TTÜ VIRUMAA KOLLEDŽ

RAR2890 Matemaatika täiendusõpe

Лекция № **7**

Область определения функции

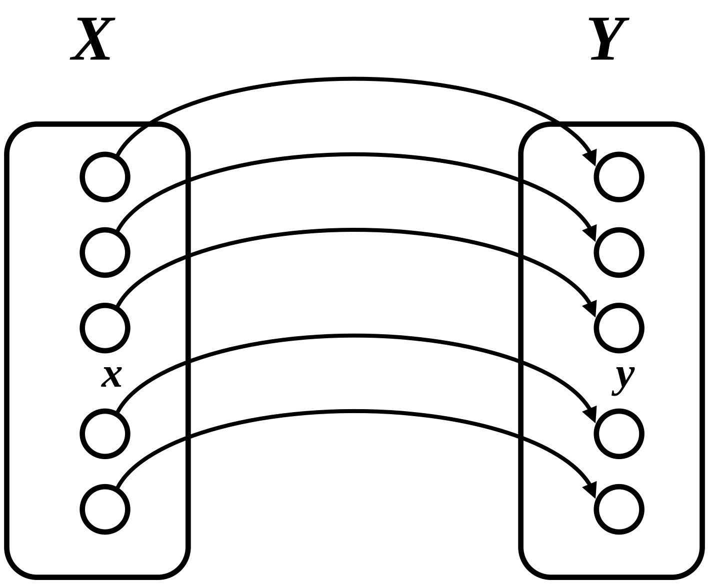
Элементарные функции и их графики

Преобразование графиков

Õppejõud: I. Gusseva

Общее понятие функции

Функцией называется такая зависимость между двумя переменными x и y, при которой каждому значению независимой переменной из множества $\boldsymbol{X}$ ставится в соответствие строго одно значение зависимой переменной из множества $\boldsymbol{Y}$.



$$y = x + 1$$

$$y = x^2$$

$$y = \sin x$$

Общее понятие функции

Способы задания функции

- Аналитический (формула)
- Табличный (таблица)
- Графический (график)
- Словесный

Существенно то, что данному значение аргумента соответствует только одно значение функции.

Область определения функции *X* – множество тех значений аргумента, при которых функция **определена** (имеет смысл)

Область значений функции *Y* – множество значений зависимой переменной y или множество значений функции.

Виды функций

1. Четные и нечетные функции

Функция $y = f(x)$ называется **четной** , если $\forall x \in X$ выполняется условие $\boldsymbol{f(-x) = f(x)}$.

Например: $y = x^2$

График четной функции **симметричен** относительно оси $\boldsymbol{y}$.

Функция $y = f(x)$ называется **нечетной**, если $\forall x \in X$ выполняется условие $\boldsymbol{f(-x) = -f(x)}$.

Например: $y = x^3$

График нечетной функции **симметричен** относительно начала координат **(0;0)**.

Виды функций

2. Периодическая функция

Функция $y = f(x)$ называется **периодической**, если найдется такое число $T \neq 0$ и $\forall x \in X$ выполняется условие $f(x + T) = f(x)$.

Наименьшее значение ***T*** есть **период**.

Например $y = \sin x$

Виды функций

3. Монотонные функции

Функция $y = f(x)$ называется **возрастающей**, если при увеличении значений аргумента значения функции увеличиваются.

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f\left(x_1\right) < f\left(x_2\right); \quad \forall x_1, x_2 \in X$$

Функция $y = f(x)$ называется **убывающей**, если при увеличении значений аргумента значения функции уменьшаются.

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f\left(x_1\right) > f\left(x_2\right); \quad \forall x_1, x_2 \in X$$

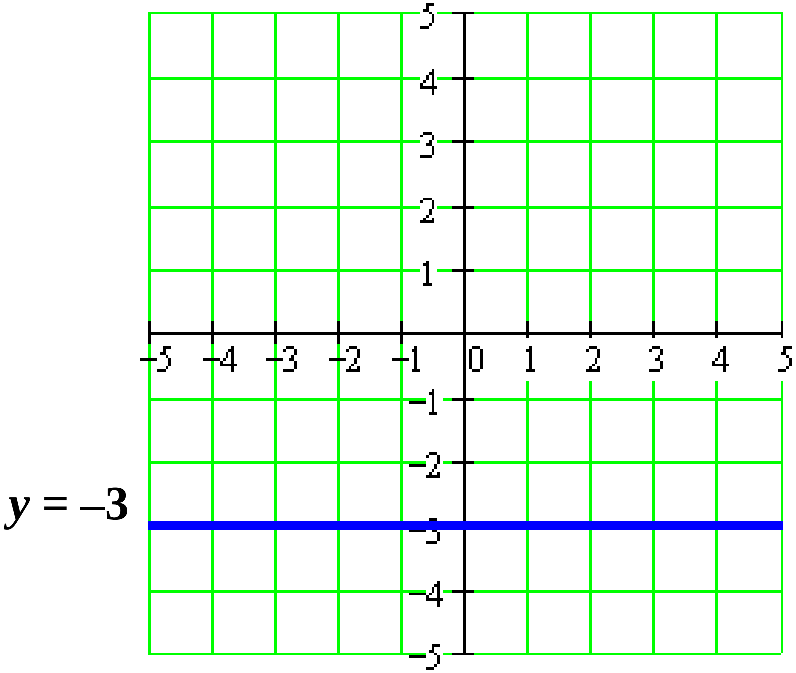
Элементарные функции

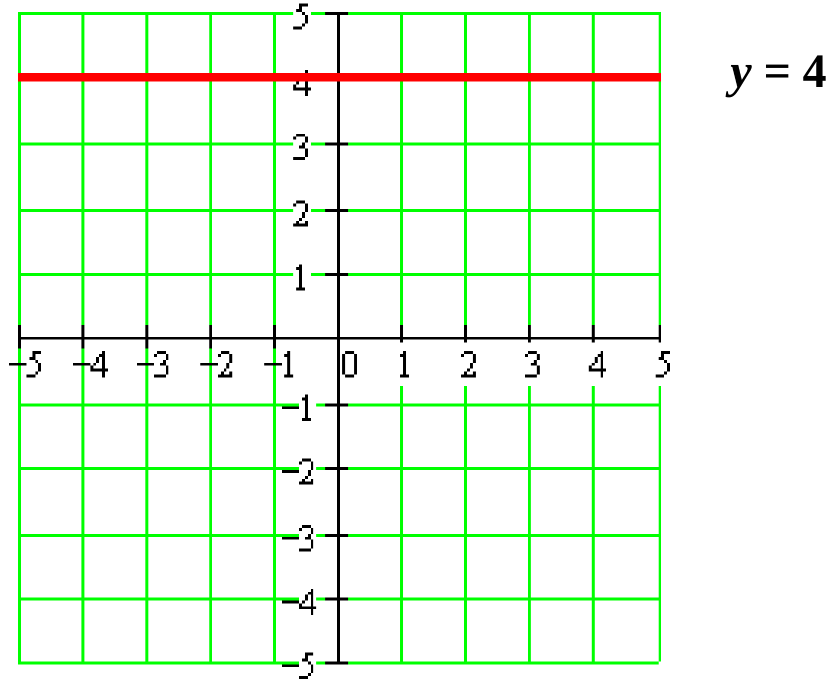
Элементарными называются функции, полученные из основных элементарных функций, путем использования четырех арифметических действий и сложной функции.

1. Постоянная функция: $y = c$
2. Степенная функция: $y = x^n$

   Иррациональная функция: $y = \sqrt{x}$
3. Показательная функция $y = a^x$
4. Логарифмическая $y = \log_a x$
5. Тригонометрические функции
6. Обратные тригонометрические функции

Постоянная функция $y = c$

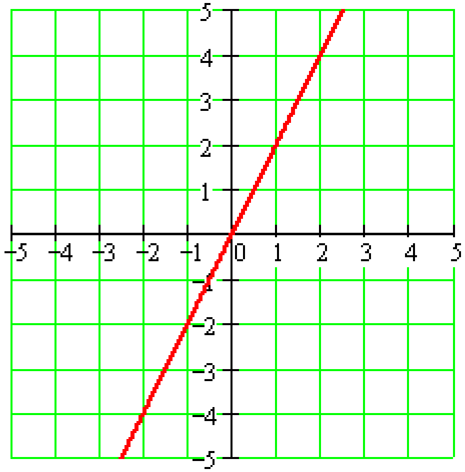




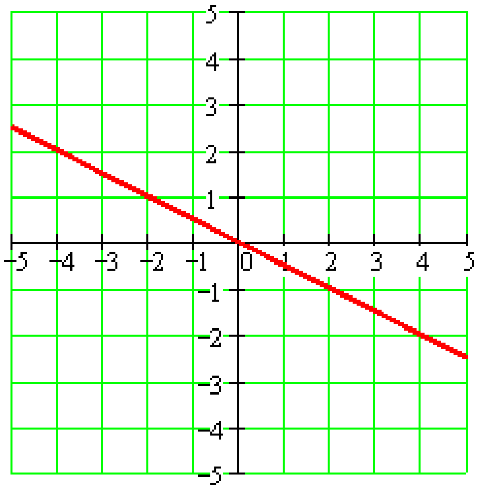
Прямо пропорциональная ф-ция $y = ax$

Если две переменные x и y связаны формулой $y = ax$, где a некоторое число ($a \neq 0$), то говорят, что переменная y **пропорциональна** переменной x. Если x и y находятся в пропорциональной зависимости, то их частное $\dfrac{y}{x} = a$ постоянно (если $x \neq 0$).

y* = 2*x



y* = – 0,5*x



Если $\boldsymbol{a} > \mathbf{0}$, то **I** и **III**

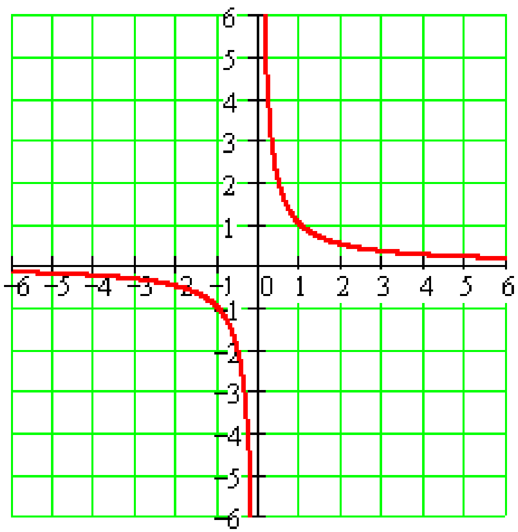
Если $\boldsymbol{a} < \mathbf{0}$, то **II** и **IV**

Обратно пропорциональная ф-ция $y = a/x$

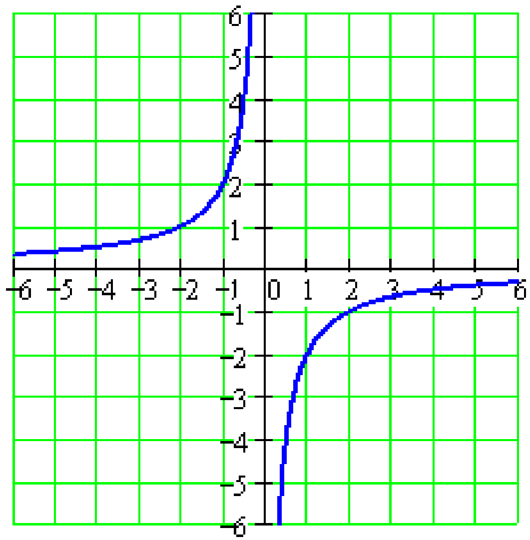
Если две переменные x и y связаны формулой $y = \dfrac{a}{x}$, где a некоторое число ($a \neq 0$), то говорят, что переменная y **обратно пропорциональна** переменной x.

Если x и y обратно пропорциональны, то их произведение постоянно: $xy = a$.

$y = \dfrac{1}{x}$



$y = -\dfrac{2}{x}$



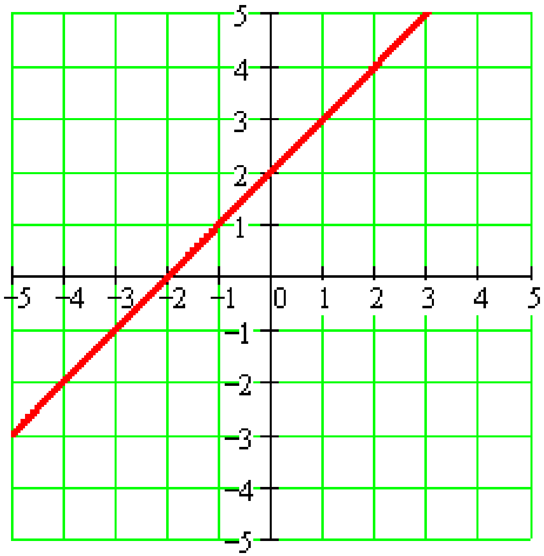
$a > 0$, **I** и **III**

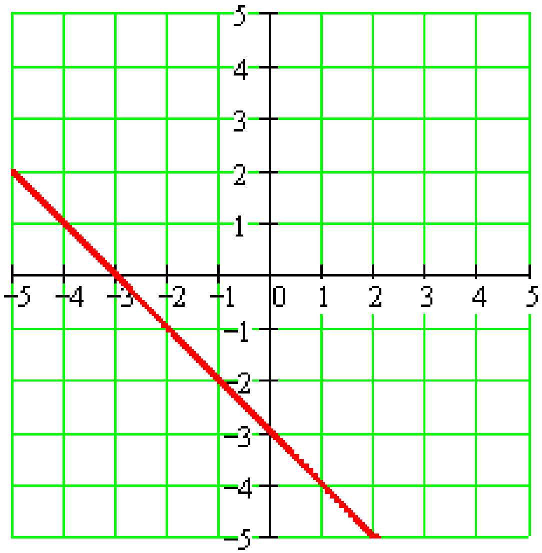
$a < 0$, **II** и **IV**

Линейная функция $y = ax + b$

Если зависимость между двумя переменными x и y представлена формулой $y = ax + b$, где a и b некоторые числа и $a \neq 0$, то говорят, что переменные x и y находятся в **линейной** зависимости.

$y = x + 2$





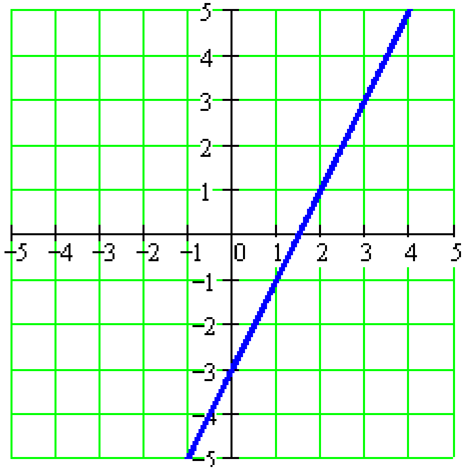
$y = -x - 3$

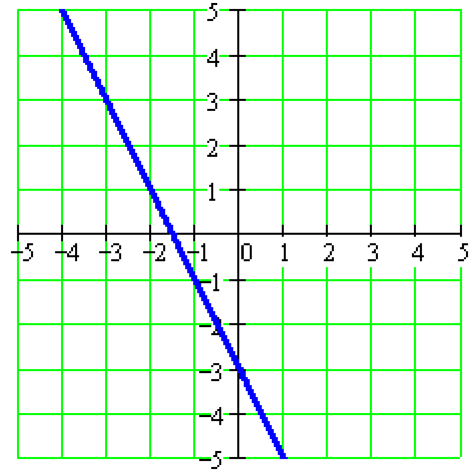
$a > 0$, **I** и **III**

$a < 0$, **II** и **IV**

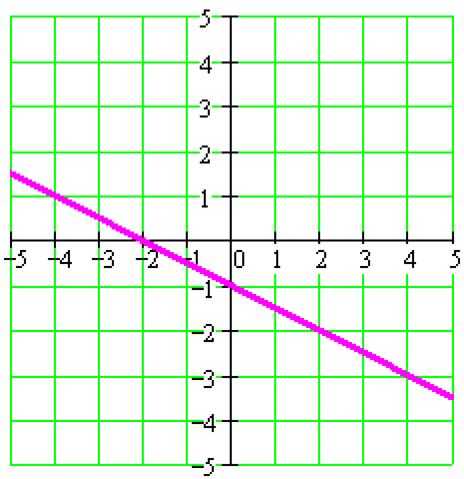
Линейная функция $y = ax + b$

$y = 2x - 3$

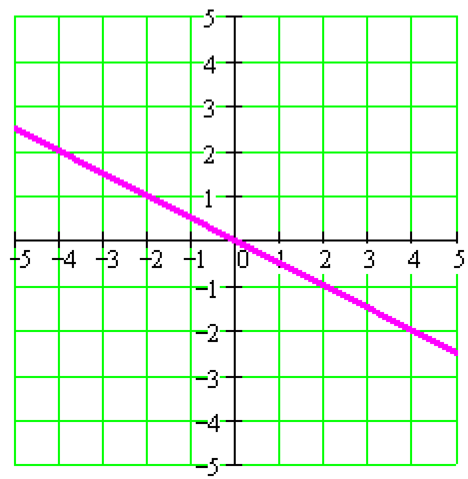




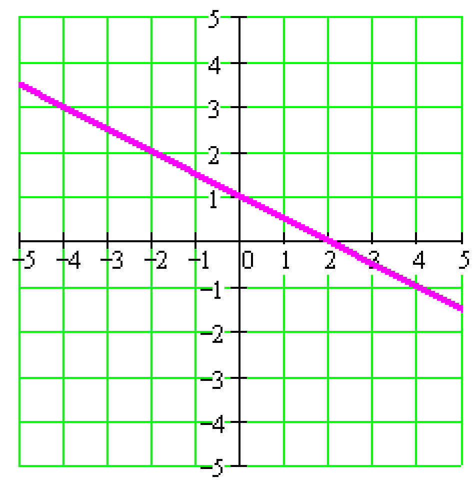
$y = -2x - 3$



$y = -\frac{1}{2}x - 1$



$y = -\frac{1}{2}x$

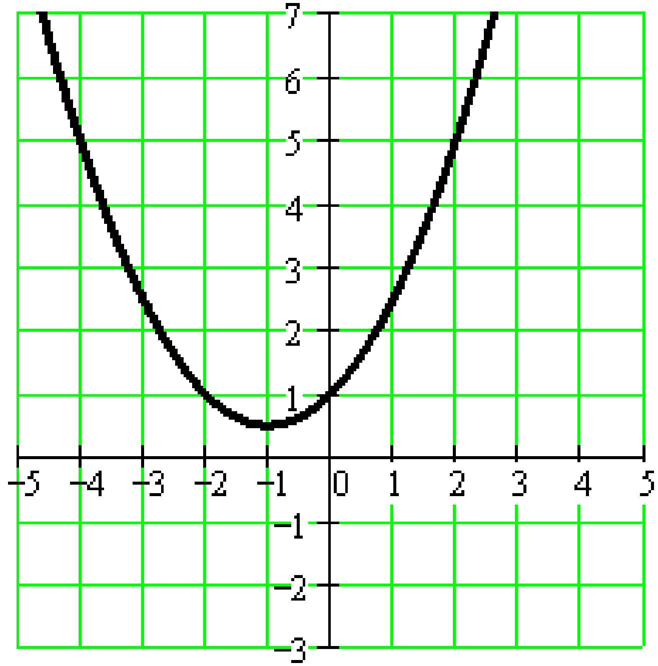


$y = -\frac{1}{2}x + 1$

Квадратичная ф-ция $y = ax^2 + bx + c$

Формула $y = ax^2 + bx + c$, где a, b и c некоторые числа ($a \neq 0$), представляет **квадратичную функцию**

$$y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$$



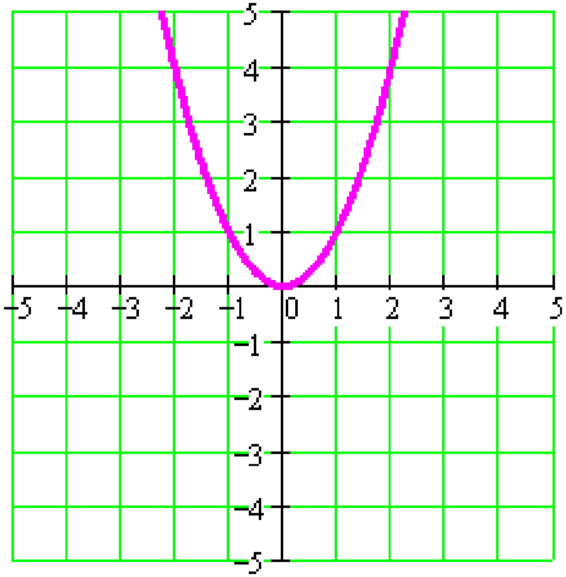
$$a = \frac{1}{2}$$

$$b = 1$$

$$c = 1$$

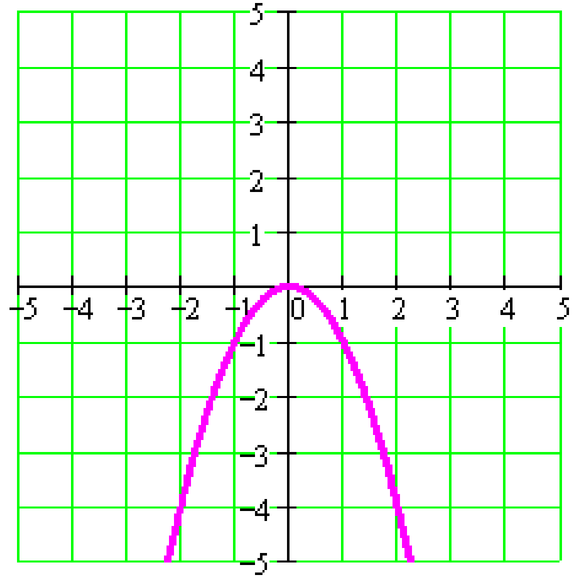
Абсцисса вершины параболы $\boxed{x_в = -\frac{b}{2a}}$

Квадратичная ф-ция $y = ax^2 + bx + c$



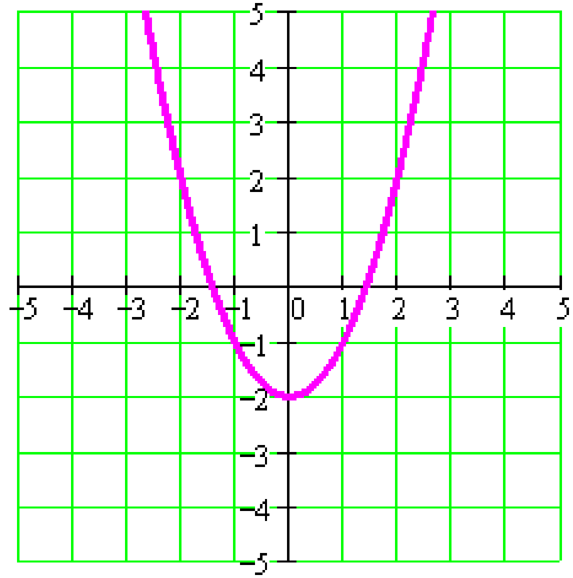
$$y = x^2$$

$$a > 0, \uparrow$$



$$y = -x^2$$

$$a < 0, \downarrow$$



$$y = x^2 - 2$$

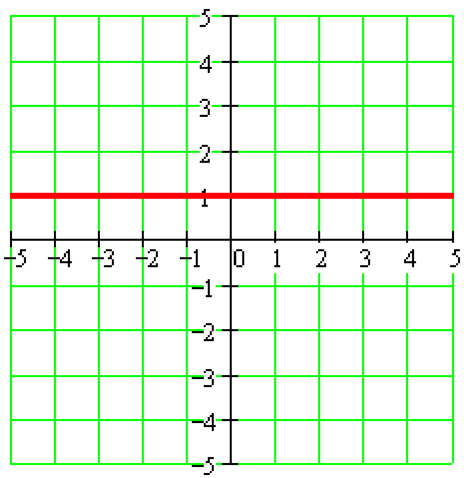
$$a > 0, \uparrow$$

Степенные функции

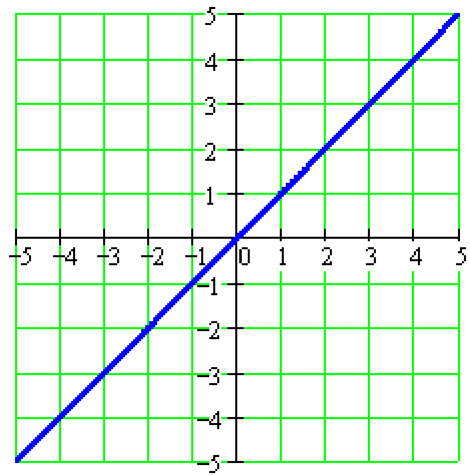
Степенными называются функции, которые представлены формулой $y = x^a$, где $a \in R$

1. Показатель степени *a* – натуральное число

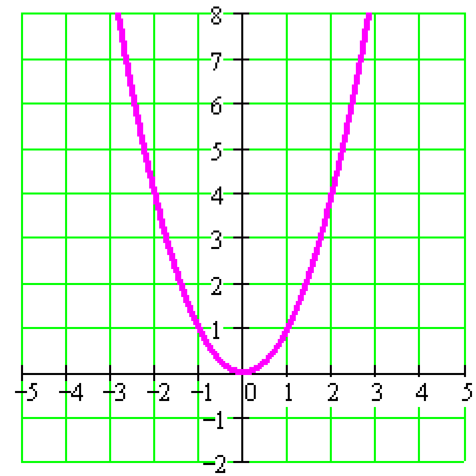
Если $a \in N$ и $a \neq 0$, то $X \in R$



$y = x^0$



$y = x^1$

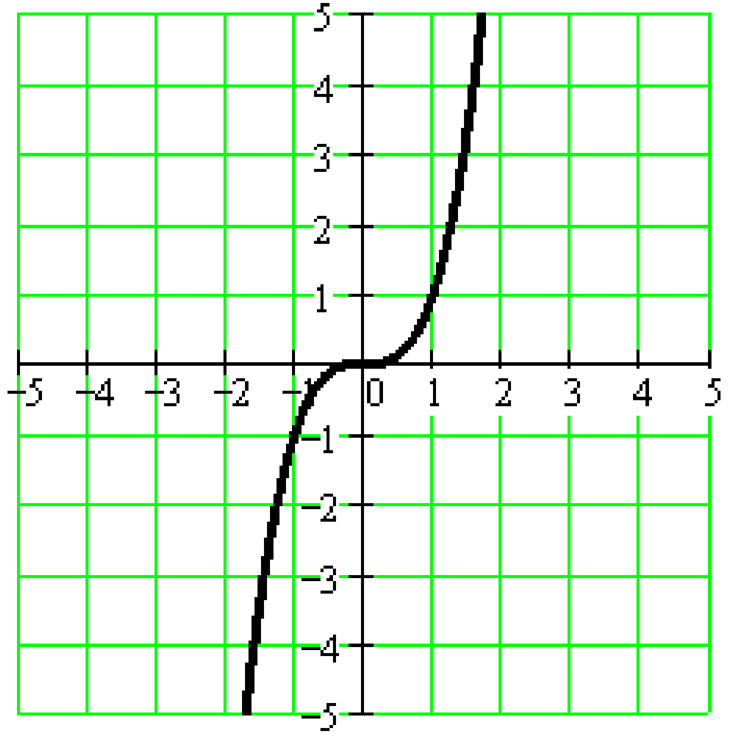


$y = x^2$

Степенные функции

1.1. *Функция* $y = x^3$ ***или кубическая***

1. $\boldsymbol{X}$ **= (–∞; ∞)**
2. $\boldsymbol{Y}$ **= (–∞; ∞)**
3. **Строго возрастающая**



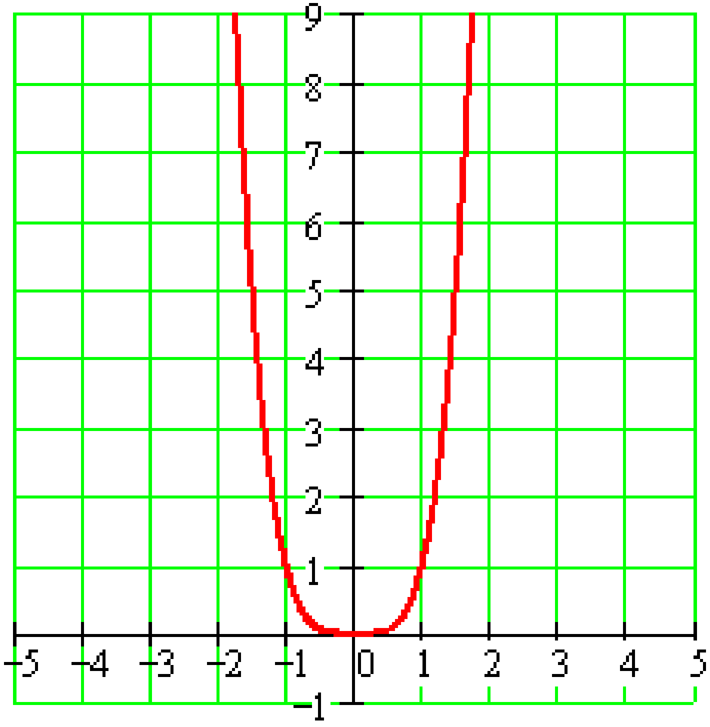
Кубическая парабола

$$y = x^3$$

Степенные функции

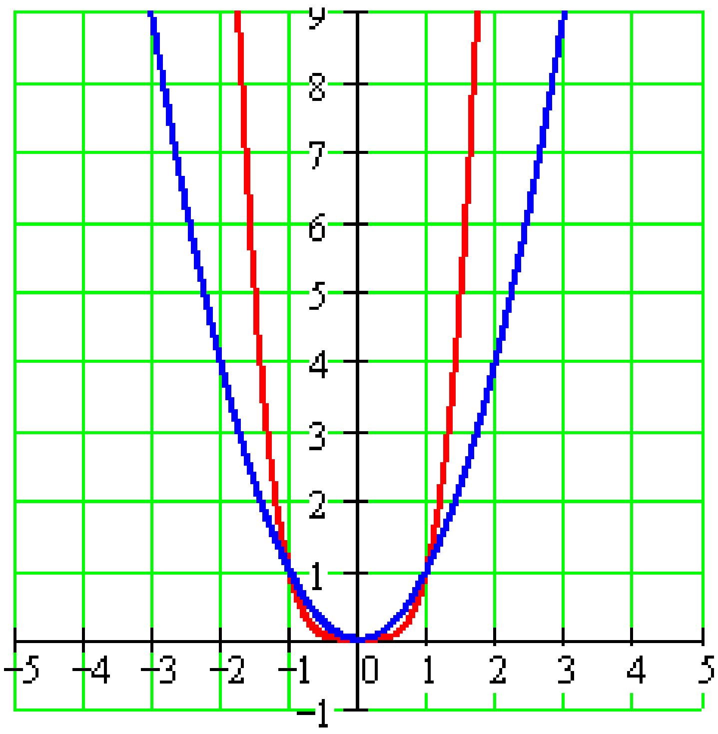
1.2. ***Функция*** $y = x^4$

парабола четвертой степени



$y = x^4$

$y = x^4$

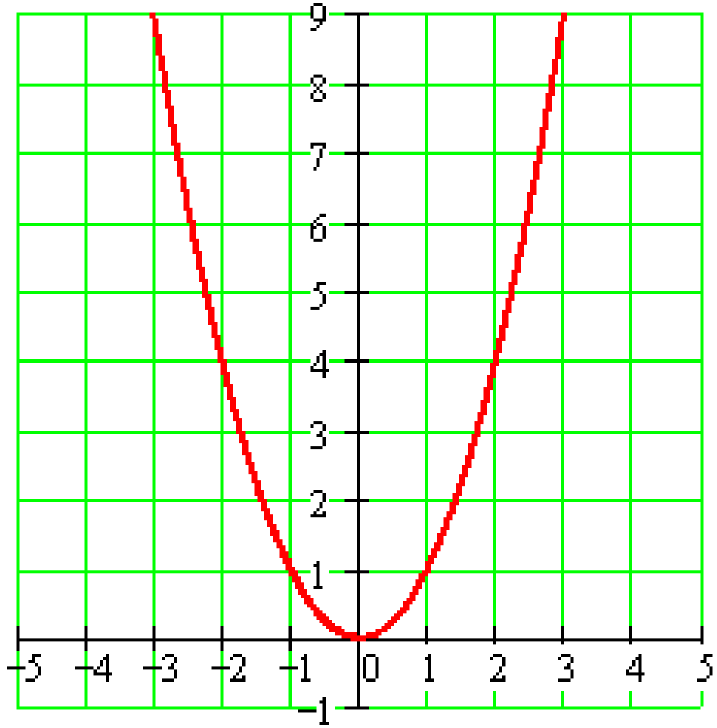


$y = x^2$

Степенные функции

1.3. *Функция* $y = x^{2n}, n \in Z^{+}$

$y = x^{2n}$



1. $\boldsymbol{X = R}$
2. $\boldsymbol{Y = [0; \infty)}$
3. $X^{+} = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$
4. $X^{-} = \varnothing$
5. $X_0 = \{0\}$
6. $X \uparrow = (0; \infty)$
7. $X \downarrow = (-\infty; 0)$
8. $X_e = \{0\}$
9. **четная функция**

График **симметричен** относительно **оси ординат**

Степенные функции

1.4. *Функция* $y = x^{2n+1}, n \in Z^+$

нечетная функция

1. $\boldsymbol{X = R}$
2. $\boldsymbol{Y = R}$
3. $X^+ = (0;\infty)$
4. $X^- = (-\infty;0)$
5. $X_0 = \{0\}$
6. $X \uparrow = (-\infty;\infty)$
7. $X \downarrow = \varnothing$
8. $X_e = \varnothing$

$y = x^{2n+1}$

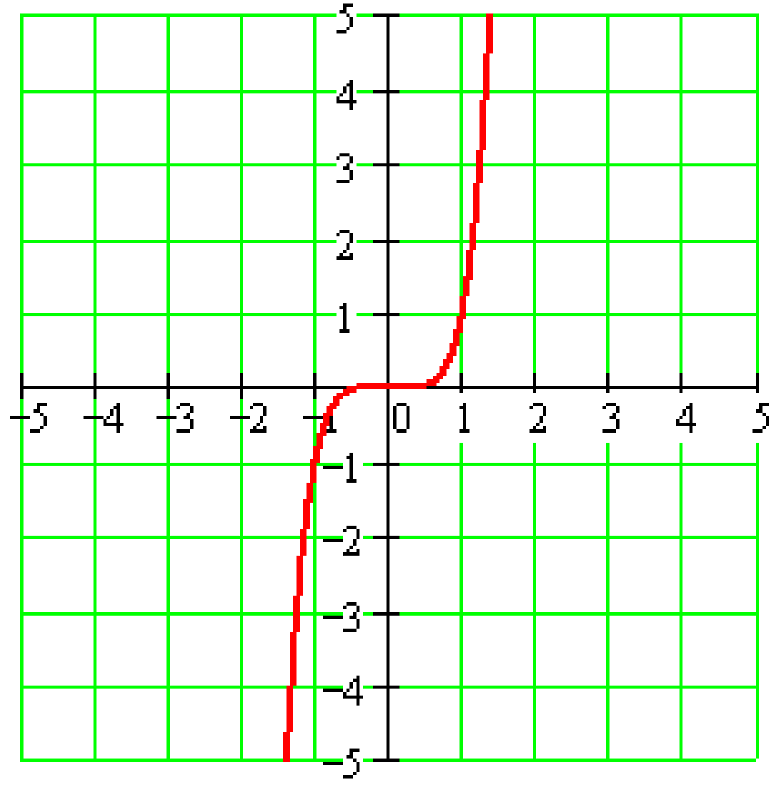


График **симметричен** относительно **начала координат**

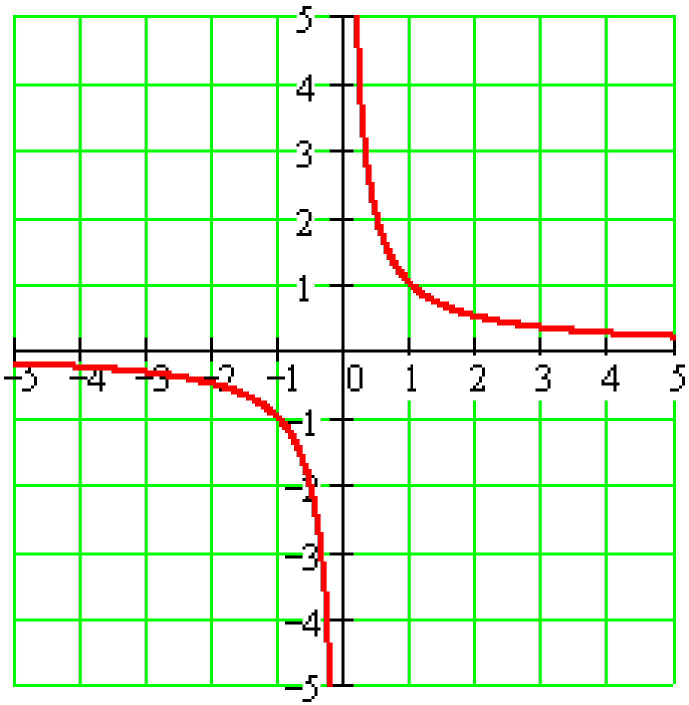
Степенные функции

2. Показатель степени *a* – целое отрицательное число

$$y = x^{-n}, n \in Z^-$$

1. $X = (-\infty;0)\cup(0;\infty)$
2. $Y = (-\infty;0)\cup(0;\infty)$

гипербола $y = \dfrac{1}{x}$



нечетная функция

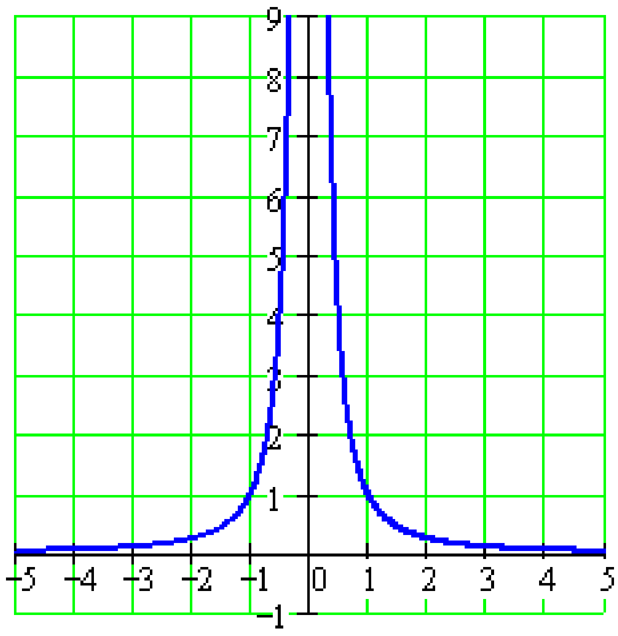
График **симметричен** относительно **начала координат**

Степенные функции

2.1. *Функция* $y = x^{-2}$ ***или*** $y = \dfrac{1}{x^2}$

1. $X = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$
2. $Y = (0; \infty)$
3. $X^+ = X$

четная функция



$y = x^{-2}$

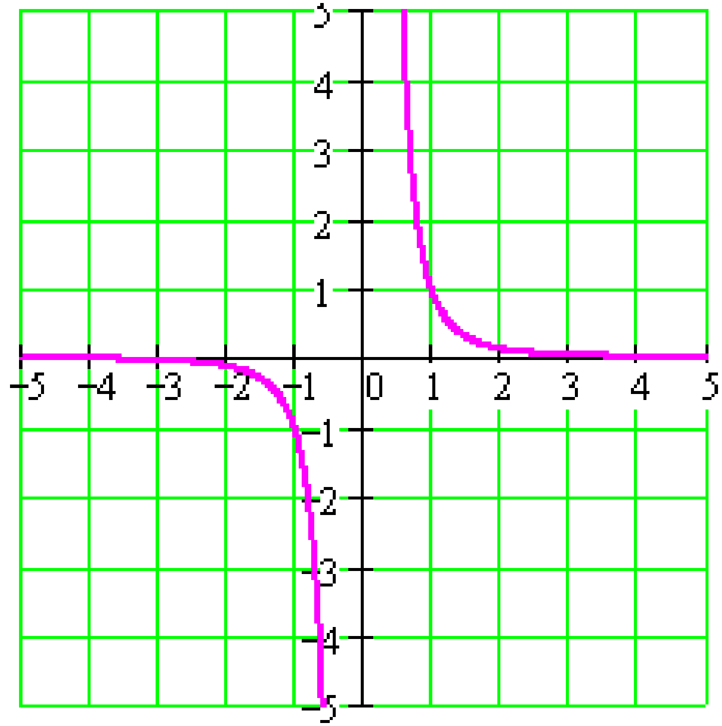
График **симметричен** относительно **оси ординат**

Степенные функции

2.1. *Функция* $y = x^{-3}$ ***или*** $y = \dfrac{1}{x^3}$

$y = x^{-3}$

1. $X = (-\infty;0) \cup (0;\infty)$
2. $Y = (-\infty;0) \cup (0;\infty)$

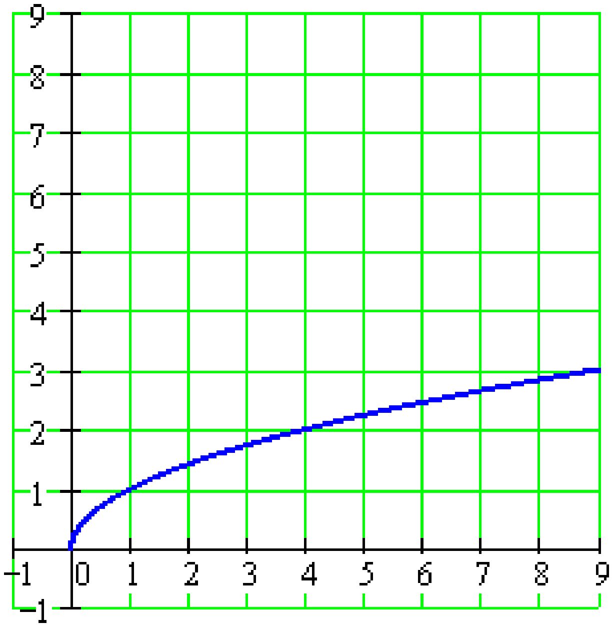


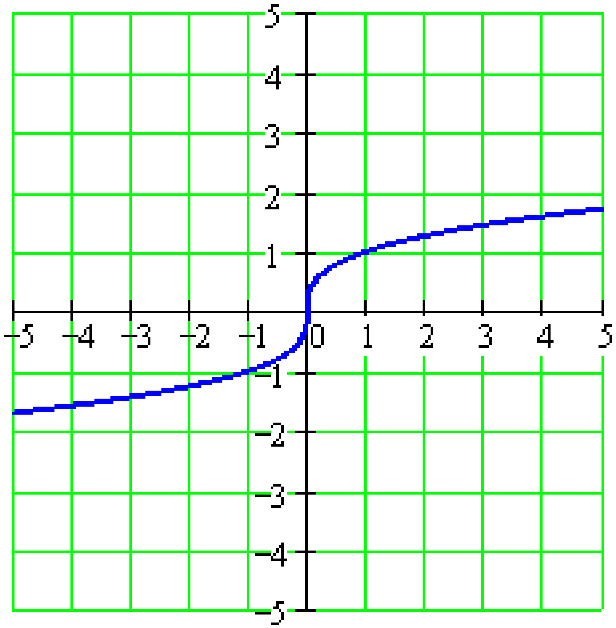
нечетная функция

График **симметричен** относительно **начала координат**

Иррациональные функции

$$y = \sqrt[n]{x}, n \in N, n > 1$$





$$y = \sqrt{x}$$

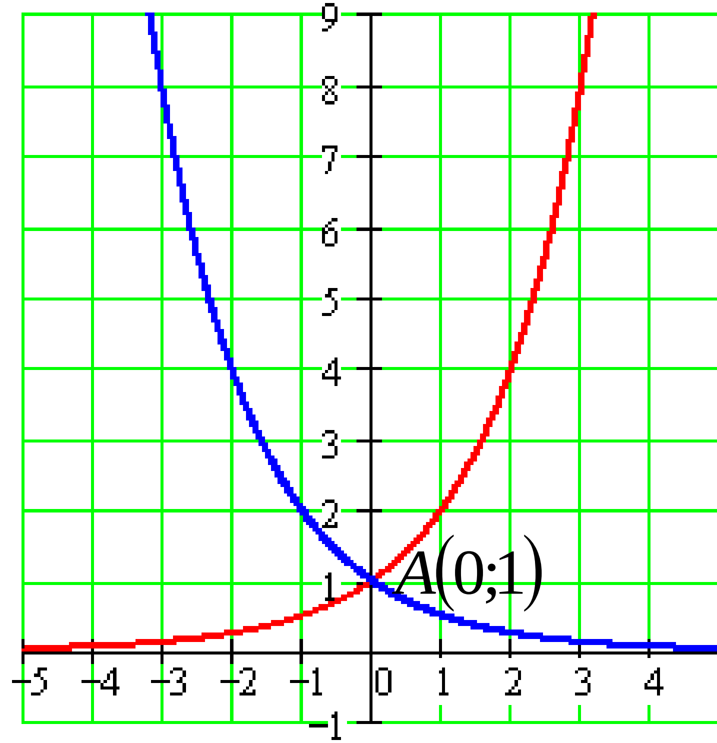
$$y = \sqrt[3]{x}$$

Показательные функции

Функция $y = ca^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $x \in R$, называется **показательной**.

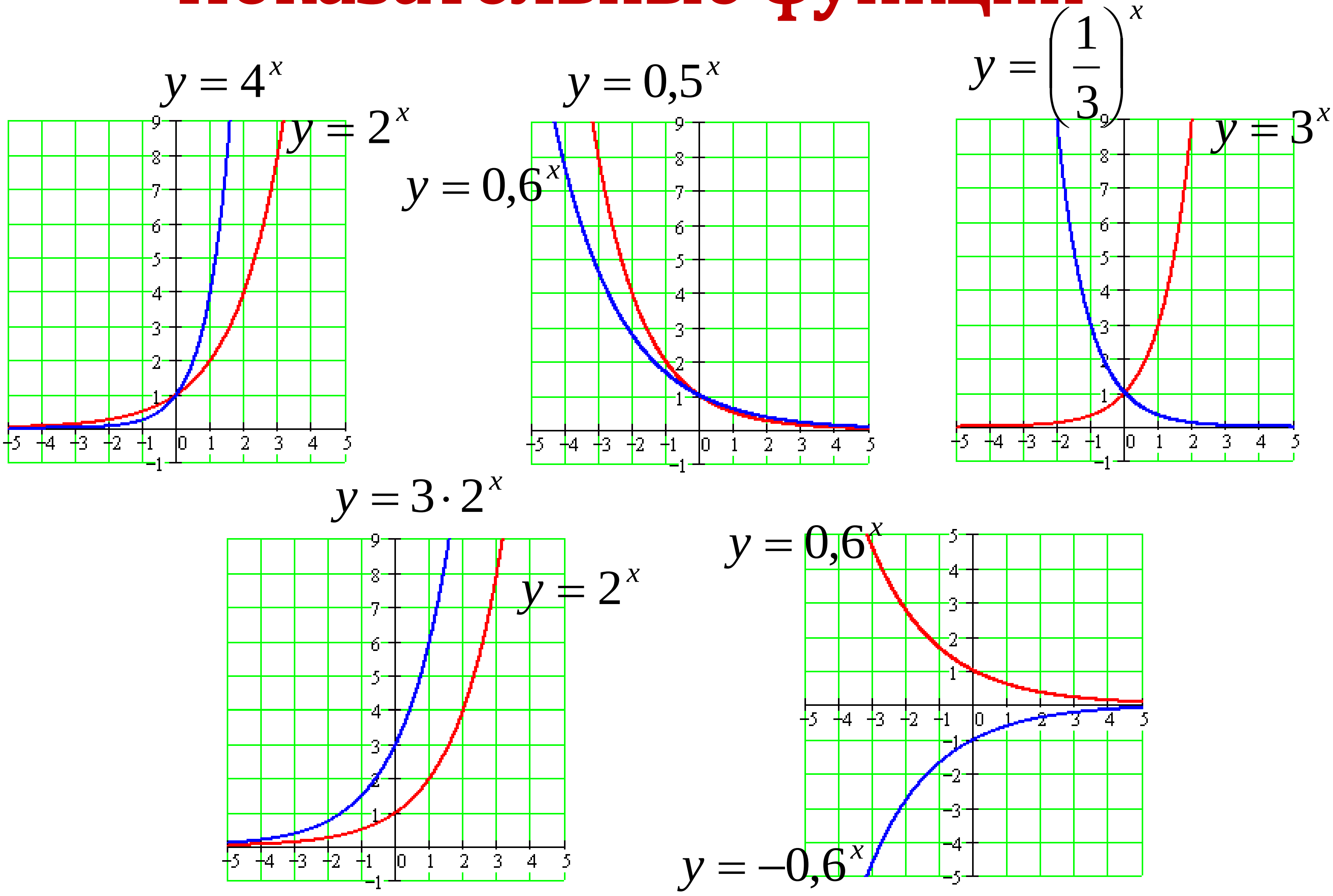
$$y = \frac{1}{a^x} \qquad y = a^x$$

1. $\boldsymbol{X = R}$
2. $Y = (0; \infty)$
3. $X^+ = X = R$
4. $X^- = \varnothing$
5. $A(0;1) \in y$
6. Если $a > 1$, то $X \uparrow$,
   если $a < 1$, то $X \downarrow$
7. $X_0 = \varnothing$
8. $X_e = \varnothing$



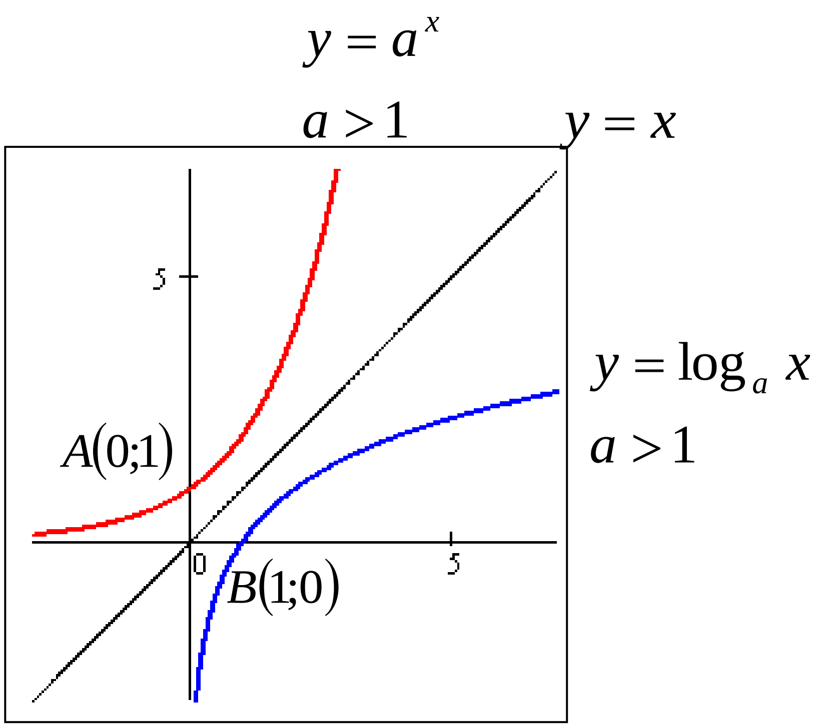
графики **симметричны** относительно **оси *y***

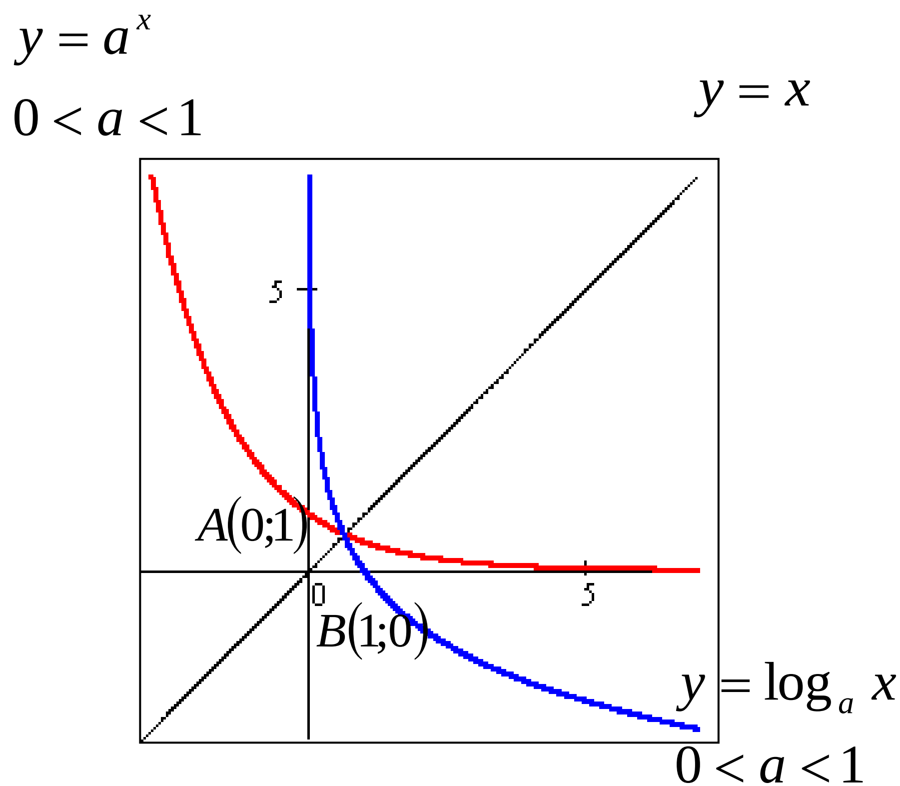
Показательные функции



Логарифмические функции

Логарифмической называется функция $y = \log_a x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, которая является обратной для показательной функции $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$.

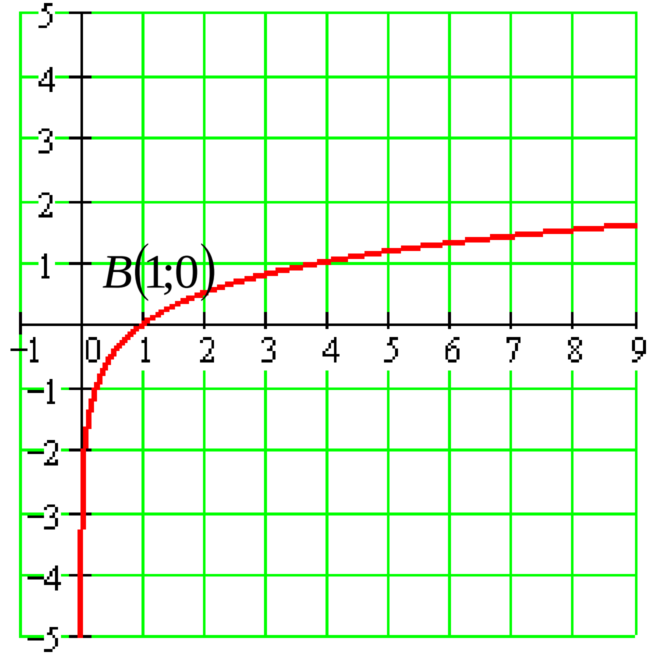




Логарифмические функции

Если $\boldsymbol{a} > \mathbf{1}$

1. $X = (0; \infty)$
2. $\boldsymbol{Y = R}$
3. $X^{+} = (1; \infty)$
4. $X^{-} = (0; 1)$
5. $B(1; 0) \in y$
6. $X \uparrow = X = (0; \infty)$
7. $X \downarrow = \varnothing$
8. $X_0 = \{1\}$
9. Асимптота графика – ось y



$y = \log_a x$

$a > 1$

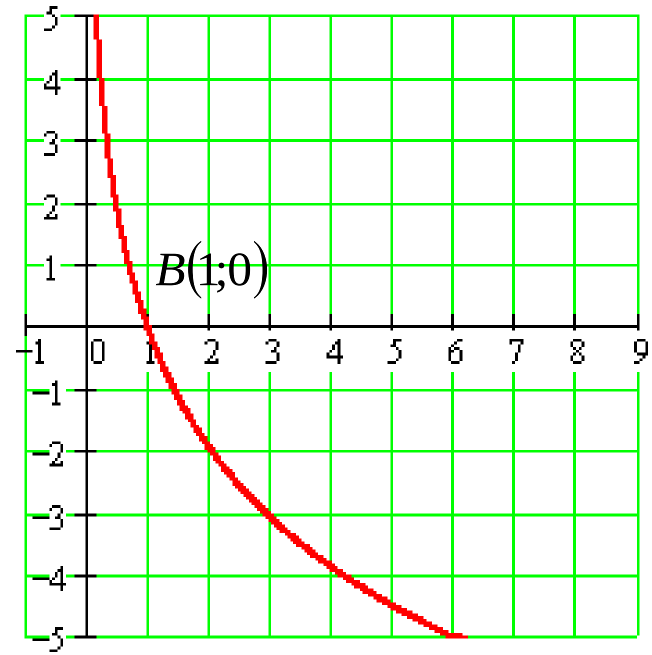
Логарифмические функции

Если **0 < *a* < 1**

1. $X = (0; \infty)$
2. $\boldsymbol{Y = R}$
3. $X^{+} = (0;1)$
4. $X^{-} = (1; \infty)$
5. $B(1;0) \in y$
6. $X \uparrow = \varnothing$
7. $X \downarrow = X = (0; \infty)$
8. $X_{0} = \{1\}$
9. Асимптота графика – ось y

$y = \log_a x$

$0 < a < 1$

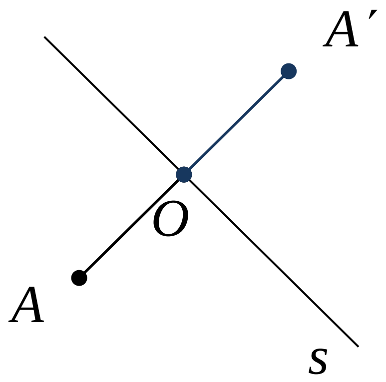


Преобразования графиков

1. ***Симметрия графика относительно координатных осей и начала координат***

Симметрией фигуры относительно **прямой *s*** называется преобразование, при котором каждая точка A и ее отображение A' симметричны относительно прямой s, это значит, что $AO = OA'$ и $AA' \perp s$

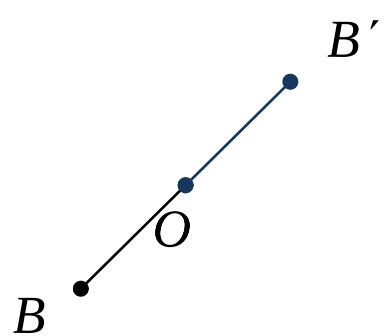
$AO = OA'$



Преобразования графиков

Симметрией фигуры относительно **точки *O*** называется преобразование, при котором каждая точка B и ее отображение B' симметричны относительно точки O, это значит, что точки B, O и B' расположены на одной прямой и $BO = OB'$

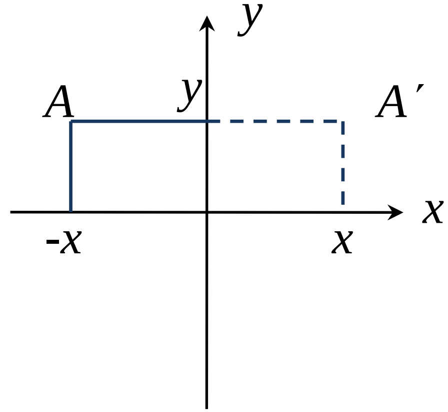
$BO = OB'$

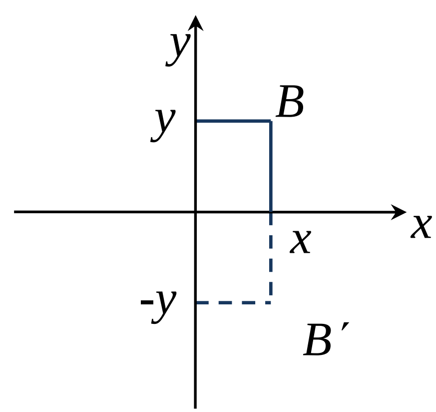


Преобразования графиков

При симметрии относительно **оси *y*** ордината точки остается прежней, а знак абсциссы меняется на противоположный. Точка $A(–x;\, y)$ отображается в точку $A'(x;\, y)$.

При симметрии относительно **оси *x*** абсцисса точки остается прежней, а знак ординаты меняется на противоположный. Точка $B(x;\, y)$ отображается в точку $B'(x;\, –y)$.





Преобразования графиков

Следовательно, при симметрии графика $y = f(x)$

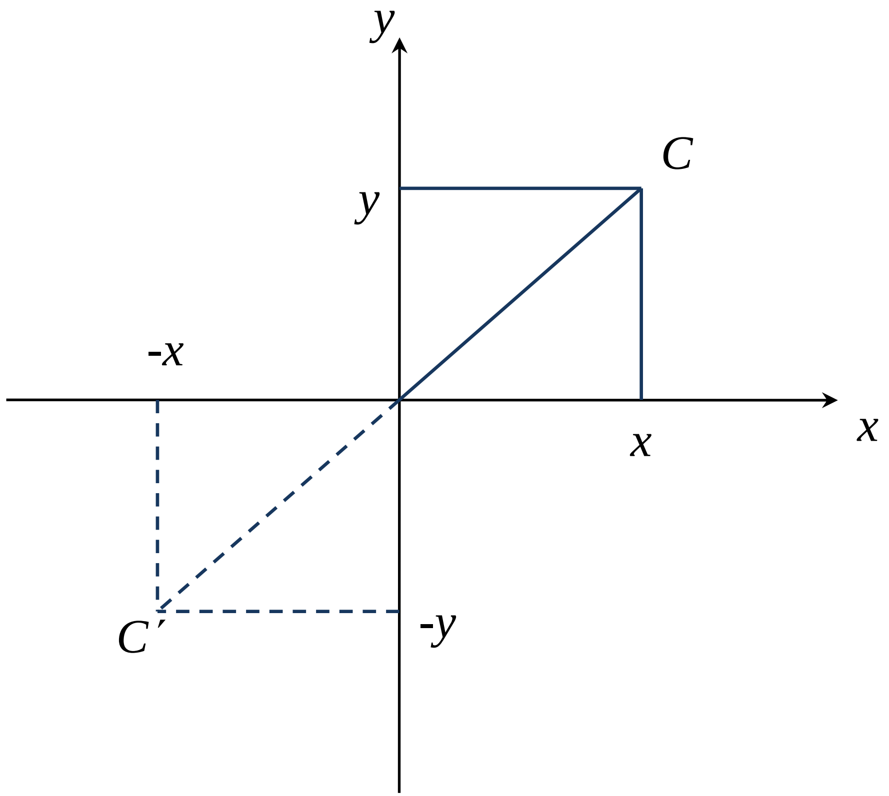
относительно оси x получаем график $y = -f(x)$

относительно оси y получаем график $y = f(-x)$.

При симметрии относительно **начала координат** знак как абсциссы так и ординаты меняется на противоположный. Точка $C(x; y)$ отображается в точку $C'(-x; -y)$.

Следовательно, при симметрии графика $y = f(x)$ относительно начала координат получаем график функции $-y = f(-x)$ или график функции $y = -f(-x)$.

Преобразования графиков

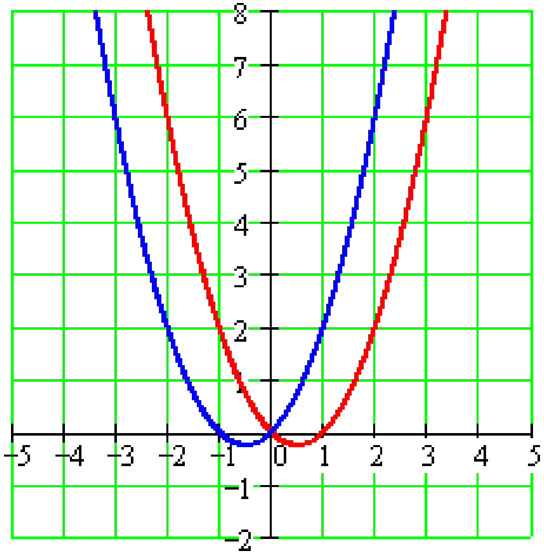


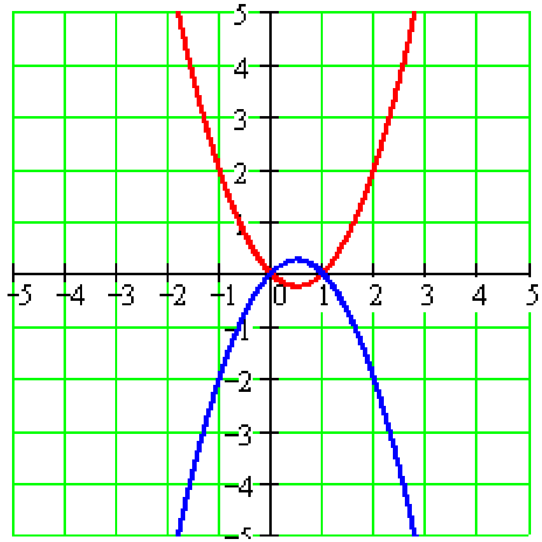
Симметрия относительно **начала координат**

Преобразования графиков

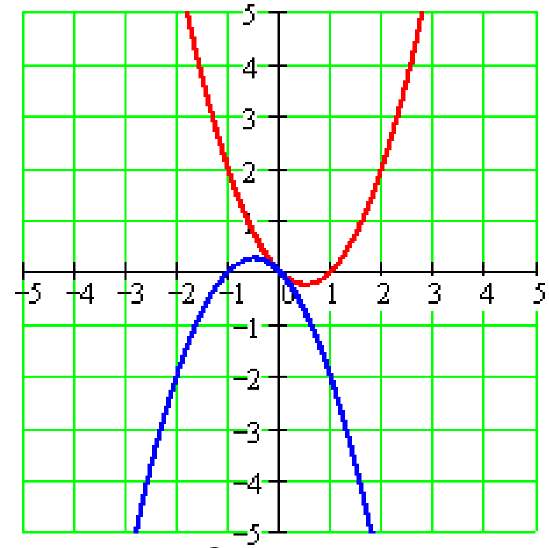
Пример 1. *Симметрия графика функции* $y = x^2 - x$ *относительно координатных осей и начала координат.*

оси ординат	оси абсцисс	начала координат
$y = x^2 + x$ $y = x^2 - x$	$y = x^2 - x$	$y = x^2 - x$





$y = -x^2 + x$

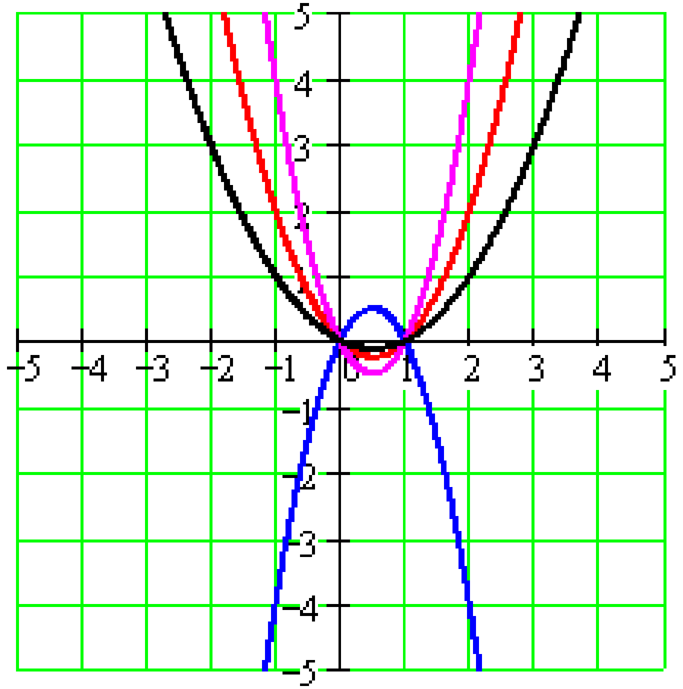


$y = -x^2 - x$

Преобразования графиков

2. *График функции* $\boldsymbol{y = af(x)}$

Пусть дан график функции $y = f(x)$. Для построения графика функции $y = af(x)$, следует ординату каждой точки графика функции $y = f(x)$ умножить на число a.



$$y = x^2 - x$$

$$y = -2\left(x^2 - x\right)$$

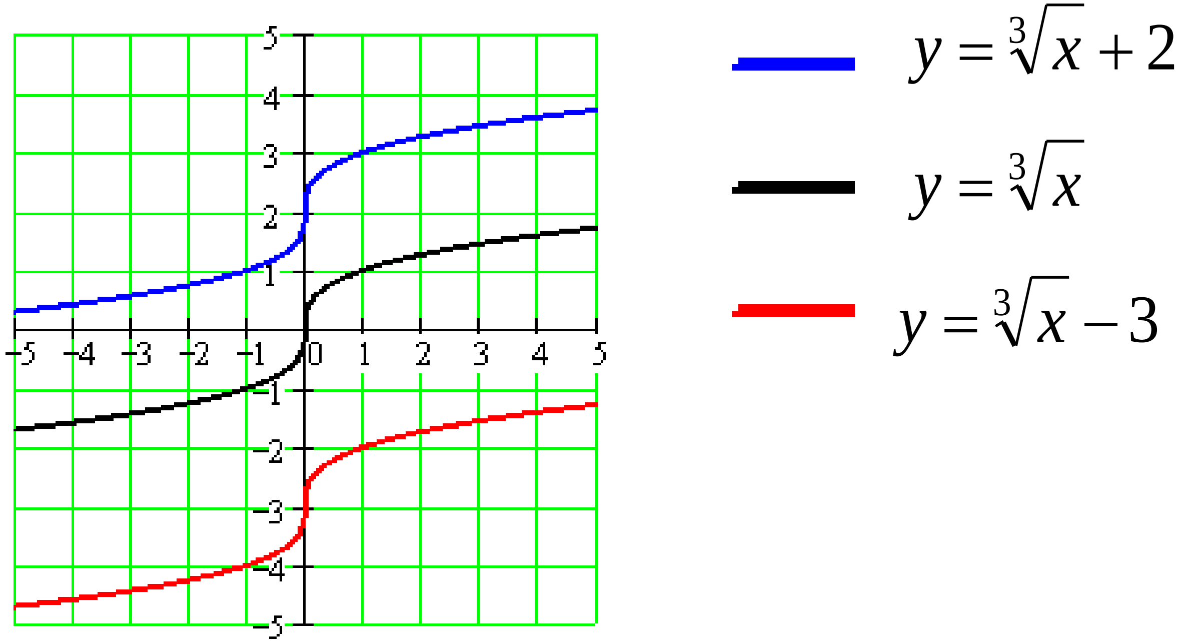
$$y = 2\left(x^2 - x\right)$$

$$y = \frac{1}{2}\left(x^2 - x\right)$$

Преобразования графиков

3. ***График функции*** $\boldsymbol{y = f(x) + a}$

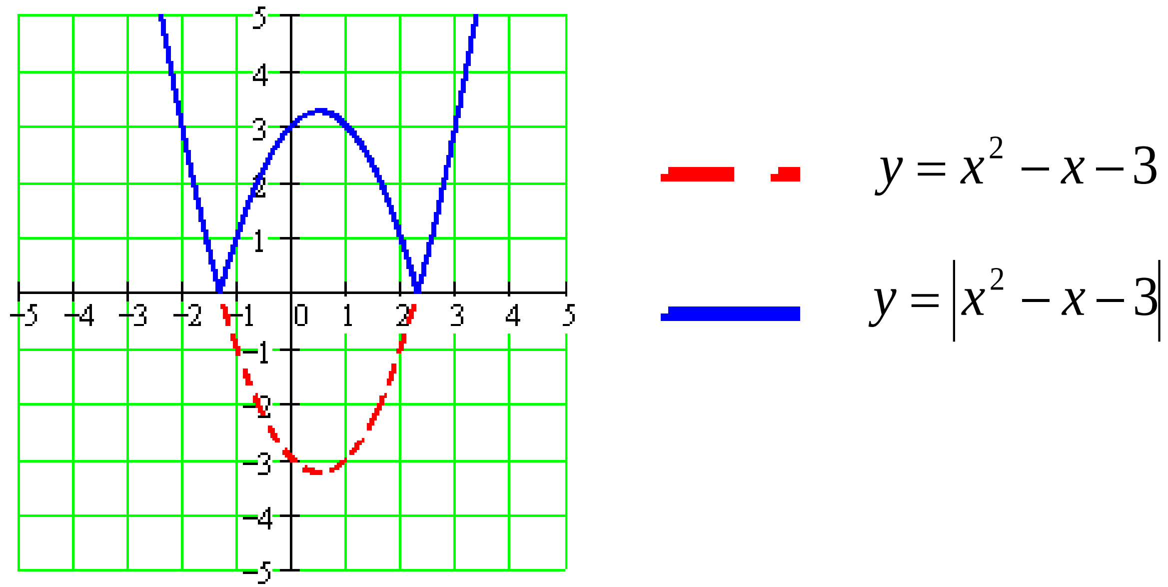
В данном случае каждая точка $A(x;\, y)$ графика функции $y = f(x)$ преобразовывается в точку $A'(x;\, y + a)$. Это значит, что график следует сместить на a единиц вверх, если $a > 0$ и на $|a|$ единиц вниз, если $a < 0$.



Преобразования графиков

4. *График функции* $y = |f(x)|$

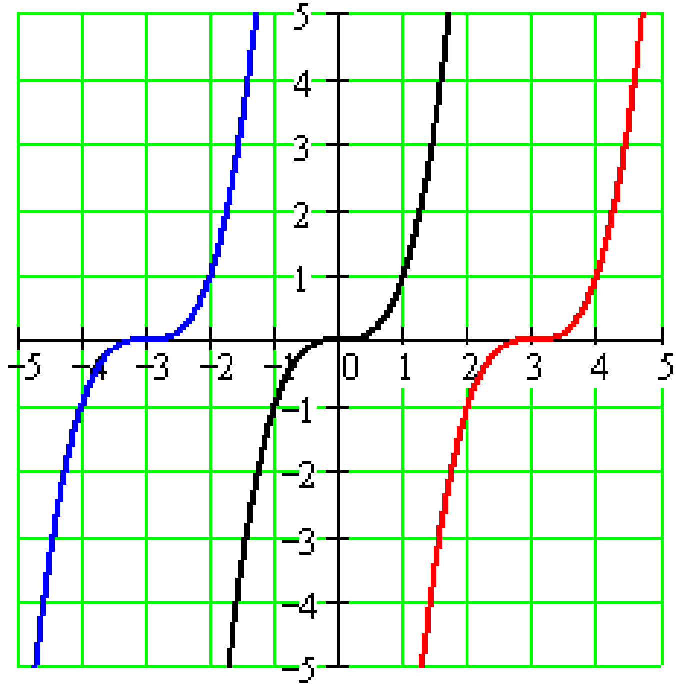
В данном случае каждая точка $A(x;\, y)$ графика функции $y = f(x)$ преобразовывается в точку $A'(x;\, |y|)$. Согласно определению модуля числа, для нахождения $|y|$ в случае отрицательного значения y, следует взять противоположное ему число. В результате такого преобразования часть графика, находящаяся ниже оси x отображается относительно оси абсцисс наверх, при этом верхняя часть графика остается без изменений.



Преобразования графиков

5. График функции $y = f(x - a)$

Для получения графика функции $y = f(x - a)$ следует график функции $y = f(x)$ сместить на a единиц вправо, если $a > 0$, и на $|a|$ на единиц влево, если $a < 0$.



$y = x^3 + 3$

$y = x^3$

$y = x^3 - 3$

Упражнения

Найти область определения функций

$$1)\ y=\sqrt{x^2-9}$$

$$\{x\in(-\infty;-3]\cup[3;\infty)\}$$

$$2)\ y=-\frac{1}{x^4}$$

$$\{X=R\setminus\{0\}\}$$

$$3)\ y=\frac{x-1}{x^2-4x+3}$$

$$\{X=R\setminus\{1;3\}\}$$

$$4)\ y=\sqrt{36-x^2}$$

$$\{x\in[-6;6]\}$$

$$5)\ y=\frac{1}{x^3}$$

$$\{X=R\setminus\{0\}\}$$

$$6)\ y=\frac{5-x^2}{x^2+2x-8}$$

$$\{X=R\setminus\{-4;2\}\}$$

Упражнения

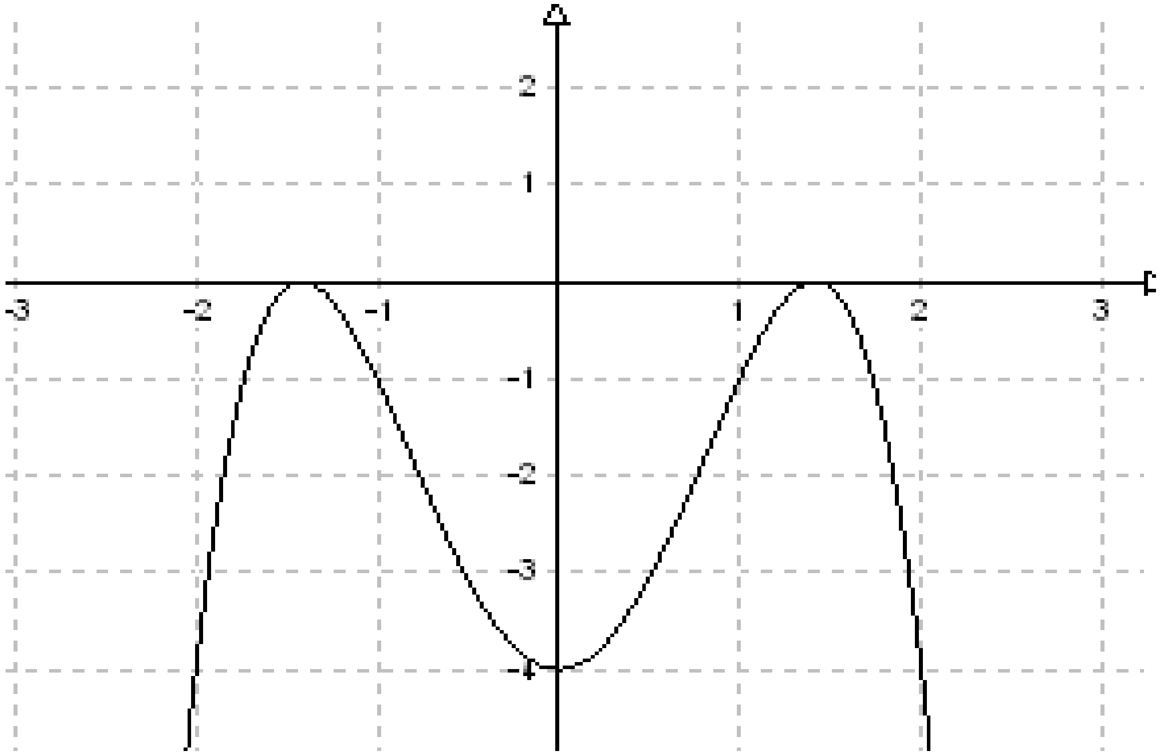
Найти область определения функций

$$1)\ \ y = \log\left(x^2 - 1\right) \qquad \left\{x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)\right\}$$

$$2)\ \ y = \log_a (x + 4) \qquad \begin{cases} x > 4 \\ a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$$

$$3)\ \ y = \log_3\left(x^2 - 10x + 21\right) \qquad \left\{x \in (-\infty; 3) \cup (7; \infty)\right\}$$

Упражнения



Исследовать функцию с помощью графика (X, Y , чётная или нечётная, X_0, X^+, X^-, X_e, $X\uparrow$, $X\downarrow$,).

Упражнения

На рисунке представлены графики следующих функций

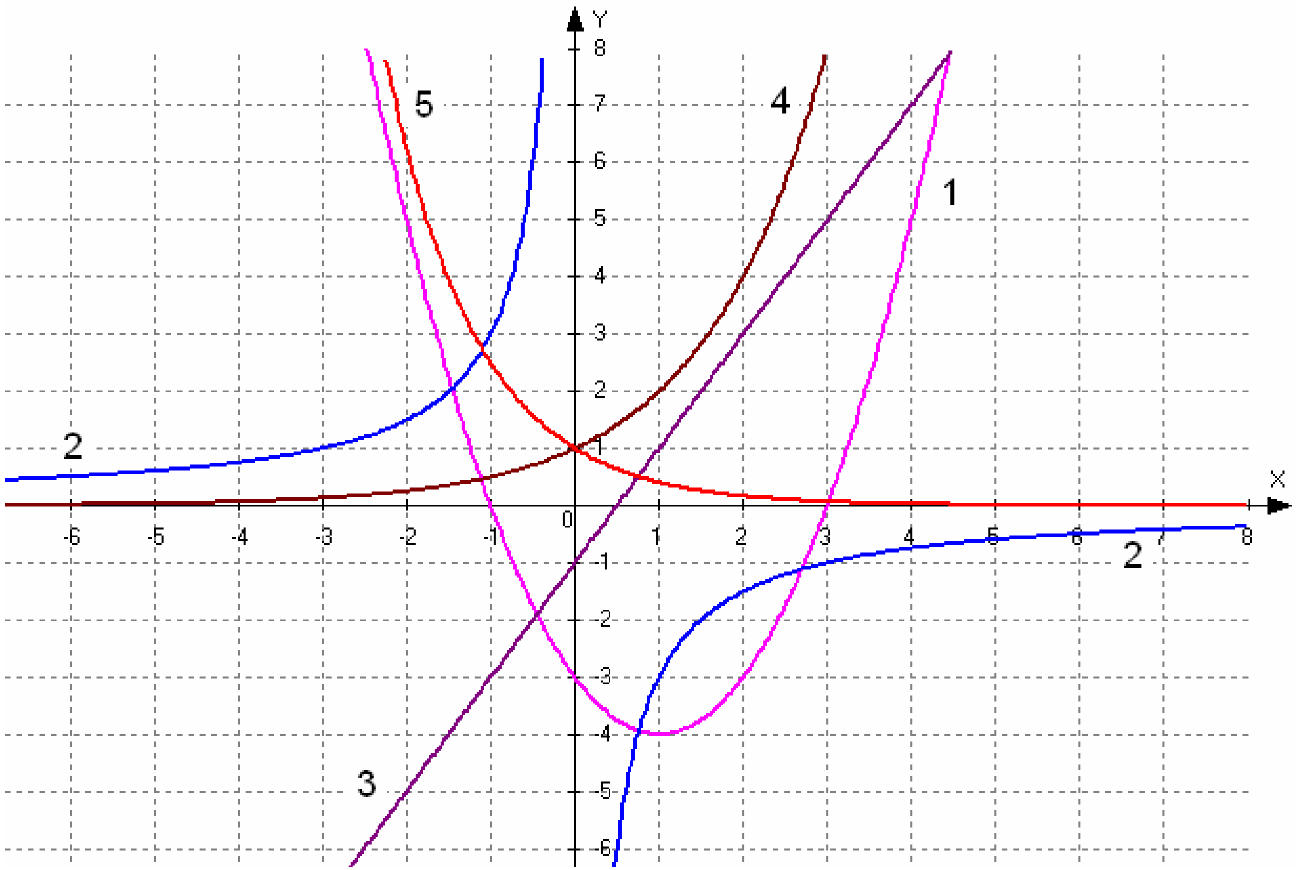
$a) y = 0{,}4^x$

$b) y = 2x - 1$

$c) y = 2^x$

$d) y = x^2 - 2x - 3$

$e) y = \dfrac{-3}{x}$



Установить соответствия формулы и графика

Упражнения

Определить графики каких функций (1, 2, 3) представлены на рисунке