I_2 - \text{сходятся} \Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^4}} dx - \text{сходится}.$$

Пример 3.

$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx$ – несобственный интеграл 1 рода от отрицательной функции с двумя особыми точками: $x = 0$ и $x = 1$. Разобьем промежуток интегрирования на два промежутка и исследуем каждый из полученных несобственных интегралов:

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{1-x^2} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx = I_1 + I_2.$$

$I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{1-x^2} dx$, $f(x) = \frac{\ln x}{1-x^2} \sim \ln x$ при $x \rightarrow 0$; $\int_0^{\frac{1}{2}} \ln x dx$ – сходится (см. Пример 8 из §5) $\Rightarrow \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{1-x^2} dx$ – сходится (по II признаку сравнения).

$I_2 = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx$, $f(x) = \frac{\ln x}{1-x^2}$; $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{\ln x}{1-x^2} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{\frac{1}{x}}{-2x} = -\frac{1}{2} \Rightarrow$
 $\Rightarrow f(x)$ – ограниченная функция на промежутке $\left[\frac{1}{2}; 1 \right) \Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx$ – собственный интеграл, значит, он сходится.

I_1 и I_2 – сходятся $\Rightarrow \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx$ – сходится.

Пример 4.

Исследуем на сходимость несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^p} dx$, т.е. найдем все значения параметра p , при которых данный несобственный интеграл сходится.

$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^p} dx$ – несобственный интеграл от положительной функции одновременно 1 и 2 рода, так как промежуток интегрирования – бесконечный, а подынтегральная функция – неограниченная ($x = 0$ – особая точка).

Разобьем промежуток интегрирования на два промежутка и исследуем каждый из полученных несобственных интегралов:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^p} dx = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x^p} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^p} dx = I_1 + I_2.$$

$I_1 = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x^p} dx$, $f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{x^p} \sim \frac{x}{x^p} = \frac{1}{x^{p-1}}$ при $x \rightarrow 0$; $\int_0^1 \frac{1}{x^{p-1}} dx$ – сходится при $p - 1 < 1$, т.е. при $p < 2$, и расходится при $p - 1 \geq 1$, т.е. при $p \geq 2$.

Следовательно, I_1 – также сходится при $p < 2$ и расходится при $p \geq 2$.

$I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^p} dx$, $f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{x^p} \sim \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{x^p}$ при $x \rightarrow \infty$; $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ – сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$. Следовательно, I_2 – также сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$.

Итак, I_1 – сходится при $p < 2$, а I_2 – сходится при $p > 1$. Следовательно, несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^p} dx$ сходится при $1 < p < 2$.

Пример 5.

Исследуем на сходимость несобственный интеграл

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} \cdot e^{-x} dx.$$

Представим $\Gamma(p)$ в виде суммы двух интегралов $\Gamma(p) = I_1 + I_2$, где

$$I_1 = \int_0^1 x^{p-1} \cdot e^{-x} dx, \quad I_2 = \int_1^{+\infty} x^{p-1} \cdot e^{-x} dx.$$

Если $p \geq 1$, то I_1 – собственный интеграл; если $p < 1$, то I_1 – несобственный интеграл 2 рода с единственной особой точкой $x = 0$;

$f(x) = x^{p-1} \cdot e^{-x} = \frac{e^{-x}}{x^{1-p}} \sim \frac{1}{x^{1-p}}$ при $x \rightarrow 0$; $\int_0^1 \frac{1}{x^{1-p}} dx$ – сходится при $1 - p < 1$, т.е. при $p > 0$, и расходится при $1 - p \geq 1$, т.е. при $p \leq 0$.

Следовательно, I_1 также сходится при $p > 0$, и расходится при $p \leq 0$.

$I_2 = \int_1^{+\infty} x^{p-1} \cdot e^{-x} dx$ – несобственный интеграл 1 рода; известно, что

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{p+1}}{e^x} = 0 \quad \forall p$; значит, существует число $A \geq 1$ такое, что

$$\frac{x^{p+1}}{e^x} < 1 \quad \forall x \in [A; +\infty); \quad \frac{x^{p+1}}{e^x} < 1 \Leftrightarrow \frac{x^{p-1}}{e^x} < \frac{1}{x^2};$$

$\int_A^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ – сходится, значит, сходится и I_2 при любом значении p .

Следовательно, $\Gamma(p)$ – сходится при $p > 0$.

Замечание. Функция $\Gamma(p)$ называется *гамма - функцией*, которая имеет широкое применение в *теории вероятностей, математической статистике* и в самом *математическом анализе*. Здесь мы нашли область определения гамма - функции:

$$D_\Gamma = (0; +\infty).$$

Пример 6.

Исследуем на сходимость несобственный интеграл

$$B(p; q) = \int_0^1 x^{p-1} \cdot (1-x)^{q-1} dx.$$

При $p < 1$ особой точкой будет $x = 0$, а при $q < 1$ особой точкой будет $x = 1$.

Пусть $B(p; q) = I_1 + I_2$, где $I_1 = \int_0^{0.5} x^{p-1} \cdot (1-x)^{q-1} dx$, $I_2 = \int_{0.5}^1 x^{p-1} \cdot (1-x)^{q-1} dx$.

$f(x) = x^{p-1} \cdot (1-x)^{q-1} \sim \frac{1}{x^{1-p}}$ при $x \rightarrow 0$ (если $p < 1$);

$\int_0^{0.5} \frac{1}{x^{1-p}} dx$ – сходится при $1 - p < 1$, т.е. при $p > 0$, и расходится при $p \leq 0$.

$f(x) = x^{p-1} \cdot (1-x)^{q-1} \sim \frac{1}{(1-x)^{1-q}}$ при $x \rightarrow 1$ (если $q < 1$); $\int_{0.5}^1 \frac{1}{(1-x)^{1-q}} dx$ – сходится при $1 - q < 1$, т.е. при $q > 0$, и расходится при $q \leq 0$.

Итак, I_1 и I_2 – сходятся при $p > 0$ и $q > 0$.

Следовательно, и $B(p; q)$ – сходится при $p > 0$ и $q > 0$.

Замечание.

Функция $B(p; q)$ называется *бета - функцией*; она связана с *гамма - функцией* следующей формулой: $B(p; q) = \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

II. Задачи и упражнения.

Задачи к главе 1. Производная и дифференциал.

Найти производную $f'(x_0)$ функции $f(x)$ в указанной точке x_0 (№ 1.1 ÷ 1.12):

$$1.1. f(x) = \sqrt{x^5}, \quad x_0 = 4$$

$$1.2. f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad x_0 = 8$$

$$1.3. f(x) = \sqrt{x^3}, \quad x_0 = 9$$

$$1.4. f(x) = \sqrt[3]{x^2}, \quad x_0 = 64$$

$$1.5. f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad x_0 = 4$$

$$1.6. f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}, \quad x_0 = 27$$

$$1.7. f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3}}, \quad x_0 = 9$$

$$1.8. f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}, \quad x_0 = 8$$

$$1.9. f(x) = x + 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x}, \quad x_0 = \frac{1}{64}$$

$$1.10. f(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt[3]{x}}, \quad x_0 = 1$$

$$1.11. f(x) = 2^x + 4^x + 8^x, \quad x_0 = 1$$

$$1.12. f(x) = \log_2 x + \log_3 x, \quad x_0 = \ln 6$$

Найти производную функции $y = f(x)$ (№ 1.13 ÷ 1.33):

$$1.13. y = e^x \cos x \quad 1.14. y = e^x(x^2 - 2x + 2) \quad 1.15. y = \ln x \cdot \lg x - \ln a \cdot \log_a x$$

$$1.16. y = (2 - x^2) \cdot \cos x + 2x \cdot \sin x \quad 1.17. y = \frac{2x+3}{x^2-5x+5} \quad 1.18. y = \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$$

$$1.19. y = \frac{1}{x} + 2\ln x - \frac{\ln x}{x} \quad 1.20. y = \frac{\arccos x}{1-x^2} \quad 1.21. y = \frac{\arcsin x}{1-x^2} \quad 1.22. y = \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}$$

$$1.23. y = \frac{\ln x}{\operatorname{arctg} x} \quad 1.24. y = \frac{\operatorname{tg} x}{x^2 + \ln x} \quad 1.25. y = \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x + \lg x} \quad 1.26. y = \frac{\sqrt{x} + \cos x}{\arcsin x}$$

$$1.27. y = \frac{\operatorname{ctg} x}{\operatorname{arctg} x} \quad 1.28. y = \frac{\operatorname{arctg} x}{\operatorname{ctg} x} \quad 1.29. y = \frac{3^x}{\log_2 x} \quad 1.30. y = \frac{\log_3 x}{2^x}$$

$$1.31. y = \frac{\sqrt[3]{x}}{e^x + \ln x} \quad 1.32. y = \frac{\sin x - x \cdot \cos x}{\cos x + x \cdot \sin x} \quad 1.33. y = \frac{(1+x^2) \cdot \operatorname{arctg} x - x}{\lg x}$$

Найти производную сложной функции (№ 1.34 ÷ 1.72):

$$1.34. y = \sin(x^2)$$

$$1.35. y = \ln(\sin x)$$

$$1.36. y = \ln^3 x$$

$$1.37. y = \cos^5 x$$

$$1.38. y = 5^{\operatorname{tg} x}$$

$$1.39. y = \operatorname{arc} \operatorname{tg}(2^x)$$

$$1.40. y = \operatorname{tg}^5(e^x)$$

$$1.41. y = \operatorname{arc} \sin^4(\sqrt{x})$$

$$1.42. y = \sqrt[3]{\operatorname{arc} \cos(x^3)}$$

$$1.43. y = \log_2(\cos(\sqrt[3]{x})) \quad 1.44. y = \operatorname{arc} \operatorname{ctg}^5(\lg x) \quad 1.45. y = \log_3^5(\operatorname{ctg} x)$$

$$1.46. y = \ln^3(\sin(x^2)) \quad 1.47. y = \sin^5(\sqrt{\ln x}) \quad 1.48. y = 5^{\sin^3(\sqrt{x})}$$

$$1.49. y = \operatorname{ctg}^6(e^{\sqrt{x}}) \quad 1.50. y = \cos^4(\sqrt[3]{x^2 + 5x}) \quad 1.51. y = \operatorname{arc} \operatorname{ctg}^6\left(2^{\frac{1}{x}}\right)$$

$$1.52. y = \operatorname{tg}^5\left(3^{\frac{1}{\sqrt{x}}}\right) \quad 1.53. y = \operatorname{arc} \sin^4(e^{x^3}) \quad 1.54. y = \operatorname{arc} \cos^3(\sqrt{\ln x})$$

$$1.55. y = \operatorname{arc} \operatorname{tg}^3(e^{x^2}) \quad 1.56. y = \operatorname{arc} \sin^5(7^{\cos x}) \quad 1.57. y = 2^{\operatorname{tg}^6(\sqrt[3]{x})}$$

$$\begin{array}{lll}
1.58. y = 2^{\sin 3x} \cdot 3^{\cos 2x} & 1.59. y = e^{x^3} \cdot \operatorname{tg}(\sqrt[4]{x}) & 1.60. y = \lg(\cos x) \cdot \sqrt{\operatorname{tg} x} \\
1.61. y = 2^{\cos 3x} \cdot 3^{\sin 2x} & 1.62. y = \ln(\operatorname{arc} \operatorname{tg} x) \cdot \sqrt{1+x^2} & 1.63. y = 5^{\operatorname{tg} x} \cdot \ln^3 x \\
1.64. y = \sqrt{\cos x} \cdot e^{\sqrt[3]{x}} & 1.65. y = 5^{x^2} \cdot 3^{\cos 7x} & 1.66. y = 2^x \cdot \sqrt[3]{5-7x^2} \\
1.67. y = \cos(\ln x) \cdot \sqrt[3]{x^2-1} & 1.68. y = e^{\frac{2}{x}} \cdot \operatorname{arc} \cos^3 x & 1.69. y = \sin^3 5x \cdot \cos^5 3x \\
1.70. y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} \right) & 1.71. y = \frac{\operatorname{arc} \cos x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} & 1.72. y = \ln \frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2} - x}
\end{array}$$

Найти производную $f'(0)$ (№ 1.73 ÷ 1.78):

$$\begin{array}{ll}
1.73. f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1-5x^2)}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} & 1.74. f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x - \cos 3x}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \\
1.75. f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 2x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} & 1.76. f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \\
1.77. f(x) = \begin{cases} x\sqrt{x} \cdot \cos\left(\frac{5}{x^2}\right) + \sin 3x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} & 1.78. f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(\cos x)}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}
\end{array}$$

Найти производную, применяя логарифмическое дифференцирование (№ 1.79 ÷ 1.106):

$$\begin{array}{lll}
1.79. y = (\sin x)^{\operatorname{tg} x} & 1.80. y = (\cos x)^{\operatorname{ctg} x} & 1.81. y = (\operatorname{tg} x)^{\cos x} \\
1.82. y = (\operatorname{ctg} x)^{\sin x} & 1.83. y = (\operatorname{arc} \sin x)^{\sqrt{x}} & 1.84. y = (\operatorname{arc} \cos x)^{\operatorname{arc} \sin x} \\
1.85. y = \left(x + \frac{1}{x}\right)^{\sqrt[4]{x}} & 1.86. y = \left(x - \frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}} & 1.87. y = (\ln x)^{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x} \\
1.88. y = (\sin x)^{\lg x} & 1.89. y = (\operatorname{ctg} x)^{\operatorname{tg} x} & 1.90. y = (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x} \\
1.91. y = (\ln x)^x: x^{\ln x} & 1.92. y = x^x + \sqrt[x]{x} & 1.93. y = (\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x} \\
1.94. y = \frac{x}{(1-x)^2 \cdot (1+x)^3} & 1.95. y = \frac{(2-x^2) \cdot (3-x^3)}{(1-x)^2} & \\
1.96. y = \frac{(x-1)^3}{\sqrt{(x+2)^5} \cdot \sqrt[3]{(x+1)^2}} & 1.97. y = \frac{(x+1)^2 \cdot \sqrt{(x-1)^3}}{\sqrt[5]{(x-2)^2}} & \\
1.98. y = \frac{\sqrt{(x+2)^3} \cdot \sqrt[3]{(x-5)^2}}{\sqrt{x+1}} & 1.99. y = \frac{(x-2)^5 \cdot \sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{(x-3)^7}} & \\
1.100. y = \frac{(x+1)^5}{\sqrt{(x-2)^3} \cdot \sqrt[3]{(x+5)^2}} & 1.101. y = \frac{(x-2)^3 \cdot \sqrt{(x+1)^5}}{\sqrt[7]{(x+2)^4}} & \\
1.102. y = \frac{(x+2)^4 \cdot \sqrt[3]{(x-1)^5}}{\sqrt{(x-2)^3}} & 1.103. y = \frac{\sqrt[3]{(2x+1)^4}}{\sqrt{(3x-4)^5} \cdot (1+x)^6} & \\
1.104. y = (1-x)^4 \cdot \sqrt{2+x^2} \cdot \sqrt[3]{3+x^3} & 1.105. y = \frac{(1+2x)^4 \cdot \sqrt[3]{(1-x^2)^7}}{(1+x^4)^5 \cdot \sqrt[5]{(1+x^3)^2}} & \\
1.106. y = \operatorname{tg} x \cdot \sqrt[5]{(1+\sin x)^2 \cdot (1-\cos x)^3} & &
\end{array}$$

Найти производную обратной функции x'_y (№ 1.107 ÷ 1.114):

$$1.107. y = x + \ln x \quad 1.108. y = x + e^x \quad 1.109. y = x - \frac{1}{2} \sin x \quad 1.110. y = \frac{1}{3} x + e^{2x}$$

1.111. $y = 3x + x^3$ **1.112.** $y = x^3 + e^x$ **1.113.** $y = sh\,x$ **1.114.** $y = th\,x$

Найти производную y'_x параметрически заданной функции (№ 1.115 ÷ 1.126):

1.115. $\begin{cases} x = \frac{1}{3} \cdot t^3 + t \\ y = \ln(1 + t^2) \end{cases}$	1.116. $\begin{cases} x = e^t \cdot \cos t \\ y = e^t \cdot \sin t \end{cases}$	1.117. $\begin{cases} x = \frac{t}{1 + t^2} \\ y = \frac{t^2}{1 + t^2} \end{cases}$
1.118. $\begin{cases} x = \ln t \\ y = \frac{1}{1 - t} \end{cases}$	1.119. $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$	1.120. $\begin{cases} x = \frac{t}{1 + t^3} \\ y = \frac{t^2}{1 + t^3} \end{cases}$
1.121. $\begin{cases} x = \frac{\sin t}{1 + \sin t} \\ y = \frac{\cos t}{1 + \sin t} \end{cases}$	1.122. $\begin{cases} x = tg\,t \\ y = \sin^{-2} t \end{cases}$	1.123. $\begin{cases} x = \ln(1 + t^2) \\ y = t - \arctg t \end{cases}$
1.124. $\begin{cases} x = \sqrt[3]{1 - \sqrt{t}} \\ y = \sqrt{1 - \sqrt[3]{t}} \end{cases}$	1.125. $\begin{cases} x = 1 - e^{3t} \\ y = \frac{1}{3} \cdot (e^{3t} + e^{-3t}) \end{cases}$	1.126. $\begin{cases} x = \sqrt{t^2 + 1} \\ y = \frac{t - 1}{\sqrt{t^2 + 1}} \end{cases}$

Найти производную y'_x неявной функции (№ 1.127 ÷ 1.138):

1.127. $2^x + 2^y = 2^{x+y}$ **1.128.** $x^2 - y^2 = \arctg \frac{y}{x}$ **1.129.** $x \cdot y = \arctg \frac{x}{y}$
1.130. $\ln y = \arctg \frac{y}{x}$ **1.131.** $y^2 \cdot x = e^{\frac{y}{x}}$ **1.132.** $x - y + \sin(x \cdot y) = 0$
1.133. $x^{2y} = y^{3x}$ **1.134.** $x + y - \cos(x \cdot y) = 0$ **1.135.** $(e^x - 1) \cdot (e^y + 1) = x \cdot y$
1.136. $\arcsin x - x = \arcsin y + y$ **1.137.** $e^x \cdot \sin y = e^y \cdot \cos x$ **1.138.** $x^2 \cdot y = e^{\frac{x}{y}}$

Составить уравнения касательной и нормали к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 (№ 1.139 ÷ 1.144):

1.139. $y = 6\sqrt[3]{x}$, $x_0 = 8$ **1.140.** $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$, $x_0 = 1$ **1.141.** $y = \sqrt[3]{x^2}$, $x_0 = 0$
1.142. $y = \sqrt[3]{x^2}$, $x_0 = -8$ **1.143.** $y = x^3 + 2x$, $x_0 = -1$ **1.144.** $y = x^3 - 2x$, $x_0 = 2$

Найти угол между линиями в точке их пересечения (№ 1.145 ÷ 1.150):

1.145. $y = \ln x$, $y = 0$ **1.146.** $y = 2\sqrt{x}$, $x = 3$ **1.147.** $y = x^3$, $y = x$ ($x > 0$)
1.148. $y = e^x$, $y = 1 - x$ **1.149.** $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$ ($x > 0$) **1.150.** $y = \frac{1}{x}$, $y = 4x$ ($x > 0$)

Найти дифференциал dy функции $y = f(x)$ (без вычисления производных), используя таблицу дифференциалов и правила дифференцирования (№ 1.151 ÷ 1.162):

1.151. $y = x \cdot \sqrt{1 - x}$ **1.152.** $y = (1 - x^2) \cdot \arcsin x$ **1.153.** $y = \cos x \cdot \ln x$
1.154. $y = x^3 \cdot e^{-x}$ **1.155.** $y = x \cdot \arcsin x$ **1.156.** $y = \frac{x}{\ln x}$
1.157. $y = x \cdot \sqrt{1 + x^2}$ **1.158.** $y = x \cdot \arctg x$ **1.159.** $y = (1 + x^2) \cdot \arctg x$

$$1.160. y = \frac{\ln x}{x^2}$$

$$1.161. y = x \cdot \operatorname{tg} x$$

$$1.162. y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

Вычислить приближенное значение с помощью дифференциала; результат округлить до 3-х знаков после запятой (№ 1.163 ÷ 1.174):

$$1.163. \operatorname{arctg} 1,02$$

$$1.164. \sqrt[3]{8,54}$$

$$1.165. (2,015)^3$$

$$1.166. \frac{1}{\sqrt{8,73}}$$

$$1.167. \cos 100^\circ$$

$$1.168. \ln 0,958$$

$$1.169. \operatorname{arctg} 0,92$$

$$1.170. \sqrt[3]{7,64}$$

$$1.171. (1,985)^3$$

$$1.172. \frac{1}{\sqrt{4,16}}$$

$$1.173. \cos 81^\circ$$

$$1.174. \ln 0,974$$

Дополнительные задачи.

1.175. При каких значениях α функция

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 2x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \text{ в точке } x_0 = 0 \text{ является:}$$

а) непрерывной; б) дифференцируемой;

в) непрерывно дифференцируемой (т.е. ее производная является непрерывной)?

1.176. Найти односторонние производные $f'(k+0)$ и $f'(k-0)$, где $k \in \mathbb{Z}$ функции $f(x) = [x] \cdot \sin(\pi x)$, $[x]$ — целая часть числа x .

1.177. Вывести формулы для сумм:

$$P_n = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}, \quad Q_n = 1^2 + 2^2x + 3^2x^2 + \dots + n^2x^{n-1},$$

используя функцию $S_n(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$.

1.178. Составить уравнения касательной и нормали в точке $x_0 = 1$ к кривой $y = x^x$.

1.179. Составить уравнения касательной и нормали в точке $(2; 2)$

$$\text{к кривой } \begin{cases} x = \frac{1+t}{t^3} \\ y = \frac{3}{2t^2} + \frac{1}{2t} \end{cases}.$$

1.180. Составить уравнения касательной и нормали в точке $(1; 1)$ к кривой $x^5 + y^5 = 2xy$.

1.181. Доказать, что производная четной дифференцируемой функции есть функция нечетная, а производная нечетной дифференцируемой функции есть функция четная.

1.182. Доказать, что производная дифференцируемой периодической функции есть функция периодическая с тем же периодом.

Задачи к главе 2. Основные теоремы дифференциального исчисления.

Найти производную $y^{(n)}(x_0)$ функции $y = f(x)$ в указанной точке x_0 (№ 2.1 ÷ 2.12):

2.1. $y = \sin^2 x$, $n = 8$, $x_0 = 0$

2.2. $y = x \cdot \ln x$, $n = 7$, $x_0 = 1$

2.3. $y = x \cdot e^x$, $n = 6$, $x_0 = 1$

2.4. $y = \cos^2 x$, $n = 8$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$

2.5. $y = \ln(4 - 2x)$, $n = 7$, $x_0 = 1$

2.6. $y = \frac{x^2}{x-1}$, $n = 4$, $x_0 = 3$

2.7. $y = (2x - 3)^6$, $n = 3$, $x_0 = 2$

2.8. $y = \sqrt{x}$, $n = 4$, $x_0 = 1$

2.9. $y = \sqrt[3]{x}$, $n = 3$, $x_0 = 1$

2.10. $y = \frac{1}{1+x}$, $n = 6$, $x_0 = 0$

2.11. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $n = 3$, $x_0 = 1$

2.12. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, $n = 3$, $x_0 = 1$

Найти дифференциал $d^n y$ функции $y = f(x)$ (№ 2.13 ÷ 2.22):

2.13. $y = 2^{3x+5}$

2.14. $y = \lg(7 + 2x)$

2.15. $y = \sin(3x + 1) + \cos 5x$

2.16. $y = \frac{1+x}{1-x}$

2.17. $y = \sqrt{x}$

2.18. $y = xe^{ax}$

2.19. $y = \frac{e^x}{x}$

2.20. $y = \frac{\ln x}{x}$

2.21. $y = \frac{1}{x(1-x)}$

2.22. $y = e^x(\sin x + \cos x)$

Найти производную y''_{xx} параметрически заданной функции (№ 2.23 ÷ 2.34):

2.23. $\begin{cases} x = t + \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$

2.24. $\begin{cases} x = e^{-\pi \cdot t} \\ y = e^{\pi \cdot t} \end{cases}$

2.25. $\begin{cases} x = \ln t \\ y = t^3 \end{cases}$

2.26. $\begin{cases} x = \sin t - t \cdot \cos t \\ y = \cos t + t \cdot \sin t \end{cases}$

2.27. $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$

2.28. $\begin{cases} x = \ln(1 + t^2) \\ y = t^2 \end{cases}$

2.29. $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t \\ y = \frac{1}{2} \cdot t^2 \end{cases}$

2.30. $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t \\ y = \ln(1 + t^2) \end{cases}$

2.31. $\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \sin 2t \end{cases}$

2.32. $\begin{cases} x = \ln(1 + t^3) \\ y = t^3 \end{cases}$

2.33. $\begin{cases} x = \operatorname{arcsin} t \\ y = \sqrt{1 - t^2} \end{cases}$

2.34. $\begin{cases} x = \ln t \\ y = \frac{1}{1-t} \end{cases}$

Найти производную y''_{xx} неявной функции (№ 2.35 ÷ 2.46):

2.35. $y - x = \operatorname{arctg} y$

2.36. $y \cdot \ln y = x$

2.37. $x^2 + 5xy + y^2 - 2x + y = 6$

2.38. $x^4 - xy + y^4 = 1$

2.39. $x^2 - 2xy + y^2 - 4x + 2y = 3$

2.40. $y = x + \ln y$

2.41. $y^2 + 2 \cdot \ln y = x^2$

2.42. $x^3 - y^3 = x \cdot y$

2.43. $\ln(x + y) = x \cdot y$

2.44. $x^2 + y^3 = 1 - y^2 + x$

2.45. $x^2 + y^3 = 1 + x \cdot y$

2.46. $x^3 + y^2 = 3x \cdot y^2$

Найти дифференциал $d^2 y$ функции $y = f(x)$ (без вычисления производных), используя таблицу дифференциалов и правила дифференцирования (№ 2.47 ÷ 2.58):

2.47. $y = x \cdot \sqrt{1-x}$

2.48. $y = (1 - x^2) \cdot \arcsin x$

2.49. $y = \cos x \cdot \ln x$

2.50. $y = x^3 \cdot e^{-x}$

2.51. $y = x \cdot \arcsin x$

2.52. $y = \frac{x}{\ln x}$

2.53. $y = x \cdot \sqrt{1+x^2}$

2.54. $y = x \cdot \operatorname{arctg} x$

2.55. $y = (1 + x^2) \cdot \operatorname{arctg} x$

2.56. $y = \frac{\ln x}{x^2}$

2.57. $y = x \cdot \operatorname{tg} x$

2.58. $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

Разложить многочлен $P(x)$ по степеням $(x - x_0)$ (№ 2.59 ÷ 2.70):

- 2.59. $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5x - 2$, $x_0 = 1$ 2.60. $P(x) = -2x^3 + 3x^2 + 5x - 2$, $x_0 = -1$
 2.61. $P(x) = x^3 + 5x^2 - 2x - 3$, $x_0 = -2$ 2.62. $P(x) = -x^3 + 3x^2 - 4x + 1$, $x_0 = 2$
 2.63. $P(x) = x^3 - x^2 + 2x - 5$, $x_0 = 3$ 2.64. $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 10x + 1$, $x_0 = -3$
 2.65. $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 6x + 2$, $x_0 = -1$ 2.66. $P(x) = -2x^3 + 3x^2 + 4x - 5$, $x_0 = 1$
 2.67. $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 5$, $x_0 = 2$ 2.68. $P(x) = x^3 + 3x^2 + 4x - 2$, $x_0 = -2$
 2.69. $P(x) = -x^3 - 2x^2 + 3x - 2$, $x_0 = -3$ 2.70. $P(x) = 4x^3 - 3x^2 + 5x - 2$, $x_0 = 1$

Вычислить приближенное значение, используя разложение функции по формуле Маклорена до членов n -го порядка. Результат округлить до 4-х знаков после запятой (№ 2.71 ÷ 2.82):

- 2.71. $\sqrt[3]{72}$, $n = 4$ 2.72. $\sqrt{e}$, $n = 5$ 2.73. $\ln(1,2)$, $n = 5$ 2.74. $\sin(0,3)$, $n = 5$
 2.75. $\sqrt{5}$, $n = 4$ 2.76. $\cos(0,2)$, $n = 4$ 2.77. $\sqrt[3]{10}$, $n = 4$ 2.78. $e^{0,4}$, $n = 5$
 2.79. $\ln(0,8)$, $n = 5$ 2.80. $\sin(0,4)$, $n = 5$ 2.81. $\sqrt{29}$, $n = 4$ 2.82. $\cos(0,3)$, $n = 4$

Вычислить пределы, используя правило Лопиталя (№ 2.83 ÷ 2.106):

- 2.83. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{2x} - x}{x^2}$ 2.84. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x^3}$ 2.85. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{\sin x - x}$
 2.86. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x}$ 2.87. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x - \operatorname{tg} x}$ 2.88. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{ctg} x - 1}{\sin 4x}$
 2.89. $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{1 + 2\ln(\sin x)}$ 2.90. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi - 2\operatorname{arctg} x}{e^{3/x} - 1}$ 2.91. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}{\ln(1-x)}$
 2.92. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \cdot \sin^2 x}$ 2.93. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$ 2.94. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x) \cdot \operatorname{tg} 2x$
 2.95. $\lim_{x \rightarrow 0+} (x \cdot \ln x)$ 2.96. $\lim_{x \rightarrow 1} \ln x \cdot \ln(x-1)$ 2.97. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\operatorname{arctg} x} - \frac{1}{x} \right)$
 2.98. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{x}{\operatorname{ctg} x} - \frac{\pi}{2\cos x} \right)$ 2.99. $\lim_{x \rightarrow 0+} x^x$ 2.100. $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$
 2.101. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{1/x^2}$ 2.102. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x} \right)^{1/x^2}$ 2.103. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$
 2.104. $\lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}$ 2.105. $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x)^{1/\ln x}$ 2.106. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos \sqrt{x})^{1/x}$

Дополнительные задачи.

- 2.107. Разложить функцию $f(x) = \operatorname{tg} x$ по формуле Маклорена до члена с x^5 .
 2.108. Разложить функцию $f(x) = \ln(\cos x)$ по формуле Маклорена до члена с x^6 .
 2.109. Оценить абсолютную погрешность Δ приближенной формулы:

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6} \text{ при } |x| \leq 0,5.$$

 2.110. Оценить абсолютную погрешность Δ приближенной формулы:

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 \quad \text{при } 0 \leq x \leq 1.$$

2.111. Вычислить предел: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x \right)$.

2.112. Вычислить предел: $\lim_{x \rightarrow \alpha} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} \alpha} \right)^{\operatorname{ctg}(x-\alpha)}$, где $\alpha \neq \frac{\pi}{2} \cdot k, k \in \mathbb{Z}$.

Задачи к главе 3. Исследование функций.

Найти промежутки монотонности функции $y = f(x)$ (№ 3.1 ÷ 3.12):

- 3.1.** $y = 1 - 4x - x^2$ **3.2.** $y = 3x - x^3$ **3.3.** $y = \frac{x}{x-3}$ **3.4.** $y = \frac{1}{1+x^2}$
3.5. $y = \frac{x}{x^2-6x-16}$ **3.6.** $y = (x-3)\sqrt{x}$ **3.7.** $y = \frac{e^x}{x}$ **3.8.** $y = x - \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$
3.9. $y = x \cdot \ln x$ **3.10.** $y = x + \sin x$ **3.11.** $y = \frac{x^2}{2^x}$ **3.12.** $y = x^x$

Доказать, что $f(x) = \operatorname{const}$, и найти эту константу (№ 3.13 ÷ 3.15):

- 3.13.** а) $f(x) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1+x}{1-x} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} x, \quad x \in (-\infty; 1)$
 б) $f(x) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1+x}{1-x} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} x, \quad x \in (1; +\infty)$
3.14. а) $f(x) = 2\operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \operatorname{arc} \sin \frac{2x}{1+x^2}, \quad x \in (-\infty; -1]$
 б) $f(x) = 2\operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \operatorname{arc} \sin \frac{2x}{1+x^2}, \quad x \in [1; +\infty)$
3.15. $f(x) = 3\operatorname{arc} \cos x - \operatorname{arc} \cos (3x - 4x^3), \quad x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$

Доказать неравенство (№ 3.16 ÷ 3.19):

- 3.16.** $\ln(1+x) > x - \frac{1}{2}x^2 \quad \forall x > 0$ **3.17.** $e^x > 1+x \quad \forall x \neq 0$
3.18. $\operatorname{tg} x > x + \frac{1}{3}x^3 \quad \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ **3.19.** $\sin x > \frac{2}{\pi}x \quad \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Найти экстремумы функции $y = f(x)$ (№ 3.20 ÷ 3.31):

- 3.20.** $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ **3.21.** $y = 2x^2 - x^4$ **3.22.** $y = x + \frac{1}{x}$
3.23. $y = \frac{2x}{1+x^2}$ **3.24.** $y = \sqrt{2x-x^2}$ **3.25.** $y = x \cdot e^x$ **3.26.** $y = \frac{x}{e^x}$
3.27. $y = \frac{e^x}{x}$ **3.28.** $y = x \cdot \ln x$ **3.29.** $y = x - \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$
3.30. $y = \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x$ **3.31.** $y = 2\sin x + \sin 2x$

Найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке (№ 3.32 ÷ 3.41):

- 3.32.** $y = 2^x, \quad x \in [-1; 3]$ **3.33.** $y = x^2 - 4x + 6, \quad x \in [-3; 10]$

- 3.34. $y = \sqrt{5 - 4x}$, $x \in [-1; 1]$ 3.35. $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$, $x \in [-1; 3]$
 3.36. $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$, $x \in [-3; 2]$ 3.37. $y = x + \frac{1}{x}$, $x \in [0,1; 10]$
 3.38. $y = 4 - x - \frac{4}{x^2}$, $x \in [1; 4]$ 3.39. $y = 2\sqrt{x} - x$, $x \in [0; 4]$
 3.40. $y = \sqrt[3]{2x^2(x-6)}$, $x \in [-2; 4]$ 3.41. $y = \frac{2(x^2+3)}{x^2-2x+5}$, $x \in [-3; 3]$

Найти наибольшее и наименьшее значения функции на D_f (№ 3.42 ÷ 3.44):

3.42. $y = \frac{x}{1+x^2}$ 3.43. $y = \sqrt{(10-x)x}$ 3.44. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$

Отклонением функций $f(x)$ и $g(x)$ в точке x_0 называется величина $\Delta = |f(x_0) - g(x_0)|$.

Найти максимальное (№ 3.45 ÷ 3.48) и минимальное (№ 3.49 ÷ 3.52) отклонение функции на указанном множестве:

- 3.45. $f(x) = x$, $g(x) = x^2$, $x \in [0; 1]$ 3.46. $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$, $x \in [0; 2\pi]$
 3.47. $f(x) = x^3$, $g(x) = x^2$, $x \in [0; 1]$ 3.48. $f(x) = \arcsin x$, $g(x) = x$, $x \in [-1; 1]$
 3.49. $f(x) = \sqrt{2x}$, $g(x) = x^2 + 1$, $x \geq 0$ 3.50. $f(x) = -x$, $g(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$
 3.51. $f(x) = \ln x$, $g(x) = \frac{1}{2}x^2$, $x > 0$ 3.52. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$, $g(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$

3.53. Данное положительное число a разложить на два слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим.

3.54. Кусок проволоки длины l согнуть в виде прямоугольника так, чтобы его площадь была наибольшей.

3.55. Открытый жестяной бак с квадратным основанием должен вмещать V литров. При каких размерах на изготовление бака потребуется наименьшее количество жести?

3.56. Какой из цилиндров с данным объемом имеет наименьшую полную поверхность?

3.57. В данный шар вписать цилиндр с наибольшим объемом.

3.58. В данный шар вписать цилиндр с наибольшей боковой поверхностью.

3.59. В данный шар вписать прямой круговой конус с наибольшим объемом.

3.60. В данный шар вписать прямой круговой конус с наибольшей боковой поверхностью.

3.61. Какой из конусов, описанных около данного шара, имеет наименьший объем?

3.62. Из круглого листа вырезать такой сектор, чтобы, свернув его, получить воронку наибольшей вместимости.

3.63. В данный эллипс вписать прямоугольник наибольшей площади со сторонами, параллельными осям эллипса.

3.64. На кривой $y = \frac{1}{1+x^2}$ найти точку, в которой касательная составляет с осью OX наибольший по модулю угол.

Найти промежутки выпуклости, вогнутости и точки перегиба графика функции $y = f(x)$ (№ 3.65 ÷ 3.76):

3.65. $y = 3x^2 - x^3$ 3.66. $y = x^3 - 6x^2 + 12x + 4$ 3.67. $y = x + x^{\frac{5}{3}}$ 3.68. $y = \frac{1}{x+3}$

$$\begin{array}{llll}
 \text{3.69. } y = \sqrt[3]{4x^3 - 12x} & \text{3.70. } y = x + \sin x & \text{3.71. } y = \frac{x^3}{x^2 + 12} & \text{3.72. } y = x - \operatorname{arctg} x \\
 \text{3.73. } y = x^2 \cdot \ln x & \text{3.74. } y = \sqrt{1 + x^2} & \text{3.75. } y = e^{-x^2} & \text{3.76. } y = x^x
 \end{array}$$

Доказать неравенство (№ 3.77 ÷ 3.79):

$$\text{3.77. } \left(\frac{a+b}{2}\right)^n \leq \frac{a^n + b^n}{2} \quad \forall n > 1, a, b > 0$$

$$\text{3.78. } \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{\ln a + \ln b}{2} \quad \forall a, b > 0$$

$$\text{3.79. } (a+b) \cdot \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq a \cdot \ln a + b \cdot \ln b \quad \forall a, b > 0$$

Найти асимптоты кривой $y = f(x)$ (№ 3.80 ÷ 3.98):

$$\begin{array}{llll}
 \text{3.80. } y = \frac{1}{(x-2)^2} & \text{3.81. } y = \frac{x^2}{x-3} & \text{3.82. } y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x+3} & \text{3.83. } y = \frac{x^2 + 2x - 1}{2x+1} \\
 \text{3.84. } y = \frac{x}{x^2 - 4x + 3} & \text{3.85. } y = \frac{x^2 - 6x + 4}{3x - 2} & \text{3.86. } y = \frac{x^2 + 6x + 9}{x+4} & \text{3.87. } y = \frac{-x^2 - 4x + 13}{4x+3} \\
 \text{3.88. } y = \sqrt{1+x^2} & \text{3.89. } y = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} & \text{3.90. } y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} & \text{3.91. } y = \frac{3x^2-10}{\sqrt{4x^2-1}} \\
 \text{3.92. } y = x - 2 + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}} & \text{3.93. } y = \ln(1+x) & \text{3.94. } y = x + \ln x & \text{3.95. } y = e^{\frac{1}{x}} \\
 \text{3.96. } y = \frac{\sin x}{x} & \text{3.97. } y = \frac{1}{1-e^x} & \text{3.98. } y = x + \operatorname{arctg} x
 \end{array}$$

Дополнительные задачи.

3.99. Найти максимальное отклонение от нуля многочлена $P(x) = x(x-1)^2(x+2)$ на отрезке $[-2; 1]$.

3.100. Определить, при каком значении коэффициента b многочлен $P(x) = x^2 + b$ наименее отклоняется от нуля на отрезке $[-1; 1]$.

3.101. Определить, при каком значении коэффициента b квадратичная функция $f(x) = x^2$ наименее отклоняется от линейной функции $g(x) = 2x + b$ на отрезке $[0; 2]$.

3.102. На кривой $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ найти точку, ближайшую к началу координат.

3.103. На кривой $y = \frac{1}{e} \ln x$ найти точку, ближайшую к началу координат.

3.104. Определить число действительных корней уравнения $\ln x = kx$ в зависимости от значения параметра k .

Задачи к главе 4. Неопределенный интеграл.

Непосредственное интегрирование.

Вычислить интегралы, применяя основные правила интегрирования и таблицу интегралов (№ 4.1 ÷ 4.60):

- 4.1. $\int (6x^2 - 3x + 5)dx$ 4.2. $\int (2x^2 + 1)^3 dx$ 4.3. $\int (x-1)(x-2)(x-3)dx$
 4.4. $\int \left(\frac{1+x}{x}\right)^2 dx$ 4.5. $\int \frac{x^2 + 5x + 6}{x+3} dx$ 4.6. $\int \frac{x^2}{x^2+1} dx$ 4.7. $\int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) dx$
 4.8. $\int (\sqrt{x^3} + \sqrt[3]{x^2})dx$ 4.9. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) dx$ 4.10. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x^3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right) dx$ 4.11. $\int \sqrt{\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x}} dx$
 4.12. $\int \sqrt[3]{\sqrt{x} \cdot \sqrt[5]{x}} dx$ 4.13. $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 dx$ 4.14. $\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \sqrt{x\sqrt{x}} dx$ 4.15. $\int \frac{x - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} dx$
 4.16. $\int \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} dx$ 4.17. $\int \frac{(x - \sqrt{x}) \cdot (1 + \sqrt{x})}{\sqrt[3]{x}} dx$ 4.18. $\int 3^x e^x dx$ 4.19. $\int (3^x - 2^x)^2 dx$
 4.20. $\int \left(\frac{2^x}{10^x} - 2^x 10^x\right) dx$ 4.21. $\int \frac{2^{x-5} x}{10^x} dx$ 4.22. $\int \frac{3^{x+1} + 2^{x-1}}{6^x} dx$ 4.23. $\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} dx$
 4.24. $\int \frac{1}{\sqrt{7-x^2}} dx$ 4.25. $\int \frac{5 + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx$ 4.26. $\int \frac{5 - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} dx$ 4.27. $\int \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx$
 4.28. $\int \frac{\sqrt{2+x^2} - \sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}} dx$ 4.29. $\int \frac{1}{16+x^2} dx$ 4.30. $\int \frac{1}{3+x^2} dx$ 4.31. $\int \frac{1}{x^2-36} dx$
 4.32. $\int \frac{1}{x^2-5} dx$ 4.33. $\int \frac{x^2 + 5x - 3}{x-2} dx$ 4.34. $\int \frac{2x-5}{3x+1} dx$ 4.35. $\int \frac{3x+2}{2x-7} dx$
 4.36. $\int \frac{1}{(x-2) \cdot (x-3)} dx$ 4.37. $\int \frac{1}{(x+1) \cdot (x+3)} dx$ 4.38. $\int \frac{1}{(x+a) \cdot (x+b)} dx$ 4.39. $\int tg^2 x dx$
 4.40. $\int ctg^2 x dx$ 4.41. $\int (tg x - ctg x)^2 dx$ 4.42. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx$ 4.43. $\int \frac{1}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx$
 4.44. $\int (e^{-x} + e^{-3x}) dx$ 4.45. $\int (e^{3x} - e^{2x})^2 dx$ 4.46. $\int \frac{(e^x - 1) \cdot (e^{2x} + 1)}{e^x} dx$ 4.47. $\int sh^2 x dx$
 4.48. $\int ch^2 x dx$ 4.49. $\int (\sin 5x + \cos 3x) dx$ 4.50. $\int \left(\sin\left(2x + \frac{\pi}{7}\right) - \cos\left(3x - \frac{\pi}{5}\right)\right) dx$
 4.51. $\int \left(\frac{1}{x-3} + \frac{1}{5x+2} - \frac{1}{\sqrt{7x+1}}\right) dx$ 4.52. $\int \left(\frac{1}{x+5} - \frac{1}{2x-1} + \frac{1}{\sqrt[3]{6x+7}}\right) dx$
 4.53. $\int \left(\frac{1}{ch^2 \frac{x}{2}} - \frac{1}{sh^2 \frac{x}{2}}\right) dx$ 4.54. $\int \frac{1}{1-\cos x} dx$ 4.55. $\int \frac{1}{1+\cos x} dx$ 4.56. $\int \frac{1}{1+\sin x} dx$
 4.57. $\int \cos^2 x dx$ 4.58. $\int \sin^2 x dx$ 4.59. $\int \sin^4 x dx$ 4.60. $\int \cos^4 x dx$

Замена переменной.

Вычислить интегралы с помощью замены переменной (подведения под знак дифференциала или подстановки) (№ 4.61 ÷ 4.112):

- 4.61. $\int \frac{x dx}{3-5x^2}$ 4.62. $\int \frac{x dx}{1+x^4}$ 4.63. $\int \frac{x^3 dx}{x^8-2}$ 4.64. $\int x^2 \cdot \sqrt[3]{1+x^3} dx$
 4.65. $\int x^3 \cdot \sqrt{2-7x^4} dx$ 4.66. $\int \frac{2x-3}{3x^2-9x+7} dx$ 4.67. $\int \frac{x^3+2}{x^4+8x-1} dx$ 4.68. $\int \frac{5\sqrt{x} dx}{\sqrt{x}}$

$$\begin{aligned}
& 4.69. \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} \quad 4.70. \int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx \quad 4.71. \int \frac{\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)}{x^3} dx \quad 4.72. \int \frac{\ln^2 x}{x} dx \quad 4.73. \int \frac{dx}{x \cdot \ln x} \\
& 4.74. \int \frac{dx}{x \cdot \ln^3 x} \quad 4.75. \int \frac{e^x}{e^x - 2} dx \quad 4.76. \int \frac{2^x}{1+4^x} dx \quad 4.77. \int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx \quad 4.78. \int \frac{1}{e^x + 1} dx \\
& 4.79. \int \sin^2 x \cdot \cos x dx \quad 4.80. \int \cos^3 x \cdot \sin x dx \quad 4.81. \int \operatorname{tg} x dx \quad 4.82. \int \operatorname{ctg} x dx \\
& 4.83. \int \sin^3 x dx \quad 4.84. \int \cos^3 x dx \quad 4.85. \int \sin^5 x dx \quad 4.86. \int \cos^5 x dx \quad 4.87. \int \operatorname{tg}^3 x dx \\
& 4.88. \int \operatorname{ctg}^3 x dx \quad 4.89. \int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos x} \quad 4.90. \int \frac{dx}{\sin x} \quad 4.91. \int \frac{dx}{\cos x} \quad 4.92. \int \frac{\sqrt{3 - \operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx \\
& 4.93. \int \frac{\sqrt[3]{2 + \operatorname{ctg} x}}{\sin^2 x} dx \quad 4.94. \int \frac{1}{\cos^4 x} dx \quad 4.95. \int \frac{1}{\sin^4 x} dx \quad 4.96. \int \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{x^2 + 1} dx \\
& 4.97. \int \frac{\operatorname{arc} \sin x}{\sqrt{1 - x^2}} dx \quad 4.98. \int \frac{dx}{(x^2 + 1) \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} x} \quad 4.99. \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2} \cdot \operatorname{arc} \sin^2 x} \quad 4.100. \int \sqrt{a^2 - x^2} dx \\
& 4.101. \int \sqrt{x^2 - a^2} dx \quad 4.102. \int \sqrt{x^2 + a^2} dx \quad 4.103. \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx \quad 4.104. \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx \\
& 4.105. \int \frac{1}{(a^2 + x^2)^2} dx \quad 4.106. \int \frac{1}{(a^2 + x^2)\sqrt{a^2 + x^2}} dx \quad 4.107. \int \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}} dx \quad 4.108. \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} dx \\
& 4.109. \int \frac{x^2}{\sqrt{1 + x^2}} dx \quad 4.110. \int \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} dx \quad 4.111. \int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} dx \quad 4.112. \int \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x^2} dx
\end{aligned}$$

Интегрирование по частям.

Вычислить интегралы методом интегрирования по частям (№ 4.113 ÷ 4.144):

$$\begin{aligned}
& 4.113. \int \ln x dx \quad 4.114. \int \operatorname{arc} \operatorname{tg} x dx \quad 4.115. \int \operatorname{arc} \sin x dx \quad 4.116. \int x \cdot e^x dx \\
& 4.117. \int x \cdot e^{-x} dx \quad 4.118. \int x \cdot 2^x dx \quad 4.119. \int x \cdot \cos x dx \quad 4.120. \int x \cdot \sin x dx \\
& 4.121. \int x \cdot \cos 3x dx \quad 4.122. \int x \cdot \sin 2x dx \quad 4.123. \int x \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} x dx \quad 4.124. \int x \cdot \operatorname{arc} \sin x dx \\
& 4.125. \int x \cdot \operatorname{sh} x dx \quad 4.126. \int x \cdot \operatorname{ch} x dx \quad 4.127. \int x^2 \cdot \ln x dx \quad 4.128. \int \ln^2 x dx \\
& 4.129. \int \sqrt{x} \cdot \ln^2 x dx \quad 4.130. \int \frac{\ln x}{x^3} dx \quad 4.131. \int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx \quad 4.132. \int x^2 \cdot \operatorname{arc} \cos x dx \\
& 4.133. \int \frac{x dx}{\sin^2 x} \quad 4.134. \int \frac{x dx}{\cos^2 x} \quad 4.135. \int \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{x} dx \quad 4.136. \int \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) dx \\
& 4.137. \int e^x \cdot \sin x dx \quad 4.138. \int e^x \cdot \cos x dx \quad 4.139. \int e^{-x} \cdot \sin x dx \quad 4.140. \int 2^x \cdot \cos x dx \\
& 4.141. \int e^x \cdot \sin 3x dx \quad 4.142. \int 3^x \cdot \cos 2x dx \quad 4.143. \int \sin(\ln x) dx \quad 4.144. \int \cos(\ln x) dx
\end{aligned}$$

Вычислить интегралы, применяя различные методы (№ 4.145 ÷ 4.160):

$$\begin{aligned}
& 4.145. \int x^3 \cdot e^{-x^2} dx \quad 4.146. \int e^{\sqrt{x}} dx \quad 4.147. \int \operatorname{arc} \sin^2 x dx \quad 4.148. \int x \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg}^2 x dx \\
& 4.149. \int x^2 \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} x dx \quad 4.150. \int \frac{\operatorname{arc} \sin x}{x^2} dx \quad 4.151. \int \frac{\operatorname{arc} \sin \sqrt{x}}{\sqrt{1 - x}} dx \quad 4.152. \int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx \\
& 4.153. \int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx \quad 4.154. \int e^{-x} \cdot \sin^2 x dx \quad 4.155. \int \cos^2(\ln x) dx \quad 4.156. \int x \cdot \operatorname{tg}^2 x dx \\
& 4.157. \int x^2 \cdot \sqrt{x^2 + a^2} dx \quad 4.158. \int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x} dx \quad 4.159. \int \frac{x \cdot e^x}{(x+1)^2} dx \quad 4.160. \int \frac{\operatorname{arc} \operatorname{ctg}(e^x)}{e^x} dx
\end{aligned}$$

Интегрирование рациональных функций.

Вычислить интегралы от рациональных функций (№ 4.161 ÷ 4.190):

$$\begin{array}{lll}
4.161. \int \frac{1}{x^2+2x+5} dx & 4.162. \int \frac{x}{x^2-4x+9} dx & 4.163. \int \frac{2x+3}{x^2-8x+17} dx \\
4.164. \int \frac{4x+1}{x^2+6x+10} dx & 4.165. \int \frac{x+2}{x \cdot (x-1)} dx & 4.166. \int \frac{x-5}{(x-2) \cdot (x+3)} dx \\
4.167. \int \frac{x-5}{(x-3) \cdot (x+1)} dx & 4.168. \int \frac{x^3+1}{x^2-x} dx & 4.169. \int \frac{3x^3+1}{x^2-1} dx \\
4.170. \int \frac{x^3-17}{x^2-4x+3} dx & 4.171. \int \frac{2x^3+5}{x^2-x-2} dx & 4.172. \int \frac{2x^3-1}{x^2+x-6} dx \\
4.173. \int \frac{3x^3+25}{x^2+3x+2} dx & 4.174. \int \frac{x^3+2x^2+3}{(x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3)} dx & \\
4.175. \int \frac{3x^3+2x^2-17x+18}{(x-1) \cdot (x-2) \cdot (x+2)} dx & 4.176. \int \frac{x^3+5}{(x-1) \cdot (x+2) \cdot (x+1)} dx & \\
4.177. \int \frac{x^3-3x^2-12}{(x-3) \cdot (x-2) \cdot (x-4)} dx & 4.178. \int \frac{x^3-3x^2-12}{x \cdot (x-4) \cdot (x-3)} dx & \\
4.179. \int \frac{4x^3+x^2+2}{x \cdot (x-1) \cdot (x-2)} dx & 4.180. \int \frac{x^3+6x^2+13x+9}{(x+1) \cdot (x+2)^3} dx & \\
4.181. \int \frac{x^3+6x^2+13x+8}{x \cdot (x+2)^3} dx & 4.182. \int \frac{x^3-6x^2+13x-6}{(x+2) \cdot (x-2)^3} dx & \\
4.183. \int \frac{x^3+6x^2+14x+10}{(x+1) \cdot (x+2)^3} dx & 4.184. \int \frac{x^3+6x^2+11x+7}{(x+1) \cdot (x+2)^3} dx & \\
4.185. \int \frac{x^3+4x^2+4x+2}{(x+1)^2 \cdot (x^2+x+1)} dx & 4.186. \int \frac{x^3+4x^2+3x+2}{(x+1)^2 \cdot (x^2+1)} dx & \\
4.187. \int \frac{2x^3+7x^2+7x-1}{(x+2)^2 \cdot (x^2+x+1)} dx & 4.188. \int \frac{2x^3+3x^2+3x+2}{(x^2+x+1) \cdot (x^2+1)} dx & \\
4.189. \int \frac{x^3+x+1}{(x^2+x+1) \cdot (x^2+1)} dx & 4.190. \int \frac{x^3+x^2+1}{(x^2-x+1) \cdot (x^2+1)} dx &
\end{array}$$

Интегрирование иррациональных функций.

Вычислить интегралы от иррациональных функций (№ 4.191 ÷ 4.224):

$$\begin{array}{llll}
4.191. \int \frac{x}{1+\sqrt{2x+1}} dx & 4.192. \int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}} & 4.193. \int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} & 4.194. \int \frac{\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}} dx \\
4.195. \int \frac{dx}{\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{x-1}} & 4.196. \int \frac{dx}{(1+\sqrt[4]{x})^3 \cdot \sqrt{x}} & 4.197. \int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}+\sqrt[4]{2x-1}} & \\
4.198. \int \frac{dx}{\sqrt{x+3}+\sqrt[3]{(x+3)^2}} & 4.199. \int x \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx & 4.200. \int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx & \\
4.201. \int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} dx & 4.202. \int \frac{1}{x^3} \sqrt[5]{\frac{x}{x+1}} dx & 4.203. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}} & 4.204. \int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} \\
4.205. \int \frac{dx}{x \sqrt[3]{1+x^5}} & 4.206. \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+2x+1}} & 4.207. \int \frac{x}{\sqrt{x^2-2x}} dx & 4.208. \int \frac{x}{\sqrt{2x-x^2}} dx \\
4.209. \int \frac{x+4}{\sqrt{6-2x-x^2}} dx & 4.210. \int \frac{x}{\sqrt{1+x+x^2}} dx & 4.211. \int \frac{x}{\sqrt{1-x-x^2}} dx & \\
4.212. \int \frac{1-3x}{\sqrt{x^2-4x+13}} dx & 4.213. \int \frac{3x-1}{\sqrt{4x-3-x^2}} dx & 4.214. \int \frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}} dx &
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
& 4.215. \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-x+1}} dx \quad 4.216. \int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad 4.217. \int \frac{x^6}{\sqrt{1+x^2}} dx \quad 4.218. \int \frac{dx}{x^5 \cdot \sqrt{x^2-1}} \\
& 4.219. \int \frac{dx}{(x+1)^3 \cdot \sqrt{x^2+2x}} \quad 4.220. \int \frac{dx}{(x-1)^3 \cdot \sqrt{x^2-2x-1}} \quad 4.221. \int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2+x+1}} \\
& 4.222. \int \frac{dx}{1 + \sqrt{1-2x-x^2}} \quad 4.223. \int x \sqrt{x^2-2x+2} dx \quad 4.224. \int \frac{x - \sqrt{x^2+3x+2}}{x + \sqrt{x^2+3x+2}} dx
\end{aligned}$$

Интегрирование тригонометрических функций.

Вычислить интегралы от тригонометрических функций (№ 4.225 ÷ 4.264):

$$\begin{aligned}
& 4.225. \int \sin 5x \cdot \cos 2x dx \quad 4.226. \int \sin 3x \cdot \sin 4x dx \quad 4.227. \int \cos 3x \cdot \cos x dx \\
& 4.228. \int \frac{dx}{2 + \cos x} \quad 4.229. \int \frac{\sin x}{1 - \sin x} dx \quad 4.230. \int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x} \quad 4.231. \int \frac{dx}{2 \sin x - \cos x + 5} \\
& 4.232. \int \frac{dx}{2 \sin x + \cos x + 3} \quad 4.233. \int \frac{dx}{3 \sin x + 4 \cos x - 5} \quad 4.234. \int \frac{dx}{5 \sin x - 12 \cos x + 13} \\
& 4.235. \int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos 2x} \quad 4.236. \int \frac{dx}{1 + \sin^2 x} \quad 4.237. \int \frac{dx}{\cos^3 x \cdot \sin x} \quad 4.238. \int \frac{dx}{\sin^3 x \cdot \cos x} \\
& 4.239. \int \sqrt{\sin x} \cdot \cos^3 x dx \quad 4.240. \int \sqrt{\cos x} \cdot \sin^3 x dx \quad 4.241. \int \sin^7 x dx \quad 4.242. \int \cos^7 x dx \\
& 4.243. \int \sin^6 x dx \quad 4.244. \int \cos^6 x dx \quad 4.245. \int \frac{1}{\cos^6 x} dx \quad 4.246. \int \frac{1}{\sin^6 x} dx \\
& 4.247. \int \sin^2 x \cdot \cos^4 x dx \quad 4.248. \int \sin^4 x \cdot \cos^2 x dx \quad 4.249. \int \sin^3 x \cdot \cos^4 x dx \\
& 4.250. \int \sin^4 x \cdot \cos^3 x dx \quad 4.251. \int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx \quad 4.252. \int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x} dx \quad 4.253. \int \frac{dx}{\cos^3 x} \\
& 4.254. \int \frac{dx}{\sin^3 x} \quad 4.255. \int \frac{dx}{\cos^4 x \cdot \sin^4 x} \quad 4.256. \int \frac{dx}{\cos^5 x \cdot \sin^3 x} \quad 4.257. \int \frac{dx}{\cos^4 x \cdot \sin x} \\
& 4.258. \int \operatorname{tg}^5 x dx \quad 4.259. \int \operatorname{ctg}^6 x dx \quad 4.260. \int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x} dx \quad 4.261. \int \frac{dx}{\sqrt{\cos^5 x \cdot \sin^3 x}} \\
& 4.262. \int \frac{dx}{\cos x \sqrt[3]{\sin^2 x}} \quad 4.263. \int \sqrt{\operatorname{ctg} x} dx \quad 4.264. \int \sqrt[3]{\operatorname{ctg} x} dx
\end{aligned}$$

Задачи к главе 5. Определенный интеграл.

Найти определенные интегралы по формуле **Ньютона-Лейбница** (№ 5.1 ÷ 5.21):

$$\begin{aligned}
& 5.1. \int_{-1}^8 \sqrt[3]{x} dx \quad 5.2. \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^3} \quad 5.3. \int_0^\pi \sin x dx \quad 5.4. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^2 x} dx \quad 5.5. \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} \\
& 5.6. \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad 5.7. \int_{sh 1}^{sh 2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \quad 5.8. \int_{-3}^{-2} \frac{dx}{x^2-1} \quad 5.9. \int_1^2 (x^2-2x+3) dx \\
& 5.10. \int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx \quad 5.11. \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx \quad 5.12. \int_2^6 \sqrt{x-2} dx \quad 5.13. \int_{-3}^0 \frac{dx}{\sqrt{25+3x}} \\
& 5.14. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx \quad 5.15. \int_{ln 2}^{ln 3} \frac{1}{ch^2 x} dx \quad 5.16. \int_0^1 sh^2 x dx \quad 5.17. \int_{-2}^4 |x| dx \\
& 5.18. \int_0^2 |1-x| dx \quad 5.19. \int_0^3 \sqrt{x^2-2x+1} dx \quad 5.20. \int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} \sqrt{1+\cos 2x} dx
\end{aligned}$$

Найти определенные интегралы, применяя формулу *интегрирования по частям* (№ 5.21 ÷ 5.32):

$$\begin{array}{llll} 5.21. \int_1^e \ln x \, dx & 5.22. \int_0^\pi x \cdot \sin x \, dx & 5.23. \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos x \, dx & 5.24. \int_0^{\ln 2} x \cdot e^{-x} \, dx \\ 5.25. \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \arccos x \, dx & 5.26. \int_0^1 \arctg x \, dx & 5.27. \int_0^{\sqrt{3}} x \cdot \arctg x \, dx & 5.28. \int_0^{2\pi} x^2 \cdot \cos x \, dx \\ 5.29. \int_0^1 x^3 \cdot e^{2x} \, dx & 5.30. \int_0^\pi e^x \cdot \sin x \, dx & 5.31. \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cdot \cos x \, dx & 5.32. \int_{1/e}^e |\ln x| \, dx \end{array}$$

Найти определенные интегралы с помощью *замены переменной* (№ 5.33 ÷ 5.60):

$$\begin{array}{llll} 5.33. \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 4x + 5} & 5.34. \int_3^4 \frac{dx}{x^2 - 3x + 2} & 5.35. \int_1^2 \frac{x}{1 + x^2} \, dx & 5.36. \int_0^1 \frac{x \, dx}{x^2 + 3x + 2} \\ 5.37. \int_{-1}^1 \frac{x^5}{x^3 + 2} \, dx & 5.38. \int_0^1 \frac{x^3}{x^8 + 1} \, dx & 5.39. \int_2^{3.5} \frac{dx}{\sqrt{5 + 4x - x^2}} & 5.40. \int_0^1 \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{x^6 + 4}} \\ 5.41. \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{6}} \tg 2x \, dx & 5.42. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \, dx & 5.43. \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \ctg^4 x \, dx & 5.44. \int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x} \, dx \\ 5.45. \int_e^{e^2} \frac{1}{x \cdot \ln x} \, dx & 5.46. \int_0^1 \frac{e^x}{1 + e^{2x}} \, dx & 5.47. \int_{-1}^1 \frac{x \, dx}{\sqrt{5 - 4x}} & 5.48. \int_0^1 \frac{\arcsin(\sqrt{x})}{\sqrt{x(1-x)}} \, dx \\ 5.49. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5 - 3\cos x} & 5.50. \int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{3 + e^x} \, dx & 5.51. \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} \, dx & 5.52. \int_0^1 x^{15} \cdot \sqrt{1 + 3x^8} \, dx \\ 5.53. \int_0^5 \frac{dx}{2x + \sqrt{3x+1}} & 5.54. \int_0^a \sqrt{ax - x^2} \, dx & 5.55. \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \, dx & 5.56. \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x^2} \, dx \\ 5.57. \int_0^{\frac{3}{4}} \frac{dx}{(x+1) \cdot \sqrt{x^2 + 1}} & 5.58. \int_1^3 \frac{dx}{x \cdot \sqrt{x^2 + 5x + 1}} & 5.59. \int_0^a x^2 \cdot \sqrt{a^2 - x^2} \, dx & 5.60. \int_0^1 \frac{dx}{(1 + x^2)^2} \end{array}$$

Вычислить определенные интегралы от разрывных функций (№ 5.61 ÷ 5.64):

$$5.61. \int_0^3 \operatorname{sign}(x - x^3) \, dx \quad 5.62. \int_0^2 [e^x] \, dx \quad 5.63. \int_0^6 [x] \cdot \sin \frac{\pi x}{6} \, dx \quad 5.64. \int_1^{n+1} \ln[x] \, dx, \quad n \in \mathbb{N}$$

Найти среднее значение функции $y = f(x)$ на промежутке (№ 5.65 ÷ 5.70):

$$\begin{array}{llll} 5.65. y = \sin^2 x, \quad x \in [0; \pi] & 5.66. y = \ln x, \quad x \in [1; e] & 5.67. y = \arcsin x, \quad x \in \left[0; \frac{1}{2}\right] \\ 5.68. y = \arctg x, \quad x \in [0; 1] & 5.69. y = x \cdot e^x, \quad x \in [-1; 1] & 5.70. y = x \cdot \sin x, \quad x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \end{array}$$

Найти производную $\Phi'(x)$ в точке x_0 (№ 5.71 ÷ 5.76):

$$\begin{array}{ll} 5.71. \Phi(x) = \int_a^{3x} e^{t^2} \, dt, \quad x_0 = 1 & 5.72. \Phi(x) = \int_a^{\frac{1}{x}} \cos(t^2) \, dt, \quad x_0 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}} \\ 5.73. \Phi(x) = \int_x^b \sin(t^2) \, dt, \quad x_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} & 5.74. \Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{\cos t}{t} \, dt, \quad x_0 = \frac{\pi}{3} \\ 5.75. \Phi(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} \, dt, \quad x_0 = e & 5.76. \Phi(x) = \int_{2x}^{3x} \frac{e^t}{t} \, dt, \quad x_0 = \ln 2 \end{array}$$

Вычислить пределы с помощью определенных интегралов (№ 5.77 ÷ 5.82):

$$5.77. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4}{n^5} \quad 5.78. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[3]{n}}{n \cdot \sqrt[3]{n}}$$

$$5.79. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n+n}} \right)$$

$$5.80. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\cos \frac{\pi}{2n} + \cos \frac{2\pi}{2n} + \dots + \cos \frac{n\pi}{2n} \right)$$

$$5.81. \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\frac{1}{(n+1)^3} + \frac{1}{(n+2)^3} + \dots + \frac{1}{(n+n)^3} \right)$$

$$5.82. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right) \cdot \left(1 + \frac{2}{n} \right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{n}{n} \right) \right]$$

Доказать следующие утверждения (№ 5.83 ÷ 5.86):

$$5.83. \int_0^1 \frac{\arctg x}{x} dx = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\sin t} dt.$$

5.84. Для любой непрерывной функции $f(x)$ на промежутке $[0; a]$, где $a > 0$, выполнено равенство:

$$\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-t) dt.$$

5.85. Для любой непрерывной функции $f(u)$ на промежутке $[0; 1]$ выполнено равенство:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx.$$

5.86. Для любой непрерывной функции $f(u)$ на промежутке $[0; 1]$ выполнено равенство:

$$\int_0^{\pi} x \cdot f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^{\pi} f(\sin x) dx.$$

Дополнительные задачи.

Вычислить интегралы ($m, n \in N$) (№ 5.87 ÷ 5.94):

$$5.87. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \cdot \sin x}{1 + \cos^2 x} dx \qquad 5.88. \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx \qquad 5.89. \int_0^1 \frac{\arctg x}{1+x} dx$$

$$5.90. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \cdot \cos((n+2)x) dx \qquad 5.91. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \cdot \sin((n+2)x) dx$$

$$5.92. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n-1)x}{\sin x} dx \qquad 5.93. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin nx}{\sin x} \right)^2 dx \qquad 5.94. \int_0^1 x^n (1-x)^m dx$$

Задачи к главе 6. Приложения определенного интеграла.

Вычислить длину дуги кривой, заданной графиком функции в декартовой системе координат (№ 6.1 ÷ 6.10):

$$6.1. y = \ln x, x \in [\sqrt{3}; \sqrt{15}]$$

$$6.2. y = \frac{1}{4}(x^2 - 2 \ln x), x \in [1; 2]$$

$$6.3. y = \sqrt{1-x^2} + \arcsin x, x \in \left[0; \frac{7}{9}\right]$$

$$6.4. y = -\ln(\cos x), x \in \left[0; \frac{\pi}{6}\right]$$

$$6.5. y = e^x, x \in [\ln \sqrt{8}; \ln \sqrt{15}]$$

$$6.6. y = \sqrt{x-x^2} + \arcsin \sqrt{x}, x \in \left[\frac{1}{4}; 1\right]$$

$$6.7. y = \ln(x^2 - 1), x \in [2; 3]$$

$$6.8. y = \frac{1}{2} \operatorname{ch} 2x, x \in [0; 2]$$

$$6.9. y = \operatorname{ch} x, x \in [0; 1]$$

$$6.10. y = \ln(\sin x), x \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$$

Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями (№ 6.11 ÷ 6.20):

- 6.11. $\begin{cases} x = 5(t - \sin t) \\ y = 5(1 - \cos t) \end{cases}, t \in [0; \pi]$ 6.12. $\begin{cases} x = 3(2\cos t - \cos 2t) \\ y = 3(2\sin t - \sin 2t) \end{cases}, t \in [0; 2\pi]$
- 6.13. $\begin{cases} x = 6(\cos t + t \cdot \sin t) \\ y = 6(\sin t - t \cdot \cos t) \end{cases}, t \in [0; \pi]$ 6.14. $\begin{cases} x = 2 \cos^3 t \\ y = 2 \sin^3 t \end{cases}, t \in [0; \frac{\pi}{4}]$
- 6.15. $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t \cdot \cos t \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t \cdot \sin t \end{cases}, t \in [0; \pi]$ 6.16. $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t) \\ y = e^t(\cos t - \sin t) \end{cases}, t \in [0; \pi]$
- 6.17. $\begin{cases} x = \frac{1}{4}(2\cos t - \cos 2t) \\ y = \frac{1}{4}(2\sin t - \sin 2t) \end{cases}, t \in [\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}]$ 6.18. $\begin{cases} x = 3(\cos t + t \cdot \sin t) \\ y = 3(\sin t - t \cdot \cos t) \end{cases}, t \in [0; \frac{\pi}{3}]$
- 6.19. $\begin{cases} x = 6 \cos^3 t \\ y = 6 \sin^3 t \end{cases}, t \in [0; \frac{\pi}{3}]$ 6.20. $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t \cdot \cos t \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t \cdot \sin t \end{cases}, t \in [0; \frac{\pi}{2}]$

Вычислить длину дуги кривой, заданной в полярной системе координат (№ 6.21 ÷ 6.30):

- 6.21. $r = 3e^{\frac{3}{4}\varphi}, \varphi \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ 6.22. $r = \sqrt{2}e^{\varphi}, \varphi \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$
- 6.23. $r = 1 - \sin \varphi, \varphi \in [-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{6}]$ 6.24. $r = 2(1 - \cos \varphi), \varphi \in [-\pi; -\frac{\pi}{2}]$
- 6.25. $r = 2\varphi, \varphi \in [0; \frac{3}{4}]$ 6.26. $r = 6\cos \varphi, \varphi \in [0; \frac{\pi}{3}]$
- 6.27. $r = 8\sin \varphi, \varphi \in [0; \frac{\pi}{4}]$ 6.28. $r = 6(1 + \sin \varphi), \varphi \in [-\frac{\pi}{2}; 0]$
- 6.29. $r = 3\varphi, \varphi \in [0; \frac{4}{3}]$ 6.30. $r = 8(1 - \cos \varphi), \varphi \in [-\frac{2\pi}{3}; 0]$

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными графиками функций в декартовой системе координат (№ 6.31 ÷ 6.40):

- 6.31. $y = (x - 2)^3, y = 4x - 8$ 6.32. $y = x \cdot \sqrt{9 - x^2}, y = 0, x \in [0; 3]$
- 6.33. $y = 4 - x^2, y = x^2 - 2x$ 6.34. $y = \sin x \cdot \cos^2 x, y = 0, x \in [0; \frac{\pi}{2}]$
- 6.35. $y = \sqrt{4 - x^2}, y = 0, x = 0, x = 1$ 6.36. $y = 2x - x^2 + 3, y = x^2 - 4x + 3$
- 6.37. $y = x \cdot \arctg x, y = 0, x = \sqrt{3}$ 6.38. $y = \sqrt{e^x - 1}, y = 0, x = \ln 2$
- 6.39. $y = x^2 \cdot \cos x, y = 0, x \in [0; \frac{\pi}{2}]$ 6.40. $y = \arccos x, y = 0, x = 0$

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными параметрическими уравнениями (№ 6.41 ÷ 6.50):

- 6.41. $\begin{cases} x = 4(t - \sin t) \\ y = 4(1 - \cos t) \end{cases}, y = 4 \quad (0 < x < 8\pi, y \geq 4)$
- 6.42. $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}, y = 1 \quad (0 < x < 2\pi, y \geq 1)$
- 6.43. $\begin{cases} x = 4(t - \sin t) \\ y = 4(1 - \cos t) \end{cases}, y = 6 \quad (0 < x < 8\pi, y \geq 6)$
- 6.44. $\begin{cases} x = 8 \cos^3 t \\ y = 4 \sin^3 t \end{cases}, x = 3\sqrt{3} \quad (x \geq 3\sqrt{3})$ 6.45. $\begin{cases} x = 8 \cos^3 t \\ y = 8 \sin^3 t \end{cases}, x = 1 \quad (x \geq 1)$

$$\begin{array}{ll}
6.46. \begin{cases} x = 32 \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}, x = 4 \quad (x \geq 4) & 6.47. \begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = 8 \sin t \end{cases}, y = 4 \quad (y \geq 4) \\
6.48. \begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 6 \sin t \end{cases}, y = 3 \quad (y \geq 3) & 6.49. \begin{cases} x = 9 \cos t \\ y = 4 \sin t \end{cases}, y = 2 \quad (y \geq 2) \\
6.50. \begin{cases} x = 6 \cos t \\ y = 4 \sin t \end{cases}, y = 2\sqrt{3} \quad (y \geq 2\sqrt{3})
\end{array}$$

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными в полярной системе координат (№ 6.51 ÷ 6.60):

$$\begin{array}{llll}
6.51. r = \sin 3\varphi & 6.52. r = \cos 2\varphi & 6.53. r = \cos \varphi + \sin \varphi & 6.54. r = \cos \varphi - \sin \varphi \\
6.55. r = \cos \varphi, r = \sin \varphi, \varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] & 6.56. r = \sin \varphi, r = 2 \sin \varphi & 6.57. r = \cos 3\varphi & \\
6.58. r = 4 \cos 3\varphi, r = 2 \quad (r \geq 2) & 6.59. r = \sin 6\varphi & 6.60. r = \cos \varphi, r = 2 \cos \varphi &
\end{array}$$

Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями (№ 6.61 ÷ 6.70):

$$\begin{array}{ll}
6.61. z = x^2 + 4y^2, z = 2 & 6.62. \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1, z = 2, z = 0 \\
6.63. \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1, z = 3, z = 0 & 6.64. \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{36} = -1, z = 12 \\
6.65. \frac{x^2}{9} + y^2 = 1, z = y, z = 0 \quad (y \geq 0) & 6.66. z = 2x^2 + 8y^2, z = 4 \\
6.67. \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{36} = 1, z = 3, z = 0 & 6.68. x^2 + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1, z = 3, z = 0 \\
6.69. \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} - \frac{z^2}{100} = -1, z = 20 & 6.70. x^2 + y^2 = 9, z = y, z = 0 \quad (y \geq 0)
\end{array}$$

Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры вокруг оси (№ 6.71 ÷ 6.80):

$$\begin{array}{ll}
6.71. y = 5x - x^2 - 6, y = 0, \cup OX & 6.72. y = x^2 - 2x + 1, x = 2, y = 0, \cup OY \\
6.73. y = x^2 + 1, y = x, x = 0, x = 1, \cup OY & 6.74. y = 2x - x^2, y = -x + 2, \cup OX \\
6.75. y = x^2, y^2 - x = 0, \cup OX & 6.76. y = x^3, y = x^2, \cup OY \\
6.77. y = x^3, y = x, \cup OY & 6.78. y = xe^x, y = 0, x = 1, \cup OX \\
6.79. y = \arccos x, y = \arcsin x, x = 0, \cup OY & 6.80. y = x^3, y = \sqrt{x}, \cup OX
\end{array}$$

Задачи к главе 7. Несобственные интегралы.

Вычислить несобственные интегралы ($a > 0$) (№ 7.1 ÷ 7.20):

$$\begin{array}{llll}
7.1. \int_0^{+\infty} e^{-ax} dx & 7.2. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \cdot \sqrt[n]{x}} \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 2) & 7.3. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + a^2} & 7.4. \int_{a+1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - a^2} \\
7.5. \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x - 2} & 7.6. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9} & 7.7. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + px + q} \quad (p^2 - 4q < 0) & \\
7.8. \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln x} & 7.9. \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln^2 x} & 7.10. \int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bx dx & 7.11. \int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bx dx
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{7.12.} \int_0^1 \frac{dx}{n\sqrt{x}} \quad (n \in N, n \geq 2) \quad \mathbf{7.13.} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}} \quad \mathbf{7.14.} \int_{-a}^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad \mathbf{7.15.} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x \, dx \\
 & \mathbf{7.16.} \int_0^1 \ln x \, dx \quad \mathbf{7.17.} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^2 x \, dx \quad \mathbf{7.18.} \int_0^{0,5} \frac{dx}{x \cdot \ln x} \quad \mathbf{7.19.} \int_0^{0,5} \frac{dx}{x \cdot \ln^2 x} \quad \mathbf{7.20.} \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}
 \end{aligned}$$

Исследовать сходимость несобственных интегралов (№ 7.21 ÷ 7.32):

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{7.21.} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt[4]{x^5}} dx \quad \mathbf{7.22.} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^4-1}} \quad \mathbf{7.23.} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^5}} \quad \mathbf{7.24.} \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x \cdot (\sqrt{x}+1)} dx \\
 & \mathbf{7.25.} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x} \cdot (x+1)} \quad \mathbf{7.26.} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x}-1} \quad \mathbf{7.27.} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\operatorname{arctg} \sqrt{x}} dx \quad \mathbf{7.28.} \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-2x}}{x \cdot \sqrt[3]{x}} dx \\
 & \mathbf{7.29.} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x\sqrt{x}} dx \quad \mathbf{7.30.} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{\ln x}} dx \quad \mathbf{7.31.} \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx \quad \mathbf{7.32.} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3+x}} dx
 \end{aligned}$$

Исследовать на абсолютную и условную сходимость несобственные интегралы (№ 7.33 ÷ 7.40):

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{7.33.} \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt[4]{x^5}} dx \quad \mathbf{7.34.} \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{x^4}} dx \quad \mathbf{7.35.} \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos 3x}{\sqrt[4]{x^3}} dx \quad \mathbf{7.36.} \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin 2x}{\sqrt[5]{x^4}} dx \\
 & \mathbf{7.37.} \int_0^{\pi} \frac{\sin(\frac{1}{x})}{x} dx \quad \mathbf{7.38.} \int_0^{\pi} \frac{\cos(\frac{1}{x})}{x} dx \quad \mathbf{7.39.} \int_0^{\pi} \frac{\sin(\frac{1}{x})}{\sqrt{x}} dx \quad \mathbf{7.40.} \int_0^{\pi} \frac{\cos(\frac{1}{x})}{\sqrt{x}} dx
 \end{aligned}$$

Найти все значения параметра p (p и q), при которых несобственный интеграл сходится (№ 7.41 ÷ 7.50):

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{7.41.} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p \cdot \sqrt{\ln x}} \quad \mathbf{7.42.} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x} + x^p} \quad \mathbf{7.43.} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p + x^2} \quad \mathbf{7.44.} \int_0^{+\infty} \frac{x^p}{1+x^2} dx \\
 & \mathbf{7.45.} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^p} dx \quad \mathbf{7.46.} \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^p} dx \quad \mathbf{7.47.} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p(x+a)} \quad \mathbf{7.48.} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p \cdot \ln^q x} \\
 & \mathbf{7.49.} \int_0^{+\infty} x^{p-1} \cdot e^{-x} dx \quad \mathbf{7.50.} \int_0^1 x^{p-1} \cdot (1-x)^{q-1} dx
 \end{aligned}$$

Дополнительные задачи.

7.51. Найти объем V тела вращения и площадь S поверхности вращения кривой $y = \frac{1}{x}$, $x \in [1; +\infty)$, вокруг оси OX .

7.52. Доказать формулу: $\Gamma(n+1) = n!$, $n \in N$,

где $\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} \cdot e^{-x} dx$ — гамма-функция.

7.53. Вычислить несобственный интеграл $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a) \cdot (b-x)}}$

7.54. Доказать сходимость несобственных интегралов: $\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx$, $\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx$.

7.55. Доказать сходимость интеграла **Эйлера**: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx$.

7.56. Вычислить интеграл **Эйлера**: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx$.

Ответы.

Глава

- 1.1.** $f'(x) = \frac{5}{2}\sqrt{x^3}; f'(4) = 20$ **1.2.** $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}; f'(8) = \frac{1}{12}$ **1.3.** $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x};$
 $f'(9) = 4,5$ **1.4.** $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}; f'(64) = \frac{1}{6}$ **1.5.** $f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}; f'(4) = -\frac{1}{16}$
1.6. $f'(x) = -\frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}; f'(27) = -\frac{1}{243}$ **1.7.** $f'(x) = -\frac{3}{2\sqrt{x^5}}; f'(9) = -\frac{1}{162}$
1.8. $f'(x) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x^5}}; f'(8) = -\frac{1}{48}$ **1.9.** $f'(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}; f'\left(\frac{1}{64}\right) = 25$
1.10. $f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x^3}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}; f'(1) = -3$ **1.11.** $f'(x) = 2^x \ln 2 \cdot (1 + 2 \cdot 2^x + 3 \cdot 2^{2x});$
 $f'(1) = 34 \ln 2$ **1.12.** $f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{\ln 6}{\ln 2 \cdot \ln 3}; f'(\ln 6) = \frac{1}{\ln 2 \cdot \ln 3}$ **1.13.** $e^x(\cos x - \sin x)$
1.14. $x^2 \cdot e^x$ **1.15.** $\frac{1}{x}(2 \lg x - 1)$ **1.16.** $x^2 \cdot \sin x$ **1.17.** $\frac{-2x^2 - 6x + 25}{(x^2 - 5x + 5)^2}$ **1.18.** $\frac{1}{\sqrt{x} \cdot (1 - \sqrt{x})^2}$
1.19. $\frac{\ln x + 2x - 2}{x^2}$ **1.20.** $\frac{2x \cdot \arccos x - \sqrt{1 - x^2}}{(1 - x^2)^2}$ **1.21.** $\frac{2x \cdot \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}}{(1 - x^2)^2}$
1.22. $\frac{1 - 2x \cdot \arctg x}{(1 + x^2)^2}$ **1.23.** $\frac{(1 + x^2) \cdot \arctg x - x \cdot \ln x}{x \cdot (1 + x^2) \cdot \arctg^2 x}$ **1.24.** $\frac{\frac{1}{\cos^2 x}(\ln x + x^2) - \arctg x \cdot (2x + \frac{1}{x})}{(\ln x + x^2)^2}$
1.25. $\frac{\cos x \cdot (\lg x + \arctg x) - \sin x \cdot (\frac{1}{x \cdot \ln 10} + \frac{1}{\cos^2 x})}{(\lg x + \arctg x)^2}$ **1.26.** $\frac{\arcsin x \cdot (\frac{1}{2\sqrt{x}} - \sin x) - \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}(\sqrt{x} + \cos x)}{\arcsin^2 x}$
1.27. $\frac{-1}{\arctg^2 x} \cdot \left(\frac{\arctg x}{\sin^2 x} + \frac{\arctg x}{1 + x^2} \right)$ **1.28.** $\frac{\arctg x}{1 + x^2} + \frac{\arctg x}{\cos^2 x}$ **1.29.** $\frac{3x \cdot (\ln 3 \cdot \log_2 x - \frac{1}{x \cdot \ln 2})}{\log_2^2 x}$
1.30. $\frac{1}{2^x} \cdot \left(\frac{1}{x \cdot \ln 3} - \ln 2 \cdot \log_3 x \right)$ **1.31.** $\frac{e^x + \ln x - 3x \cdot e^x - 3}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot (e^x + \ln x)^2}$ **1.32.** $\frac{x^2}{(\cos x + x \cdot \sin x)^2}$
1.33. $\frac{\arctg x \cdot (2x^2 \cdot \ln x - x^2 - 1) + x}{x \cdot \ln x \cdot \lg x}$ **1.34.** $2x \cdot \cos(x^2)$ **1.35.** $\arctg x$ **1.36.** $\frac{3 \ln^2 x}{x}$
1.37. $-5 \cos^4 x \cdot \sin x$ **1.38.** $\frac{5 \arctg x \cdot \ln 5}{\cos^2 x}$ **1.39.** $\frac{2^x \cdot \ln 2}{1 + 4^x}$ **1.40.** $\frac{5e^x \cdot \sin^4(e^x)}{\cos^6(e^x)}$
1.41. $\frac{2 \arcsin^3(\sqrt{x})}{\sqrt{x} - x^2}$ **1.42.** $\frac{-x^2}{\sqrt{1 - x^6} \cdot \sqrt[3]{\arccos^2(x^3)}}$ **1.43.** $\frac{-\arctg(\sqrt[3]{x})}{3 \ln 2 \cdot \sqrt[3]{x^2}}$
1.44. $\frac{-5 \arctg^4(\lg x)}{x \cdot \ln 10 \cdot (1 + \lg^2 x)}$ **1.45.** $\frac{-10 \log_3^4(\arctg x)}{\ln 3 \cdot \sin 2x}$ **1.46.** $6x \cdot \arctg(x^2) \cdot \ln^2(\sin(x^2))$
1.47. $\frac{5 \cdot \sin^4(\sqrt{\ln x}) \cdot \cos(\sqrt{\ln x})}{2x \cdot \sqrt{\ln x}}$ **1.48.** $\frac{3 \cdot \ln 5}{2\sqrt{x}} \cdot \sin^2(\sqrt{x}) \cdot \cos(\sqrt{x}) \cdot 5^{\sin^3(\sqrt{x})}$
1.49. $\frac{-3 \cdot \arctg^5(e^{\sqrt{x}}) \cdot e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x} \cdot \sin^2(e^{\sqrt{x}})}$ **1.50.** $\frac{-4(2x + 5) \cdot \cos^3(\sqrt[3]{x^2 + 5x}) \cdot \sin(\sqrt[3]{x^2 + 5x})}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^2 + 5x)^2}}$
1.51. $\frac{6 \cdot \ln 2 \cdot 2^{1/x} \cdot \arccos^5(2^{1/x})}{x^2 \cdot (1 + 2^{2/x})}$ **1.52.** $-\frac{5}{2} \cdot \ln 3 \cdot \arctg^4\left(3^{\frac{1}{\sqrt{x}}}\right) \cdot \frac{3^{\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\cos^2\left(3^{\frac{1}{\sqrt{x}}}\right) \cdot \sqrt{x^3}}$

- 1.53.** $\frac{12 \cdot x^2 \cdot \arcsin^3(e^{x^3}) \cdot e^{x^3}}{\sqrt{1-e^{2x^3}}}$ **1.54.** $\frac{-3 \cdot \arccos^2(\sqrt{\ln x})}{2x \cdot \sqrt{\ln x} \cdot \sqrt{1-\ln x}}$ **1.55.** $\frac{6 \cdot x \cdot e^{x^2} \cdot \arctan^2(e^{x^2})}{(1+e^{2x^2})}$
- 1.56.** $-\frac{5 \cdot \ln 7 \cdot \sin x \cdot 7^{\cos x} \cdot \arcsin^4(7^{\cos x})}{\sqrt{1-49^{\cos x}}}$ **1.57.** $\frac{2 \cdot \ln 2}{\sqrt[3]{x^2 \cdot \cos^2(\sqrt[3]{x})}} \cdot 2^{tg^6(\sqrt[3]{x})} \cdot tg^5(\sqrt[3]{x})$
- 1.58.** $2^{\sin 3x} \cdot 3^{\cos 2x} \cdot (3 \ln 2 \cdot \cos 3x - 2 \ln 3 \cdot \sin 2x)$ **1.59.** $e^{x^3} \cdot (3x^2 \cdot tg^4 \sqrt{x} + \frac{1}{4 \cdot \sqrt[4]{x^3} \cdot \cos^2(\sqrt[4]{x})})$
- 1.60.** $\frac{\lg(\cos x)}{2 \cdot \sqrt{tg x} \cdot \cos^2 x} - \frac{\sin x \cdot \sqrt{tg x}}{\ln 10 \cdot \cos x}$ **1.61.** $2^{\cos 3x} \cdot 3^{\sin 2x} \cdot (2 \ln 3 \cdot \cos 2x - 3 \ln 2 \cdot \sin 3x)$
- 1.62.** $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \left(\frac{1}{\arctan x} + x \cdot \ln(\arctan x) \right)$ **1.63.** $5^{tg x} \cdot \ln^2 x \cdot \left(\frac{\ln 5 \cdot \ln x}{\cos^2 x} + \frac{3}{x} \right)$
- 1.64.** $e^{\sqrt[3]{x}} \cdot \left(\frac{\sqrt{\cos x}}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}} - \frac{\sin x}{2 \cdot \sqrt{\cos x}} \right)$ **1.65.** $5^{x^2} \cdot 3^{\cos 7x} \cdot (2 \ln 5 \cdot x - 7 \ln 3 \cdot \sin 7x)$
- 1.66.** $\frac{2^x}{3 \cdot \sqrt[3]{(5-7x^2)^2}} \cdot (3 \ln 2 \cdot (5-7x^2) - 14x)$ **1.67.** $\frac{2x^2 \cdot \cos(\ln x) - 3(x^2-1) \cdot \sin(\ln x)}{x \cdot \sqrt[3]{(x^2-1)^2}}$
- 1.68.** $-e^{\frac{2}{x}} \cdot \arccos^2 x \cdot \left(\frac{2 \arccos x}{x^2} + \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} \right)$ **1.69.** $15 \cdot \sin^2 5x \cdot \cos^4 3x \cdot \cos 8x$
- 1.70.** -1 **1.71.** $\frac{x \cdot \arccos x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$ **1.72.** $\frac{2}{\sqrt{1+x^2}}$ **1.73.** -5 **1.74.** 4 **1.75.** -2 **1.76.** $1,5$
- 1.77.** 3 **1.78.** $-0,5$ **1.79.** $(\sin x)^{tg x} \cdot \left(\frac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x} + 1 \right)$ **1.80.** $-(\cos x)^{ctg x} \cdot \left(\frac{\ln(\cos x)}{\sin^2 x} + 1 \right)$
- 1.81.** $(tg x)^{\cos x} \cdot \left(\frac{1}{\sin x} - \sin x \cdot \ln(tg x) \right)$ **1.82.** $(ctg x)^{\sin x} \cdot \left(\cos x \cdot \ln(ctg x) - \frac{1}{\cos x} \right)$
- 1.83.** $(\arcsin x)^{\sqrt{x}} \cdot \left(\frac{\ln(\arcsin x)}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\arcsin x \cdot \sqrt{1-x^2}} \right)$
- 1.84.** $\frac{(\arccos x)^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \left(\ln(\arccos x) - \frac{\arcsin x}{\arccos x} \right)$
- 1.85.** $\left(x + \frac{1}{x} \right)^{\sqrt[4]{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot \ln \left(x + \frac{1}{x} \right) + \frac{x^2-1}{x^2+1} \right)$
- 1.86.** $\left(x - \frac{1}{x} \right)^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \ln \left(x - \frac{1}{x} \right) + \frac{x^2+1}{x^2-1} \right)$
- 1.87.** $(\ln x)^{\arctan x} \cdot \left(\frac{\ln(\ln x)}{1+x^2} + \frac{\arctan x}{x \cdot \ln x} \right)$ **1.88.** $(\sin x)^{\lg x} \cdot \left(\frac{\lg(\sin x)}{x} + \lg x \cdot ctg x \right)$
- 1.89.** $(ctg x)^{tg x} \cdot \left(\frac{\ln(ctg x)-1}{\cos^2 x} \right)$ **1.90.** $(tg x)^{ctg x} \cdot \left(\frac{1-\ln(tg x)}{\sin^2 x} \right)$
- 1.91.** $(\ln x)^x \cdot x^{\ln x} \cdot \left(\ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x} - \frac{2 \ln x}{x} \right)$ **1.92.** $x^x(1+\ln x) + \sqrt[3]{x}(1-\ln x) \cdot \frac{1}{x^2}$
- 1.93.** $\frac{(\sin x)^{\cos x}}{\sin x} \cdot (\cos^2 x - \sin^2 x \cdot \ln(\sin x)) + \frac{(\cos x)^{\sin x}}{\cos x} \cdot (\cos^2 x \cdot \ln(\cos x) - \sin^2 x)$
- 1.94.** $\frac{x}{(1-x)^2 \cdot (1+x)^3} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{1-x} - \frac{3}{1+x} \right)$ **1.95.** $\frac{(2-x^2) \cdot (3-x^3)}{(1-x)^2} \cdot \left(\frac{2x}{x^2-2} + \frac{3x^2}{x^3-3} + \frac{2}{1-x} \right)$
- 1.96.** $\frac{(x-1)^3}{\sqrt{(x+2)^5} \cdot \sqrt[3]{(x+1)^2}} \cdot \left(\frac{3}{x-1} - \frac{5}{2(x+2)} - \frac{2}{3(x+1)} \right)$
- 1.97.** $\frac{(x+1)^2 \cdot \sqrt{(x-1)^3}}{\sqrt[5]{(x-2)^2}} \cdot \left(\frac{2}{x+1} + \frac{3}{2(x-1)} - \frac{2}{5(x-2)} \right)$
- 1.98.** $\frac{\sqrt{(x+2)^3} \cdot \sqrt[3]{(x-5)^2}}{\sqrt{x+1}} \cdot \left(\frac{3}{2(x+2)} + \frac{2}{3(x-5)} - \frac{1}{2(x+1)} \right)$

- 1.99. $\frac{(x-2)^5 \cdot \sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{(x-3)^7}} \cdot \left(\frac{5}{x-2} + \frac{1}{3(x+1)} - \frac{7}{2(x-3)} \right)$
- 1.100. $\frac{(x+1)^5}{\sqrt{(x-2)^3} \cdot \sqrt[3]{(x+5)^2}} \cdot \left(\frac{5}{x+1} - \frac{3}{2(x-2)} - \frac{2}{3(x+5)} \right)$
- 1.101. $\frac{(x-2)^3 \cdot \sqrt{(x+1)^5}}{\sqrt[7]{(x+2)^4}} \cdot \left(\frac{3}{x-2} + \frac{5}{2(x+1)} - \frac{4}{7(x+2)} \right)$
- 1.102. $\frac{(x+2)^4 \cdot \sqrt[3]{(x-1)^5}}{\sqrt{(x-2)^3}} \cdot \left(\frac{4}{x+2} + \frac{5}{3(x-1)} - \frac{3}{2(x-2)} \right)$
- 1.103. $\frac{\sqrt[3]{(2x+1)^4}}{\sqrt{(3x-4)^5} \cdot (1+x)^6} \cdot \left(\frac{8}{3(2x+1)} - \frac{15}{2(3x-4)} - \frac{6}{1+x} \right)$
- 1.104. $(1-x)^4 \cdot \sqrt{2+x^2} \cdot \sqrt[3]{3+x^3} \cdot \left(\frac{4}{x-1} + \frac{x}{2+x^2} + \frac{x^2}{3+x^3} \right)$
- 1.105. $\frac{(1+2x)^4 \cdot \sqrt[3]{(1-x^2)^7}}{(1+x^4)^5 \cdot \sqrt[5]{(1+x^3)^2}} \cdot \left(\frac{8}{1+2x} + \frac{14x}{3(x^2-1)} - \frac{20x^3}{1+x^4} - \frac{6x^2}{5(1+x^3)} \right)$
- 1.106. $\operatorname{tg} x \cdot \sqrt[5]{(1+\sin x)^2 \cdot (1-\cos x)^3} \cdot \left(\frac{1}{\sin x \cdot \cos x} + \frac{2\cos x}{5(1+\sin x)} + \frac{3\sin x}{5(1-\cos x)} \right)$
- 1.107. $\frac{x}{x+1}$ 1.108. $\frac{1}{y-x+1}$ 1.109. $\frac{2}{2-\cos x}$ 1.110. $\frac{3}{6y-2x+1}$
- 1.111. $\frac{1}{3(1+x^2)} = \frac{x}{3(y-2x)}$ 1.112. $\frac{1}{y+3x^2-x^3}$ 1.113. $\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$ 1.114. $\frac{1}{1-y^2}$
- 1.115. $\frac{2t}{(1+t^2)^2}$ 1.116. $\frac{\cos t + \sin t}{\cos t - \sin t}$ 1.117. $\frac{2t}{1-t^2}$ 1.118. $\frac{t}{(1-t)^2}$ 1.119. $- \operatorname{tg} t$
- 1.120. $\frac{2t-t^4}{1-t^3}$ 1.121. $-\frac{1+\sin t}{\cos t}$ 1.122. $-2ctg^3 t$ 1.123. $\frac{1}{2}t$ 1.124. $\frac{\sqrt[3]{(1-\sqrt{t})^2}}{\sqrt[6]{t} \cdot \sqrt{1-\sqrt[3]{t}}}$
- 1.125. $\frac{1}{3} \cdot (e^{-6t} - 1)$ 1.126. $\frac{t+1}{(1+t^2) \cdot t}$ 1.127. $\frac{2^{x+y} - 2^x}{2^y - 2^{x+y}} = -2^{y-x}$
- 1.128. $\frac{2x \cdot (x^2+y^2) + y}{2y \cdot (x^2+y^2) + x}$ 1.129. $\frac{y-y \cdot (x^2+y^2)}{x \cdot (x^2+y^2) + x}$ 1.130. $\frac{y^2}{x \cdot y - x^2 - y^2}$
- 1.131. $\frac{x^2 \cdot y^2 + y \cdot e^{y/x}}{x \cdot e^{y/x} - 2x^3 \cdot y} = \frac{xy + y^2}{xy - 2x^2}$ 1.132. $\frac{1 + y \cdot \cos(x \cdot y)}{1 - x \cdot \cos(x \cdot y)}$
- 1.133. $\frac{3 \cdot \ln y - 2 \cdot \frac{y}{x}}{2 \cdot \ln x - 3 \cdot \frac{x}{y}} = \frac{2y^2 \cdot (\ln x - 2)}{3x^2 \cdot (\ln y - 1)}$ 1.134. $-\frac{1 + y \cdot \sin(x \cdot y)}{1 + x \cdot \sin(x \cdot y)}$
- 1.135. $\frac{e^{x+y} + e^{x-y}}{x + e^y - e^{x+y}} = \frac{e^y + xy + 1 - y}{e^x - xy - 1 + x}$ 1.136. $\frac{(1-\sqrt{1-x^2}) \cdot \sqrt{1-y^2}}{(1+\sqrt{1-y^2}) \cdot \sqrt{1-x^2}}$
- 1.137. $\frac{e^x \cdot \sin y + e^y \cdot \sin x}{e^y \cdot \cos x - e^x \cdot \cos y} = \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{ctg} y}$ 1.138. $\frac{y \cdot (e^{x/y} - 2xy^2)}{x \cdot (e^{x/y} + xy^2)} = \frac{y \cdot (x - 2y)}{x \cdot (x + y)}$
- 1.139. $y = \frac{1}{2}x + 8$; $y = -2x + 28$ 1.140. $y = 2$; $x = 1$ 1.141. $x = 0$; $y = 0$
- 1.142. $y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$; $y = 3x + 28$ 1.143. $y = 5x + 2$; $y = -\frac{1}{5}x - 3\frac{1}{5}$
- 1.144. $y = 10x - 16$; $y = -\frac{1}{10}x + 4\frac{1}{5}$ 1.145. 45° 1.146. 60° 1.147. $\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{2}$
- 1.148. 90° 1.149. $\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{3}{4}$ 1.150. $\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{8}{15}$ 1.151. $\frac{2-3x}{2\sqrt{1-x}} dx$

- 1.152. $(\sqrt{1-x^2} - 2x \cdot \arcsin x) dx$ 1.153. $\left(\frac{\cos x}{x} - \sin x \cdot \ln x\right) dx$
 1.154. $(3x^2 - x^3) \cdot e^{-x} dx$ 1.155. $\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \arcsin x\right) dx$ 1.156. $\frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} dx$
 1.157. $\frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx$ 1.158. $\left(\frac{x}{1+x^2} + \arctg x\right) dx$ 1.159. $(2x \cdot \arctg x + 1) dx$
 1.160. $\frac{1-2 \cdot \ln x}{x^3} dx$ 1.161. $\left(\frac{x}{\cos^2 x} + \tg x\right) dx$ 1.162. $\frac{2 - \ln x}{2\sqrt{x^3}} dx$ 1.163. 0,795
 1.164. 2,045 1.165. 8,180 1.166. 0,338 1.167. -0,174 1.168. -0,042
 1.169. 0,745 1.170. 1,970 1.171. 7,820 1.172. 0,490 1.173. 0,157 1.174. -0,026
 1.175. а) $\alpha > 0$; б) $\alpha > 1$; в) $\alpha > 2$ 1.176. $f'(k-0) = (-1)^k \pi(k-1)$, $f'(k+0) = (-1)^k \pi k$
 1.177. $P_n = \frac{1 - (n+1) \cdot x^n + n \cdot x^{n+1}}{(x-1)^2}$, $Q_n = \frac{n^2 \cdot x^{n+2} - (2n^2 + 2n - 1) \cdot x^{n+1} + (n+1)^2 \cdot x^n - x - 1}{(x-1)^3}$
 1.178. $y = x$; $y = -x + 2$ 1.179. $y = \frac{7}{10}x + \frac{3}{5}$; $y = -\frac{10}{7}x + 4\frac{6}{7}$ 1.180. $y = -x + 2$; $y = x$

глава 2

- 2.1. -128 2.2. -120 2.3. $7e$ 2.4. -128 2.5. -720 2.6. $\frac{3}{4}$
 2.7. 960 2.8. $-\frac{15}{16}$ 2.9. $\frac{10}{27}$ 2.10. 720 2.11. $-1\frac{7}{8}$ 2.12. $-1\frac{1}{27}$
 2.13. $(3\ln 2)^n \cdot 2^{3x+5} \cdot (dx)^n$ 2.14. $\frac{(-1)^{n-1} \cdot 2^n}{\ln 10 \cdot (2x+7)^n} \cdot (dx)^n$
 2.15. $\left(3^n \cdot \sin\left(3x + 1 + n \cdot \frac{\pi}{2}\right) + 5^n \cdot \cos\left(5x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)\right) \cdot (dx)^n$
 2.16. $\frac{(-1)^{n+1} \cdot 2 \cdot n!}{(x-1)^{n+1}} \cdot (dx)^n$ 2.17. $\frac{(-1)^{n-1} \cdot (2n-3)!!}{2^n \cdot \sqrt{x^{2n-1}}} \cdot (dx)^n$ 2.18. $e^{ax}(a^n x + na^{n-1}) \cdot (dx)^n$
 2.19. $e^x \cdot \left(\sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{(-1)^k}{x^{k+1}}\right) \cdot (dx)^n$ 2.20. $\frac{(-1)^n \cdot n!}{x^{n+1}} \cdot \left(\ln x - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right) \cdot (dx)^n$
 2.21. $(-1)^n \cdot n! \left(\frac{1}{x^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right) \cdot (dx)^n$ 2.22. $e^x \cdot \sqrt{2^{n+1}} \cdot \sin\left(x + \frac{(n+1)\pi}{4}\right) \cdot (dx)^n$
 2.23. $\frac{1}{(1+\cos t)^2}$ 2.24. $2e^{3\pi \cdot t}$ 2.25. $9t^3$ 2.26. $-\frac{1}{t \cdot \sin^3 t}$ 2.27. $\frac{1}{3\cos^4 t \cdot \sin t}$
 2.28. $1 + t^2$ 2.29. $(1 + 3t^2) \cdot (1 + t^2)$ 2.30. $2 \cdot (1 + t^2)$ 2.31. $-\frac{1}{\sin^3 2t}$
 2.32. $1 + t^3$ 2.33. $-\sqrt{1-t^2}$ 2.34. $\frac{t \cdot (t+1)}{(1-t)^3}$ 2.35. $y'_x = \frac{1+y^2}{y^2}$, $y''_{xx} = -2 \cdot \frac{1+y^2}{y^5}$
 2.36. $y'_x = \frac{1}{1+\ln y} = \frac{y}{x+y}$, $y''_{xx} = -\frac{1}{y \cdot (1+\ln y)^3} = -\frac{y^2}{(x+y)^3}$ 2.37. $y'_x = \frac{2-5y-2x}{1+5x+2y}$,
 $y''_{xx} = -2 \cdot \frac{1+5 \cdot y' + (y')^2}{1+5x+2y}$ 2.38. $y'_x = \frac{4x^3-y}{x-4y^3}$, $y''_{xx} = 2 \cdot \frac{6x^2-y'+6y^2 \cdot (y')^2}{x-4y^3}$
 2.39. $y'_x = \frac{y-x+2}{y-x+1}$, $y''_{xx} = \frac{1}{(x-y-1)^3}$ 2.40. $y'_x = \frac{y}{y-1}$, $y''_{xx} = \frac{y}{(1-y)^3}$
 2.41. $y'_x = \frac{xy}{1+y^2}$, $y''_{xx} = \frac{y \cdot (1+y^2)^2 + x^2 y \cdot (1-y^2)}{(1+y^2)^3}$ 2.42. $y'_x = \frac{3x^2-y}{3y^2+x}$,
 $y''_{xx} = 2 \cdot \frac{3x-y'-3y \cdot (y')^2}{3y^2+x}$ 2.43. $y'_x = \frac{1-xy-y^2}{x^2+xy-1}$, $y''_{xx} = \frac{y+3(x+y) \cdot y' + x \cdot (y')^2}{1-x^2-xy}$
 2.44. $y'_x = \frac{1-2x}{2y+3y^2}$, $y''_{xx} = -2 \cdot \frac{1+(1+3y) \cdot (y')^2}{2y+3y^2}$

- 2.45. $y'_x = \frac{2x-y}{x-3y^2}$, $y''_{xx} = 2 \cdot \frac{1-y'+3y \cdot (y')^2}{x-3y^2}$
- 2.46. $y'_x = \frac{3(x^2-y^2)}{2y \cdot (3x-1)}$, $y''_{xx} = \frac{3x-6y \cdot y' - (3x-1) \cdot (y')^2}{y \cdot (3x-1)}$
- 2.47. $dy = \frac{2-3x}{2\sqrt{1-x}} dx$, $d^2y = \frac{3x-4}{4\sqrt{(1-x)^3}} (dx)^2$
- 2.48. $dy = (\sqrt{1-x^2} - 2x \cdot \arcsin x) dx$, $d^2y = -\left(\frac{3x}{\sqrt{1-x^2}} + 2\arcsin x\right) (dx)^2$
- 2.49. $dy = \left(\frac{\cos x}{x} - \sin x \cdot \ln x\right) dx$, $d^2y = -\left(\frac{\cos x}{x^2} + \frac{2 \cdot \sin x}{x} + \cos x \cdot \ln x\right) (dx)^2$
- 2.50. $dy = (3x^2 - x^3) \cdot e^{-x} dx$, $d^2y = (x^3 - 6x^2 + 6x) \cdot e^{-x} (dx)^2$
- 2.51. $dy = \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \arcsin x\right) dx$, $d^2y = \frac{2-x^2}{\sqrt{(1-x^2)^3}} (dx)^2$
- 2.52. $dy = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} dx$, $d^2y = \frac{2 - \ln x}{x \cdot \ln^3 x} (dx)^2$
- 2.53. $dy = \frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx$, $d^2y = \frac{2x^3+3x}{\sqrt{(1+x^2)^3}} (dx)^2$
- 2.54. $dy = \left(\frac{x}{1+x^2} + \arctg x\right) dx$, $d^2y = \frac{2}{(1+x^2)^2} (dx)^2$
- 2.55. $dy = (2x \cdot \arctg x + 1) dx$, $d^2y = 2 \cdot \left(\frac{x}{1+x^2} + \arctg x\right) (dx)^2$
- 2.56. $dy = \frac{1-2 \cdot \ln x}{x^3} dx$, $d^2y = \frac{6 \cdot \ln x - 5}{x^4} (dx)^2$
- 2.57. $dy = \left(\frac{x}{\cos^2 x} + \operatorname{tg} x\right) dx$, $d^2y = \frac{2 \cdot (\cos x + x \cdot \sin x)}{\cos^3 x} (dx)^2$
- 2.58. $dy = \frac{2 - \ln x}{2\sqrt{x^3}} dx$, $d^2y = \frac{3 \cdot \ln x - 8}{4\sqrt{x^5}} (dx)^2$
- 2.59. $-2 + 7(x-1) + 9(x-1)^2 + 2(x-1)^3$
- 2.60. $-2 - 7(x+1) + 9(x+1)^2 - 2(x+1)^3$
- 2.61. $13 - 10(x+2) - (x+2)^2 + (x+2)^3$
- 2.62. $-3 - 4(x-2) - 3(x-2)^2 - (x-2)^3$
- 2.63. $19 + 23(x-3) + 8(x-3)^2 + (x-3)^3$
- 2.64. $4 + 26(x+3) - 15(x+3)^2 + 2(x+3)^3$
- 2.65. $9 - 6(x+1) - 3(x+1)^2 + 2(x+1)^3$
- 2.66. $4(x-1) - 3(x-1)^2 - 2(x-1)^3$ 2.67. $7 + 16(x-2) + 9(x-2)^2 + 2(x-2)^3$
- 2.68. $-6 + 4(x+2) - 3(x+2)^2 + (x+2)^3$
- 2.69. $-2 - 12(x+3) + 7(x+3)^2 - (x+3)^3$
- 2.70. $4 + 11(x-1) + 9(x-1)^2 + 4(x-1)^3$ 2.71. 4,1602 2.72. 1,6487 2.73. 0,1823
- 2.74. 0,2955 2.75. 2,2360 2.76. 0,9801 2.77. 2,1544 2.78. 1,4918 2.79. -0,2231
- 2.80. 0,3894 2.81. 5,3852 2.82. 0,9553 2.83. 2,5 2.84. $\frac{1}{6}$ 2.85. -1 2.86. $\frac{1}{3}$ 2.87. -0,5
- 2.88. 0,5 2.89. 0,5 2.90. $\frac{2}{3}$ 2.91. ∞ 2.92. $\frac{1}{3}$ 2.93. 0,5 2.94. -2 2.95. 0 2.96. 0 2.97. 0
- 2.98. -1 2.99. 1 2.100. e^{-1} 2.101. $e^{-1/6}$ 2.102. $e^{1/3}$ 2.103. e^{-1} 2.104. $e^{2/\pi}$ 2.105. e^{-1}
- 2.106. $e^{-1/2}$ 2.107. $x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$ 2.108. $-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6 + o(x^6)$
- 2.109. $\Delta \leq 0,0003$ 2.110. $\Delta \leq 0,04$ 2.111. $-\frac{2}{3}$ 2.112. $e^{\frac{2}{\sin 2\alpha}}$

глава 3

- 3.1. $\searrow$ на $[-2; +\infty)$; $\nearrow$ на $(-\infty; -2]$ 3.2. $\searrow$ на $(-\infty; -1]$ и на $[1; +\infty)$; $\nearrow$ на $[-1; 1]$
 3.3. $\searrow$ на $(-\infty; 3)$ и на $(3; +\infty)$ 3.4. $\searrow$ на $[0; +\infty)$; $\nearrow$ на $(-\infty; 0]$
 3.5. $\searrow$ на $(-\infty; -2)$, на $(-2; 8)$ и на $(8; +\infty)$ 3.6. $\searrow$ на $[0; 1]$; $\nearrow$ на $[1; +\infty)$
 3.7. $\searrow$ на $(-\infty; 0)$ и на $(0; 1]$; $\nearrow$ на $[1; +\infty)$ 3.8. $\nearrow$ на $(-\infty; +\infty)$
 3.9. $\searrow$ на $(0; \frac{1}{e}]$; $\nearrow$ на $[\frac{1}{e}; +\infty)$ 3.10. $\nearrow$ на $(-\infty; +\infty)$
 3.11. $\searrow$ на $(-\infty; 0]$ и на $[2 \log_2 e; +\infty)$; $\nearrow$ на $[0; 2 \log_2 e]$ 3.12. $\searrow$ на $(0; \frac{1}{e}]$; $\nearrow$ на $[\frac{1}{e}; +\infty)$
 3.13. а) $\frac{\pi}{4}$; б) $-\frac{3\pi}{4}$ 3.14. а) $-\pi$; б) π 3.15. π 3.20. $y_{\max} = f(1) = 0$; $y_{\min} = f(3) = -4$
 3.21. $y_{\max} = f(\pm 1) = 1$; $y_{\min} = f(0) = 0$ 3.22. $y_{\max} = f(-1) = -2$; $y_{\min} = f(1) = 2$
 3.23. $y_{\max} = f(1) = 1$; $y_{\min} = f(-1) = -1$ 3.24. $y_{\max} = f(1) = 1$
 3.25. $y_{\min} = f(-1) = -\frac{1}{e}$ 3.26. $y_{\max} = f(1) = \frac{1}{e}$ 3.27. $y_{\min} = f(1) = e$
 3.28. $y_{\min} = f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$ 3.29. экстремумов нет
 3.30. $y_{\max} = f(\pi k) = \frac{1}{2} + (-1)^k$; $y_{\min} = f\left(\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right) = -\frac{3}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$
 3.31. $y_{\max} = f\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$; $y_{\min} = f\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi k\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$
 3.32. $m = f(-1) = 0,5$; $M = f(3) = 8$ 3.33. $m = f(2) = 2$; $M = f(10) = 66$
 3.34. $m = f(1) = 1$; $M = f(-1) = 3$ 3.35. $m = f(1) = -6$; $M = f(3) = 46$
 3.36. $m = f(1) = -6$; $M = f(-2) = 21$ 3.37. $m = f(1) = 2$; $M = f(10) = f(0,1) = 10,1$
 3.38. $m = f(1) = -1$; $M = f(2) = 1$ 3.39. $m = f(0) = f(4) = 0$; $M = f(1) = 1$
 3.40. $m = f(-2) = f(4) = -4$; $M = f(0) = 0$ 3.41. $m = f(-1) = 1$; $M = f(3) = 3$
 3.42. $m = f(-1) = -0,5$; $M = f(1) = 0,5$ 3.43. $m = f(0) = f(10) = 0$; $M = f(5) = 5$
 3.44. $m = f\left(\frac{\pi k}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$; $M = f\left(\frac{\pi k}{2}\right) = 1$, $k \in \mathbb{Z}$ 3.45. $\Delta_{\max} = 0,25$ 3.46. $\Delta_{\max} = \sqrt{2}$
 3.47. $\Delta_{\max} = \frac{4}{27}$ 3.48. $\Delta_{\max} = \frac{\pi}{2} - 1$ 3.49. $\Delta_{\min} = 0,25$ 3.50. $\Delta_{\min} = 2$
 3.51. $\Delta_{\min} = 0,5$ 3.52. $\Delta_{\min} = 1,5$ 3.53. Каждое из слагаемых должно быть равно $\frac{a}{2}$
 3.54. Прямоугольник должен быть квадратом со стороной $\frac{l}{4}$
 3.55. Сторона основания должна быть равна $\sqrt[3]{2V}$, а высота бака — вдвое меньше
 3.56. Высота цилиндра должна быть равна диаметру основания
 3.57. Высота цилиндра равна $\frac{2R}{\sqrt{3}}$, радиус его основания $\frac{R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, где R — радиус шара
 3.58. Высота цилиндра равна $R\sqrt{2}$, радиус его основания $\frac{R\sqrt{2}}{2}$, где R — радиус шара
 3.59. Высота конуса равна $\frac{4}{3}R$, радиус его основания $\frac{2\sqrt{2}}{3}R$, где R — радиус шара
 3.60. Высота конуса равна $\frac{4}{3}R$, радиус его основания $\frac{2\sqrt{2}}{3}R$, где R — радиус шара
 3.61. Высота конуса равна $4R$, радиус его основания $R\sqrt{2}$, где R — радиус шара
 3.62. Центральный угол сектора должен быть равен $2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$ рад. ($\approx 294^\circ$)

- 3.63.** Стороны $a\sqrt{2}$ и $b\sqrt{2}$, где a и b – полуоси эллипса **3.64.** $M\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{3}{4}\right)$
- 3.65.** Выпуклость на $(-\infty; 1]$, вогнутость на $[1; +\infty)$, $M(1; 2)$ – точка перегиба
- 3.66.** Вогнутость на $(-\infty; 2]$, выпуклость на $[2; +\infty)$, $M(2; 12)$ – точка перегиба
- 3.67.** Вогнутость на $(-\infty; 0]$, выпуклость на $[0; +\infty)$, $M(0; 0)$ – точка перегиба
- 3.68.** Вогнутость на $(-\infty; -3)$, выпуклость на $(-3; +\infty)$, точек перегиба – нет
- 3.69.** Выпуклость на $(-\infty; -\sqrt{3}]$ и на $[0; \sqrt{3}]$, вогнутость на $[-\sqrt{3}; 0]$ и на $[\sqrt{3}; +\infty)$, $M_{1,2}(\pm\sqrt{3}; 0)$ и $M_3(0; 0)$ – точки перегиба
- 3.70.** Вогнутость на $[-\pi + 2\pi k; 2\pi k]$, выпуклость на $[2\pi k; \pi + 2\pi k]$, $M_k(\pi k; \pi k)$ – точки перегиба, $k \in \mathbb{Z}$
- 3.71.** Выпуклость на $(-\infty; -6]$ и на $[0; 6]$, вогнутость на $[-6; 0]$ и на $[6; +\infty)$, $M_{1,2}(\pm 6; \pm 4,5)$ и $M_3(0; 0)$ – точки перегиба
- 3.72.** Вогнутость на $(-\infty; 0]$, выпуклость на $[0; +\infty)$, $M(0; 0)$ – точка перегиба
- 3.73.** Вогнутость на $(0; e^{-\frac{3}{2}}]$, выпуклость на $[e^{-\frac{3}{2}}; +\infty)$, $M\left(e^{-\frac{3}{2}}; -\frac{3}{2e^3}\right)$ – точка перегиба
- 3.74.** Выпуклость на $(-\infty; +\infty)$, точек перегиба – нет
- 3.75.** Выпуклость на $(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}]$ и на $[\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty)$, вогнутость на $[-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}]$, $M_{1,2}\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ – точки перегиба **3.76.** Выпуклость на $(0; +\infty)$, точек перегиба – нет
- 3.77.** Использовать выпуклость функции $f(x) = x^n$ на $(0; +\infty)$ при $n > 1$
- 3.78.** Использовать вогнутость функции $f(x) = \ln x$ на $(0; +\infty)$
- 3.79.** Использовать выпуклость функции $f(x) = x \cdot \ln x$ на $(0; +\infty)$
- 3.80.** $x = 2$; $y = 0$ **3.81.** $x = 3$; $y = x + 3$ **3.82.** $x = -3$; $y = x - 5$
- 3.83.** $x = -\frac{1}{2}$; $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$ **3.84.** $x = 1$; $x = 3$; $y = 0$ **3.85.** $x = \frac{2}{3}$; $y = \frac{1}{3}x - \frac{16}{9}$
- 3.86.** $x = -4$; $y = x + 2$ **3.87.** $x = -\frac{3}{4}$; $y = -\frac{1}{4}x - \frac{13}{16}$
- 3.88.** $y = x$, $x \rightarrow +\infty$; $y = -x$, $x \rightarrow -\infty$ **3.89.** $y = 1$, $x \rightarrow +\infty$; $y = -1$, $x \rightarrow -\infty$
- 3.90.** $x = 1$; $x = -1$; $y = x$, $x \rightarrow +\infty$; $y = -x$, $x \rightarrow -\infty$
- 3.91.** $x = \frac{1}{2}$; $x = -\frac{1}{2}$; $y = \frac{3}{2}x$, $x \rightarrow +\infty$; $y = -\frac{3}{2}x$, $x \rightarrow -\infty$
- 3.92.** $y = 2x - 2$, $x \rightarrow +\infty$; $y = -2$, $x \rightarrow -\infty$ **3.93.** $x = -1$ **3.94.** $x = 0$
- 3.95.** $x = 0$; $y = 1$ **3.96.** $y = 0$ **3.97.** $x = 0$; $y = 0$, $x \rightarrow +\infty$; $y = 1$, $x \rightarrow -\infty$
- 3.98.** $y = x + \frac{\pi}{2}$, $x \rightarrow +\infty$; $y = x - \frac{\pi}{2}$, $x \rightarrow -\infty$ **3.99.** $\frac{9+6\sqrt{3}}{4}$ **3.100.** $b = -\frac{1}{2}$
- 3.101.** $b = -\frac{1}{2}$, $\Delta = \frac{1}{2}$ **3.102.** $M\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}; \sqrt[6]{2}\right)$ **3.103.** $M\left(\frac{1}{e}; -\frac{1}{e}\right)$
- 3.104.** $k \leq 0$ или $k = \frac{1}{e} \Rightarrow 1$ корень; $0 < k < \frac{1}{e} \Rightarrow 2$ корня; $k > \frac{1}{e} \Rightarrow$ нет корней.

глава 4

- 4.1.** $2x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5x$ **4.2.** $\frac{8}{7}x^7 + \frac{12}{5}x^5 + 2x^3 + x$ **4.3.** $\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + \frac{11}{2}x^2 - 6x$
- 4.4.** $-\frac{1}{x} + 2\ln|x| + x$ **4.5.** $\frac{1}{2}x^2 + 2x$ **4.6.** $x - \arctg x$ **4.7.** $-\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2}$
- 4.8.** $\frac{2}{5}\sqrt{x^5} + \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}$ **4.9.** $2\sqrt{x} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$ **4.10.** $-\frac{2}{\sqrt{x}} + 3\sqrt[3]{x}$ **4.11.** $\frac{12}{17}\sqrt[12]{x^{17}}$ **4.12.** $\frac{30}{37}\sqrt[30]{x^{37}}$

- 4.13. $\frac{1}{2}x^2 + \frac{12}{7}\sqrt[6]{x^7} + 3\sqrt[3]{x}$ 4.14. $\frac{4}{7}\sqrt[4]{x^7} + \frac{4}{\sqrt[4]{x}}$ 4.15. $\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}$ 4.16. $\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + \frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7}$
 4.17. $\frac{6}{13}\sqrt[6]{x^{13}} - \frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7}$ 4.18. $\frac{3^x \cdot e^x}{1 + \ln 3}$ 4.19. $\frac{9^x}{\ln 9} - 2\frac{6^x}{\ln 6} + \frac{4^x}{\ln 4}$ 4.20. $-\frac{1}{5^x \ln 5} - \frac{20^x}{\ln 20}$
 4.21. $\frac{1}{2^x \ln 2} - \frac{1}{5^x \ln 5}$ 4.22. $-\frac{3}{2^x \ln 2} - \frac{1}{2 \cdot 3^x \ln 3}$ 4.23. $\arcsin \frac{x}{3}$ 4.24. $\arcsin \frac{x}{\sqrt{7}}$
 4.25. $5 \arcsin x + x$ 4.26. $5 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - x$ 4.27. $\arcsin x - \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$
 4.28. $\arcsin \frac{x}{\sqrt{2}} - \ln(x + \sqrt{x^2 + 2})$ 4.29. $\frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{x}{4}$ 4.30. $\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}}$ 4.31. $\frac{1}{12} \ln \left| \frac{x-6}{x+6} \right|$
 4.32. $\frac{1}{2\sqrt{5}} \ln \left| \frac{x-\sqrt{5}}{x+\sqrt{5}} \right|$ 4.33. $\frac{1}{2}x^2 + 7x + 11 \ln|x-2|$ 4.34. $\frac{2}{3}x - \frac{17}{9} \ln|3x+1|$
 4.35. $\frac{3}{2}x + \frac{25}{4} \ln|2x-7|$ 4.36. $\ln \left| \frac{x-3}{x-2} \right|$ 4.37. $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x+3} \right|$ 4.38. $\frac{1}{a-b} \ln \left| \frac{x+b}{x+a} \right|$
 4.39. $\operatorname{tg} x - x$ 4.40. $-(\operatorname{ctg} x + x)$ 4.41. $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x - 4x$ 4.42. $-(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)$
 4.43. $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x$ 4.44. $-(e^{-x} + \frac{1}{3}e^{-3x})$ 4.45. $\frac{1}{6}e^{6x} - \frac{2}{5}e^{5x} + \frac{1}{4}e^{4x}$
 4.46. $\frac{1}{2}e^{2x} - e^x + x + e^{-x}$ 4.47. $\frac{1}{4}\operatorname{sh} 2x - \frac{1}{2}x$ 4.48. $\frac{1}{4}\operatorname{sh} 2x + \frac{1}{2}x$
 4.49. $\frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{5}\cos 5x$ 4.50. $-\frac{1}{3}\sin\left(3x - \frac{\pi}{5}\right) - \frac{1}{2}\cos\left(2x + \frac{\pi}{7}\right)$
 4.51. $\ln|x-3| + \frac{1}{5}\ln|5x+2| - \frac{2}{7}\sqrt{7x+1}$ 4.52. $\ln|x+5| - \frac{1}{2}\ln|2x-1| + \frac{1}{4}\sqrt[3]{(6x+7)^2}$
 4.53. $2\left(\operatorname{th} \frac{x}{2} + \operatorname{cth} \frac{x}{2}\right)$ 4.54. $-\operatorname{ctg} \frac{x}{2}$ 4.55. $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ 4.56. $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ 4.57. $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x$
 4.58. $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x$ 4.59. $\frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x$ 4.60. $\frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x$
 4.61. $-\frac{1}{10}\ln|3-5x^2|$ 4.62. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x^2)$ 4.63. $\frac{1}{8\sqrt{2}}\ln \left| \frac{x^4-\sqrt{2}}{x^4+\sqrt{2}} \right|$ 4.64. $\frac{1}{4}\sqrt[3]{(1+x^3)^4}$
 4.65. $-\frac{1}{42}\sqrt{(2-7x^4)^3}$ 4.66. $\frac{1}{3}\ln(3x^2-9x+7) dx$ 4.67. $\frac{1}{4}\ln|x^4+8x-1|$
 4.68. $2\frac{5^{\sqrt{x}}}{\ln 5}$ 4.69. $2\operatorname{arctg} \sqrt{x}$ 4.70. $-e^{\frac{1}{x}}$ 4.71. $-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ 4.72. $\frac{1}{3}\ln^3 x$ 4.73. $\ln|\ln x|$
 4.74. $-\frac{1}{2\ln^2 x}$ 4.75. $\ln|e^x-2|$ 4.76. $\frac{1}{\ln 2}\operatorname{arctg}(2^x)$ 4.77. $\operatorname{arctg}(e^x)$
 4.78. $x - \ln(e^x + 1)$ 4.79. $\frac{1}{3}\sin^3 x$ 4.80. $-\frac{1}{4}\cos^4 x$ 4.81. $-\ln|\cos x|$ 4.82. $\ln|\sin x|$
 4.83. $\frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x$ 4.84. $\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x$ 4.85. $-\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x$
 4.86. $\sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x$ 4.87. $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + \ln|\cos x|$ 4.88. $-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x - \ln|\sin x|$
 4.89. $\ln|\operatorname{tg} x|$ 4.90. $\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right|$ 4.91. $\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|$ 4.92. $-\frac{2}{3}\sqrt{(3-\operatorname{tg} x)^3}$
 4.93. $-\frac{3}{4}\sqrt[3]{(2+\operatorname{ctg} x)^4}$ 4.94. $\operatorname{tg} x + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x$ 4.95. $-\operatorname{ctg} x - \frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x$ 4.96. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x$
 4.97. $\frac{1}{2}\operatorname{arcsin}^2 x$ 4.98. $\ln|\operatorname{arctg} x|$ 4.99. $-\frac{1}{\operatorname{arcsin} x}$ 4.100. $\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{arcsin} \frac{x}{a}$
 4.101. $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|$ 4.102. $\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$
 4.103. $\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})$ 4.104. $\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$ 4.105. $\frac{1}{2a^3}\left(\operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{a \cdot x}{a^2+x^2}\right)$
 4.106. $\frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}$ 4.107. $\frac{1}{2}\operatorname{arcsin} x - \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}$ 4.108. $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-1} + \frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}|$

- 4.109.** $\frac{x}{2}\sqrt{1+x^2} - \frac{1}{2}\ln(x + \sqrt{1+x^2})$ **4.110.** $\sqrt{x^2+1} - \ln\left|\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}\right|$
4.111. $\sqrt{x^2-1} + \frac{|x|}{x}\arcsin\frac{1}{x}$ **4.112.** $\ln(x + \sqrt{x^2+1}) - \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$
4.113. $x \cdot \ln x - x$ **4.114.** $x \cdot \arctg x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$ **4.115.** $x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$
4.116. $x \cdot e^x - e^x$ **4.117.** $-x \cdot e^{-x} - e^{-x}$ **4.118.** $2^x\left(\frac{x}{\ln 2} - \frac{1}{\ln^2 2}\right)$ **4.119.** $x \cdot \sin x + \cos x$
4.120. $\sin x - x \cdot \cos x$ **4.121.** $\frac{1}{3}x \cdot \sin 3x + \frac{1}{9}\cos 3x$ **4.122.** $\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{2}x \cdot \cos 2x$
4.123. $\frac{1}{2}(1+x^2) \cdot \arctg x - \frac{1}{2}x$ **4.124.** $\frac{1}{4}\left((2x^2-1)\arcsin x + x \cdot \sqrt{1-x^2}\right)$
4.125. $x \cdot \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x$ **4.126.** $x \cdot \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x$ **4.127.** $\frac{1}{9}x^3(3\ln x - 1)$
4.128. $x \cdot (\ln^2 x - 2\ln x + 2)$ **4.129.** $\frac{2}{27}x\sqrt{x}(9\ln^2 x - 12\ln x + 8)$ **4.130.** $-\frac{1}{4x^2}(2\ln x + 1)$
4.131. $2\sqrt{x}(\ln x - 2)$ **4.132.** $\frac{1}{3}x^3 \cdot \arccos x - \frac{\sqrt{1-x^2}}{9}(x^2 + 2)$ **4.133.** $\ln|\sin x| - x \cdot \operatorname{ctg} x$
4.134. $\ln|\cos x| + x \cdot \operatorname{tg} x$ **4.135.** $\arctg \sqrt{x} \cdot (x+1) - \sqrt{x}$
4.136. $x \cdot \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$ **4.137.** $\frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x)$ **4.138.** $\frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x)$
4.139. $-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x + \cos x)$ **4.140.** $\frac{2^x}{1+\ln^2 2}(\sin x + \ln 2 \cdot \cos x)$
4.141. $\frac{e^x}{10}(\sin 3x - 3\cos 3x)$ **4.142.** $\frac{3^x}{4+\ln^2 3}(2\sin 2x + \ln 3 \cdot \cos 2x)$
4.143. $\frac{x}{2}(\sin(\ln x) - \cos(\ln x))$ **4.144.** $\frac{x}{2}(\sin(\ln x) + \cos(\ln x))$ **4.145.** $\frac{-e^{-x^2}}{2}(1+x^2)$
4.146. $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)$ **4.147.** $x \cdot \arcsin^2 x + 2\sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x - 2x$
4.148. $\frac{1+x^2}{2} \cdot \arctg^2 x - x \cdot \arctg x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$
4.149. $\frac{1}{6}(2x^3 \cdot \arctg x - x^2 + \ln(1+x^2))$ **4.150.** $\ln|1 - \sqrt{1-x^2}| - \ln|x| - \frac{\arcsin x}{x}$
4.151. $2(\sqrt{x} - \sqrt{1-x} \cdot \arcsin \sqrt{x})$ **4.152.** $-\frac{1}{x}(\ln^2 x + 2\ln x + 2)$ **4.153.** $\ln x \cdot (\ln(\ln x) - 1)$
4.154. $\frac{e^{-x}}{10}(\cos 2x - 2\sin 2x) - \frac{1}{2}e^{-x}$ **4.155.** $\frac{1}{2}x + \frac{1}{10}x \cdot (2\sin(2\ln x) + \cos(2\ln x))$
4.156. $x \cdot \operatorname{tg} x + \ln|\cos x| - \frac{1}{2}x^2$ **4.157.** $\frac{1}{8}x \cdot \sqrt{x^2+a^2} \cdot (2x^2+a^2) - \frac{a^4}{8}\ln(x + \sqrt{x^2+a^2})$
4.158. $-\operatorname{ctg} x \cdot (1 + \ln(\sin x)) - x$ **4.159.** $\frac{e^x}{x+1}$ **4.160.** $\frac{1}{2}\ln(1+e^{2x}) - \frac{\arctg(e^x)}{e^x} - x$
4.161. $\frac{1}{2}\arctg\left(\frac{x+1}{2}\right)$ **4.162.** $\frac{1}{2}\ln(x^2-4x+9) + \frac{2}{\sqrt{5}}\arctg\left(\frac{x-2}{\sqrt{5}}\right)$
4.163. $\ln(x^2-8x+17) + 11\arctg(x-4)$ **4.164.** $2\ln(x^2+6x+10) - 11\arctg(x+3)$
4.165. $3\ln|x-1| - 2\ln|x|$ **4.166.** $\frac{1}{5}(8\ln|x+3| - 3\ln|x-2|)$
4.167. $\frac{1}{2}(3\ln|x+1| - \ln|x-3|)$ **4.168.** $\frac{1}{2}x^2 + x - \ln|x| + 2\ln|x-1|$
4.169. $\frac{3}{2}x^2 + \ln|x+1| + 2\ln|x-1|$ **4.170.** $\frac{1}{2}x^2 + 4x + 8\ln|x-1| + 5\ln|x-3|$
4.171. $x^2 + 2x + 7\ln|x-2| - \ln|x+1|$ **4.172.** $x^2 - 2x + 11\ln|x+3| + 3\ln|x-2|$
4.173. $\frac{3}{2}x^2 - 9x + 22\ln|x+1| - \ln|x+2|$

- 4.174.** $x - 19\ln|x - 2| + 3\ln|x - 1| + 24\ln|x - 3|$
4.175. $3x - 2\ln|x - 1| + 3\ln|x + 2| + 4\ln|x - 2|$
4.176. $x + \ln|x - 1| - 2\ln|x + 1| - \ln|x + 2|$
4.177. $x - 8\ln|x - 2| + 12\ln|x - 3| + 2\ln|x - 4|$
4.178. $x - \ln|x| + 4\ln|x - 3| + \ln|x - 4|$ **4.179.** $4x + 19\ln|x - 2| - 7\ln|x - 1| + \ln|x|$
4.180. $\ln|x + 1| - \frac{1}{2(x+2)^2}$ **4.181.** $\ln|x| - \frac{1}{2(x+2)^2}$ **4.182.** $\ln|x + 2| - \frac{1}{2(x-2)^2}$
4.183. $\ln|x + 1| - \frac{1}{(x+2)^2}$ **4.184.** $\ln|x + 1| + \frac{1}{2(x+2)^2}$
4.185. $\frac{1}{2} \ln(x^2 + x + 1) - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$ **4.186.** $\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) - \frac{1}{x+1} + \arctg x$
4.187. $\ln(x^2 + x + 1) - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctg\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{x+2}$
4.188. $\frac{1}{2} \ln(x^2 + x + 1) + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + \arctg x + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$
4.189. $\ln(x^2 + x + 1) - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)$ **4.190.** $\frac{1}{2} \ln(x^2 - x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + \arctg x$
4.191. $\frac{1}{6} \sqrt{(2x+1)^3} - \frac{1}{2} x$ **4.192.** $\frac{3}{2} \sqrt[3]{(x+1)^2} - 3\sqrt[3]{x+1} + 3\ln|1 + \sqrt[3]{x+1}|$
4.193. $2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - \ln(\sqrt[6]{x} + 1)$
4.194. $\frac{6}{7} \sqrt[6]{(x+1)^7} - \frac{6}{5} \sqrt[6]{(x+1)^5} + 2\sqrt{x+1} - 6\sqrt[6]{x+1} + 6\arctg(\sqrt[6]{x+1})$
4.195. $2\sqrt{x-1} - 3\sqrt[3]{x-1} + 6\sqrt[6]{x-1} - \ln(\sqrt[6]{x-1} + 1)$ **4.196.** $\frac{2}{(1 + \sqrt[4]{x})^2} - \frac{4}{1 + \sqrt[4]{x}}$
4.197. $\sqrt{2x-1} - 2\sqrt[4]{2x-1} + 2\ln(\sqrt[4]{2x-1} + 1)$
4.198. $3\sqrt[3]{x+3} - 6\sqrt[6]{x+3} + 6\ln(1 + \sqrt[6]{x+3})$
4.199. $\frac{1}{2}(x-2)\sqrt{x^2-1} + \frac{1}{2} \ln|x + \sqrt{x^2-1}|$ **4.200.** $2\arctg \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right|$
4.201. $\frac{1}{3} \ln(t^2 + t + 1) - \frac{2}{3} \ln|t-1| + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + \frac{2t}{t^3-1}, t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$
4.202. $\frac{5}{4} \sqrt[5]{\left(\frac{x+1}{x}\right)^4} - \frac{5}{9} \sqrt[5]{\left(\frac{x+1}{x}\right)^9}$ **4.203.** $\frac{1}{6} \ln(t^2 + t + 1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2t+1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3} \ln|t-1|,$
 $t = \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}$ **4.204.** $\frac{1}{4} \ln\left(\frac{\sqrt[4]{x^4+1}+|x|}{\sqrt[4]{x^4+1}-|x|}\right) - \frac{1}{2} \arctg\left(\frac{\sqrt[4]{x^4+1}}{|x|}\right)$
4.205. $\frac{1}{5} \ln|t-1| - \frac{1}{10} \ln(t^2 + t + 1) + \frac{\sqrt{3}}{5} \arctg \frac{2t+1}{\sqrt{3}}, t = \sqrt[3]{1+x^5}$
4.206. $\frac{1}{2} \ln\left|x + \frac{1}{4} + \sqrt{4x^2 + 2x + 1}\right|$ **4.207.** $\sqrt{x^2-2x} + \ln|x-1 + \sqrt{x^2-2x}|$
4.208. $\arcsin(x-1) - \sqrt{2x-x^2}$ **4.209.** $3\arcsin \frac{x+1}{\sqrt{7}} - \sqrt{6-2x-x^2}$
4.210. $\sqrt{x^2+x+1} - \frac{1}{2} \ln\left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2+x+1}\right)$ **4.211.** $-\sqrt{1-x-x^2} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{2x+1}{\sqrt{5}}$
4.212. $-3\sqrt{x^2-4x+13} - 5\ln|x-2 + \sqrt{x^2-4x+13}|$
4.213. $5\arcsin(x-2) - 3\sqrt{4x-3-x^2}$ **4.214.** $\frac{3-x}{2} \cdot \sqrt{1-2x-x^2} + 2\arcsin \frac{x+1}{\sqrt{2}}$
4.215. $\frac{2x+3}{4} \cdot \sqrt{x^2-x+1} - \frac{1}{8} \ln|2x-1 + 2\sqrt{x^2-x+1}|$ **4.216.** $-\frac{3x^4+4x^2+8}{15} \sqrt{1-x^2}$

$$\begin{aligned}
& \mathbf{4.217.} \frac{8x^5 - 10x^3 + 15x}{48} \sqrt{1+x^2} - \frac{5}{16} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \quad \mathbf{4.218.} \frac{3x^2+2}{8x^4} \sqrt{x^2-1} - \frac{3}{8} \arcsin \frac{1}{x} \\
& \mathbf{4.219.} \frac{1}{2(x+1)^2} \sqrt{x^2+2x} - \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{1}{x+1} \right) \quad \mathbf{4.220.} \frac{\sqrt{x^2-2x-1}}{4(x-1)^2} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \arcsin \left(\frac{\sqrt{2}}{x-1} \right) \\
& \mathbf{4.221.} 2\ln|t| - \frac{3}{2} \ln|1+2t| + \frac{3}{2 \cdot (1+2t)}, \quad t = \sqrt{x^2+x+1} + x \quad \mathbf{4.222.} \ln \left| \frac{t-1}{t} \right| - 2 \operatorname{arctg} t, \\
& t = \frac{1 + \sqrt{1-2x-x^2}}{x} \quad \mathbf{4.223.} \frac{(t-1)^3 + (t-1)^{-3}}{24} + \frac{(t-1)^2 + (t-1)^{-2}}{8} + \frac{t-1 + (t-1)^{-1}}{8} + \frac{1}{2} \ln|t-1|, \\
& t = x + \sqrt{x^2-2x+2} \quad \mathbf{4.224.} -\frac{5}{18(t+1)} - \frac{1}{6(t+1)^2} + \frac{3}{4} \ln|t-1| - \frac{16}{27} \ln|t-2| - \\
& -\frac{17}{108} \ln|t+1|, \quad t = \frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x+1} \quad \mathbf{4.225.} -\frac{1}{14} \cos 7x - \frac{1}{6} \cos 3x \quad \mathbf{4.226.} \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{14} \sin 7x \\
& \mathbf{4.227.} \frac{1}{8} \sin 4x + \frac{1}{4} \sin 2x \quad \mathbf{4.228.} \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} \right) \quad \mathbf{4.229.} \operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x} - x \\
& \mathbf{4.230.} \ln \left| 1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| \quad \mathbf{4.231.} \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \left(\frac{1 + 3 \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{5}} \right) \quad \mathbf{4.232.} \operatorname{arctg} \left(1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) \\
& \mathbf{4.233.} \frac{2}{3 \cdot (3 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1)} \quad \mathbf{4.234.} -\frac{2}{5 \cdot (5 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1)} \quad \mathbf{4.235.} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1 + \sqrt{2} \cos x}{1 - \sqrt{2} \cos x} \right| \\
& \mathbf{4.236.} \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg} (\operatorname{tg} x \cdot \sqrt{2}) \quad \mathbf{4.237.} \ln |\operatorname{tg} x| + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x \quad \mathbf{4.238.} \ln |\operatorname{tg} x| - \frac{1}{2} \operatorname{ctg}^2 x \\
& \mathbf{4.239.} \frac{2}{21} \sin x \sqrt{\sin x} \cdot (7 - 3 \sin^2 x) \quad \mathbf{4.240.} \frac{2}{21} \cos x \sqrt{\cos x} \cdot (3 \cos^2 x - 7) \\
& \mathbf{4.241.} \frac{1}{7} \cos^7 x - \frac{3}{5} \cos^5 x + \cos^3 x - \cos x \quad \mathbf{4.242.} -\frac{1}{7} \sin^7 x + \frac{3}{5} \sin^5 x - \sin^3 x + \sin x \\
& \mathbf{4.243.} \frac{5}{16} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{3}{64} \sin 4x + \frac{1}{48} \sin^3 2x \quad \mathbf{4.244.} \frac{5}{16} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{3}{64} \sin 4x - \frac{1}{48} \sin^3 2x \\
& \mathbf{4.245.} \operatorname{tg} x + \frac{2}{3} \operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x \quad \mathbf{4.246.} -\operatorname{ctg} x - \frac{2}{3} \operatorname{ctg}^3 x - \frac{1}{5} \operatorname{ctg}^5 x \\
& \mathbf{4.247.} \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x + \frac{1}{48} \sin^3 2x \quad \mathbf{4.248.} \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x - \frac{1}{48} \sin^3 2x \\
& \mathbf{4.249.} \frac{1}{7} \cos^7 x - \frac{1}{5} \cos^5 x \quad \mathbf{4.250.} \frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{1}{7} \sin^7 x \quad \mathbf{4.251.} \frac{1}{3 \cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} \\
& \mathbf{4.252.} -\frac{3}{2} \cos x - \frac{\cos^3 x}{2 \sin^2 x} - \frac{3}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| \quad \mathbf{4.253.} \frac{\sin x}{2 \cos^2 x} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| \\
& \mathbf{4.254.} -\frac{\cos x}{2 \sin^2 x} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| \quad \mathbf{4.255.} -8 \left(\operatorname{ctg} 2x + \frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 2x \right) \\
& \mathbf{4.256.} \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x + \frac{3}{2} \operatorname{tg}^2 x - \frac{1}{2} \operatorname{ctg}^2 x + 3 \ln |\operatorname{tg} x| \quad \mathbf{4.257.} \frac{1}{3 \cos^3 x} + \frac{1}{\cos x} + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| \\
& \mathbf{4.258.} \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x - \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x - \ln |\cos x| \quad \mathbf{4.259.} -x - \frac{1}{5} \operatorname{ctg}^5 x + \frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 x - \operatorname{ctg} x \quad \mathbf{4.260.} \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x \\
& \mathbf{4.261.} \frac{2}{3} \sqrt{\operatorname{tg}^3 x} - 2 \sqrt{\operatorname{ctg} x} \quad \mathbf{4.262.} \frac{3}{4} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+t^3}{1-t^3} \right| - \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{arctg} \frac{1-t^2}{t\sqrt{3}}, \quad t = \sqrt[3]{\sin x} \\
& \mathbf{4.263.} \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t^2 + t\sqrt{2} + 1}{t^2 - t\sqrt{2} + 1} \right| - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t\sqrt{2}}{t^2 - 1}, \quad t = \sqrt{\operatorname{tg} x} \\
& \mathbf{4.264.} \frac{1}{2} \ln(t^2 + 1) - \frac{1}{4} \ln(t^4 - t^2 + 1) + \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{arctg} \frac{2t^2 - 1}{\sqrt{3}}, \quad t = \sqrt[3]{\operatorname{tg} x}
\end{aligned}$$

глава 5

- 5.1. $11\frac{1}{4}$ 5.2. $-\frac{3}{8}$ 5.3. 2 5.4. 1 5.5. $\frac{\pi}{6}$ 5.6. $\frac{\pi}{4}$ 5.7. 1 5.8. $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$
 5.9. $2\frac{1}{3}$ 5.10. 5 5.11. $\ln 2$ 5.12. $5\frac{1}{3}$ 5.13. $\frac{2}{3}$ 5.14. $\frac{\pi+2}{8}$ 5.15. $\frac{1}{5}$
 5.16. $\frac{1}{4}\operatorname{sh} 2 - \frac{1}{2}$ 5.17. 10 5.18. 1 5.19. 2,5 5.20. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 5.21. 1 5.22. π
 5.23. -2 5.24. $\frac{1}{2}(1 - \ln 2)$ 5.25. $\frac{\pi\sqrt{3}+6}{12}$ 5.26. $\frac{\pi-2\cdot\ln 2}{4}$ 5.27. $\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ 5.28. 4π
 5.29. $\frac{e^2+3}{8}$ 5.30. $\frac{e^{\pi}+1}{2}$ 5.31. $\frac{e^{\frac{\pi}{2}}-1}{2}$ 5.32. $2\left(1 - \frac{1}{e}\right)$ 5.33. $\operatorname{arc} \operatorname{tg} 3 - \operatorname{arc} \operatorname{tg} 2$
 5.34. $\ln \frac{4}{3}$ 5.35. $\frac{1}{2}\ln \frac{5}{2}$ 5.36. $\ln \frac{9}{8}$ 5.37. $\frac{2}{3}(1 - \ln 3)$ 5.38. $\frac{\pi}{16}$ 5.39. $\frac{\pi}{6}$
 5.40. $\ln \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 5.41. $\frac{1}{4}\ln 2$ 5.42. $\frac{2}{3}$ 5.43. $\frac{\pi}{6} + \frac{8\sqrt{3}}{27}$ 5.44. $1 - \cos 1$ 5.45. $\ln 2$
 5.46. $\operatorname{arc} \operatorname{tg} e - \frac{\pi}{4}$ 5.47. $\frac{1}{6}$ 5.48. $\frac{\pi^2}{4}$ 5.49. $\frac{1}{2}\operatorname{arc} \operatorname{tg} 2$ 5.50. $4 - \pi$ 5.51. $2 - \frac{\pi}{2}$
 5.52. $\frac{29}{270}$ 5.53. $\frac{1}{5} \cdot \ln 112$ 5.54. $\frac{\pi a^2}{8}$ 5.55. $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$ 5.56. $1 - \frac{\pi}{4}$ 5.57. $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln \frac{9+4\sqrt{2}}{7}$
 5.58. $\ln \frac{7+2\sqrt{7}}{9}$ 5.59. $\frac{\pi a^4}{16}$ 5.60. $\frac{\pi+2}{8}$ 5.61. -1 5.62. $14 - \ln(7!)$ 5.63. $\frac{30}{\pi}$
 5.64. $\ln(n!)$ 5.65. $\frac{1}{2}$ 5.66. $\frac{1}{e-1}$ 5.67. $\frac{\pi}{6} + \sqrt{3} - 2$ 5.68. $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$ 5.69. $\frac{1}{e}$
 5.70. $\frac{2}{\pi}$ 5.71. $3e^9$ 5.72. $-\frac{\pi}{6}$ 5.73. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 5.74. $-\frac{3}{\pi}$ 5.75. $e - 1$ 5.76. $\frac{4}{\ln 2}$ 5.77. $\frac{1}{5}$
 5.78. $\frac{3}{4}$ 5.79. $2(\sqrt{2} - 1)$ 5.80. $\frac{2}{\pi}$ 5.81. $\frac{3}{8}$ 5.82. $2\ln 2 - 1$ 5.87. $\frac{\pi^2}{4}$ 5.88. $\frac{\pi}{8}\ln 2$
 5.89. $\frac{\pi}{8}\ln 2$ 5.90. 0 5.91. $\frac{1}{n+1}$ 5.92. $\frac{\pi}{2}$ 5.93. $n \cdot \frac{\pi}{2}$ 5.94. $\frac{n! \cdot m!}{(n+m+1)!}$

глава 7

- 7.1. $\frac{1}{a}$ 7.2. n 7.3. $\frac{\pi}{a}$ 7.4. $\frac{\ln(2a+1)}{2a}$ 7.5. $\ln \frac{4}{3}$ 7.6. $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$ 7.7. $\frac{2\pi}{\sqrt{4q-p^2}}$
 7.8. ∞ 7.9. $\log_2 e$ 7.10. $\frac{a}{a^2+b^2}$ 7.11. $\frac{b}{a^2+b^2}$ 7.12. $\frac{n}{n-1}$ 7.13. $\frac{3}{2}$
 7.14. π 7.15. ∞ 7.16. -1 7.17. ∞ 7.18. ∞ 7.19. $\log_2 e$ 7.20. 1
 7.21 ÷ 7.25. сходится 7.26. расходится 7.27 ÷ 7.32. сходится 7.33 ÷ 7.34. сходится
 абсолютно 7.35 ÷ 7.38. сходится условно 7.39 ÷ 7.40. сходится абсолютно
 7.41. $p > 1$ 7.42. $p > 1$ 7.43. $p < 1$ 7.44. $-1 < p < 1$ 7.45. $1 < p < 2$
 7.46. $1 < p < 2$ 7.47. $0 < p < 1$ 7.48. $p > 1, q < 1$ 7.49. $p > 0$
 7.50. $p > 0, q > 0$ 7.51. $V = \pi; S = \infty$ 7.53. π 7.56. $-\frac{\pi}{2} \cdot \ln 2$

Литература.

1. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления, том 1, — М., Физматлит, 2007. — 680 с.
2. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления, том 2, — М., Физматлит, 2006. — 864 с.
3. *Аксенов А. П.* Математика, Математический анализ, часть 1 — СПб.: Изд-во Политехнического университета, 2004. — 614 с.
6. *Демидович Б. П.* Задачи и упражнения по математическому анализу для ВТУЗ-ов, — М., Астрель. АСТ, 2003. — 496 с.
7. *Демидович Б. П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу для ВУЗ-ов, — М., Астрель. АСТ, 2003. — 560 с.
8. *Кузнецов Л. А.* Сборник задач по Высшей математике. Типовые расчеты, — СПб - Москва-Краснодар, Лань, 2005. — 240 с.
9. *Потапов А. П.* Введение в математический анализ. Электронная версия, [www. potapovpolitech.narod.ru](http://www.potapovpolitech.narod.ru), 2014. — 222 с.