МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Факультет прикладной математики и кибернетики
Кафедра теории вероятностей и математической статистики

ПРЕДЕЛЫ

Методическое пособие для студентов вузов

Томск
Издательский Дом Томского государственного университета
2015

РАССМОТРЕНО И ОДОБРЕНО методической комиссией факультета прикладной математики и кибернетики.
Протокол № 49 от «10» февраля 2015 г.

Председатель комиссии, доктор физ.-мат. наук,
профессор А.Г. Дмитренко

Учебное пособие предназначено для студентов, изучающих дисциплину «Математический анализ».

СОСТАВИТЕЛЬ
доцент кафедры ТВ и МС *Н.Ю. Марголис*

I. Предел последовательности

1.1. Определение предела последовательности

<u>Определение.</u> Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, ($\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$), если $\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists$ номер $N = N(\varepsilon)$

такой, что $\quad \forall\ n > N \quad |x_n - a| < \varepsilon$.

Доказать по определению, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, значит найти вид зависимости $N = N(\varepsilon)$, позволяющий для произвольно заданного $\varepsilon > 0$ найти номер N, такой, чтобы $\forall n > N$ выполнилось неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. Для этого левую часть последнего неравенства $|x_n - a|$ оценивают сверху так, чтобы в оценке оставалось n, а сама оценка была как можно более простой. Например, при доказательстве предельного равенства $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n+2} = 1$ получаем $|x_n - a| = \left|\dfrac{n+1}{n+2} - 1\right| = \dfrac{1}{n+2} < \dfrac{1}{n}$.

После этого записываем неравенство $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$ и решаем его относительно n. Результат решения должен иметь вид $n > f(\varepsilon)$. Решение $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$ обеспечивает в нашем случае выполнение неравенства $|x_n - a| = \dfrac{1}{n+2} < \varepsilon$. Далее, поскольку $N(\varepsilon)$ – натуральный номер, а величина $f(\varepsilon) = \dfrac{1}{\varepsilon}$ не обязательно имеет натуральное значение, берется целая часть числа $\dfrac{1}{\varepsilon}$ и окончательно $N(\varepsilon)=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$. Если взять, например, $\varepsilon = 0{,}095$, то получится $N=101$, т.е. $\forall n>101 \quad x_n \in (0.905, 1.095)$.

Пример 1. Доказать по определению предела, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2-1}=0;$$

Определение предела для нашего случая примет вид

$\forall \varepsilon>0 \quad \exists N=N(\varepsilon), \forall n>N \quad \frac{1}{n^2-1}<\varepsilon$. Будем считать, что $n>1$, т.к. в определении предела $N=N(\varepsilon)$ может быть сколь угодно большим при $n\to\infty$. Сделаем оценку сверху для левой части последнего неравенства в определении предела, $\forall n>1 \quad \frac{1}{n^2-1}<\frac{1}{n}$, запишем неравенство $\frac{1}{n}<\varepsilon$ и, решая его относительно n, получим $n>\frac{1}{\varepsilon}$. Следовательно,

$$N(\varepsilon)=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1.$$

Пример 2. Доказать по определению предела, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{n-1}=+\infty.$$

Для этого случая определение предела последовательности необходимо перефразировать так: для каждого сколь угодно большого $E>0$ $\forall E>0 \quad \exists N=N(E), \forall n>N \quad x_n>E$, т.к. нужно доказать, что элементы последовательности $x_n=\frac{n^3}{n-1}$ могут быть сколь угодно большими при достаточно больших значениях n. При этом оценку левой части неравенства $x_n > E$ надо делать снизу. $x_n = \dfrac{n^3}{n-1} > \dfrac{n^3}{n} = n^2 > E$. Теперь,

решая неравенство $n^2 > E$ вместо неравенства $x_n = \dfrac{n^3}{n-1} > E$, получим $n > \sqrt{E},\ N(E) = [\sqrt{N}] + 1$.

Задачи для самостоятельного решения

Доказать по определению предела последовательности следующие предельные равенства:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n+2}{5n-3} = \dfrac{3}{5}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-1}{n^2+1} = 0$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{\sqrt{n^2+n+1}} = +\infty$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2-3}{2n^2+4} = \dfrac{3}{2}$; 5) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{6n}{\sqrt{8n^3+7}} = 0$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3}{2}\right)^{-n} = 0$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n-1}{2^n+1} = 1$.

1.2. Вычисление пределов последовательностей

Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$, то существуют конечные пределы

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(ax_n \pm by_n) = a\lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm b\lim\limits_{n\to\infty} y_n \quad \forall\, a,b \in R$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right) = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$, если $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$.

Решение типовых примеров:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n-1}{2n+3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n-\frac{1}{n}}{2n+\frac{3}{n}}=\dfrac{6}{2}=3$, так как $\dfrac{1}{n},\dfrac{3}{n}\underset{n\to\infty}{\to}0$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+2}{5n^2+4n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}{5+\frac{4}{n}-1}=\dfrac{0}{5}=0$, так как

$\dfrac{4}{n},\dfrac{2}{n^2},\dfrac{3}{n}\underset{n\to\infty}{\to}0$.

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+7}{\sqrt{n-6}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+\frac{7}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n}-\frac{6}{n^2}}}=\dfrac{2}{0}=\infty$, так как

$\dfrac{7}{n},\dfrac{6}{n^2},\dfrac{1}{n}\underset{n\to\infty}{\to}0$.

В примерах 1) – 3) мы делили числитель и знаменатель дроби, стоящей под знаком предела, на старшую степень n.

4) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-1})=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n-1})}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2-(n-1)}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-1}}=0 \text{ так как } \sqrt{n+2}+\sqrt{n-1}\underset{n\to\infty}{\to}\infty.$$

В примере 4) мы применили прием умножения и деления на выражение, сопряженное исходному.

5) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})(\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n(n+1)}+\sqrt[3]{n^2})}{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n(n+1)}+\sqrt[3]{n^2}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n(n+1)}+\sqrt[3]{n^2}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n(n+1)}+\sqrt[3]{n^2}}=0, \text{ так как } \frac{1}{\infty}=0.$$

В примере 5) мы умножили и разделили разность оснований $(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})$ на неполный квадрат суммы этих оснований, получив в числителе разность кубов.

6) $$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+7^n}{2^n-7^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{7}\right)^n+1}{\left(\frac{2}{7}\right)^n-\frac{1}{7}}=-7, \text{ так как } \left(\frac{2}{7}\right)^n\underset{n\to\infty}{\to}0.$$

В примере 6) мы почленно разделили числитель и знаменатель исходной дроби на 7^n.

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right)=$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$

В примере 7) мы воспользовались тем, что

$$\forall n\in N \quad \frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти пределы:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^3+n-1}{6n^3+2}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+5}{n^2-n-1}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n-1}{\sqrt{16n^2+2n-5}}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n+5}{\sqrt{8n^3+4n^2-n-7}}$; 5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{n^5+2}-\sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[5]{n^4+2}-\sqrt{n^3+1}}$;

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+...+n}{n^2-1}$; 7) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-n}-n\right)$;

8) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^2+1}-\sqrt[3]{n^2-n}\right)$; 9) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n-3^n}{3^{n+1}+2^{n-1}}$;

10) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{3^n}}$; 11) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+2+...+n}{n+2}-\dfrac{n}{2}\right)$;

12) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+3+5+...+(2n-1)}{1+2+3+..+n}\right)$; 13) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n-1}+1}{\sqrt[6]{n^2-3n+2}-3}$.

II. Предел функции

2.1. Определение предела функции.

Определение. Число b называется пределом функции $f(x)$ при $x\to a$ ($\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$), если $\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что $\forall x: |x-a|<\delta\quad |f(x)-b|<\varepsilon$. Доказать предельное равенство $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ означает, что необходимо найти вид зависимости $\delta=\delta(\varepsilon)$ такой, чтобы в определении предела функции из неравенства $|x-a|<\delta$ следовало бы неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$.

В этом определении предполагается, что числа a и b конечны. Если $a=\infty$ или $b=\infty$, то знаки неравенств в определении предела несколько меняются. Например,

1) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$:
$\forall\varepsilon>0\ \exists\Delta=\Delta(\varepsilon)>0,\ \forall x:|x|>\Delta\quad |f(x)-b|<\varepsilon$;

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$:
$\forall\varepsilon>0\ \exists\Delta=\Delta(\varepsilon)>0,\ \ \forall x: x<-\Delta\quad |f(x)-b|<\varepsilon$;

3) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$:
$\forall E>0\ \exists\delta=\delta(\mathrm{E})>0,\ \forall x:|x-a|<\delta\quad f(x)>E$;

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$:
$\forall E>0\ \exists\Delta=\Delta(E)>0,\quad \forall x<-\Delta\quad f(x)<-E$.

Рассмотрим несколько **типовых примеров** доказательства предельных равенств:

1) Доказать, что $\lim\limits_{x\to 2}(2x-1)=3$.

Доказать это предельное равенство означает, что необходимо найти вид зависимости $\delta=\delta(\varepsilon)$ такой, чтобы в определении предела функции из неравенства $|x-2|<\delta$ следовало бы неравенство $|f(x)-b|=|2x-1-3|=2|x-2|<\varepsilon$ или $|x-2|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

Таким образом $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}>0$, при котором из неравенства $|x-2|<\delta$ следует неравенство $|2x-1-3|<\varepsilon$, что нам и требовалось.

2) Доказать, что $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x}=2.$

Необходимо доказать, что

$\forall\varepsilon>0\quad \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0,\ \forall x: |x-4|<\delta\quad \left|\sqrt{x}-2\right|<\varepsilon$. Для определения вида зависимости $\delta=\delta(\varepsilon)$ оценим $\left|\sqrt{x}-2\right|$ – левую часть последнего неравенства в определении предела функции

$$\left|\sqrt{x}-2\right|=\left|\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}+2}\right|=\frac{|x-4|}{\sqrt{x}+2}<\frac{|x-4|}{2}<\frac{\delta}{2}.$$

Теперь, если $\dfrac{\delta}{2}=\varepsilon$, то искомая зависимость $\delta=2\varepsilon$ и предельное равенство доказано.

3) Доказать, что $\lim\limits_{x\to-\infty}(1-2^x)=1.$

Необходимо доказать, что

$\forall\varepsilon>0\quad \exists\Delta=\Delta(\varepsilon)>0,\ \forall x: x<-\Delta\quad \left|1-2^x-1\right|<\varepsilon$. Так как $\forall x<-\Delta\ \left|1-2^x-1\right|=2^x<2^{-\Delta}$, то зависимость Δ от ε определяется равенством $2^{-\Delta}=\varepsilon,\quad \Delta=\log_2\dfrac{1}{\varepsilon}$.

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$. По определению предела это значит

$\forall E>0\quad \exists\Delta=\Delta(E)>0,\ \forall x: x>\Delta\quad x^3>E$ или $\forall x: x>\Delta$

$x^3>\Delta^3=E,\ \Delta=\sqrt[3]{E}$.

<u>Задачи для самостоятельного решения</u>

Доказать по определению предела:

1) $\lim\limits_{x\to 1} x^4 = 1$; 2) $\lim\limits_{x\to a} \sin x = \sin a$; 3) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x}{1+x^2} = 0$;

4) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{(1-x)^2} = +\infty$; 5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-1}{x+1} = -1$; 6) $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt[3]{x^5} = -\infty$.

2.2. Непосредственное вычисление пределов

При вычислении предела функции $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ есть всего две принципиальные возможности: либо $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$, либо при подстановке числа a вместо x в функцию $f(x)$ получаются «неопределенности» вида

$\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, 1^{∞}, 0^{∞}, ∞^{0}, $\infty-\infty$ и др., которые нужно «раскрывать». При вычислении пределов функций часто приходится пользоваться свойствами пределов:

1. $\lim\limits_{x\to a}(\alpha f(x) \pm \beta g(x)) = \alpha \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \beta \lim\limits_{x\to a} g(x) \quad \forall \alpha,\beta \in R$;

2. $\lim\limits_{x\to a}(f(x)g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$;

3. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$, если $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$,

если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$.

Для раскрытия неопределенностей при вычислении пределов функций используются как правила, так и шаблонные пределы, которые нужно знать наизусть.

Следует запомнить следующие пределы:

$$(1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1;\quad (2)\ \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e;\quad (3)\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1;$$

$$(4)\ \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a;\qquad (5)\ \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha;$$

$$(6)\ \lim_{x\to\infty}\frac{\log_a x}{x^b}=0,\ a>1,\ b>0;\quad (7)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^k}{a^x}=0,\ a>1,\ k>0;$$

$$(8)\ \lim_{x\to +0} x^b\cdot\log_a x=0,\ b>0.$$

Вместо x в предельных равенствах (1) – (8), предлагаемых для запоминания, может стоять любое выражение $u(x)$, а x может стремиться к любому числу a, конечному или бесконечному, лишь бы $u(x)\to 0$ при $x\to a$, как в пределах (1)-(5), (8) или $u(x)\to\infty$ при $x\to a$, как в пределах (6),(7).

Решение типовых примеров:

Пример 1. Найти предел $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}(2\sin^2 x+\sin x-1)$.

Подставим вместо x число $\frac{\pi}{6}$ в выражение, стоящее под знаком предела. Получим $2\sin^2\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{6}-1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1=0$, и исходный предел равен нулю.

Иногда для раскрытия неопределенности $\infty-\infty$ нужно выполнить алгебраические преобразования в выражении, стоящем под знаком предела.

Пример 2. Найти предел $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{(x-2)^2}-\dfrac{1}{x^2-3x+2}\right)$.

Приведем разность, стоящую под знаком предела к общему знаменателю

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{1}{x^2-3x+2}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{x-1-x+2}{(x-2)^2(x-1)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^2(x-1)}=\frac{1}{0}=\infty$$

Пример 3. Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+2x^2-x-2}{x^2-3x+2}$.

Подставляя $x=1$ в выражение, стоящее под знаком предела, получим неопределенность $\dfrac{0}{0}$. Для раскрытия этой неопределенности найдем корни числителя и знаменателя. Если многочлен обращается в нуль при $x=1$, то он без остатка делится на $(x-1)$: $x^3+2x^2-x-2=(x-1)(x^2+3x+2)$, а $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$. Тогда $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+2x^2-x-2}{x^2-3x+2}=$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+3x+2)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+3x+2}{x-2}=\frac{6}{-1}=-6.$$

Если $x\to\infty$ и нужно найти предел отношения многочленов, то возникающую при этом неопределенность $\dfrac{\infty}{\infty}$ раскрывают по формуле

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+...+b_m}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0},\ m=n,\\ \infty,\ \ m<n,.\\ 0,\ \ m>n\end{cases}\qquad \textbf{(*)}$$

Скажем, предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x^2-1}{x^2-2x+3}=\infty$, а предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-x-2}{x^2-3x+2}=2$.

2.3. Пределы выражений, содержащих корни

Правило **(*)** работает и в том случае, когда в числителе и знаменателе дроби, вычисление предела которой при $x\to\infty$ приводит к неопределенности $\dfrac{\infty}{\infty}$, могут стоять корни разных степеней.

Пример 4. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x-1}}{x+\sqrt{x^2-4x+3}}$.

Числитель последней дроби стремится к ∞ с такой же скоростью, как $x^{\frac{1}{3}}$. Знаменатель – со скоростью x.Так как $\dfrac{1}{3}<1$, то предел дроби равен 0.

Часто при раскрытии неопределенностей $\dfrac{0}{0}$, $\infty-\infty$ при вычислении пределов иррациональных функций приходится умножать и делить выражение, стоящее под знаком предела, на некую функцию. При этом часто оказывается полезной общая формула $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+...+b^{n-1})$.

Пример 5. Найти предел $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{16-x^2}{\sqrt{5+x}-3}$.

При вычислении этого предела для раскрытия неопределенности $\dfrac{0}{0}$ необходимо умножить одновременно числитель и знаменатель дроби на сумму $\sqrt{5+x}+3$, сопряженную разности этих слагаемых. Произведение суммы оснований на разность оснований даст нам разность квадратов этих оснований в знаменателе

$$\lim_{x\to 4}\frac{16-x^2}{\sqrt{5+x}-3}=\lim_{x\to 4}\frac{(16-x^2)(\sqrt{5+x}+3)}{(\sqrt{5+x}-3)(\sqrt{5+x}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)(4+x)(\sqrt{5+x}+3)}{5+x-9}==-\lim_{x\to 4}(x+4)(\sqrt{5+x}+3)=-48.$$

Пример 6. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-x)$.

Для раскрытия неопределенности $\infty-\infty$ необходимо умножить и разделить разность, стоящую под знаком предела, на неполный квадрат суммы $\sqrt[3]{x^3+x^2+1}$ и x, дополнив разность этих оснований до разности их кубов.

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-x)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-x)(\sqrt[3]{(x^3+x^2+1)^2}+x\cdot\sqrt[3]{x^3+x^2+1}+x^2)}{\sqrt[3]{(x^3+x^2+1)^2}+x\cdot\sqrt[3]{x^3+x^2+1}+x^2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2+1-x^3}{\sqrt[3]{(x^3+x^2+1)^2}+x\cdot\sqrt[3]{x^3+x^2+1}+x^2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt[3]{(x^3+x^2+1)^2}+x\cdot\sqrt[3]{x^3+x^2+1}+x^2}=\frac{1}{3}$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{1}{x^2-4}\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+2}\right)$; 4) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-8x+15}{x^3-27}$;

5) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-4x^2-3x+18}{x^3-5x^2+3x+9}$ (Ответ: $\dfrac{5}{4}$);

6) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-x^3+x^2+x-2}{x^4+x^3+x^2-3}$ (Ответ: $\dfrac{4}{9}$);

7) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^6-2x^4+x^3+x+2}{x^7+4x^5-x^2+3x}$; 8) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^4-5x^3+4x^2+x-7}{x^4+6x^3+9x^2-x+3}$;

9) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3+x^2+x-2}{x^2-3}$;

10) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{(x-1)^2(x+2)^7(x+15)}{(2x^2-3)^5}$ (Ответ: $\dfrac{1}{32}$);

11) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x}$; 12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$;

13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}-1}{x^2}$; 14) $\lim\limits_{x\to \infty}(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3})$;

15) $\lim\limits_{x\to \infty}((x+1)^{\frac{2}{3}}-(x-1)^{\frac{2}{3}})$.

2.4. Вычисление пределов с помощью первого замечательного предела

Рассмотрим пределы, вычисляемые с помощью обобщения **1-го замечательного предела** $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin u(x)}{u(x)}=1$ в случае, когда $u(x)\to 0$ при $x\to a$.

Решение типовых примеров:

Пример 1. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{tg\,5x}$.

Воспользуемся тем, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}=1$. Заменив $tg\,5x=\dfrac{\sin 5x}{\cos 5x}$, получим

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{tg\,5x}=\dfrac{3}{5}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\sin 5x}\cdot\cos 5x=\dfrac{3}{5}$, так как

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\sin 5x}=\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}}=1$, а $\lim\limits_{x\to 0}\cos 5x=1$.

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos 7x}{x^2}$.

Преобразуем функцию, стоящую под знаком предела

$$\frac{\cos 3x-\cos 7x}{x^2}=\frac{-2\sin 5x\cdot\sin(-2x)}{x^2}=$$

$=20\dfrac{\sin 5x}{5x}\dfrac{\sin 2x}{2x}$. Используя 1-ый замечательный предел, получим $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos 7x}{x^2}=20$.

Пример 3. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg 3x}{x}$.

Введем переменную $t = arctg 3x$. При $x \to 0 \quad t \to 0$ и $x = \frac{1}{3} tg\, t$. Тогда $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg 3x}{x} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{3t}{tg\, t} = 3$, как в примере 1.

Пример 4. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2 \sin\frac{1}{x^2})$. Перейдем к новой переменной $t = \frac{1}{x^2}$. При $x \to \infty \quad t \to 0$ и $x^2 = \frac{1}{t}$. Тогда $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2 \sin\frac{1}{x^2}) = \lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$.

<u>Задачи для самостоятельного решения</u>

Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{7x}{\arcsin 3x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sin(x-2)}{x^3-8}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x - \sin 2x}{\sin x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{x\sin 2x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg\, x - \sin x}{x^3}$; 6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{(\frac{\pi}{2}-x)^2}$.

2.5. Вычисление пределов на основе второго замечательного предела

Большой класс пределов вычисляется на основе обобщения **2-го замечательного предела** (1) $\lim\limits_{\substack{x\to a,\\ u(x)\to 0}}(1+u(x))^{\frac{1}{u(x)}} = e$

и получающихся на его основе пределов:

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to a,\\ u(x)\to 0}} \dfrac{\ln(1+u(x))}{u(x)} = 1$; (3) $\lim\limits_{\substack{x\to a,\\ u(x)\to 0}} \dfrac{a^{u(x)}-1}{u(x)} = \ln a$,

(4) $\lim\limits_{\substack{x\to a,\\ u(x)\to 0}} \dfrac{(1+u(x))^{\alpha}-1}{u(x)} = \alpha$.

Решение типовых примеров:

Пример 1. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^{x}$.

Непосредственное вычисление этого предела приводит к неопределенности «1^{∞}», которая всегда раскрывается с помощью 2-го замечательного предела. В этом случае в формуле (1) $u(x) = -\dfrac{3}{x}$, и приводя исходный предел к шаблонному виду, получим $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+(-\dfrac{3}{x})\right)^{-\frac{x}{3}(-3)}$. Так как $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+(-\dfrac{3}{x})\right)^{-\frac{x}{3}} = e$, то исходный предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^{x} = e^{-3}$.

Пример 2. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^{\sqrt{x}}$. Чтобы найти $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}$, когда при $x\to a$ $f(x)\to 1$, $g(x)\to\infty$, используют правило $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\cdot(f(x)-1)}$. Тогда при

$g(x)=\sqrt{x}$, $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}$ исходный предел вычисляется так

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^{\sqrt{x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x}\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}(2x-1)}{x^2-4x+2}}=e^0=1.$$

Пример 3. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}(\cos\pi x)^{\frac{1}{x\sin\pi x}}$.

Применяя правило предыдущего примера, получим

$$\lim_{x\to 0}(\cos\pi x)^{\frac{1}{x\sin\pi x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos\pi x-1}{x\sin\pi x}}=e^{-\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{\pi x}{2}}{2x\sin\frac{\pi x}{2}\cdot\cos\frac{\pi x}{2}}}=e^{-\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg\frac{\pi x}{2}}{\frac{\pi x}{2}}\cdot\frac{\pi}{2}}=e^{-\frac{\pi}{2}}$$
.

Пример 4. Найти предел $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}$.

Воспользуемся формулой для логарифма частного и перепишем исходный предел так

$$\lim_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}=\lim_{x\to e}\frac{\ln x-\ln e}{e\left(\frac{x}{e}-1\right)}=\lim_{x\to e}\frac{\ln\left(1+(\frac{x}{e}-1)\right)}{e\left(\frac{x}{e}-1\right)}$$ и после замены

$y=\dfrac{x}{e}-1$ получим $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}==\dfrac{1}{e}\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\ln(1+y)}{y}=\dfrac{1}{e}$.

Пример 5. Найти предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+2^x)\ln(1+\frac{3}{x})$.

При $x\to+\infty$ $2^x\to+\infty$, поэтому выполним преобразования $\ln(1+2^x)=\ln 2^x(2^{-x}+1)=x\ln 2+\ln(1+2^{-x})$. Тогда исходный предел перепишется так

$$\lim_{x\to+\infty}\ln(1+2^x)\ln(1+\frac{3}{x})=\ln 2\cdot\lim_{x\to+\infty}x\ln(1+\frac{3}{x})+\lim_{x\to+\infty}\ln(1+2^{-x})\ln(1+\frac{3}{x})$$

. Так как второй предел в последнем выражении равен нулю, то получается

$$\lim_{x\to+\infty}\ln(1+2^x)\ln(1+\frac{3}{x})=\ln 2\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{3\ln(1+\frac{3}{x})}{\frac{3}{x}}=3\ln 2.$$

Пример 6. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x\sin x)^4-1}{x^4-x^2}$.

В шаблонном пределе (4) $u(x)=x\sin x$. Умножая и деля на эту функцию дробь, стоящую под знаком предела, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x\sin x)^4-1}{x^4-x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x\sin x)^4-1}{x\sin x}\frac{x\sin x}{x^2(x^2-1)}=\frac{4}{-1}=-4.$$

Пример 7. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\ln(1+x)-\sin\ln x)$.

Применяя тригонометрическую формулу

$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$, получим

$$\sin\ln(1+x)-\sin\ln x = 2\sin\frac{\ln(x+1)-\ln x}{2}\cos\frac{\ln(x+1)+\ln x}{2} =$$

$$2\sin\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{2}\cos\frac{\ln x(x+1)}{2}.$$

Тогда исходный предел

$$\lim_{x\to+\infty}(\sin\ln(1+x)-\sin\ln x) =$$

$$= 2\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{2}}{\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{2}}\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{2\frac{1}{x}}\frac{1}{x}\cos\frac{\ln x(x+1)}{2} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cos\frac{\ln x(x+1)}{2}, \text{ так как } \frac{1}{x}\to 0,\ \ln(1+\frac{1}{x})\to 0.$$

Известно, что произведение бесконечно малой величины $\frac{1}{x}$ на ограниченную величину $\cos\frac{\ln x(x+1)}{2}$ есть бесконечно малая величина, поэтому окончательно получаем

$$\lim_{x\to+\infty}(\sin\ln(1+x)-\sin\ln x) = 0.$$

Пример 8. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+xe^x)}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}$.

Преобразуем логарифм, стоящий в знаменателе,

$$\ln(x+\sqrt{1+x^2})=\ln\left(\sqrt{1+x^2}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+1\right)\right)=$$

$$=\ln\sqrt{1+x^2}+\ln\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+1\right)=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\ln\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+1\right).$$

Тогда исходный предел можно записать в виде

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+xe^x)}{xe^x}\frac{xe^x}{\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\ln\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+1\right)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{\frac{\ln(1+x^2)}{2x}+\frac{1}{x}\ln\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+1\right)}=1,\text{ так как }\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+xe^x)}{xe^x}=1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{2x}=0,\quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+1\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+1\right)}{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}\sqrt{1+x^2}=1.$$

Пример 9. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(1+x^3)}{x}$.

При $x \to \infty$ $\ln(1+x^3) \to \infty$ медленнее, чем x (см. предельное равенство (6) на стр. 12). Поэтому данный предел равен нулю.

Пример 10. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty} x e^{-x}$.

Согласно предельному равенству (7) на стр. 12 этот предел равен нулю, так как $e^{-x} \to 0$ быстрее, чем $x \to \infty$.

<u>Задачи для самостоятельного решения</u>

Найти пределы: 1) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[x]{1+4x}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}$; 3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x^3-3x+3)}{x-1}$, (0); 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 3x}-e^{\sin x}}{tg\,2x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x^2+e^x)}{\ln(x^4+e^{2x})}$, $(\dfrac{1}{2})$; 7) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(x^2+e^x)}{\ln(x^4+e^{2x})}$, $(\dfrac{1}{2})$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\sin x\cos 2x}{1+\sin x\cos 3x}\right)^{ctg^3 x}$, (e^5); 9) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2(3^{\frac{1}{x-1}}-3^{\frac{1}{x+1}})$; 10) $\lim\limits_{x\to 0}(6-\dfrac{5}{\cos x})^{ctg^2 x}$, $(e^{-\frac{5}{2}})$; 11) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}(\arcsin x+\arccos x)^{\frac{1}{x}}$.

III. Выделение главной части функции в малой окрестности заданной точки

3.1. Выделение главной части функции

Определение. Величина $C(x-x_0)^k$ называется **главной частью функции** $f(x)$ **в малой окрестности точки** x_0**,** если

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{(x-x_0)^k}=C\text{ , } C\neq 0, |C|<\infty\text{ .}$$

Если $x_0=\infty$, то главная часть $f(x)$ в виде $\dfrac{C}{x^k}$ определяется предельным равенством $\lim\limits_{x\to\infty}x^k f(x)=C$**.** При выделении главной части **бесконечно большой функции** $f(x)$ в окрестности конечной точки x_0 эту главную часть ищут в виде $\dfrac{C}{(x-x_0)^k}$, в окрестности $x_0=\infty$ - в виде Cx^k.

Главная часть $f(x)$ в малой окрестности точки x_0 ведет себя, как $f(x)$**,** т.е. $f(x)\sim C(x-x_0)^k$

при $x\to x_0$. На практике часто удобнее работать с главной частью функции, чем с ней самой, особенно, если функция сложная и громоздкая. Выделить главную часть функции $f(x)$ - значит найти для этой функции значения C и k, указанные в определении. Сначала подбирают значение k так, чтобы предел в определении главной части был отличным от нуля и конечным. А уже потом находят и сам предел *C*.

Пример 1.

1. Выделить главную часть функции $f(x)=\sqrt{1+x}-1$ при $x\to 0$.

Воспользуемся известным пределом $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\dfrac{1}{2}$. Согласно определению главной части функции $k=1,\ C=\dfrac{1}{2}$, главная часть функции $f(x)$ равна $\dfrac{x}{2}$.

Пример 2. Выделить главную часть функции

$$f(x)=\frac{\sin^3(x-5)}{x^2-6x+5} \text{ при } x\to 5.$$

Запишем предел $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sin^3(x-5)}{(x^2-6x+5)(x-5)^k}=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sin^3(x-5)}{(x-1)(x-5)^{k+1}}$.

Благодаря первому замечательному пределу

$\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sin^3(x-5)}{(x-5)^3}=1$. Поэтому при $k=2$

$\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sin^3(x-5)}{(x-1)(x-5)^{k+1}}=\dfrac{1}{4}$ и главная часть функции

$$f(x)=\frac{\sin^3(x-5)}{x^2-6x+5} \text{ при } x\to 5 \text{ равна } 4(x-5)^2.$$

Пример 3. Выделить главную часть функции

$$f(x)=\frac{arctg\,\frac{3}{2}x^2}{e^{-5x^3}-1} \text{ при } x\to 0.$$

Согласно определению главной части функции

$$\lim_{x\to 0}\frac{arctg(\frac{3}{2}x^3)}{(e^{-5x^2}-1)\,x^k}=-\frac{3}{10}\lim_{x\to 0}\frac{arctg(\frac{3}{2}x^3)(-5x^2)}{\frac{3}{2}x^3(e^{-5x^2}-1)\,x^{k-1}}=-\frac{3}{10} \text{ при } k=1,$$

так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg(\frac{3}{2}x^3)}{\frac{3}{2}x^3}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-5x^2}{e^{-5x^2}-1}=1$ (см. пример 3 на стр. 18 и предельное равенство (4) на стр. 12. Следовательно, главная часть данной функции при $x\to 0$ равна $-\dfrac{3}{10}x$.

Пример 4. Выделить главную часть бесконечно малой функции $f(x)=\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$ при $x\to+\infty$.

Посмотрим, при каком значении k предел

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\frac{1}{x^k}}=\lim_{x\to\infty}x^k(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x})$$

будет равен конечной и отличной от нуля константе.

Преобразуем этот предел к виду

$$\lim_{x\to\infty} x^k(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}-(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}))=$$

$$=\lim_{x\to\infty} x^k\left(\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}-\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty} x^k\,\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+2}}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}=$$

$$=\lim_{x\to\infty} x^k\,\frac{-2}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x}+\sqrt{x+2})}.$$

Последний предел будет равен $-\frac{1}{4}$ при $k=\frac{3}{2}$, следовательно, главная часть функции $\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$ при $x\to+\infty$ – это $-\frac{1}{4}x^{\frac{3}{2}}$.

Пример 5. Выделить главную часть функции $f(x)=\frac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}}$ при $x\to 1$.

Для выделения главной части этой бесконечно большой функции при $x\to 1$ найдем предел

$$\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}}}{\dfrac{1}{(x-1)^k}}=-\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)^k}{\sqrt[3]{x^3-1}}=-\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)^k}{\sqrt[3]{x-1}\,\sqrt[3]{x^2+x+1}}=-\frac{1}{\sqrt[3]{3}},$$

если $k=\frac{1}{3}$. Поэтому главная часть бесконечно большой

функции $f(x)=\frac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}}$ при $x\to 1$ равна $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}x^{\frac{1}{3}}$.

3.2. Вычисление пределов функций с помощью выделения главной части

Выделение главной части часто применяется при вычислении пределов функций. При этом следует помнить, что заменять функции их главными частями под знаком предела можно в произведениях и частных этих функций. Но **категорически запрещается заменять слагаемые в сумме, все сразу или некоторые, их главными частями**, так как это может привести к ошибкам в вычислении предела.

Пример 6. При вычислении предела $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+tgx}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^3 x}}$, воспользовавшись тем, что при $x\to 0$ $\sin x\sim tgx\sim x$ и заменив $\sin x$ и tgx на x, получим

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+tgx}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^3 x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{1+x}\right)^{\frac{1}{x^3}}=\lim\limits_{x\to 0}1^{\frac{1}{x^3}}=1$, и это будет неправильно. Правильно – свести этот предел ко второму замечательному

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+tgx}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^3 x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sin^3 x}\left(\frac{1+tgx}{1+\sin x}-1\right)} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sin^3 x}\left(\frac{tgx-\sin x}{1+\sin x}\right)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}\frac{1}{(1+\sin x)\cos x}} = e^{\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin^2 x}} = \sqrt{e}\,.$$

Пример 7. Если при вычислении предела

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x+x^2)}{x^2}$ мы заменим оба логарифма в числителе на их главные части: при $x\to 0$ $\ln(1+x+x^2)\sim x$ и $\ln(1-x+x^2)$ ~ - x, то получится предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x}{x^2}=\infty$. И это будет неправильно. А вот если мы сначала воспользуемся свойством логарифма

$\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x+x^2)=\ln(1+x^2+x^4)$ и заменим весь числитель на его главную часть x^2, то получим, что исходный предел будет равен пределу $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x^2}=1$, и это будет правильно.

Пример 7. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\,(e^{4x}-e^{2x})}{tgx-\sin x}$.

Найдем главные части числителя и знаменателя.

Так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-e^{2x}}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}(e^{2x}-1)}{2x}=1$, то числитель $x^2(e^{4x}-e^{2x})\sim 2x^3$ при $x\to 0$. Так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}=\dfrac{1}{2}$, то $tgx-\sin x\sim\dfrac{x^3}{2}$ при $x\to 0$. Тогда $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2(e^{4x}-e^{2x})}{tgx-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^3}{\dfrac{x^3}{2}}=4$.

Литература

Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу.

Все издания с 1967 года.

СОДЕРЖАНИЕ

Издание подготовлено в авторской редакции

Отпечатано на участке цифровой печати
Издательского Дома Томского государственного университета

Заказ № 979 от «21» апреля 2015 г. Тираж 100 экз.