Лекции и практикум по аналитической геометрии
Учебное пособие

Предисловие

Настоящее учебное пособие по аналитической геометрии предназначено для лиц, начинающих изучение этого предмета. Предполагаются известными только основные понятия и теоремы школьного курса геометрии и алгебры. Также требуется знание графиков основных элементарных функций и школьных методов построения графиков функций.

Курс аналитической геометрии, согласно ГОС, должен быть прослушан на первом и втором семестрах. Постоянно приходится сталкиваться с тем, что даже способные первокурсники не обладают навыками к математическим преобразованиям и рассуждениям и не могут самостоятельно восполнить те незначительные логические пропуски, которые возникают при изложении, ориентированном на хорошо подготовленных школой студентов. Они просто не знают, как это делается, не знают, что можно делать, а чего нельзя и почему. Авторы стремятся избежать таких ситуаций и оставляют студентам на самостоятельное домысливание меньше вопросов, чем это обычно делается. Изложение всюду подробное, с доказательствами и замкнутое (то есть не требует обращения к другим учебным пособиям). Приведено много примеров, все задачи снабжены решениями. При этом разобраны основные типы стандартных задач, требующих для своего решения применения одной или двух формул. Те задачи, которые для своего решения требуют дополнительных рассуждений, снабжены пояснениями, показывающими, почему выбранная последовательность действий приводит к нужному результату, опираясь на геометрическую наглядность и здравый смысл. Опыт показывает, что результаты решения задач лучше запоминаются, если они подкреплены такими пояснениями. Авторы не стремились написать самый короткий текст на заданную тему. Мы сознательно неоднократно возвращаемся к освещению важных вопросов с разных сторон.

Пособие состоит из двух частей. В первой части мы рассматриваем простейшие геометрические объекты, такие как векторы, прямые и плоскости и ставим им в соответствие их уравнения. При этом мы прослеживаем связи между коэффициентами уравнений и геометрическими свойствами этих прямых и плоскостей. Основным вспомогательным средством при этом являются векторы. Все необходимые сведения из алгебры (определители второго и третьего порядков, системы линейных уравнений с двумя и тремя неизвестными, действия с матрицами) содержатся в первой главе.

Во второй части мы рассматриваем более сложные геометрические объекты и их свойства: окружность, эллипс, гиперболу, параболу на плоскости и эллипсоид, различные гиперболоиды, параболоиды, конусы, цилиндры в пространстве. В начале второй части (глава 5) также приведены с доказательствами необходимые сведения из алгебры (ортогональные матрицы второго и третьего порядков, собственные числа и собственные столбцы матрицы, приведение квадратичных форм от двух и трёх переменных к каноническому виду с помощью ортогональных преобразований).

Читатель, имеющий достаточную алгебраическую подготовку, может пропустить главы 1, 5.

При первом чтении можно пропустить также §§ 4, 5 главы 6, эти параграфы выделены для удобства читателя мелким шрифтом.

Слова «линия» и «кривая» на плоскости в этом пособии употребляются как синонимы и обозначают множество точек, состоящее из одного или нескольких графиков элементарных функций. Мы избегаем определения кривой на плоскости и в пространстве как непрерывного отображения отрезка в плоскость или в пространство соответственно.

Под линией (или кривой) в пространстве мы иногда понимаем пересечение двух поверхностей, а иногда (если в пространстве введены координаты) как множество точек $M(x, y, z)$, координаты которых являются элементарными функциями от некоторого параметра "t", $t \in (a, b)$.

При написании пособия использован опыт многолетней работы на естественнонаучных факультетах Санкт-Петербургского государственного университета и Санкт-Петербургского государственного Политехнического университета.

Основу материала составляют лекции, которые один из авторов читал на физико-механическом факультете СПбГПУ.

Авторы благодарят профессора А.П. Аксенова, инициировавшего появление этого пособия, профессора Ю.Д. Максимова, внимательно и доброжелательно просмотревшего первоначальный текст и сделавшего ценные замечания для его улучшения, а также студентов М. Божокина и А. Павлова, которые предоставили подробные записи лекций.

Оглавление

Введение

Наука, которая сейчас называется «аналитическая геометрия», появилась в 17 веке в трудах двух крупнейших французских математиков того времени Пьера Ферма (1601– 1664) и Рене Декарта (1596– 1650).

В 1637 году вышла книга Р. Декарта «Геометрия» в трёх томах. В ней был сформулирован метод координат (сейчас эти координаты называются декартовыми) и приведены многочисленные примеры его применения. Благодаря доступности изложения книга получила широкое распространение, гораздо большее, чем рукописные работы П. Ферма.

Термин «аналитическая геометрия» появился в 18 веке. Тогда им обозначали часть геометрии, в которой для выяснения свойств геометрических объектов применяли алгебраические методы. Позже под аналитической геометрией стали понимать часть геометрии, в которой свойства геометрических фигур чисто аналитически (то есть не только с помощью алгебры) выводятся из нескольких принципов.

Метод координат позволяет сопоставить геометрическому объекту некоторое аналитическое выражение, полностью его описывающее (см. § 5 гл. 3 «Уравнение линии на плоскости и в пространстве»). Тем самым исследование геометрических свойств сводится к исследованию этих аналитических выражений средствами алгебры и математического анализа.

Часть1

Глава 1. Вспомогательные сведения из алгебры

§1. Системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Определители 2-го порядка

Если дано уравнение $ax+by=f$ с двумя неизвестными x и y, то решением этого уравнения называется пара чисел $x = x_0, y = y_0$, которые при подстановке превращают уравнение в верное числовое равенство $ax_0 + by_0 = f$.

Рассмотрим, например, уравнение

$$2x + 3y = 4$$

Если вместо x взять любое число $x = x_0$, а вместо у взять $y_0 = \frac{1}{3}(4 - 2x_0)$, полученное разрешением данного уравнения относительно y, то пара чисел (x_0, y_0) является решением этого уравнения при любом x_0 (в этом легко убедиться непосредственно).

Видим, что данное уравнение имеет бесчисленное множество решений. Вообще, если хоть один из коэффициентов уравнения $ax + by = f$ отличен от нуля, то уравнение имеет бесконечно много решений.

Не следует думать, что любое уравнение $ax + by = f$ имеет всегда решение. Например, уравнение $0x + 0y = 1$ ни при каких $x = x_0$ и $y = y_0$ не обращается в верное равенство.

$\boldsymbol{n}°\mathbf{1}$. Допустим, даны два уравнения $ax + by = f_1$ и $cx + dy = f_2$ с двумя неизвестными x и y. Каждое из этих уравнений имеет бесконечно много решений или не имеет их совсем. Спросим себя, имеют ли эти уравнения общие решения? Как найти все эти общие решения?

Мы ответим на эти вопросы, если решим систему уравнений

$$\begin{cases} ax + by = f_1 \\ cx + dy = f_2 \end{cases}$$

Дадим точные определения.

Определение 1. Системой двух линейных уравнений с двумя неизвестными называется запись вида

$$\begin{cases} ax + by = f_1 \\ cx + dy = f_2 \end{cases}, \qquad (1)$$

где a, b, c, d, f_1, f_2 –данные числа, x, y – неизвестные величины (буквы). Числа a, b, c, d называются коэффициентами при неизвестных, f_1, f_2 называются свободными членами.

Коэффициенты при неизвестных расположим в виде квадратной таблицы

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A$$

и назовем матрицей коэффициентов системы (1). Числа a, b, c, d называются элементами матрицы A.

Определение 2. Решением системы (1) называется упорядоченный набор (x_0, y_0) двух чисел, таких, что при $x = x_0, y = y_0$

одновременно выполнены два числовых равенства

$$ax_0 + by_0 = f_1$$
$$cx_0 + dy_0 = f_2$$

Пишут также, что $x = x_0, y = y_0$ является решением (1).

Если система имеет хотя бы одно решение, то она называется совместной, если система не имеет решений, то она называется несовместной.

Определение 3. Решить систему (1) – это значит найти все решения этой системы или убедиться, что она несовместна.

Примеры

1. Система $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + 3y = 3 \end{cases}$

имеет решение x=–6, y=5, т.к. при подстановке этих чисел в систему получаются верные равенства.

2. Система $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$ не имеет решений, т.к. сумма двух чисел не может одновременно равняться 1 и 2.

3. Система $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$

имеет бесконечно много решений. Действительно, какое бы число α мы не взяли, пара x=α, y=1-α является решением.

Определение 4. Две системы называются равносильными, если каждое решение первой системы является решением второй, и каждое решение второй системы является решением первой.

Две несовместные системы считаются равносильными по определению.

Замечание. Понятие равносильности двух систем распространяется на системы с любым числом уравнений и любым числом неизвестных.

$\boldsymbol{n}$**°2**. Мы сейчас дадим простое достаточное условие того, что система (1) имеет единственное решение. Одновременно мы получим формулы для нахождения этого решения.

Теорема 1. Если коэффициенты при неизвестных системы (1) удовлетворяют условию

$$ad - bc \neq 0, \qquad (2)$$

то система (1) имеет единственное решение (x_0, y_0), при этом

$$x_0 = \frac{df_1 - bf_2}{ad - bc} \quad y_0 = \frac{af_2 - cf_1}{ad - bc} \qquad (3)$$

Доказательство состоит из двух этапов.

На первом этапе проверим, что если у системы есть какое-то решение (x_0, y_0) и выполнено (2), то числа x_0 и y_0 обязательно вычисляются по формулам (3).

Действительно, пусть у системы (1) есть решение $x = x_0, y = y_0$. Это значит, что выполнены два числовых равенства

$$ax_0 + by_0 = f_1$$
$$cx_0 + dy_0 = f_2$$

Умножим первое из них на "d", а второе – на "$-b$" и сложим. Получим верное числовое равенство

$$(ad - bc)x_0 = df_1 - bf_2 \qquad (4)$$

Умножим далее первое из равенств (4) на "$-c$", а второе — на "a" и сложим. Получим верное числовое равенство

$$(ad - bc)y_0 = af_2 - cf_1 \qquad (5)$$

По условию теоремы $ad - bc \neq 0$. Поэтому из (4) и (5) получаем

$$x_0 = \frac{df_1 - bf_2}{ad - bc}$$
$$y_0 = \frac{af_2 - cf_1}{ad - bc}$$

Таким образом, если у системы (1) есть решение, то его компоненты обязательно находятся по формулам (3).

На втором этапе убедимся в том, что числа x_0, y_0, найденные по формулам (3), действительно образуют решение системы (1).

Для этого подставим их в систему и проверим, что получаются верные числовые равенства.

$$a\frac{df_1 - bf_2}{ad - bc} + b\frac{af_2 - cf_1}{ad - bc} = \frac{adf_1 - abf_2 + abf_2 - bcf_1}{ad - bc} = \frac{(ad - bc)f_1}{ad - bc} = f_1$$

$$c\frac{df_1 - bf_2}{ad - bc} + d\frac{af_2 - cf_1}{ad - bc} = \frac{cdf_1 - bcf_2 + adf_2 - cdf_1}{ad - dc} = \frac{(ad - bc)f_2}{ad - dc} = f_2$$

Теорема доказана.

Число $ad - bc$, стоящее в знаменателях формул (3), называется определителем матрицы A (или определителем 2-го порядка) и обозначается

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \qquad (6)$$

Таким образом, чтобы найти определитель матрицы A, надо взять произведение чисел, стоящих на главной диагонали вычесть из него произведение чисел, стоящих на другой диагонали.

Примеры.

1. Вычислить

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$$

2. Вычислить

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-7) - (-3) \cdot 5 = 1$$

Правило, по которому вычисляется определитель 2-го порядка, можно схематически изобразить следующим образом (см. рис.1).

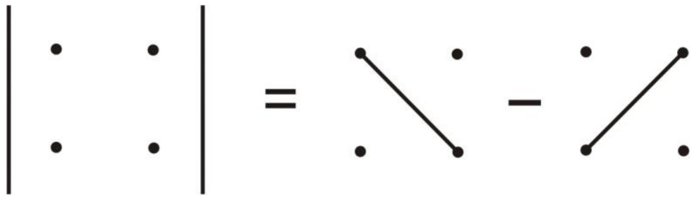


Рис.1 Правило вычисления определителя 2-го порядка.

Здесь отрезками соединены перемножаемые числа.

Вернемся к формулам (3) для решения системы (1). Заметим, что числители в этих формулах можно записать, используя определитель. Действительно,

$$df_1 - bf_2 = \begin{vmatrix} f_1 & b \\ f_2 & d \end{vmatrix} ; \quad af_2 - cf_1 = \begin{vmatrix} a & f_1 \\ c & f_2 \end{vmatrix}$$

Видим, что первый (соответственно, второй) из этих определителей получается из определителя

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

заменой первого (соответственно, второго) столбца на столбец из свободных членов. Теперь можно переформулировать Теорему 1.

Теорема 1'. Если коэффициенты при неизвестных системы

$$\begin{cases} ax + by = f_1 \\ cx + dy = f_2 \end{cases} \qquad (1)$$

удовлетворяют условию

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

то система (1) имеет единственное решение (x_0, y_0). При этом

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} f_1 & b \\ f_2 & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}\ ; y_0 = \frac{\begin{vmatrix} a & f_1 \\ c & f_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \qquad (7)$$

Пример 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x - 8y = 7 \\ 4x - 5y = 9 \end{cases}$$

Составляем матрицу из коэффициентов при неизвестных

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$$

Находим ее определитель

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -8 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-5) - (-8) \cdot 4 = 17$$

Видим, что $|A| \neq 0$,следовательно, можно применить Т1. Вычисляем определители, стоящие в числителях формул (7).

$$\begin{vmatrix} 7 & -8 \\ 9 & -5 \end{vmatrix} = -35 + 72 = 37$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = 27 - 28 = -1$$

Значит, $x = 37/17,\ y = -1/17$ – решение данной системы.

$\boldsymbol{n^0 3}$. В этом пункте дано исследование системы (1) в общем виде.

Лемма 1.

Если $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$, то коэффициенты при соответствующих неизвестных системы пропорциональны: $a = kc,\ b = kd$ (или $c = k'a, d = k'b$).

Доказательство.

1. Сначала предположим, что $c \neq 0, d \neq 0$. По условию $ad - bc = 0, ad = bc$. Делим обе части на cd, получим $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = k$.

2. Если предположить, что $c = 0, d \neq 0$, то $ad - bc = ad = 0$ и, следовательно, $a = 0$. Отсюда, обозначая $\frac{b}{d} = k$, получаем $b = kd, a = kc$. Аналогично, в случае $c \neq 0,\ d = 0$, получаем $a = kc, b = kd$, где $k = \frac{a}{c}$ при любых a, b.

3. Случай $c = 0, d = 0$ дает $k = 0$ и $c = ka, d = kb$. Лемма доказана.

Лемма 2. Если для системы (1) выполнено

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0,$$

то система (1) либо несовместна, либо имеет бесконечно много решений.

Доказательство.

Если $c \neq 0$ и $d \neq 0$, то, как показано в Лемме1, $a = kc, b = kd$ и систему (1) можно записать в виде

$$\begin{cases} kcx + kdy = f_1 \\ cx + dy = f_2 \end{cases} \qquad (8)$$

1. При $k = 0$ система имеет вид

$$\begin{cases} 0 \cdot x + 0 \cdot y = f_1 \\ cx + dy = f_2 \end{cases}$$

Если $f_1 \neq 0$, то первое уравнение не имеет решений. Значит, в этом случае система (8) несовместна. Если $f_1 = 0$, то при любом x_0 пара чисел $x = x_0$, $y = \frac{1}{d}(f_2 - cx_0)$ является решением первого и второго уравнений одновременно. Таким образом, в этом случае система имеет бесконечно много решений.

2. Пусть $k \neq 0$.Если $f_1 \neq kf_2$, то система (8) несовместна. Действительно, пусть (x_0, y_0) — решение второго уравнения. Тогда $cx_0 + dy_0 = f_2$ – верное числовое равенство. Умножая обе его части на $k \neq 0$, получим

$$kcx_0 + kdy_0 = kf_2 \neq f_1,$$

т.е. (x_0, y_0) не является решением первого уравнения. Если $f_1 = kf_2$, то система (8) имеет бесконечно много решений. Действительно, пусть (x_0, y_0) – решение второго уравнения. Тогда $cx_0 + dy_0 = f_2$ – верное числовое равенство. Умножим обе его части на $k \neq 0$. Получим верное числовое равенство $kcx_0 + kdy_0 = kf_2 = f_1$. Значит, (x_0, y_0) является решением первого уравнения. Поэтому, (x_0, y_0) является решением системы.

3. Остальные случаи, когда хоть один из коэффициентов второго уравнения равен нулю, разбираются аналогично.

Лемма 2 доказана.

Сформулируем итоги нашего исследования в виде теоремы.

Теорема 2. Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} ax + by = f_1 \\ cx + dy = f_2 \end{cases} \qquad (1)$$

Тогда

1. Если $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$, то система имеет единственное решение (x_0, y_0) и при этом

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} f_1 & b \\ f_2 & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}, \quad y_0 = \frac{\begin{vmatrix} a & f_1 \\ c & f_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}.$$

2. Если $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$, то коэффициенты при неизвестных одного из уравнений системы пропорциональны соответствующим коэффициентам при неизвестных другого уравнения. Если при этом свободные члены уравнений находятся в том же соотношении, что и коэффициенты при неизвестных, то система (1) имеет бесчисленное множество решений. Если свободные члены уравнений не находятся в том же соотношении, что и коэффициенты при неизвестных, то система (1) несовместна.

Следствие. Система $\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases}$ имеет бесчисленное множество решений тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$$

$\boldsymbol{n}°\mathbf{4}$ Пусть $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ – произвольная квадратная матрица 2-го порядка и

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

– ее определитель.

Здесь мы приведем несколько свойств определителя 2-го порядка.

1. Определитель с равными строками равен нулю.

2. Если строки определителя пропорциональны, то определитель равен нулю. Обратно: если определитель 2-го порядка равен нулю, то его строки пропорциональны.

3. Если в определителе поменять местами две строки, то определитель поменяет знак.

4. Из любой строки определителя можно вынести общий множитель.

5. Определитель не изменится, если к какой-либо строке прибавить соответствующие элементы другой строки, умноженные на некоторое число.

6. Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{OA} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{OB} = c\boldsymbol{i} + d\boldsymbol{j}$, равна абсолютной величине определителя

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}, \quad \text{т.е.} \quad S_{OACB} = |ad - bc| \text{ (см. рис. 2).}$$

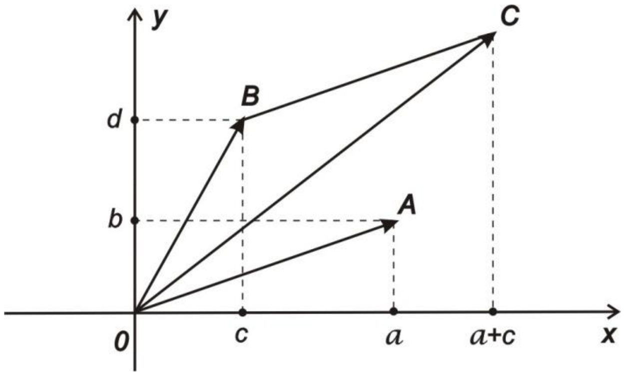


Рис.2. Геометрический смысл определителя 2-го порядка

Доказательство свойств 1–5 проводится непосредственно по формуле (6).

Полное доказательство 6) дано в гл. 2 § 3 Замечание 1. Однако можно доказать это свойство элементарными средствами.

§ 2. Системы двух линейных уравнений с тремя неизвестными

Определение 1. Решением уравнения

$$ax + by + cz = f \qquad (1)$$

называется набор чисел $(x^0,\ y^0,\ z^0)$ такой, что при подстановке $x = x^0,\ \ y = y_0, z = z_0$ в уравнение получаем верное числовое равенство

$$ax_0 + by_0 + cz_0 = f$$

Если хоть один из коэффициентов a, b, c отличен от нуля, то такое уравнение имеет бесчисленное множество решений. Действительно, если, например, $c \neq 0$, то берем в качестве $x^0,\ y_0$ любые числа и выражаем z из (1)

$$z = \frac{1}{c}(f - ax - by).$$

Тогда при подстановке $x = x_0, y = y_0,\ z = \frac{1}{c}(f - ax_0 - by_0)$ в (1) получаем верное числовое равенство.

Если $a = b = c = 0$ и $f = 0$, то любой набор чисел является решением этого уравнения.

Если $a = b = c = 0$, но $f \neq 0$,то уравнение не имеет решений.

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = f_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = f_2 \end{cases} \qquad (2)$$

Запишем коэффициенты при неизвестных системы (2) в виде таблицы $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$.

Решить такую систему — это значит найти все такие наборы чисел (x_0, y_0, z_0), что при их подстановке $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ оба уравнения системы обращаются в верные числовые равенства.

Исследование системы (2) проводится следующим образом.

Ясно, что всегда выполнено одно из двух: либо коэффициенты при соответствующих неизвестных в обоих уравнениях пропорциональны, либо не пропорциональны. Рассмотрим эти случаи.

1. Пусть $a_2 = ka_1, b_2 = kb_1, c_2 = kc_1$. Если при этом $f_2 = kf_1$, то любое решение первого уравнения является решением второго и, следовательно, любое решение первого уравнения является решением системы и наоборот. Если же $f_2 \neq kf_1$, то система несовместна.

2. Допустим теперь, что коэффициенты при соответствующих неизвестных не пропорциональны. Тогда по Лемме 1 § 1 хоть один из определителей

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

отличен от нуля (в противном случае коэффициенты пропорциональны). Предположим, например, что

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Положим в системе (2) $z = z_0$, где z_0 – произвольное число. Тогда система

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = f_1 - c_1z_0 \\ a_2x + b_2y = f_2 - c_2z_0 \end{cases}$$

имеет единственное решение (x_0, y_0) по Теореме1 §1, где

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} f_1 - c_1z_0 & b_1 \\ f_2 - c_2z_0 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad y_0 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & f_1 - c_1z_0 \\ a_2 & f_2 - c_2z_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Значит, система (2) имеет бесчисленное множество решений (x_0, y_0, z_0) при произвольном z_0. Этими решениями исчерпываются все решения системы (2).

Таким образом, доказана следующая теорема

Теорема 1.

1. Если коэффициенты при неизвестных системы (2) пропорциональны, а свободные члены не находятся в том же отношении, то система (2) несовместна.

2. В остальных случаях система (2) имеет бесчисленное множество решений.

Пример 1. Решить систему

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 3y + 2z = 3 \end{cases}$$

Видим, что $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Полагаем $z = z_0$ и находим решение системы

$$\begin{cases} x + y = 1 - z_0 \\ 2x + 3y = 3 - 2z_0 \end{cases}$$

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} 1-z_0 & 1 \\ 3-2z_0 & 3 \end{vmatrix}}{D} = 3 - 3z_0 - 3 + 2z_0 = -z_0$$

$$y_0 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-z_0 \\ 2 & 3-2z_0 \end{vmatrix}}{D} = 3 - 2z_0 - 2 + 2z_0 = 1$$

Таким образом, тройка чисел $(-z_0, 1, z_0)$ при любом z_0 является решением системы.

Проверка.

$$\begin{cases} -z_0 + 1 + z_0 = 1 \\ -2z_0 + 3 + 2z_0 = 3 \end{cases}$$

Ответ: $(-z_0, 1, z_0)$, $z_0 \in \ R$.

Пример 2. Решить систему

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 2 \end{cases}$$

Видим, что второе уравнение получено из первого умножением на 2, поэтому система равносильна одному уравнению $x + y + z = 1$. Все решения этого уравнения — это тройки чисел $(x_0, y_0, 1 - x_0 - y_0)$, где x_0, y_0 – любые числа.

Пример 3. Решить систему

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

Система несовместна, т.к. ни при каких значениях неизвестных одна и та же сумма не может равняться двум разным числам.

§ 3. Системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными. Определитель 3-го порядка

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = f_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = f_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = f_3 \end{cases} \qquad (1)$$

Запишем коэффициенты при неизвестных системы (1) в виде квадратной таблицы чисел

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = A \qquad (2)$$

В строках стоят коэффициенты при неизвестных соответствующих уравнений, в столбцах стоят коэффициенты при одном и том же неизвестном.

Таблица (2) называется матрицей системы (1).

$\boldsymbol{n^\circ 1}$. **Определение 1.** Решением системы (1) называется набор трех чисел (x_0, y_0, z_0) таких, что при их подстановке $x = x_0, y = y_0, z = z_0$ в левые части уравнений системы (1) каждое из уравнений обращается в верное числовое равенство.

Определение 2. Решить систему (1) – это значит найти все ее решения или убедиться, что решений нет.

Решить систему (1) можно, выражая одно неизвестное через остальные из какого-нибудь уравнения и подставляя это выражение во все другие уравнения. Этот прием называется методом исключения. Получаемые при этом системы равносильны друг другу.

Пример 1.

Решить систему

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ 2x - 3y - z = -3 \end{cases}$$

Решение.

Выразим x из 1-го уравнения и подставим в два других:

$\begin{cases} x = y - z + 1 \\ 3y + 2z = 1 \\ -y - 3z = -5 \end{cases}$. Из второго уравнения выразим y и подставляем в третье:

$\begin{cases} x = y - z + 1 \\ y = -3z + 5 \\ z = 2 \end{cases}.$

Отсюда получаем $\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \\ z = 2 \end{cases}.$

Ответ. $\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \\ z = 2 \end{cases}$

Этот метод решения системы называется методом последовательного исключения неизвестных.

$\boldsymbol{n^\circ 2}$ Получим достаточное условие существования единственного решения системы (1). Аналогичное условие для системы двух уравнений с двумя неизвестными дано в Теореме 1 §1. Сначала предположим, что система (1) имеет решение

$$x = x_0, y = y_0, z = z_0.$$

Значит, верны три равенства

$$\begin{aligned} a_1x_0 + b_1y_0 + c_1z_0 &= f_1 \\ a_2x_0 + b_2y_0 + c_2z_0 &= f_2 \qquad (3) \\ a_3x_0 + b_3y_0 + c_3z_0 &= f_2 \end{aligned}$$

Умножим первое равенство на $(b_2c_3 - b_3c_2)$, второе — на $(b_3c_1 - b_1c_3)$, третье — на $(b_1c_2 - b_2c_1)$ и все сложим. Получим

$$\begin{gathered} (a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1)x_0 + \\ +(b_1b_2c_3 - b_1b_3c_2 + b_2b_3c_1 - b_2b_1c_3 + b_3b_1c_2 - b_3b_2c_1)y_0 + \\ +(c_1b_2c_3 - c_1b_3c_2 + c_2b_3c_1 - c_2b_1c_3 + c_3b_1c_2 - c_3b_2c_1)z_0 = \\ = f_1b_2c_3 - f_1b_3c_2 + f_2b_3c_1 - f_2b_1c_3 + f_3b_1c_2 - f_3b_2c_1 \qquad (4) \end{gathered}$$

Видим, что коэффициенты при y_0, z_0 равны нулю. Обозначим

$$D = a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 \text{ —}$$

коэффициент при x_0 и

$$D_1 = f_1b_2c_3 - f_1b_3c_2 + f_2b_3c_1 - f_2b_1c_3 + f_3b_1c_2 - f_3b_2c_1 .$$

Тогда равенство (4) запишется в виде

$$Dx_0 = D_1 \qquad (5)$$

Вернемся к равенствам (3). Умножим первое из них на $(a_3c_2 - a_2c_3)$, второе — на $(a_1c_3 - a_3c_1)$, третье — на $(a_2c_1 - a_1c_2)$ и все сложим. Получим, аналогично предыдущему,

$$Dy_0 = D_2, \qquad (6)$$

где $D_2 = f_1a_3c_2 - f_1a_2c_3 + f_2a_1c_3 - f_2a_3c_1 + f_3a_2c_1 - f_3a_1c_2$.

Умножим первое из равенств (3) на $(a_2b_3 - a_3b_2)$, второе — на $(b_1a_3 - -a_1b_3)$, третье— на $(a_1b_2 - a_2b_1)$ и все сложим. Получим, аналогично предыдущему,

$$Dz_0 = D_3 , \qquad (7)$$

где $D_3 = f_1a_2b_3 - f_1a_3b_2 + f_2a_3b_1 - f_2a_1b_3 + f_3a_1b_2 - f_3a_2b_1$.

Предположим, что $D \neq 0$.

Тогда из (5), (6), (7) получим выражения для x_0, y_0, z_0

$$x_0 = \frac{D_1}{D} \;\; ; \;\; y_0 = \frac{D_2}{D}; \; z_0 = \frac{D_3}{D}. \qquad (8)$$

Таким образом, если у системы (1) есть решение и $D \neq 0$, то это решение можно найти по формулам (8).

Теперь подстановкой чисел (8) в систему (1) можно убедиться, что они обращают каждое из уравнений в верное числовое равенство, т.е. действительно являются решением этой системы. (Проделайте это самостоятельно).

Таким образом, условие $D \neq 0$ оказалось достаточным для того, чтобы система (1) имела единственное решение (8). Число D, стоящее в знаменателях этих формул, называется определителем матрицы системы (1).

Дадим общее определение определителя матрицы 3-го порядка:

Определение 3. Определителем матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

или определителем 3-го порядка, называется число, обозначаемое

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1 \qquad (9)$$

Правило (9), по которому вычисляется определитель 3-го порядка, можно схематически представить в виде (см. рис.3).

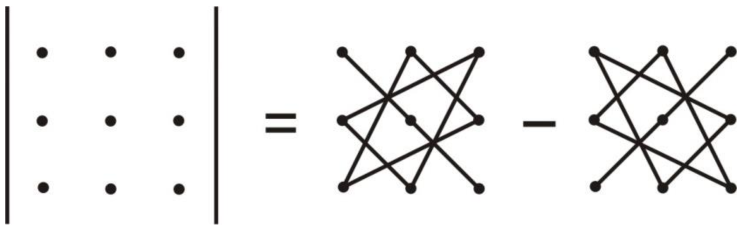


Рис.3 Правило вычисления определителя 3-го порядка

Здесь отрезками соединены перемножаемые числа.

Правило вычисления определителя 3-го порядка называется правилом Саррюса.

В этих обозначениях и при условии D≠ 0 формулы (8) перепишем в виде

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} f_1 & b_1 & c_1 \\ f_2 & b_2 & c_2 \\ f_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}\ ;\ y_0 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & f_1 & c_1 \\ a_2 & f_2 & c_2 \\ a_3 & f_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}\ ;\ z_0 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & f_1 \\ a_2 & b_2 & f_2 \\ a_3 & b_3 & f_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} \qquad (10)$$

Полученный результат сформулируем в виде теоремы:

Теорема 1. Если определитель матрицы системы (1) отличен от нуля, то система имеет единственное решение, которое может быть найдено по формулам (10).

Замечание. Полученная теорема и аналогичная теорема для системы двух уравнений с двумя неизвестными (Теорема 1´ § 1гл.1) носят общее название теоремы Крамера.

Примеры.

1. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot1\cdot1 + 3\cdot3\cdot3 + 2\cdot2\cdot2 - 1\cdot2\cdot3 - 1\cdot2\cdot3 - 1\cdot2\cdot3 =$$

$$= 1 + 27 + 8 - 18 = 18$$

2. Решить систему

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y - z = -2 \\ -x + 2y + 3z = 3 \end{cases}$$

Вычислим определитель матрицы коэффициентов

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 4 + 1 - (-1 - 2 + 6) = 8 - 3 = 5$$

Получилось, D=5$\neq$ 0 .Значит, система имеет единственное решение, которое можно найти по формулам (8).

Ответ: $x = 1/5$; $y = -4/5$; $z = 8/5$.

3. Решить систему

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ 2x - 3y - z = -3 \end{cases}$$

Заметим, что эту систему мы решили методом исключения в 2.1. Сейчас решим ее по формулам (8).

Ответ: $x = D_1/D = -2$; $y = D_2/D = -1$; $z = D_3/D = 2$.

$\boldsymbol{n}$**°3**. Свойства определителей 3-го порядка.

1. Определитель, две строки (или два столбца) которого совпадают, равен нулю.

2. Если в определителе поменять местами две строки (или два столбца), то определитель изменит знак на противоположный.

3. Если у чисел, стоящих в строке (или в столбце) определителя, есть общий множитель, то его можно вынести за знак определителя.

Следствие. Если две строки (или два столбца) определителя пропорциональны, то определитель равен нулю.

4. Если в строке (или в столбце) определителя стоят суммы двух слагаемых, то определитель равен сумме двух определителей, в первом из которых в этой строке стоят первые слагаемые, во втором — вторые.

5. Определитель не меняется, если к числам, стоящим в какой-либо его строке (или в столбце), прибавить числа, пропорциональные элементам другой строки (или столбца).

Свойства 1–5 можно доказать по формуле (9).

Пример 4. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 5 & -6 & 7 \\ -7 & 5 & -6 \\ 1 & 9 & -10 \end{vmatrix}$$

Решение. Добавим к первой строке третью, умноженную на (–5), а ко второй строке третью, умноженную на 7. Определитель при этом не изменится.

$$\begin{vmatrix} 5 & -6 & 7 \\ -7 & 5 & -6 \\ 1 & 9 & -10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -51 & 57 \\ 0 & 68 & -76 \\ 1 & 9 & -10 \end{vmatrix} =$$

(из первой строки выносим общий множитель 3, а из второй выносим 4)

$$= 12\begin{vmatrix} 0 & -17 & 19 \\ 0 & 17 & -19 \\ 1 & 9 & -10 \end{vmatrix} =$$

(прибавим к первой строке вторую, получим)

$$= 12\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 17 & -19 \\ 1 & 9 & -10 \end{vmatrix} = 0$$

Ответ: 0.

6. Разложение определителя по элементам какой-либо строки или какого-либо столбца.

Сгруппируем парами слагаемые в (9).

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)$$

Применим формулу (6) § 1 для определителя 2-го порядка, получим

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \qquad (11)$$

Формула (11) называется разложением определителя 3-го порядка по элементам первой строки. В ней каждый элемент 1-ой строки умножается на определитель, полученный вычеркиванием из исходного определителя первой строки и того столбца, в котором стоит этот элемент. Знаки в сумме чередуются, начиная с "+".

Аналогично получаются формулы разложения определителя по элементам второй строки:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \qquad (12)$$

и 3-ей строки

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \qquad (13)$$

Разложение определителя по элементам какого-либо столбца проводится аналогично, например, формула

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

дает разложение определителя по элементам первого столбца.

7. Известно, что определитель второго порядка равен нулю тогда и только тогда, когда его строки пропорциональны. (§1 $\boldsymbol{n}°4,$ свойство 2). Определитель 3-го порядка таким свойством не обладает: пропорциональность строк достаточна, но не необходима для равенства определителя нулю.

Докажем, что если определитель 3-го порядка равен нулю, то одна из строк является суммой двух других строк, умноженных на некоторые числа.

Доказательство.

Запишем условно

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{vmatrix}$$

Здесь (1) – обозначает первую строку, (2) – вторую, (3) – третью.

Предположим, что $a_1 \neq 0$. По свойству 5), вычитая из второй строки первую, умноженную на $\frac{a_2}{a_1}$, а из третьей — первую, умноженную на $\frac{a_3}{a_1}$, получим

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 - \frac{a_2}{a_1} b_1 & c_2 - \frac{a_2}{a_1} c_1 \\ 0 & b_3 - \frac{a_3}{a_1} b_1 & c_3 - \frac{a_3}{a_1} c_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (1) \\ (2) - \frac{a_2}{a_1}(1) \\ (3) - \frac{a_3}{a_1}(1) \end{vmatrix} =$$

$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 - \dfrac{a_2}{a_1} b_1 & c_2 - \dfrac{a_2}{a_1} c_1 \\ b_3 - \dfrac{a_3}{a_1} b_1 & c_3 - \dfrac{a_3}{a_1} c_1 \end{vmatrix} = a_1 D$$

Последнее равенство получено разложением определителя по первому столбцу. Условие $a_1 \neq 0$ влечет равенство нулю определителя D 2-го порядка.

Значит, какая-то из его строк получена умножением другой на некоторое число. Допустим, например, что

$$b_3 - \tfrac{a_3}{a_1} b_1 = k\left(b_2 - \tfrac{a_2}{a_1} b_1\right), c_3 - \tfrac{a_3}{a_1} c_1 = k\left(c_2 - \tfrac{a_2}{a_1} c_1\right).$$

Но тогда

$$(3) - \frac{a_3}{a_1}(1) = k\left((2) - \frac{a_2}{a_1}(1)\right)$$

Отсюда

$$(3) = \left(\frac{a_3}{a_1} - \frac{a_2}{a_1} k\right)(1) + k(2)$$

Свойство 7) в этом случае доказано.

Если $a_1 = 0$ но a_2 или a_3 отлично от нуля, то, меняя местами строки определителя, получим уже разобранный случай.

Если все элементы 1-го столбца — нули, то поменяем местами 1-ый столбец с каким-нибудь ненулевым столбцом исходного определителя. Получим разобранный ранее случай.

Свойство (7) доказано полностью.

Пример 5.

В примере 4 мы видели, что

$$\begin{vmatrix} 5 & -6 & 7 \\ -7 & 5 & -6 \\ 1 & 9 & -10 \end{vmatrix} = 0$$

Найдём соотношение между его строками.

Решение . $\begin{vmatrix} 5 & -6 & 7 \\ -7 & 5 & -6 \\ 1 & 9 & -10 \end{vmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & -51 & 57 \\ 0 & 68 & -76 \\ 1 & 9 & -10 \end{vmatrix} \begin{matrix} (1) - 5 \cdot (3) \\ (2) + 7 \cdot (3) \\ (3) \end{matrix}$

Первая и вторая строки последнего определителя пропорциональны, так как $-\frac{68}{51} = -\frac{76}{57} = -\frac{4}{3} = k$. Поэтому для получения его второй строки надо первую умножить на $k = -\frac{4}{3}$

$$(2)+7\cdot(3)=-4/3\ ((1)-5\cdot(3)\ )$$
$$3\cdot(2)+21\cdot(3)=-4\cdot(1)+20\cdot(3)$$
$$(3)=-4\cdot(1)-3\cdot(2)$$

Получается, что третья строка исходного определителя равна сумме первой строки, умноженной на (– 4) и второй, умноженной на (– 3).

$\boldsymbol{n}$**°4.** Решение однородных систем.

Определение. Система (1) называется однородной, если свободные члены всех уравнений равны нулю.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{cases} \qquad (14)$$

Утверждение 1.

Если определитель D матрицы системы не равен нулю, то система (14) имеет единственное тривиальное решение $x = 0, y = 0, z = 0$. Действительно, в этом случае $D_1 = D_2 = D_3 = 0$, и по формулам (8) получаем $x = y = z = 0$.

Утверждение 2. Если определитель D матрицы системы равен нулю, то система (14) имеет бесчисленное множество решений.

Действительно, в этом случае по свойству 7) какая-то строка определителя, например, третья, является суммой других его строк, умноженных на некоторые числа:

$$(3) = \lambda_1(1) + \lambda_2(2),$$

то есть $a_3 = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2;\ \ b_3 = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2;\ \ c_3 = \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2$.

Значит, в системе (14) третье уравнение лишнее, и система (14) равносильна системе

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \end{cases} \qquad (15)$$

Система (15) имеет бесчисленное множество решений (см. § 2, Теорема1).

Следствие. Система (14) имеет бесчисленное множество решений тогда и только тогда, когда определитель D матрицы системы равен нулю.

§ 4. Матрицы и действия над ними

Ранее, при рассмотрении систем линейных уравнений, был введен термин «матрица» для квадратных или прямоугольных таблиц чисел

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

В дальнейшем прямоугольные таблицы чисел различных размеров будут появляться не только в связи с системами линейных уравнений.

Дадим следующее определение.

Определение. Матрицей размером $m \times n$ называется прямоугольная таблица, имеющая m строк и n столбцов и состоящая из чисел или других математических объектов, называемых элементами матрицы.

В настоящем пособии число строк и столбцов матрицы не превосходит трёх, а элементами матрицы являются числа. Например,

$$(a_1, a_2),\ (x_1, x_2, x_3) \quad \text{—} \quad \text{матрицы – строки}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{—} \quad \text{матрицы – столбцы}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} \quad \text{—} \quad \text{матрица размера } 3\times2$$

Чаще всего матрицы обозначаются большими латинскими буквами, при необходимости указывая их размер, а их элементы — соответствующими маленькими латинским буквами с двумя индексами: если элемент стоит в $i -$ ой строке и $j -$ ом столбце, то он имеет индексы i и j.

$$A_{m\times n} = A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left(a_{ij}\right), i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, n$$

Матрица называется нулевой, если все её элементы равны нулю.

$$\mathbb{O} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Если число строк матрицы равно числу её столбцов, то матрица называется квадратной.

Важную роль играют диагональные матрицы. Так называют квадратные матрицы, у которых среди элементов с равными индексами (т.е. стоящими на «диагонали» квадрата), есть ненулевые, а все остальные элементы равны нулю.

Диагональная матрица с элементами $d_1, d_2, \dots, d_n$ на диагонали обозначается $\mathrm{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$. Например,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(1\,,2)\ ,\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(-1, 0, 1).$$

Диагональная матрица называется единичной, если все её диагональные элементы равны единицам.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(1,1,\ldots,1)$$

Определение. Две матрицы размерами $m \times n$ и $r \times s$ называются равными, если

1. их размеры одинаковы, т.е. $m = r,\ n = s$

2. элементы матриц, стоящие на одинаковых позициях (то есть имеющие одинаковые индексы), равны.

Другими словами,

$A_{m\times n} = B_{r\times s}$, тогда и только тогда, когда

1. $m = r, n = s$

2. $a_{ij} = b_{ij}\ ,\ i = 1,2,\ldots,m\ ; j = 1,2\ldots,n.$

Действия с матрицами.

Сложение матриц.

Определение. Сложить две матрицы A и B одинакового размера — это значит образовать новую матрицу C по правилу:

Если $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$, то $A + B = C =$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, элементами суммы двух матриц являются суммы соответствующих элементов слагаемых матриц.

Обращаем внимание на то, что сложить можно только матрицы одинакового размера!

Примеры.

1. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 \\ 0-1 \\ 3-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-3 & 2+1 \\ 3+0 & 4+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

Свойства сложения матриц.

1. $A + B = B + A$ – коммутативность сложения
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ – ассоциативность сложения
3. $A + \mathbb{O} = A$, где $\mathbb{O}$ – нулевая матрица
4. Для каждой матрицы A существует противоположная матрица $-A$, элементы которой знаками отличаются от соответствующих элементов матрицы A. Тогда

$$A + (-A) = \mathbb{O}$$

Пример 3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad -A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A + (-A) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Умножение матрицы на число.

Определение. Умножить матрицу на число — это значит каждый элемент матрицы умножить на это число.

Если $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ – матрица и "c" – число, то

$$cA = \begin{pmatrix} ca_{11} & \cdots & ca_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{m1} & \cdots & ca_{mn} \end{pmatrix}$$

Свойства умножения на число:

1. $(c_1 + c_2) \cdot A = c_1 A + c_2 A$
2. $c(A_1 + A_2) = cA_1 + cA_2$
3. $c_1(c_2 A) = (c_1 c_2)A$
4. $1 \cdot A = A$

Противоположная матрица $-A$ получается умножением A на (-1)

$$-A = (-1)A$$

Пишут:

$$A + (-A) = A - A = \mathbb{O}$$

Умножение матриц.

Определение.

1. Произведением строки A на столбец B той же длины

$$A = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \ , B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

называется число $a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$

$$A \cdot B = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n.$$

2. Пусть $A = A_{m\times n} = (a_{ij})$, $B = B_{n\times k} = (b_{ij})$ то есть число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B. Тогда произведением $A \cdot B$ называется новая матрица $C = C_{m\times k} = (c_{ij})$, при этом элемент c_{ij} получен умножением $i -$ ой строки матрицы A на $j -$ ый столбец матрицы B.

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

Итак, чтобы заполнить i–ую строку матрицы $C = A \cdot B$, надо i–ую строку матрицы A умножить на все столбцы матрицы B.

Примеры.

1. $(1,2,3)\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 32$

2. Поменяем местами сомножители в предыдущем примере. Получим совсем другой результат

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot (1,2,3) = \begin{pmatrix} 4\cdot 1 & 4\cdot 2 & 4\cdot 3 \\ 5\cdot 1 & 5\cdot 2 & 5\cdot 3 \\ 6\cdot 1 & 6\cdot 2 & 6\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 5 & 10 & 15 \\ 6 & 12 & 18 \end{pmatrix}$$

3. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & -4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 21 \\ -29 \end{pmatrix}$

4. $(-5,2,3)\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & -4 & -2 \end{pmatrix} = (-3, -23, -3)$

5. $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 17 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}$

Заметим, что не любые две матрицы можно перемножить. Размеры перемножаемых матриц и размер их произведения указаны на рис.4

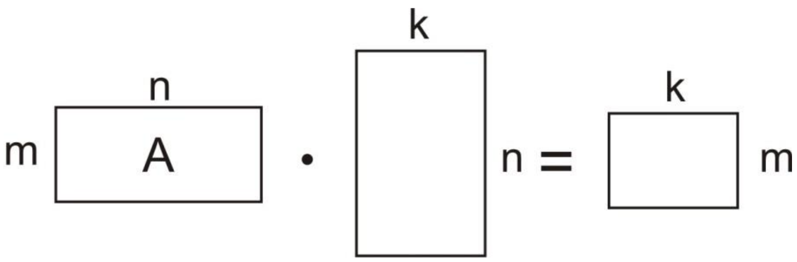


Рис.4. Умножение матриц

Свойства умножения матриц.

1. Умножение матриц некоммутативно. Это свойство означает, что, если определены два произведения AB и BA, то они могут быть различными (см. примеры 1) и 2), 5) и 6)). Если оказалось, что $AB = BA$, то матрицы называются коммутативными. Например, матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$и $B = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ коммутируют, т.к.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 15 \\ 10 & 24 \end{pmatrix}, \qquad BA = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 15 \\ 10 & 24 \end{pmatrix}.$$

2. Умножение матриц ассоциативно: $(AB)C = A(BC)$Это свойство означает, что, если определено произведение матриц в одной части равенства, то определено произведение матриц в другой его части и они равны.
3. $(cA)B = A(cB)$, где c – число
4. $(A + B)C = AC + BC$
5. $A(B + C) = AB + AC$

Транспонирование матриц.

Определение.

Матрицей, транспонированной с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

называется матрица A^T, элементами i – ого столбца которой являются элементы i –ой строки матрицы A. $(i = 1,2, \dots, m)$.

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Если A – матрица размера $m \times n$, то A^T – матрица размера $n \times m$ (см. рис.5)

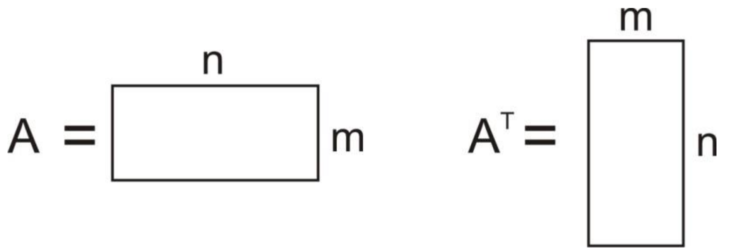


Рис.5. Схематическое изображение операции транспонирования

Из определения A^T видно, что элементами $j-$ ой строки матрицы A^T являются элементы j $-$ого столбца матрицы A.

Пример 7.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}, \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Свойства транспонированных матриц.

1. $(A^T)^T = A$ Матрица, дважды транспонированная, равна исходной матрице.
2. $(A + B)^T = A^T + B^T$ Матрица, транспонированная с суммой двух матриц, равна сумме транспонированных матриц.
3. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ Матрица, транспонированная с произведением двух матриц, равна произведению матриц, транспонированных с каждым сомножителем, и взятых в обратном порядке. Мы не будем здесь доказывать эти свойства. Проиллюстрируем их на примерах.

Примеры.

8. $A = (1\ 2)$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ $A \cdot B = (1\ 2) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 11$, $(A \cdot B)^T = 11,$ $B^T \cdot A^T =$
$= (3\ 4) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 11.$ Видим, что результаты равны.

9. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$ $B = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -18 \end{pmatrix},$ $(A \cdot B)^T =$
$= (-8\ \ -18), B^T \cdot A^T = (-2\ \ -3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = (-8\ \ -18)$ Результаты совпали.

Определение. Матрица A называется симметричной, если $A = A^T$. Другими словами, матрица называется симметричной, если она не меняется при транспонировании

Примеры.

10. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = A$

11. $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ 3 & 2 & 5\\ 4 & 5 & -1\end{pmatrix}$, $A^T=\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ 3 & 2 & 5\\ 4 & 5 & -1\end{pmatrix}=A$.

Симметричная матрица обязательно является квадратной, и её элементы удовлетворяют условию $a_{ij}=a_{ji}$ для всех значений индексов i,j.

Действительно, по условию $A=A^T$

$$\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{m1}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{1n} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

Из определения равенства двух матриц следует, что $m=n$ и на одинаковых позициях стоят равные элементы, т.е. $a_{ij}=a_{ji}$.

Глава 2. Векторная алгебра

§1. Свободные векторы и действия над ними

Отрезок называется направленным, если указано, где его начало, а где — конец. Если точка А – начало, а точка B – конец, то такой отрезок обозначается $\boldsymbol{AB}$.

Определение. Свободным вектором (или просто вектором) называется направленный отрезок $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{AB}$. При этом два направленных отрезка $\boldsymbol{AB}$ и $\boldsymbol{CD}$ задают один вектор, если:

1) $\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{CD}$ лежат на параллельных прямых или на одной прямой;

2) $\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{CD}$ одинаково направлены;

3) Длины направленных отрезков $\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{CD}$ равны (рис.1).

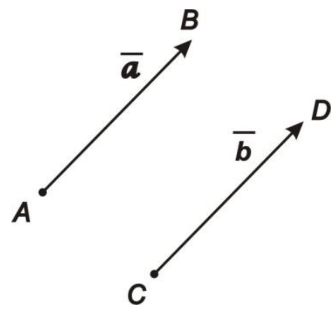


Рис.1 Свободный вектор

Другими словами, два разных направленных отрезка $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ задают один вектор (т.е. $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$) тогда и только тогда, когда один из них получается параллельным переносом другого. Таким образом, ситуация с определением вектора похожа на ситуацию с записью рационального числа в виде дроби. Например, число «0,5» можно записать как 1/2, и как 2/4 и как 3/6 и т.д., то есть «0,5»=1/2=2/4=3/6=...

Так и вектор можно задать с помощью разных направленных отрезков, удовлетворяющих условиям 1), 2), 3).

Действия над векторами.

1) *Сложение*. Сложить два вектора можно а) по правилу *треугольника* или б) по правилу *параллелограмма*.

а) Правило треугольника.

Чтобы сложить два вектора, надо параллельным переносом совместить начало второго вектора с концом первого; суммой двух данных векторов называется третий вектор, у которого начало совпадает с началом первого вектора, а конец- с концом второго (рис.2).

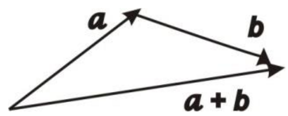


Рис.2. Правило треугольника сложения векторов

б) Правило параллелограмма.

Чтобы сложить два вектора, надо параллельным переносом совместить начало второго вектора с началом первого; суммой двух данных векторов называется третий вектор, совпадающий с диагональю параллелограмма, построенного на этих векторах и выходящей из их общего начала (рис.3).

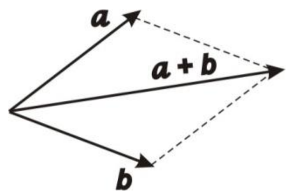


Рис.3 Правило параллелограмма сложения векторов

Свойства операции сложения.

- Коммутативность $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$
- Вектор называется нулевым, если его начало и конец совпадают, обозначается $\mathbf{0}$
- Ассоциативность. $\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}$

2) *Вычитание*. Разность двух векторов $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$–это такой вектор $\boldsymbol{c}$, который надо прибавить к $\boldsymbol{b}$, чтобы получить $\boldsymbol{a}$ (рис.4).

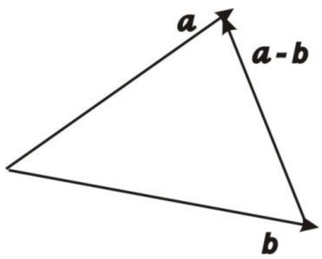


Рис.4. Вычитание векторов

3) *Умножение вектора ни число*. Умножить вектор $\boldsymbol{a}$ на число λ – это значит

образовать новый вектор $\boldsymbol{b}$ со свойствами:

- $|\boldsymbol{b}| = |\lambda||\boldsymbol{a}|$
- $\boldsymbol{b} \uparrow\uparrow \boldsymbol{a}$, если λ>0; $\boldsymbol{b}\uparrow\downarrow\boldsymbol{a}$, если λ<0; $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$, если λ=0. (рис.5).

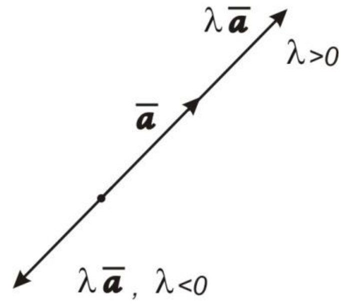


Рис.5. Умножение вектора на число

Свойства операции умножения на число

- $\lambda(\mu\boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a}$
- $(\lambda + \mu)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{a}$
- $\lambda(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}$

Свободный вектор является геометрическим объектом. В то же время, как мы увидим далее, свободный вектор полностью задается набором нескольких чисел, называемых проекциями этого вектора на оси координат. Тем самым мы получаем возможность задавать различные геометрические свойства (например, параллельность, перпендикулярность) с помощью чисел.

Определение. Осью называется прямая L, на которой отмечена точка O (начало отсчета) и заданы направление и масштаб OA (точка A не совпадает с точкой O и расположена правее ее). Иногда ось будем обозначать OL.

Если точка M – произвольная точка на оси, то можно измерить длину отрезка OM, которая обозначается $|OM|$. Число $|OM|$ – это неотрицательное, записанное в виде бесконечной десятичной дроби число, показывающее, сколько раз масштаб OA уложился в отрезок OM (см. рис. 6).

Рис.6. Числовая ось

Будем теперь думать, что в каждую точку M на оси, как в лунку, положено число $x = x_M$, причем это число равно длине отрезка OM, если точка M лежит правее точки O, и это число равно длине отрезка OM со знаком " $-$ ", если точка M лежит левее точки O, то есть

$$x = x_M = \left[\begin{array}{l} |OM|, \text{если точка } M \text{ правее точки } O \\ -|OM|, \text{если точка } M \text{ левее точки } O \end{array}\right.$$

В частности, x_0=0 x_A=+1.

Итак, любое вещественное число оказалось лежащим в какой-то точке. Справа от точки O лежат все положительные вещественные числа, а слева лежат все отрицательные.

Определение. Координатой точки M на оси называется число x_M, лежащее в точке M и

$$x_M = \left[\begin{array}{l} |OM|, \text{если точка } M \text{ правее точки } O \\ -|OM|, \text{если точка } M \text{ левее точки } O \end{array}\right.$$

Ось, у каждой точки которой есть координата, называется числовой осью.

Каждому вектору $\boldsymbol{AB}$ ставим в соответствие вектор $\boldsymbol{A_1B_1}$ на оси OL, где A_1−основание перпендикуляра, опущенного из точки A на ось OL, B_1 −основание перпендикуляра, опущенного из точки B на ось OL (рис. 7а, 7б, 7в).

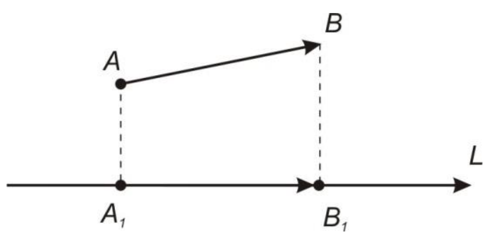


Рис.7 а). Вектор $\boldsymbol{A_1B_1}$ и ось L имеют одинаковое направление

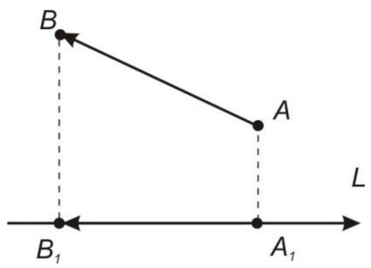


Рис.7 б). Вектор $\boldsymbol{A_1B_1}$ и ось L имеют противоположные направления

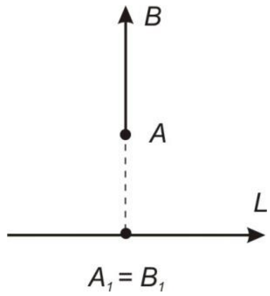


Рис.7 в). Вектор $\boldsymbol{AB}$ *и ось L взаимно перпендикулярны,* $\boldsymbol{A_1B_1}$*– нулевой вектор*

Определение.

Проекцией вектора $\boldsymbol{AB}$ на ось называется длина вектора $\boldsymbol{A_1B_1}$, взятая со знаком «+», если направление $\boldsymbol{A_1B_1}$ совпадает с направлением оси, и со знаком «–», если направление $\boldsymbol{A_1B_1}$ противоположно направлению оси.

Итак, ПР_{OL} $\boldsymbol{AB}$ =± $|\boldsymbol{A_1B_1}|$ – это число.

Теорема 1.

Пусть x– координата точки A_1 на оси OL, y– координата точки B_1 на оси OL, тогда $\text{ПР}_{OL}\boldsymbol{AB}$= $y-x$.

Доказательство состоит из рассмотрения шести случаев взаимного расположения точек A_1, B_1, O

1. ПР_{OL} $\boldsymbol{AB}$ =$|\boldsymbol{A_1B_1}|$ = $|\boldsymbol{OB_1}|$ – $|\boldsymbol{OA_1}|$=$y-x$ (рис. 8а).
2. ПР_{OL} $\boldsymbol{AB}$ =$|\boldsymbol{A_1B_1}|$ = $|\boldsymbol{OB_1}|$ + $|\boldsymbol{OA_1}|$=$y-x$ (рис. 8б).
3. ПР_{OL} $\boldsymbol{AB}$ = $|\boldsymbol{A_1B_1}|$ = $|\boldsymbol{OA_1}|$ – $|\boldsymbol{OB_1}|$=$y-x$ (рис.8в).

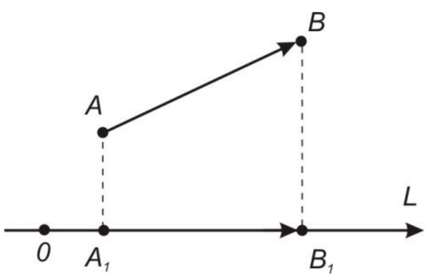


Рис.8а Точка A_1 *между точками* O *и* B_1

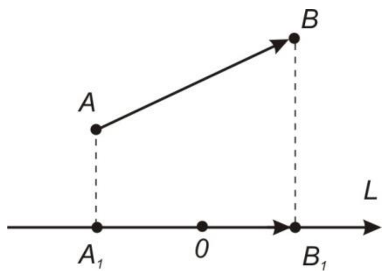


Рис.8б Точка O *между точками* A_1 *и* B_1

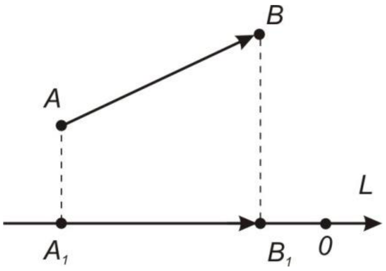


Рис.8в Точка B_1 между точками A_1 и O

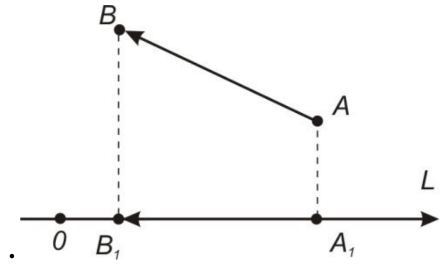


Рис.8г Точка B_1 между точками O и A_1

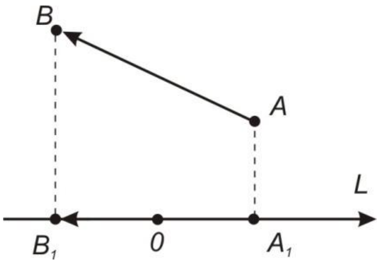


Рис.8д Точка O между точками B_1 и A_1

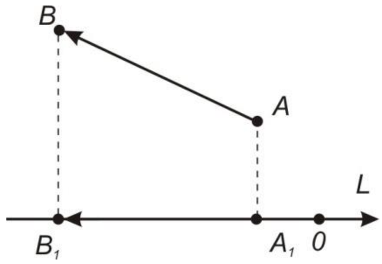


Рис.8е Точка A_1 между точками B_1 и O

Остальные случаи разбираются аналогично (см. рис. 8г, 8д, 8е.)

Определение угла между вектором и осью.

Возьмем точку S и проведем два луча из этой точки: один в направлении вектора $\boldsymbol{a}$, другой в направлении оси OL. Угол между этими лучами — это угол между вектором $\boldsymbol{a}$ и осью OL (рис.9).

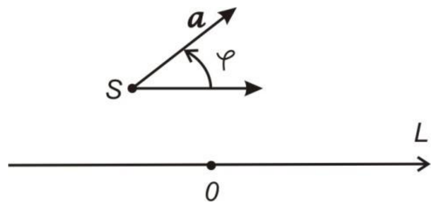


Рис.9. Угол между вектором и осью

Теорема 2. $\text{ПР}_{OL}\ \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\cos\varphi$, где φ – угол между $\boldsymbol{a}$ и осью OL.

Доказательство. Возможны три случая:

1) $\text{ПР}_{OL}\ \boldsymbol{AB} = |\boldsymbol{AB_1}| = |\boldsymbol{AB}|\cos\varphi$, (рис.10 а);

2) $\text{ПР}_{OL}\ \boldsymbol{AB} = -\left|\boldsymbol{AB^1}\right| = -|\boldsymbol{AB}|\cos(\pi - \varphi) = |\boldsymbol{AB}|\cos\varphi$, (рис.10 б);

3) $\text{ПР}_{OL}\boldsymbol{AB} = |\boldsymbol{A_1B_1}| = 0 = |\boldsymbol{AB}|\cos\frac{\pi}{2}$, (рис.10 в).

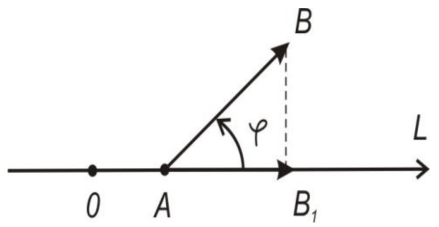


Рис.10 а. Угол φ − острый

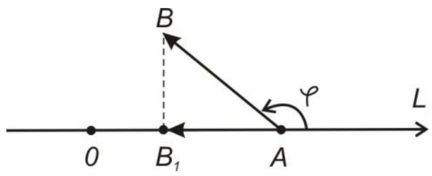


Рис.10 б. Угол φ −тупой

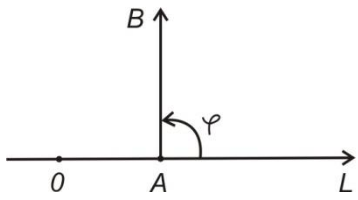


Рис.10 в. Угол φ– прямой

Следствия.

1. Равные векторы имеют равные проекции на одну и ту же ось.
2. Проекции вектора на оси декартовой прямоугольной системы координат, будучи заданы, вполне определяют его как свободный вектор.

Действительно, пусть a, b, c− три заданных числа. Рассмотрим точку $M(a, b, c)$, имеющую числа a, b, c своими координатами, и $\boldsymbol{OM}$ – радиус- вектор точки M (рис.11).

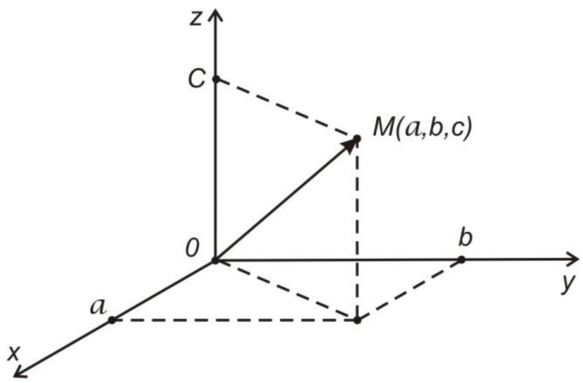


Рис.11. Координаты точки М в декартовой прямоугольной системе координат

Тогда ПР$_{OX}$ $\boldsymbol{OM}$ =a, ПР$_{OY}$ $\boldsymbol{OM}$ =b, ПР$_{OZ}$ $\boldsymbol{OM}$ =c, по Теореме 1 вектор $\boldsymbol{OM}$ определен однозначно, т.к. существует только одна точка, имеющая числа a,b,c своими координатами. Обозначим $\boldsymbol{OM} = \{a, b, c\}$.

Теорема 3 (о проекциях).

1) $ПР_{OL}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ =$ПР_{OL}\boldsymbol{a}$+$ПР_{OL}\boldsymbol{b}$

2) $ПР_{OL}(λ\boldsymbol{a})$ =$λПР_{OL}\boldsymbol{a}$

Доказательство.

1) Пусть x,y,z –координаты на оси OL точек A_1, B_1, C_1 соответственно, $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{b}=\boldsymbol{BC}$. Тогда: $ПР_{OL}$ ($\boldsymbol{AB}$+$\boldsymbol{BC}$)= $ПР_{OL}$ $\boldsymbol{AC}$=z–x. (рис.12).

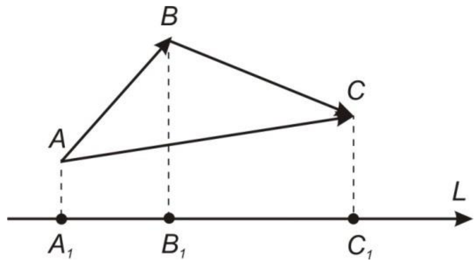


Рис.12. Проекция суммы векторов

С другой стороны, $ПР_{OL}$ $\boldsymbol{AB}$+$ПР_{OL}$ $\boldsymbol{BC}$= y–x+z–y=z–x. Следовательно, $ПР_{OL}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = ПР_{OL}\boldsymbol{a} + ПР_{OL}\boldsymbol{b}$

2) Рассмотрим три случая (рис.13а, 13б.)

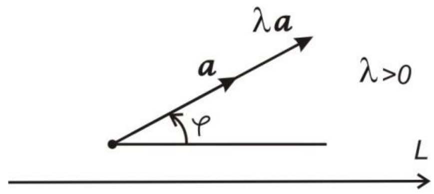


Рис.13 а). Проекция произведения вектора на положительное число

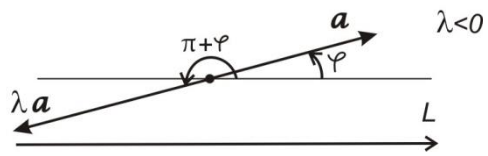


Рис.13 б). Проекция произведения вектора на отрицательное число

- λ>0 $ПР_{OL}(λ\boldsymbol{a}) = |λ\boldsymbol{a}|\cos φ = λ|\boldsymbol{a}|\cos φ = λ\, ПР_{OL}\boldsymbol{a}$
- λ<0 $ПР_{OL}\,(λ\boldsymbol{a}) = |λ\boldsymbol{a}|\cos(π+φ) = |λ||\boldsymbol{a}|(-\cos φ) = (-λ)|\boldsymbol{a}|(-\cos φ) =$ $= λ|\boldsymbol{a}|\cos φ = λПР_{OL}\boldsymbol{a}$
- Случай λ=0 очевиден, т.к. тогда в левой и правой частях доказываемого равенства стоят нули.

Теорема доказана.

Выберем в пространстве прямоугольную декартову систему координат $Oxyz$.

Пусть $\boldsymbol{i}$ –вектор единичной длины, имеющий то же направление, что и ось Ox; $\boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ – векторы единичной длины, имеющие направление осей Oy и Oz соответственно. Мы можем представить себе векторы $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ приложенными к точке O.

Пусть $\boldsymbol{a}$ – произвольный вектор. Двигая $\boldsymbol{a}$ параллельно самому себе, приложим его к точке O.

Тогда конец этого вектора окажется в какой-то точке M и $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{OM}$. Пусть точка M имеет координаты a_x, a_y, a_z, $M(a_x, a_y, a_z)$ (рис.14).

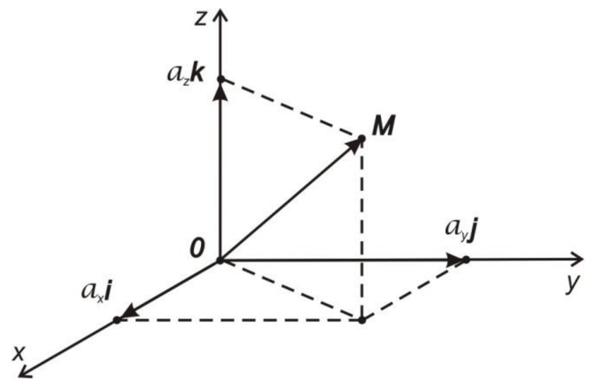


Рис.14. Разложение вектора по трём единичным взаимно перпендикулярным векторам

Непосредственно из рисунка видно, что, складывая три вектора $a_x\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{a_y j}$, $a_z\boldsymbol{k}$, мы получим вектор $\boldsymbol{OM}$. Итак,

$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{OM} = \{a_x, a_y, a_z\} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$, $a_x = \text{ПР}_{OX}\boldsymbol{a}$, $a_y = \text{ПР}_{OY}\boldsymbol{a}$, $a_z = \text{ПР}_{OZ}\boldsymbol{a}$.

Другими словами, каждой матрице–строке $(a \quad b \quad c)$ (или матрице–столбцу $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$) ставится в соответствие вектор $\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}$ в пространстве. В дальнейшем мы часто будем интерпретировать матрицы–строки и матрицы–столбцы как векторы.

Аналогично, каждую матрицу–строку $(a \quad b)$ или матрицу–столбец $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ из двух элементов будем представлять себе как вектор $\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}$ на плоскости.

§2. Скалярное произведение векторов, его свойства и вычисление

Определение. Скалярным произведением двух ненулевых векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. Если один из векторов равен нулю, то их скалярное произведение равно нулю. Скалярное произведение обозначается

$$\boldsymbol{ab} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \qquad (1)$$

Свойства скалярного произведения.

1. $\boldsymbol{ab} = \boldsymbol{ba}$, так как для ненулевых $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) = \cos(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}})$. Если же хоть один вектор — нулевой, то левая часть равна правой и равна нулю.

2. $\boldsymbol{a}^2 = \boldsymbol{aa} = |\boldsymbol{a}|^2$, $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$. Действительно, $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}}) = 1$.

3. $\boldsymbol{ab} = |\boldsymbol{a}|\text{ПР}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{b})$. Действительно, $\boldsymbol{ab} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=|\boldsymbol{a}|\text{ПР}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{b})$ (по Т.2 § 1)

4. $(\lambda\boldsymbol{a})\boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{ab})$. Действительно, по свойствам 1, 3) $(\lambda\boldsymbol{a})\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}(\lambda\boldsymbol{a}) = |\boldsymbol{b}|\ \text{ПР}_{\mathbf{b}}\ (\lambda\boldsymbol{a}) = \lambda\ |\boldsymbol{b}|\ \text{ПР}_{\mathbf{b}}\boldsymbol{a} = \lambda(\boldsymbol{ba}) = \lambda(\boldsymbol{ab})$.

5. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = \boldsymbol{ac}+\boldsymbol{bc}$. Действительно, $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = |\boldsymbol{c}|\text{ПР}_{\mathbf{c}}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{c}|\text{ПР}_{c}\boldsymbol{a} + {}$ $+|\boldsymbol{c}|\ \text{ПР}_{\mathbf{c}}\ \boldsymbol{b} = \boldsymbol{ac}+\boldsymbol{bc}$

Определение. Два вектора называются ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю.

Если $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ ортогональны, то пишут $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$. Итак, по определению $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{ab} = 0$.

Свойства ортогональных векторов.

- Два ненулевых вектора ортогональны если и только если угол между ними равен 90°. Если хоть один из двух векторов равен нулевому, то такие два вектора ортогональны. Таким образом, если два вектора перпендикулярны (то есть угол между ними равен 90º), то они ортогональны, но если векторы ортогональны, то они не обязательно перпендикулярны.
- Если вектор $\boldsymbol{a}$ ортогонален любому вектору пространства, то $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$. Действительно, если $\boldsymbol{ab} = \boldsymbol{0}$ для всех векторов $\boldsymbol{b}$, то в частности для $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}$ имеем $\boldsymbol{aa} = 0$, что равносильно $|\boldsymbol{a}| = \boldsymbol{0}$, то есть $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$.

Вычисление скалярного произведения векторов, заданных своими проекциями на оси.

Пусть $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$.

Тогда $\boldsymbol{ab}=(a_x\boldsymbol{i})\boldsymbol{b}+(a_y\boldsymbol{j})\boldsymbol{b}+(a_z\boldsymbol{k})\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$ (т.к. $\boldsymbol{ii} = \boldsymbol{jj} = \boldsymbol{kk} = 1, \boldsymbol{ij} = {}$ $= \boldsymbol{ik} = \boldsymbol{jk} = 0$) Итак,

$$\boldsymbol{ab}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z \qquad (2)$$

Вычисление длины вектора.

Пусть $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$. Тогда $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{aa}}$,

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2} \qquad (3)$$

Угол между векторами.

Пусть $\boldsymbol{a}$= $\{a_x, a_y, a_z\}$, $\boldsymbol{b}$= $\{a_x, a_y, a_z\}$. Тогда из равенства $\boldsymbol{ab} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$, следует, что

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) = \frac{\boldsymbol{ab}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} \qquad (4)$$

Подставляя вместо $\boldsymbol{ab}$, $|\boldsymbol{a}|$, $|\boldsymbol{b}|$ их выражения через проекции, получаем

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}} \qquad (5)$$

Направляющие косинусы вектора.

Определение. Направляющими косинусами вектора $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ называются косинусы углов, которые вектор $\boldsymbol{a}$ образует с осями координат. Таким образом, направляющие косинусы — это числа $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{i}})$, $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{j}})$, $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{k}})$.

1. По Т2 §1 a_x=$|\boldsymbol{a}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{i}})$, a_y=$|\boldsymbol{a}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{j}})$ a_z=$|\boldsymbol{a}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{k}})$, поэтому для направляющих косинусов справедливы формулы
$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{i}})=\frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|}$, $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{j}})=\frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|}$, $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{k}})=\frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}$, где $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ (6)
2. $\cos^2(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{i}}) + \cos^2(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{j}}) + \cos^2(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{k}}) = 1$

(Проверить самостоятельно!)

Обратно, любые три числа, сумма квадратов которых равна 1, могут быть взяты за направляющие косинусы некоторого вектора. Действительно, пусть $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$=1 и $M(x_0, y_0, z_0)$. Тогда радиус-вектор этой точки $\boldsymbol{OM} = \boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{e}$–вектор длины 1. Следовательно, x_0=$\cos(\widehat{\boldsymbol{e},\boldsymbol{i}})$, y_0= $\cos(\widehat{\boldsymbol{e},\boldsymbol{j}})$, z_0 =$\cos(\widehat{\boldsymbol{e},\boldsymbol{k}})$.

§3. Векторное произведение двух векторов, его свойства и вычисление

Определение. Два вектора называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Нулевой вектор коллинеарен любому вектору. Векторы, не являющиеся коллинеарными, называются неколлинеарными.

Замечание. Два вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда один из них получается умножением другого на некоторое число. Действительно, пусть векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны. Если один из них, например, $\boldsymbol{a}$, равен нулевому вектору, то $\boldsymbol{a} = 0 \cdot \boldsymbol{b}$. Если оба вектора ненулевые и $\boldsymbol{a} \uparrow\uparrow \boldsymbol{b}$,то $\boldsymbol{a} = \frac{|a|}{|b|} \cdot \boldsymbol{b}$. Если $\boldsymbol{a} \uparrow\downarrow \boldsymbol{b}$,то $\boldsymbol{a} = -\frac{|a|}{|b|}\boldsymbol{b}$.

Обратно, пусть $\boldsymbol{a} = \lambda\, \boldsymbol{b}$. Тогда векторы $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ коллинеарны по определению умножения вектора на число (см. § 1 гл. 2).

Определение. Три вектора называются компланарными, если они лежат в одной плоскости или параллельны какой-то одной плоскости. Если хоть один из трех векторов является нулевым, то эти три вектора компланарны. Три вектора, не являющиеся компланарными, называются некомпланарными.

Определение. Пусть $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ – три некомпланарных вектора. Говорят, что векторы $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ образуют правую тройку векторов, если из конца третьего вектора $\boldsymbol{c}$ кратчайший поворот от первого вектора $\boldsymbol{a}$ ко второму вектору $\boldsymbol{b}$ виден совершающимся против часовой стрелки (рис.1).

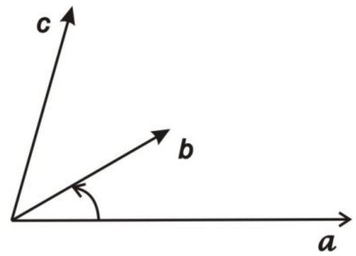


Рис.1. Правая тройка векторов

В противном случае говорят, что векторы $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ образуют левую тройку (рис.2).

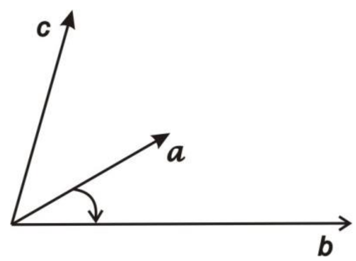


Рис.2. Левая тройка векторов

Приписать каждой тройке некомпланарных векторов термин «правая» или «левая» — это значит приписать ей ориентацию.

Определение. Векторным произведением векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется третий вектор $\boldsymbol{c}$ со следующими свойствами:

1. если $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны, то их векторное произведение равно нулевому вектору.

2. если $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ неколлинеарны, то а) $|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}})$, то есть длина векторного произведения двух векторов численно равна площади параллелограмма, построенного на этих векторах; б) вектор $\boldsymbol{c}$ перпендикулярен плоскости векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, причем векторы $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ образуют правую тройку.

Вектор $\boldsymbol{c}$ обозначается $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$.

Пример.

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\mathbf{0}\ ;\ \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\ ;\ \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j}\ ;\ \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k};\ \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}\ ;\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\ ;\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i}\ ;\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\mathbf{0} \qquad (1)$$

(рис.3).

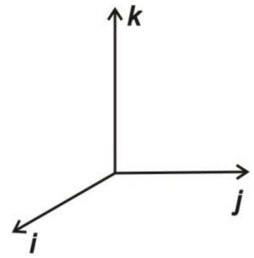


Рис.3. Векторные произведения ортов координатных осей

Свойства векторного произведения.

1. $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их векторное произведение равно нулевому вектору (следует из определения).

2. $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$ **,** т.к. длины векторов $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$ одинаковы, оба ортогональны плоскости векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, но направлены в противоположные стороны.

3. $(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\quad \boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$

4. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\qquad \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$

Доказательство (рис.4).

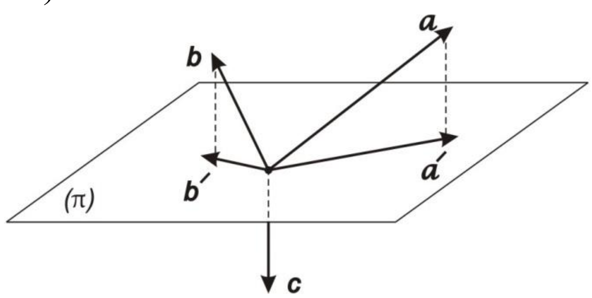


Рис.4. Доказательство свойства 4

Пусть $|\mathrm{c}|=1$ (если $\boldsymbol{c}=\mathbf{0}$, то левая и правая части равенства — нулевые векторы). Рассмотрим плоскость (π), которая перпендикулярна вектору $\boldsymbol{c}$**.** Обозначим $\boldsymbol{a}'$ вектор, полученный из вектора $\boldsymbol{a}$ проецированием его на (π). Тогда имеют место следующие равенства:

а) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})'=\boldsymbol{a}'+\boldsymbol{b}'$

б) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}'\times\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}'\times\boldsymbol{c},\ \ (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})'\times\boldsymbol{c}$ (равенства а) и б) проверьте самостоятельно).

Векторы $\boldsymbol{a}' \times \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{b}' \times \boldsymbol{c}$, $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})' \times \boldsymbol{c}$ получаются соответственно из векторов $\boldsymbol{a}'$, $\boldsymbol{b}'$, $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})'$ поворотом на 90º в плоскости (π) по определению векторного произведения.

Действительно, $|\boldsymbol{a}' \times \boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}\,|$ вектор $\boldsymbol{a}' \times \boldsymbol{c}$ перпендикулярен вектору $\boldsymbol{c}$ и, значит, вектор $\boldsymbol{a}' \times \boldsymbol{c}$ лежит в плоскости (π), вектор $\boldsymbol{a}' \times \boldsymbol{c}$ перпендикулярен вектору $\boldsymbol{a}'$**.**

Параллелограмм, построенный на векторах $\boldsymbol{a}'$ и $\boldsymbol{b}'$, поворачиваясь на 90º в плоскости (π), совпадет с параллелограммом, построенным на векторах $\boldsymbol{a}' \times \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{b}' \times \boldsymbol{c}$. Поэтому $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})' \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}' \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b}' \times \boldsymbol{c}$, но тогда и $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} == \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$ (по равенству б)).

Если $|\boldsymbol{c}| \neq 1$, то $\boldsymbol{c} = |\boldsymbol{c}|\boldsymbol{e}$, где $\boldsymbol{e}$ **–** единичный вектор, тогда $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} =$
$= (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \times (|\boldsymbol{c}|\boldsymbol{e}) = |\boldsymbol{c}|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{e} = |\boldsymbol{c}|(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{e} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{e}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$.

Вычисление векторного произведения через проекции сомножителей.

Пусть $\boldsymbol{a}= a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}= b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}$**.**

Тогда, используя свойства 4) и 3) векторного произведения и равенства (1), получаем

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \left(a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}\right) \times \left(b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}\right) =$$
$$= a_x\boldsymbol{i} \times \left(b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}\right) + a_y\boldsymbol{j} \times \left(b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}\right) +$$
$$+a_z\boldsymbol{k} \times \left(b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}\right)\left(a_yb_z - a_zb_y\right)\boldsymbol{i} - (a_xb_z - a_zb_x)\boldsymbol{j} + \left(a_xb_y - a_yb_x\right)\boldsymbol{k}$$

Итак, получили

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a_yb_z - a_zb_y)\boldsymbol{i} - (a_xb_z - a_zb_x)\boldsymbol{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\boldsymbol{k} \qquad (2)$$

Поэтому, по формуле (6) §1 главы 1 имеем

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\boldsymbol{k} \qquad (3)$$

Допуская векторы в качестве элементов определителя, получаем

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \qquad (4)$$

Действительно, раскладывая этот определитель по первой строке (формула 10, §3, глава 1), получаем (3).

Замечание 1. Пусть $\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j}$; $\boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j}$**.**

Проверим, что абсолютная величина определителя 2-го порядка $\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$ равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$.

Действительно, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_x & a_y & 0\\ b_x & b_y & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\boldsymbol{k}$.

Вычисляем длины векторов, стоящих в обеих частях этого равенства

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|a_xb_y-a_yb_x|.$$

Значит, площадь параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$, равна абсолютной величине определителя 2-го порядка $\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}$.

Замечание 2. Векторы $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}=0$$

Доказательство.

Необходимость. $\boldsymbol{a}$ коллинеарен $\boldsymbol{b}$, тогда $\boldsymbol{a}$ получаем умножением $\boldsymbol{b}$ на некоторое λ.

Следовательно, $a_x=\lambda b_x;\ a_y=\lambda b_y$ и $\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda b_x & \lambda b_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}=\lambda b_xb_y-$ $-\lambda b_xb_y=0$

Достаточность. Если $\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}=0$, то, по свойству 2 определителя 2-го порядка (гл.1 § 1), $a_x=\lambda b_x$, $a_y=\lambda b_y$, т.е.

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}=\lambda b_x\boldsymbol{i}+\lambda b_y\boldsymbol{j}=\lambda\left(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}\right)=\lambda\boldsymbol{b}$$

Замечание 3. Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам единственно.

Пусть $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}$ – два неколлинеарных вектора, $\boldsymbol{c}=c_x\boldsymbol{i}+$ $+c_y\boldsymbol{j}$ – произвольный вектор на плоскости. Покажем, что существует только одно разложение вектора $\boldsymbol{c}$ по векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Для этого найдём коэффициенты α и β такие, что

$$\boldsymbol{c}=\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}\qquad(5)$$

Подставляя вместо $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ их выражения и приравнивая коэффициенты при $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$ в левой и правой частях равенства, получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными α, β

$$\begin{cases}c_x=\alpha a_x+\beta b_x\\ c_y=\alpha a_y+\beta b_y\end{cases}\qquad(6)$$

В силу неколлинеарности $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ определитель

$$\begin{vmatrix}a_x & b_x\\ a_y & b_y\end{vmatrix}\neq 0 \text{ (по предыдущему Замечанию 2).}$$

Поэтому (Теорема 1, § 1, гл.1)) система (6) имеет единственное решение. Значит, разложение (5) единственно.

Замечание 3 можно легко доказать исходя из аксиом планиметрии, так как всякий вектор можно единственным образом представить как диагональ соответствующего параллелограмма.

§4. Смешанное произведение трех векторов

Определение. Смешанным произведением трех векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ и вектора $\boldsymbol{c}$. Оно обозначается $\boldsymbol{abc}$.

Свойства смешанного произведения.

1) $\boldsymbol{abc} = \boldsymbol{0}$ тогда и только тогда, когда три вектора $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ компланарны. Действительно, если $\boldsymbol{abc} = 0$ и хоть один из векторов— нулевой, то $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ компланарны по определению. Если среди $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ нет нулевых, но $0 = \boldsymbol{abc} = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$, то $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \perp \boldsymbol{c}$. Следовательно, возможны два варианта:

или $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ и тогда $\boldsymbol{a}$ коллинеарен $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ компланарны (см. рис.1а)

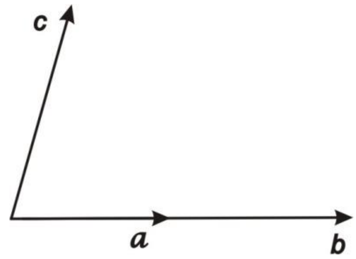


Рис. 1 а). Взаимное расположение трёх векторов в случае равенства нулю векторного произведения двух из них

или $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ и тогда $\boldsymbol{c}$ лежит в плоскости векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ (см. рис. 1 б).

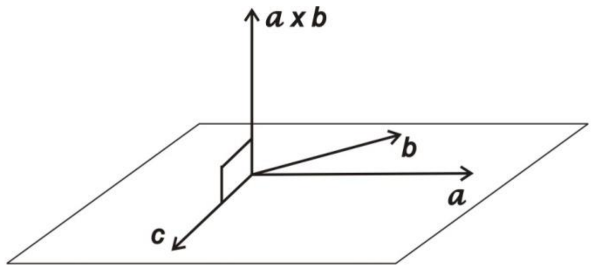


Рис. 1 б). Взаимное расположение трёх векторов в случае отличного от нуля векторного произведения двух из них

Обратно, если $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ компланарны, то $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = 0$ т.к. в этом случае $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \perp \boldsymbol{c}$.

2) Смешанное произведение трех некомпланарных векторов равно по абсолютной величине объему параллелепипеда, построенного на этих векторах.

Пусть $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ – правая тройка (см. рис. 2).

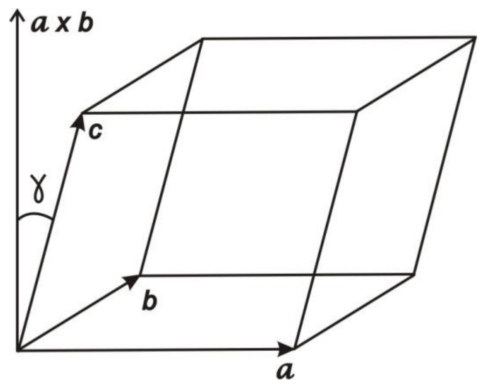


Рис.2. Смешанное произведение трёх векторов, образующих правую тройку

Тогда $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\,|\boldsymbol{c}|\cos\gamma=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\text{ПР}_{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}\boldsymbol{c}=S\text{ПР}_{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}\boldsymbol{c}$ =SH=V, где

S – площадь основания параллелепипеда,

H – высота параллелепипеда,

V – объём параллелепипеда.

Если $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ – левая тройка (см. рис.3), то $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\,|\boldsymbol{c}|\cos(\pi-\gamma)=$ $=S\,(-H)=-V.$

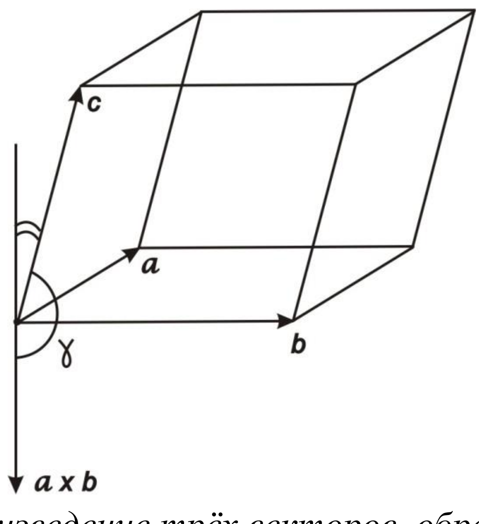


Рис.3. Смешанное произведение трёх векторов, образующих левую тройку

Таким образом, знак смешанного произведения говорит об ориентации трёх векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$**.** Именно, если $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ – правая тройка, то $\boldsymbol{abc}>0$ и если $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ – левая тройка, то $\boldsymbol{abc}<0$.

3) $\boldsymbol{abc}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$.

Действительно, если $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ – правая тройка, то $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}$ – тоже правая тройка, и $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})\boldsymbol{a} = V$ – объём параллелепипеда, построенного на $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$, но основанием считается грань, натянутая на векторы $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$. Если $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ – левая тройка, то $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}$ – тоже левая тройка и $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})\boldsymbol{a} = -V$.

Вычисление смешанного произведения через проекции сомножителей.

Пусть $\boldsymbol{a}= a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c} = c_x\boldsymbol{i} + c_y\boldsymbol{j} + c_z\boldsymbol{k}$

Тогда $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\boldsymbol{k},$ по формуле (10) §3 гл.1.

Следовательно, $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} c_x - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} c_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} c_z = = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$, по формулам (2) §2 гл.2 и (13) §3 гл.1.

Итак, $\boldsymbol{abc} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$.

Следствие 1. (Геометрический смысл определителя 3-го порядка).

Объединяя свойство (2) и выведенную формулу для смешанного произведения, мы видим, что определитель 3-го порядка по абсолютной величине равен объёму параллелепипеда, построенного на векторах, проекции которых стоят в строчках (или столбцах) определителя.

Следствие 2. Любой вектор в пространстве можно разложить по трём некомпланарным векторам единственным образом.

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c} = c_x\boldsymbol{i} + c_y\boldsymbol{j} + c_z\boldsymbol{k}$ – три некомпланарных вектора. Тогда их смешанное произведение отлично от нуля.

$$\boldsymbol{abc} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (1)$$

(свойство 1) смешанного произведения).

Проверим, что любой вектор $\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k}$ можно единственным образом записать в виде

$$\boldsymbol{v} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c}\,, \qquad (2)$$

где α, β, γ – некоторые числа. Для их нахождения подставим в (2) выражения векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{v}$ через их проекции

$$v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k} = (\alpha a_x + \beta b_x + \gamma c_x)\boldsymbol{i} + (\alpha a_y + \beta b_y + \gamma c_y)\boldsymbol{j} + (\alpha a_z + \beta b_z + \\ + \gamma c_z)\boldsymbol{k} \qquad (3)$$

Равные векторы имеют равные проекции на ось (Следствие 1, Теорема 2, § 1, гл.2). Поэтому, приравнивая коэффициенты при $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ в обеих частях (3), получаем систему

$$\begin{cases} \alpha a_x + \beta b_x + \gamma c_x = v_x \\ \alpha a_y + \beta b_y + \gamma c_y = v_y \\ \alpha a_z + \beta b_z + \gamma c_z = v_z \end{cases} \qquad (4)$$

Определитель матрицы этой системы отличен от нуля

$$D = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \boldsymbol{abc} \neq 0$$

(здесь мы использовали равенство определителей транспонированных матриц и равенство (1)). Поэтому система (4) имеет единственное решение, которое можно найти по формулам (10) §3 гл. 1.

$$\alpha = \frac{D_1}{D}\ ;\ \beta = \frac{D_2}{D}\ ;\ \gamma = \frac{D_3}{D}$$

Утверждение доказано.

Заметим, что Следствие 2 можно доказать геометрически, представив любой вектор как диагональ соответствующего параллелепипеда.

§5. Двойное векторное произведение векторов

Определение. Двойным векторным произведением векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ называется вектор

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$$

Свойства двойного векторного произведения.

1) $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{ac}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{ab})$ (1)

Доказательство. Сначала допустим, что $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ коллинеарны. Тогда левая часть равенства — это нулевой вектор. Проверим, что и правая часть равенства — тоже нулевой вектор. Пусть, например, $\boldsymbol{c} = \alpha\boldsymbol{b}$. Тогда $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{ac}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{ab}) =$
$= \boldsymbol{b}(\alpha\boldsymbol{ab}) - \alpha\boldsymbol{b}(\boldsymbol{ab}) = (\boldsymbol{ab})(\alpha\boldsymbol{b} - \alpha\boldsymbol{b}) = 0$.

Теперь предположим, что $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ неколлинеарны. Введём систему координат в пространстве. Для этого в плоскости векторов $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ ось *Ox* направим по вектору $\boldsymbol{b}$, а ось *Oy* направим перпендикулярно к оси *Ox*. Ось *Oz* выберем так, чтобы три орта $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ этих осей образовали правую тройку.

Тогда

$$\boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} \qquad \boldsymbol{c} = c_x\boldsymbol{i} + c_y\boldsymbol{j} \qquad \boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$$

По формуле для скалярного произведения

$$\boldsymbol{ac}=a_xc_x + a_yc_y$$

Поэтому

$$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{ac}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{ab})=a_yb_xc_y\boldsymbol{i} - a_xb_xc_y\boldsymbol{j} \qquad (2)$$

С другой стороны, по формуле (4) § 3 гл. 2 для векторного произведения

$$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ b_x & 0 & 0 \\ c_x & c_y & 0 \end{vmatrix} = b_xc_y\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ 0 & 0 & b_xc_y \end{vmatrix} = a_yb_xc_y\boldsymbol{i} - a_xb_xc_y\boldsymbol{j} \qquad (3)$$

Сравнивая (2) и (3), видим, что

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{ac}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{ab})$$

Формула (1) доказана.

Таким образом, двойное векторное произведение $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ лежит в плоскости векторов $\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}.$ Формула (1), по которой $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ выражается через $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$, называется «БАЦ-ЦАБ».

2) Имеет место равенство $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) + \boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) + \boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$ для всех векторов $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$. (Тождество Якоби).

Доказательство. По предыдущему свойству $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) + \boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) + \boldsymbol{b}\times$ $\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{ac}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{ab}) + \boldsymbol{a}(\boldsymbol{bc}) - \boldsymbol{b}(\boldsymbol{ac}) + \boldsymbol{c}(\boldsymbol{ab}) - \boldsymbol{a}(\boldsymbol{bc}) = \boldsymbol{0}$

Тождество Якоби доказано.

§ 6. Примеры решения задач

1) Проверить, что три точки $A(2,4,1)$; $B(3,7,5)$; $C(4,10,9)$ лежат на одной прямой

Решение.

Из определения коллинеарности векторов ясно, что три точки A,B,C лежат на одной прямой, тогда и только тогда, когда векторы $\boldsymbol{AB}$ и $\boldsymbol{AC}$ коллинеарны.

$\boldsymbol{AB} = \{1,3,4\}$; $\boldsymbol{AC} = \{2,6,8\}$. Видим, что проекции векторов $\boldsymbol{AB}$ и $\boldsymbol{AC}$ пропорциональны

$$\frac{2}{1} = \frac{6}{3} = \frac{8}{4} = 2$$

Значит, векторы $\boldsymbol{AB}$ и $\boldsymbol{AC}$ коллинеарны, то есть точки A,B,C лежат на одной прямой.

2) Установить, лежат ли четыре точки $A(3,1,0)$; $B(0,7,2)$; $C(-1,0,-5)$; $D(4,1,5)$ или $A(1,1,1)$; $B(0,2,4)$; $C(1,3,3)$; $D(4,0,-3)$ в одной плоскости или нет.

Решение.

Из определения компланарности векторов ясно, что четыре точки A, B, C и D лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда векторы $\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{AC}$ и $\boldsymbol{AD}$ компланарны. Последнее равносильно тому, что смешанное произведение $\boldsymbol{AB}\cdot\boldsymbol{AC}\cdot\boldsymbol{AD}=0$. Имеем

а) $\boldsymbol{AB}=\{-3;6;2\}; \boldsymbol{AC}=\{-4;-1;-5\}; \boldsymbol{AD}=\{1;0;5\}$

$\boldsymbol{AB}\cdot\boldsymbol{AC}\cdot\boldsymbol{AD}=\begin{vmatrix}-3 & 6 & 2\\ -4 & -1 & -5\\ 1 & 0 & 5\end{vmatrix}=107\neq 0$ Следовательно, точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости.

б) $\boldsymbol{AB}=\{-1;1;3\}; \boldsymbol{AC}=\{0;2;2\}; \boldsymbol{AD}=\{3;-1;-4\}$

$\boldsymbol{AB}\cdot\boldsymbol{AC}\cdot\boldsymbol{AD}=\begin{vmatrix}-1 & 1 & 3\\ 0 & 2 & 2\\ 3 & -1 & -7\end{vmatrix}=0$. Следовательно, точки A, B, C, D лежат в одной плоскости.

3) Разложить вектор $\boldsymbol{x}=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$ по векторам $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c}=$ $=\boldsymbol{k}-2\boldsymbol{i}$

Решение.

Найдём три числа α, β, γ такие, что $\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}+\gamma\boldsymbol{c}$**.** Приравняем проекции векторов, получим систему $\begin{cases}2=\alpha-2\gamma\\ 3=-\alpha+\beta\\ 4=-\beta+\gamma\end{cases}$.Решая эту систему методом исключения или по формулам (10) § 2 гл. 1, получаем $\alpha=-16;\ \beta=-13;\ \gamma=$ $=-9$.

Ответ. $\boldsymbol{x}=-16\boldsymbol{a}-13\boldsymbol{b}-9\boldsymbol{c}$**.**

4) а) Найти длину вектора $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{m}-4\boldsymbol{n}$, зная, что $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}$ – взаимно перпендикулярные орты.

б) Найти угол между векторами $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{p}+2\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{p}+5\boldsymbol{q}$ где $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ – взаимно перпендикулярные орты.

в) Если $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$, найти $|\boldsymbol{c}|$, зная $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$.

г) Вычислить длину диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}=5\boldsymbol{p}+2\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{p}-3\boldsymbol{q}$**,** если известно, что $|\boldsymbol{p}|=2\sqrt{2}$, $|\boldsymbol{q}|=3$,

$(\widehat{\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}}) = \frac{\pi}{4}$. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$.

д) В треугольнике ABC $\boldsymbol{AB} = 5\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}$; $\boldsymbol{BC} = 2\boldsymbol{a} - 4\boldsymbol{b}$; $\boldsymbol{CA} = -7\boldsymbol{a} + +2\boldsymbol{b}$, где $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ – взаимно перпендикулярные орты. Найти длину медианы AM и высоты AD треугольника ABC.

Решение.

а) $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}} = \sqrt{(3\boldsymbol{m} - 4\boldsymbol{n})\cdot(3\boldsymbol{m} - 4\boldsymbol{n})} = \sqrt{9+16} = 5$. Используем то, что $|\boldsymbol{m}| = |\boldsymbol{n}| = 1$ и $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n} = 0$.

б) $\cos\left(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}\right) = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \frac{(3\boldsymbol{p}+2\boldsymbol{q})(\boldsymbol{p}+5\boldsymbol{q})}{\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}\sqrt{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}}} = \frac{3+10}{\sqrt{13}\sqrt{26}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, следовательно, угол между векторами $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ равен $\frac{\pi}{4}$.

в) $\boldsymbol{c} = -\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$.Значит, $|\boldsymbol{c}| = \sqrt{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}} = \sqrt{(-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})(-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})} = \sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}}$

г) $\boldsymbol{d_1} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = 6\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}$; $\boldsymbol{d_2} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = 4\boldsymbol{p} + 5\boldsymbol{q}$

$$|\boldsymbol{d_1}| = \sqrt{\boldsymbol{d_1}\cdot\boldsymbol{d_1}} = \sqrt{36\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p} - 12\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q} + \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{q}} = \sqrt{288 - 72 + 9} = 15$$

$$|\boldsymbol{d_2}| = \sqrt{\boldsymbol{d_2}\cdot\boldsymbol{d_2}} = \sqrt{16\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p} + 40\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q} + 25\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{q}} = \sqrt{128 + 240 + 225} = \sqrt{593}$$

Найдём $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = (5\boldsymbol{p} + 2\boldsymbol{q})\times(\boldsymbol{p} - 3\boldsymbol{q}) = -15\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q} + 2\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{p} = -17\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q}$

Поэтому $S_{\text{параллелограмма}} = |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = |-17\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q}| = 17|\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q}| = 17|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|\sin\frac{\pi}{4} = = 17\cdot 2\sqrt{2}\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 102$

д) $\boldsymbol{AM} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{AC}) = \frac{1}{2}(5\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b} + 7\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}) = 6\boldsymbol{a}$; $|\boldsymbol{AM}| = 6$. Высота $|\boldsymbol{AD}|$ равна частному от деления площади параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{AB}$ и $\boldsymbol{BC}$, на длину основания $|\boldsymbol{BC}|$.

$$\boldsymbol{AB}\times\boldsymbol{BC} = (5\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b})\times(2\boldsymbol{a} - 4\boldsymbol{b}) = -24\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\,; S = |-24\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = 24$$

$$|\boldsymbol{BC}| = \sqrt{\boldsymbol{BC}\cdot\boldsymbol{BC}} = \sqrt{(2\boldsymbol{a} - 4\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a} - 4\boldsymbol{b})} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$|\boldsymbol{AD}| = \frac{S}{|\boldsymbol{BC}|} = \frac{24}{2\sqrt{5}} = \frac{12}{\sqrt{5}}$$

5) Действия с векторами, заданными своими проекциями на оси координат. Пусть $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}\,, \boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j},\ \ \boldsymbol{c} = \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$. Найти $\boldsymbol{ab}$, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{abc}$, $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$. Проверить БАЦ-ЦАБ. Найти объёмы параллелепипеда и тетраэдра, построенных на векторах $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$. Найти высоту, опущенную на основание, образованное этими векторами и его площадь.

Решение.

1) $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{3}$ $\quad \frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a} = \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{k}$; $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{i}})$ $=\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{j}})$ $=\cos\left(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{k}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$|\boldsymbol{b}| = \sqrt{2}$ $\quad \frac{1}{|\boldsymbol{b}|}\boldsymbol{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{j}$; $\cos\left(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{i}}\right)$ $=\cos\left(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{j}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$;$\cos\left(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{k}}\right) = 0$

2) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2$; $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$; $\boldsymbol{abc}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=1$

3) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k}+\boldsymbol{j}$; $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=$

$=\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k}-\boldsymbol{j})=\begin{vmatrix}i & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{k}.$ Проверим БАЦ-ЦАБ

$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})-\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{k}$. Видим, что

$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})-\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{k}$

4) $V_{\text{параллелепипеда}}=\mathbf{abc}=1$; $V_{\text{тетраэдра}}=\frac{1}{6}V_{\text{параллелепипеда}}=\frac{1}{6}$;

$S_{\text{основания}}=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$; $H=\frac{V}{S}=\frac{1}{\sqrt{2}}$;

5) Доказать: $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{ac} & \boldsymbol{ad}\\ \boldsymbol{bc} & \boldsymbol{bd}\end{vmatrix}$,

$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{d})\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=0$,

$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=\boldsymbol{c}(\boldsymbol{abd})-\boldsymbol{d}(\boldsymbol{abc})$

Решение.

1) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=\boldsymbol{a}\cdot\big(\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})\big)=\boldsymbol{a}\cdot\big(\boldsymbol{c}(\boldsymbol{bd})-\boldsymbol{d}(\boldsymbol{bc})\big)=$

$=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{ac} & \boldsymbol{ad}\\ \boldsymbol{bc} & \boldsymbol{bd}\end{vmatrix}$ (см. (6), § 1, гл.1).

2) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{d})\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=$

$=(\boldsymbol{ac})(\boldsymbol{bd})-(\boldsymbol{ad})(\boldsymbol{bc})+(\boldsymbol{ad})(\boldsymbol{cb})-(\boldsymbol{ab})(\boldsymbol{cd})+(\boldsymbol{ab})(\boldsymbol{cd})-(\boldsymbol{ac})(\boldsymbol{bd})=0$

3) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=\boldsymbol{c}\cdot\big((\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{d}\big)-\boldsymbol{d}\cdot\big((\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}\big)=$

$=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{abd})-\boldsymbol{d}\cdot(\boldsymbol{abc})$**.**

6) Из точки O исходят три вектора $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$, образующие между собой углы, равные $\alpha\neq 0$. Найти необходимое и достаточное условие того, чтобы эти векторы были компланарными?

Решение.

Если $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ компланарны и α– угол между ними, то очевидно $\alpha=\frac{2\pi}{3}$.

Обратно, пусть $\alpha=\frac{2\pi}{3}$ – общее значение угла между ними. Без ограничения общности будем считать, что $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ – орты, т.е. $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=1$ и занумерованы так, что образуют правую тройку. Введём декартову прямоугольную СК $Oxyz$, взяв плоскость векторов $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ за плоскость Oxy и пустив ось Ox в направлении вектора $\boldsymbol{a}$. Из условия равенства углов между векторами $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ получаем, что скалярные произведения $\boldsymbol{ab} = \boldsymbol{ac} = \boldsymbol{bc} =$ $= \cos\alpha = -\frac{1}{2}$ (см. (1) § 2 гл. 2). Поэтому имеем $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i}; \boldsymbol{b} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{j}.$

Найдём вектор $\boldsymbol{c}$ из условий $\boldsymbol{ac} = \boldsymbol{bc} = -\frac{1}{2}$ и $|\boldsymbol{c}| = 1$. Пусть $\boldsymbol{c} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$. Тогда $\boldsymbol{ac} = x = -\frac{1}{2}$ и $\boldsymbol{bc} = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}y = -\frac{1}{2}$, откуда $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Для нахождения z используем условие $|\boldsymbol{c}| = 1$; $x^2 + y^2 + z^2 = 1$; $\frac{1}{4} + \frac{3}{4} + z^2 = 1$.

Отсюда $z = 0$. Итак, $\boldsymbol{c} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{j}$. Видим, что $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ —компланарны.

Ответ. Угол между векторами равен $\frac{2\pi}{3}$.

6) Доказать, что векторы $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$, удовлетворяющие условию $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} +$ $+ \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$, компланарны.

Решение.

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$$

Умножим обе части этого равенства скалярно на $\boldsymbol{c}$. Получим $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = 0$. Следовательно, векторы $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ компланарны.

7) Три вектора $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда существуют три числа, α,β,γ, не равные одновременно нулю, для которых выполнено равенство $\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c} = 0$.

Решение.

Необходимость. Допустим, что векторы $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, c$ компланарны. Проверим, что тогда существуют числа α, β, γ с указанными свойствами.

Разберём три возможных случая.

Во-первых, если хоть один из векторов, например, $\boldsymbol{a}$, нулевой, то берём α=1, β=γ=0 и получим

$$1 \cdot \boldsymbol{a} + 0 \cdot \boldsymbol{b} + 0 \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$$

Во-вторых, пусть все векторы — ненулевые, но среди них есть по крайней мере два, например $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, коллинеарные между собой. Тогда $\boldsymbol{a} = \lambda\,\boldsymbol{b}$, где $\lambda = \pm\frac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}$ и знак «+» берём при $\boldsymbol{a} \uparrow\uparrow \boldsymbol{b}$, знак «–» берём при $\boldsymbol{a} \uparrow\downarrow \boldsymbol{b}$. Следовательно, имеем α=1, β=– λ ,γ=0 и

$$1 \cdot \boldsymbol{a} - \lambda \cdot \boldsymbol{b} + 0 \cdot \boldsymbol{c} = 0$$

В-третьих, пусть все векторы ненулевые и никакие два из них не коллинеарны между собой (см. рис.1).

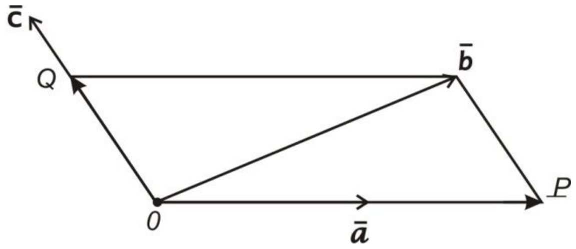


Рис.1. Условие компланарности трёх векторов

Через конец вектора $\boldsymbol{b}$ проведём в плоскости векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ прямые, параллельные $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{c}$. Они пересекут прямые, на которых лежат векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{c}$ в точках P и Q. Тогда

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{OP} + \boldsymbol{OQ} = \alpha\boldsymbol{a} + \gamma\boldsymbol{c}$$

где $\alpha = \pm\frac{|\boldsymbol{OP}|}{|\boldsymbol{a}|}, \gamma = \pm\frac{|\boldsymbol{OQ}|}{|\boldsymbol{c}|}$. Тогда $\alpha, \beta = -1, \gamma$ – требуемые.

Достаточность. Допустим, что

$$\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$$

и среди чисел α, β, γ есть хоть одно ненулевое. Предположим, что, например, $\alpha \neq 0$. Тогда перенесём $\beta\boldsymbol{b}$ и $\gamma\boldsymbol{c}$ в правую часть равенства и поделим обе части на α.

$$\boldsymbol{a} = -\frac{\beta}{\alpha}\boldsymbol{b} - \frac{\gamma}{\alpha}\boldsymbol{c}$$

Видим, что $\boldsymbol{a}$ лежит в плоскости векторов $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$.

8) а) Найти вектор $\boldsymbol{x}$, зная, что $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{b}$, где $\boldsymbol{a} = \{2; -3; 1\}$, $\boldsymbol{b} =$ $= \{1; -2; 3\}$ и удовлетворяет условию $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 7\boldsymbol{k}) = 10$.

б) Найти вектор $\boldsymbol{x}$, зная, что $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{a} = 4$, $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$, где

1) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}; \boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}; \boldsymbol{c} = -\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$

2) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}; \boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{2}\boldsymbol{j} + \boldsymbol{3}\boldsymbol{k}; \boldsymbol{c} = \boldsymbol{2}\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$

3) $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} - \boldsymbol{k}; \boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}; \boldsymbol{c} = -\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$

Решение.

а) Ищем в виде $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{i} + x_2\boldsymbol{j} + x_3\boldsymbol{k}$. Из условия, применяя следствие 1 Теоремы 2 § 1 гл.2, получаем систему $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 7x_3 \end{cases}$

Решаем её методом исключения или по формулам (10) § 2 гл.1, получаем

$$\boldsymbol{x} = 7\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$$

б)

1) Вектор $\boldsymbol{x}$ ищем в виде $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{i} + x_2\boldsymbol{j} + x_3\boldsymbol{k}$**.** Из условия, применяя

Следствие 1 Теоремы 2 § 1 гл.2, получаем систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_2 - 2x_3 = -1 \\ -3x_1 + x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$$

Решаем её методом исключения: из первого уравнения выражаем x_1 и подставляем в остальные. Получаем ответ $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$.

2) Для нахождения $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{i} + x_2\boldsymbol{j} + x_3\boldsymbol{k}$ получаем систему $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_2 - 2x_3 = 2 \\ -3x_1 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 = -1 \end{cases}$

Решаем её методом исключения: из первого уравнения выражаем x_1 и подставляем в остальные

$\begin{cases} x_1 = 4 - x_2 - x_3 \\ 3x_2 - 2x_3 = 2 \\ 3x_2 + 4x_3 = 13 \\ 3x_2 + 2x_3 = 9 \end{cases}$. Отсюда $\begin{cases} x_1 = 4 - x_2 - x_3 \\ 3x_2 - 2x_3 = 2 \\ 6x_3 = 11 \\ 4x_3 = 7 \end{cases}$ Система несовместна.

4) $\begin{cases} 3x_1 - x_3 = 4 \\ 3x_2 - 2x_3 = -1 \\ -3x_1 + x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$ Система несовместна, так как первое и третье равенства невозможны одновременно.

11. Повернуть вектор $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$ на угол 90° вокруг оси (l), проходящей через точку $\boldsymbol{O}$ $(0, 0, 0)$ и составляющей равные углы с осями координат.

Решение.

Единичный вектор $\boldsymbol{e} = e_x\boldsymbol{i} + e_y\boldsymbol{j} + e_z\boldsymbol{k}$, идущий по оси (l), образует равные углы с осями координат. Поэтому все его направляющие косинусы равны между собой и по формулам (6) §2 гл.1 получаем

$$e_x = e_y = e_z = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Представим себе вектор $\boldsymbol{a}$ как диагональ прямоугольника, одна сторона которого идёт по оси (l), а другая лежит в плоскости (π), перпендикулярно к (l), то есть $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$. Повернуть вектор $\boldsymbol{a}$ на $90°$ вокруг оси (l) – это значит повернуть рассматриваемый прямоугольник, как страницу книги, на $90°$ (см. рис.2).

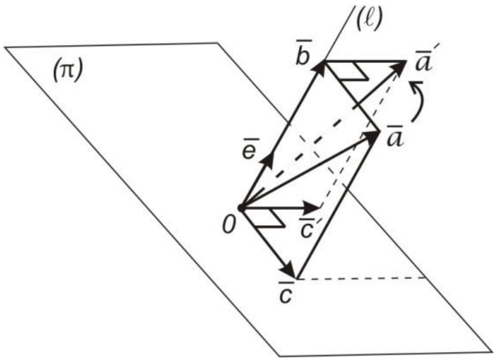


Рис.2. Поворот прямоугольника на 90°

Тогда вектор $\boldsymbol{a}'$, идущий по диагонали в повёрнутом прямоугольнике, есть результат поворота вектора $\boldsymbol{a}$ на 90°.

Найдём $\boldsymbol{a}'$. Из рис.2 видно, что

$$\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}', \qquad (1)$$

где вектор $\boldsymbol{c}'$ получен поворотом вектора $\boldsymbol{c}$ в (π) на 90°.

Имеем $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{e} \cdot \text{ПР}_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{a}$, где $\text{ПР}_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{3}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$.

Поэтому $\boldsymbol{b} = 2\sqrt{3}\boldsymbol{e} = 2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$; $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}$.

Известно (см. доказательство свойства дистрибутивности векторного произведения), что векторное умножение любого вектора на единичный вектор $\boldsymbol{e}$ поворачивает этот вектор на $90°$ в плоскости (π). Поэтому

$$\boldsymbol{c}' = \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{e} = \begin{vmatrix} i & \boldsymbol{j} & k \\ -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{i} + \frac{2}{\sqrt{3}}\boldsymbol{j} - \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{k}$$

Следовательно, из (1) имеем

$$\boldsymbol{a}' = (\boldsymbol{2i} + \boldsymbol{2j} + \boldsymbol{2k}) + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{i} + \frac{2}{\sqrt{3}}\boldsymbol{j} - \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{k}\right)$$
$$= \left(2 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\boldsymbol{i} + \left(2 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\boldsymbol{j} + \left(2 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\boldsymbol{k}$$

– ответ.

12. Найти расстояние между двумя непересекающимися диагоналями двух смежных граней куба со стороной a.

Решение.

Введём декартову прямоугольную систему координат, как показано на рис. 3.

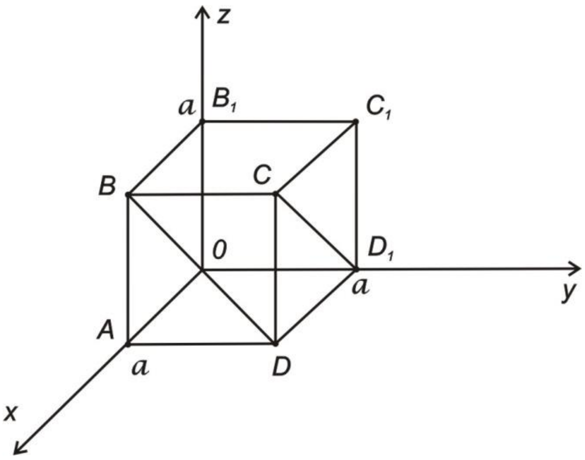


Рис.3. Куб со стороной a в декартовой прямоугольной системе координат

и обозначим вершины куба буквами $A, B, C, D, O, B_1, C_1, D_1$. Тогда их координаты $B(a, 0, a), C(a, a, a), D(a, a, 0), D_1(0, a, 0)$, а векторы, идущие по сторонам куба, имеют проекции $\boldsymbol{BO} = \boldsymbol{CD_1} = \{-a; 0; -a\}$; $\boldsymbol{BD} = \{0; a; -a\}$; $\boldsymbol{BC} = \{0; a; 0\}$.

Найдём расстояние между (CD_1) и (BD). Ясно, что $\boldsymbol{BO} = \boldsymbol{CD_1}$. Поэтому направленный отрезок (CD_1) параллелен плоскости векторов $\boldsymbol{BD}$ и $\boldsymbol{BO}$. Рассмотрим параллелепипед, натянутый на векторы $\boldsymbol{BD}, \boldsymbol{BO}$ и $\boldsymbol{BC}$. При этом считаем, что его нижнее основание натянуто на $\boldsymbol{BD}$ и $\boldsymbol{BO}$. Тогда (CD_1) является диагональю верхнего основания. Следовательно, искомое расстояние равно высоте этого параллелепипеда (см. задачу 5).

Найдём объём параллелепипеда, построенного на векторах $\boldsymbol{BD}, \boldsymbol{BO}, \boldsymbol{BC}$. Их смешанное произведение

$$\boldsymbol{BD} \cdot \boldsymbol{BO} \cdot \boldsymbol{BC} = \begin{vmatrix} 0 & a & -a \\ -a & 0 & -a \\ 0 & a & 0 \end{vmatrix} = a^3 = V$$

Площадь S основания этого параллелепипеда, натянутого на векторы $\boldsymbol{BD}$ и $\boldsymbol{BO}$ найдём как длину их векторного произведения

$$\boldsymbol{BD} \times \boldsymbol{BO} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & a & -a \\ -a & 0 & -a \end{vmatrix} = -a^2\boldsymbol{i} - a^2\boldsymbol{j} + a^2\boldsymbol{k}$$

Поэтому высота H параллелепипеда равна

$$H = \frac{a^3}{a^2\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Глава 3. Системы координат на плоскости и в пространстве

§1. Декартова система координат на плоскости

$n^\circ 1$. Прямоугольная декартова система координат (СК) на плоскости

Пусть на плоскости заданы числовая ось и точка M (понятие числовой оси было введено в §1 гл. 2). Опустим из точки M перпендикуляр на ось. Координату основания этого перпендикуляра назовём координатой точки M на оси.

Определение. Говорят, что на плоскости задана прямоугольная декартова система координат, если на плоскости заданы две взаимно перпендикулярные числовые оси с общим началом отсчета и одинаковым масштабом на них. Одну из них условно считаем первой и называем осью Ox, или осью абсцисс. Другую считаем второй и называем осью Oy, или осью ординат.

Вектор, идущий из начала по оси Ox, имеющий единичную длину, обозначается $\boldsymbol{i}$. Вектор, идущий по оси Oy, имеющий единичную длину, обозначается $\boldsymbol{j}$. В дальнейшем условимся выбирать только такие СК, чтобы кратчайший поворот от $\boldsymbol{i}$ к $\boldsymbol{j}$ совершался против часовой стрелки.

Если на плоскости введена прямоугольная декартова СК, то каждая точка M на плоскости однозначно определяется упорядоченной парой вещественных чисел (x_M, y_M), где $x_M -$ координата точки M на оси Ox, $y_M -$координата точки M на оси Oy.В этом случае пишем $M\,(x_M, y_M)$ (см. рис. 1).

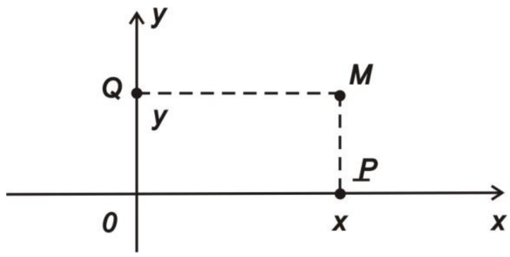


Рис.1. Координаты точки на плоскости

Заметим, что точка M имеет координаты (x_M, y_M), тогда и только тогда, когда радиус-вектор $\boldsymbol{OM}$ имеет проекции $\{x_M, y_M\}$ $M(x,y)$ тогда и только тогда, когда

$$\boldsymbol{OM} = \{x, y\} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} \qquad (1)$$

Выясним, как меняются координаты точки при переходе к другой прямоугольной декартовой СК на плоскости.

1-й случай.

Пусть точка M имеет координаты (x, y) в прямоугольной декартовой СК

Oxy и пусть СК $Ox'y'$ получена из Oxy параллельным переносом из точки O в точку O'. Найдем координаты точки $M(x', y')$ в СК $O'x'y'$. Для этого воспользуемся равенством (1).

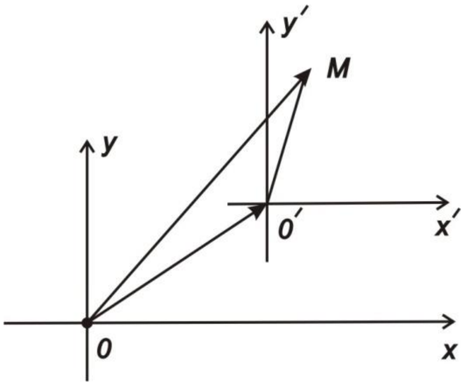


Рис.2. Изменение координат точки при параллельном переносе координатных осей

Из рис.2. видно, что $\boldsymbol{OM} = \boldsymbol{OO'} + \boldsymbol{O'M}$. Поэтому $\boldsymbol{O'M} = \boldsymbol{OM} - \boldsymbol{OO'} = \{x, y\} - \{a, b\} = \{x - a, y - b\}$. Следовательно, точка M имеет координаты $M(x - a, y - b)$ в СК $O'x'y'$

$$\begin{matrix} x' = x - a \\ y' = y - b \end{matrix} \qquad (2)$$

(Здесь (a, b) – координаты точки O' в СК Oxy).

2-й случай. Пусть точка M имеет координаты (x, y) в СК Oxy, и пусть СК $Ox'y'$ получена поворотом СК Oxy на угол α вокруг точки O. Найдем координаты той же точки $M(x', y')$ в новой СК $Ox'y'$. Обозначим $\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}'$ единичные радиус-векторы, идущие по осям Ox' и Oy' соответственно. Из рис.3 видно, что

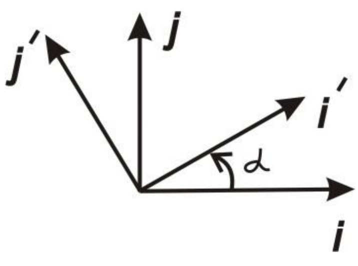


Рис.3. Разложение ортов $\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}'$ по ортам $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$

$$\begin{matrix} \boldsymbol{i}' = \boldsymbol{i}\cos\alpha + \boldsymbol{j}\sin\alpha \\ \boldsymbol{j}' = -\boldsymbol{i}\sin\alpha + \boldsymbol{j}\cos\alpha \end{matrix} \qquad (3)$$

Для нахождения новых координат (x', y') точки M в СК $Ox'y'$ воспользуемся опять формулой (1), см. рис.4.

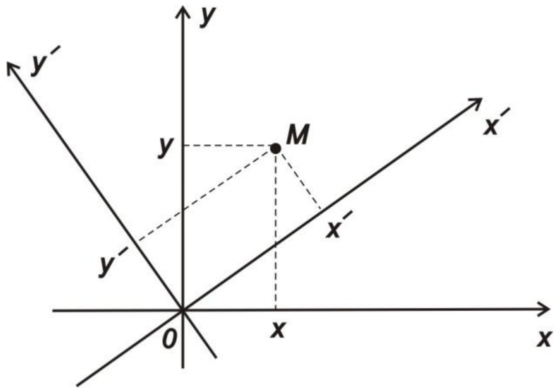


Рис.4. Нахождение новых координат точки при повороте СК

Найдем проекции вектора $\boldsymbol{OM}$ на оси Ox'и Oy'. По условию, проекции вектора $\boldsymbol{OM}$ на оси Ox и Oy равны числам x и y, следовательно, точка M имеет координаты (x, y). Это равносильно тому, что вектор $\boldsymbol{OM} = \{x, y\} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$. Аналогично, в СК $Ox'y'$ $M(x', y')$, что эквивалентно равенству

$$\boldsymbol{OM} = \{x', y'\} = x'\boldsymbol{i}' + y'\boldsymbol{j}' =$$
$$= x'(\boldsymbol{i}\cos\alpha + \boldsymbol{j}\sin\alpha) + y'(-\boldsymbol{i}\sin\alpha + y'\sin\alpha) + \boldsymbol{j}(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha).$$

Таким образом, вектор $\boldsymbol{OM}$ двумя способами разложен по векторам $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$. В силу единственности разложения получаем

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \qquad (4)$$
$$y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha$$

Выразим отсюда новые координаты (x', y') через старые (x, y):

$$x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha \qquad (5)$$
$$y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha$$

3-й случай. Пусть СК $O'x'y'$ получена из Oxy параллельным переносом в точку $O'(a, b)$ и последующим поворотом вокруг точки O' на угол α. При этом предполагается неизменность масштаба. Пусть точка $M(x, y)$ в СК Oxy и $M(x', y')$ в СК $O'x'y'$. Тогда, объединяя случаи 1 и 2, получаем из формулы (5)

$$\begin{aligned} x' &= (x-a)\cos\alpha + (y-b)\sin\alpha \\ y' &= -(x-a)\sin\alpha + (y-b)\cos\alpha \end{aligned} \qquad (6)$$

и, наоборот,

$$x = a + x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \qquad (7)$$
$$y = b + x'\sin\alpha + y'\cos\alpha$$

(Проверьте самостоятельно!)

Замечание. Предположим, что масштаб на новых осях отличается от масштаба на старых осях в k раз. Тогда формулы (2), (4)–(7) становятся неверными.

$n°2$. **Косоугольная декартова система координат на плоскости**

Введём на плоскости декартову косоугольную СК. Для этого зададим две пересекающиеся числовые оси, начало отсчёта каждой из которых совпадает с точкой O их пересечения. Одну из них назовём первой, обозначим её Ox и пусть OA_1 – отрезок масштаба на ней. Другая ось будет считаться второй, обозначим её Oy и пусть OA_2 – отрезок масштаба на второй оси. Обозначим $\boldsymbol{e_1} = \boldsymbol{OA_1}$ и $\boldsymbol{e_2} = \boldsymbol{OA_2}$ – единичные векторы на этих осях (см. рис. 5).

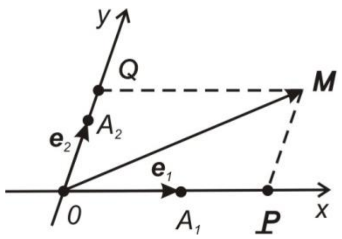


Рис.5. Косоугольная декартова СК на плоскости

Пусть M – произвольная точка на плоскости. Проведём через неё две прямые, параллельные осям. Обозначим P – точку пересечения с первой осью и Q – точку пересечения со второй осью. Координату точки P на первой оси назовём координатой точки M на первой оси и обозначим x_M.

Координату точки Q на второй оси назовём координатой точки M на второй оси и обозначим y_M. Упорядоченная пара (x_M, y_M) называется координатами точки M, при этом пишут $M(x_M, y_M)$.

Координаты полностью определяют положение точки на плоскости. Из рис. 5 видно, что

$$\boldsymbol{OM} = \boldsymbol{OP} + \boldsymbol{OQ} = x_M \boldsymbol{e_1} + y_M \boldsymbol{e_2}. \qquad (8)$$

Итак, координаты точки $M(x_M, y_M)$ совпадают с коэффициентами разложения радиус-вектора $\boldsymbol{OM}$ этой точки по векторам $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}$.

$$M(x_M, y_M) \text{ тогда и только тогда, когда } \boldsymbol{OM} = x_M \boldsymbol{e_1} + y_M \boldsymbol{e_2} \qquad (9)$$

Утверждение (9), так же, как и утверждение (1) связывает координаты точки с проекциями радиус-вектора этой точки. Тем самым мы получаем возможность использовать аппарат векторной алгебры.

Посмотрим, как меняются координаты точки при выборе другой системы координат.

Пусть $O'x'y'$ – новая СК, полученная из Oxy параллельным переносом осей (см. рис.6).

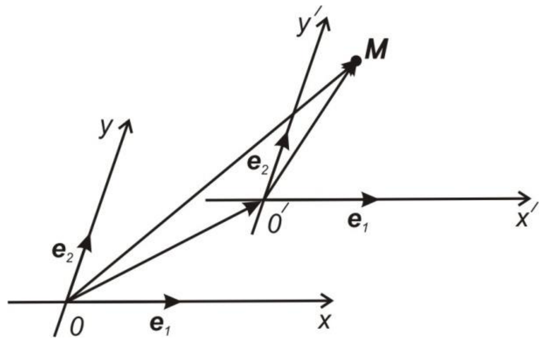


Рис.6. Параллельный перенос СК

Пусть $M(x', y')$ в новой СК. Тогда $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}$ по-прежнему являются единичными векторами новых осей. Поэтому, согласно (9)

$$M(x, y) \text{ тогда и только тогда, когда } \boldsymbol{OM} = x\boldsymbol{e_1} + y\boldsymbol{e_2};$$

$$M(x', y') \text{ тогда и только тогда, когда } \boldsymbol{O'M} = x'\boldsymbol{e_1} + y'\boldsymbol{e_2} \qquad (10)$$

С другой стороны, из рис.6 видно, что

$$\boldsymbol{OM} = \boldsymbol{OO'} + \boldsymbol{O_1M} \qquad (11)$$

Подставим (10) в (11)

$$x\boldsymbol{e_1} + y\boldsymbol{e_2} = (a\boldsymbol{e_1} + b\boldsymbol{e_2}) + (x'\boldsymbol{e_1} + y'\boldsymbol{e_2}) = (a + x')\boldsymbol{e_1} + (b + y')\boldsymbol{e_2}$$

Из единственности разложения вектора по двум неколлинеарным векторам следует, что

$$\begin{cases} x = a + x' \\ y = b + y' \end{cases} \qquad (12)$$

Отсюда

$$\begin{cases} x' = x - a \\ y' = y - b \end{cases} \qquad (13)$$

Формулы (12) и (13) связывают координаты одной и той же точки в разных системах координат, полученных параллельным переносом. Формула (13) позволяет найти координаты точки в новой СК, если известны координаты этой точки в старой СК и координаты нового начала координат.

Пусть $Ox'y'$ - новая система координат, начало которой совпадает с началом старой СК Oxy (см. рис. 7).

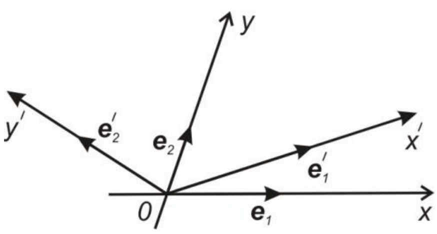


Рис.7. Поворот СК

Обозначим $\boldsymbol{e_1}'$, $\boldsymbol{e_2}'$– орты новых осей координат Ox' и Oy' соответственно.

Найдём зависимости, связывающие координаты одной и той же точки M в системах координат Oxy и $Ox'y'$. Согласно (9)

$$M(x,y) \text{ тогда и только тогда, когда } \quad \boldsymbol{OM} = x\boldsymbol{e_1} + y\boldsymbol{e_2} \qquad (14)$$
$$M(x',y') \text{ тогда и только тогда, когда } \boldsymbol{OM} = x'\boldsymbol{e_1}' + y'\boldsymbol{e_2}'$$

Разложим векторы $\boldsymbol{e_1}'$ и $\boldsymbol{e_2}'$ по векторам $\boldsymbol{e_1}$ и $\boldsymbol{e_2}$

$$\begin{matrix} \boldsymbol{e_1}' = c_{11}\boldsymbol{e_1} + c_{12}\boldsymbol{e_2} \\ \boldsymbol{e_2}' = c_{21}\boldsymbol{e_1} + c_{22}\boldsymbol{e_2} \end{matrix} \qquad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \qquad (15)$$

Из (14) имеем, подставляя вместо $\boldsymbol{e_1}'$ и $\boldsymbol{e_2}'$ их выражения (15)

$$\boldsymbol{OM} = x\boldsymbol{e_1} + y\boldsymbol{e_2} = x'\boldsymbol{e_1}' + y'\boldsymbol{e_2}' = (c_{11}x' + c_{21}y')\boldsymbol{e_1} + (c_{12}x' + c_{22}y')\boldsymbol{e_2}$$

Из единственности разложения вектора $\boldsymbol{OM}$ по двум неколлинеарным векторам $\boldsymbol{e_1}$ и $\boldsymbol{e_2}$ (см. замечание 3 § 3 гл. 2) следует, что

$$\begin{cases} x = c_{11}x' + c_{21}y' \\ y = c_{12}x' + c_{22}y' \end{cases} \qquad (16)$$

Обращаем внимание читателя на то, что матрица $\begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix}$ коэффициентов при x', y'транспонированная по отношению к матрице C коэффициентов разложения в формуле (15).

Из (16) можно выразить новые координаты x', y' точки M через старые координаты x и y. Для этого надо решить систему (16) относительно неизвестных x', y' по формулам (7) , § 1 гл.1.

$$x' = \frac{\begin{vmatrix} x & c_{21} \\ y & c_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{vmatrix}} = \frac{c_{22}}{D}x - \frac{c_{21}}{D}y\,; y' = \frac{\begin{vmatrix} c_{11} & x \\ c_{12} & y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{vmatrix}} = -\frac{c_{12}}{D}x + \frac{c_{11}}{D}y,\, D = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{vmatrix} \; (17)$$

Впрочем, формулы (17) для выражения новых координат точки через её старые координаты можно получить иначе, выражая векторы $\boldsymbol{e_1}$ и $\boldsymbol{e_2}$ через $\boldsymbol{e_1}'$и $\boldsymbol{e_2}'$

$$\boldsymbol{e_1} = d_{11}\boldsymbol{e_1}' + d_{12}\boldsymbol{e_2}'$$
$$\boldsymbol{e_2} = d_{21}\boldsymbol{e_1}' + d_{22}\boldsymbol{e_2}'$$

Тогда, поступая как выше, получим

$$\begin{cases} x' = d_{11}x + d_{21}y \\ y' = d_{12}x + d_{22}y \end{cases} \qquad (18)$$

В силу единственности координат точки, формулы (17) и (18) дают один и тот же результат, но записанный в разных видах.

В общем случае СК $O'x'y'$ имеет начало в точке $O'(a,b)$ и орты новых осей $\boldsymbol{e_1}'$ и $\boldsymbol{e_2}'$ (см. рис.8).

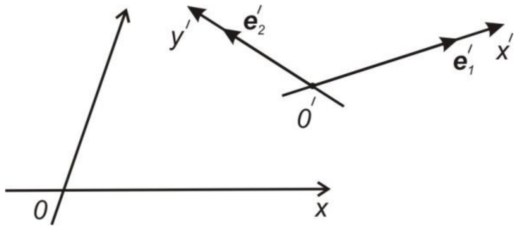


Рис. 8.Общий случай перехода к новой СК

Формулы, связывающие координаты x, y точки в старой системе координат Oxy с координатами той же точки в новой системе координат $O'x'y'$, получаются последовательным применением формул (12) и (16)

$$\begin{cases} x = a + c_{11}x' + c_{21}y' \\ y = b + c_{12}x' + c_{22}y' \end{cases} \qquad (19)$$

§2. Полярная система координат на плоскости

Полярная СК на плоскости определяется заданием некоторой точки O, называемой полюсом, луча OL, исходящего из этой точки, называемого полярной осью, и масштаба для измерения длин (см. рис. 1).

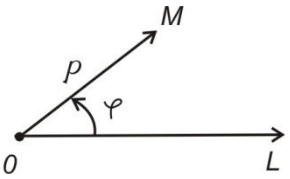


Рис.1. Полярная СК на плоскости

Тогда любая точка плоскости, отличная от полюса O, однозначно определяется заданием двух чисел ρ и φ, где ρ= $|OM|$ – длина отрезка OM, φ– число, измеряющее угол между полярной осью и радиус–вектором $\boldsymbol{OM}$; угол измеряется так, как это принято в тригонометрии. Запись M(ρ,φ) означает, что точка M имеет полярные координаты ρ и φ. Для полюса O не определен угол φ, однако положение точки O вполне задано значением ρ=0.

Полярный угол φ может измеряться любым вещественным числом.

Предположим, что на плоскости одновременно заданы прямоугольная декартова СК и полярная СК, причем полюс совпадает с началом координат, полярная ось совпадает с положительной полуосью оси абсцисс и масштабы декартовой и полярной систем совпадают (см. рис. 2).

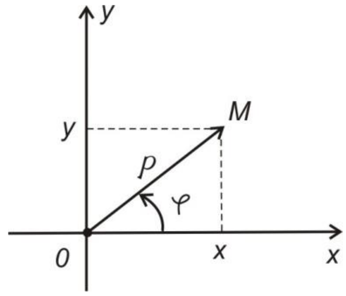


Рис.2. Декартова и полярная системы координат, согласованные между собой

Тогда переход от полярных координат произвольной точки к декартовым координатам той же точки осуществляется по формулам

$$x = \rho\cos\varphi \qquad (1)$$
$$y = \rho\sin\varphi$$

В этом же случае формулы

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (2)$$
$$\mathrm{tg}\varphi = y/x$$

являются формулами перехода от декартовых координат к полярным.

§3. Декартовы системы координат в пространстве

$n^\circ 1$. Декартова прямоугольная система координат в пространстве

Декартова прямоугольная СК в пространстве определяется заданием линейной единицы масштаба для измерения длин и трех пересекающихся в одной точке взаимно перпендикулярных числовых осей, занумерованных в каком-либо порядке.Точка O пересечения осей называется началом координат, а сами оси — осями координат. Первая ось называется осью абсцисс, вторая — осью ординат, третья — осью аппликат. Обозначаются они соответственно Ox, Oy, Oz.

Пусть $M -$ произвольная точка пространства. Проведем через точку M плоскость, параллельную плоскости Oyz (рис.1).

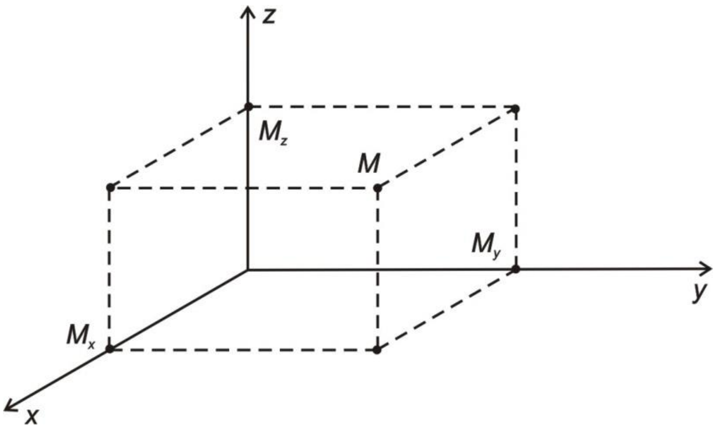


Рис.1. Декартова прямоугольная СК в пространстве

Обозначим M_x – точку пересечения этой плоскости с осью Ox и обозначим «x» координату точки M_x оси Ox. Аналогично, обозначим «y» координату точки M_y пересечения плоскости, проходящей через точку M параллельно плоскости Oxz и прямой Oy.

Также обозначим «z» координату точки M_z пересечения плоскости, проходящей через точку M параллельно Oxy и Oz. Координатами точки M в заданной СК называются числа x (абсцисса), y (ордината), z (аппликата). Запись $M(x, y, z)$ означает, что точка M имеет координаты x, y, z.

Посмотрим, как изменяются координаты точки при переходе к другой прямоугольной декартовой СК. Обозначим $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}$ векторы, идущие из точки O в направлении осей $Ox, Oy,$ Oz соответственно и имеющие длину 1. Пусть $O'x'y'z' -$ новая прямоугольная декартова СК с началом отсчета O' и тем же масштабом, что и у старой СК $Oxyz$ (рис. 2).

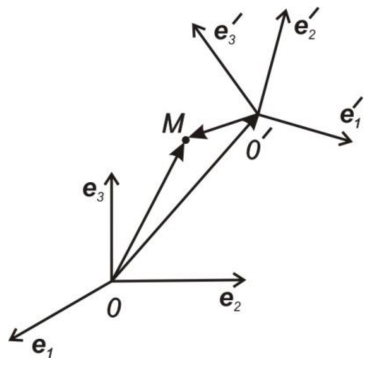


Рис.2. Взаимное расположение старой и новой систем координат

Обозначим $\boldsymbol{e_1'}, \boldsymbol{e_2'}, \boldsymbol{e_3'}$ векторы, идущие из точки O' в положительном направлении осей $O'x', O'y', O'z'$ соответственно и имеющие длину, равную единице.

Разложим векторы, $\boldsymbol{e}'_1\boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3$по векторам $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}'_1 &= c_{11}\boldsymbol{e_1} + c_{12}\boldsymbol{e_2} + c_{13}\boldsymbol{e_3} \\ \boldsymbol{e}'_2 &= c_{21}\boldsymbol{e_1} + c_{22}\boldsymbol{e_2} + c_{23}\boldsymbol{e_3} \qquad (1) \\ \boldsymbol{e}'_3 &= c_{31}\boldsymbol{e_1} + c_{32}\boldsymbol{e_2} + c_{33}\boldsymbol{e_3} \end{aligned}$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \text{– матрица коэффициентов.}$$

Геометрический смысл каждого из коэффициентов c_{ij} – это косинус угла, который образует $\boldsymbol{e}'_i$ с $\boldsymbol{e_j}$. Действительно, умножим скалярно, например, первое равенство в (1) на $\boldsymbol{e_1}$. Получим $(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e_1})= c_{11}(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_1}) + c_{12}(\boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_1}) + c_{13}(\boldsymbol{e_3}, \boldsymbol{e_1})$.

Но $(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_1}) = 1$, $(\boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_1}) = (\boldsymbol{e_3}, \boldsymbol{e_1}) = 0$ поэтому $c_{11} = (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e_1}) =$
$= |\boldsymbol{e}'_1||\boldsymbol{e_1}| \cos(\widehat{\boldsymbol{e_1}', \boldsymbol{e_1}}) = \cos\left(\widehat{\boldsymbol{e_1}', \boldsymbol{e_1}}\right)$.

Аналогично получаем, умножая то же равенство скалярно на $\boldsymbol{e_2}$, что $c_{12} =$ $=\cos(\widehat{\boldsymbol{e_1}', \boldsymbol{e_2}})$ и т.д.

Так же, как в случае координат на плоскости, справедливо:

$M(x, y, z)$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{OM}=x\boldsymbol{e_1} + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e_3}$. Обозначим x', y', z' – координаты точки M в новой СК $O'x'y'z'$. Тогда

$M(x', y', z')$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{O'M}=x'\boldsymbol{e}'_1+y'\boldsymbol{e}'_2+z'\boldsymbol{e}'_3$.

Из рис.2 видно, что $\boldsymbol{OM} = \boldsymbol{OO'} + \boldsymbol{O'M}$.

Поэтому, с одной стороны,

$$\boldsymbol{OM}=x\boldsymbol{e_1} + y\boldsymbol{e_2} + z\boldsymbol{e_3}, \qquad (2)$$

а с другой стороны

$$\boldsymbol{OM} = \boldsymbol{OO'} + \boldsymbol{O'M}$$

$$= (a\boldsymbol{e_1} + b\boldsymbol{e_2} + c\boldsymbol{e_3}) + x'(c_{11}\boldsymbol{e_1} + c_{12}\boldsymbol{e_2} + c_{13}\boldsymbol{e_3})+y'(c_{21}\boldsymbol{e}_1 + c_{22}\boldsymbol{e_2} + +c_{23}\boldsymbol{e_3}) + z'(c_{31}\boldsymbol{e_1} + c_{32}\boldsymbol{e_2} + c_{33}\boldsymbol{e_3}) = (a + c_{11}x' + c_{21}y' + c_{31}z')\boldsymbol{e_1} + +(b + c_{12}x' + c_{22}y' + c_{32}z')\boldsymbol{e_2} + (c + c_{13}x' + c_{23}y' + + c_{33}z')\boldsymbol{e_3} \qquad (3)$$

В силу единственности разложения вектора $\boldsymbol{OM}$ по векторам $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}$ из (2) и (3) следуют равенства (см. следствие 2, § 4, гл. 2)

$$\begin{aligned} x&=a + c_{11}x' + c_{21}y' + c_{31}z' \\ y&=b + c_{12}x' + c_{22}y' + c_{32}z' \qquad (4) \\ z&=c + c_{13}x' + c_{23}y' + c_{33}z', \end{aligned}$$

связывающие координаты одной и той же точки в разных системах координат. При необходимости из (4) можно выразить числа x', y', z' через x, y, z (решая систему линейных алгебраических уравнений по теореме 1 § 3 гл.1).

В частности, если обе рассмотренные СК имеют одно начало, то справедливы формулы

$$x = c_{11}x' + c_{21}y' + c_{31}z'$$
$$y = c_{12}x' + c_{22}y' + c_{32}z' \qquad (5)$$
$$z = c_{13}x' + c_{23}y' + c_{33}z'$$

Обращаем внимание читателей, что коэффициенты в формуле (5) образуют матрицу, транспонированную к матрице C в формуле (1):

$$X = C^T X' \text{ , где } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Заметим, что из того, что векторы $\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{e}_3{}'$ единичные, следует, что

$$c_{11}^2 + c_{12}^2 + c_{13}^2 = 1$$
$$c_{21}^2 + c_{22}^2 + c_{23}^2 = 1 \qquad (6)$$
$$c_{31}^2 + c_{32}^2 + c_{33}^2 = 1$$

(см. (3) § 2 гл. 2)

Из того, что эти же векторы попарно ортогональны, следует, что

$$c_{11}c_{21} + c_{12}c_{22} + c_{13}c_{23} = 0$$
$$c_{11}c_{31} + c_{12}c_{32} + c_{13}c_{33} = 0 \qquad (7)$$
$$c_{21}c_{31} + c_{22}c_{32} + c_{23}c_{33} = 0$$

(см. (2), (4) § 2 гл. 2)

Тройка векторов $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$, введенная выше, имеет какую-то ориентацию: она является или правой, или левой. Мы будем употреблять в дальнейшем системы координат $Oxyz$, для которых $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3 -$ правая тройка векторов. В этом случае используют стандартные обозначения $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ для ортов, идущих по осям Ox, Oy, Oz соответственно.

$\boldsymbol{n}$°2. Декартова косоугольная система координат в пространстве.

Декартова косоугольная система координат в пространстве определяется заданием трёх числовых осей OL_1, OL_2, OL_3, которые не лежат в одной плоскости и пересекаются в одной точке O, являющейся их общим началом отсчёта. При этом предполагается, что отрезки масштабов на этих осях имеют, вообще говоря, разные длины. Векторы, идущие по этим осям, приложенные к точке O и совпадающие по длине с масштабными отрезками, обозначим $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ (см. рис.3). Векторы $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ называются ортами осей OL_1, OL_2, OL_3 соответственно.

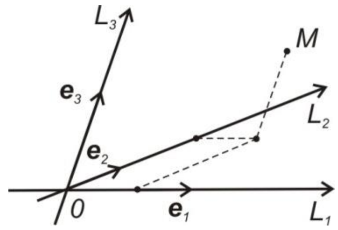


Рис.3. Декартова косоугольная система координат в пространстве

Произвольная точка M пространства имеет в этой СК координаты x, y, z, которые определяются следующим образом. Проведём через точку M плоскость, параллельную плоскости векторов $\boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}$. Она пересечёт ось OL_1 в точке P, координата которой на оси OL_1 – это число x (см. рис.3). Очевидно, $\boldsymbol{OP} = x\boldsymbol{e_1}$. Аналогично, проводя через точку M плоскость, параллельную векторам $\boldsymbol{e_1}$ и $\boldsymbol{e_3}$ (соответственно, $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}$), получаем координату y (соответственно z).

Точка M имеет координаты x, y, z тогда и только тогда, когда радиус-вектор $\boldsymbol{OM}$ раскладывается по векторам $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}$ следующим образом

$$\boldsymbol{OM} = x\boldsymbol{e_1} + y\boldsymbol{e_2} + z\boldsymbol{e_3} \qquad (8)$$

Допустим, что кроме рассмотренной косоугольной СК, задана новая косоугольная декартова СК $O_1L_1', O_1L_2', O_1L_3'$.

Найдём зависимости, связывающие координаты x, y, z и x', y', z' одной и той же точки M, в старой и новой системах координат. Дословно повторяя рассуждения, проведённые для косоугольных декартовых СК на плоскости (см. (19), § 1, гл. 3), получим формулы

$$\begin{aligned} x &= a + c_{11}x' + c_{21}y' + c_{31}z' \\ y &= b + c_{12}x' + c_{22}y' + c_{32}z' \\ z &= c + c_{13}x' + c_{23}y' + c_{33}z' \end{aligned} \qquad (9)$$

где a, b, c – координаты нового начала отсчёта O_1 в старой СК,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e_1'} &= c_{11}\boldsymbol{e_1} + c_{12}\boldsymbol{e_2} + c_{13}\boldsymbol{e_3} \\ \boldsymbol{e_2'} &= c_{21}\boldsymbol{e_1} + c_{22}\boldsymbol{e_2} + c_{23}\boldsymbol{e_3} \\ \boldsymbol{e_3'} &= c_{31}\boldsymbol{e_1} + c_{32}\boldsymbol{e_2} + c_{33}\boldsymbol{e_3} \end{aligned} \qquad (10)$$

– разложения ортов новых осей по ортам старых осей.

Мы закончим этот параграф, посвященный обзору декартовых СК в пространстве, двумя полезными теоремами.

Теорема 1. (вычисление расстояния между двумя точками)

Пусть в пространстве введена прямоугольная декартова СК $Oxyz$, $M^1(x^1, y^1, z^1), M^2(x^2, y^2, z^2)$ –две точки пространства. Тогда расстояние между точками M_1, M_2 вычисляется по формуле

$$|\boldsymbol{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \qquad (11)$$

Доказательство. Рассмотрим вектор $\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_2$. ПР$_{OX}\boldsymbol{M_1M_2}$=$x_2-x_1$ ПР$_{OY}\boldsymbol{M_1M_2}$=y_2-y_1

$$\text{ПР}_{OZ}\, \boldsymbol{M_1M_2}=z_2-z_1$$

Расстояние от точки M_1 до точки M_2 равно, очевидно, длине $|\boldsymbol{M_1M_2}|$=$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.

Теорема 2. (деление отрезка в данном отношении)

Пусть в пространстве введена прямоугольная декартова СК $Oxyz$,

$A(x_1,y_1,z_1), B(x_2,y_2,z_2)$ – две различные точки пространства. Тогда координаты всякой третьей точки M, лежащей с ними на одной прямой, определяются как

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$$
$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}, \qquad (12)$$
$$z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$$

где λ обозначает отношение, в котором точка M делит отрезок AB, т.е. $\boldsymbol{AM} =$
$= \lambda\boldsymbol{MB}$.

Каждой точке M прямой (AB) (кроме точки B) соответствует определенное значение параметра λ, и, обратно, каждому значению $\lambda \neq -1$ соответствует единственная точка на прямой (AB).

Доказательство. Сначала допустим, что точка $M(x,y,z)$ лежит между точками A, B (см. рис. 4).

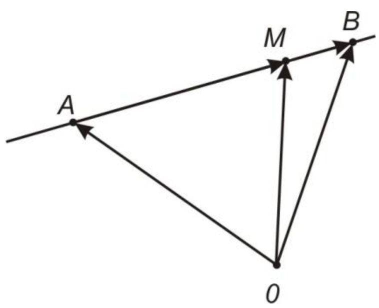


Рис.4. Деление отрезка в данном отношении (точка М лежит внутри отрезка)

Тогда λ≥0, т.к. $\boldsymbol{AM} \uparrow\uparrow \boldsymbol{MB}$, $\lambda = |\boldsymbol{AM}|/|\boldsymbol{MB}|$

$\boldsymbol{AM} = \{x-x_1, y-y_1, z-z_1\}, \boldsymbol{MB} = \{x_2-x, y_2-y, z_2-z\}$.

Поэтому равенство $\boldsymbol{AM} = \lambda\boldsymbol{MB}$ влечет за собою три следующих равенства

$x-x_1 = \lambda(x_2-x)$ $\qquad\qquad$ $x = (x_1+\lambda x_2)\,/\,(1+\lambda)$

$$y - y_1 = \lambda(y_2 - y) \quad \text{что равносильно} \quad y = (y_1 + \lambda y_2) \,/\, (1 + \lambda)$$
$$z - z_1 = \lambda(z_2 - z) \qquad\qquad\qquad\qquad z = (z_1 + \lambda z_2) \,/\, (1 + \lambda)$$

Теперь допустим, что точка $M(x, y, z)$ лежит вне отрезка AB. (см. рис. 5).

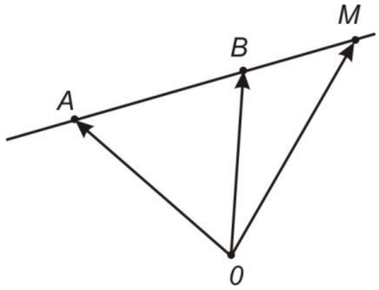


Рис.5. Деление отрезка в данном отношении (точка Mлежит вне отрезка)

В этом случае $\lambda < 0$, рис. 5 отличается от рис.4, однако все выкладки и окончательный результат остаются прежними (проверьте самостоятельно!).

Замечание. Формулы (12) остаются верными для декартовой косоугольной СК.

§4. Цилиндрическая и сферическая системы координат в пространстве

n°1. Цилиндрическая система координат в пространстве

Цилиндрическая СК в пространстве определяется заданием плоскости с введенными на ней полярными координатами и осью Oz, перпендикулярной к этой плоскости и проходящей через полюс O (см. рис.1).

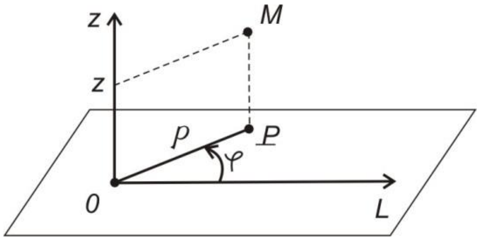


Рис.1. Цилиндрическая СК в пространстве

В цилиндрической СК положение точки M определяется тремя числами ρ, φ, z.

Точка P – основание перпендикуляра, опущенного из точки M на данную плоскость, ρ=$|OP|$, φ–угол между полярной осью и $\boldsymbol{OP}$, измеренный в радианах, z – координата на оси Oz точки пересечения плоскости, параллельной данной, проходящей через точку M, с осью Oz. Обозначение: $M(\rho, \varphi, z)$.

Если в пространстве ввести декартову прямоугольную СК, начало отсчета которой совпадает с полюсом, положительное направление оси абсцисс совпадает с направлением полярной оси, ось аппликат совпадает с осью Oz, а ось ординат направлена так, чтобы система координат была правой, то декартовы координаты x, y, z связаны с цилиндрическими координатами формулами (масштабы совпадают):

$$x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi, z = z \qquad (1)$$

n°2. Сферическая система координат в пространстве

Сферическая СК определяется заданием плоскости (π), точки O – начала отсчета на (π) и двух лучей OL и OP, исходящих из точки O. При этом луч OL лежит в (π), а OP перпендикулярен (π) (см. рис 2).

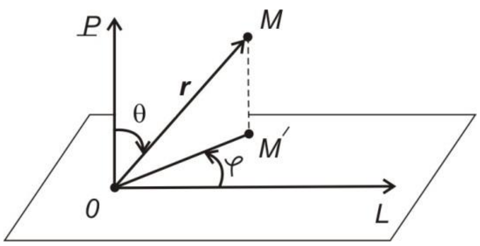


Рис.2. Сферическая СК в пространстве

Кроме того, задан масштаб для измерения длин. Тогда положение точки M пространства однозначно задается тремя числами r, θ, φ, где $r = |OM|$ – полярный радиус (длина отрезка OM), θ – угол, измеренный в радианах, между осью $\boldsymbol{OP}$ и $\boldsymbol{OM}$, φ – т.е. угол, измеренный в радианах, между $\boldsymbol{OL}$ и $\boldsymbol{OM'}$, где M' – основание перпендикуляра, опущенного из точки M на (π).

Связь между декартовыми (x, y, z) и сферическими (r, φ, θ) координатами одной и той же точки дается формулами:

$$x = r\sin\theta\cos\upsilon\varphi, \qquad (2)$$
$$y = r\sin\theta\sin\varphi$$
$$z = r\cos\theta.$$

При этом прямоугольная декартова СК вводится так, как показано на рис.3.

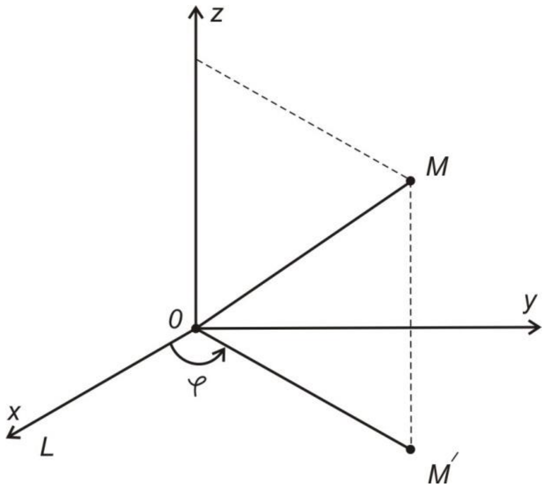


Рис.3. Сферическая и декартова системы координат, согласованные между собой

Масштабы в обеих СК совпадают.

§5. Понятие уравнения линии на плоскости, уравнения поверхности в пространстве и уравнения линии в пространстве

Мы сейчас дадим важнейшие определения аналитической геометрии. Они вызваны желанием рассматривать вместо геометрических объектов (например, прямая или кривая на плоскости, плоскость или какая-нибудь другая поверхность в пространстве) аналитические выражения, адекватно описывающие свойства этих геометрических объектов. Сами эти аналитические выражения можно изучать средствами алгебры и математического анализа. Результатом этого изучения являются геометрические свойства кривых или поверхностей. Этот метод и первые его систематические применения связывают с именем Ренэ Декарта (1596-1650).

$n^\circ 1$. Задание линии на плоскости

Определение. Пусть на плоскости задана декартова СК Oxy и пусть (Г) – некоторая линия на плоскости. Выражение

$$F(x, y) = 0 \qquad (1)$$

называется уравнением линии (Г) (в неявной форме), если координаты любой точки, лежащей на (Г), удовлетворяют этому уравнению, а любая пара чисел (x_0, y_0), удовлетворяющая этому уравнению, представляет собой координаты точки, лежащей на (Г).

$$M_0(x_0, y_0) \in (\Gamma) \text{ тогда и только тогда, когда } F(x_0, y_0) = 0. \qquad (2)$$

Определение. Пусть на плоскости задана полярная СК и линия (Γ) на ней. Выражение

$$F(\varphi,\rho)=0 \qquad (3)$$

называется уравнением линии (Г) в полярных координатах (в неявной форме), если координаты любой точки $M(\varphi, \rho)$, лежащей на (Г) удовлетворяют этому уравнению, а любая пара чисел (φ, ρ), удовлетворяющая этому уравнению, является координатами точки, лежащей на (Г).

$$M(\varphi,\rho)\in(\Gamma) \text{ тогда и только тогда, когда } F(\varphi,\rho)=0 \qquad (4)$$

Примеры.

1) Задана функция $y = f(x), x \in < a, b >$, Г=Г– график функции $f(x)$, т.е. $(\Gamma) = \{(x, f(x)), x \in < a, b >\}$. Тогда уравнение $y - f(x) = 0$ – это уравнение линии (Г).

2) (Г) – окружность с центром в точке $P(x_0, y_0)$ радиуса R $(R > 0)$, т.е. множество всех точек плоскости, удаленных от точки $P(x_0, y_0)$ на расстояние R. Тогда из Теоремы 1 §3 гл. 3 следует, что

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

является уравнением (Г).

3) $\rho = R -$ уравнение окружности радиуса R с центром в полюсе.

4) $\varphi = \frac{\pi}{4}$ – уравнение прямой линии, наклонённой к полярной оси под углом $\frac{\pi}{4}$.

Представим себе, что точка A движется вдоль линии (Г). Пусть в момент времени t ее координаты $x = \varphi(t), y = \psi(t)$. Систему уравнений

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \qquad (5)$$

называют уравнениями линии (Г) в параметрической форме. Роль параметра t может выполнять не только время.

Рассмотрим радиус-вектор $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{t}) = \varphi(t)\boldsymbol{i} + \psi(t)\boldsymbol{j}$ точки, лежащей на (Г). Если обозначить $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$ радиус-вектор произвольной точки на плоскости, то

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) \qquad (6)$$

− уравнение (Г) в векторной форме.

Пример 5.

$$x = x_0 + R\cos t$$
$$y = y_0 + R\sin t$$

параметрические уравнения окружности из примера 2).

Действительно, $M(x, y)$ принадлежит окружности (см. рис.1).

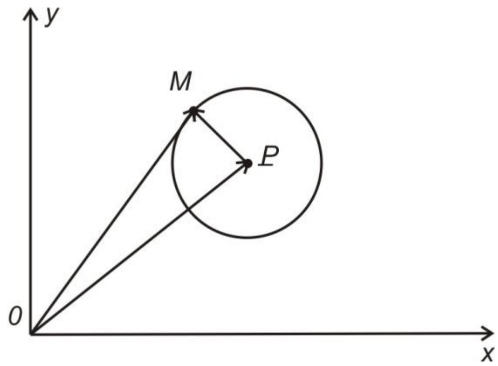


Рис.1. Окружность из примера 2)

Из рисунка видно, что

$$\boldsymbol{OM} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} \qquad (7)$$

$$\boldsymbol{OP} = x_0\boldsymbol{i} + y_0\boldsymbol{j} \qquad (8)$$

$$\boldsymbol{OM} = \boldsymbol{OP} + \boldsymbol{PM} \qquad (9)$$

Вектор $\boldsymbol{PM}$ зададим следующим образом. Обозначим t – угол между $\boldsymbol{PM}$ и осью Ox. Тогда по теореме 2 § 1 гл. 2.

$\text{ПР}_{Ox}\boldsymbol{PM} = |\boldsymbol{PM}|\cos t = R\cos t$, $\text{ПР}_{Oy}\boldsymbol{PM} = |\boldsymbol{PM}|\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = R\sin t$

Поэтому,

$$\boldsymbol{PM} = (R\cos t)\boldsymbol{i} + (R\sin t)\boldsymbol{j} \qquad (10)$$

Окончательно, подставляя (5), (6) и (8) в (7) и приводя подобные, получаем

$$xi + yj = (x_0 + R\cos t)i + (y_0 + R\sin t)j$$

Отсюда $\begin{cases} x = x_0 + R\cos t \\ y = y_0 + R\sin t \end{cases}$

$$\boldsymbol{r} = (x_0 + R\cos t)\boldsymbol{i} + (y_0 + R\sin t)\boldsymbol{j}$$

– уравнение той же окружности в векторной форме.

n°2. Задание поверхности в пространстве

Определение. Пусть в пространстве задана декартова СК $Oxyz$ и некоторая поверхность (S). Выражение

$$F(x, y, z) = 0 \qquad (11)$$

называется уравнением поверхности (S) в неявной форме, если координаты любой точки, лежащей на (S), удовлетворяют этому уравнению, а любая тройка чисел (x_0, y_0, z_0), удовлетворяющая этому уравнению, представляет собой координаты точки, лежащей на (S). Иначе говоря,

$$M_0(x_0, y_0, z_0) \in (S) \text{ тогда и только тогда, когда } F(x_0, y_0, z_0) = 0 \qquad (12)$$

Определение. Система равенств

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v) \end{cases} \qquad (13)$$

где пары параметров (u, v) берутся из некоторого множества, называются параметрическими уравнениями поверхности (S), если для всех возможных (u, v) точка с координатами

$$(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in (S)$$

и, обратно, любая точка на (S) получается таким способом.

Примеры. 6)Уравнение $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2 (R > 0)$ (14) является уравнением сферы с центром в точке $M(x_0, y_0, z_0)$ и радиусом R. Действительно, точки, находящиеся на расстоянии R от точки M и только они, имеют координаты x, y, z, удовлетворяющие равенству (14) по Теореме 1 § 3 гл.3).

7) Система равенств (2) §4 гл. 3

$$x = R\sin\theta\cos\varphi, \quad y = R\sin\theta\sin\varphi, z = R\cos\theta$$

$\varphi \in [0, 2\pi)$, $\theta \in [0, \pi]$ при фиксированном R задает параметрически сферу радиуса R с центром в начале координат.

n°3. Задание линии в пространстве

Линию в пространстве можно задать двумя способами. Во-первых, как пересечение двух поверхностей. В этом случае координаты каждой точки линии удовлетворяют системе

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases}, \qquad (15)$$

где $F_1(x, y, z) = 0$, $F_2(x, y, z) = 0$ – уравнения пересекающихся поверхностей. Во-вторых линию в пространстве можно задать параметрически

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \qquad (16)$$

аналогично тому, как это было сделано для линий на плоскости.

Примеры. 8) Винтовая линия

$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \\ z = t \end{cases}$$

$$M(R\cos t, R\sin t, t)$$

P – проекция точки M на плоскость Oxy, $P(R\cos t, R\sin t, 0)$

При возрастании t точка P двигается по окружности радиуса R с началом в точке O. Значит, точка M описывает наматывающуюся вверх линию на поверхности прямого кругового цилиндра. Эта линия называется винтовой линией.

9) $\begin{cases} x = R\sin\theta\cos\varphi \\ y = R\sin\theta\sin\varphi \\ z = R\cos\theta \end{cases}$

При фиксированных R и φ и изменяющимся $\theta\epsilon[0,\pi]$ точка $M(R\sin\theta\cos\varphi, R\sin\theta\sin\varphi, R\cos\theta)$ описывает линию меридиана с «долготой» φ на сфере радиуса R с центром в начале координат.

При фиксированных R и θ и изменяющимся $\varphi\epsilon[0,2\pi]$ точка $M(R\sin\theta\cos\varphi, R\sin\theta\sin\varphi, R\cos\theta)$ описывает параллель на той же сфере. В частности, при $\theta = \frac{\pi}{2}$ получаем экватор.

§ 6. Примеры на построение линий на плоскости, заданных уравнениями в декартовых и полярных координатах

Считается известным, как построить линию (L), являющуюся графиком функции $y = f(x)$. В этом случае (L) – это множество всех точек плоскости, координаты которых $(x, f(x))$, где x – любое число из области определения функции $f(x)$ (см.рис.1).

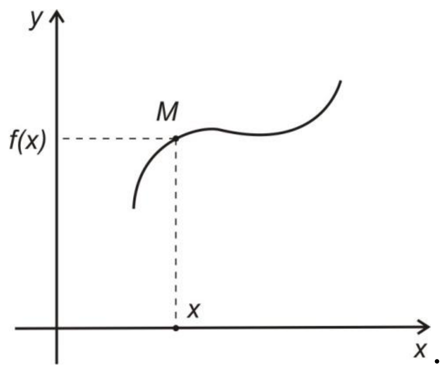


Рис.1. График функции, заданной явным уравнением

n°1. Построение линий на плоскости, заданных параметрически

Пусть

$$(L): \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad t \in < a, b > \qquad (1)$$

параметрическое задание линии (L) на плоскости в координатах Oxy. Это значит, что точка $M(x(t), y(t))$ пробегает всю (L), когда t пробегает весь $<$

$a, b >$.

Чтобы построить (L), достаточно найти зависимость ординаты y каждой точки $M \in (L)$ от её абсциссы. Допустим, что из первого уравнения $x = x(t)$ формулы (1) можно выразить t через $x, t = t(x)$. Тогда, подставив найденное выражение во второе равенство $y = y(t)$, получим требуемую явную зависимость y от x, то есть $y = f(x)$. Говорят, что мы исключили параметр t. Линия (L) является тогда графиком функции $y = f(x)$. Аналогично поступаем, если удобно сначала выразить t через y, а потом подставить $t = t(x)$ в $x = x(t)$ (см. рис.2).

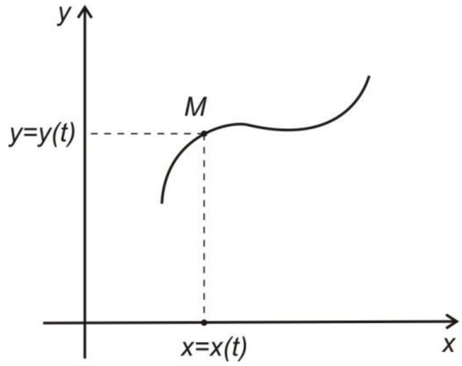


Рис.2. График функции, заданной параметрически

Примеры.

1) $(L)\colon \begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = -3t - 4 \end{cases}$

2) $(L)\colon \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 4t^2 + 2t + 1 \end{cases}$

3) $(L)\colon \begin{cases} x = t^2 + t - 6 \\ y = \frac{1}{2}t - 1 \end{cases}$

Решение.

1) $\begin{cases} t = \frac{1}{2}(x - 3) \\ y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \end{cases}$ (см. рис.3)

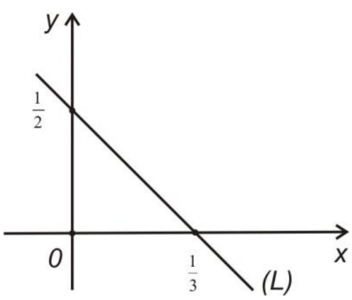


Рис.3. Прямая линия

2) $\begin{cases} t = \frac{1}{2}(x+1) \\ y = x^2 + 3x + 3 \end{cases}$ (см. рис.4)

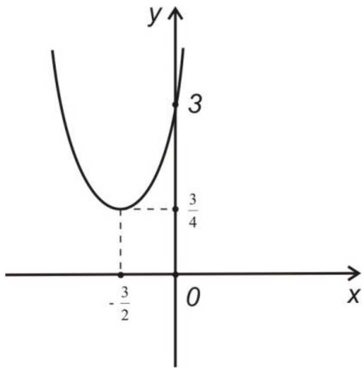


Рис.4. Парабола

3) $\begin{cases} t = 2y + 2 \\ x = 4y^2 + 10y \end{cases}$ (см. рис.5)

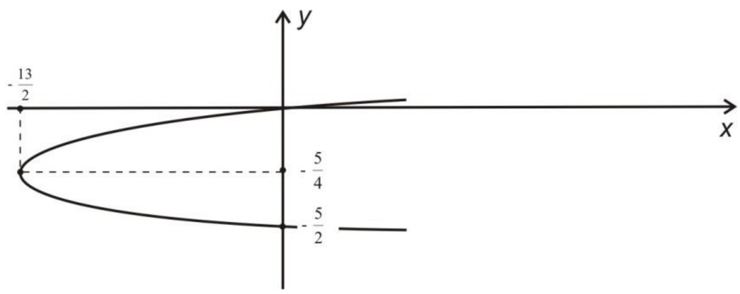


Рис.5. Парабола

Если не удалось таким способом исключить параметр t из (1) и построить кривую (L), то (L) всегда можно построить, используя методы математического анализа.

Мы на этом не останавливаемся.

n°2. Построение кривых на плоскости, заданных неявным уравнением

$$F(x, y) = 0 \quad (2)$$

Сначала допустим, что уравнение (2) можно разрешить относительно y. Это значит, что можно найти одну или несколько функций

$$y = f_1(x), \dots . y = f_k(x),$$

таких, что для всех допустимых значений x выполнено тождество

$$F\big(x, f_i(x)\big) = 0 \quad , \qquad i = 1,2, \dots, k.$$

Строим графики каждой из полученных функций $y = f_i(x)$ $(i = 1, \dots, k)$.

Тогда искомая кривая (L) получается объединением графиков всех функций $y = f_i(x)$ при $i = 1, \dots, k$. Кривую (L) можно изобразить, нарисовав все построенные графики на одном чертеже в осях Oxy.

Пример 4. Проиллюстрируем этот способ на примере уравнения окружности

$$x^2 + y^2 = R^2$$

Разрешая это уравнение относительно y, получаем две функции

$$y = \sqrt{R^2 - x^2} \ \text{ и } \ y = -\sqrt{R^2 - x^2}$$

Графиком первой функции является верхняя полуокружность, а графиком второй функции является нижняя полуокружность. Их объединение даёт всю окружность.

Замечание. Аналогично поступаем в случае, если удаётся разрешить уравнение (2) относительно x.

Если не удалось разрешить уравнение (2) относительно y или x, то надо попробовать найти параметризацию

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

кривой, заданной уравнением (2).

Проиллюстрируем один приём, иногда приводящий к параметризации, на примере уравнения окружности $x^2 + y^2 = 1$ (см. рис.6).

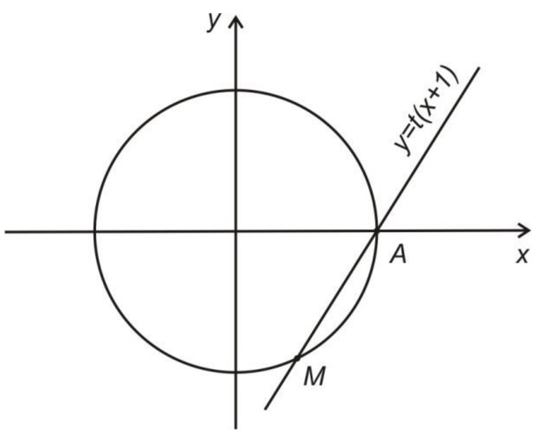


Рис.6. Параметризация окружности

Через точку $A(1{,}0)$ проведём прямую с угловым коэффициентом t.

$$y = t(x - 1)$$

Эта прямая пересечёт окружность ещё в одной точке M (помимо точки A). Найдём координаты точки M. Для этого решим систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = t(x - 1) \end{cases}$$

методом исключения. Получим $M\left(\frac{t^2-1}{t^2+1}; \frac{-2t}{t^2+1}\right)$. Из рис.6 видно, что, меняя угловой коэффициент прямой, мы получим любую точку M на окружности. Таким образом, получим параметризацию

$$\begin{cases} x = \dfrac{t^2-1}{t^2+1} \\ y = \dfrac{-2t}{t^2+1} \end{cases}$$

Замечание. Ранее была получена параметризация $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$

Пример 5. Кривая (L) задана уравнением $x^3 + y^3 = xy$. Найти параметрическое задание этой кривой.

Решение. Положим $y = tx$ и подставим в данное уравнение. Получим

$$x^3 + t^3x^3 = tx^2$$

Отсюда $x = \frac{t}{1+t^3}$, $y = t \cdot x = \frac{t^2}{1+t^3}$ – искомая параметризация.

Геометрический смысл производимых действий заключается в том, что мы ищем точку пересечения кривой (L) и прямой $y = tx$ с некоторым угловым коэффициентом t и проходящую через начало координат. Для этого решим систему

$$\begin{cases} y = tx \\ x^3 + y^3 = xy \end{cases}$$

Отсюда $\begin{cases} x = \frac{t}{1+t^3} \\ y = \frac{t^2}{1+t^3} \end{cases}$

Теперь, получив параметризацию, можно построить кривую (L) методами, изложенными в $\boldsymbol{n}$°**1**.

Ещё один приём, иногда приводящий к параметризации, заключается в переходе к полярным координатам (см. задачу 3 $\boldsymbol{n}$° **3**).

$\boldsymbol{n}$°**3.** Здесь мы будем рассматривать только частный случай, именно уравнения вида $\rho = \rho(\varphi)$. Чтобы изобразить кривую, заданную таким уравнением, надо сделать следующее:

1) Найти область определения функции $\rho = \rho(\varphi)$, то есть найти все числа φ, для которых $\rho \geq 0$.

2) Возьмём какое-нибудь значение φ_1 из области определения, для которого мы можем легко вычислить $\rho_1 = \rho(\varphi_1)$. Проведём из полюса луч под углом φ_1 и отметим на нём точку на расстоянии ρ_1 от полюса. Эта точка лежит на искомой кривой.

3) Выбираем следующее значение φ_2 и повторяем процесс нахождения точек на кривой. Полученные точки соединяем плавной линией и получаем эскиз графика функции. Ясно, что чем больше точек на кривой мы найдём, тем точнее будет наш эскиз графика функции $\rho = \rho(\varphi)$.

Задача 1. Построить кривые, заданные в полярных координатах уравнениями

а) $\rho = 1$

б) $\varphi = \frac{\pi}{4}$

в) $\rho = 2\cos\varphi$

г) $\rho = \frac{2}{\cos\varphi}$

д) $\rho = -\frac{3}{\sin\varphi}$

е) $\rho = \frac{1}{\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)}$

Решение. а) Условие $\rho = 1$ означает, что точка удалена от полюса на расстояние единица для любого. Множество всех точек плоскости, полярные координаты которых удовлетворяют этому условию — окружность с центром в полюсе радиуса единица.

б) Условие $\varphi = \frac{\pi}{4}$ означает, что радиус- вектор точки образует угол $\frac{\pi}{4}$ с полярной осью. Множество всех точек плоскости, полярные координаты которых удовлетворяют этому условию — это луч, исходящий из полюса под углом $\frac{\pi}{4}$, при этом точка полюса исключена.

в) $\rho = 2\cos\varphi$.Область определения $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$,так как ρ неотрицательно при любом φ. Рассмотрим точку A на полярной оси, $|OA| = 2$, и множество всех прямоугольных треугольников OMA с гипотенузой OA. Тогда точка M – вершина прямого угла — опишет окружность с диаметром OA и $\rho = OM =$
$= 2\cos\varphi$ (см. рис.7).

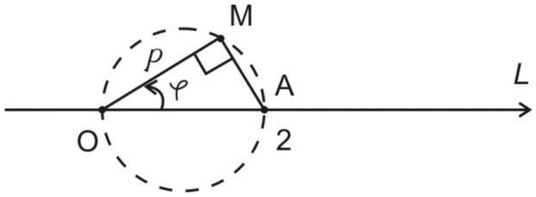


Рис.7. Построение кривой $\rho = 2cos\varphi$

г) $\rho = \frac{2}{\cos\varphi}$, $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$

Если точка $M(\varphi, \rho)$ принадлежит искомой кривой, то из рис.8 видно, что, опуская перпендикуляр из точки M на полярную ось, получим $OA = \rho\cos\varphi =$
$= 2$ для всех допустимых φ. Поэтому понятно, что точка M принадлежит

прямой, перпендикулярной полярной оси и проходящей через точку $A(0;2)$ (см. рис.8).

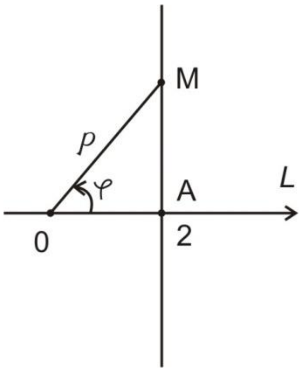


Рис.8. Построение кривой $\rho = \frac{2}{cos\varphi}$

д) $\rho = -\frac{3}{\sin\varphi}$, $\pi < \varphi < 2\pi$, так как ρ должно быть неотрицательным. Опустим перпендикуляр из точки M, лежащей на искомой кривой, на полярную ось. Видим, что $AM = \rho\sin(2\pi - \varphi) = -\rho\sin\varphi = 3$.

Поэтому точка M лежит на прямой, параллельной полярной оси и удалённой от неё вниз на три единицы (см. рис.9).

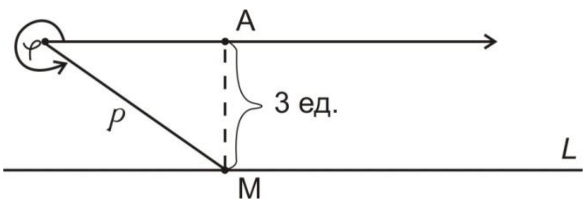


Рис.9. Построение кривой $\rho = -\frac{3}{sin\varphi}$

е) $\rho = -\frac{1}{\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)}$, $0 < \varphi - \frac{\pi}{4} < \pi$, $\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{5\pi}{4}$. Пусть точка M принадлежит искомой кривой. Опустим перпендикуляр из точки M на прямую, проходящую через полюс O под углом $\frac{\pi}{4}$ к полярной оси. Тогда из рис.10 видно, что $AM = \rho\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) = 1$ для любого $\varphi \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$. Таким образом, точка M лежит на прямой, параллельной (L) и отстоящей от неё на одну единицу (см. рис.10).

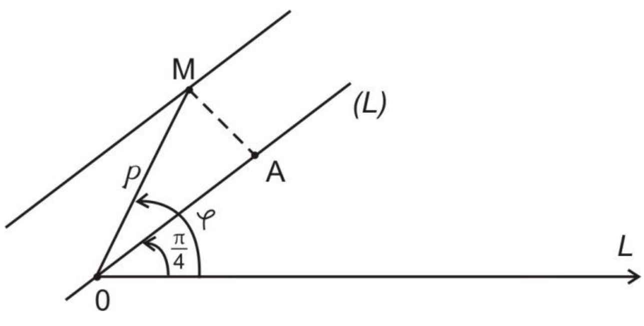


Рис.10. Построение кривой $\rho = -\frac{1}{sin(\varphi - \frac{\pi}{4})}$

Задача 2. Построить кривые, заданные в полярных координатах уравнениями

а) $\rho = \varphi$ спираль Архимеда

б) $\rho = a\sin 3\varphi$ трёхлепестковая роза

в) $\rho = \sqrt{a\cos 2\varphi}$ лемниската Бернулли

г) $\rho = a(1 + \cos\varphi)$ кардиоида.

Решение. а) ООФ $\varphi \geq 0$.

При φ=0 имеем ρ=0. Значит, полюс O лежит на искомой кривой.

Проведём луч, исходящий из полюса под углом $\frac{\pi}{6}$ радиан, (т.е. 30°) и отложим на нём отрезок, длина которого $\rho = \frac{\pi}{6} = 0{,}52$. Получим вторую точку искомой кривой.

Аналогично находим следующие точки кривой, лежащие на лучах, проведённых под углами $\frac{\pi}{4} = 0{,}78$ радиан, $\frac{\pi}{3} = 1{,}04$ радиан, $\frac{\pi}{2} = 1{,}56$ радиан, $\frac{2\pi}{3} = 2{,}08$ радиан, π=3,14 радиан, $\frac{3\pi}{2} = 4{,}68$ радиан, 2π=6,28 радиан, $\frac{5\pi}{2} =$ $= 7{,}85$ радиан. Видим, что при неограниченном увеличении угла φ, длина отрезка ρ=φ неограниченно возрастает. Кривая, получающаяся при плавном соединении полученных точек, имеет вид спирали. Она называется спиралью Архимеда (см. рис.11).

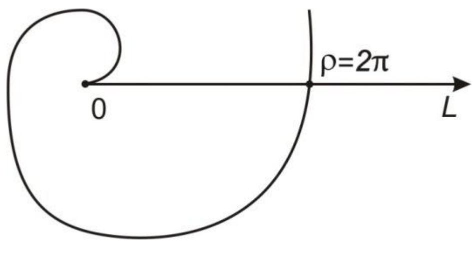


Рис.11. Построение спирали Архимеда

б) $\rho = a\sin 3\varphi$ ООФ $\sin 3\varphi \geq 0$, $2\pi k \leq 3\varphi \leq \pi + 2\pi k$, $k \epsilon Z$. Это равносильно тому, что $\frac{2\pi n}{3} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}$. При

$k = 0$ $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$

$k = 1$ $\frac{2\pi}{3} \leq \varphi \leq \pi$.

$k = 2$ $\frac{4\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{3}$

Остальные $k \in Z$ дают те же точки на плоскости. Строим кривую для $\varphi \in [0; \frac{\pi}{2})$.

Заполним таблицу.

φ	0	$\frac{\pi}{18} = 10°$	$\frac{\pi}{9} = 20°$	$\frac{\pi}{6} = 30°$	$\frac{4\pi}{18} = 40°$	$\frac{5\pi}{18} = 50°$	$\frac{\pi}{3} = 60°$
ρ	0	$\frac{1}{2}a$	$\frac{\sqrt{3}}{2}a$	a	$\frac{\sqrt{3}}{2}a$	$\frac{1}{2}a$	0

Из полюса проводим лучи под углами $0°, 10°, 20°, 30°, 40°, 50°, 60°$. Откладываем на каждом луче отрезок соответствующей длины. Соединяем полученные точки.

Аналогично поступаем для $\varphi \in \left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$, $\varphi \epsilon \left[\frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right]$ (см. рис.12).

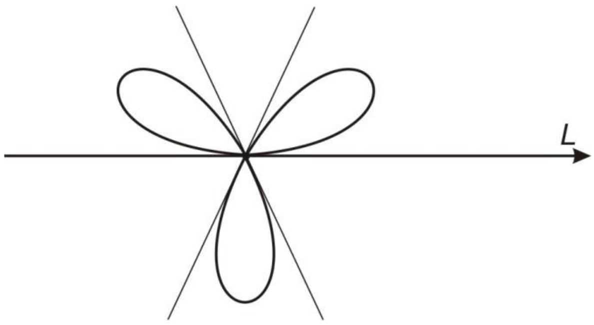


Рис.12. Построение трёхлепестковой розы

в) $\rho = a\sqrt{\cos2\varphi}$, $a > 0$. ООФ $\cos2\varphi \geq 0$; $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leq 2\varphi \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi k$,

$-\frac{\pi}{4} + \pi k \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \epsilon Z$. При $k = 0$ $-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$. При $k = 1$ $\frac{3\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{4}$. Остальные $k \in Z$ дают уже полученные точки плоскости. Из точки O проводим лучи под углами $0, \pm\frac{\pi}{4}, \pm\frac{\pi}{6}$. На каждом луче отмечаем соответствующую точку. Полученные точки соединяем плавной линией.

Эта кривая называется лемниската (см. рис.13).

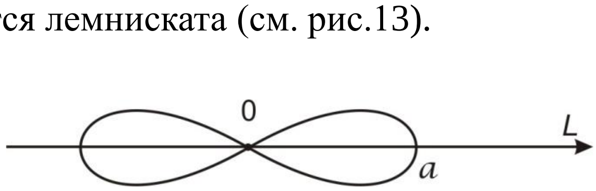


Рис.13. Построение лемнискаты

г) $\rho = a(1 + \cos\varphi)$ ООФ $\varphi \epsilon R$. Для построения кривой достаточно взять

$\varphi \epsilon [0; 2\pi]$. Поступая аналогично предыдущим примерам, получаем кривую (см. рис.14).

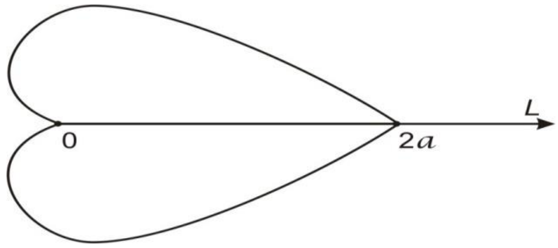


Рис.14. Построение кардиоиды

Эта кривая называется кардиоида.

Задача 3. Построить кривые, заданные уравнениями в прямоугольной декартовой СК.

Указание. Предварительно перейти к полярным координатам.

а) $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$

б) $(x + y)^2 = (x^2 + y^2)^2$

Решение. а) Подставим $x = \rho\cos\varphi\,, y = \rho\sin\varphi$. Получим $\rho^2 = \cos 2\varphi$ – лемниската (см. рис.13).

б) Подставим $x = \rho\cos\varphi\,, y = \rho\sin\varphi$. Получим $\rho = \sqrt{2}\left|\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)\right|$ (см. рис.15).

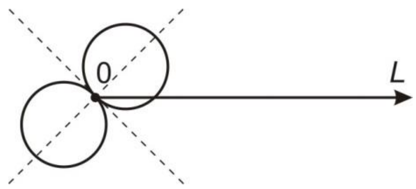


Рис.15.Построение кривой $\rho = \sqrt{2}\left|cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)\right|$

§ 7. Примеры на нахождение уравнений линий на плоскости

Напомним, что уравнением линии (l) на плоскости (в декартовых координатах и в неявной форме) называется уравнение вида

$$F(x, y) = 0 \qquad (1)$$

такое, что координаты любой точки на (l) удовлетворяют уравнению (1), и обратно, любая пара чисел (x_0, y_0), удовлетворяющая (1), является координатами точки, лежащей на (l).

Поэтому уравнение (1) линии (l) можно рассматривать как соотношение между координатами любой точки, лежащей на (l). Получается, что для нахождения уравнения (1) надо найти одно соотношение, связывающее координаты "x" и "y" любой точки на линии.

Чаще всего кривая задаётся с помощью какого-либо геометрического или механического свойства, общего для всех точек этой кривой. Поэтому уравнение (1) получится, если мы сможем записать это свойство с помощью формулы, связывающей координаты "x" и "y" точки на кривой.

1. Найти уравнение линии, каждая точка которой равноудалена от точек $A(2,4)$ и $B(5,-1)$

Решение. Пусть точка $M(x,y)$ лежит на искомой линии. Это равносильно тому, что $|MA| = |MB|$. Последнее равенство в координатной форме имеет вид

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{(x-5)^2 + (y+1)^2} .$$

После равносильных преобразований этого уравнения получаем $6x - 10y - -6 = 0$.

Ответ. $3x - 5y - 3 = 0$.

2. Написать уравнение прямой линии, перпендикулярной к отрезку PQ, где $P(-6,3), Q(2,5)$ и делящей этот отрезок в отношении $\lambda = 3$.

Решение. Координаты точки R, делящей отрезок PQ в отношении λ =3, находим по формулам (12) § 3, гл.3 $R\left(0, \frac{9}{2}\right)$.

По условию, точка $M(x,y)$ лежит на искомой прямой тогда и только тогда, когда

$$\boldsymbol{RM} \perp \boldsymbol{PQ} \text{ , то есть } \boldsymbol{RM} \cdot \boldsymbol{PQ} = 0 \qquad (2)$$

Имеем $\boldsymbol{RM} = x\boldsymbol{i} + \left(y - \frac{9}{2}\right)\boldsymbol{j}; \boldsymbol{PQ} = 8\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$.

Поэтому условие (2) переписываем в виде

$$8x + 2\left(y - \frac{9}{2}\right) = 0 \text{ или } 8x + 2y = 18.$$

Ответ. $4x + y = 9$.

3. Найти траекторию точки M, которая при своём движении остаётся равноудалённой от оси абсцисс и от точки $F(0,2)$ (см. рис 1).

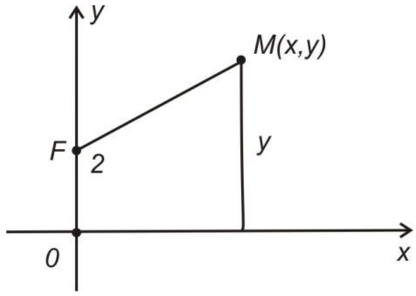


Рис.1. Нахождение траектории точки из примера 3

Решение. Прежде всего заметим, что точка $M(x, y)$ не может лежать в нижней полуплоскости, так как тогда её расстояние до оси абсцисс меньше расстояния до точки F. Поэтому ордината точки M – это неотрицательное число, равное расстоянию от M до оси абсцисс.

Для решения задачи найдём сначала уравнение искомой траектории. По условию, точка $M(x, y)$ лежит на искомой траектории тогда и только тогда, когда

$$|MF| = y \qquad (3)$$

Используем формулу для расстояния между двумя точками (11) § 3гл.3. Равенство (3) запишется в виде

$$\sqrt{x^2 + (y-2)^2} = y \qquad (4)$$

(так как $y \geq 0$).

Равенство (4) является уравнением искомой траектории. После возведения обеих частей в квадрат и приведения подобных членов получим равносильное уравнение

$$y = \frac{1}{4}x^2 + 1 \qquad (5)$$

Видим, что координаты любой точки M на траектории связаны соотношением (5), но (5)−это, как известно из школьного курса, уравнение параболы. Значит, траектория точки M – это парабола.

4. Отрезок длины $2a$ скользит своими концами по сторонам прямого угла. Какую траекторию описывает точка M, лежащая посередине отрезка?

Решение. Введём прямоугольную декартову СК, взяв стороны прямого угла за оси координат, а его вершину – за начало отсчёта (см. рис.2).

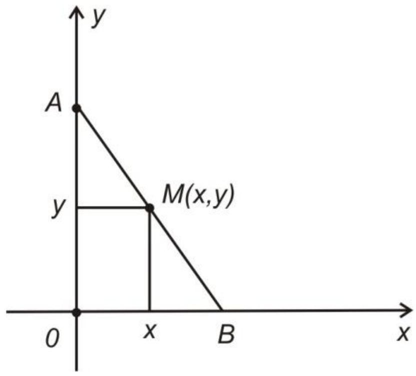


Рис.2. Нахождение траектории точки из примера 4

Как и в предыдущей задаче, для нахождения траектории найдём сначала уравнение этой траектории.

Пусть точка $M(x, y)$ лежит на искомой траектории. Тогда точки A и B имеют координаты

$$A(0; 2y)\ , B(2x; 0)$$

По условию,

$$|AB| = 2a \qquad (6)$$

Записывая равенство (6) в координатах, получим

$$\sqrt{4x^2 + 4y^2} = 2a$$

Возводим обе части этого равенства в квадрат, получаем

$$x^2 + y^2 = a^2 \qquad (7)$$

Видим, что координаты любой точки M на искомой траектории связаны соотношением (7). Значит, (7) – это уравнение искомой траектории. Известно, что (7) – это уравнение окружности, значит, траектория точки M – это окружность.

5. Две вершины треугольника ABC– это точки $A(1; -3)$ и $B(5; -1)$. Третья вершина C скользит по биссектрисе 1-го и 3-го координатных углов. Какую кривую описывает при этом центр тяжести треугольника ABC? (Центр тяжести треугольника находится в точке пересечения его медиан).

Решение. По условию, точка C лежит на биссектрисе, поэтому координаты точки C равны между собой. Обозначим $C(t, t)$, где t – любое число (t – параметр).

Найдём уравнение траектории центра тяжести. Пусть $M(x, y)$ – центр тяжести треугольника ABC и точка P – середина отрезка AB. Тогда $P(3; -2)$ по формулам (12) § 3 гл. 3 и точка M делит отрезок CP в отношении λ =2. Поэтому (см. (12) § 3 гл. 3)

$$\begin{cases} x = \frac{t+6}{3} \\ y = \frac{t-4}{3} \end{cases} \qquad (8)$$

Равенства (8) – это параметрические уравнения искомой траектории центра тяжести $M(x, y)$. Исключаем параметр "t". Получим уравнение $3x - 3y - 10 = 0$, которое задаёт прямую линию с уравнением $y = x - \frac{10}{3}$.

6. Отрезок AB длины "$2a$" скользит своими концами по сторонам прямого угла. Какую кривую описывает при этом точка M основания перпендикуляра, опущенного из вершины прямого угла на отрезок AB?

Решение. Введём прямоугольную декартову СК Oxy, взяв стороны прямого угла за оси координат, а его вершину – за начало отсчёта O. Одновременно введём полярную СК (φ, ρ), взяв точку O за полюс, а ось Ox – за полярную ось (см. рис.3).

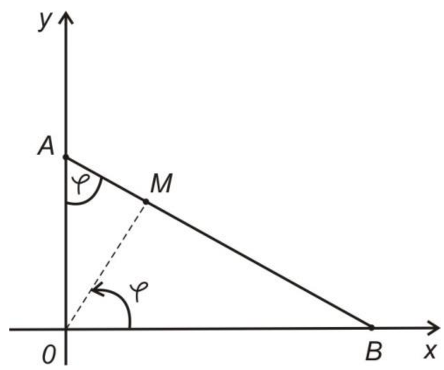


Рис.3. Нахождение траектории точки из примера 6

Пусть точка M имеет координаты (x, y) и (φ, ρ) в декартовой и полярной системах координат соответственно. Имеем (см. (1) § 2 гл.3)

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases} \qquad (9)$$

Найдём уравнение траектории точки M в полярной СК. Из рис.3 видно, что

$$\angle OAB = \angle MOB = \varphi.$$

Поэтому из треугольника OAB

$$|OB| = 2a\sin\varphi \qquad (10)$$

Из треугольника OMB имеем (используя (10))

$$\rho = |OM| = |OB|\cos\varphi = 2a\sin\varphi\cos\varphi = a\sin2\varphi$$

Итак, координаты (φ, ρ) точки M связаны соотношением

$$\rho = a\sin2\varphi \ , \ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \qquad (11)$$

Значит (11) – это уравнение искомой траектории в полярной СК.

Если подставить выражение $\rho = a\sin 2\varphi$ в формулы (9), то получим параметрическое задание траектории в декартовой СК.

$$\begin{cases} x = a\sin 2\varphi\cos\varphi \\ y = a\sin 2\varphi\sin\varphi \end{cases},\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2},\ \varphi - \text{параметр}. \qquad (12)$$

Наконец, если из (9) выразить $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ через x, y и $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ ((2) § 2 гл.3)

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\ ;\ \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

подставить в формулу $\rho = 2a\sin\varphi\cos\varphi$, то получим

$$(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} = 2xy \qquad (13)$$

Полученное уравнение (13) – это уравнение траектории в неявном виде.

Проще всего можно представить себе траекторию, нарисовав её, используя уравнение (11).

Последние два примера этого параграфа посвящены нахождению уравнений окружности и прямых линий в косоугольной декартовой СК.

7. Найти уравнение окружности радиуса R с центром в начале координат, если оси координат образуют а) угол $\frac{\pi}{3}$; б) угол $\frac{2\pi}{3}$; в) угол $\frac{\pi}{4}$.

Решение. Обозначим $\boldsymbol{e_1}$ и $\boldsymbol{e_2}$ – орты осей Ox и Oy соответственно. Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка на окружности. Это равносильно утверждению, что

$$|OM| = R \qquad (14)$$

Запишем (14) в координатной форме, используя равенство $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})}$ (см. свойство 2 § 2 гл.2) и то, что $\boldsymbol{OM} = x\boldsymbol{e_1} + y\boldsymbol{e_2}$

$$\sqrt{(x\boldsymbol{e_1} + y\boldsymbol{e_2})(x\boldsymbol{e_1} + y\boldsymbol{e_2})} = R$$

$$x^2 + 2xy\cos(\widehat{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}}) + y^2 = R^2$$

Поэтому в зависимости от угла между осями получаем разные ответы

а) $x^2 + xy + y^2 = R^2$

б) $x^2 - xy + y^2 = R^2$

в) $x^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}xy + y^2 = R^2$

8. На плоскости задана косоугольная декартова СК Oxy с углом $\frac{\pi}{3}$ между осями, $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}$ – орты осей. Пусть $A(x_0, y_0)$ – данная точка и $\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{e_1} + a_y\boldsymbol{e_2}$ – данный вектор. Найти

а) уравнение прямой (l_1), проходящей через точку A параллельно вектору $\boldsymbol{a}$.

б) уравнение прямой (l_2), проходящей через точку A перпендикулярно вектору $\boldsymbol{a}$.

Решение. а) Условие $M(x, y) \in (l_1)$ равносильно условию (см. рис.4).

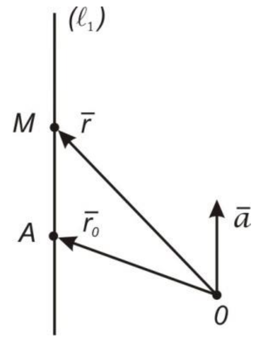


Рис.4. Прямая, проходящая через данную точку, параллельно данному вектору

$$\boldsymbol{AM} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} \qquad (15)$$

(см. § 3 гл. 2) или

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_0}) \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} \qquad (16)$$

где $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{r_0}$ – радиус- векторы точек M и A соответственно. Имеем

$$\boldsymbol{r}_0 = x_0\boldsymbol{e_1} + y_0\boldsymbol{e_2}\ , \boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e_1} + y\boldsymbol{e_2}\ ,\ \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_0} = (x - x_0)\boldsymbol{e_1} + (y - y_0)\boldsymbol{e_2} \quad (17)$$

Запишем равенство (16) в координатной форме

$$\big((x - x_0)\boldsymbol{e_1} + (y - y_0)\boldsymbol{e_2}\big) \times \big(a_x\boldsymbol{e_1} + a_y\boldsymbol{e_2}\big) = \boldsymbol{0}$$

Раскрываем скобки, учитывая свойство дистрибутивности векторного произведения и равенства $\boldsymbol{e_1} \times \boldsymbol{e_1} = \boldsymbol{e_2} \times \boldsymbol{e_2} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{e_2} \times \boldsymbol{e}_1 = -\boldsymbol{e_1} \times \boldsymbol{e_2}$, получаем

$$\Big((x - x_0)a_y - (y - y_0)a_x\Big)\boldsymbol{e_1} \times \boldsymbol{e_2} = \boldsymbol{0}$$

Отсюда $(x - x_0)a_y - (y - y_0)a_x = 0$ или

$$\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y} \qquad (18)$$

Равенство (18) – искомое уравнение. Видим, что ответ не зависит от угла между осями.

б) Условие $M(x, y) \in (l_2)$ равносильно условию

$$\boldsymbol{AM} \cdot \boldsymbol{a} = 0 \qquad (19)$$

(см. рис.5)

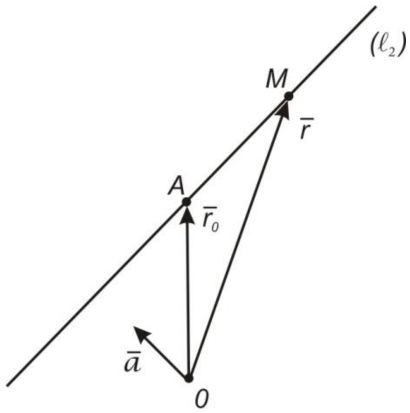


Рис. 5. Прямая, проходящая через данную точку, перпендикулярно данному вектору

(см. § 2 гл. 2) или $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r_0})\cdot\boldsymbol{a}=0$.

Подставим в (19) выражения (17)

$$\big((x-x_0)\boldsymbol{e_1}+(y-y_0)\boldsymbol{e_2}\big)\cdot\big(a_x\boldsymbol{e_1}+a_y\boldsymbol{e_2}\big)=0$$

Раскрываем скобки, учитывая дистрибутивность скалярного произведения и равенства

$$\boldsymbol{e_1}\cdot\boldsymbol{e_1}=\boldsymbol{e_2}\cdot\boldsymbol{e_2}=1\quad,\boldsymbol{e_1}\cdot\boldsymbol{e_2}=\boldsymbol{e_2}\cdot\boldsymbol{e_1}=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

Получим

$a_x(x-x_0)+a_y(y-y_0)+\frac{1}{2}\Big(a_y(x-x_0)+a_x(y-y_0)\Big)=0$ или

$$\left(a_x+\frac{1}{2}a_y\right)x+\left(a_y+\frac{1}{2}a_x\right)y-\left(a_xx_0+a_yy_0+\frac{1}{2}a_yx_0+\frac{1}{2}a_xy_0\right)=0\quad(20)$$

Уравнение (20)– уравнение искомой прямой (l_2).

Глава 4. Прямая линия на плоскости и в пространстве. Плоскость в пространстве

§1. Прямая линия на плоскости

$\boldsymbol{n}^\circ\mathbf{1}$. Уравнение прямой, проходящей через заданную точку перпендикулярно заданному вектору

Во-первых, если нам дана какая-либо прямая на плоскости, то мы можем взять на ней точку M и провести через эту точку единственный перпендикуляр к этой прямой (по аксиоме планиметрии). Любой вектор $\boldsymbol{n}\neq\boldsymbol{0}$, лежащий на этом перпендикуляре, называется вектором нормали к прямой. Все нормали коллинеарны между собой.

Во-вторых, обратно, если заданы точка M_0 на плоскости и вектор $\boldsymbol{n}\neq\boldsymbol{0}$, приложенный к этой точке, то концы всех векторов, перпендикулярных к $\boldsymbol{n}$ и приложенных к точке M_0, заполняют прямую (l), проходящую через точку M_0 с нормалью $\boldsymbol{n}$ (см. рис. 1).

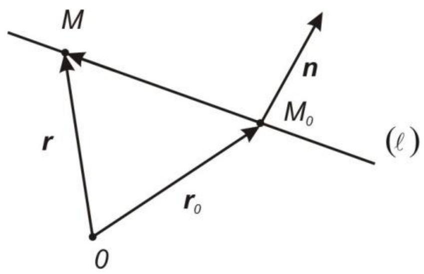


Рис.1. Прямая, проходящая через данную точку, с заданным вектором нормали

Найдем уравнение этой прямой. Пусть Oxy – декартова прямоугольная СК, пусть точка $M(x,y)$ принадлежит (l) и $M_0(x_0,y_0)$ – данная точка на (l),

$$\boldsymbol{n} = \{A,B\} = A\boldsymbol{i} + B\boldsymbol{j}, \boldsymbol{M_0M} = (x - x_0)\boldsymbol{i} + (y - y_0)\boldsymbol{j}$$

Точка M принадлежит (l) тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{M_0M} \perp \boldsymbol{n}$. Последнее равносильно тому, что $\boldsymbol{M_0M} \cdot \boldsymbol{n} = 0$. Используя равенство (2) § 2 гл.2 для скалярного произведения, получим равенство

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \qquad (1)$$

– уравнение прямой, проходящей через точку M_0 с нормалью $\boldsymbol{n}$.

Обозначим $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{OM} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$ – радиус-вектор точки M; $\boldsymbol{r_0} = \boldsymbol{OM_0} = x_0\boldsymbol{i} +$ $+y_0\,\boldsymbol{j}$ – радиус-вектор точки M_0, тогда $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_0} = \boldsymbol{M_0M}$.

Точка $M \in (l)$ тогда и только тогда, когда $(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_0})\boldsymbol{n} = 0$

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_0})\boldsymbol{n} = 0 \qquad (2)$$

Это уравнение называется уравнением прямой, проходящей через заданную точку M_0 с заданной нормалью $\boldsymbol{n}$ в векторной форме.

Пример 1. Найти уравнение прямой, перпендикулярной к вектору $\boldsymbol{n} = 2\boldsymbol{i} -$ $-3\boldsymbol{j}$ и проходящей через точку $M_0(3,4)$ по формуле (1).

Ответ. $2(x - 3) - 5(y - 4) = 0$ или $2x - 5y + 14 = 0$.

n°2. Общее уравнение прямой на плоскости

Здесь мы проверим, что уравнение вида

$$Ax + By + C = 0 \qquad (3)$$

(где A и B не обращаются в 0 одновременно) – общее уравнение прямой на плоскости, т.е., во-первых, любая прямая имеет уравнение такого вида и, во-вторых, множество точек с координатами, удовлетворяющими этому уравнению, заполняет прямую.

Первое утверждение легко доказать с помощью 1), где показано, что уравнение любой прямой имеет вид $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$.

Здесь $M_0(x_0, y_0)$ – точка на этой прямой, $\boldsymbol{n} = A\boldsymbol{i} + B\boldsymbol{j}$ – нормаль. Раскрывая скобки, получим уравнение $Ax + By + C = 0$, где обозначено $C = -Ax_0 - By_0$.

Докажем второе утверждение. Пусть (x_0, y_0) – решение уравнения $Ax + By + C = 0$, $M_0(x_0, y_0)$ – точка с этими координатами. Пусть (x', y') –другое решение этого уравнения, $M'(x', y')$ – точка с этими координатами. Мы имеем

$$Ax_0 + By_0 + C = 0 \text{ и } Ax' + By' + C = 0.$$

Отсюда $A(x' - x_0) + B(y' - y_0) = 0$, следовательно, скалярное произведение вектора $\boldsymbol{M_0M'} = (x' - x_0)\boldsymbol{i} + B(y' - y_0)\boldsymbol{j}$ на вектор $\boldsymbol{n} = A\boldsymbol{i} + B\boldsymbol{j}$ равно нулю. Поэтому все векторы $\boldsymbol{M_0M'}$ для всех точек M' перпендикулярны одному и тому же вектору $\boldsymbol{n}$, т.е. все точки M' заполняют прямую и $\boldsymbol{n} = A\boldsymbol{i} + B\boldsymbol{j}$ – нормаль к этой прямой.

Мы видим, что любое уравнение первой степени с двумя неизвестными задаёт прямую на плоскости, и обратно, любая прямая на плоскости может быть задана уравнением первой степени с двумя неизвестными.

Замечание. Как следует из доказательства формулы общего уравнения прямой, прямая с уравнением (3) имеет вектор $\boldsymbol{n} = A\boldsymbol{i} + B\boldsymbol{j}$ своей нормалью.

Пример 2. Найти нормаль к прямой $2x + 3y = 4$

Ответ. $\boldsymbol{n} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$

Пример 3. Выясним, каковы особенности расположения прямой $(l){:}\, Ax + {}$ $+By + D = 0$, если один из коэффициентов уравнения равен нулю.

а) Если коэффициент $A = 0$, то есть уравнение имеет вид

$$By + C = 0,$$

то нормаль к (l) – это вектор $\boldsymbol{n} = B\boldsymbol{j}$. Значит, (l) перпендикулярна оси ординат. Таким образом, в этом случае прямая (l) параллельна оси абсцисс и пересекает ось ординат в точке с координатой $y = -\frac{C}{B}$.

б) Если коэффициент $B = 0$, то есть уравнение имеет вид

$$Ax + C = 0,$$

то нормаль к (l) – это вектор $\boldsymbol{n} = A\boldsymbol{i}$. Значит, (l) параллельна оси ординат и пересекает ось Ox в точке с координатой $x = -\frac{C}{A}$.

в) если коэффициент $C = 0$, то

$$(l){:}\, Ax + By = 0$$

и прямая проходит через начало координат точку O.

В практических задачах прямая линия не всегда задана точкой и нормалью. Ниже мы разберём другие способы задания прямой на плоскости и проследим, как они влияют на вид уравнения прямой.

n°3. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки

Пусть $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ – две заданные точки, $\boldsymbol{r_1}, \boldsymbol{r_2}$ – их радиус-векторы. Найдем уравнение прямой (l), проходящей через эти точки.

Точка $M(x, y)$ с радиус-вектором $\boldsymbol{r}$ принадлежит прямой тогда и только тогда, когда векторы $\boldsymbol{M_1M}$ и $\boldsymbol{M_1M_2}$ коллинеарны (см. рис. 2).

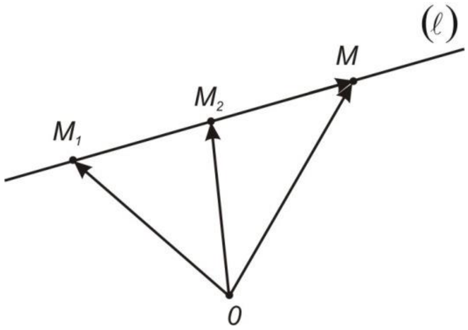


Рис.2. Прямая, проходящая через две заданные точки

Это равносильно тому, что $\boldsymbol{M_1M} = \lambda \boldsymbol{M_1M}_2$, при некотором вещественном λ.

$$\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1 = \lambda(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) \qquad (4)$$

есть искомое уравнение в векторной форме. То же самое уравнение можно записать в параметрической форме

$$x = x_1 + \lambda(x_2 - x_1) \qquad (5)$$
$$y = y_1 + \lambda(y_2 - y_1)$$

Исключая параметр λ, получаем координатную форму уравнения прямой, проходящей через две данные точки.

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \qquad (6)$$

n°4. Уравнение прямой, проходящей через заданную точку с заданным направляющим вектором

Даны точка $M_1(x_1, y_1)$ и вектор $\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j}$. Найдём уравнение прямой (l), проходящей через точку M_1 параллельно вектору $\boldsymbol{a}$.

Точка $M\big(x, y \in (l)\big)$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{M_1M}$ коллинеарен $\boldsymbol{a}$.

По теореме 1 § 2 гл. 2

$$\boldsymbol{M_1M} = (x - x_1)\boldsymbol{i} + (y - y_1)\boldsymbol{j}$$

Известно, что условие коллинеарности векторов равносильно пропорциональности их соответствующих проекций. Поэтому условие $M(x,y) \in (l)$ равносильно равенству

$$\frac{x-x_1}{a_x} = \frac{y-y_1}{a_y} \qquad (7)$$

Равенство (7) – это искомое уравнение прямой (l) в координатной форме.

Кроме того, известно, что условие коллинеарности двух векторов равносильно равенству нулю их векторного произведения. Поэтому условие $M(x,y) \in (l)$ можно записать в виде

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_1}) \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} \qquad (8)$$

Уравнение (8) – это искомое уравнение прямой (l) в векторной форме.

n°5. Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Пусть $(\,l\,) -$ некоторая прямая, $Ax + By + C = 0$ – ее уравнение и пусть $B \neq 0$, т.е. прямая не параллельна оси Oy. Тогда уравнение этой прямой можно переписать в виде

$$y = -(A/B)x - (C/B).$$

Обозначим $k = -A/B, b = -C/B$. Тогда

$$y = kx + b \qquad (9)$$

– уравнение $(l\,)$ с угловым коэффициентом.

Выясним геометрический смысл чисел "k", "b"(см. рис.3).

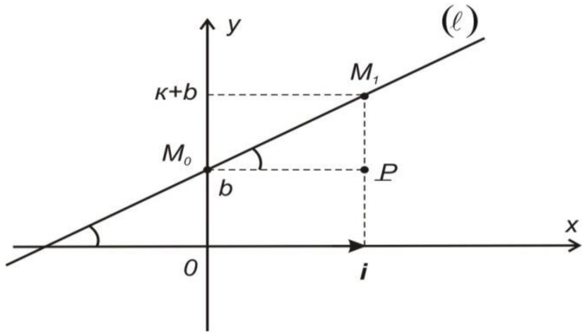


Рис.3. Прямая с угловым коэффициентом

При $x = 0 \quad y = b$, следовательно, точка $M_0(0,b)$ лежит на прямой. Таким образом, число "b" показывает, на какой высоте прямая $(\,l\,)$ пересекает ось Oy. Пусть теперь $x\ = 1$, тогда $y = k + b$,т.е. $M_1(1, k+b)$ принадлежит $(\,l\,)$. Из рис.3 видно, что

$$|M_1P| = (k+b) - b = k = \text{tg}(\measuredangle M_1M_0P).$$

Таким образом, угловой коэффициент "k" равен тангенсу угла наклона прямой (l) к оси Ox. Заметим, что уравнение (9) задаёт прямую, непараллельную оси Oy.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом удобно использовать при вычислении угла между прямыми.

Допустим, что заданы две прямые (l_1) и (l_2) своими уравнениями с угловыми коэффициентами

$$(l_1): y = k_1x + b_1, \quad (l_2): \ y = k_2x + b_2$$

Вычислим угол между (l_1) и (l_2) (см. рис. 4).

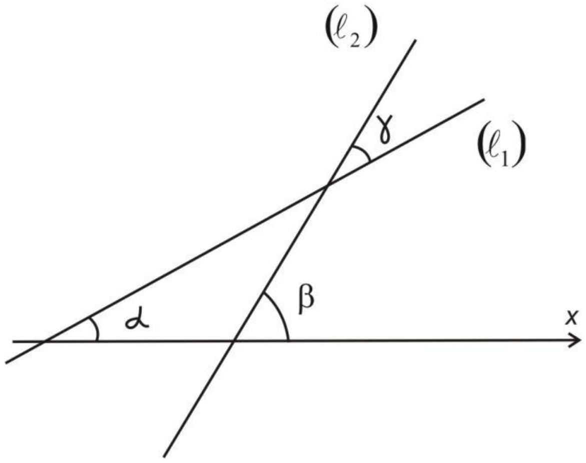


Рис.4. Вычисление угла между двумя прямыми

По условию, $\mathrm{tg}\,\alpha = k_1$, $\mathrm{tg}\beta = k_2$. Из рис.4 видно, что $\alpha + \gamma = \beta$, т.е. $\gamma = \beta - \alpha$.

Тогда $\mathrm{tg}\gamma = \mathrm{tg}(\beta - \alpha) = (\mathrm{tg}\beta - \mathrm{tg}\alpha)/(1 + \mathrm{tg}\beta\mathrm{tg}\alpha) = (k_2 - k_1)/(1 + k_2k_1)$.

Итак,

$$\mathrm{tg}\gamma = (k_2 - k_1)/(1 + k_2k_1). \qquad (10)$$

В частности, прямые параллельны тогда и только тогда, когда их угловые коэффициенты совпадают.

$$(l_1) \parallel (l_2) \text{ равносильно } k_1 = k_2 \qquad (11)$$

Докажем, что

$$(l_1) \perp (l_2) \text{ тогда и только тогда, когда } k_1k_2 = -1. \qquad (12)$$

Действительно, $\begin{matrix} \boldsymbol{n_1} = \{k_1, -1\} \\ \boldsymbol{n}_2 = \{k_2, -1\} \end{matrix}$ – векторы нормалей к прямым $(l_1), (l_2)$ соответственно.

$(l_1) \perp (l_2)$ равносильно тому, что $\boldsymbol{n_1 n_2} = 0$. Поэтому $k_1k_2 + 1 = 0$, $k_1k_2 = -1$.

Угол между прямыми можно вычислить по- другому. Пусть

$$(l_1): A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad (l_2): A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Воспользуемся тем, что $\cos\left(\widehat{l_1, l_2}\right) = \pm\cos(\widehat{\boldsymbol{n_1}, \boldsymbol{n_2}})$.

Если γ – угол между (l_1) и (l_2), то

$$\cos\gamma=\pm\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}. \qquad (13)$$

n°6. Уравнение прямой, проходящей через заданную точку с заданным угловым коэффициентом

Найдём уравнение прямой (l), проходящей через данную точку M_0 с данным угловым коэффициентом k. Искомое уравнение имеет вид $y = kx + b$ с неизвестным b. Мы найдём это число, используя условие $y_0 = kx_0 + b$. Следовательно, $b = y_0 - kx_0$. Таким образом, $y = kx + y_0 - kx_0$ или

$$y - y_0 = k(x - x_0). \qquad (14)$$

Это уравнение называется уравнением прямой, проходящей через данную точку с данным угловым коэффициентом.

n°7. Уравнение прямой в нормальной форме. Вычисление расстояния от точки до прямой

Пусть (l): $Ax + By + C = 0$.Тогда, как уже известно, вектор $\boldsymbol{n} = A\boldsymbol{i} + B\boldsymbol{j}$ – нормаль к (l). Поделим обе части этого уравнения на число $\pm\sqrt{A^2 + B^2} \neq 0$, где знак "+" или " $-$ " выбран противоположным к знаку числа "C". Получим уравнение (l) в виде

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0, \quad p \geq 0. \qquad (15)$$

Действительно, коэффициенты при "x " и " y " после указанного действия являются проекциями единичного нормального вектора $\boldsymbol{n_0}$. Эти проекции, как мы уже знаем, (см.(6) § 2 гл. 2) представляют собой направляющие косинусы вектора нормали. Таким образом, $\boldsymbol{n}_0 = \boldsymbol{i}\cos\alpha + \boldsymbol{j}\sin\alpha$.

Проверим, что число "p" равно расстоянию от (l) до начала координат. Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ – произвольная точка на прямой (l) , $\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{OM}_0$ – ее радиус-вектор (см. рис. 5а).

Имеем $x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha = p$; $\boldsymbol{r}_0\boldsymbol{n}_0 = p$; $|\boldsymbol{r}_0||\boldsymbol{n}_0|\cos(\widehat{\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n}_0})) = p$; $|\,\boldsymbol{r}_0|\cos(\widehat{\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n}_0}) = p$;

$\text{ПР}_{\boldsymbol{n_0}}\boldsymbol{r_0}=p$

Из рис.5а, видно, что левая часть равенства представляет собой расстояние от точки O до прямой (l).

Рассмотрим два случая расположения произвольной точки плоскости $M(x', y')$ относительно прямой (l).

1) Пусть $M(x', y')$ лежит с началом координат по одну сторону от прямой (см. рис.5б).

Тогда

$$x'\cos\alpha + y'\sin\alpha - p = \boldsymbol{OM} \cdot \boldsymbol{n_0} - p = -\left(p - \text{ПР}_{\boldsymbol{n_0}}\boldsymbol{OM}\right) = -d \qquad (16)$$

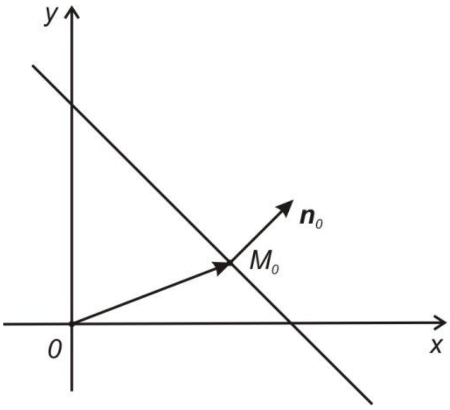


Рис.5а. Расстояние от точки Oдо прямой

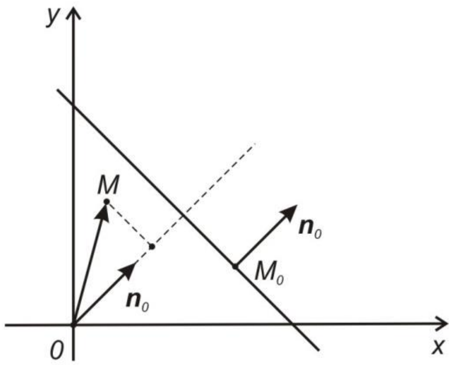


Рис.5б. Расстояние от точки M до прямой (1)

2) Пусть $M(x', y')$ лежит с началом координат по разные стороны от прямой (см. рис.6).

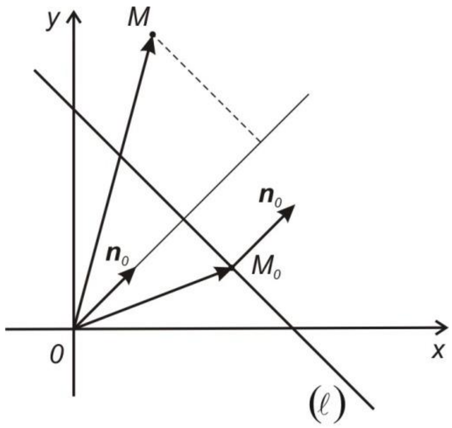


Рис.6. Расстояние от точки Mдо прямой (2)

Рассмотрим число

$$x'\cos\alpha + y'\sin\alpha - p = \boldsymbol{OM} \cdot \boldsymbol{n_0} - p = \quad \text{ПР}_{\boldsymbol{n_0}}\boldsymbol{OM} - p = d\,, \qquad (17)$$

где d – расстояние от точки M до (l).

Объединяя формулы (16) и (17), получим формулу расстояния от точки до прямой, которая не учитывает, расположены ли точки O и M по одну или по разные стороны от прямой:

$$d = |x'\cos\alpha + y'\sin\alpha - p| \qquad (18)$$

Пример 4. Найти расстояние от точек $A(-1; 5)$ и $B(3; 2)$ до прямой (l): $3x -$

$4y + 15 = 0$.

Решение. Делим обе части уравнения на $-\sqrt{3^2 + 4^2} = -5$. Получаем нормальное уравнение прямой (l)

$$(l): -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 3 = 0 \qquad (19)$$

Подставим координаты точки A в правую часть уравнения (19), получим

$$-\frac{3}{5}(-1) + \frac{4}{5} \cdot 5 - 3 = \frac{8}{5}$$

Значит, расстояние от точки A до прямой (l) равно $\frac{8}{5}$.

Подставим координаты точки B в правую часть уравнения (19), получим

$$\left(-\frac{3}{5}\right) \cdot 3 - \frac{4}{5} \cdot 2 - 3 = -\frac{32}{5} \qquad (20)$$

Значит, расстояние от точки B до прямой (l) равно $d = \frac{32}{5}$ (знак " $-$ " в правой части равенства (20) указывает на то, что точки B и O лежат по одну сторону от прямой (l).

Мы рассмотрели несколько видов уравнений прямой линии на плоскости. Выбор того или иного из них для решения конкретной задачи зависит от тех геометрических параметров, которые даны в условии. Для иллюстрации этого приведём решения некоторых стандартных задач.

Задача 1. Даны три точки $A(2;-1), B(6;-4), C(14;-6)$. Написать уравнения сторон треугольника ABC. Написать уравнения медианы, высоты и биссектрисы треугольника ABC, проведённых из вершины A. Найти площадь треугольника ABC.

Решение.

Сторона (AB): $\frac{x-2}{4} = \frac{y+4}{-3}$ или (AB): $3x + 4y = 2$

Сторона (AC): $\frac{x-2}{12} = \frac{y+1}{-5}$ или (AC): $5x + 12y = -2$

Сторона (BC): $\frac{x-6}{8} = \frac{y+4}{-2}$ или (BC): $x + 4y = -10$ (см. (6) § 1 гл.4).

Найдём уравнение медианы (AM), где точка M делит сторону (BC) пополам. По формулам (9) § 3 гл. 3 имеем

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = 10$$

$$y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = -5$$

Поэтому по формуле (6) § 1 гл.4

$$(AM): \quad \frac{x-2}{8} = \frac{y+1}{-4}$$

$$\text{или } (AM)\text{:}\ \ x + 2y = 0$$

Найдём уравнение высоты (AH), опущенной из вершины A на сторону (BC). Угловой коэффициент (BC) равен $k_{BC} = -\frac{1}{4}$. Поэтому угловой коэффициент $k_{AH} = -\frac{1}{k_{BC}} = 4$ (см.(12) § 1гл. 4). Значит, по формуле (14) § 1 гл. 4

$$(AH)\text{:}\ \ y + 1 = 4(x - 2)\,,$$

$$\text{или } (AH)\text{:}\ 4x - y = 9$$

Найдём уравнение биссектрисы (AL) угла A в треугольнике ABC. Известно, что каждая точка $M(x, y)$, лежащая на биссектрисе, равноудалена от сторон (AB) и (AC). Поэтому для координат "x" и "y" точки M должно быть выполнено равенство

$$\frac{|3x + 4y - 2|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|5x + 12y + 2|}{\sqrt{5^2 + 12^2}}$$

так как расстояние от точки до прямой вычисляется по формуле (18) § 1 гл.4. Последнее уравнение равносильно объединению двух уравнений

$$\left[\begin{array}{l} \frac{1}{5}(3x + 4y - 2) = \frac{1}{13}(5x + 12y + 2) \\ \frac{1}{5}(3x + 4y - 2) = -\frac{1}{13}(5x + 12y + 2) \end{array}\right.$$

Упрощая, получаем

$$\left[\begin{array}{l} 7x - 4y = 18 \\ 4x + 7y = 1 \end{array}\right. \quad (21)$$

Каждое из этих уравнений задаёт биссектрису одного из смежных углов, получаемых при пересечении (AB) и (AC). Эти биссектрисы перпендикулярны друг другу, и только одна из них является нужной нам биссектрисой в треугольнике ABC. Заметим, что угловые коэффициенты прямых (AB) и (AC) отрицательны:

$$k_{AB} = -\frac{3}{4}; \quad k_{AC} = -\frac{5}{12}$$

Поэтому угловой коэффициент биссектрисы, лежащей между ними, тоже отрицательный. Это соображение позволяет из двух прямых (21) выбрать нужную нам прямую

$$4x + 7y = 1$$

Наконец, найдём площадь треугольника ABC. Площадь S параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{AC}$ равна

$$S = |\Delta|,$$

где Δ – определитель 2-го порядка, в строках которого стоят проекции векторов

$\boldsymbol{AB}$ и $\boldsymbol{AC}$ (см. свойство 6 § 1 гл. 1)

$$\boldsymbol{AB} = 4\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j}\ ; \boldsymbol{AC} = 12\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j};\ \Delta = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 12 & -2 \end{vmatrix} = 28$$

Площадь треугольника ABC равна половине площади параллелограмма, $S_{ABC} = 14$

Ответ. $(AB): 3x + 4y = 2$; $(AC): 5x + 12y = -2$; $(BC): x + 4y = -10$; $(AM): x + 2y = 0$; $(AH): 4x - y = 9$; $(AL): 4x + 7y = 1$; $S_{ABC} = 14$.

Задача 2. Найти точку Q, симметричную точке $P(20; -3)$ относительно прямой

$$(l): 3x - y + 17 = 0.$$

Решение.

Искомая точка Q лежит на перпендикуляре к (l), опущенном из точки P,и расстояние от Q до (l) равно расстоянию от P до (l). Угловой коэффициент прямой (l) равен $k = 3$. Поэтому угловой коэффициент перпендикуляра (PQ) равен $k_{PQ} = -\frac{1}{3}$, и уравнение (PQ) имеет вид

$$(PQ): \quad y + 3 = -\frac{1}{3}(x - 20), \text{ иначе } x + 3y = 11.$$

Координаты точки R пересечения (l) и (PQ) находим как решение системы

$$\begin{cases} 3x - y + 17 = 0 \\ \ \ x + 3y = 11 \end{cases}$$

Находим $R(-4; 5)$. Точка R делит отрезок (PQ) пополам. Поэтому по формуле (9) § 3гл.3 имеем

$$x_R = \frac{x_P + x_Q}{2}$$
$$y_R = \frac{y_P + y_Q}{2}$$

Отсюда $\begin{matrix} x_Q = -28 \\ y_Q = 13 \end{matrix}$

Ответ. $Q(-28; 13)$.

Задача 3. Вычислить угол между прямыми

а) $y = 3x; y = -2x + 5$

б) $y = 4x - 7;\ y = -\frac{1}{4}x + 2$

в) $y = 5x - 3;\ y = 5x + 8$

Решение.

а) $k_1 = 3;\ k_2 = -2;\ \ \gamma = \beta - \alpha;\ \ \mathrm{tg}\gamma = \mathrm{tg}(\beta - \alpha) = \frac{\mathrm{tg}\beta - \mathrm{tg}\alpha}{1 + \mathrm{tg}\beta \cdot \mathrm{tg}\alpha} = \frac{-2-3}{1+(-6)} = 1.$

Следовательно, $\gamma = \frac{\pi}{4}$

б) $\gamma = \frac{\pi}{2}$, так как произведение угловых коэффициентов данных прямых равно -1.

в) прямые параллельны.

§2. Плоскость в пространстве

n°1. Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку перпендикулярно заданному вектору

Во-первых, если нам дана какая-нибудь плоскость в пространстве, то мы всегда можем взять на ней точку M_0 и провести через взятую точку единственный перпендикуляр к плоскости (по аксиоме стереометрии) (см. рис.1).

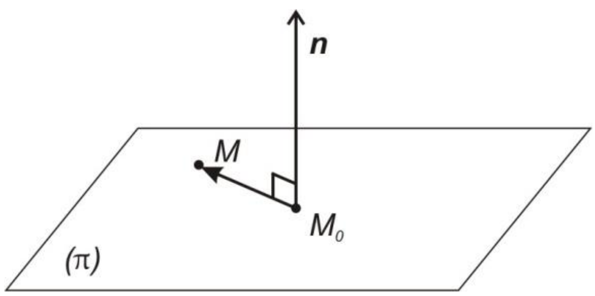


Рис.1. Плоскость, проходящая через данную точку с данным вектором нормали

Любой вектор $\boldsymbol{n} \neq \boldsymbol{0}$, лежащий на этом перпендикуляре, называется вектором нормали к плоскости, все нормали коллинеарны между собой. Во-вторых, обратно, если задана точка M_0 в пространстве и вектор $\boldsymbol{n}$, приложенный к этой точке, то концы всех векторов, перпендикулярных к $\boldsymbol{n}$ и приложенных к M_0, опишут плоскость (π), проходящую через точку M_0 и имеющую вектор $\boldsymbol{n}$ своей нормалью.

Найдем уравнение этой плоскости. Пусть точка O – начало СК, $\boldsymbol{r}_0$ – радиус-вектор точки M_0, $\boldsymbol{r}$ – радиус- вектор точки M. Точка M принадлежит плоскости (π) тогда и только тогда, когда вектор $\boldsymbol{M_0M}$ перпендикулярен вектору $\boldsymbol{n}$, что, в свою очередь, равносильно тому, что

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)\boldsymbol{n} = 0 \qquad (1)$$

Уравнение (1) – это уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 с радиус-вектором $\boldsymbol{r}_0$ перпендикулярно вектору $\boldsymbol{n}$, в векторной форме. Запишем это уравнение в координатах. Пусть точки $M_0(x_0, y_0, z_0), M(x, y, z)$, $\boldsymbol{n} = A\boldsymbol{i} + B\boldsymbol{j} + \boldsymbol{C}\boldsymbol{k}$.

Тогда $r_0 = \boldsymbol{OM_0} = x_0\boldsymbol{i} + y_0\boldsymbol{j} + z_0\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{OM} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$,

$$\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 = (x - x_0)\boldsymbol{i} + (y - y_0)\boldsymbol{j} + (z - z_0)\boldsymbol{k}.$$

Следовательно,

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(y - y_0) = 0 \qquad (2)$$

– уравнение той же плоскости в координатной форме.

Пример 1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1,2,3)$ перпендикулярно вектору $\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$.

Решение. Применив формулу (2), получим $-(x-1)+2(y-2)+(z-3)=0$ или $-x+2y+z=6$ – ответ.

$\boldsymbol{n}$°**2**. Общее уравнение плоскости

Здесь мы проверим, что уравнение вида

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (3)$$

$(A, B, C, D -$ числа, $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0) -$ общее уравнение плоскости. Это значит, что любая плоскость имеет уравнение такого вида и, наоборот, множество точек пространства, координаты которых удовлетворяют этому уравнению, заполняет некоторую плоскость.

Пусть (π) – некоторая плоскость, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ принадлежит (π) и $\boldsymbol{n} = A\boldsymbol{i} + {}$ $+B\boldsymbol{j} + C\boldsymbol{k}$ – нормаль к (π). Тогда, как показано в $\boldsymbol{n}^\circ\mathbf{1}$, $A(x - x_0) + B(y - y_0) + {}$ $+C(z - z_0) = 0$ – уравнение (π). Раскрывая скобки, получим $Ax + By + Cz + {}$ $+D = 0$, где $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$.

Обратно, зафиксируем какое-нибудь решение (x_0, y_0, z_0) уравнения $Ax + {}$ $+By + Cz + D = 0$.

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ – точка с этими координатами, пусть (x', y', z') – какое-нибудь другое решение уравнения $Ax + By + Cz + D = 0$, $M(x', y', z') -$ точка с этими координатами. Мы имеем

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \ \text{ и } \ Ax' + By' + Cz' + D = 0 \text{ , отсюда}$$

$$A(x' - x_0) + B(y' - y_0) + C(z' - z_0) = 0\,,$$

следовательно, скалярное произведение вектора

$$\boldsymbol{M}_0\boldsymbol{M} = (x' - x_0)\boldsymbol{i} + (y' - y_0)\boldsymbol{j} + (z' - z_0)\boldsymbol{k}$$

на вектор $\boldsymbol{n} = A\boldsymbol{i} + B\boldsymbol{j} + C\boldsymbol{k}$ равно 0, т.е. $\boldsymbol{M}_0\boldsymbol{M} \perp \boldsymbol{n}$. Таким образом, все векторы $\boldsymbol{M}_0\boldsymbol{M}$ для всех точек M перпендикулярны одному и тому же вектору $\boldsymbol{n} = A\boldsymbol{i} + {}$ $+B\boldsymbol{j} + C\boldsymbol{k}$. Следовательно, точки M заполняют плоскость и $\boldsymbol{n} = A\boldsymbol{i} + B\boldsymbol{j} + C\boldsymbol{k}$ – нормаль к этой плоскости.

$\boldsymbol{n}$°**3**. Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $\boldsymbol{M}_1, \boldsymbol{M}_2, \boldsymbol{M}_3$

Пусть точка O – начало координат, $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3$ – радиус-векторы точек M_1, M_2, M_3 соответственно. Пусть (π) – искомая плоскость и M– некоторая точка (см. рис. 2).

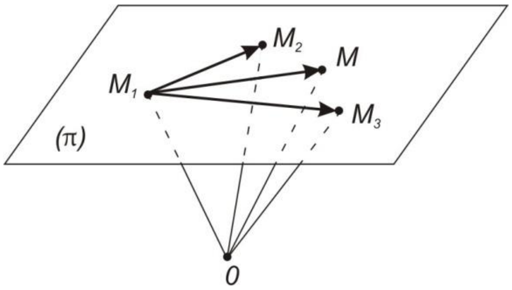


Рис.2. Плоскость, проходящая через три данные точки

Тогда точка M принадлежит (π) тогда и только тогда, когда векторы $\boldsymbol{M_1M}, \boldsymbol{M_1M_2}, \boldsymbol{M_1M_3}$ компланарны. Это равносильно тому, что их смешанное произведение равно нулю, т.е.

$$\boldsymbol{M_1M} \cdot \boldsymbol{M_1M_2} \cdot \boldsymbol{M_1M_3} = 0$$

Получаем уравнение плоскости, проходящей через три точки

$$M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), M(x_3, y_3, z_3), M(x, y, z)$$

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1)\,(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)(\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1) = 0, \;\; \boldsymbol{r} = \boldsymbol{OM} \qquad (4)$$

в векторной форме и в координатной форме

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (5)$$

Пример 2. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $A(2,0,0), B(0,1,0), C(0,0,4)$.

Решение. Применив формулу (5), получим $\begin{vmatrix} x-2 & y & z \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0$ или $4(x-2) +$ $+8y + 2z = 0$

Ответ. $2x + 4y + z = 4$.

$\boldsymbol{n}$°4. Нормальное уравнение плоскости

Пусть дана плоскость (π): $Ax + By + Cz + D = 0$ с нормалью $\boldsymbol{n} = A\boldsymbol{i} + B\boldsymbol{j} +$ $+C\boldsymbol{k}$. Поделим обе части уравнения на число $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = |\boldsymbol{n}|$, взятое со знаком, противоположным знаку числа D (если $D = 0$, то делим на положительное число $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = |\boldsymbol{n}|$).

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}x+\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}y+\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}z+\frac{D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0 \qquad (6)$$

Например, если $(\pi)\colon 3x-4y+12z+13=0$, то делим на $-\sqrt{9^2+4^2+12^2}=-13$. Получим

$$-\frac{3}{13}x+\frac{4}{13}y+\frac{12}{13}z-1=0$$

Тогда (см. (6) § 2 гл. 2) коэффициенты при x, y, z в (6) – это направляющие косинусы единичной нормали к (π), а свободный член – неположительное число.

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0\,, p\geq 0, \qquad (7)$$

(7) называется нормальным уравнением (π) в координатной форме и предназначено для быстрого нахождения расстояний от этой плоскости до произвольных точек пространств (сравните с нормальным уравнением прямой на плоскости).

Прежде всего убедимся, что p – это расстояние от начала координат до плоскости (π).

Пусть точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ лежит на (π) (см. рис. 3) и $\boldsymbol{r_0}$ – её радиус-вектор.

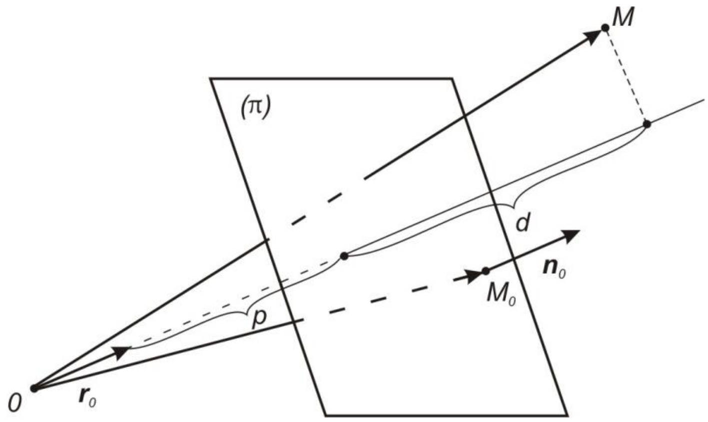


Рис.3. Расстояние от точки до плоскости

Тогда верно равенство

$$x_0\cos\alpha+y_0\cos\beta+z_0\cos\gamma-p=0 \qquad (8)$$

Перепишем (8) в виде

$$\boldsymbol{r_0}\cdot\boldsymbol{n_0}=p$$

Или по свойству 3 § 2 гл. 2

$$\text{ПР}_{\boldsymbol{n_0}}\boldsymbol{r_0}=p$$

Получается, что неотрицательное число "p" равно проекции вектора $\boldsymbol{r_0}$ на ось, направление которой совпадает с направлением вектора $\boldsymbol{n_0}$. Следовательно, по определению проекции вектора на ось (см. § 1 гл. 2), p –это расстояние от (π) до точки O (см. рис 3).

Пусть теперь точка $M(x', y', z')$ – произвольная и $\boldsymbol{r}$ – её радиус-вектор. Подставим координаты точки M в левую часть уравнения (7). Получим

$$x'\cos\alpha + y'\cos\beta + z'\cos\gamma - p = \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n_0} - p = \text{ПР}_{\boldsymbol{n_0}}\boldsymbol{r} - \text{ПР}_{\boldsymbol{n_0}}\boldsymbol{r_0} = \text{ПР}_{\boldsymbol{n_0}}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_0})$$

Значит, абсолютная величина

$$|x'\cos\alpha + y'\cos\beta + z'\cos\gamma - p| = \left|\text{ПР}_{\boldsymbol{n_0}}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_0})\right|$$

– это расстояние от точки M до плоскости (π) (см. рис. 3)

Сформулируем вывод:

Чтобы найти расстояние от точки $M(x', y', z')$ до плоскости $(\pi){:}\, Ax + By + Cz + D = 0$, надо сначала, поделив на $\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, найти нормальное уравнение этой плоскости

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$$

а затем подставить координаты точки M в левую часть полученного уравнения. Тогда искомое расстояние равно абсолютной величине полученного числа, то есть

$$d = |x'\cos\alpha + y'\cos\beta + z'\cos\gamma - p| \qquad (9)$$

Пример 3. Найти расстояние от плоскости, полученной в Примере 1, до точки $P(1,1,1)$

Решение. Применяя формулу (9), получим $d = \frac{|-1+2+1-6|}{\sqrt{6}} = \frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Ответ. $d = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

§3. Прямая в пространстве

$\boldsymbol{n}^\circ\mathbf{1}$. Пусть прямая (l) задана точкой $M_0(x_0, y_0 z_0)$, принадлежащей (l) и вектором

$\boldsymbol{a} = \{a_x, a_y, a_z\} \neq \mathbf{0}$, параллельным (l) (см. рис.1)

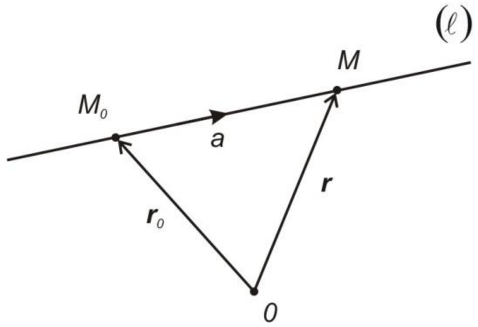


Рис.1. Прямая, проходящая через точку, параллельно заданному вектору

($\boldsymbol{a}$ называется направляющим вектором (l)).

В этом случае точка $M(x, y, z)$ принадлежит (l) тогда и только тогда, когда векторы $\boldsymbol{M_0M}$ и $\boldsymbol{a}$ коллинеарны (см. рис.1). Обозначим $\boldsymbol{r_0}$ и $\boldsymbol{r}$ радиус-векторы точек M_0 и M соответственно. Тогда $\boldsymbol{M_0M} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_0}$. Коллинеарность векторов $\boldsymbol{M_0M}$ и $\boldsymbol{a}$ равносильна равенству (см. Замечание 1 § 3 гл. 2)

$$\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_0} = \lambda \boldsymbol{a} \qquad (1)$$

уравнение прямой (l) в векторной форме.

Другое уравнение той же самой прямой (l) можно получить, используя другое условие коллинеарности (см. свойство 1 § 3 гл. 2): два вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда их векторное произведение равно нулевому вектору.

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} \qquad (2)$$

уравнение прямой (l) в векторной форме.

Запишем полученные уравнения в координатной форме. Введём декартову прямоугольную СК.

$$M_0(x_0, y_0, z_0);\ \boldsymbol{r_0} = x_0\boldsymbol{i} + y_0\boldsymbol{j} + z_0\boldsymbol{k}\,; a = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$$

$$M(x, y, z)\,; \boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}\,; \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_0} = (x - x_0)\boldsymbol{i} + (y - y_0)\boldsymbol{j} + (z - z_0)\boldsymbol{k}$$

Тогда уравнение (1) равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} x - x_0 = \lambda a_x \\ y - y_0 = \lambda a_y \\ z - z_0 = \lambda a_z \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = x_0 + \lambda a_x \\ y = y_0 + \lambda a_y \\ z = z_0 + \lambda a_z \end{cases} \quad x \in R \qquad (3)$$

Эта система равенств задаёт прямую параметрически (λ – параметр). Выразим теперь λ из каждого уравнения (при условии $a_x \neq 0, a_y \neq 0, a_z \neq 0$) и приравняем полученные выражения $\lambda = \frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y} = \frac{z - z_0}{a_z}$

$$\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y} = \frac{z - z_0}{a_z} \qquad (4)$$

Уравнения (4) называются каноническими уравнениями прямой (l), проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ с направляющим вектором $\boldsymbol{a}$.

Может оказаться, что какое-то из чисел a_x, a_yили a_z равно нулю. Допустим, например, что $a_x = 0$. Тогда из системы (3) следует, что $x - x_0 = 0$, то есть абсцисса любой точки на прямой (l) всегда постоянна и равна x_0.

С учётом этого замечания в знаменателях канонических уравнений формально допускается ставить нуль.

Пример 1. Прямая с каноническими уравнениями $\frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{0} = \frac{z - z_0}{1}$

параметрически задана $\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \\ z = z_0 + t \end{cases}$ и представляет собой прямую, проходящую через (x_0, y_0, z_0) и параллельную оси Oz.

Пример 2. Написать канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(1;2;3)$ с направляющим вектором $a = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$**.** Задать эту прямую параметрически.

Ответ: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{1}$; $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \quad t \in R. \\ z = 3 + t \end{cases}$

Пример3. Прямая задана каноническими уравнениями

$$(l): \quad \frac{x}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-2}$$

Каков направляющий вектор этой прямой? Через какую точку M_0 проходит эта прямая?

Проходит ли эта прямая через точку $P(6;5;-5)$?

Проходит ли эта прямая через точку $Q(3;2;-3)$?

Ответ: $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$; $M_0(0;1;-1)$; P принадлежит(l); Q не принадлежит(l).

Уравнение (2), записанное в координатах, приводит также к каноническим уравнениям прямой. Действительно,

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_0}) \times \boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{i}\left(a_z(y - y_0) - a_y(z - z_0)\right) - \boldsymbol{j}\left(a_z(x - x_0) - a_x(z - z_0)\right) +$$
$$+\boldsymbol{k}\left(a_y(x - x_0) - a_x(y - y_0)\right) = \boldsymbol{0}$$

Приравнивая проекции векторов в обеих частях этого равенства (см. гл.2 § 1), получаем систему уравнений

$\begin{cases} a_y(z - z_0) = a_z(y - y_0) \\ a_z(x - x_0) = a_x(z - z_0) \\ a_y(x - x_0) = a_x(y - y_0) \end{cases}$, что равносильно системе $\begin{cases} \frac{z-z_0}{a_z} = \frac{y-y_0}{a_y} \\ \frac{x-x_0}{a_x} = \frac{z-z_0}{a_z} \\ \frac{x-x_0}{a_x} = \frac{y-y_0}{a_y} \end{cases}$, откуда

получаем искомые канонические уравнения

$$\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y} = \frac{z - z_0}{a_z}$$

$\boldsymbol{n}$°2. Прямая $(\boldsymbol{l})$ в пространстве может быть задана как пересечение двух плоскостей

Пример 4. Найти канонические уравнении прямой (l), являющейся пересечением двух плоскостей $(\pi_1): x+y+z=1$ и $(\pi_2): x+2y+3z=2$.

Решение. Прямая (l) является пересечением плоскостей (π_1) и (π_2), поэтому то, что точка M принадлежит (l), равносильно принадлежности точки M одновременно обеим плоскостям. Это равносильно тому, что координаты x, y, z точки M удовлетворяют уравнениям плоскостей (π_1) и (π_2), то есть числа x, y, z являются решением системы

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+3z=2 \end{cases}$$

Значит, чтобы задать все точки прямой, надо решить полученную систему:

$$\begin{cases} x=1-y-z \\ y+2z=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=z \\ y=1-2z \end{cases}$$

Получаем, что какое бы ни было число "z", тройка чисел $(z, 1-2z, z)$ является решением системы, и для любого числа z точка $M(z, 1-2z, z)$ лежит на прямой (l). Таким образом,

$\begin{cases} x=t \\ y=1-2t \\ z=t \end{cases}$ – параметрическое задание (l) $(t \in R)$. Исключив параметр t, получим канонические уравнения прямой (l).

Покажем, что числа, стоящие в знаменателях дробей в канонических уравнениях, являются проекциями направляющего вектора прямой (l). Действительно, радиус-вектор

$$\boldsymbol{r}=t\boldsymbol{i}+(1-2t)\boldsymbol{j}+t\boldsymbol{k}$$

точки $M \in (l)$ может быть записан как сумма двух векторов $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{j}++t(\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})=\boldsymbol{r_0}+t\boldsymbol{a}$, один из которых, $\boldsymbol{r_0}=\boldsymbol{j}$, всё время один и тот же, а второй коллинеарен вектору $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$. Таким образом, точка M лежит на прямой, параллельной $\boldsymbol{a}$, и проходящей через точку с радиус-вектором $\boldsymbol{j}$.

Вернёмся к общему случаю. Пусть прямая (l) задана как пересечение двух плоскостей (π_1) и (π_2) (см. рис 2).

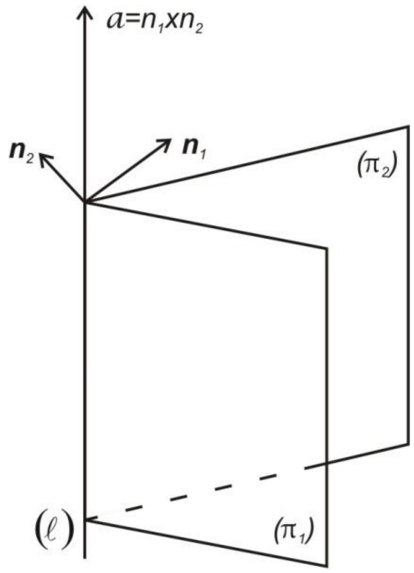


Рис.2. Прямая как пересечение двух плоскостей

Предположим, что в пространстве задана прямоугольная декартова СК и известны уравнения этих плоскостей

$$(\pi_1): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \qquad (1)$$

$$(\pi_2): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \qquad (2)$$

Покажем, как в этом случае найти канонические уравнения прямой (l).

Сначала найдём направляющий вектор (l).

По условию, (l) лежит в (π_1), значит, (l) перпендикулярна нормали $\boldsymbol{n_1}$ плоскости (π_1). Но (l) лежит также и в плоскости (π_2), значит, (l) перпендикулярна нормали $\boldsymbol{n_2}$ плоскости (π_2). Таким образом, (l) перпендикулярна одновременно $\boldsymbol{n_1}$ и $\boldsymbol{n_2}$. Следовательно, вектор $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{n_1} \times \boldsymbol{n_2}$ может быть взят в качестве направляющего вектора (l).

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{n_1} \times \boldsymbol{n_2} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} \qquad (3)$$

Теперь найдём координаты x_0, y_0, z_0 какой-нибудь точки M_0 на (l). Так как M_0 принадлежит одновременно двум плоскостям (π_1) и (π_2) , то её координаты удовлетворяют одновременно уравнениям (1) и (2), то есть тройка чисел(x_0, y_0, z_0) являются решением системы

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

По условию плоскости (π_1) и (π_2) пересекаются, значит их нормали не коллинеарны и, следовательно, среди дробей $\frac{A_1}{A_2}, \frac{B_1}{B_2}, \frac{C_1}{C_2}$ есть по крайней мере две разных. Допустим, например, что коэффициенты при x и y не пропорциональны, то есть $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$. Следовательно, $A_1B_2 \neq A_2B_1$, иначе $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$.

Система (4) тогда равносильна системе

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = -D_1 - C_1z \\ A_2x + B_2y = -D_2 - C_2z \end{cases} \qquad (5)$$

Видим, что если вместо буквы "z" подставить в (5) любое число z_0, то система (5) превратится в систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными x и y с не равным нулю определителем $(A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0)$. Такая система, как известно (см. гл.1 § 1 Т.1), имеет единственное решение при любой правой части, которое находится по формулам (7) гл. 1 § 1.

Итак, в этом случае тройка чисел (x_0, y_0, z_0) является решением системы (5), а значит (x_0, y_0, z_0) является решением системы (4) и точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ принадлежит (l).

Пример 5. Найти канонические уравнения прямой, заданной пересечением двух плоскостей

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 2 \end{cases} \qquad (6)$$

Решение. Сначала найдём направляющий вектор $\boldsymbol{a}$ по формуле (3)

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{n_1} \times \boldsymbol{n_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$$

Точку M_0, принадлежащую прямой, найдём как какое-то решение системы (6):

$x = \begin{vmatrix} 1 - z & 1 \\ 2 - 3z & 2 \end{vmatrix} = z\,; y = \begin{vmatrix} 1 & 1 - z \\ 1 & 2 - 3z \end{vmatrix} = 1 - 2z$ (см. Т1 § 2 гл. 1);

пусть $z = 0$, тогда $x = 0, y = 1$; $M_0(0,1,0)$.

Ответ. $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1}$.

Пример 6.Найти точку P', симметричную точке $P(1,2,3)$ относительно плоскости (π): $x + y + z = 1$.

Решение. Сначала составим уравнение прямой (l), проходящей через точку P перпендикулярно плоскости (π), взяв в качестве её направляющего вектора нормаль $\boldsymbol{n} = \{1,1,1\}$ к плоскости (π).

Затем найдём точку Q пересечения прямой и плоскости, для чего решим систему уравнений $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{1} \end{cases}$. Получаем $Q\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$. Точка Q есть середина отрезка PP'. По формулам (9) § 3 гл.3 имеем $\begin{cases} -\frac{2}{3} = \frac{1+x_{P'}}{2} \\ \frac{1}{3} = \frac{2+y_{P'}}{2} \\ \frac{4}{3} = \frac{3+z_{P'}}{2} \end{cases}$.

Отсюда находим координаты точки $P'\left(-\frac{7}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

Ответ. $P'\left(-\frac{7}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

Пример 7. Пересекаются ли прямые $\frac{x-1}{2} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-5}{4}$ и $\frac{x-6}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{1}$? Если да, то найти их точку пересечения.

Решение. Запишем уравнения первой прямой в параметрическом виде и подставим полученные выражения в уравнения второй прямой

$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 7 + t \\ z = 5 + 4t \end{cases}$, $\frac{-5+2t}{3} = \frac{8+t}{-2} = 5 + 4t$. Полученная система имеет единственное решение $t = -2$. Следовательно, данные прямые пересекаются. Для нахождения их точки пересечения подставим найденное значение параметра t в параметрические уравнения первой прямой.

Ответ. $(-3{,}5, -3)$.

Пример 8. Написать уравнение плоскости, которая проходит через точку $P(3, 1, -2)$ и

а) через прямую $\frac{x-4}{5} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{1}$

б) перпендикулярно той же прямой.

Решение. а) Для нахождения уравнения плоскости надо знать координаты какой-либо точки, лежащей на этой плоскости и нормаль к плоскости. В качестве точки можно взять точку P, а в качестве нормали – векторное произведение $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{M_0P}$, $M_0(4, -3{,}0)$, $\boldsymbol{a} = \{5{,}2{,}1\}$. Тогда по формуле (2) § 2 гл. 4 имеем $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{M_0P} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 5 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -8\boldsymbol{i} + 9\boldsymbol{j} + 22\boldsymbol{k}$.

Ответ. $-8(x-3) + 9(y-1) + 22(z+2) = 0$ или $-8x + 9y + 22z + 59 = 0$.

б) Поскольку искомая плоскость перпендикулярна данной прямой, в качестве нормали к плоскости можно взять направляющий вектор прямой. Имеем $\boldsymbol{n} = 5\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$.

Ответ. $5(x-3) + 2(y-1) + (z+2) = 0$ или $5x + 2y + z - 15 = 0$.

Пример 9. Найти расстояние от точки $P(3, -2{,}5)$ до прямой (l): $\frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-4}{5}$.

Решение. Прямая (l) проходит через точку $M(2,-3,4)$ с направляющим вектором $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$. Поэтому искомое расстояние d равно высоте параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{MP}$, опущенного на основание $\boldsymbol{a}$.

$$d=\frac{S_{\text{параллелограмма}}}{|a|}, \qquad S=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{MP}|, \qquad \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{MP}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 3 & 4 & 5\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$$

$$d=\frac{\sqrt{1+4+1}}{\sqrt{9+16+25}}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{50}}=\frac{\sqrt{3}}{5}$$

Можно решать по-другому: через точку P провести плоскость (π) перпендикулярно (l)

(π): $3(x-3)+4(y+2)+5(z-5)=0$ или $3x+4y+5z=26$ и найти точку Q пересечения (π) и (l). Для этого надо решить систему

$$\begin{cases}3x+4y+5z=26\\ 4x-3y=17\\ 5x-3z=-2\end{cases} \quad Q\left(\frac{68}{25},-\frac{51}{25},\frac{130}{25}\right); \quad |PQ|=\frac{\sqrt{3}}{5}.$$

Ответ. $\frac{\sqrt{3}}{5}$.

Пример 10. Найти расстояние между скрещивающимися прямыми (l_1): $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{4}$ и (l_2): $\frac{x}{-1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$.

Решение. Прямая (l_1) проходит через точку $M_1(1,2,3)$ с направляющим вектором $\boldsymbol{a_1}=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$. Прямая (l_2) проходит через точку $M_2(0,0,0)$ с направляющим вектором $\boldsymbol{a_2}=-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$.Перенесём вектор $\boldsymbol{a_2}$ параллельно самому себе в точку M_1. Искомое расстояние равно высоте параллелепипеда, построенного на векторах $\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2},\boldsymbol{M_1M_2}$, с основанием, натянутом на векторы $\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2}$ (см. рис.3).

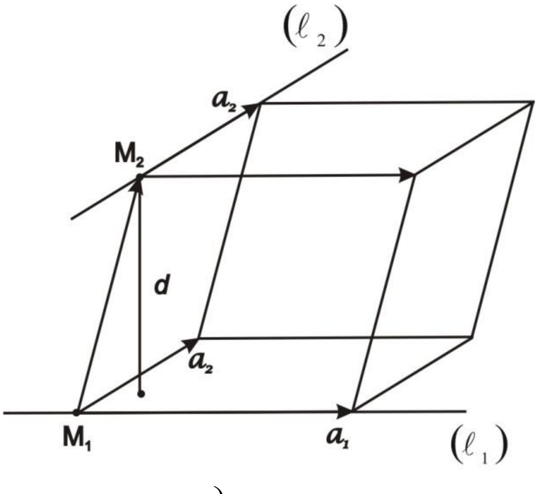


Рис.3. Расстояние между скрещивающимися прямыми

$$V_{\text{параллелепипеда}} = \boldsymbol{a_1} \cdot \boldsymbol{a_2} \cdot \boldsymbol{M_1M_2} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2, \boldsymbol{a_1} \times \boldsymbol{a_2} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$= \boldsymbol{i} - 10\boldsymbol{j} + 7\boldsymbol{k}$.

$$d = \frac{V}{S} = \frac{V}{|\boldsymbol{a_1} \times \boldsymbol{a_2}|} = \frac{2}{\sqrt{1+100+49}} = \frac{2}{5\sqrt{6}}$$

Ответ. $d = \frac{2}{5\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{15}$.

Часть 2

В первой части курса мы занимались прямыми на плоскости, а также плоскостями и прямыми в пространстве. Эти геометрические объекты задаются алгебраическими уравнениями 1-ой степени от двух и трёх переменных.

Во второй части курса мы занимаемся кривыми на плоскости и поверхностями в пространстве, которые заданы алгебраическими уравнениями 2-ой степени от двух и трёх переменных.

Глава 5. Вспомогательные сведения из алгебры

§ 1. Собственные числа и собственные столбцы квадратной матрицы

Определение. Пусть A – квадратная матрица, элементами которой являются вещественные числа. Столбец X вещественных чисел называется собственным столбцом (или собственным вектором) матрицы A, соответствующим (вещественному) собственному числу λ, если

1. X – ненулевой столбец;
2. Выполнено равенство $AX = \lambda X$.

Заметим сразу, что если X – собственный столбец A, то cX, где "c" – произвольное ненулевое вещественное число, тоже является собственным столбцом A, соответствующим тому же собственному числу λ. Действительно, если $AX = \lambda X$, то $A(cX) = cAX = \lambda(cX)$.

Собственные числа λ и собственные столбцы X матрицы A можно найти следующим образом.

Матричное равенство $AX = \lambda X$ перепишем в виде

$$AX - \lambda X = 0$$

или, пользуясь дистрибутивностью умножения,

$$(A - \lambda E)X = 0 \text{ (здесь } E \text{ – единичная матрица)} \qquad (1)$$

Значит, собственный столбец X является ненулевым решением однородной системы линейных алгебраических уравнений с матрицей $A-\lambda E$ (система с параметром λ). Известно, что однородная система с квадратной матрицей коэффициентов 2-го и 3-го порядков имеет нетривиальное решение (и даже бесконечное множество решений) тогда и только тогда, когда определитель матрицы этой системы равен нулю (см. следствие к теореме 2 § 1 гл.1 и следствие в $n°$ 4 § 3 гл.1).

$$\det(A-\lambda E)=0 \qquad (2)$$

Следовательно, собственные числа λ должны удовлетворять условию (2). Обратно, если какое-то число λ удовлетворяет условию (2), то система (1) с этим λ обязательно имеет бесконечно много нетривиальных решений $X\neq 0$.

Каждое такое $X\neq 0$ является собственным вектором, а λ – соответствующим собственным числом и при этом выполнено $AX=\lambda X$.

Если не существует вещественных чисел, удовлетворяющих (2), то у матрицы A нет вещественных собственных столбцов и вещественных собственных чисел.

Пример 1. Найти собственные числа и собственные столбцы матрицы

а) $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -3 & 4\end{pmatrix}$ б) $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$

Решение. а) $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -3 & 4\end{pmatrix}$. Сначала находим собственные числа λ этой матрицы A. Для этого выписываем условие (2) для данной A.

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}-1-\lambda & 2\\ -3 & 4-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-3\lambda+2=0$$

$$\lambda^2-3\lambda+2=0 \qquad (3)$$

Значит, собственные числа λ являются корнями уравнения (3), $\lambda_1=1$; $\lambda_2=2$. Только для этих значений λ существуют нетривиальные решения системы (1). Теперь найдём собственные столбцы, соответствующие этим собственным числам $\lambda_1=1$ и $\lambda_2=2$. Пусть $\lambda_1=1$. Решаем систему

$$(A-E)X=0 \qquad A-E=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ -3 & 3\end{pmatrix};\ X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}. \qquad (4)$$

Система $\begin{cases}-2x_1+2x_2=0\\ -3x_1+3x_2=0\end{cases}$ равносильна одному уравнению $x_1-x_2=0$, то есть $x_2=x_1$.

Поэтому любой собственный столбец, соответствующий $\lambda_1=1$, имеет вид

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, где $x_1 \neq 0$

Пусть $\lambda_2 = 2$. Решаем систему

$$(A - 2E)X = 0 \qquad A - 2E = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix};\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Эта система $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 = 0 \\ -3x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$ равносильна одному уравнению $-3x_1 + 2x_2 = 0$, то есть $x_2 = \frac{3}{2}x_1$.

Поэтому любой собственный столбец, соответствующий $\lambda_2 = 2$, имеет вид

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \frac{3}{2}x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \qquad x_1 \neq 0$$

б) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Находим собственные числа λ для этой матрицы A. Для этого выписываем условие (2) для матрицы A.

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(1-\lambda) - (1-\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 1) =$$
$$= -(\lambda - 1)^2(\lambda + 1) = 0$$

$$(\lambda - 1)^2(\lambda + 1) = 0 \qquad (5)$$

Значит, собственные числа λ являются корнями уравнения (5),

$$\lambda_1 = 1;\ \lambda_2 = -1$$

Теперь найдём собственные столбцы, соответствующие этим собственным числам.

Пусть $\lambda_1 = 1$.решаем систему

$$(A - E)X = 0 \qquad A - E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix};\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Эта система $\begin{cases} -x_1 + 0 \cdot x_2 + x_3 = 0 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 0 \\ x_1 + 0 \cdot x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ равносильна одному уравнению

$$-x_1 + 0 \cdot x_2 + x_3 = 0$$

Отсюда получаем $x_3 = x_1$ – любое вещественное число, x_2 – любое вещественное число. Поэтому любой собственный столбец, соответствующий $\lambda_1 = 1$, имеет вид

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где x_1, x_2 – любые вещественные числа, не обращающиеся в нуль одновременно. В частности, при $x_1 = 1, x_2 = 0$ получим, что $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ – собственный столбец, соответствующий $\lambda_1 = 1$, при $x_1 = 0, x_2 = 1$ получим, что

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \text{ собственный столбец, соответствующий } \lambda_1 = 1.$$

Пусть $\lambda_2 = -1$. Решаем систему

$$(A+E)X = 0 \ ; \ A+E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ ; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Эта система

$$\begin{cases} x_1 + 0 \cdot x_2 + x_3 = 0 \\ 0 \cdot x_1 + 2x_2 + 0 \cdot x_3 = 0 \\ x_1 + 0 \cdot x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

равносильна системе

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Поэтому, $\begin{cases} x_3 = -x_1 \\ x_2 = 0 \end{cases}$, x_1 – любое число.

Значит, любой собственный столбец, соответствующий $\lambda_2 = -1$, имеет вид

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ -x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, x_1 \neq 0$$

Пример 2. Проверим, что у матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ нет вещественных собственных чисел и вещественных собственных столбцов.

Действительно, условие (2) в этом случае даёт

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$$

Определение. Уравнение $\lambda^2 + 1 = 0$ не имеет вещественных корней.

Многочлен $f_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$, стоящий в левой части равенства (2), называется характеристическим многочленом матрицы A.

Сформулируем предыдущие рассуждения в виде теоремы.

Теорема 1. Пусть A – квадратная матрица с вещественными коэффициентами и $f_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ – её характеристический многочлен.

Тогда вещественные корни многочлена $f_A(\lambda)$ и только они являются собственными числами матрицы A.

Для геометрических приложений в главах 6 и 7 потребуется следующая теорема.

Теорема 2.

1) Любая квадратная вещественная симметричная матрица 2-го порядка имеет вещественные собственные числа.

2) Любая квадратная вещественная симметричная матрица 3-го порядка имеет по крайней мере одно вещественное собственное число.

Доказательство.

1) Пусть $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ – вещественная симметричная матрица. Тогда $f_A(\lambda) =$ $= \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a+c)\,\lambda + (ac - b^2)$ – квадратный трёхчлен. Найдём его дискриминант $D = (a+c)^2 - 4(ac - b^2) = (a-c)^2 +$ $+4b^2$. Видим, что $D \geq 0$, значит, корни $f_A(\lambda)$ – вещественные числа. По теореме 1 все собственные числа матрицы A – вещественные.

2) Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ – квадратная матрица 3×3 с вещественными коэффициентами.

Её характеристический многочлен

$$f_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}$$

найдём, вычисляя определитель по формуле (9) гл.1 § 3, раскрывая скобки и приводя подобные члены

$$f_A(\lambda) = -\lambda^3 + a\lambda^2 - b\,\lambda + c$$

Значит, вещественные собственные числа матрицы A – это вещественные корни уравнения

$$\lambda^3 - a\lambda^2 + b\,\lambda - c = 0 \qquad (6)$$

Проверим, что уравнение (6) имеет по крайней мере один вещественный корень. Для этого убедимся в том, что график функции $y = h(\lambda) = \lambda^3 - a\lambda^2 +$ $+b\,\lambda - c$ имеет хоть одну точку пересечения с осью Ox.

Воспользуемся известным утверждением: если уже построен график функции $y = g(\lambda)$, то график функции $y = h(\lambda) = g(\lambda - \alpha) + \beta$ получается параллельным сдвигом графика функции $y = g(\lambda)$ вправо на α при $\alpha \geq 0$ (или влево на $-\alpha$, при $\alpha < 0$) и вверх на β при $\beta \geq 0$ (или вниз на $-\beta$ при $\beta < 0$).

Преобразуем тождественно выражение для $h(\lambda)$

$$y = h(\lambda) = \lambda^3 - a\lambda^2 + b\,\lambda - c =$$

$$\left(\lambda-\frac{a}{3}\right)^3+\left(b-\frac{a^2}{3}\right)\left(\lambda-\frac{a}{3}\right)+\left(\frac{ab}{3}-\frac{2a^3}{27}-c\right)=\left(\lambda-\frac{a}{3}\right)^3+p\left(\lambda-\frac{a}{3}\right)+q \quad (7)$$

где обозначено $p=b-\frac{a^2}{3}$, $\quad q=\frac{ab}{3}-\frac{2a^3}{27}-c$

Обозначим $y=g(\lambda)=\lambda^3+p\,\lambda$. Тогда из (7) $h(\lambda)=g\left(\lambda-\frac{a}{3}\right)+q.$

Поэтому график функции $y=h(\lambda)$ получается с помощью параллельных сдвигов графика функции $y=g(\lambda)$. Этот последний легко представить себе схематически (рис.1а, б).

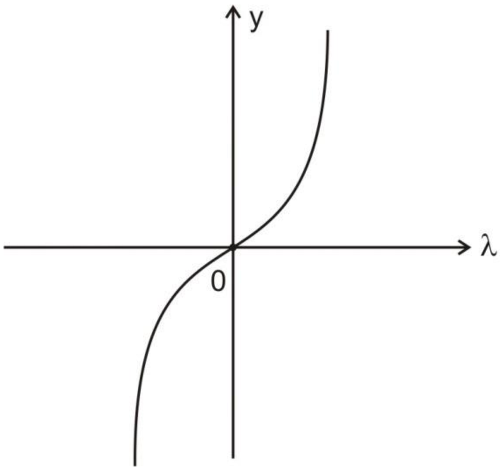


Рис.1а. График функции $y=g(\lambda)$ *при* $p\geq 0$

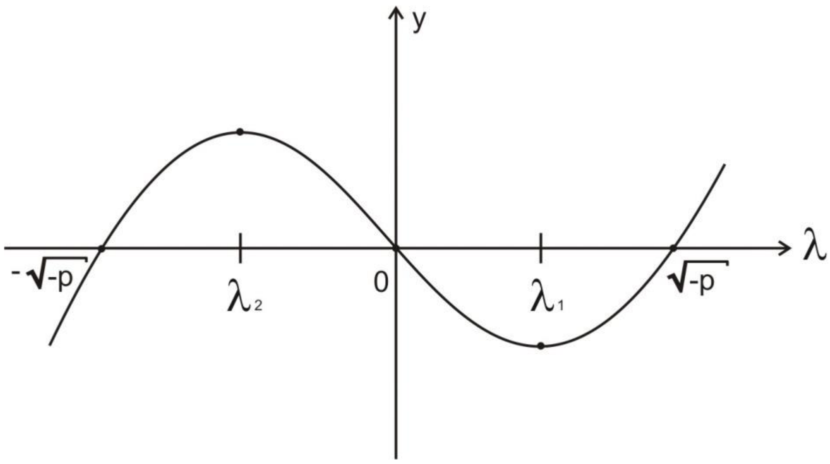


Рис.1б. График функции $y=g(\lambda)$ *при* $p<0$

Во-первых, $g(\lambda)=\lambda^3+p\,\lambda$ – нечётная функция и её график симметричен относительно начала координат. Во-вторых, при $p\geq 0$ производная $y'=3\lambda^2+p\geq 0$, функция $g(\lambda)$, монотонно возрастая, принимает все значения из промежутка $(-\infty;+\infty)$ (см. рис.1а).

При $p<0$ производная $y'=3\lambda^2+p$ обращается в нуль в двух точках $\lambda_{1,2}=\pm\sqrt{-\frac{p}{5}}$, которые являются точками экстремума. График пересекает ось $O\lambda$ в трёх точках, так как

$$y = g(\lambda) = \lambda(\lambda^2 + p) = \lambda\left(\lambda + \sqrt{-p}\right)\left(\lambda - \sqrt{-p}\right)$$

Функция $g(\lambda)$ принимает все значения из промежутка $(-\infty; +\infty)$ (см. рис.1б)

Из рис.1а, б видно, что любой параллельный сдвиг графика $y = g(\lambda)$ приводит к кривой, обязательно имеющей хоть одну точку пересечения с осью $O\lambda$. Теорема доказана.

В заключение этого параграфа приведём ещё одно важное свойство симметричной матрицы.

Лемма. Если A – симметричная матрица и C_1, C_2 – собственные столбцы A, соответствующие различным собственным числам λ_1 и λ_2, то $C_1^T C_2 = 0$.

Доказательство. По определению собственного столбца матрицы, соответствующего её собственному числу, имеем

$$AC_1 = \lambda_1 C_1$$
$$AC_2 = \lambda_2 C_2$$

Составим число $a = C_1^T A C_2 = C_1^T \lambda_2 C_2 = \lambda_2 C_1^T C_2$. Ясно, что $(a) = (a)^T$, где (a) – матрица, состоящая из одной строчки и одного столбца, то есть из одного элемента a. Поэтому $(a) = (a)^T = (C_1^T A C_2)^T = C_2^T A C_1 = C_2^T \lambda_1 C_1 = (C_2^T \lambda_1 C_1)^T = = \lambda_1 C_1^T C_2$. Таким образом,

$$a = \lambda_2 C_1^T C_2$$
$$a = \lambda_1 C_1^T C_2$$

Вычтем 2-ую строчку из первой. Получим $C_1^T C_2 \cdot (\lambda_2 - \lambda_1) = 0$.

Поскольку $\lambda_2 \neq \lambda_1$, имеем $C_2 = 0$. Лемма доказана.

§ 2. Ортогональные матрицы и их свойства

Определение. Квадратная матрица C с вещественными коэффициентами называется ортогональной, если

$$C^T C = E \qquad (1)$$

$\boldsymbol{n^\circ 1}$**.** Найдём все ортогональные матрицы порядка два. Найти матрицу — это значит найти все её элементы. Пусть

$$C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix};\ C^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix};\ C^T C = E$$

Последнее матричное равенство равносильно системе числовых равенств

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \\ b^2 + d^2 = 1 \end{cases}$$

Первое и третье равенства дают соответственно

$$a = \cos\varphi\ , c = \sin\varphi$$

$$b = \cos\psi\,, d = \sin\psi$$

при некоторых $\varphi \in [0,2\pi]$, $\psi \in [0,2\pi]$.

Второе равенство даёт

$$\cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi = \cos(\psi - \varphi) = 0.$$

Поэтому $\psi = \varphi + \frac{\pi}{2} + \pi k,\ \ k \in \mathbb{Z}$

При $k = 0$ $\quad a = \cos\varphi\,, b = -\sin\varphi, c = \sin\varphi,\ d = \cos\varphi$

Отсюда

$$C = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\ , \varphi \in [0,2\pi]$$

Полученный результат можно интерпретировать геометрически, если вспомнить, что любая пара чисел задаёт вектор на плоскости (см. рис.1).

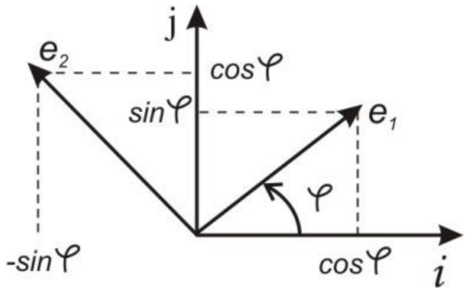


Рис.1. Взаимно перпендикулярные единичные векторы $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}$

Так, числа $a = \cos\varphi$, $c = \sin\varphi$ стоящие в первом столбце C задают вектор $\boldsymbol{e_1} = \boldsymbol{i}\cos\varphi + \boldsymbol{j}\sin\varphi$, а числа $b = -\sin\varphi, d = \cos\varphi$, стоящие во втором столбце C задают вектор $\boldsymbol{e_2} = -\boldsymbol{i}sin\varphi + \boldsymbol{j}\cos\varphi$. Вычислим скалярное произведение векторов $\boldsymbol{e_1}$ и $\boldsymbol{e_2}$

$$\boldsymbol{e_1}\boldsymbol{e_2} = -\cos\varphi\sin\varphi + \cos\varphi\sin\varphi = 0$$

Векторы $\boldsymbol{e_1}$ и $\boldsymbol{e_2}$ перпендикулярны.

Вывод. Таким образом, столбцы ортогональной матрицы можно интерпретировать как взаимно перпендикулярные единичные векторы, то есть в столбцах ортогональной матрицы стоят проекции взаимно перпендикулярных единичных векторов.

При $k = 1$ $\quad \varphi = \psi = \frac{3\pi}{2}$ $\ ,a = \cos\varphi, b = \sin\varphi\,,\ c = \sin\varphi,\ d = -\cos\varphi$

$$C = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}, \varphi \in [0,2\pi].$$

Другие значения φ не приводят к новым результатам.

$\boldsymbol{n}^\circ\mathbf{2}$. Опишем все ортогональные матрицы C порядка три. Пусть

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \text{ и } C^T \cdot C = E$$

Обозначим

$$C_1 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \end{pmatrix},\ C_2 = \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ c_{32} \end{pmatrix},\ C_3 = \begin{pmatrix} c_{13} \\ c_{23} \\ c_{33} \end{pmatrix},$$

тогда $C_1^T = (c_{11}, \quad c_{21} \quad c_{31})$, $C_2^T = (c_{12}, \quad c_{22}, \quad c_{32})$, $C_3^T = (c_{13}, \quad c_{23}, \quad c_{33})$.

Имеем $C^T = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1^T \\ C_2^T \\ C_3^T \end{pmatrix}$

Поэтому условие (1) даёт

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} C_1^T \\ C_2^T \\ C_3^T \end{pmatrix} (C_1 \quad C_2 \quad C_3) = \begin{pmatrix} C_1^T C_1 & C_1^T C_2 & C_1^T C_3 \\ C_2^T C_1 & C_2^T C_2 & C_2^T C_3 \\ C_3^T C_1 & C_3^T C_2 & C_3^T C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Последнее матричное равенство равносильно системе шести уравнений

$$\begin{cases} c_{11}^2 + c_{21}^2 + c_{31}^2 = 1 \\ c_{12}^2 + c_{22}^2 + c_{32}^2 = 1 \\ c_{13}^2 + c_{23}^2 + c_{33}^2 = 1 \\ c_{11}c_{12} + c_{21}c_{22} + c_{31}c_{32} = 0 \\ c_{11}c_{13} + c_{21}c_{23} + c_{31}c_{33} = 0 \\ c_{12}c_{13} + c_{22}c_{23} + c_{32}c_{33} = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Геометрический смысл соотношений (2) получается, если числа, стоящие в столбцах матрицы C интерпретировать как проекции векторов в пространстве

$$\boldsymbol{e_1} = c_{11}\boldsymbol{i} + c_{21_1}\boldsymbol{j} + c_{31}\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{e_2} = c_{12}\boldsymbol{i} + c_{22}\boldsymbol{j} + c_{32}\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{e_3} = c_{13}\boldsymbol{i} + c_{23}\boldsymbol{j} + c_{33}\boldsymbol{k}$$

Тогда первые три равенства показывают, что длины векторов $\boldsymbol{e_1}$, $\boldsymbol{e_2}$ $\boldsymbol{e_3}$ равны единице. Последние три равенства означают, что скалярные произведения $\boldsymbol{e_1 e_2}$, $\boldsymbol{e_1 e_3}$, $\boldsymbol{e_2 e_3}$ равны нулю. Таким образом, векторы $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}$ попарно ортогональны.

Вывод. Столбцы ортогональной матрицы можно интерпретировать как взаимно перпендикулярные единичные векторы.

Заметим, что формулы (5) § 1 гл. 3 перехода от СК $Oxyz$ к СК $Ox'y'z'$ можно записать в матричном виде

$$X = C^T X', \text{ где } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\ X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \qquad (3)$$

В силу условий (6) и (7) § 1 гл.3 матрица C является ортогональной.

$\boldsymbol{n}$°**3**. Произведение двух ортогональных матриц тоже является ортогональной матрицей.

Действительно, если A и B – две ортогональные матрицы, то имеют место равенства

$$A^T A = E\ ,\ \ B^T B = E$$

Проверим, что $C = AB$ – тоже ортогональная матрица. Для этого найдём $C^T C$:

$$C^T C = (AB)^T \cdot (AB) = (B^T A^T) \cdot (AB) = B^T \cdot (A^T A) \cdot B = B^T B = E$$

Итак, $C^T C = E$, значит, C – ортогональная матрица.

$\boldsymbol{n}$°**4.** Произвольный данный столбец $C_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ с условием $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 1$ можно дополнить до ортогональной матрицы $C = (C_1, C_2, C_3)$, у которой данный столбец является первым.

Действительно, сначала находим столбец $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ из условия

$$x_1 x + y_1 y + z_1 z = 0 \qquad (4)$$

Известно (см. § 2 гл. 1), что уравнение (3) имеет бесконечно много решений. Выбираем какое-нибудь одно решение $x = x_0,\ y = y_0,\ z = z_0, \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Полагаем $x_2 = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}};\ y_2 = \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}};\ z_2 = \frac{z_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}$.

Обозначим $C_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$. Столбец C_2 – второй столбец искомой матрицы C, поскольку выполнены первое, второе и четвёртое из условий (2):

$$\begin{cases} x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 1 \\ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = 1 \\ x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0 \end{cases}$$

Найдём теперь третий столбец C_3. Для этого находим сначала столбец $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ из условия

$$\begin{cases} x_1x + y_1y + z_1z = 0 \\ x_2x + y_2y + z_2z = 0 \end{cases} \qquad (5)$$

Система (5) имеет бесконечное множество решений (см. Теорема 1 § 1 гл. 1), так как коэффициенты при неизвестных непропорциональны (векторы $\boldsymbol{e_1} = x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{e_2} = x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k}$ перпендикулярны и, значит, не коллинеарны).

Пусть $x = x', y = y', z = z'$ произвольное решение (4) с условием $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Полагаем $x_3 = \frac{x\prime}{\sqrt{x\prime^2+y\prime^2+z\prime^2}}$; $y_3 = \frac{y\prime}{\sqrt{x\prime^2+y\prime^2+z\prime^2}}$; $z_3 = \frac{z\prime}{\sqrt{x\prime^2+y\prime^2+z\prime^2}}$

Столбец $C_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$ – третий столбец искомой матрицы C, так как выполнены все условия (2).

Пример. Дополнить столбец $C_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ до ортогональной матрицы с определителем, равным 1.

Решение. Условие (3) принимает вид

$$\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z = 0 \qquad (6)$$

Отсюда $x = -2y - 2z$ и любое решение (6) – это тройка чисел

$$x = -2y_0 - 2z_0, y = y_0, z = z_0 \qquad (7)$$

Возьмём, например, $y_0 = 1$; $z_0 = -2$. Тогда $x_0 = 2, \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} = 3$, и второй столбец $C_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$. Чтобы найти третий столбец, решаем систему (5)

$$\begin{cases} \dfrac{1}{3}x + \dfrac{2}{3}y + \dfrac{2}{3}z = 0 \\ \dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{3}y - \dfrac{2}{3}z = 0 \end{cases}$$

методом исключения. Получаем

$$\begin{cases} x = 2z \\ y = -2z \end{cases}$$

Таким образом, тройка чисел $x = 2z_0, y = -2z_0, z = z_0$ при любом z_0 даёт решение (5). Если взять $z_0 = 1$, то получим $\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} = 3$, $x_3 = \frac{2}{3}$, $y_3 = -\frac{2}{3}, z_3 = \frac{2}{3}$ и $C_3 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Выпишем полученную ортогональную матрицу

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что $\det C = -1$. Чтобы получить ортогональную матрицу с определителем, равным +1, переставим местами второй и третий столбцы. Итак, при выполнении (7) искомая матрица $C = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$

Если в (7) взять другие значения y_0 и z_0, получим другие ортогональные матрицы C с данным первым столбцом.

Замечание. Если первые два столбца C_1 и C_2 ортогональной матрицы C уже найдены, то третий столбец можно найти по-другому. Именно, обозначим $\boldsymbol{e_1} = x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{e_2} = x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k}$. Тогда вектор $\boldsymbol{e_3} = \boldsymbol{e_1} \times \boldsymbol{e_2} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$ имеет единичную длину, ортогонален $\boldsymbol{e_1}$ и $\boldsymbol{e_2}$ и образует с ними правую тройку. Поэтому его проекции можно взять в качестве третьего столбца матрицы C.

§ 3. Линейная замена переменных с ортогональной матрицей коэффициентов в выражениях $\boldsymbol{ax^2 + bxy + cy^2}$ и $\boldsymbol{ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz}$

$\boldsymbol{n^\circ 1}$. Сначала рассмотрим выражение (квадратичная форма от двух переменных)

$$ax^2 + bxy + cy^2, \qquad (1)$$

где x, y – переменные, a, b, c –данные числа. Обозначим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Сделаем в (1) линейную замену переменных

$$\begin{matrix} x = x_1\cos\varphi - y_1\sin\varphi \\ y = x_1\sin\varphi + y_1\cos\varphi \end{matrix}, \qquad x_1, y_1 \text{ – новые переменные} \qquad (3)$$

с ортогональной матрицей коэффициентов

$$C = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \varphi\epsilon[0,2\pi]$$

Говорят, что равенства (2) задают ортогональное преобразование переменных x, y.

$$ax^2 + bxy + cy^2 = a(x_1\cos\varphi - y_1\sin\varphi)^2 +$$

$$+b(x_1\cos\varphi - y_1\sin\varphi)(x_1\sin\varphi + y_1\cos\varphi) + c(x_1\sin\varphi + y_1\cos\varphi)^2 =$$

(раскрываем скобки и приводим подобные) $= a_1x_1^2 + b_1x_1y_1 + c_1y_1^2$, где обозначено

$$a_1 = a\cos^2\varphi + b\sin\varphi\cos\varphi + c\sin^2\varphi$$

$$b_1 = 2(c-a)\sin\varphi\cos\varphi + b(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) \qquad (4)$$

$$c_1 = a\sin^2\varphi - b\sin\varphi\cos\varphi + c\cos^2\varphi$$

Утверждение 1. Всегда можно так подобрать угол "φ", что после ортогонального преобразования переменных по формулам (3) коэффициент b_1 при произведении новых переменных будет равен нулю.

Доказательство. Если в (1) $b = 0$, то $\varphi = 0$; $\begin{cases} x = x_1 \\ y = y_1 \end{cases}$ если в (1) $b \neq 0$,то согласно формулам (4) коэффициент при произведении новых переменных равен

$$b_1 = 2(c-a)\sin\varphi\cos\varphi + b(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$$

Покажем, что всегда можно найти угол φ так, чтобы $b_1 = 0$. Для этого решим уравнение

$$2(c-a)\sin\varphi\cos\varphi + b(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = 0 \qquad (5)$$

$$(c-a)\sin2\varphi + b\cos2\varphi = 0$$

Если $c = a$, то уравнение принимает вид

$$b\cos2\varphi = 0$$

Отсюда $\cos2\varphi = 0$,т.к. $b \neq 0$. Значит, в качестве φ можно взять $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Если $c \neq a$, то решая уравнение (4), получим

$$\mathrm{tg}2\varphi = \frac{b}{a-c}$$

$$2\varphi = \mathrm{arctg}\frac{b}{a-c} + \pi k \ , k\epsilon\mathbb{Z}$$

$$\varphi = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{b}{a-c} + \frac{\pi k}{2} \quad , k\epsilon\mathbb{Z}$$

Значит, в качестве φ можно взять, например, $\varphi = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{b}{a-c}$. Утверждение 1 доказано.

Таким образом, при найденном значении угол φ имеем

$$F = a_1x_1^2 + c_1y_1^2 \qquad (6)$$

Будем говорить, что квадратичная форма (1) приведена к каноническому виду (6) с помощью ортогонального преобразования (3).

***n*°2.** 1^0. Теперь рассмотрим выражение (квадратичная форма от трёх переменных)

$$F = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz \qquad (7)$$

где a, b, c, d, e, f – данные числа, x, y, z – переменные.

Нам понадобится матричная запись выражения F. Для этого перепишем (7) в виде

$$F = ax^2 + \frac{d}{2}xy + \frac{e}{2}xz + \frac{d}{2}xy + by^2 + \frac{f}{2}yz + \frac{e}{2}xz + \frac{f}{2}yz + cz^2 =$$

$$= x\left(ax + \frac{d}{2}y + \frac{e}{2}z\right) + y\left(\frac{d}{2}x + by + \frac{f}{2}z\right) + z\left(\frac{e}{2}x + \frac{f}{2}y + cz\right) =$$

$$= (x \quad y \quad z)\begin{pmatrix} ax + \frac{d}{2}y + \frac{e}{2}z \\ \frac{d}{2}x + by + \frac{f}{2}z \\ \frac{e}{2}x + \frac{f}{2}y + cz \end{pmatrix} = (x \quad y \quad z)\begin{pmatrix} a & \frac{d}{2} & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & b & \frac{f}{2} \\ \frac{e}{2} & \frac{f}{2} & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = X^TAX$$

где обозначено $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; $X^T = (x \quad y \quad z)$,

$$A = \begin{pmatrix} a & \frac{d}{2} & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & b & \frac{f}{2} \\ \frac{e}{2} & \frac{f}{2} & c \end{pmatrix} \qquad (8)$$

A – симметрическая матрица, т.е. $A^T = A$. Окончательно получаем

$$F = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz = X^TAX \qquad (9)$$

– матричная запись квадратичной формы.

Сделать в (7) ортогональное преобразование переменных — это значит подставить в (7) вместо x, y, z их выражения через новые переменные x', y', z', связанные с x, y, z формулами

$$
\begin{aligned}
x &= c_{11}x' + c_{12}y' + c_{13}z' \\
y &= c_{21}x' + c_{22}y' + c_{23}z' \ , \qquad (10) \\
z &= c_{31}x' + c_{32}y' + c_{33}z'
\end{aligned}
$$

где коэффициенты при x', y', z' образуют ортогональную матрицу

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

Нам понадобится также матричная запись формул (10)

$$X = CX', \qquad (11)$$

где обозначено $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.

Теорема 1. В предыдущих обозначениях для любого выражения (7) можно подобрать такое ортогональное преобразование (10), что коэффициенты при произведениях новых переменных обратятся в нуль.

Доказательство этой теоремы дано в пункте 3^0.

2^0. Посмотрим, как меняются коэффициенты в выражении (7), если в нём сделать преобразование переменных (10). Понятно, что непосредственная подстановка формул (10) в (7), приводит к громоздким выкладкам. Не приводя этих выкладок, отметим, что после раскрытия скобок и приведения подобных членов, получится выражение вида

$$F = a_1x'^2 + b_1y'^2 + c_1x'y' + d_1x'y' + e_1y'z' + f_1x'z'$$

Для нахождения коэффициентов a_1, b_1, c_1, d_1, e_1 используем матричную запись (9) и (11).

$$F = X^TAX = (CX')^TA(CX') = X'^TC^TACX' = X'^TA_1X', \text{ где } A_1 = C^TAC.$$

Заметим, что матрица A_1 – симметричная, так как $A_1^T = (C^TAC)^T =$ $= C^TA^T((C^T)^T) = C^TAC = A_1$, поэтому

$$A_1 = C^TAC = \begin{pmatrix} a_1 & \frac{d_1}{2} & \frac{e_1}{2} \\ \frac{d_1}{2} & b_1 & \frac{f_1}{2} \\ \frac{e_1}{2} & \frac{f_1}{2} & c_1 \end{pmatrix} \qquad (12)$$

Теперь можно найти коэффициенты $a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1$ в терминах столбцов матрицы C. Именно, пусть

$$M_1 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \end{pmatrix}; M_2 = \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ c_{32} \end{pmatrix}; \ M_3 = \begin{pmatrix} c_{13} \\ c_{23} \\ c_{33} \end{pmatrix}$$

столбцы матрицы C. Таким образом,

$$C = (M_1 M_2 M_3)$$

Запишем матрицу C^T с помощью столбцов M_1, M_2, M_3

$$C^T = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1^T \\ M_2^T \\ M_3^T \end{pmatrix}$$

Следовательно,

$$A_1 = C^T A C = \begin{pmatrix} M_1^T \\ M_2^T \\ M_3^T \end{pmatrix} A (M_1 \quad M_2 \quad M_3) = \begin{pmatrix} M_1^T \\ M_2^T \\ M_3^T \end{pmatrix} (AM_1 \quad AM_2 \quad AM_3) =$$

$$= \begin{pmatrix} M_1^T AM_1 & M_1^T AM_2 & M_1^T AM_3 \\ M_2^T AM_1 & M_2^T AM_2 & M_2^T AM_3 \\ M_3^T AM_1 & M_3^T AM_2 & M_3^T AM_3 \end{pmatrix} \qquad (13)$$

Объединяя (12) и (13), получаем

$$\begin{gathered} M_1^T AM_1 = a_1 \\ M_2^T AM_2 = b_1 \\ M_3^T AM_3 = c_1 \\ M_2^T AM_1 = M_1^T AM_2 = \frac{d_1}{2} \qquad (14) \\ M_3^T AM_1 = M_1^T AM_3 = \frac{e_1}{2} \\ M_3^T AM_2 = M_2^T AM_3 = \frac{f_1}{2} \end{gathered}$$

3^0. Докажем следующую теорему, уже сформулированную ранее в 1^0.

Теорема 1. В предыдущих обозначениях для любого выражения (7) можно подобрать такое ортогональное преобразование (10), что коэффициенты при произведениях новых переменных обратятся в нуль.

Доказательство. Искать нужное ортогональное преобразование будем в два этапа. На первом этапе найдём такое ортогональное преобразование, после которого коэффициенты при $x'y'$ и $x'z'$ обратятся в нуль и выражение F примет вид

$$F = a_1 x'^2 + b_1 y'^2 + c_1 z'^2 + f_1 y'z'$$

На втором этапе рассмотрим выражение $b_1 y'^2 + c_1 z'^2 + f_1 y'z'$ и воспользуемся результатом, полученным в $\boldsymbol{n}°\mathbf{1}$. Найдём ортогональное преобразование переменных y' и z', которое, не меняя x', приведёт F к требуемому виду. Искомое ортогональное преобразование получается последовательным применением двух найденных ортогональных преобразований.

1-ый этап. Как известно, у матрицы A есть хоть одно вещественное собственное число λ_1 и вещественный собственный столбец M_1, такие, что

$$AM_1 = \lambda_1 M_1\,,\ M_1^T M_1 = 1 \qquad (15)$$

Дополним столбец M_1 до ортогональной матрицы

$$C_1 = (M_1 \quad M_2 \quad M_3)$$

двумя столбцами M_2 и M_3 так, что

$$\begin{gathered} M_1^T M_2 = M_2^T M_1 = M_1^T M_3 = M_3^T M_1 = M_2^T M_3 = M_3^T M_2 = 0 \\ M_2^T M_2 = M_3^T M_3 = 1 \end{gathered} \qquad (16)$$

Сделаем в (7) ортогональное преобразование

$$X = C_1 X' \qquad (17)$$

Получим $F = X^T AX = X'^T C_1^T AC_1 X' = X'^T A_1 X'$, где

$$A_1 = C_1^T AC_1 = \begin{pmatrix} a_1 & \frac{d_1}{2} & \frac{e_1}{2} \\ \frac{d_1}{2} & b_1 & \frac{f_1}{2} \\ \frac{e_1}{2} & \frac{f_1}{2} & c_1 \end{pmatrix}$$

Выбор в качестве первого столбца M_1 собственного столбца матрицы A позволяет добиться равенств

$$a_1 = \lambda_1\,, \frac{d_1}{2} = 0\,, \frac{e_1}{2} = 0$$

Действительно, по формулам (14) и (16)

$$\begin{gathered} a_1 = M_1^T AM_1 = M_1^T \lambda_1 M_1 = \lambda_1 M_1^T M_1 = \lambda_1 \\ \frac{d_1}{2} = M_2^T AM_1 = M_2^T \lambda_1 M_1 = \lambda_1 M_2^T M_1 = 0 \\ \frac{e_1}{2} = M_3^T AM_1 = M_3^T \lambda_1 M_1 = \lambda_1 M_3^T M_1 = 0 \end{gathered}$$

Итак, $A_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & \frac{f_1}{2} \\ 0 & \frac{f_1}{2} & c_1 \end{pmatrix}$. Значит, в результате произведённой замены переменных получим

$$F = \lambda_1 x'^2 + b_1 y'^2 + c_1 z'^2 + f_1 y' z' \qquad (18)$$

2-ой этап. Ранее в $\boldsymbol{n}^\circ\mathbf{1}$ было доказано, что существует угол φ такой, что после ортогональной замены переменных

$$\begin{gathered} y' = y''\cos\varphi - z''\sin\varphi \\ z' = y''\sin\varphi + z''\cos\varphi \end{gathered}$$

в этом выражении коэффициент при $y''z''$ обратится в нуль. Таким образом,

$$b_1 y'^2 + c_1 z'^2 + f_1 y' z' = b_2 y''^2 + c_2 z''^2$$

Сделаем в теперь в (18) замену переменных по формулам

$$x' = x''$$
$$y' = y''\cos\varphi - z''\sin\varphi \quad (19)$$
$$z' = y''\sin\varphi + z''\cos\varphi$$

или в матричной форме $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$$
$$X' = C_2 X''$$

Это ортогональная замена переменных, так как матрица коэффициентов
$$C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$
ортогональна (легко проверить, что $C_2^T C_2 = E$)

В результате замены (19) получим
$$F = \lambda x''^2 + b_2 y''^2 + c_2 z''^2 \qquad (20)$$

Таким образом, последовательное выполнение двух замен переменных (17) $X = C_1 X'$ и (19) $X' = C_2 X''$ привело исходное выражение (7) к требуемому виду (20). При этом столбец переменных x, y, z связан со столбцом переменных x'', y'', z'':
$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 X' = C_1 C_2 X'' = C_1 C_2 \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = C_3 \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$$

Матрица $C_3 = C_1 C_2$ ортогональная, так как является произведением двух ортогональных матриц C_1 и C_2. Теорема 1 доказана.

По ходу доказательства предыдущей теоремы коэффициент при квадрате переменной x'' получился равным собственному числу матрицы A, а первый столбец матрицы C_3 – собственному столбцу A, соответствующему этому собственному числу. Следующая теорема утверждает, что коэффициенты при квадратах остальных переменных y'' и z'' тоже собственные числа матрицы A, и остальные столбцы C_3 – тоже соответствующие им собственные столбцы A.

Теорема 2. Допустим, что выражение
$$F = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz = X^T A X$$
после ортогональной замены переменных $X = CX'$, где $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

приняло вид $F = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 = X'^T D X'$

Тогда

1. Коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – это собственные числа матрицы A;

2. Столбцы матрицы C – это собственные столбцы матрицы A, соответствующие $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Точнее, если $C = (M_1 \quad M_2 \quad M_3)$, то $AM_i = \lambda_i M_i$, $i = 1, 2, 3$, и

$$M_i^T M_j = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad i \neq j \\ 1 & \text{при} \quad i = j \end{cases}, i, j = 1,2,3.$$

Доказательство. По условию

$$F = X^T A X = X'^T C^T A C X' = X'^T D X', \qquad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = C^T A C$$

Умножим обе части равенства $C^T A C = D$ слева на матрицу C

$$C C^T A C = C D$$

Имеем $CC^T = C^T C = E$, так как C – ортогональная матрица. Поэтому

$$AC = CD$$
$$A(M_1 \quad M_2 \quad M_3) = (M_1 \quad M_2 \quad M_3)D$$
$$(AM_1 \quad AM_2 \quad AM_3) = (\lambda_1 M_1 \quad \lambda_2 M_2 \quad \lambda_3 M_3)$$

Отсюда получаем

$$AM_1 = \lambda_1 M_1$$
$$AM_2 = \lambda_2 M_2$$
$$AM_3 = \lambda_3 M_3$$

Остальные соотношения между столбцами следуют из ортогональности матрицы C.

Теорема 2 доказана.

Замечание. Вернёмся к квадратичным формам от двух переменных, рассмотренным в $\boldsymbol{n}°1$. Для них справедлива теорема, аналогичная Теореме 2.

Теорема 2. Пусть квадратичная форма $F = ax^2 + bxy + cy^2$ с матрицей $A = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$ приведена к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования (3) с матрицей C.

$$F = ax^2 + bxy + cy^2 = a_1 x_1^2 + c_1 y_1^2$$

Тогда

1) Коэффициенты a_1 и c_1 – это собственные числа матрицы A.

2) Столбцы матрицы $C = (M_1 \quad M_2)$ – это собственные столбцы матрицы A, соответствующие собственным числам a_1 и c_1. Точнее, $AM_1 = a_1 M_1$; $AM_2 = c_1 M_2$ и $M_i^T M_j = \begin{cases} 0 & , i \neq j \\ 1 & , i = j \end{cases}$ $i, j = 1,2$. Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 2.

Глава 6. Кривые и поверхности второго порядка

§1. Окружность и эллипс

Определение. Окружностью с центром в точке P и радиуса "r" называется множество всех точек плоскости, расстояние от которых до точки P равно "r".

Найдём уравнение окружности. Напомним (см. § 5 гл. 3), что уравнением линии (L) называется уравнение вида $F(x, y) = 0$ такое, что координаты любой точки, лежащей на (L) удовлетворяют этому уравнению, а координаты любой точки, не лежащей на (L), ему не удовлетворяют. Таким образом:

$M(x_0, y_0) \in (L)$ тогда и только тогда, когда $F(x_0, y_0) = 0$ – верное числовое равенство.

Для вывода уравнения окружности с центром в точке P и радиусом "r" введём на плоскости прямоугольную декартову СК Oxy. Допустим, что точка P имеет координаты $P(x_0, y_0)$. Тогда точка $M(x, y)$ плоскости принадлежит окружности тогда и только тогда, когда длина отрезка MP равна "r" (см. рис.1).

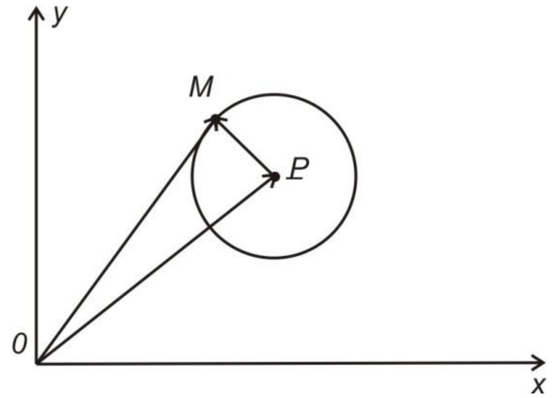


Рис.1. Окружность с центром в точке P и радиусом "r"

По формуле (17) §3 гл.3 $|MP| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$

Таким образом, координаты любой точки $M(x, y)$ и только они удовлетворяют уравнению

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r \qquad (1)$$

Значит, (1) является уравнением окружности с центром в точке $P(x_0, y_0)$ и радиусом "r". Возводя обе части этого уравнения в квадрат, получим равносильное уравнение

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \qquad (2)$$

Уравнение (2) называется каноническим уравнением окружности с центром в точке $P(x_0, y_0)$ и радиусом r.

Параметрические уравнения окружности

Из рис.1 $\boldsymbol{OM} = \boldsymbol{OP} + \boldsymbol{PM}$ (по Т1 §1 гл. 2) $\boldsymbol{OM} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$; $\boldsymbol{OP} = x_0\boldsymbol{i} + y_0\boldsymbol{j}$;
$\boldsymbol{PM} = r\cos\varphi \cdot \boldsymbol{i} + r\sin\varphi \cdot \boldsymbol{j}$ (по Т2 §1 гл. 2). Значит,

$$x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} = (x_0 + r\cos\varphi)\boldsymbol{i} + (y_0 + r\sin\varphi)\boldsymbol{j}$$

Приравниваем соответствующие проекции векторов, стоящих в левой и правой частях равенства. Получаем

$$\begin{cases} x = x_0 + r\cos\varphi \\ y = y_0 + r\sin\varphi \end{cases} \quad \varphi\epsilon[0,2\pi) \qquad (3)$$

Формулы (3) – это параметрические уравнения окружности.

Уравнение окружности в полярных координатах

Выберем в качестве полюса точку P – центр окружности. Полярную ось направим произвольно (см. рис.2).

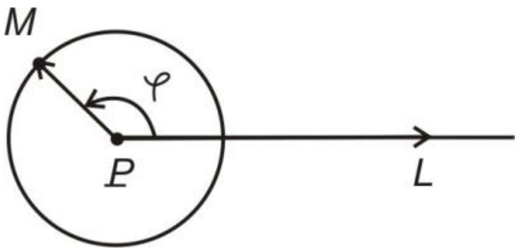


Рис.2. Вывод уравнения окружности в полярных координатах

Тогда

$$\rho = r \qquad (4)$$

– уравнение окружности в так введённой системе координат.

Определение. Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, для которых сумма расстояний до двух фиксированных точек F_1 и F_2 этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная (и равная $2a$).

Из определения следует способ практического построения эллипса. Закрепим в двух точках плоскости нерастяжимую нить длины $2a$. Натянем эту нить карандашом в точке M. Имеем

$$MF_1 + MF_2 = 2a$$

Значит, точка M – на эллипсе. Будем двигать карандаш, оставляя нить в натянутом состоянии. Тогда точка M опишет эллипс (рис.3а).

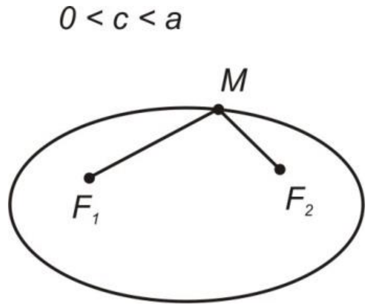


Рис.3а. Практическое построение эллипса

В частном случае, когда точки F_1, F_2 совпадают, точка M опишет окружность (рис.3б).

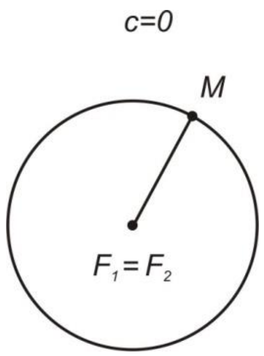


Рис.3б. Окружность как частный случай эллипса

В другом частном случае, когда $|F_1F_2| = 2a$, эллипс вырождается в отрезок F_1F_2 (рис. 3в).

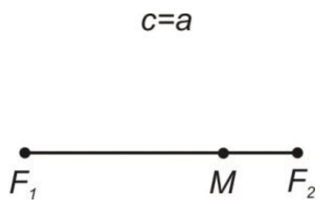


Рис.3в. Отрезок как частный случай эллипса

Вообще, число $2a$ (т.е. длина нити) и расстояние $|F_1F_2|$ между фокусами F_1, F_2 должны быть связаны соотношением $2a \geq |F_1F_2|$.

В противном случае эллипс построить невозможно.

Вывод канонического уравнения эллипса

Введём на плоскости декартову прямоугольную СК следующим образом: ось Ox проходит через точки F_1 и F_2, при этом F_1 левее F_2, начало отсчёта O лежит посередине между F_1 и F_2, ось Oy направим, как на рис.4.

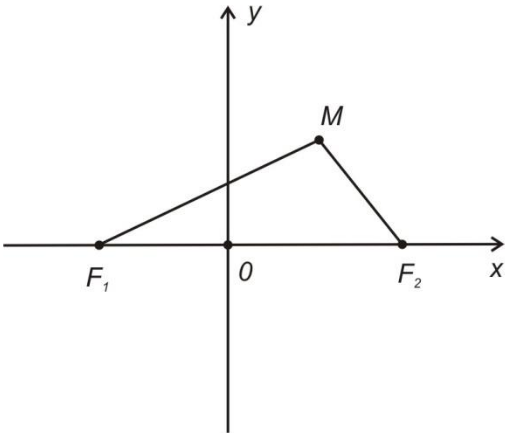


Рис.4. Введение системы координат

Обозначим $|F_1F_2| = 2c$.

Тогда $F_1(-c, 0)$; $F_2(c, 0)$. Точка $M(x, y)$ принадлежит эллипсу тогда и только тогда, когда

$$|MF_1| + |MF_2| = 2a$$

Тогда из треугольника F_1MF_2 имеем $2a = |MF_1| + |MF_2| \geq |F_1F_2| = 2c$ (в треугольнике любая сторона не превосходит суммы двух других сторон).

Перепишем это равенство, используя формулу для расстояния между двумя точками

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \quad (5)$$

Равенство (5) – это уравнение эллипса.

Преобразуем (5), приведя его к каноническому виду. Перенесём второе слагаемое из левой части уравнения (5) в правую часть и возведём обе части в квадрат. После раскрытия скобок и приведения подобных членов получим уравнение

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx \qquad (6)$$

Возведём обе части этого уравнения в квадрат. После тождественных преобразований, получаем уравнение

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \quad (7)$$

В силу $a \geq c$ число $a^2 - c^2 \geq 0$. Поэтому обозначим

$$a^2 - c^2 = b^2 \qquad (8)$$

и разделим обе части (7) на a^2b^2. Получим

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (9)$$

– каноническое уравнение эллипса.

Уравнение (9) является следствием уравнения (5), так как по ходу его получения мы дважды возводили в квадрат. Тем самым может оказаться, что на плоскости есть точки, координаты которых удовлетворяют (9), но не удовлетворяют (5), то есть не лежат на эллипсе. Докажем, что на самом деле такого не может быть, и (9) равносильно (5). Возьмём точку $M(x_0, y_0)$, координаты которой удовлетворяют (9), т.е.

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \qquad (10)$$

Проверим, что для этой точки выполнено $|MF_1| + |MF_2| = 2a$.

Прежде всего, из (10) получаем $0 \le \frac{x_0^2}{a^2} \le 1$, $0 \le \frac{y_0^2}{b^2} \le 1$, значит

$$|x_0| \le a \, , |y_0| \le b \quad (11)$$

Из (10) и (8) следует, что

$$y_0^2 = b^2 - \frac{b^2 x_0^2}{a^2} = a^2 - c^2 - x_0^2 + \frac{c^2}{a^2} x_0^2 \qquad (12)$$

Имеем, используя (11) и (12),

$$r_1 = |MF_1| = \sqrt{(x_0 + c)^2 + y_0^2} = \sqrt{a^2 + 2cx_0 + \frac{c^2}{a^2} x_0^2} = \sqrt{\left(a + \frac{c}{a} x_0\right)^2} =$$

$$= \left|a + \frac{c}{a} x_0\right| = a + \frac{c}{a} x_0$$

$$r_2 = |MF_2| = \sqrt{(x_0 - c)^2 + y_0^2} = \sqrt{\left(a - \frac{c}{a} x_0\right)^2} = \left|a - \frac{c}{a} x_0\right| = a - \frac{c}{a} x_0$$

Получили

$$\begin{aligned} r_1 &= |MF_1| = a + \frac{c}{a} x_0 \\ r_2 &= |MF_2| = a - \frac{c}{2} x_0 \end{aligned} \qquad (13)$$

Поэтому $|MF_1| + |MF_2| = a + \frac{c}{a} x_0 + a - \frac{c}{a} x_0 = 2a$.

Итак, точка M лежит на эллипсе и, следовательно, уравнения (5) и (9) равносильны.

Уравнение (9) называется каноническим уравнением эллипса.

Исследование формы эллипса с уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

В силу (11) координаты каждой точки $M(x, y)$, лежащей на эллипсе, удовлетворяют условиям

$$|x| \le a \;, \qquad |y| \le b$$

Отсюда $-a \le x \le a$, $-b \le y \le b$. Поэтому эллипс лежит внутри прямоугольника со сторонами $2a, 2b$. При $y = 0$ имеем $x = \pm a$, поэтому эллипс пересекает ось Ox в точках $(a, 0)$ и $(-a, 0)$.

При $x = 0$ имеем $y = \pm b$, поэтому эллипс пересекает ось Oy в точках $(0, b)$ и $(0, -b)$. Кроме того, эллипс симметричен относительно осей Oy и Ox, так как вместе с точкой $M(x_0, y_0)$на эллипсе лежат точки $N(-x_0, y_0)$ и $P(x_0, -y_0)$ (см. рис.5).

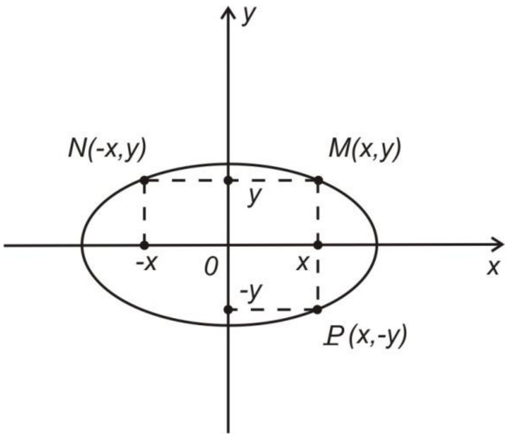


Рис.5. Исследование формы эллипса

$2a$ называется большой осью симметрии эллипса, $2b$ называется малой осью симметрии эллипса (напомним, что $b^2 = a^2 - c^2 \leq a^2$, поэтому $b \leq a$). Число "a" называется большой полуосью эллипса, число "b" называется малой полуосью эллипса. Эллипс с уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ можно рассматривать, как сжатую окружность (см. рис.6).

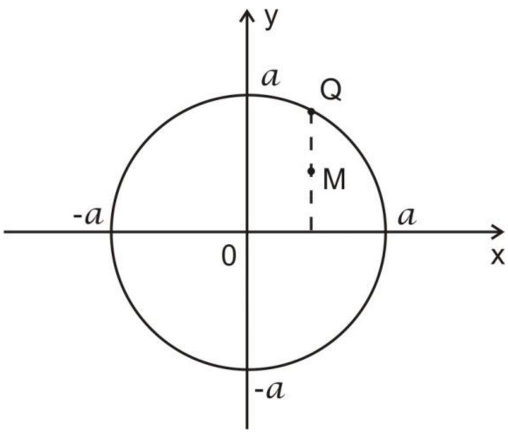


Рис.6. Эллипс как сжатая окружность

Действительно, возьмём окружность радиуса "a" с центром в начале координат. Её уравнение $x^2 + y^2 = a^2$. Пусть точка $Q(x_0, y_0)$ лежит на этой окружности, тогда

$$x_0^2 + y_0^2 = a^2$$

Возьмём точку $M\left(x_0, \frac{b}{a} y_0\right)$, которая лежит под точкой Q, так как ордината точки M получена из ординаты точки Q умножением на число $0 < \frac{b}{a} < 1$.Таким образом, точка M получается из точки Q при сжатии окружности.

Проверим, что точка M лежит на эллипсе $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Имеем:

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{\left(\frac{b}{a}y_0\right)^2}{b^2}=\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{a^2}=\frac{x_0^2+y_0^2}{a^2}=\frac{a^2}{a^2}=1$$

Утверждение доказано.

Примеры.

1. Написать каноническое уравнение эллипса, если известно, что его полуоси

$$a=5, \qquad b=4$$

Найти координаты фокусов F_1 и F_2.

Решение. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ – каноническое уравнение такого эллипса. Согласно (8) $a^2-c^2=b^2$, поэтому $c^2=a^2-b^2=25-16=9$. Значит, $F_1(-3{,}0), F_2(3{,}0)$.

2. Написать каноническое уравнение эллипса, если известно, что его большая полуось $a=13$, расстояние между фокусами равно 24.

Решение. $|F_1F_2|=24=2c$, значит, $c=12$. Поэтому малая полуось $b=$
$=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{169-144}=5$. Каноническое уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1$$

Параметрическое задание эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Известно, что если сумма квадратов двух чисел равна 1, то одно из них равно косинусу какого-то угла, а другое — синусу того же угла.

Пусть теперь $M(x_0,y_0)$ – произвольная точка эллипса. Тогда $\left(\frac{x_0}{a}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b}\right)^2=$
$=1$.

Поэтому $\begin{cases}\frac{x_o}{a}=\cos\varphi\\ \frac{y_0}{b}=\sin\varphi\end{cases}$, $\varphi\epsilon[0,2\pi]$.

Обратно, при каждом значении параметра $\varphi\epsilon[0,2\pi]$ точка с координатами $x=a\cos\varphi$, $y=b\sin\varphi$ лежит на эллипсе. Действительно,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{a^2(\cos\varphi)^2}{a^2}+\frac{b^2(\sin\varphi)^2}{b^2}=(\cos\varphi)^2+(\sin\varphi)^2=1$$

Следовательно, равенства

$$\begin{cases}x=acos\varphi\\ y=b\sin\varphi\end{cases}, \varphi\epsilon[0,2\pi] \qquad (14)$$

Задают эллипс параметрически.

Определение. Эксцентриситетом эллипса называется число $e = \frac{c}{a}$.

Примеры. Найти эксцентриситет эллипса

1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
2. $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$

Решение.

1. $a = 5,\ b = 4$ По формуле (8) $b^2 = a^2 - c^2$. Отсюда $c^2 = a^2 - b^2 = 9$, $c = 3, e = \frac{3}{5}$.

2. $a = 13,\ b = 12$. Аналогично предыдущему примеру, $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 5$. Поэтому $e = \frac{5}{13}$.

Эксцентриситет эллипса — это всегда неотрицательное число, не превосходящее единицы, т.к. $0 \le c \le a$.

При $e = 0$ эллипс является окружностью, а при $e = 1$ эллипс вырождается в отрезок, соединяющий точки F_1 и F_2.

Дальше мы предполагаем, что точки F_1 и F_2 различны и $e \neq 0$.

Определение. Директрисой эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, соответствующей фокусу F_1, называется прямая (D_1): $x = -\frac{a}{e}$.

Директрисой эллипса, соответствующей фокусу F_2, называется прямая (D_2): $x = \frac{a}{e}$.

Примеры. Найти уравнения и изобразить директрисы эллипсов

1. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$
2. $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$

Решение

1. $a = 5,\ b = 4$. Значит, $c = 3$ и $e = \frac{3}{5}$. поэтому (D_1): $x = -\frac{25}{3}$, (D_2): $x = \frac{25}{3}$ (см. рис.7).

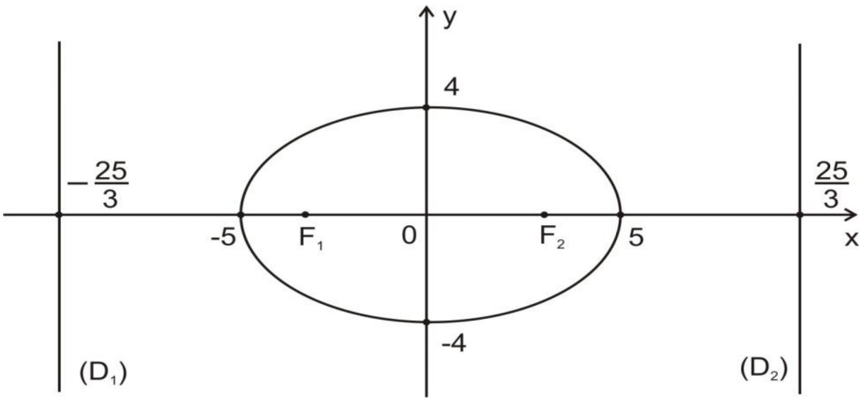


Рис.7. Эллипс с уравнением $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

2. $a=13, b=5$. Значит, $c=12$ и $e=\frac{12}{13}$. Поэтому $(D_1): x=-\frac{169}{12}$, $(D_2): x=$ $=\frac{169}{12}$ (см. рис.8).

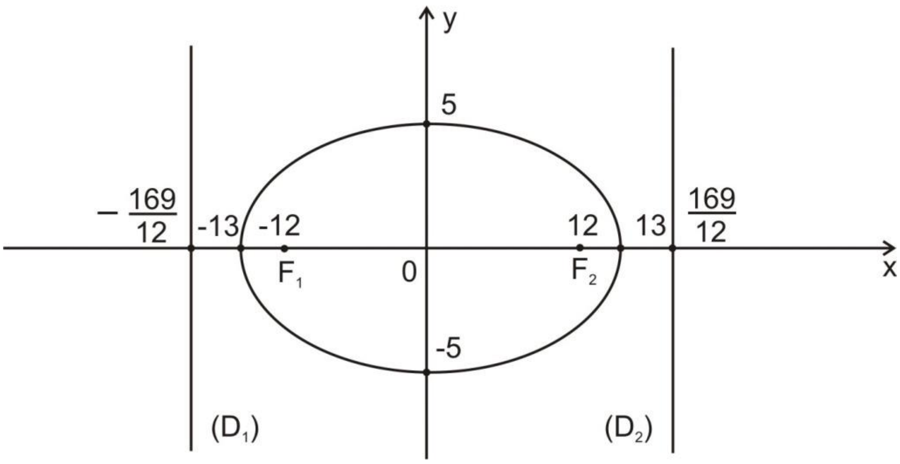


Рис.8. Эллипс с уравнением $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1$

Теорема 1 (фокальное свойство эллипса).

Отношение расстояния от произвольной точки эллипса до фокуса к расстоянию от той же точки до соответствующей этому фокусу директрисы постоянно и равно эксцентриситету эллипса.

Доказательство.

Сначала рассмотрим фокус F_1 и директрису (D_1) из рис. 9.

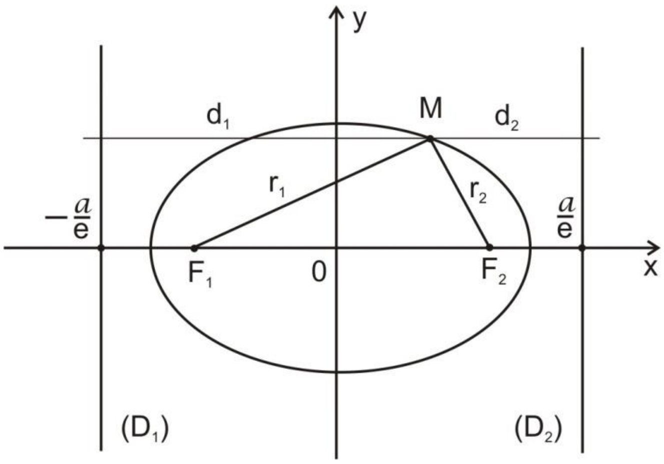


Рис.9. Фокальное свойство эллипса

Пусть $M(x_0, y_0)$ – произвольная точка эллипса. По формуле (13) $r_1 = |MF_1| =$ $= a + ex_0$. Расстояние d_1 от точки M до директрисы (D_1) находим $d_1 = x_0 + \frac{a}{e}$.

Поэтому $\frac{r_1}{d_1} = \frac{a+ex_0}{x_0+\frac{a}{e}} = e$.

Аналогично рассмотрим случай фокуса F_2 и директрисы (D_2). По формуле (13) $r_2 = |MF_2| = a - ex_0$, расстояние r_2 от точки M до (D_2) находим $d_2 = \frac{a}{e} - x_0$.

Поэтому $\frac{r_2}{d_2} = \frac{a-ex_0}{\frac{a}{e}-x_0} = e$. Теорема доказана.

Замечание. Обозначим p – расстояние от (D_1) до F_1. Из рис.9 видно, что $p = -c + \frac{a}{e}$. Имеем систему $\begin{cases} p = -c + \frac{a}{e} \\ e = \frac{c}{a} \end{cases}$.

Выразим отсюда a, c через p, e: $\begin{cases} a = \frac{pe}{1-e^2} \\ c = \frac{pe^2}{1-e^2} \end{cases}$.

Следующая теорема утверждает, что на плоскости нет других точек, кроме точек эллипса, для которых выполнено $\frac{r}{d} = e$.

Теорема 2. Пусть e – произвольное число, $0 < e < 1$ и пусть на плоскости заданы прямая (D) и точка F вне (D). Тогда множество (Г) всех точек плоскости, отношение расстояния от которых до F к расстоянию до (D) равно e, является эллипсом.

При этом F – один из фокусов этого эллипса, (D) – соответствующая директриса, e – эксцентриситет эллипса.

Доказательство. Для доказательства того, что (Г) является эллипсом, надо убедиться в том, что в некоторой системе координат уравнение кривой (Г) – это каноническое уравнение эллипса.

Введём систему координат, в которой ось абсцисс перпендикулярна данной прямой (D) и проходит через данную точку F как указано на рис. 10.

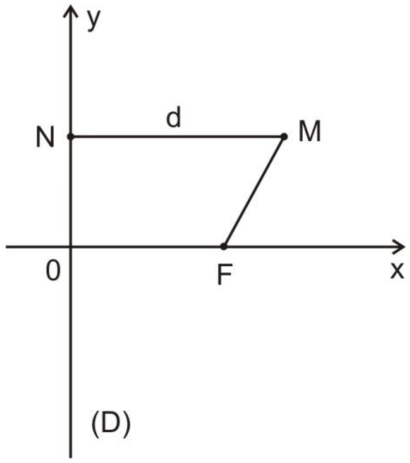


Рис.10. Введение системы координат

За начало отсчёта O возьмём точку их пересечения. В качестве оси ординат возьмём прямую (D).

Обозначим p – расстояние от O до F, тогда точка $M(x, y)$ принадлежит (Г) тогда и только тогда, когда

$$\frac{|MF|}{|MN|} = e \qquad (15)$$

При этом точка M обязательно лежит правее прямой (D) (в противном случае отношение $\frac{r}{d} > 1$). Имеем $|MF| = \sqrt{(x-p)^2 + y^2}$, $|MN| = x$.

Тогда равенство (15) принимает вид

$$\frac{\sqrt{(x-p)^2+y^2}}{x} = e, \ x > 0 \qquad (16)$$

Уравнение (16)– это уравнение кривой Г. Возводя обе части в квадрат и делая равносильные преобразования уравнения (16), получим

$$\big((1-e^2)\big)x^2 - 2px + y^2 + p^2 = 0 \qquad (17)$$

Делим обе части уравнения (17) на $1 - e^2$ и выделяем полный квадрат по переменной x:

$$\left(x - \frac{p}{1-e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1-e^2} = \frac{p^2e^2}{(1-e^2)^2} \qquad (18)$$

Обозначим $\begin{matrix} x_1 = x - \frac{p}{1-e^2} \\ y_1 = y \end{matrix}$

Тем самым мы ввели новую систему координат $O_1x_1y_1$, полученную параллельным переносом системы координат Oxy. Уравнение (18) принимает вид

$$x_1^2 + \frac{y_1^2}{1-e^2} = \frac{p^2e^2}{(1-e^2)^2} \qquad (19)$$

Делим обе части уравнения (19) на $\frac{p^2e^2}{(1-e^2)^2}$. Получаем

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1, \qquad (20)$$

где обозначено $a = \frac{pe}{1-e^2}$, $b = \frac{pe}{\sqrt{1-e^2}}$

Таким образом, (20) – это уравнение кривой (Г) в системе координат $O_1x_1y_1$. Видим, что (20) – это каноническое уравнение эллипса. Значит, кривая (Г) – это эллипс. Найдём его эксцентриситет. Имеем $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{pe^2}{1-e^2}$, $\frac{c}{a} = e$.

Видим, что эксцентриситет эллипса (Г) равен e. Координата одного из фокусов этого эллипса $\begin{array}{c} x_1 = -c = -\frac{pe^2}{1-e^2} \\ x = \frac{p}{1-e^2} - \frac{pe^2}{1-e^2} = p \end{array}$.

Таким образом, один из фокусов совпадает с F.

Найдём директрису эллипса (Г), соответствующую фокусу F. Её уравнение в системе координат $O_1x_1y_1$.

$$x_1 = -\frac{a}{e} = -\frac{p}{1-e^2}$$

Значит, в системе координат Oxy её уравнение $x - \frac{p}{1-e^2} = -\frac{p}{1-e^2}$.

То есть $x = 0$.

Итак, директриса эллипса (Г), соответствующая фокусу F,совпадает с прямой (D). Теорема доказана.

Следствие. Теперь можно дать другое определение эллипса. Именно: эллипсом называется множество точек на плоскости, отношение расстояний от которых до данной точки, называемой фокусом и до данной прямой, называемой директрисой, постоянно и равно числу e, $0 < e < 1$.

Полярное уравнение эллипса

Пусть на плоскости дан эллипс с фокусами F_1 и F_2. Введём полярную систему координат, взяв за полюс фокус F_1 и направив полярную ось от F_1 к F_2 (см. рис.11).

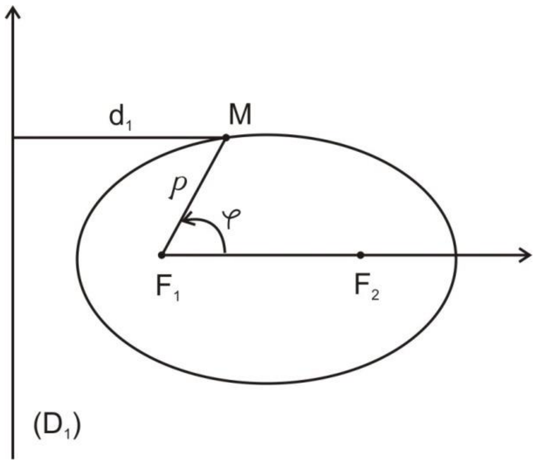


Рис.11. Введение полярной системы координат

Обозначим (D_1) – директрису эллипса, соответствующую фокусу F_1, а p – расстояние между (D_1) и F_1, и e – эксцентриситет эллипса. Пусть точка $M(\varphi, \rho)$ – произвольная точка плоскости, φ, ρ – её полярные координаты. Теоремы 1,2 показывают, что точка M принадлежит эллипсу тогда и только тогда, когда

$$\frac{|MF_1|}{|MN|} = e, \qquad (21)$$

где $|MN|$ – расстояние от M до (D_1). Из Рис. 11 видно, что $|MF_1| = \rho$, $|MN| =$ $= p + \rho\cos\varphi$.

Поэтому уравнение (21) равносильно

$$\rho = e(p + \rho\cos\varphi)$$

Отсюда

$$\rho = \frac{pe}{1 - e\cos\varphi} \qquad (22)$$

Уравнение (22) называется полярным уравнением эллипса.

§ 2. Гипербола

Определение. Гиперболой называется множество всех точек плоскости, модуль разности расстояний от которых до двух фиксированных точек F_1 и F_2, называемых фокусами, постоянен (и равен $2a$).

Вывод канонического уравнения гиперболы

Введём на плоскости декартову прямоугольную систему координат следующим образом. Ось абсцисс проходит через точки F_1 и F_2 , при этом F_1 левее F_2. Начало отсчёта O лежит посередине между F_1 и F_2. Ось ординат направим, как на рис.1.

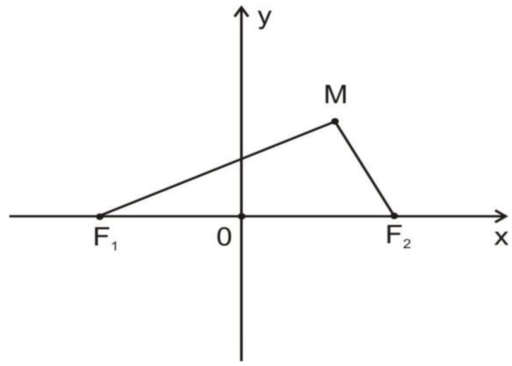


Рис.1. Введение системы координат

Обозначим $|F_1F_2| = 2c$. Тогда $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$. Точка $M(x, y)$ принадлежит гиперболе тогда и только тогда, когда

$$\big||MF_1| - |MF_2|\big| = 2a \qquad (1)$$

Замечание. Известно, что в треугольнике разность длин двух его сторон не превосходит длины третьей стороны. Из треугольника F_1MF_2 на рис.1 имеем

$$2a = \big||MF_1| - |MF_2|\big| \leq |F_1F_2| = 2c$$

Отсюда $a \leq c$.

В противном случае на плоскости нет точек, удовлетворяющих (1).

В дальнейшем предполагаем

$$a < c. \qquad (2)$$

Частный случай $a = c$ разобран в задаче №1. Перепишем равенство (1), используя формулу для расстояния между двумя точками

$$\left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a \qquad (3)$$

Равенство (3) – это уравнение гиперболы. Преобразуем (3), приведя его к каноническому виду. Прежде всего избавимся от модуля в левой части. Для этого рассмотрим два случая.

Во-первых, пусть точка $M(x, y)$ лежит в правой полуплоскости. Тогда $|MF_1| \geq |MF_2|$ и уравнение (3) равносильно

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \qquad (4)$$

Перенесём слагаемое со знаком " $-$ " направо и возведём обе части в квадрат. После тождественных преобразований получим

$$cx - a^2 = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \qquad (5)$$

Возведём обе части (5) в квадрат.

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 \qquad (6)$$

Уравнение (6) равносильно уравнению

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2) \qquad (7)$$

Из (2) следует, что $c^2 - a^2 > 0$. Поэтому обозначим

$$b^2 = c^2 - a^2 \qquad (8)$$

Делим обе части уравнения (7) на выражение $a^2(c^2 - a^2) = a^2b^2$. Получаем

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (9)$$

Уравнение (9) является следствием уравнения (4). Покажем, что уравнение (9) равносильно (4). Для этого, так же, как при выводе канонического уравнения эллипса, возьмём точку $M(x_0, y_0)$ в правой полуплоскости $(x_0 \geq 0)$, координаты которой удовлетворяют (9):

$$\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1$$

Проверим, что для этой точки $|MF_1| - |MF_2| = 2a$.

Имеем (сравните с формулами (13) предыдущего параграфа)

$$\begin{aligned} r_1 &= |MF_1| = a + \frac{c}{a}x_0 \\ r_2 &= |MF_2| = -a + \frac{c}{a}x_0 \end{aligned} \qquad (10)$$

Поэтому $|MF_1| - |MF_2| = \left(a + \frac{c}{a}x_0\right) - \left(-a + \frac{c}{a}x_0\right) = 2a$.

Равносильность уравнений (4) и (9) доказана.

Пусть, во-вторых, точка $M(x, y)$ лежит в левой полуплоскости, то есть $x \leq 0$. Тогда $|MF_1| \leq |MF_2|$ и уравнение (3) равносильно уравнению

$$-\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \qquad (11)$$

Как и в первом случае, можно доказать, что (11) равносильно уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (12)$$

Мы видим, таким образом, что уравнение гиперболы (3) в обоих случаях равносильно одному и тому же уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

которое называется каноническим уравнением гиперболы.

Исследование формы гиперболы

1. Гипербола симметрична относительно осей координат, так как если точка $M(x_0, y_0)$ принадлежит гиперболе, то точки $N(-x_0, y_0)$ и $P(x_0, -y_0)$ тоже лежат на гиперболе. Действительно, по условию $\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} -= 1$. Значит, $\frac{(-x_0)^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1$ и $\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{(-y_0)^2}{b^2} = 1$.

2. Изобразим схематически ту часть гиперболы, которая лежит в первой координатной четверти. В этом случае координаты любой точки $M(x, y)$, лежащей на гиперболе, удовлетворяют условиям $x \geq 0, y \geq 0$ и ордината $''y''$ выражается через абсциссу $''x''$ формулой

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

Построим график функции $f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$.

а) Область определения $D(f) = \{x \in R: x \geq a\}$

б) Область значений $E(f) = \{y \in R:\ y \geq 0\}$; $x = a -$ корень функции, $f(a) = 0$

в) $f(x)$ монотонно возрастает на $D(f)$, так как производная $f'(x) = \frac{b}{a} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$ больше нуля для всех $x > a$

г) Найдём наклонную прямолинейную асимптоту при $x \to +\infty$

$k = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}}{x} = \frac{b}{a} \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^2-a^2}{x^2}} = \frac{b}{a}.$

$$b = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{b}{a}x\right) =$$

$$= \frac{b}{a}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-a^2}-x\right)\left(\sqrt{x^2-a^2}+x\right)}{\sqrt{x^2-a^2}+x} = \frac{b}{a}\lim_{x\to+\infty}\frac{-a^2}{\sqrt{x^2-a^2}+x} = 0.$$

Следовательно, асимптота при $x \to +\infty$ – это прямая $y = \frac{b}{a}x$. График функции $f(x)$ имеет вид (см. рис.2).

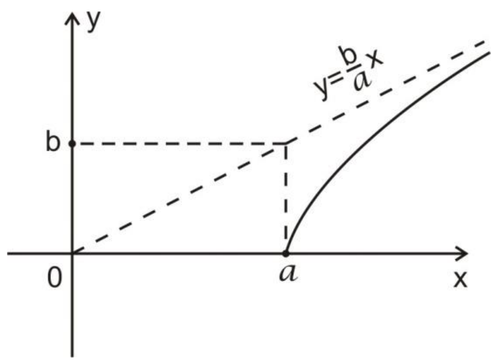


Рис.2. График наклонной асимптоты гиперболы

3. Изобразим теперь всю гиперболу $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, используя её симметричность относительно осей координат и рис.2. Для этого удобно нарисовать прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$ и с центром в точке O. Проведём в нём диагонали и продолжим их за пределы этого прямоугольника. Эти прямые – асимптоты гиперболы. Их уравнения $y = \pm\frac{b}{a}x$. Тогда гипербола имеет вид (см. рис3).

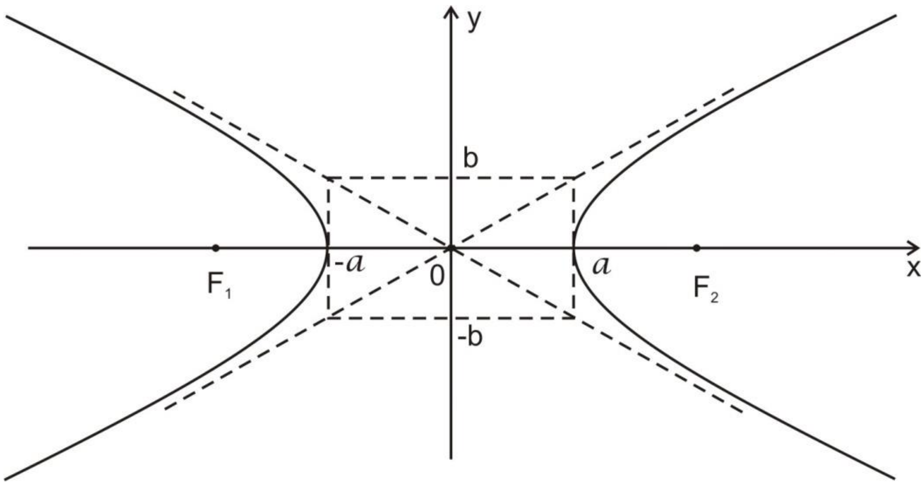


Рис.3. Гипербола, заданная каноническим уравнением

Точки $x = a$ и $x = -a$ называются вершинами гиперболы. Ось абсцисс называется действительной осью гиперболы, а ось ординат — мнимой осью гиперболы. Вся гипербола состоит из двух ветвей: правой и левой.

Параметрическое задание гиперболы

1. Напомним, что функции $\begin{matrix} \mathrm{ch}t = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) \\ \mathrm{sh}t = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) \end{matrix}$ называются, соответственно, гиперболическим синусом и гиперболическим косинусом. Их графики приведены на рис. 4.

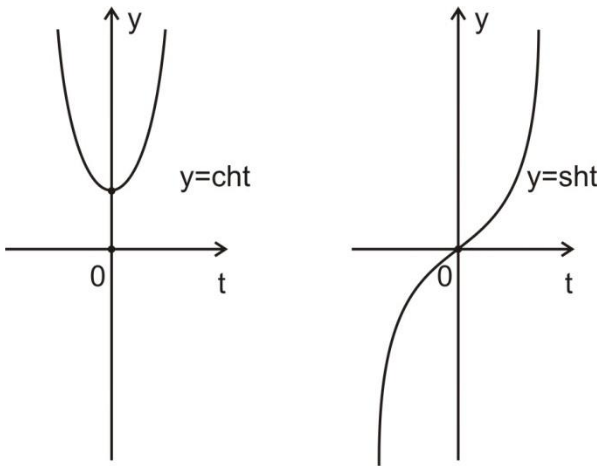


Рис.4.Графики функций $y = cht$ и $y = sht$

Имеет место тождество

$$\mathrm{ch}^2 t - \mathrm{sh}^2 t = 1 \qquad (13)$$

для всех $t \in R$ (проверьте самостоятельно).

2. Возьмём произвольную точку $M_0(x_0, y_0)$ на правой ветви гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, ниже оси Ox. Тогда имеем

$$\left(\frac{x_0}{a}\right)^2 - \left(\frac{y_0}{b}\right)^2 = 1$$

(см. рис.5)

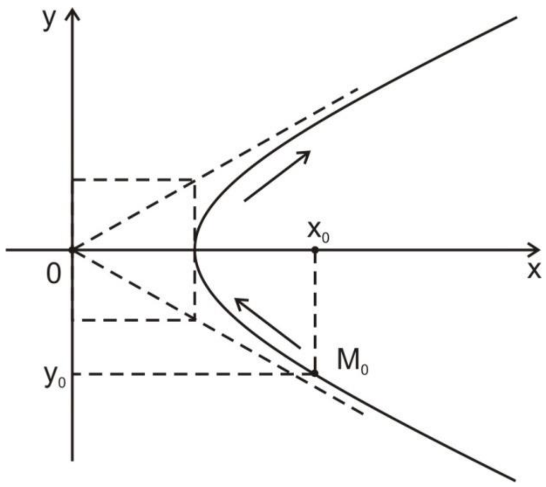


Рис.5. Параметрическое задание гиперболы

Ясно, что $x_0 \geq a, y_0 \leq 0$. Поэтому $\frac{x_0}{a} \geq 1$ и из графика $y = \mathrm{ch}t$ видно, что существует единственный $t_0 \leq 0$ такой, что $\frac{x_0}{a} = \mathrm{ch}t_0$.

Тогда $\frac{y_0}{b} = -\sqrt{\frac{x_0^2}{a^2} - 1} = -\sqrt{\mathrm{ch}^2 t_0 - 1} = -\sqrt{\mathrm{sh}^2 t_0} = -|\mathrm{sh}t_0| = \mathrm{sh}t_0$, так как $t_0 \leq 0$.

Итак,

$$\begin{cases} x_0 = a\mathrm{ch}t_0 \\ y_0 = b\mathrm{sh}t_0 \end{cases} t_0 \leq 0$$

Положение точки M_0 однозначно определяет значение параметра t_0. Если точка M_0 начнёт двигаться по гиперболе в направлении стрелки, то, дойдя до вершины, t_0 примет значение $t_0 = 0$. Аналогично, любая точка $M_0(x_0, y_0)$ на гиперболе, расположенная выше оси Ox, однозначно определяется значением параметра $t_0 > 0$.

$$\begin{cases} x_0 = a\mathrm{ch}t_0 \\ y_0 = b\mathrm{sh}t_0 \end{cases}, t_0 > 0$$

Поэтому уравнения

$$\begin{cases} x = a\mathrm{ch}t \\ y = b\mathrm{sh}t \end{cases}, t \in R \qquad (14)$$

задают правую ветвь гиперболы параметрически. Левая ветвь гиперболы задаётся параметрически следующим образом

$$\begin{cases} x = -a\mathrm{ch}t \\ y = b\mathrm{sh}t \end{cases}$$

Определение. Эксцентриситетом гиперболы называется число $e = \frac{c}{a}$. Директрисой (D_1) гиперболы$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, соответствующей фокусу F_1, называется прямая $x = -\frac{a}{e}$. Директрисой (D_2) гиперболы, соответствующей фокусу F_2 , называется прямая $x = \frac{a}{e}$.

Пример. Изобразить гиперболу $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$. Найти её эксцентриситет и директрисы.

Решение. (см. рис.6)

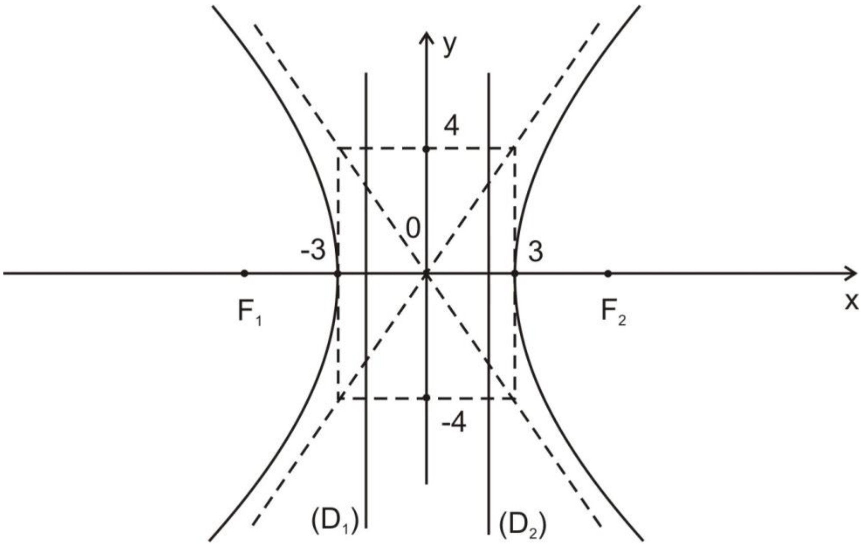


Рис.6. Гипербола, заданная уравнением $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

$$a = 3\,, b = 4 \quad y = \pm\frac{4}{3}x \quad -$$

асимптоты гиперболы.

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = 5 \;\; ; \;\; e = \frac{5}{3}$$

$$(D_1):\; x = -\frac{a}{e} = -\frac{9}{5}$$

$$(D_2):\; x = \frac{9}{5}$$

Теорема 1. (фокальное свойство гиперболы).

Отношение расстояния от произвольной точки гиперболы до фокуса к расстоянию от той же точки до соответствующей этому фокусу директрисы постоянно и равно эксцентриситету гиперболы.

Доказательство. Гипербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ симметрична относительно осей координат. Поэтому утверждение теоремы достаточно проверить для правого фокуса F_2. Пусть $M(x_0, y_0)$ – точка на гиперболе и $x_0 > 0$. В этом случае, согласно (10),

$$r_2 = |MF_2| = -a + \frac{c}{a}x_0$$

Расстояние d_2 от точки M до (D_2) находим по формуле

$$d_2 = x_0 - \frac{a}{e}$$

Поэтому

$$\frac{r}{d} = e \qquad (15)$$

Если $x_0 < 0$, то $r_2 = a - ex_0,\ d_2 = \frac{a}{e} - x_0$

Поэтому $\frac{r_2}{d_2} = e$. Теорема доказана.

Следующая теорема утверждает, что на гиперболе нет других точек, кроме тех, для которых выполнено соотношение (15).

Теорема 2. Пусть e – произвольное число, $e > 1$ и пусть на плоскости заданы прямая (D) и точка F вне (D).Тогда множество (Г) всех точек плоскости, отношение расстояния от которых до F к расстоянию до (D) равно e, является гиперболой. При этом F – один из фокусов этой гиперболы, (D) – соответствующая директриса, e – эксцентриситет.

Доказательство проводится аналогично доказательству Теоремы 2 предыдущего параграфа.

Следствие. Теперь можно дать другое определение гиперболы. Именно:

Гиперболой называется множество точек на плоскости, отношение расстояний от которых до данной точки, называемой фокусом, и до данной прямой, называемой директрисой, постоянно и равно числу e , $e > 1$.

Полярное уравнение гиперболы

Пусть на плоскости дана гипербола с фокусами F_1 и F_2. Введём полярную систему координат, взяв за полюс фокус F_2 и направив полярную ось по прямой, соединяющей F_1 и F_2 , в сторону от F_2 (см. рис.7).

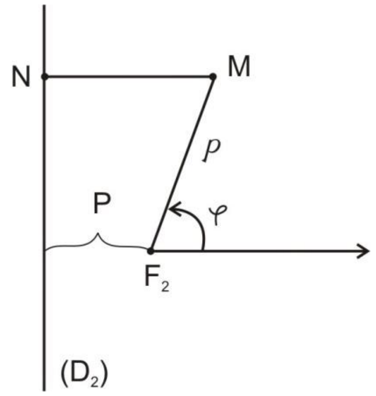


Рис 7. Введение полярной системы координат

Обозначим (D_2) – директрису, соответствующую фокусу F_2, p – расстояние от F_2 до (D_2), e – эксцентриситет.

Пусть точка $M(\varphi,\rho)$ – произвольная точка плоскости, φ,ρ – её полярные координаты. Теоремы 1 и 2 показывают, что точка M принадлежит гиперболе тогда и только тогда, когда

$$\frac{|MF_2|}{|MN|}=e \qquad (16)$$

где $|MN|$ – расстояние от M до (D_2), а $|MF_2|=\rho$.

Величина $|MN|$ вычисляется по разным формулам в зависимости от того, лежит точка M правее или левее (D_2). Из рис.7 видно (там точка M лежит правее (D_2)), что

$$|MN|=p+\rho\cos\varphi$$

Формулу (16) запишем в виде

$$\frac{\rho}{p+\rho\cos\varphi}=e$$

Отсюда

$$\rho=\frac{pe}{1-e\cos\varphi} \qquad (17)$$

Равенство (17) называется полярным уравнением гиперболы и задаёт её правую ветвь.

Проверьте самостоятельно, что левая ветвь гиперболы в выбранной полярной системе координат имеет уравнение

$$\rho=-\frac{pe}{1+e\cos\varphi}$$

§ 3. Парабола

Определение. Параболой называется множество точек на плоскости, равноудалённых от данной точки, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой.

Вывод канонического уравнения параболы

Предположим, что на плоскости даны прямая (D) и точка F (см. рис.1).

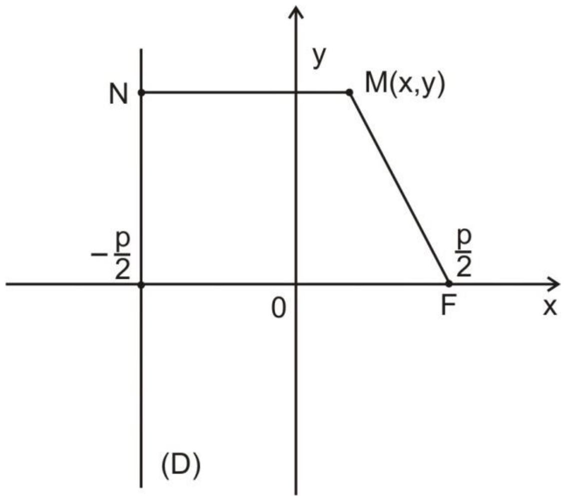


Рис.1. Введение системы координат

Обозначим p – расстояние между F и (D). Введём прямоугольную декартову систему координат следующим образом: ось абсцисс перпендикулярна директрисе и проходит через фокус, начало отсчёта – точка O – делит расстояние между фокусом и директрисой пополам. Ось ординат направлена, как показано на рис.1. Тогда имеем уравнение директрисы

$$(D):\ \ x = -\frac{p}{2} \qquad (1)$$

и координаты фокуса

$$F\left(\frac{p}{2};0\right) \qquad (2)$$

Согласно данному определению точка $M(x,y)$ принадлежит параболе тогда и только тогда, когда

$$|MF| = |MN|, \qquad (3)$$

где $|MN|$ –расстояние от точки M до (D) (см. рис.1)

Заметим, что для любой точки P, лежащей слева от директрисы, выполнено

$$|PF| > |PQ|$$

где $|PF|$ – расстояние от P до (D). Поэтому точки параболы не могут лежать слева от директрисы. Вся парабола расположена правее (D).

Запишем теперь соотношение (3) в координатах. Имеем

$$|MF| = \sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2}\ ,|MN| = \sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + (y-y)^2} = \left|x+\frac{p}{2}\right|$$

т.к. $N\left(-\frac{p}{2};y\right)$

Равенство (3) принимает вид

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right| \qquad (4)$$

Возводим обе части в квадрат и раскрываем скобки

$$x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2=x^2+px+\frac{p^2}{4}$$

Приводим подобные члены, получаем

$$y^2=2px \qquad (5)$$

Уравнение (5) равносильно уравнению (4), так как обе части (4) неотрицательны.

Уравнение (5) называется каноническим уравнением параболы.

Из (5) видим, что каждая точка $M(x,y)$ параболы имеет неотрицательную абсциссу $x, x \geq 0$.

Кроме того, если пара чисел (x,y) удовлетворяет (5), то пара $(x,-y)$ тоже удовлетворяет (5). Значит, симметрично расположенные точки $M(x,y)$ и $M_1(x,-y)$ лежат на параболе. Следовательно, парабола симметрична относительно оси Ox.

Парабола изображена на рис.2.

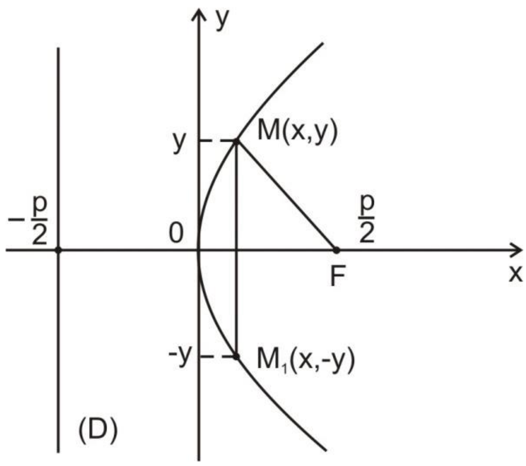


Рис.2. Парабола, заданная каноническим уравнением

Полярное уравнение параболы

Пусть на плоскости даны прямая (D) и точка F. Обозначим p – расстояние от F до (D). Введём полярную систему координат, взяв за полюс точку F и направив полярную ось перпендикулярно прямой (D) так, как показано на рис.3.

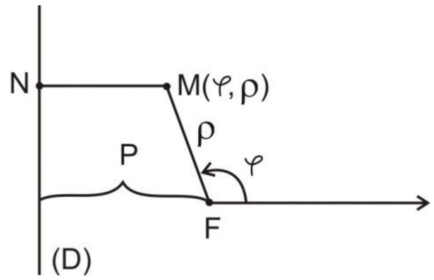


Рис.3. Введение полярной системы координат

Найдём полярное уравнение параболы, для которой F служит фокусом, а (D) – директрисой. Рассуждая так же, как при выводе канонического уравнения параболы, имеем:

Точка $M(\varphi, \rho)$ лежит на параболе тогда и только тогда, когда

$$|MF| = |MN| \qquad (6)$$

Из рис.3 видим

$$|MF| = \rho\,, \qquad |MN| = p + \rho\cos\varphi$$

Запишем теперь равенство (6), используя полярные координаты φ и ρ точки M

$$\rho = p + \rho\cos\varphi.$$

Отсюда

$$\rho = \frac{p}{1-\cos\varphi} \qquad (7)$$

Уравнение (7) является искомым полярным уравнением параболы.

§ 4. Эллипс, гипербола и парабола как конические сечения

Рассмотрим прямой круговой конус и его различные сечения плоскостями.

Если секущая плоскость проходит через вершину конуса, то в сечении либо одна точка, либо пара прямых линий, проходящих через вершину.

Если секущая плоскость перпендикулярна оси конуса, то в сечении окружность (см. рис.1а).

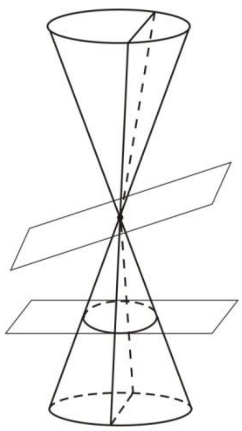


Рис.1а. Сечения конуса плоскостями, проходящими через вершину или перпендикулярными его оси

Докажем, что в остальных случаях в сечении получается либо эллипс, либо гипербола, либо парабола (см. рис.1б, 1в).

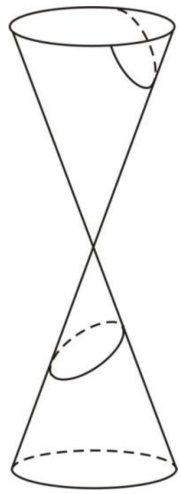


Рис.1б. Сечения конуса плоскостями, не проходящими через его вершину и не перпендикулярными его оси (эллипс и парабола)

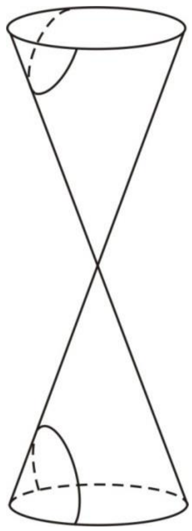


Рис.1в. Сечения конуса плоскостями, не проходящими через его вершину и не перпендикулярными его оси (гипербола)

Определение. Коническим сечением называется кривая, получающаяся в пересечении прямого кругового конуса с плоскостью, не проходящей через его вершину.

Теорема 1. Любое коническое сечение, кроме окружности, является множеством (Γ) точек на секущей плоскости, отношение e расстояний от которых до некоторой точки F и некоторой прямой (D) постоянно.

Следствие. Если $0 < e < 1$,то из теоремы 2 § 2 следует, что (Γ) –это эллипс.

Если $e > 1$, то из теоремы 2 § 2 следует, что (Γ) – это гипербола.

Если $e = 1$, то (Γ) – это парабола (следует из определения параболы как множества точек плоскости, равноудалённых от F и (D).

Доказательство теоремы 1.

Пусть (Γ) – кривая, по которой плоскость (π) пересекает конус (см. рис.2).

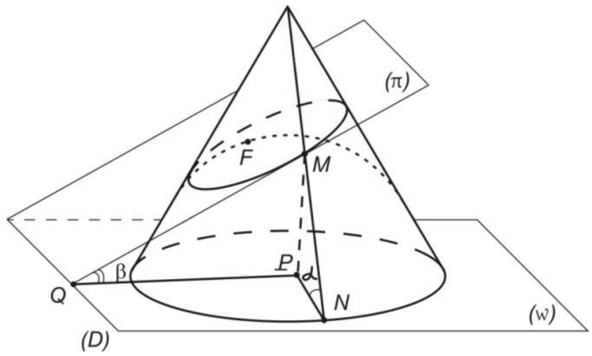


Рис.2. Пересечение конуса плоскостью

Впишем в конус сферу, касающуюся плоскости (π) и обозначим F точку касания сферы с плоскостью (π). Заметим, что сфер с таким условием может быть две. Выберем любую из них.

Обозначим: (ω) – плоскость, в которой лежит окружность касания сферы и конуса, (D)– прямая пересечения плоскостей (π) и (ω) (см. рис.2).

Из точки M опустим перпендикуляр MP на плоскость (ω). Из точки M опустим перпендикуляр MQ на (D). $|MQ|$ – это расстояние от точки M до прямой (D). Через точку M проведём образующую MN конуса. Теорема будет доказана, если проверить, что отношение $\frac{|MF|}{|MQ|}$ не зависит от положения точки M на кривой (Г). Тогда $|MF| = |MN|$ как длины касательных к сфере, проведённых из одной точки.

Из треугольника MNP имеем $|MN| = \frac{|MP|}{\sin\alpha}$, где α – угол между образующей конуса и плоскостью (ω). Из треугольника MPQ имеем $|MQ| = \frac{|MP|}{\sin\beta}$, где β – угол между плоскостями (π) и (ω). Тогда

$$e = \frac{|MF|}{|MQ|} = \frac{|MN|}{|MQ|} = \frac{|MP|\cdot\sin\beta}{\sin\alpha\cdot|MP|} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \qquad (1)$$

не зависит от положения точки M на кривой.

Теорема доказана.

Пример. Образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом $\alpha = 45°$. Какая кривая получится в сечении этого конуса плоскостью (π), если угол β между плоскостями (ω) и (π) равен

а) $45°$ б) $30°$ в) $60°$

Решение. Из формулы (1) следует, что в случае

а) $e = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{\sin 45°}{\sin 45°} = 1$ и, значит, любая точка, лежащая на линии пересечения (Γ) равноудалена от F и (D). Поэтому (Γ) – это парабола.

б) $e = \frac{\sin 30°}{\sin 45°} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$. Значит (Γ) – это эллипс.

в) $e = \frac{\sin 60°}{\sin 45°} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} > 1$. Значит (Γ) – гипербола.

§ 5. Оптическое свойство эллипса, гиперболы и параболы

Оптическое свойство эллипса

Луч света, выпущенный из одного фокуса эллипса, отразившись от эллипса, как от зеркала, пройдёт через другой фокус (см. рис.1).

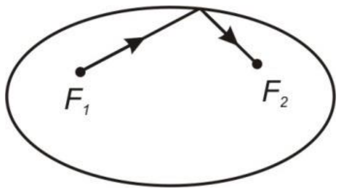


Рис.1. Оптическое свойство эллипса

Оптическое свойство гиперболы

Луч света, выпущенный из одного фокуса гиперболы, отразившись от неё, как от зеркала, пройдёт по прямой, проходящей через другой фокус (см. рис. 2).

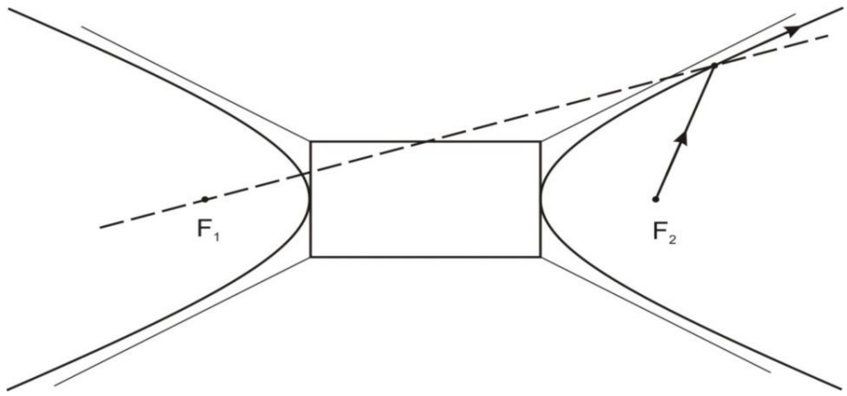


Рис.2. Оптическое свойство гиперболы

Оптическое свойство параболы

Луч света, выпущенный из фокуса параболы, отразившись от неё, как от зеркала, пойдёт по прямой, параллельной оси параболы (см. рис.3).

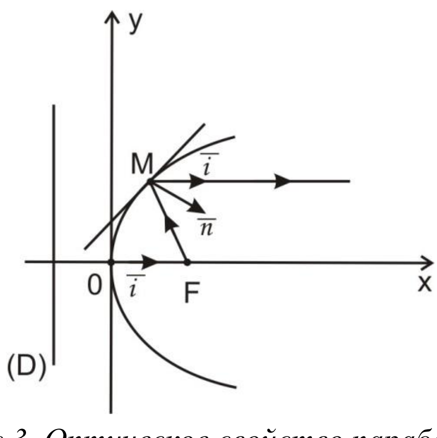


Рис.3. Оптическое свойство параболы

Докажем оптическое свойство параболы.

Напомним, что углом падения (отражения) называется угол между нормалью в точке падения луча и падающим (соответственно, отражённым) лучом. При этом угол падения равен углу отражения.

Пусть парабола задана каноническим уравнением $y^2 = 2px$. Часть параболы, лежащая в первой (соответственно, четвёртой) координатной четверти, является графиком функции $y = \sqrt{2px}$ (соответственно, $y = -\sqrt{2px}$).

Лемма. Уравнение касательной к параболе $y^2 = 2px$ в точке $M(x_0, y_0)$ имеет вид

$$yy_0 = p(x - x_0)$$

Доказательство леммы. Известно уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке (x_0, y_0)

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \qquad (1)$$

В нашем случае $f(x) = \sqrt{2px}$, так как точка $M(x_0, y_0)$ падения взята на верхней ветви параболы. Находим производную

$$f'(x_0) = \frac{p}{\sqrt{2px_0}} = \frac{p}{y_0}$$

и подставляем в (1). Получаем

$$y - y_0 = \frac{p}{y_0}(x - x_0)$$

Умножаем обе части этого равенства на y_0 и используем соотношение $y_0 = 2px_0$. Тогда уравнение касательной к параболе примет вид

$$yy_0 = p(x - x_0) \qquad (2)$$

Лемма доказана.

Убедимся, что

$$\cos\left(\widehat{\boldsymbol{n}, \boldsymbol{MF}}\right) = \cos(\widehat{\boldsymbol{n}. \boldsymbol{\imath}}) \quad (3)$$

Из леммы следует, что

$$\boldsymbol{n} = p\boldsymbol{i} - y_0\boldsymbol{j}$$

Вектор $\boldsymbol{MF}$ находим, зная координаты конца и начала

$$\boldsymbol{MF} = \left(\frac{p}{2} - x_0\right)\boldsymbol{i} - y_0\boldsymbol{j}$$

Поэтому

$$\cos\left(\widehat{\boldsymbol{n}, \boldsymbol{MF}}\right) = \frac{\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{MF}}{|\boldsymbol{n}| \cdot |\boldsymbol{MF}|} = \frac{\frac{p^2}{2} - px_0 + y_0^2}{|\boldsymbol{n}|\sqrt{\left(\frac{p}{2} - x_0\right)^2 + y_0^2}} = \frac{p\left(\frac{p}{2} + x_0\right)}{|\boldsymbol{n}|\left(\frac{p}{2} + x_0\right)} = \frac{p}{|\boldsymbol{n}|}$$

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{n}, \boldsymbol{\imath}}) = \frac{\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{i}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{i}|} = \frac{p}{|\boldsymbol{n}|}$$

Равенство (3) проверено. Значит, отражённый луч пойдёт по прямой, параллельной оси параболы.

Оптическое свойство параболы доказано.

§ 6. Классификация кривых 2-го порядка

Пусть на плоскости задана некоторая линия (l) и прямоугольная декартова СК Oxy.

Определение. Линия (l) называется кривой 2-го порядка, если её уравнение имеет вид

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \qquad (1)$$

где хоть одно из чисел A, B, C не равно нулю.

(1) называется общим алгебраическим уравнением 2-ой степени с двумя неизвестными.

Замечание. Можно проверить, что это определение корректно, то есть при переходе к другой прямоугольной декартовой СК уравнение кривой хоть и меняется, но остаётся общим алгебраическим уравнением 2-ой степени с двумя неизвестными. В этом параграфе мы опишем все возможные кривые 2-го порядка. Сделаем это следующим образом.

Ясно, что линия, как множество точек на плоскости, не меняется при выборе другой системы координат. Зато меняется её уравнение. Проследим, как это происходит.

Если в СК Oxy точка M, лежащая на линии (l), имеет координаты x, y, удовлетворяющие (1), а в СК $O_1x_1y_1$ та же точка M имеет координаты x_1, y_1, то всегда можно выразить x и y через x_1 и y_1 по формулам (7) § 1 гл.3. Подставив эти выражения в (1), получим зависимость, связывающую координаты x_1, y_1, то есть получим уравнение линии (l) в новой СК $O_1x_1y_1$.

При этом чаще всего в качестве новой СК берём прямоугольную декартову СК, так как лучше всего нами изучены уравнения кривых именно в таких системах координат.

Пример.

Кривая (l) задана уравнением

$$xy = 1 \quad (2)$$

в декартовой прямоугольной СК. Найти уравнение этой кривой в СК, полученной поворотом исходной СК на 45° без изменения начала отсчёта.

Решение. По формулам (4) § 1 гл.3 имеем

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}y_1 \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}y_1 \end{cases}$$

Подставим эти выражения в (1), получим

$$x_1^2 - y_1^2 = 2$$

Делим обе части исследуемого уравнения на 2

$$\frac{x_1^2}{2} - \frac{y_1^2}{2} = 1 \qquad (3)$$

Получили искомое уравнение (l) в новой СК Ox_1y_1. Уравнение (3) – это каноническое уравнение гиперболы с полуосями $a = b = \sqrt{2}$ и асимптотами $y_1 = \pm x_1$ (см. рис.1).

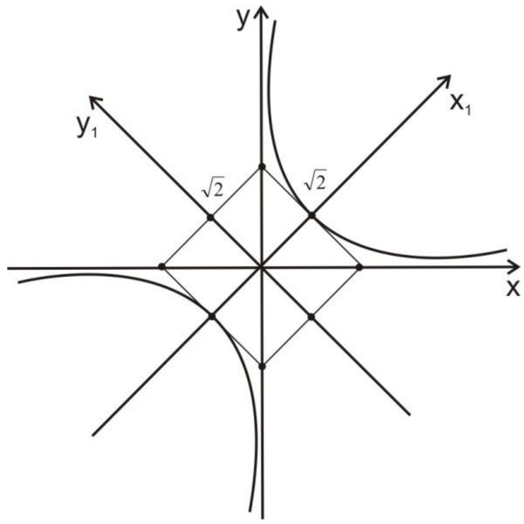


Рис.1. Гипербола, заданная уравнением (2)

Асимптота $y_1 = x_1$ (соответственно $y_1 = -x_1$) – это прямая с уравнением $x = 0$ (соответственно, $y = 0$). Значит, асимптоты гиперболы (l) совпадают с осями исходной системы координат.

Замечание. Из уравнения $xy = 1$ выразим y через x:

$$y = \frac{1}{x}$$

График этой функции — школьная гипербола.

Наша цель — так подобрать новую прямоугольную декартову СК, чтобы новое уравнение линии (l) имело как можно более простой вид.

Лемма. Если в уравнении (1) линии (l) коэффициент при произведении неизвестных отличен от нуля, то, повернув оси координат на подходящий угол, получим новое уравнение линии (l), в котором коэффициент при произведении x_1y_1 новых неизвестных равен нулю.

Доказательство. Известно, что при повороте прямоугольной декартовой СК на угол α, старые координаты точки x, y заменяются на новые координаты x_1, y_1 (см.(4) § 1 гл. 3) так, что

$$\begin{aligned} x &= x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha \\ y &= x_1\sin\alpha + y_1\cos\alpha \end{aligned} \qquad (4)$$

В $n°1$ § 3 гл. 5 доказано, что всегда существует угол поворота α такой, что замена переменных по формуле (4) приводит к требуемому результату. Лемма доказана.

Пример. Кривая (l) задана уравнением

$$x^2 + xy + y^2 = 1 \qquad (5)$$

Повернув СК Oxy на подходящий угол, освободиться от слагаемого с произведением переменных.

Решение. Сделаем в (5) замену переменных по формулам (4). Получим (см. § 3 гл. 5).

$$(x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha)^2 + (x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha)(x_1\sin\alpha + y_1\cos\alpha) +$$
$$+(x_1\sin\alpha + y_1\cos\alpha)^2 = 1$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получим

$$((\cos\alpha)^2 + \cos\alpha\sin\alpha + (\sin\alpha)^2)x_1^2 + ((\cos\alpha)^2 - (\sin\alpha)^2)x_1y_1 +$$
$$+((\sin\alpha)^2 - \sin\alpha\cos\alpha + (\cos\alpha)^2)y_1^2 = 1$$
$$(1 + \cos\alpha\sin\alpha)x_1^2 + x_1y_1\cos2\alpha + (1 - \sin\alpha\cos\alpha)y_1^2 = 1$$

Приравняем к нулю коэффициент при x_1y_1:

$$\cos2\alpha = 0$$

Все решения этого уравнения даны формулой

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k \ \ , k\epsilon Z$$

Выбрав $\alpha = -\frac{\pi}{4}$, получим уравнение (l) в СК Ox_1y_1

$$\tfrac{1}{2}x_1^2 + \tfrac{3}{2}y_1^2 = 1 \qquad (6)$$

(6) – каноническое уравнение эллипса с полуосями $a = \sqrt{2}$; $b = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Поэтому (l) – эллипс (см. рис. 2).

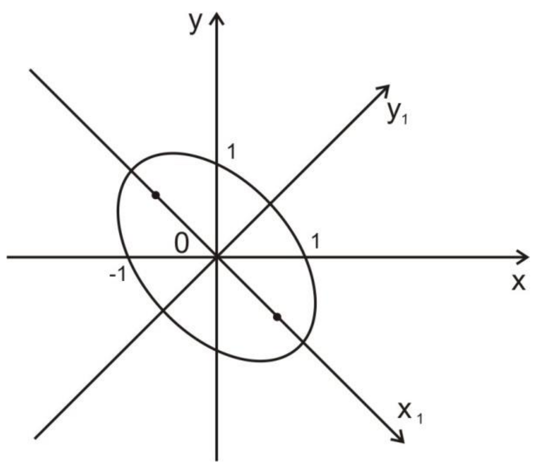


Рис.2. Эллипс, заданный уравнением (5)

Как в разобранном примере, так и в общем случае уравнения (1), повернём оси системы координат Oxy на такой угол α, чтобы уравнение (l) в новой СК приобрело вид

$$A_1x_1^2 + C_1y_1^2 + D_1x_1 + E_1y_1 + F = 0 \qquad (7)$$

Дальше разберём несколько случаев.

1. Оба коэффициента при квадратах в (7) отличны от нуля и являются

числами одного знака

$$A_1 \neq 0\,, C_1 \neq 0$$

Можно считать, что $A_1 > 0\,, C_1 > 0$

(В противном случае умножим обе части уравнения (7) на (-1)).

Выделим полные квадраты по переменным x_1 и y_1 в левой части (7).

$$A_1\left(x_1 + \frac{D_1}{2A_1}\right)^2 + C_1\left(y_1 + \frac{E_1}{2C_1}\right)^2 + F_1 = 0, \qquad (8)$$

где обозначено $F_1 = F - \frac{D_1^2}{4A_1} - \frac{E_1}{4C_1}$.

Обозначим

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + \frac{D_1}{2A_1} \\ y_2 = y_1 + \frac{E_1}{2C_1} \end{cases} \qquad (9)$$

В этих обозначениях уравнение (8) принимает вид

$$A_1 x_2^2 + C_1 y_2^2 + F_1 = 0 \qquad (10)$$

Уравнение (10) является уравнением линии (l) в СК $O_1 x_2 y_2$, получающейся параллельным переносом СК Ox_1y_1 в точку $O_1\left(-\frac{D_1}{2A_1}, -\frac{E_1}{2C_1}\right)$.

Разберём различные случаи.

а) Если $F_1 > 0$, то любая пара чисел (x_2, y_2), будучи подставлена в (10), даёт

$$A_1 x_2^2 + C_1 y_2^2 + F_1 > 0$$

Таким образом, в этом случае на плоскости нет точек, координаты которых удовлетворяют (10). Говорят, что (l) – это пустое множество.

б) Если в (10) $F_1 = 0$, то единственным решением уравнения

$$A_1 x_2^2 + C_1 y_2^2 = 0 \qquad (11)$$

является пара $x_2 = 0$; $y_2 = 0$. Следовательно, на плоскости существует единственная точка, координаты которой удовлетворяют (11). Значит, в этом случае линия (l) состоит из одной точки.

в) пусть в (10) $F_1 < 0$. Имеем $F_1 = -|F_1|$

Перенесём F_1 в правую часть и поделим на $|F_1|$. Получим

$$\frac{A_1}{|F_1|} x_2^2 + \frac{C_1}{|F_1|} y_2^2 = 1 \qquad (12)$$

(12) – это каноническое уравнение эллипса при $\frac{|F_1|}{A_1} > \frac{|F_1|}{C_1}$ (см. рис.3а).

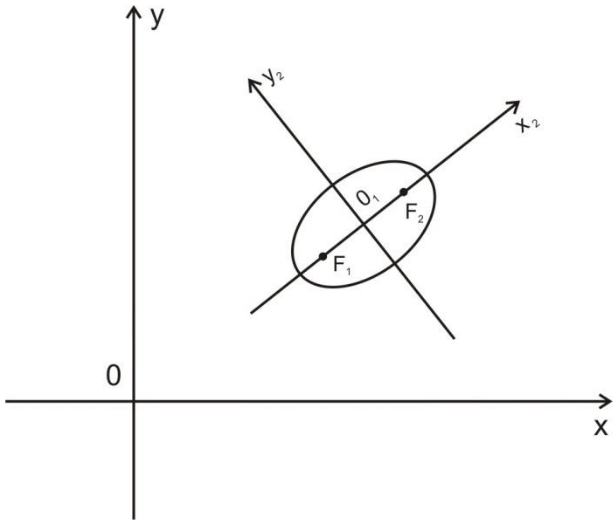


Рис.3а. Эллипс с фокусами на оси O_1x_2

При $A_1 = C_1$ уравнение (12) задаёт окружность.

При $\frac{|F_1|}{A_1} < \frac{|F_1|}{C_1}$ – уравнение (12) задаёт эллипс, большая полуось которого лежит на оси Oy_2. Фокусы такого эллипса лежат на оси O_1y_2 (см. рис.3б).

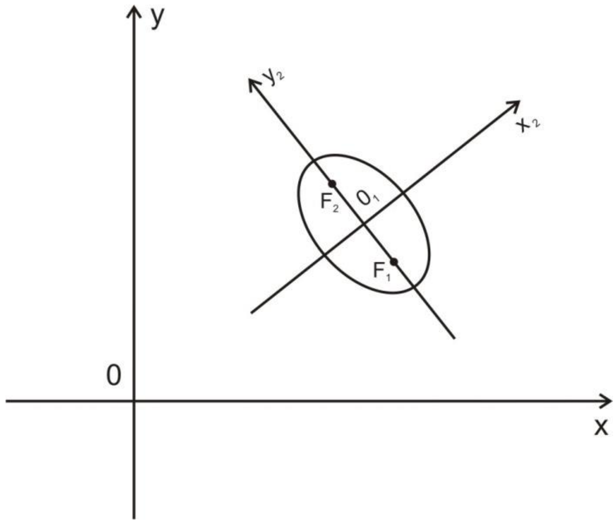


Рис.3б. Эллипс с фокусами на оси O_1y_2

г) Оба коэффициента при квадратах в (7) отличны от нуля и являются числами разных знаков: $A_1 \neq 0\,, C_1 \neq 0$.

Можно считать, что $A_1 > 0;\ C_1 < 0$.

Как в предыдущем случае, сделаем сдвиг СК в точку $O_1\left(-\frac{D_1}{2A_1}; -\frac{E_1}{2C_1}\right)$. В новой СК $O_1x_2y_2$ линия (l) имеет уравнение (10), где $C_1 < 0$. Имеем $C_1 = -|C_1|$

Поэтому (10) перепишем в виде

$$A_1x_2^2 - |C_1|y_2^2 + F_1 = 0. \quad (13)$$

Разберём различные случаи.

а) Если $F_1 = 0$, то левую часть уравнения (13) можно разложить на множители

$$\left(\sqrt{A_1}x_2 - \sqrt{|C_1|}y_2\right)\left(\sqrt{A_1}x_2 + \sqrt{|C_1|}y_2\right) = 0.$$

Отсюда $y_2 = \pm\sqrt{\frac{A_1}{|C_1|}}x_2$.

То есть кривая 2-го порядка (l) является объединением двух пересекающихся прямых (см. рис.4а).

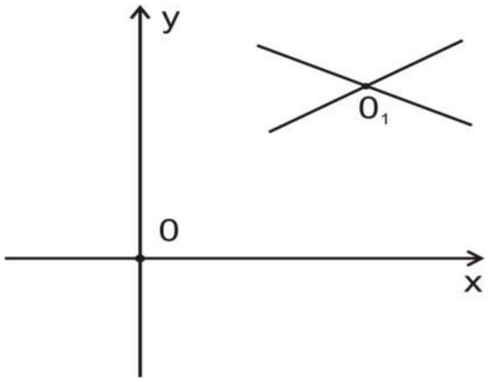


Рис.4а. Объединение двух пересекающихся прямых

б) Если $F_1 < 0$, то $F_1 = -|F_1|$. Перенесём F_1 в правую часть уравнения (13) и поделим обе части на $|F_1|$. Получим

$$\frac{A_1}{|F_1|}x_2^2 - \frac{|C_1|}{|F_1|}y_2^2 = 1$$

Это каноническое уравнение гиперболы с полуосями $a = \sqrt{\frac{|F_1|}{A_1}}$; $b = \sqrt{\frac{|F_1|}{|C_1|}}$. Значит, (l) – это гипербола (см. рис. 4б).

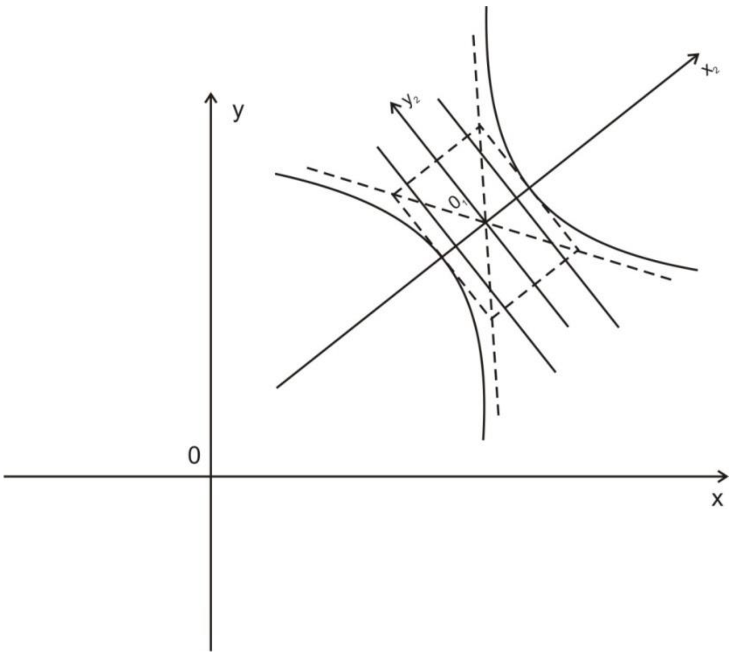


Рис.4б. Гипербола с фокусами на оси O_1x_2

в) Если $F_1 > 0$, то(13) равносильно

$$\frac{|C_1|}{F_1}y_2^2 - \frac{A_1}{F_1}x_2^2 = 1 \qquad (14)$$

Следовательно, (l) – это гипербола, фокусы которой лежат на оси O_1y_2 (см. рис.4в).

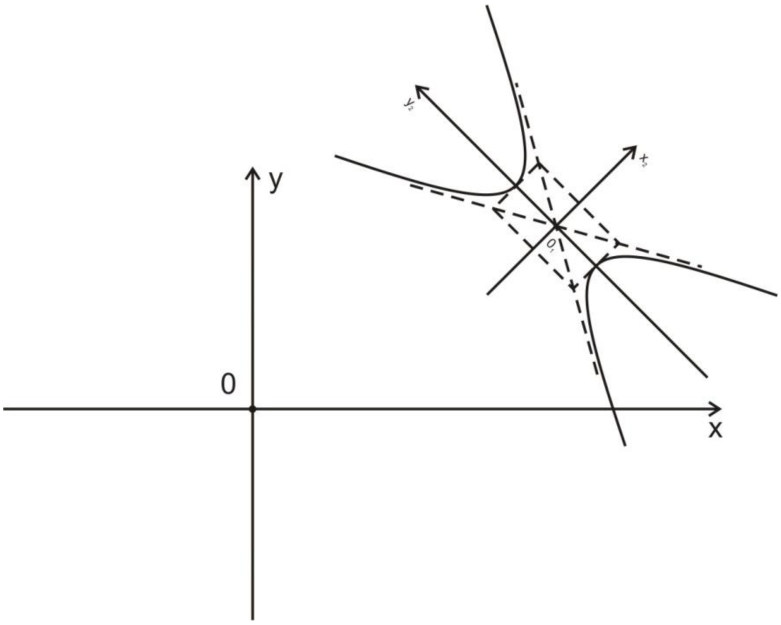


Рис.4в. Гипербола с фокусами на оси O_1y_2

3) Один из коэффициентов A_1 или C_1 уравнения (7) равен нулю, а другой отличен от нуля.

Допустим, $A_1 = 0, C_1 \neq 0$.

Тогда уравнение (7) имеет вид

$$C_1y_1^2 + D_1x_1 + E_1y_1 + F = 0 \qquad (15)$$

Выделим полный квадрат по переменной y_1, получим

$$C_1\left(y_1 + \frac{E_1}{2C_1}\right)^2 + D_1x_1 + F_1 = 0, \qquad (16)$$

где обозначено $F_1 = F - \frac{E_1^2}{4C_1}$.

Если $D_1 \neq 0$, то обозначим

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + \frac{F_1}{D_1} \\ y_2 = y_1 + \frac{E_1}{2C_1} \end{cases} \qquad (17)$$

В этих обозначениях уравнение (16) имеет вид

$$C_1y_2^2 + D_1x_2 = 0 \qquad (18)$$

Замена переменных по формулам (17) означает, что на плоскости выбрана СК

$O_1x_2y_2$, полученная параллельным сдвигом СК Ox_1y_1 в точку $O_1\left(-\frac{F_1}{D_1};-\frac{E_1}{2C_1}\right)$. Таким образом, в СК $O_1x_2y_2$ уравнение (l) имеет вид

$$y_2^2=-\frac{D_1}{C_1}x_2 \qquad (19)$$

(получено из (18) очевидным образом).

Если $-\frac{D_1}{C_1}>0$, то (19) – каноническое уравнение параболы и, следовательно, (l) – это парабола (см. рис. 5а).

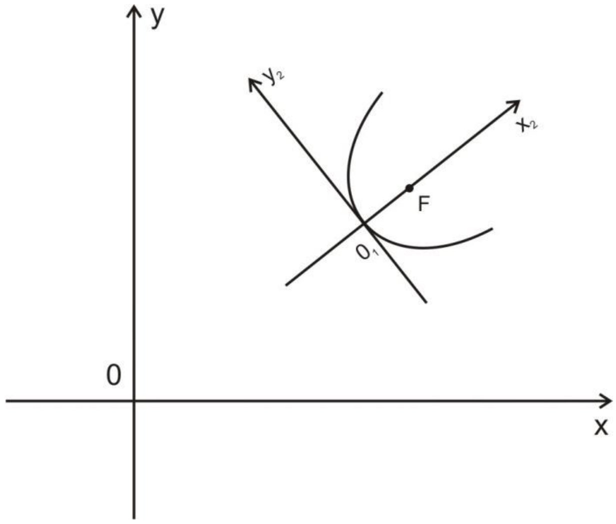


Рис.5а. Парабола с фокусом на оси O_1x_2 , лежащим справа от точки O_1

Если $-\frac{D_1}{C_1}<0$, то (19) запишем в виде

$$y_2^2=-2px_2 \qquad (20)$$

Значит, (l) –это парабола, фокус которой лежит на оси O_1x_2 слева от точки O_1 (см. рис. 5б).

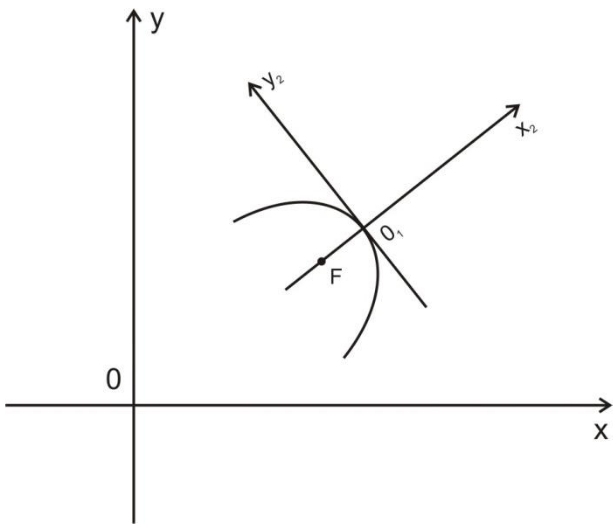


Рис.5б. Парабола с фокусом на оси O_1x_2, лежащим слева от точки O_1

Если в уравнении (16) $D_1 = 0$, то (16) примет вид

$$C_1\left(y_1 + \frac{E_1}{2C_1}\right)^2 + F_1 = 0 \qquad (21)$$

Если в (21) $F_1 = 0$, то получим

$$y_1 + \frac{E_1}{2C_1} = 0 \qquad (22)$$

Таким образом, линия (l) – это прямая, параллельная оси Ox_1 (см. рис. 6а).

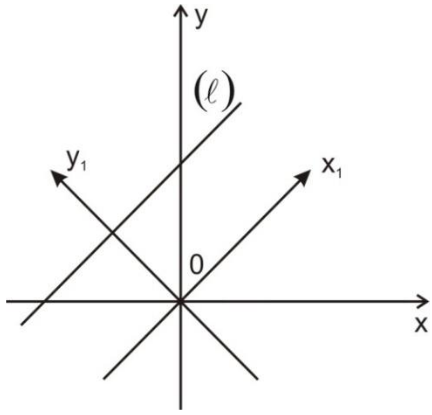


Рис.6а. Прямая, параллельная «новой» оси абсцисс

Если в (21) число $\frac{F_1}{C_1}$ положительно, то кривая (l) – это пустое множество.

Если в (21) число $\frac{F_1}{C_1}$ отрицательно, то

$$\frac{F_1}{C_1} = -\left|\frac{F_1}{C_1}\right|$$

И (21) запишем в виде

$$\left(y_1 + \frac{E_1}{2C_1}\right)^2 - \left|\frac{F_1}{C_1}\right| = 0 \qquad (23)$$

Левая часть (23) раскладывается на множители

$$(y_1 + a_1)(y_1 + a_2) = 0,$$

где обозначено

$$a_1 = \frac{E_1}{2C_1} + \sqrt{\left|\frac{F_1}{C_1}\right|};\;\; a_2 = \frac{E_1}{2C_1} - \sqrt{\left|\frac{F_1}{C_1}\right|}$$

Поэтому кривая (l) – это пара параллельных прямых $(l_1), (l_2)$ (см. рис.6б).

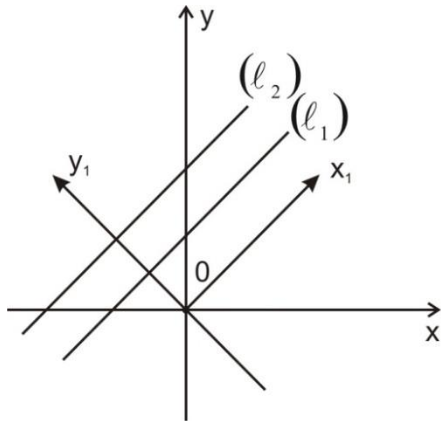


Рис.6б. Пара прямых, параллельных «новой» оси абсцисс

Мы доказали следующую теорему:

Теорема (классификация кривых 2-го порядка).

Кривая 2-го порядка — это любая кривая из следующего списка:

1. Эллипс или окружность
2. Гипербола
3. Парабола
4. Пара пересекающихся прямых
5. Пара параллельных прямых
6. Одна прямая
7. Одна точка
8. Пустое множество.

Пример 1. С помощью поворота и параллельного переноса системы координат привести данные уравнения к каноническому виду. Определить вид кривых, задаваемых данными уравнениями.

1) $14x^2 + 24xy + 21y^2 - 4x + 18y - 139 = 0$

2) $7x^2 + 60xy + 32y^2 - 14x - 60y + 7 = 0$

Решение. 1). Обозначим (Γ_1) кривую на плоскости Oxy, имеющую уравнение

$$14x^2 + 24xy + 21y^2 - 4x + 18y - 139 = 0 \quad (24)$$

Найдём угол α, на который надо повернуть СК Oxy для того, чтобы в новых координатах коэффициент при произведении x_1y_1 в преобразованном уравнении равнялся нулю.

Пусть (см. (4) § 1 гл. 3).

$$x = x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha$$
$$y = x_1\sin\alpha + y_1\cos\alpha$$

Подставим эти выражения для x, y в уравнение (24). Получим новое уравнение для x_1, y_1:

$$a_1x_1^2 + b_1x_1y_1 + c_1y_1^2 + d_1x_1 + e_1y_1 - 139 = 0, \quad (25)$$

где

$$a_1 = 14(\cos\alpha)^2 + 24\cos\alpha\sin\alpha + 21(\sin\alpha)^2$$
$$b_1 = 14\sin\alpha\cos\alpha + 24((\cos\alpha)^2 - (\sin\alpha)^2)$$
$$c_1 = 14(\sin\alpha)^2 - 24\cos\alpha\sin\alpha + 21(\cos\alpha)^2 \qquad (26)$$
$$d_1 = -4\cos\alpha + 18sin\alpha$$
$$e_1 = 4\sin\alpha + 18\cos\alpha$$

Мы найдём угол α, решив уравнение $b_1 = 0$ или

$$14\sin\alpha\cos\alpha + 24(\cos\alpha)^2 - 24(\sin\alpha)^2 = 0$$

Поделив обе части на $(-24(\cos\alpha)^2)$ и обозначая $t = \mathrm{tg}\alpha$, получим равносильное уравнение

$$t^2 - \frac{7}{12}t - 1 = 0.$$

Отсюда $t_1 = \frac{4}{3}$; $t_2 = -\frac{3}{4}$.

Выбираем острый угол α так, чтобы $\mathrm{tg}\alpha = \frac{4}{3}$. (Заметим, что в § 3 гл5 при доказательстве Утверждения 1 находили нужный угол из уравнения $b_1 = 0$, переходя к двойному углу. Однако при решении конкретных задач предпочтительнее находить этот угол, решая квадратное уравнение.)

Используем формулу $1 + (\mathrm{tg}\alpha)^2 = \frac{1}{(\cos\alpha)^2}$. Отсюда

$\cos\alpha = \frac{3}{5}$ и $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, так как угол α – острый. Теперь из формул (26) находим новое уравнение кривой (Γ_1) в координатах x_1, y_1.

$$30x_1^2 + 5y_1^2 + 12x_1 + 14y_1 - 139 = 0$$

Теперь выделяем полные квадраты отдельно по каждой из переменных x_1, y_1:

$$30\left(\left(x_1^2 + \frac{2}{5}x_1 + \frac{1}{25}\right) - \frac{1}{25}\right) + 5\left(\left(y_1^2 + \frac{14}{5}y_1 + \frac{49}{25}\right) - \frac{49}{25}\right) - 139 = 0 \text{ или}$$

$$30\left(x_1 + \frac{1}{5}\right)^2 + 5\left(y_1 + \frac{7}{5}\right)^2 = 150 \qquad (27)$$

Сделаем теперь параллельный перенос СК Ox_1y_1 в точку $O_1\left(-\frac{1}{5}; -\frac{7}{5}\right)$. получим СК $O_1x_2y_2$. Формулы для пересчёта координат из системы Ox_1y_1 в систему $O_1x_2y_2$ имеют вид

$$x_2 = x_1 + \frac{1}{5}$$
$$y_2 = y_1 + \frac{7}{5}$$

Следовательно, уравнение кривой (Γ_1) в СК $O_1x_2y_2$ имеет вид

$$\frac{x_2^2}{5} + \frac{y_2^2}{30} = 1 \qquad (28)$$

Это пока не каноническое уравнение эллипса, так как большая полуось не расположена на оси абсцисс. Повернём оси координат $O_1x_2y_2$ на 90°. Получим

СК $O_1x_3y_3$. Тогда координаты меняются по формулам

$$\begin{cases} x_2 = -y_3 \\ y_2 = x_3 \end{cases},$$

поэтому уравнение (28) примет вид

$$\frac{x_3^2}{30} + \frac{y_3^2}{5} = 1 \qquad (29)$$

Итак, в СК $O_1x_3y_3$ кривая (Γ_1) имеет уравнение (29). Это каноническое уравнение эллипса (большая полуось расположена на оси абсцисс). Значит, (Γ_1) – это эллипс с полуосями $a = \sqrt{30}$; $b = \sqrt{5}$.

Окончательно, координаты x, y связаны с координатами x_3, y_3 формулами

$$\begin{cases} x = \left(-y_3 - \frac{1}{5}\right)\frac{3}{5} - \left(x_3 - \frac{7}{5}\right)\frac{4}{5} \\ y = \left(-y_3 - \frac{1}{5}\right)\frac{4}{5} + \left(x_3 - \frac{7}{5}\right)\frac{3}{5} \end{cases}$$

2) Обозначим (Γ_2) кривую на плоскости, имеющую уравнение

$$7x^2 + 60xy + 32y^2 - 14x - 60y + 7 = 0$$

Следуем тому же плану, что и при решении примера 1). Сделав в данном уравнении замену переменных по формулам (4) § 1 гл. 3, получим уравнение для $x_1,\ y_1$ вида (25) с коэффициентами

$$\begin{gathered} a_1 = 7(\cos\alpha)^2 + 60\cos\alpha\sin\alpha + 32(\sin\alpha)^2 \\ b_1 = 50\sin\alpha\cos\alpha + 60(\cos\alpha)^2 - 60(\sin\alpha)^2 \\ c_1 = 7(\sin\alpha)^2 - 60\sin\alpha\cos\alpha + 32(\cos\alpha)^2 \qquad (30) \\ d_1 = -14\cos\alpha - 60\sin\alpha \\ e_1 = 14\sin\alpha - 60\cos\alpha \end{gathered}$$

Выберем угол α так, чтобы коэффициент b_1 при x_1y_1 равнялся нулю. Для этого решим уравнение $b_1 = 0$ или $50\sin\alpha\cos\alpha + 60(\cos\alpha)^2 - 60(\sin\alpha)^2 = 0$

Делим обе части на $(-60(\cos\alpha)^2)$ и обозначим $t = \mathrm{tg}\alpha$. Получим уравнение

$$t^2 - \frac{5}{6}t - 1 = 0$$

Отсюда $t_1 = \frac{3}{2}; t_2 = -\frac{2}{3}$. Выберем острый угол α так, чтобы $\mathrm{tg}\alpha = \frac{3}{2}$. Отсюда по формуле $1 + (\mathrm{tg}\alpha)^2 = \frac{1}{(\cos\alpha)^2}$ находим $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$ и, следовательно, $\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$ (так как угол α – острый).

При найденном значении α уравнение кривой (Γ_2) в СК Ox_1y_1 имеет вид

$$52x_1^2 - 13y_1^2 - \frac{208}{\sqrt{13}}x_1 - \frac{78}{\sqrt{13}}y_1 + 7 = 0 \qquad (31)$$

Теперь выделим полные квадраты отдельно по каждой переменной в левой части уравнения (31)

$$52\left(\left(x_1^2-\frac{4}{\sqrt{13}}x_1+\frac{4}{13}\right)-\frac{4}{13}\right)-13\left(\left(y_1^2+\frac{6}{\sqrt{13}}y_1+\frac{9}{13}\right)-\frac{9}{13}\right)+7=0 \quad \text{или}$$

$$52\left(x_1-\frac{2}{\sqrt{13}}\right)^2-13\left(y_1+\frac{3}{\sqrt{13}}\right)^2=0 \qquad (32)$$

Сделаем теперь параллельный перенос СК Ox_1y_1 в точку $O_1\left(\frac{2}{\sqrt{13}};-\frac{3}{\sqrt{13}}\right)$. Получим СК $O_1x_2y_2$. Формулы для пересчёта координат из СК Ox_1y_1в СК $O_1x_2y_2$ имеют вид

$$\begin{cases} x_2=x_1-\dfrac{2}{\sqrt{13}} \\ y_2=y_1+\dfrac{3}{\sqrt{13}} \end{cases}$$

Следовательно, уравнение кривой (Γ_2) в СК $O_1x_2y_2$ имеет вид

$$4x_2^2-y_2^2=0 \quad \text{или} \quad (2x_2-y_2)(2x_2+y_2)=0.$$

Таким образом, (Γ_2) – это объединение двух пересекающихся прямых

$$y_2=2x_2 \ ; \ y_2=-2x_2.$$

Окончательно, координаты x, y связаны с координатами x_2, y_2формулами

$$\begin{cases} x=\left(x_2+\dfrac{2}{\sqrt{13}}\right)\dfrac{2}{\sqrt{13}}-\left(y_2-\dfrac{3}{\sqrt{13}}\right)\dfrac{3}{\sqrt{13}}=1+x_2\dfrac{2}{\sqrt{13}}-y_2\dfrac{3}{\sqrt{13}} \\ y=\left(x_2+\dfrac{2}{\sqrt{13}}\right)\dfrac{3}{\sqrt{13}}+\left(y_2-\dfrac{3}{\sqrt{13}}\right)\dfrac{2}{\sqrt{13}}=\dfrac{3}{\sqrt{13}}x_2+\dfrac{2}{\sqrt{13}}y_2 \end{cases}$$

§ 7. Поверхности 2-го порядка, заданные своими каноническими уравнениями. Метод сечений

В этом параграфе мы рассмотрим несколько различных алгебраических уравнений 2-ой степени от трёх переменных и изучим методом сечений форму поверхностей, определяемых этими уравнениями.

Метод сечений заключается в следующем. Пусть в пространстве дана прямоугольная декартова СК $Oxyz$ и задано уравнение $F(x,y,z)=0$ некоторой поверхности (S). Рассмотрим сечение (L) поверхности (S) плоскостью (π), параллельной плоскости Oxy на высоте $z=H$ (см. рис. 1).

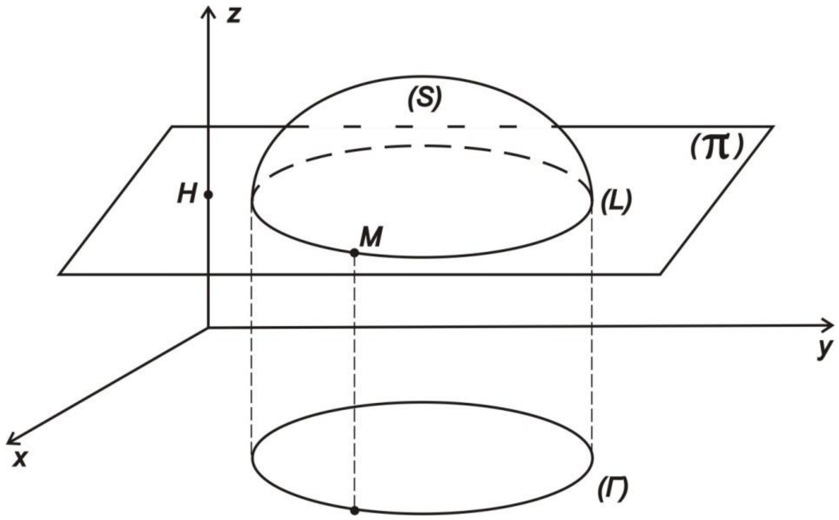


Рис.1. Сечение поверхности плоскостью, параллельной плоскости Oxy

Координаты (x, y, z) каждой точки M, лежащей на (L), являются решением системы

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ z = H \end{cases}, \qquad (1)$$

так как точка M принадлежит одновременно поверхности (S) с уравнением $F(x, y, z) = 0$ и плоскости (π) с уравнением $z = H$. Тогда, подставляя $z = H$ в первое уравнение, получим

$$\begin{cases} F(x, y, H) = 0 \\ z = H \end{cases} \qquad (2)$$

Уравнение $F(x, y, H) = 0$ задаёт на плоскости Oxy некоторую кривую (Г), которая получается проецированием кривой (L) на плоскость Oxy. В свою очередь, сечение (L) получается «подъёмом» кривой $(Г)$ в плоскость (π). Предположим, что известна форма кривой (Г) для любого возможного H. Тогда мы можем представить себе всю поверхность (S) «набранной» из различных сечений (L). При этом сечение располагается тем выше, чем большему значению H оно соответствует. Тем самым мы «собрали» поверхность из известных кривых и можем представить себе форму всей поверхности (S). Если этого окажется недостаточно, надо рассмотреть дополнительно сечения, параллельные Oyz и Oxz.

Применим метод сечений для нахождения формы поверхностей, заданных каноническими уравнениями.

1. *Эллипсоид.*

Рассмотрим уравнение эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (3)$$

где a, b, c - данные положительные числа.

Обозначим (S) – поверхность эллипсоида, заданную уравнением (3). Рассмотрим сечение (l) поверхности (S) плоскостью $z = H$. Если точка $M(x, y, z)$ лежит на сечении (l), то её координаты удовлетворяют одновременно уравнению (3) и уравнению $z = H$. Следовательно, для их (т.е. координат) нахождения надо решить систему

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ z = H \end{cases} \qquad (4)$$

Система (4) равносильна системе

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{H^2}{c^2} \\ z = H \end{cases} \qquad (5)$$

Ясно, что при $|H| > c$ первое уравнение системы (5) не имеет решения, так как сумма двух неотрицательных чисел не может быть отрицательным числом. Значит, поверхность эллипсоида (S) не имеет пересечения с горизонтальными плоскостями, расположенными выше $z = c$ и ниже $z = -c$.

При $H = c$ система (5) имеет два решения: $(0,0,c)$ и $(0,0,-c)$. Значит, точки с этими координатами лежат на поверхности эллипсоида.

При $-c < H < c$ первое уравнение системы (5) задаёт на плоскости Oxy эллипс

$$(\Gamma): \qquad \frac{x^2}{a^2\left(1 - \frac{H^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2\left(1 - \frac{H^2}{c^2}\right)} = 1$$

с полуосями $a\sqrt{1 - \frac{H^2}{c^2}}$, $b\sqrt{1 - \frac{H^2}{c^2}}$.

В частности, при $H = 0$ получаем, что сечение эллипсоида плоскостью Oxy является эллипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Чем выше мы берём сечение $z = H, 0 < H < c$ тем меньше становятся полуоси эллипсов. Наконец, при $H = c$, эти эллипсы вырождаются в точку (см. рис. 2).

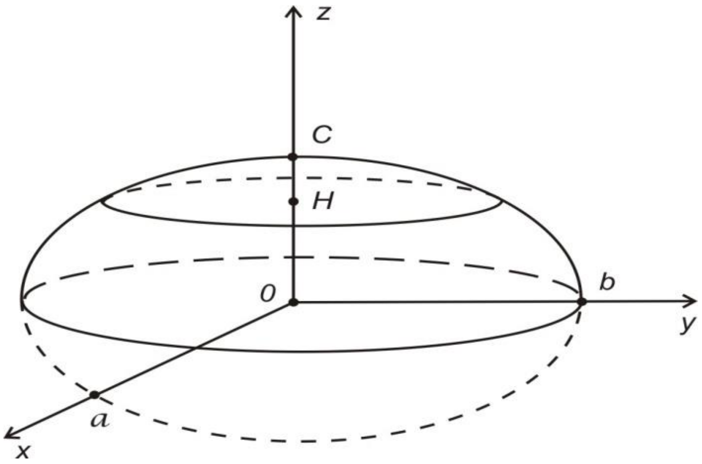


Рис.2. Эллипсоид

Аналогично получаются эллипсы в сечениях плоскостями $z = H$ при $-c < H < 0$ ниже плоскости Oxy. Сечения плоскостями $x = x_0$ и $y = y_0$ тоже являются эллипсами.

Эллипсоид изображён на рис.2.

2. *Однополостный гиперболоид*.

Рассмотрим уравнение однополостного гиперболоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (6)$$

a, b, c – положительные числа.

Применяя метод сечений, видим, что на любой высоте $z = H$ в сечении получается эллипс с полуосями $a\sqrt{1 + \frac{H^2}{c^2}}$, $b\sqrt{1 + \frac{H^2}{c^2}}$.

Эти полуоси тем больше, чем больше число $|H|$. Сечения плоскостями $x = 0$ и $y = 0$ – это гиперболы $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ и $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ соответственно.

Однополостный гиперболоид изображён на рис.3.

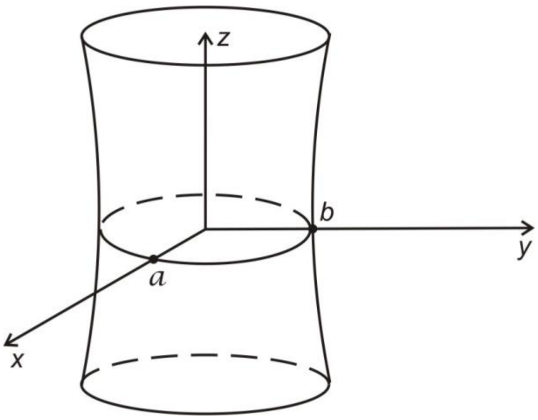


Рис.3.Однополостный гиперболоид

3. *Двуполостный гиперболоид.*

Рассмотрим уравнение двуполостного гиперболоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1, \qquad (7)$$

a, b, c – положительные числа.

Применяя метод сечений, видим, что плоскости $z=H$ при $-c<H<c$ не имеют общих точек с двуполостным гиперболоидом, а в сечениях плоскостями $z=H$ при $|H|\geq c$ получаются эллипсы с полуосями $a\sqrt{\frac{H^2}{c^2}-1}$, $b\sqrt{\frac{H^2}{c^2}-1}$.

Сечения двуполостного гиперболоида плоскостями $x=0, y=0$ – это гиперболы $\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ и $\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ соответственно. Двуполостный гиперболоид изображён на рис.4.

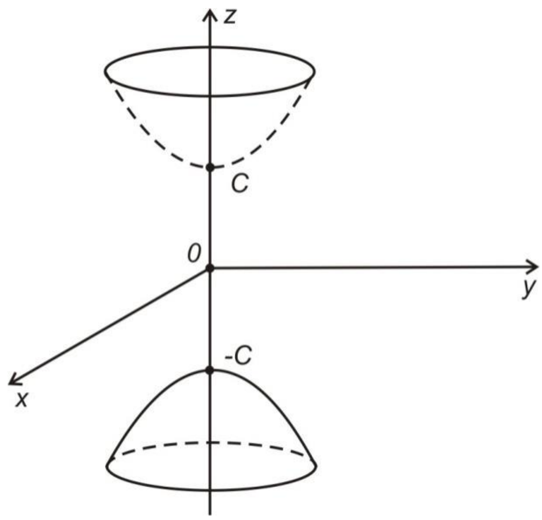


Рис.4.Двуполостный гиперболоид

4. *Конус (эллиптический).*

Рассмотрим уравнение конической поверхности

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}, \qquad (8)$$

где a, b, c –положительные числа.

Поверхность, задаваемая уравнением (8) изображена на рис.5.

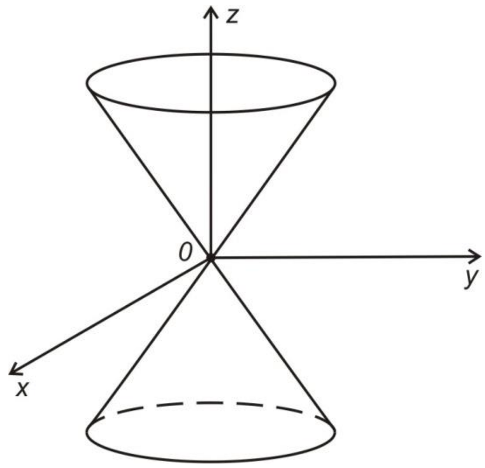


Рис.5. Конус (эллиптический)

Каждое сечение плоскостью $z = H$ при любом H является эллипсом с полуосями $\frac{a|H|}{c}$ и $\frac{b|H|}{c}$.

Сечения плоскостями $x = 0$ и $y = 0$ – это прямые $z = \pm\frac{c}{b}y$ и $z = \pm\frac{c}{a}x$ соответственно.

В частности, при $a = b$ получаем

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = \frac{z^2}{c^2} \qquad (9)$$

– уравнение прямого кругового конуса.

5. *Эллиптический параболоид*.

Уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}\ , \qquad (10)$$

a, b – положительные числа $c \neq 0$.

Уравнение (10) задаёт поверхность, которая называется эллиптическим параболоидом.

При $c > 0$ применение метода сечений даёт следующий результат:

а) плоскости $z = H$ при $H < 0$ не имеют с эллиптическим параболоидом общих точек (т.к. уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{H}{c}$ не имеет решений при $H < 0$),

б) плоскость $z = 0$ имеет с ним одну общую точку $O(0,0,0)$,

в) плоскость $z = H$ при $H > 0$ пересекается с эллиптическим параболоидом по эллипсу

$$\frac{x^2}{a^2 H/_c} + \frac{y^2}{b^2 H/_c} = 1,$$

полуоси которого тем больше, чем выше расположена секущая плоскость,

г) плоскости $x = 0$ и $y = 0$ пересекают поверхность эллиптического параболоида по параболам $y^2 = \frac{b^2}{c} z$ и $x^2 = \frac{a^2}{c} z$ соответственно. Эллиптический параболоид при $c > 0$ изображён на рис.6а.

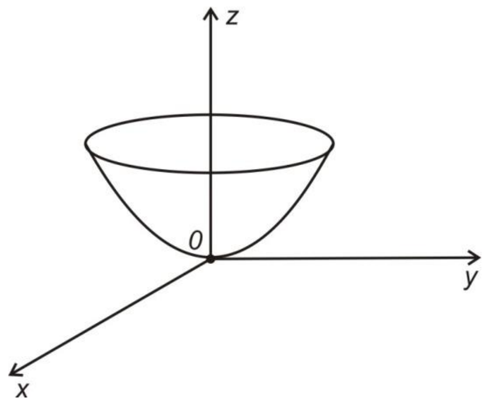


Рис.6а. Эллиптический параболоид при $c > 0$

При $c < 0$ рассуждаем аналогично. Эллиптический параболоид при $c < 0$ изображён на рис.6б.

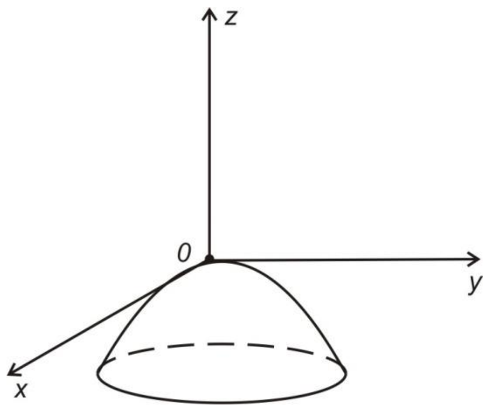


Рис.6б. Эллиптический параболоид при $c < 0$

6. *Гиперболический параболоид*.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c} \qquad (11)$$

где a, b – положительные числа, $c \neq 0$.

Уравнение (11) задаёт поверхность, называемую гиперболическим параболоидом.

При $c > 0$ гиперболический параболоид изображён на рис.7 и похож на седло.

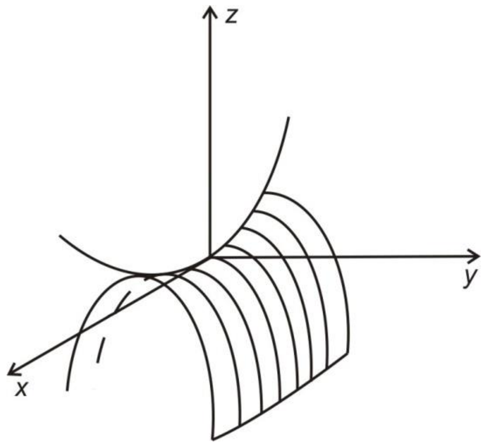


Рис.7. Гиперболический параболоид при $c > 0$

Чтобы получить гиперболический параболоид при $c < 0$, надо поверхность на рис.7 отразить симметрично относительно плоскости Oxy. Докажем, применяя метод сечений, что гиперболический параболоид получается скольжением одной параболы по другой параболе.

Пусть точка $M(x_0, y_0 z_0)$ – любая точка на поверхности гиперболического параболоида (см. рис. 7). Проведём через неё секущую плоскость $x = x_0$. В сечении получим кривую

$$(L)\ :\ \begin{cases} x = x_0 \\ \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z}{c} \end{cases}$$

Проекция (Г) этой кривой на плоскость Oyz задана уравнениями

$$(\Gamma):\ \begin{cases} x = 0 \\ \dfrac{x_0^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z}{c} \end{cases}$$

(Г) – это парабола, полученная сдвигом параболы

(Γ_0): $\begin{cases} x = 0 \\ \frac{z}{c} = -\frac{y^2}{b^2} \end{cases}$ вертикально вверх на $\frac{x_0^2}{a^2}$.

Таким образом, сечение (L) – это парабола, полученная параллельным переносом параболы (Γ_0). При этом вершина параболы (L) получена скольжением вершины параболы Γ_0 по параболе $\begin{cases} y = 0 \\ z = \frac{c}{a^2} x^2 \end{cases}$ (см. рис.8).

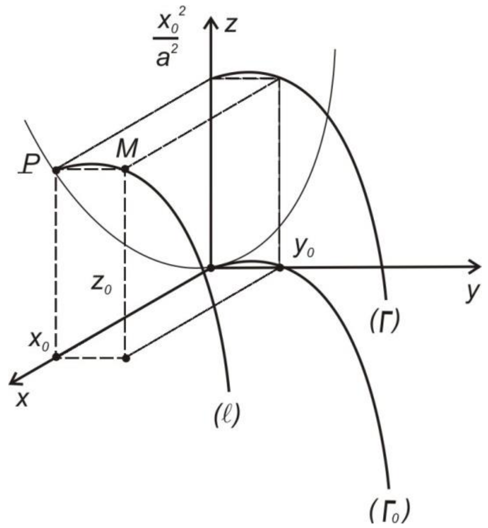


Рис.8. Гиперболический параболоид как результат скольжения одной параболы по другой параболе.

§ 8. Поверхности вращения. Цилиндрические поверхности. Примеры

В предыдущем параграфе нам было дано уравнение поверхности и мы научились, рассматривая различные сечения этой поверхности, изображать всю поверхность.

В этом параграфе мы изначально задаём каким-либо способом всю поверхность. Требуется найти уравнение этой поверхности.

n°1. Поверхности вращения

В пространстве задана прямоугольная декартова СК $Oxyz$. Допустим, что в плоскости Oxy задан график функции $y = f(x)$.

а) Рассмотрим поверхность, полученную вращением этого графика вокруг оси Ox. Требуется найти уравнение этой поверхности вращения. Действуем по определению уравнения поверхности (см. § 5 гл. 3). Пусть точка $M(x, y, z)$ принадлежит поверхности (см. рис. 1).

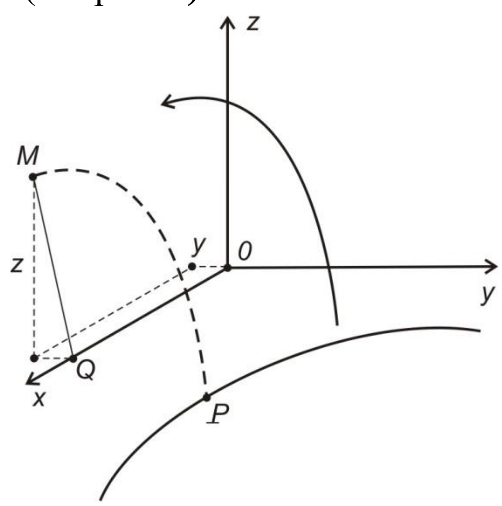


Рис.1. Поверхность вращения графика функции вокруг оси Ox

Тогда точка M обязательно получилась при вращении некоторой точки P, лежащей на графике и $|MQ| = |QP|$. Из рис.1 видно, что

$$|MQ| = \sqrt{y^2 + z^2}, \qquad |QP| = f(x)$$

(мы взяли график, лежащий в первой координатной четверти). Поэтому равенство$|MQ| = |QP|$ даёт соотношение между координатами x, y, z точки M.

$$f(x) = \sqrt{y^2 + z^2} \qquad (1)$$

Возводя обе части в квадрат, получим искомое уравнение

$$\left(f(x)\right)^2 = y^2 + z^2 \qquad (2)$$

б) Рассмотрим поверхность, полученную вращением данного графика вокруг оси Oy. Найдём уравнение полученной поверхности вращения.

Пусть точка $M(x, y, z)$ принадлежит поверхности (см. рис. 2).

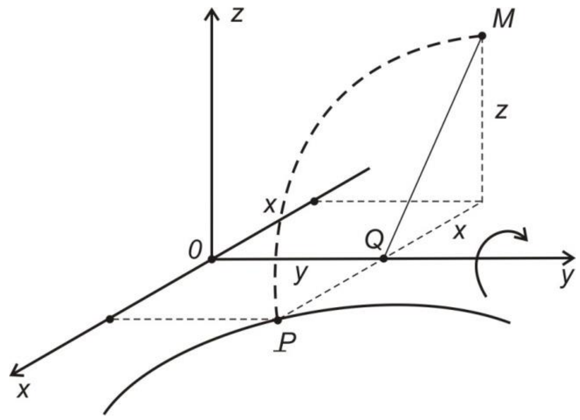


Рис.2. Поверхность вращения графика функции вокруг оси Oy

Тогда точка M обязательно «пришла» при вращении из некоторой точки P на графике и $|MQ| = |QP|$.

Из рис.2 видно, что $|MQ| = \sqrt{x^2 + z^2}$, $|PQ|$ – это абсцисса точки P (мы взяли график, лежащий в первой координатной четверти).

Следовательно, абсцисса x_P точки P равна $\sqrt{x^2 + z^2} = x_P$. Из рис.2 видно, что ордината точки P совпадает с ординатой точки M и равна $y_P = y$. Координаты x_P, y_P точки P, лежащей на графике, связаны соотношением $y_P = f(x_P)$. Поэтому получаем искомое уравнение

$$y = f\left(\sqrt{x^2 + z^2}\right) \qquad (3)$$

Замечание. Уравнения (1), (2), (3) получены в предположении, что исходный график функции $y = f(x)$ лежит в первой координатной четверти. В других случаях аналогичные рассуждения с необходимыми изменениями приводят к искомым уравнениям.

в) Допустим, что в плоскости Oxz задан график функции $z = f(x)$. Рассмотрим поверхность, полученную вращением этого графика вокруг оси Oz.

Найдём уравнение этой поверхности вращения.

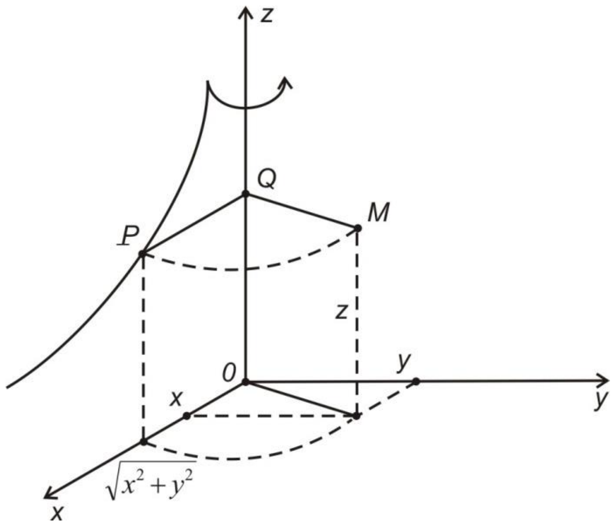


Рис.3. Поверхность вращения графика функции вокруг оси Oz

Пусть точка $M(x, y, z)$ принадлежит поверхности (см. рис.3). Тогда точка M «пришла» при вращении из некоторой точки P на графике и $|MQ| = |PQ|$. Из рис. 3 видно, что $|MQ| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $|PQ|$ – это абсцисса точки P. (Мы взяли график, лежащий в первой координатной четверти). Итак, абсцисса x_P точки P равна $x_P = \sqrt{x^2 + y^2}$. Аппликата z_P точки P совпадает с аппликатой точки M, следовательно $z_P = z$. Координаты x_P, z_P связаны соотношением $z_P = f(x_P)$, так как точка P лежит на графике. Итак, искомое уравнение имеет вид

$$z = f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) \qquad (4)$$

Примеры.

1. Эллипс $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ вращается вокруг а) оси Ox б) оси Oy. Найти уравнения полученных поверхностей вращения. Назвать эти поверхности.

Решение а) В данном случае $f(x) = 2\sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}$. По формуле (1)

$$2\sqrt{1 - \frac{x^2}{9}} = \sqrt{y^2 + z^2}$$

Возводя обе части в квадрат, получаем искомое уравнение: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1$.

Получили эллипсоид вращения.

б) По-прежнему имеем $f(x) = 2\sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}$.

По формуле (3) с учётом замечания, получаем $|y| = 2\sqrt{1-\frac{x^2+z^2}{9}}$.

Возводим обе части в квадрат, делим на 4 и переносим неизвестные в левую часть.

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$$

Полученная поверхность — это эллипсоид вращения.

2. Равнобочная гипербола $x^2 - z^2 = 1$ врашается вокруг оси Oz. Найти уравнение полученной поверхности и назвать эту поверхность.

Решение. $f(x) = \sqrt{x^2-1}$

По формуле (4) с учётом замечания

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2-1}$$

Возводим обе части в квадрат.

Окончательно получим уравнение

$$x^2+y^2-z^2=1$$

Значит, полученная поверхность — однополостный гиперболоид вращения.

n°2 Цилиндрические поверхности

Допустим, что в пространстве задана линия (l) и вектор $\boldsymbol{a}$. Поверхность, полученная движением вдоль (l) прямой, остающейся всё время параллельной вектору $\boldsymbol{a}$, называется цилиндрической поверхностью. При этом (l) называется направляющей, а все возможные прямые, параллельные движущейся, называются образующими цилиндрической поверхности (см. рис.4а, 4б, 4в).

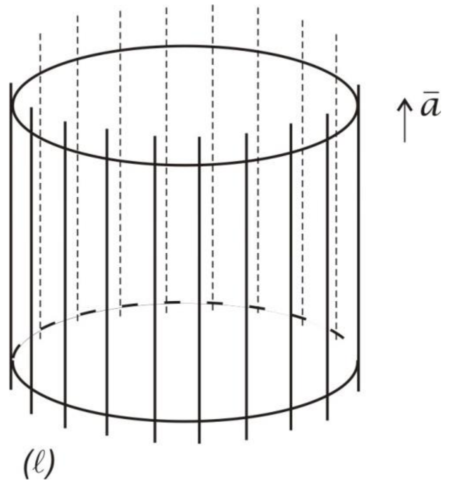
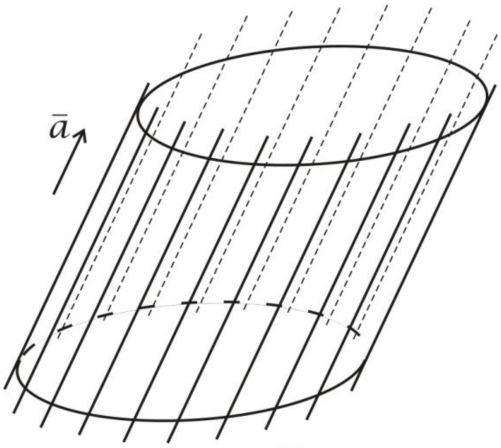
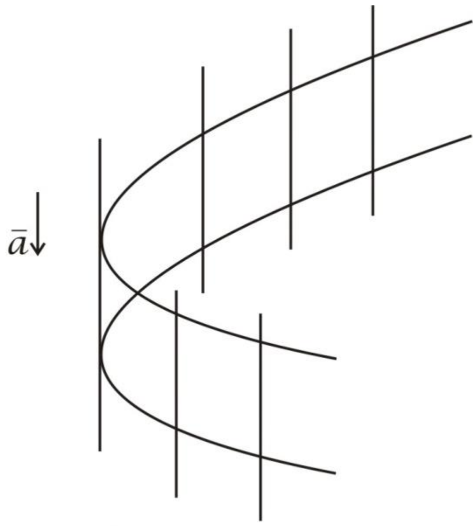


Рис.4а. Прямой круговой цилиндр



(ℓ)

Рис.4б. Наклонный круговой цилиндр.



(ℓ)

Рис.4в. Параболический цилиндр

Теорема. Пусть в пространстве задана прямоугольная декартова СК $Oxyz$ и (l) – линия, лежащая в плоскости Oxy. Рассмотрим цилиндрическую поверхность с направляющей (l), образующая которой параллельна оси Oz. Если (l): $\begin{cases} F(x,y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, где $F(x,y) = 0$ – уравнение линии (l) в плоскости Oxy, то $F(x,y) = 0$ – уравнение рассматриваемой цилиндрической поверхности.

Доказательство. Пусть точка $M(x_0, y_0, z_0)$ принадлежит цилиндрической поверхности (см. рис.5).

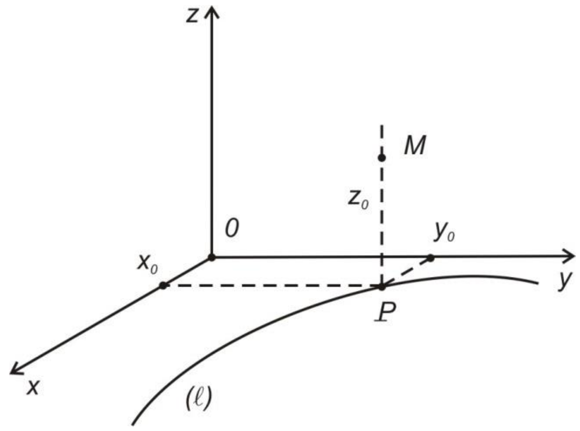


Рис.5. Вывод уравнения цилиндрической поверхности

Тогда точка M лежит на одной из образующих MP, которая параллельна оси Oz. Поэтому точка P, лежащая на (l), имеет координаты $P(x_0, y_0, 0)$. Но по условию $F(x,y) = 0$ – уравнение линии (l) в плоскости Oxy, значит, координаты точки P удовлетворяют этому уравнению: $F(x_0, y_0) = 0$.

Итак, координаты точки M, лежащей на цилиндре, удовлетворяют уравнению $F(x,y) = 0$.

Обратно, докажем, что если тройка чисел (x_0, y_0, z_0) удовлетворяет уравнению $F(x,y) = 0$, то точка $M(x_0, y_0, z_0)$ лежит на цилиндре. Действительно, имеем, $F(x_0, y_0) = 0$, поэтому точка $P(x_0, y_0, 0)$ лежит на (l) и прямая (MP) параллельна оси Oz. Значит, точка M лежит на цилиндрической поверхности с направляющей (l) и образующей, параллельной оси Oz. Теорема доказана.

Примеры.

1) Уравнение $x^2 + y^2 = R^2$ задаёт прямой круговой цилиндр, направляющая которого является окружностью радиуса R с центром в начале координат (см. рис.4а). Аналогично, уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ задаёт эллиптический цилиндр.

2) Уравнение $y^2 = 2px$ задаёт параболический цилиндр, направляющей которого является парабола в плоскости $z = 0$ с уравнением $y^2 = 2px$, а образующая параллельна оси Oz (см. рис. 4в).

3) Уравнение $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ задаёт гиперболический цилиндр, направляющей которого является гипербола (l), лежащая в плоскости $z = 0$

$$(l): \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

а образующая параллельна оси Oz. (см. рис.6).

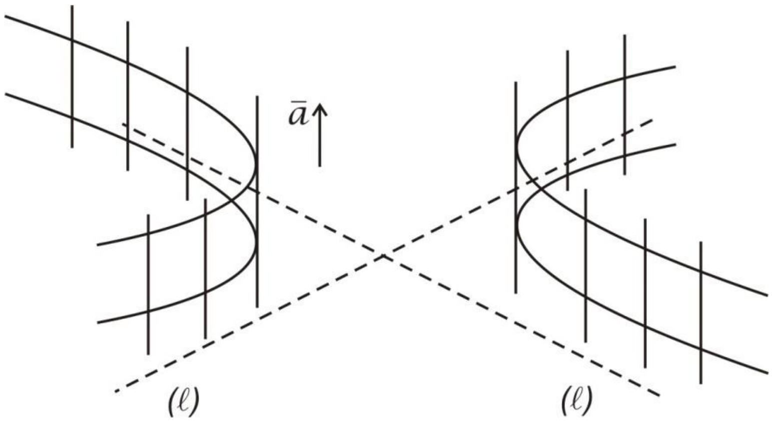


Рис.6. Гиперболический цилиндр

$\boldsymbol{n}°\mathbf{3}$ В заключение этого параграфа найдём уравнение наклонного кругового цилиндра (см. рис. 4б) и наклонного кругового конуса (см. рис.7).

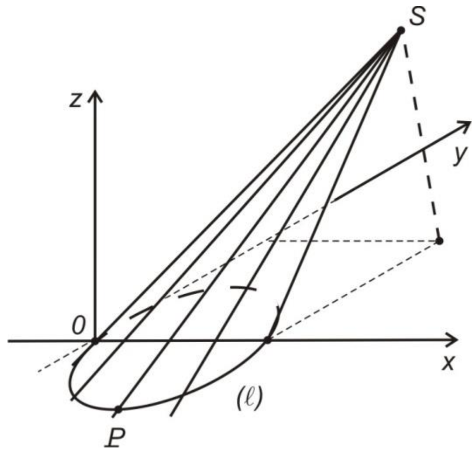


Рис.7. Наклонный круговой конус

До сих пор мы рассматривали поверхности, заданные в прямоугольной декартовой СК своими каноническими уравнениями. В этом $\boldsymbol{n}°$ мы покажем, как появляются неканонические уравнения поверхностей.

Определение уравнения поверхности было дано в $\boldsymbol{n}°2$ § 5 гл. 3. Таким образом, уравнение поверхности (S) можно интерпретировать как соотношение между координатами (x, y, z) любой точки, лежащей на поверхности. Чтобы найти уравнение поверхности, надо взять любую точку $M(x, y, z)$ этой поверхности и найти зависимость, связывающую между собой координаты x, y, z. Чаще всего эта зависимость получается из тех условий, которые описывают поверхность (S).

Пример 5. Направляющая (l) цилиндрической поверхности задана:

$$(l):\ \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases},$$

а образующая параллельна вектору $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}.$

Найти уравнение цилиндрической поверхности.

Решение. Пусть точка $M(x, y, z)$ лежит на цилиндрической поверхности. Это значит, что точка M лежит на какой-то образующей (MP), где P принадлежит (l) (см. рис. 8).

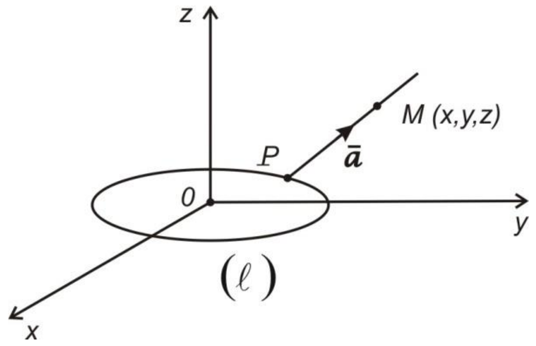


Рис.8. Построение цилиндрической поверхности

Пусть $(x_0, y_0, 0)$ – координаты точки P.

Имеем

$$x_0^2 + y_0^2 = 1 \qquad (5)$$

Каноническое уравнение прямой (MP)

$$(MP):\ \frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{1} = \frac{z}{1} \qquad (6)$$

Координаты (x, y, z) точки M удовлетворяют уравнению (6).

Запишем (6) в виде системы

$$\begin{cases} x - x_0 = z \\ y - y_0 = z \end{cases}$$

Выразим отсюда x_0, y_0 и подставим их выражения в (5). Получим искомое уравнение

$$(x - z)^2 + (y - z)^2 = 1$$

или, раскрыв скобки и приведя подобные члены, в другом виде

$$x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xz - 2yz = 1.$$

Пример 6. Пусть (l) – линия в пространстве и S – точка. Конической поверхностью с направляющей (l) и вершиной S называется поверхность, получаемая движением прямой (SP), когда точка P пробегает всю линию (L) (см. рис.7).

Найти уравнение конической поверхности с направляющей (l): $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2x \\ z = 0 \end{cases}$ и вершиной в точке $S(2; 2; 2)$.

Решение. (l) – это окружность в плоскости Oxy с центром в точке $(1,0,0)$.

Пусть точка $M(x,y,z)$ лежит на конической поверхности. Это значит, что точка M лежит на какой-то прямой (MP), где P принадлежит (l). Обозначим $(x_0,y_0,0)$ – координаты точки P. Тогда имеем

$$x_0^2+y_0^2=2x_0 \qquad (7)$$

и каноническое уравнение прямой (MP)

$$(MP): \frac{x-2}{x_0-2}=\frac{y-2}{y_0-2}=\frac{z-2}{-2} \qquad (8)$$

Координаты (x,y,z) точки M удовлетворяют (8). Запишем (8) в виде системы

$$\begin{cases}\dfrac{x-2}{x_0-2}=\dfrac{z-2}{-2}\\ \dfrac{y-2}{y_0-2}=\dfrac{z-2}{-2}\end{cases}$$

Выразим отсюда x_0,y_0

$$x_0=\frac{2(z-x)}{z-2}$$
$$y_0=\frac{2(z-y)}{z-2}$$

и подставим эти выражения в (7). Получим уравнение конической поверхности

$$\left(\frac{z-x}{z-2}\right)^2+\left(\frac{z-y}{z-2}\right)^2=\frac{z-x}{z-2}$$

После упрощений имеем

$$x^2+y^2+z^2-xz-2yz-2x+2z=0$$

§ 9. Классификация поверхностей 2-го порядка

Пусть в пространстве задана прямоугольная декартова СК $Oxyz$.

Определение. Поверхностью 2-го порядка называется множество всех точек пространства, координаты которых удовлетворяют общему алгебраическому уравнению 2-ой степени от трёх неизвестных x,y,z.

$$ax^2+by^2+cz^2+dxy+exz+fyz+gx+hy+kz+l=0 \qquad (1)$$

где коэффициенты при неизвестных – вещественные числа и хоть одно из чисел a,b,c,d,e,f отлично от нуля.

Примерами таких поверхностей являются сфера, эллипсоид, гиперболоиды, параболоиды, конусы, так как их канонические уравнения имеют вид (1).

Можно доказать, что приведённое определение корректно, то есть поверхность 2-го порядка остаётся таковой в любой другой системе координат.

Целью этого параграфа является доказательство следующей теоремы.

Теорема. Поверхностью 2-го порядка может быть только одна из следующих поверхностей:

1) Эллипсоид (или, как частный случай, сфера)
2) Однополостный гиперболоид
3) Двуполостный гиперболоид
4) Эллиптический конус
5) Эллиптический параболоид
6) Гиперболический параболоид
7) Эллиптический цилиндр
8) Гиперболический цилиндр
9) Параболический цилиндр
10) Пара пересекающихся плоскостей
11) Пара параллельных плоскостей
12) Одна плоскость
13) Прямая линия
14) Одна точка
15) Пустое множество.

План доказательства.

Пусть (S) – поверхность, определяемая уравнением (1). Таким образом, (S) – это множество всех точек, координаты которых удовлетворяют (1). Требуется узнать, что из себя представляет множество (S).

Ясно, что (S) не изменится, если мы выбрали в пространстве другую прямоугольную декартову СК с тем же масштабом на осях. Однако при этом изменится уравнение (S) в новой СК. Доказательство заключается в том, что мы выберем такую СК, чтобы уравнение было по возможности более простым. Тогда по виду этого нового уравнения мы сможем описать поверхность (S).

Известно (см.(3) § 2 гл. 5), что выбор новой прямоугольной декартовой СК с тем же началом отсчёта и масштабом влечёт линейную замену переменных в уравнении (1) с ортогональной матрицей коэффициентов. И наоборот, любая линейная замена переменных в уравнении (1) с ортогональной матрицей коэффициентов влечёт выбор новой прямоугольной декартовой СК с тем же началом и масштабом ((3) § 2 гл. 5).

Доказательство. Первые шесть слагаемых в левой части (1) образуют однородный многочлен степени 2 от трёх переменных (квадратичную форму).

$$F = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz \qquad (2)$$

Обозначим $G = gx + hy + kz$ – однородный многочлен степени 1 от трёх переменных (линейная функция от трёх переменных).

Обозначим

A –матрицу квадратичной формы F,

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ –столбец переменных,

$H = (g, h, k)$ – матрица-строка коэффициентов линейной функции.

Тогда квадратичную форму F можно записать в матричном виде (см.(9) § 3 гл. 5).

$$F = X^T A X \qquad (3)$$

а линейную функцию L – в виде

$$L = HX$$

В этих обозначениях уравнение (1) перепишется в компактной форме

$$X^T A X + HX + l = 0 \quad (4)$$

Воспользуемся теперь тем, что квадратичную форму (2) можно ортогональным преобразованием привести к каноническому виду (см.Теорема 1 § 3 гл.5). Это значит, что существует ортогональная матрица C.

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \qquad (5)$$

такая, что замена переменных в выражении (2) по формуле

$$X = CX_1, \quad X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \qquad (6)$$

приводит к тому, что коэффициенты при произведениях $x_1 y_1$, $x_1 z_1$, $y_1 z_1$ новых переменных равны нулю:

$$F = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + \lambda_3 z_1^2 \qquad (7)$$

В матричной записи формула (7) выглядит следующим образом:

$$F = X^T A X = X_1^T C^T A C X_1 = X_1^T D X_1 \qquad (8)$$

где обозначено

$$C^T A C = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]$$

напомним (Теорема 2 § 3 гл. 5), что $\lambda_1, \lambda_2 \lambda_3$ – собственные числа матрицы A, а столбцы

$$C_1 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ c_{32} \end{pmatrix}, C_3 = \begin{pmatrix} c_{13} \\ c_{23} \\ c_{33} \end{pmatrix} \qquad (9)$$

матрицы C – соответствующие собственные столбцы матрицы A.

Сделаем теперь замену переменных (6) в уравнении (4). Получим, используя (8),

$$X_1^T C^T A C X_1 + H C X_1 + l = 0$$

иначе, в обозначениях (9),

$$X_1^T D X_1 + H_1 X_1 + l = 0\,, \qquad (10)$$

где $H_1 = HC = (g_1, h_1, k_1)$.

Уравнение (10) в координатной форме имеет вид

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + \lambda_3 z_1^2 + g_1 x_1 + h_1 y_1 + k_1 z_1 + l = 0. \quad (11)$$

Выводы:

1) в новой декартовой прямоугольной СК $Ox_1y_1z_1$ уравнение поверхности (S) имеет вид (11);

2) орты $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}$ новых осей координат— это векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e_1} &= c_{11}\boldsymbol{i} + c_{21}\boldsymbol{j} + c_{31}\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{e_2} &= c_{12}\boldsymbol{i} + c_{22}\boldsymbol{j} + c_{32}\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{e_3} &= c_{13}\boldsymbol{i} + c_{23}\boldsymbol{j} + c_{33}\boldsymbol{k} \end{aligned}\,, \qquad (12)$$

проекциями которых являются элементы, стоящие в столбцах C_1, C_2, C_3 ортогональной матрицы C.

Уравнение (11) поверхности (S) уже достаточно простое для того, чтобы определить вид этой поверхности.

Разберём возможные случаи.

1) Все коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ при квадратах в (11) – не равные нулю числа.

Выделяем полные квадраты в левой части уравнения (11)

$$\lambda_1 \left(x_1 + \frac{g_1}{2\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2 \left(y_1 + \frac{h_1}{2\lambda_2}\right)^2 + \lambda_3 \left(z_1 + \frac{k_1}{2\lambda_3}\right)^2 + l_1 = 0\,, \qquad (13)$$

где обозначено $l_1 = l - \frac{g_1^2}{4\lambda_1} - \frac{h_1^2}{4\lambda_2} - \frac{k_1^2}{4\lambda_3}$.

Сделаем параллельный перенос координатных осей $Ox_1y_1z_1$ в точку с координатами $O_1\left(-\frac{g_1}{2\lambda_1}, -\frac{h_1}{2\lambda_2}, -\frac{k_1}{2\lambda_3}\right)$. Получим новую систему координат $O_1x_2y_2z_2$. Формулы для пересчёта координат одной и той же точки из системы $Ox_1y_1z_1$ в систему $O_1x_2y_2z_2$ как известно, таковы

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + \frac{g_1}{2\lambda_1} \\ y_2 &= y_1 + \frac{h_1}{2\lambda_2} \\ z_2 &= z_1 + \frac{k_1}{2\lambda_3} \end{aligned} \qquad (14)$$

В СК $O_1x_2y_2z_2$ уравнение поверхности $(S\,)$ приобретает вид

$$\lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 z_2^2 + l_1 = 0 \qquad (15)$$

а) Если числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – одного знака, то будем считать, что $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 > 0$ (в противном случае умножим обе части уравнения (15) на

$(-1))$.

При $l_1 > 0$ координаты ни одной точки пространства не удовлетворяют уравнению (15), поэтому (S) – пустое множество.

При $l_1 = 0$ поверхность (S) состоит из одной точки O_1, для которой координаты $x_2 = y_2 = z_2 = 0$.

При $l_1 < 0$ имеем $l_1 = -|l_1|$ и уравнение (15) равносильно уравнению

$$\frac{\lambda_1}{|l_1|}x_2^2 + \frac{\lambda_2}{|l_1|}y_2^2 + \frac{\lambda_3}{|l_1|}z_2^2 = 1$$

В этом случае (S) – это эллипсоид. При $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ (S) – это сфера.

б) Если числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – разных знаков, то будем считать, что $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0$, т.е. $\lambda_3 = -|\lambda_3|$.

Если $l_1 > 0$, то уравнение (15) равносильно уравнению

$$\frac{\lambda_1}{l_1}x_2^2 + \frac{\lambda_2}{l_1}y_2^2 - \frac{|\lambda_3|}{l_1}z_2^2 = -1$$

и (S) – двуполостный гиперболоид.

Если $l_1 = 0$, то (15) равносильно уравнению

$$\lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 = |\lambda_3| z_2^2$$

(S) – эллиптический конус.

Если $l_1 < 0$, то $l_1 = -|l_1|$ и (15) равносильно уравнению

$$\frac{\lambda_1}{|l_1|}x_2^2 + \frac{\lambda_2}{|l_1|}y_2^2 - \frac{|\lambda_3|}{|l_1|}z_2^2 = 1$$

(S) – однополостный гиперболоид

2) Один из коэффициентов $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$при квадратах в (11) равен нулю, а два других отличны от нуля.

Допустим, что $\lambda_3 = 0$,$\lambda_1 \neq 0$,$\lambda_2 \neq 0$. Уравнение (11) имеет вид

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + g_1 x_1 + h_1 y_1 + k_1 z_1 + l = 0 \qquad (16)$$

Выделяя полные квадраты по переменным x_1, y_1, имеем

$$\lambda_1\left(x_1 + \frac{g_1}{2\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(y_1 + \frac{h_1}{2\lambda_2}\right)^2 + k_1 z_1 + l_1 = 0 \qquad (17)$$

где $l_1 = l - \frac{g_1^2}{4\lambda_1} - \frac{h_1^2}{4\lambda_2}$.

а) Если в (17) $k_1 \neq 0$, то обозначим

$$x_2 = x_1 + \frac{g_1}{2\lambda_1}$$

$$y_2 = y_1 + \frac{h_1}{2\lambda_2},$$

$$z_2 = z_1 + \frac{l_1}{k_1}$$

тем самым мы делаем параллельный перенос СК $Ox_1y_1z_1$ в точку

$O_1\left(-\frac{g_1}{2\lambda_1}, -\frac{h_1}{2\lambda_2}, -\frac{l_1}{k_1}\right)$ и получаем новую СК $O_1x_2y_2z_2$. Уравнение поверхности (S) в этой СК

$$\lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 + k_1 z_2 = 0 \qquad (18)$$

Поэтому (S) – эллиптический параболоид, если λ_1 и λ_2 – числа одного знака и (S) –гиперболический параболоид, если λ_1 и λ_2 – числа разных знаков.

б) Если в (17) $k_1 = 0$, то обозначим

$$x_2 = x_1 + \frac{g_1}{2\lambda_1}$$
$$y_2 = y_1 + \frac{h_1}{2\lambda_2}$$
$$z_2 = z_1$$

и уравнение (17) принимает вид

$$\lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 + l_1 = 0 \qquad (19)$$

Допустим, здесь λ_1 и λ_2 – числа одного знака, например, положительные. При $l_1 > 0$ поверхность (S) – пустое множество. При $l_1 = 0$ поверхность (S) – это прямая $x_2 = 0, y_2 = 0, z_2$ – любое число. Наконец, при $l_1 < 0$, $l_1 = -|l_1|$ поверхность (S) – это эллиптический цилиндр (см. $\boldsymbol{n}^0 2$, §8, гл.6).

Допустим теперь, что в (19) λ_1 и λ_2 – числа разных знаков. В этом случае при $l_1 \neq 0$ уравнение (19) задаёт гиперболический цилиндр (см. $\boldsymbol{n}$°2 §8 гл. 6). При $l_1 = 0$ уравнение (19) задаёт пару пересекающихся плоскостей. Действительно, пусть $\lambda_1 > 0$ и $\lambda_2 < 0$, т.е. $\lambda_2 = -|\lambda_2|$. Уравнение (19) имеет тогда вид:

$$\lambda_1 x_2^2 - |\lambda_2| y_2^2 = 0 \qquad (20)$$

или $\left(\sqrt{\lambda_1}x_2 + \sqrt{|\lambda_2|}y_2\right) \cdot \left(\sqrt{\lambda_1}x_2 - \sqrt{|\lambda_1|}y_2\right) = 0.$

Таким образом, точка, координаты которой удовлетворяют уравнению (20), может лежать на плоскости $\sqrt{\lambda_1}x_2 + \sqrt{|\lambda_2|}y_2 = 0$ или на плоскости $\sqrt{\lambda_1}x_2 - -\sqrt{|\lambda_2|}y_2 = 0$.

3) Два из коэффициентов $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ при квадратах в (11) равны нулю, а третий отличен от нуля. Пусть, например, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 \neq 0$. Уравнение (11) приобретает вид

$$\lambda_3 z_1^2 + g_1 x_1 + h_1 y_1 + k_1 z_1 + l = 0 \qquad (21)$$

Выделяем полный квадрат по переменной z_1 и обозначаем

$$x_2 = x_1$$
$$y_2 = y_1$$
$$z_2 = z_1 + \frac{k_1}{2\lambda_3}$$

В новых координатах $O_1x_2y_2z_2$ уравнение поверхности (S) принимает вид

$$\lambda_3 z_2^2 + g_1 x_2 + h_1 y_2 + l_1 = 0 \qquad (22)$$

где $l_1 = l - \frac{k_1^2}{4\lambda_3}$.

а) Пусть в (22) хоть одно из чисел g_1 или h_1 отлично от нуля.

Запишем (22) в виде

$$\lambda_3 z_2^2 + \sqrt{g_1^2 + h_1^2}\left(\frac{g_1}{\sqrt{g_1^2+h_1^2}}x_2 + \frac{h_1}{\sqrt{g_1^2+h_1^2}}y_2\right) + l_1 = 0 \qquad (23)$$

Легко проверяется, что числа $u = \frac{g_1}{\sqrt{g_1^2+h_1^2}}, v = \frac{h_1}{\sqrt{g_1^2+h_1^2}}$ удовлетворяют равенству

$$u^2 + v^2 = 1$$

Поэтому можно принять, что

$$u = \cos\alpha, v = \sin\alpha \qquad (24)$$

для некоторого угла α. Подставим в (23) вместо u и v их выражения (24). Получим

$$\lambda_3 z_2^2 + \sqrt{g_1^2 + h_1^2}(x_2\cos\alpha + y_2\sin\alpha) + l_1 = 0 \qquad (25)$$

Обозначим теперь

$$x_3 = x_2\cos\alpha + y_2\sin\alpha$$
$$y_3 = -x_2\sin\alpha + y_2\cos\alpha$$
$$z_3 = z_2$$

В этих обозначениях уравнение (25) запишется в виде

$$\lambda_3 z_3^2 + \sqrt{g_1^2 + h_1^2}x_3 + l_1 = 0 \qquad (26)$$

Система координат $O_1x_3y_3z_3$ получена поворотом системы координат $O_1x_2y_2z_2$ вокруг оси O_1z_2 на угол α.

Наконец, делаем параллельный перенос СК, задаваемый формулами

$$x_4 = x_3 + \frac{l_1}{\sqrt{g_1^2 + h_1^2}}$$
$$y_4 = y_3$$
$$z_4 = z_3$$

В СК $O_2x_4y_4z_4$ уравнение поверхности (S) имеет вид

$$\lambda_3 z_4^2 + \sqrt{g_1^2 + h_1^2}x_4 = 0.$$

Следовательно, (S)– это параболический цилиндр.

б) Пусть в (22) $g_1 = h_1 = 0$. Тогда уравнение (22) имеет вид

$$\lambda_3 z_2^2 + l_1 = 0. \qquad (27)$$

Если здесь $l_1 = 0$, то (S) – это плоскость с уравнением $z_2 = 0$.

Если $l_1 \neq 0$ и числа λ_3, l_1 одного знака, то уравнение (27) не имеет решений и, следовательно, (S) – пустое множество.

Если $l_1 \neq 0$ и числа λ_3, l_1 разных знаков, то при $\lambda_3 > 0, l_1 < 0$ левая часть уравнения (27) раскладывается на множители

$$\left(\sqrt{\lambda_3}z_2 + \sqrt{|l_1|}\right)\left(\sqrt{\lambda_3}z_2 - \sqrt{|l_1|}\right) = 0. \qquad (28)$$

Следовательно, поверхность (S) состоит из двух параллельных плоскостей

$$z_2 = \pm\frac{\sqrt{|l_1|}}{\sqrt{\lambda_3}}.$$

Случай $\lambda_3 < 0, l_1 > 0$ разбирается аналогично, так как тогда

$\lambda_3 = -|\lambda_3|$, $z_2 = \pm\frac{\sqrt{l_1}}{\sqrt{|\lambda_3|}}$.Теорема доказана.

Замечание. Поменяем местами какие-нибудь два столбца (9) ортогональной матрицы (5)$C = (C_1C_2C_3)$, например, второй и третий. Получим новую ортогональную матрицу $C' = (C_1C_3C_2)$. Тогда ортогональная замена переменны $X = C'X_1$ в квадратичной форме F снова приведёт F к каноническому виду, однако коэффициенты λ_2 и λ_3 поменяются местами. Чтобы убедиться в этом, достаточно проверить матричное равенство

$$C'^TAC' = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_3 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_2\end{pmatrix} \quad \text{или} \quad AC' = C'\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_3 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$$

Действительно,

$$AC' = A(C_1C_3C_2) = (AC_1\ \ AC_3\ \ AC_2) = (\lambda_1C_1\quad \lambda_3C_3\quad \lambda_2C_2)$$

Таким образом, мы с самого начала можем выбрать такую ортогональную матрицу (5) C, что орты (12) прямоугольной декартовой СК $Ox_1y_1z_1$ образуют правую тройку.

Следовательно, СК $Ox_1y_1z_1$ получена вращением начальной СК $Oxyz$.

§ 10. Примеры на приведение общего уравнения поверхности 2-го порядка к каноническому виду

Пример 1.

С помощью поворота и параллельного переноса прямоугольной декартовой СК $Oxyz$ привести следующее уравнение к каноническому виду. Выписать соответствующее преобразование координат. Определить тип полученной поверхности.

$$x^2 + y^2 + 5z^2 - 6xy + 2zx - 2yz - 4x + 8y - 12z + 14 = 0$$

Решение состоит из трёх этапов.

1-ый этап. Обозначим (S) – поверхность, заданную уравнением

$$x^2+y^2+5z^2-6xy+2zx-2yz-4x+8y-12z+14=0 \qquad (1)$$

Первые шесть слагаемых в левой части уравнения задают квадратичную форму, которую мы запишем в матричном виде

$$x^2+y^2+5z^2-6xy+2xz-2yz=X^TAX\,, \qquad (2)$$

где $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ – столбец неизвестных, $A=\begin{pmatrix}1&-3&1\\-3&1&-1\\1&-1&5\end{pmatrix}$ – матрица квадратичной формы.

Следующие три линейные слагаемые запишем тоже в матричном виде

$$-4x+8y-12z=\begin{pmatrix}-4&8&-12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=B^TX,$$

где обозначено $=\begin{pmatrix}-4\\8\\-12\end{pmatrix}$.

Тогда уравнение (1) примет вид

$$X^TAX+B^TX+14=0 \qquad (3)$$

2-ой этап. Теперь воспользуемся Теоремой 1 и Теоремой 2 из § 3 гл.5 и найдём ортогональное преобразование переменных

$$X=CX_1,$$

где $X_1=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}C_1&C_2&C_3\end{pmatrix}$ – ортогональная матрица, приводящая квадратичную форму (2) к каноническому виду:

$$X_1^TC^TACX_1=\lambda_1x_1^2+\lambda_2y_1^2+\lambda_3z_1^2$$

Здесь $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ – собственные числа матрицы A, а столбцы C_1,C_2,C_3 матрицы C – это собственные столбцы матрицы A, соответствующие собственным числам $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ и удовлетворяющие условиям

$$C_i^TC_j=\begin{cases}0, & i\neq j\\1, & i=j\end{cases} \qquad i,j=1,2,3. \qquad (4)$$

Собственные числа $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ – это корни характеристического многочлена $f_A(t)$ матрицы A.

$$f_A(t)=\begin{vmatrix}1-t&-3&1\\-3&1-t&-1\\1&-1&5-t\end{vmatrix}=-t^3+7t^2-36=-(t-3)(t-6)(t+2)$$

Положим $\lambda_1=3\,,\lambda_2=6\,,\lambda_3=-2$

Находим собственные столбцы матрицы A, соответствующие собственным числам $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$.

Для λ_1 столбец $k\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ является собственным при любом $k \in R$. Если взять $k = \frac{1}{\sqrt{3}}$, то $C_1 = \begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$ удовлетворяет условию $C_1^T C_1 = 1$.

Для $\lambda_2 = 6$ столбец $k\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ является собственным при любом $k \in R$. Если взять $k = \frac{1}{\sqrt{6}}$, то $C_2 = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$ удовлетворяет условию $C_2^T C_2 = 1$.

Для $\lambda_3 = -2$ столбец $k\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ является собственным при любом $k \in R$. Если взять $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$, то $C_3 = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{pmatrix}$ удовлетворяет условию $C_3^T C_3 = 1$.

Условия $C_i^T C_j = 0$ при $i \neq j$ выполняются при этом автоматически в силу леммы § 2гл.5.

Итак, $C = \begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0\end{pmatrix}$. Легко проверить, что

$$\det C = 1 \qquad (5)$$

3-ий этап. Сделаем в уравнении (3) замену $X = CX_1$

Тогда получим

$$3x_1^2 + 6y_1^2 - 2z_1^2 - 6\sqrt{6}y_1 + 2\sqrt{2}z_1 + 14 = 0 \qquad (6)$$

Произведённая замена переменных вызвана выбором новых осей координат $Ox_1y_1z_1$ в пространстве с тем же началом отсчёта O. При этом орты новых осей – это векторы $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}$, проекции которых стоят в столбцах матрицы C. Векторы $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}$ образуют правую тройку в силу условия (5). Значит, СК $Ox_1y_1z_1$ получается поворотом старой СК $Oxyz$ вокруг точки O.

Преобразуем уравнение (6), выделив в левой части полные квадраты по переменным y_1, z_1.

$$3x_1^2+6\left(\left(y_1^2-\sqrt{6}y_1+\frac{3}{2}\right)-\frac{3}{2}\right)-2\left(\left(z_1^2-\sqrt{2}z_1+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\right)+14=0$$

или

$$3x_1^2+6\left(y_1-\tfrac{\sqrt{6}}{2}\right)^2-2\left(z_1-\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+6=0 \qquad (7)$$

Сделаем параллельный перенос СК $Ox_1y_1z_1$ в точку $O_1\left(0,\frac{\sqrt{6}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Получим новую СК $O_1x_2y_2z_2$. При этом координаты пересчитываются по формулам

$$x_2=x_1$$

$$y_2=y_1-\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$z_2=z_1-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Из (7) получаем, что в СК $O_1x_2y_2z_2$ уравнение поверхности (S) имеет вид

$$3x_2^2+6y_2^2-2z_2^2+6=0$$

или

$$\frac{x_2^2}{2}+y_2^2-\frac{z_2^2}{3}=-1$$

таким образом, (S) – это двуполостный гиперболоид.

Связь между старыми и новыми координатами даётся формулами

$$\begin{cases} x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}x_2+\dfrac{1}{\sqrt{6}}\left(y_2+\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(z_2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}x_2+\dfrac{1}{\sqrt{6}}y_2+\dfrac{1}{\sqrt{2}}z_2+1 \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x_2-\dfrac{1}{\sqrt{6}}\left(y_2+\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(z_2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x_2-\dfrac{1}{\sqrt{6}}y_2+\dfrac{1}{\sqrt{2}}z_2 \\ z=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x_2+\dfrac{2}{\sqrt{6}}\left(y_2+\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x_2+\dfrac{2}{\sqrt{6}}y_2+1 \end{cases}$$

Пример 2. С помощью поворота и параллельного переноса прямоугольной декартовой СК привести следующее уравнение к каноническому виду. Выписать соответствующее преобразование координат. Определить тип полученной поверхности.

$$xy+yz+zx=0 \qquad (8)$$

Решение. План решения остаётся прежним.

Выпишем матрицу A квадратичной формы в левой части уравнения (8).

$$A=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}$$

Найдём собственные числа матрицы A (см. § 1 гл. 5). Для этого составим характеристический многочлен матрицы A.

$$f_A(t)=\begin{vmatrix}-t & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -t & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\end{vmatrix}=-(t-1)\left(t+\frac{1}{2}\right)^2$$

Корни $f_A(t)$, то есть числа $\lambda_1=1$; $\lambda_2=\lambda_3=-\frac{1}{2}$, являются собственными числами матрицы A. Найдём соответствующие им собственные столбцы матрицы A (см. § 1 гл. 5), решая системы $(A-\lambda E)X=0$.

Здесь мы оказываемся в новой ситуации, по сравнению с примером 1. В предыдущей задаче матрица A имела три различных собственных числа, а различным собственным числам, как мы знаем (см. лемму § 1 гл. 5), соответствуют попарно ортогональные собственные столбцы.

Из этих трёх собственных столбцов мы составили ортогональную матрицу C линейного преобразования и одновременно нашли орты новых осей координат.

В настоящем примере матрица A имеет только два различных собственных числа. Посмотрим, как в этом случае удаётся найти три новых взаимно перпендикулярных орта новых осей $Ox_1y_1z_1$и, следовательно, ортогональную матрицу C линейного преобразования, связывающего переменные x, y, z с x_1, y_1, z_1.

Для $\lambda_1=1$ столбец $k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ является собственным при любом $k\in R$. Если взять $k=\frac{1}{\sqrt{3}}$, то столбец $C_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$ удовлетворяет условию $C_1^TC=1$. Действительно, условие $(k \quad k \quad k)\begin{pmatrix}k\\k\\k\end{pmatrix}=3k^2=1$ влечёт $k=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Следовательно, в качестве единичного вектора $\boldsymbol{e_1}$, идущего по оси Ox_1 будущей новой повёрнутой СК $Ox_1y_1z_1$ можно взять

$$\boldsymbol{e_1} = \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{k}\ .$$

Для $\lambda_2 = \lambda_3 = -\frac{1}{2}$ система однородных линейных уравнений $\left(A + \frac{1}{2}E\right)X = 0$ для нахождения соответствующих собственных столбцов $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ состоит из трёх одинаковых уравнений

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 0$$

Отсюда $x = -y - z$.

Поэтому столбец

$$X = \begin{pmatrix} -y - z \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

при любых $y, z \in R$ (кроме $y = z = 0$) является собственным столбцом, соответствующим собственному числу $\lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{2}$. По лемме § 1 гл.5 любой такой столбец удовлетворяет соотношению

$$X^T C_1 = 0$$

(так как X и C_1 соответствуют различным собственным числам).

Следовательно, любой вектор $\boldsymbol{v} = (-y - z)\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ ортогонален вектору $\boldsymbol{e_1} = \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{k}$, так как их скалярное произведение равно нулю:

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e_1} = (-y - z)\frac{1}{\sqrt{3}} + y\frac{1}{\sqrt{3}} + z\frac{1}{\sqrt{3}} = 0$$

Таким образом, собственные векторы $\boldsymbol{v}$, соответствующие собственным столбцам X, заполняют при различных y, z всю плоскость (π), проходящую через начало отсчёта O и для которой вектор $\boldsymbol{e_1}$служит нормалью (см. рис.1).

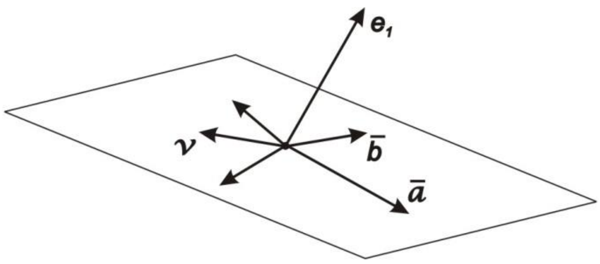


Рис.1. Построение трёх взаимно перпендикулярных ортов

Действительно, $\boldsymbol{v} = (-y - z)\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} = y(-\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}) + z(-\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}) = y \cdot \boldsymbol{a} +$ $+z \cdot \boldsymbol{b}$, где обозначено $\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}, \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}$.

Итак, векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ перпендикулярны $\boldsymbol{e_1}$, однако $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ не перпендикулярны между собой, так как $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 1$.

Выберем теперь в качестве C_2 собственный столбец

$$C_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

и в качестве направляющего вектора $\boldsymbol{e_2}$ новой оси Oy_1 единичный вектор $\boldsymbol{e_2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{j}$. Он коллинеарен вектору $\boldsymbol{a}$. За единичный вектор $\boldsymbol{e_3}$, идущий по новой оси Oz_1 возьмём векторное произведение

$$\boldsymbol{e_3} = \boldsymbol{e_1} \times \boldsymbol{e_2} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{i} + \frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{j} + \frac{2}{\sqrt{6}}\boldsymbol{k}$$

Поэтому в качестве третьего столбца C_3 ортогональной матрицы C берём столбец

$$C_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Векторы $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}$ образуют правую тройку, поэтому СК $Ox_1y_1z_1$ получается поворотом СК $Oxyz$ вокруг начала O.

Имеем ортогональную матрицу

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \qquad (9)$$

и ортогональное преобразование

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{3}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}z_1 \\ y &= \frac{1}{\sqrt{3}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}z_1 \qquad (\text{иначе } X = CX_1) \qquad (10) \\ z &= \frac{1}{\sqrt{3}}x_1 + \frac{2}{\sqrt{6}}z_1 \end{aligned}$$

переменных исходного уравнения (8), приводящее его к виду

$$x_1^2 - \frac{1}{2}y_1^2 - \frac{1}{2}z_1^2 = 0 \qquad (11)$$

Действительно,

$$xy + yz + zx = X^T A X = X_1^T C^T A C X_1 = (x_1 \quad y_1 \quad z_1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

$$= x_1^2 - \frac{1}{2}y_1^2 - \frac{1}{2}z_1^2$$

Уравнение (11) задаёт конус.

Заметим, что в примере 2 при выборе ортогональной матрицы C был большой произвол: вместо вектора $\boldsymbol{e_2}$ (и, соответственно, столбца C_2) мы могли взять любой единичный вектор $\boldsymbol{e_2}'$, лежащий в плоскости, изображенной на рис.1. Тогда вектор $\boldsymbol{e_3'} = \boldsymbol{e_1} \times \boldsymbol{e_2}$ будет третьим ортом новой СК.