

maΣprof∫.ru

Высшая математика – просто и доступно!

**Интенсивный курс**  
**«Определённые и несобственные интегралы»**

***Настоящая методичка** представляет собой продолжение курса «Горячие интегралы» и **позволит вам:** 1) закрепить навыки решения неопределённых интегралов, 2) научиться решать основные определённые и несобственные интегралы **в кратчайшие сроки!** 3) освоить типовые тематические задачи (нахождение площади плоской фигуры и объёма тела вращения)*

*Предполагается, что читатель умеет интегрировать и понимает, что такое пределы.*

*Автор: Александр Емелин*

## Содержание

1. Определённые интегралы .....	3
1.1. Понятие определённого интеграла .....	3
1.2. Некоторые свойства определённого интеграла .....	5
1.3. Простейшие определённые интегралы .....	6
1.4. Замена переменной в определенном интеграле .....	8
1.5. А если подвести функцию под знак дифференциала? .....	10
1.6. Метод интегрирования по частям в определенном интеграле .....	11
1.7. Геометрический смысл определённого интеграла .....	14
1.8. Как вычислить площадь фигуры с помощью определённого интеграла? .....	15
1.9. Объём тела вращения .....	21
1.10. Интеграл от чётной функции по симметричному относительно 0 отрезку .....	23
1.11. А если подынтегральная функция нечётная? .....	26
2. Несобственные интегралы .....	28
2.1. Понятие несобственного интеграла .....	28
2.2. Несобственный интеграл первого рода .....	29
2.3. Несобственный интеграл с бесконечным нижним пределом .....	34
2.4. Что делать, если оба предела интегрирования бесконечны? .....	35
2.5. Несобственные интегралы второго рода .....	37
2.6. Когда разрывы на обоих концах и / или внутри отрезка интегрирования .....	42
2.7. Интегралы-«ассорти» .....	44
3. Решения и ответы .....	45

# 1. Определённые интегралы

И снова здравствуйте. И снова фирменное вступление одной строкой ☺

## 1.1. Понятие определённого интеграла

В общем виде *определённый интеграл* записывается так:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Что прибавилось по сравнению с неопределённым интегралом? Прибавились *пределы интегрирования*. *Нижний предел интегрирования* стандартно обозначается буквой  $a$ . *Верхний предел интегрирования* стандартно обозначается буквой  $b$ . ...и мы выполним все пункты от «а» до «бэ» ⇒ (с) Отрезок  $[a;b]$  называют *отрезком интегрирования*.

И перед тем, как перейдём к практике, **небольшое faq по теме:**

**Что такое определённый интеграл?** С формальной точки зрения, определённый интеграл – это ЧИСЛО. Да-да, самое что ни на есть обычное число:

**Что значит решить определённый интеграл?** Решить определённый интеграл – это значит, найти это число.

**Как решить определённый интеграл?** С помощью знакомой со школы *формулы Ньютона-Лейбница:*

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

**Формулу перепишите на листок и наклейте на самом видном месте!**

**Этапы решения определённого интеграла следующие:**

1) Сначала находим *первообразную функцию*  $F(x)$  (неопределённый интеграл). Обратите внимание, что константа  $C$  в определённом интеграле **не добавляется**. Обозначение  $\Big|_a^b$  является чисто техническим, и вертикальная палочка не несет никакого математического смысла, по сути – это просто отчёркивание. Зачем нужна сама запись  $F(x)\Big|_a^b$ ? Подготовка для применения *формулы Ньютона-Лейбница*.

2) Подставляем значение *верхнего предела* в первообразную функцию:  $F(b)$ .

3) Подставляем значение *нижнего предела* в первообразную функцию:  $F(a)$ .

4) Рассчитываем (без ошибок!) разность  $F(b) - F(a)$ . Готово.

Вопрос следующий, а на самом деле первый: **всегда ли существует определенный интеграл?** Нет, не всегда.

Например, интеграла  $\int_{-5}^{-2} \frac{dx}{\sqrt{x}}$  не существует, поскольку отрезок интегрирования  $[-5; -2]$  не входит в *область определения* подынтегральной функции (значения под квадратным корнем не могут быть отрицательными). А вот менее очевидный пример:  $\int_{-2}^3 \operatorname{tg} x dx$ . Такого интеграла тоже не существует, так как в точках  $x = -\frac{\pi}{2}$ ,  $x = \frac{\pi}{2}$  отрезка  $[-2; 3]$  не существует тангенса. И я рекомендую сразу окинуть взглядом *Приложение Графики основных функций и их построение* и оценить ситуацию геометрически: там, где нет графика – те значения, а не входят в *область определения* той или иной функции.

Таким образом, **чтобы определенный интеграл вообще существовал, нужно чтобы подынтегральная функция была непрерывной на отрезке интегрирования.** Понятие *непрерывности* тоже интуитивно понятно – если график можно начертить, не отрывая карандаша от бумаги, то данная функция непрерывна на этом участке.

И из вышесказанного следует **первая важная рекомендация:** перед тем, как приступить к решению ЛЮБОГО определенного интеграла, желательно убедиться в том, что подынтегральная функция **непрерывна на отрезке интегрирования.**

В противном случае может получиться такой казус:

$$\int_{-5}^{-2} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2(\sqrt{x}) \Big|_{-5}^{-2} \dots \text{что делать???!} - \text{ведь нельзя же подставлять отрицательные}$$

числа под корень!

А сделать надо было следующее: предварительно проверить функцию на непрерывность. И если для решения (*в контрольной работе, на зачете, экзамене*) вам предложен несуществующий интеграл вроде  $\int_{-5}^{-2} \frac{dx}{\sqrt{x}}$  или  $\int_{-2}^3 \operatorname{tg} x dx$ , то можно дать ответ, что интеграла не существует, и обосновать, почему. Но не нужно. Скорее всего, это опечатка, и преподаватель предложит вам корректный вариант, поэтому будет хорошей идеей сразу получить консультацию на этот счёт.

**Может ли определенный интеграл быть равен отрицательному числу?** Может. И отрицательному числу. И нулю. Может даже получиться бесконечность, но это уже будет **несобственный интеграл**, коим посвящена следующая глава.

**Может ли нижний предел интегрирования быть больше верхнего предела интегрирования?** Может, и такая ситуация реально встречается на практике:

$$\int_6^0 (1-x) dx - \text{интеграл преспокойно вычисляется по формуле Ньютона-Лейбница.}$$

Без чего не обходится математика? Конечно же, без всевозможных свойств:

## 1.2. Некоторые свойства определённого интеграла

В этом маленьком параграфе я перечислю свойства, которые имеют большое значение для практики.

**1. В определенном интеграле можно переставить верхний и нижний предел интегрирования, сменив у интеграла знак:**

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Например, в определенном интеграле  $\int_6^0 (1-x)dx$  перед интегрированием целесообразно поменять пределы интегрирования на «привычный» порядок:

....

– в таком виде интегрировать значительно удобнее.

«Минус» перед интегралом – тоже плохая вещь (легко запутаться), и поэтому по возможности от него следует избавляться, что я и сделал на втором шаге.

**2. Как и для неопределенного интеграла, для определённого интеграла справедливо свойство линейности.** Это свойство состоит в двух правилах:

$$\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx, \text{ где } k = const - \text{ множитель-константу (число) можно вынести}$$

за знак интеграла. Или наоборот, внести (так, в предыдущем пункте я как раз внёс  $-1$  внутрь интеграла).

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx - \text{ данное правило справедливо не только для}$$

двух, но и для большего количества слагаемых\*, например, для трёх:

$$\int_a^b (f(x) + g(x) - h(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx - \int_a^b h(x)dx$$

\* *Напоминаю*, что разность – есть алгебраическая сумма:  $g - h = g + (-h)$

**3. Для определенного интеграла работает формула интегрирования по частям:**

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

**4. В определенном интеграле можно проводить замену переменной интегрирования и подводить под знак дифференциала.** Но по сравнению с неопределенным интегралом тут есть своя специфика, о которой мы поговорим в соответствующем параграфе.

Разумеется, существуют и другие свойства, но для ближайшей практики этого вполне достаточно. И она никогда не была так близка:

### 1.3. Простейшие определённые интегралы

Начинаем:

#### Пример 1

Вычислить определенный интеграл

$$\int_1^2 2x^2 dx$$

Сначала **решение**, затем комментарии:

$$\int_1^2 2x^2 dx = 2 \int_1^2 x^2 dx = 2 \cdot \frac{1}{3} \dots$$

(1) Выносим константу за знак интеграла.

(2) Интегрируем по таблице (см. *Приложения*) с помощью самой популярной формулы  $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ . Появившуюся константу  $\frac{1}{3}$  целесообразно сразу отделить от  $x^3$  и вынести за скобку (*кстати, ещё одно свойство*). Делать это не обязательно, но желательно – зачем лишние вычисления?

(3) Используем *формулу Ньютона-Лейбница*  $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$ .

Сначала подставляем в  $x^3$  верхний предел, затем – нижний предел. Проводим дальнейшие вычисления и получаем окончательный ответ.

#### Пример 2

Вычислить определенный интеграл

$$\int_1^5 \frac{7 dx}{x}$$

Это пример для самостоятельного решения. **ОБЯЗАТЕЛЬНО прорешиваем все предлагаемые мной примеры от руки!!** Ручка и тетрадь под рукой? Отлично. Кроме того, открываем и освежаем в памяти *Таблицу интегралов* и *Таблицу производных* (см. приложения к курсу).

... всё получилось? Свериться с решениями можно в конце книги.

**Также проверьте, есть ли у вас калькулятор.**

Хотя бы самый простой. Но лучше с функциями (логарифмами, синусами и т.д.). На всякий бедственный случай прилагаю к курсу *калькулятор в Экселе*. А ещё лучше, если у вас есть калькулятор, который считает **обыкновенные дроби**. Потому что с дробовиком всё нипочём.

...оружие под рукой? Продолжаем!

### Пример 3

Вычислить определенный интеграл

$$\int_{-2}^4 (8 + 2x - x^2) dx$$

Сначала **решение**, затем комментарии:

$$\begin{aligned} \int_{-2}^4 (8 + 2x - x^2) dx & \stackrel{(1)}{=} 8 \int_{-2}^4 dx + 2 \int_{-2}^4 x dx - \int_{-2}^4 x^2 dx \stackrel{(2)}{=} 8(x) \Big|_{-2}^4 + 2 \cdot \frac{1}{2} (x^2) \Big|_{-2}^4 - \dots \stackrel{(3)}{=} \\ & = 8(4 - (-2)) + \dots - \frac{1}{3} (4^3 - (-2)^3) = 8 \cdot 6 + (16 - 4) - \frac{1}{3} (64 + 8) = \\ & = 48 + 12 - 24 = 36 \end{aligned}$$

(1) Используем **свойство линейности** определенного интеграла.

(2) Интегрируем по таблице, при этом все появившиеся константы выносим – они не будут участвовать в подстановке верхнего и нижнего предела.

(3) Для каждого из трёх слагаемых применяем формулу Ньютона-Лейбница и рассчитываем  $F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$ .

**СЛАБОЕ ЗВЕНО в определенном интеграле – это ошибки вычислений, в частности, часто встречающаяся ПУТАНИЦА В ЗНАКАХ.**

**Поэтому будьте внимательны!** Особое внимание заостряю на 3-м слагаемом:

$-\frac{1}{3}(4^3 - (-2)^3) = -\frac{1}{3}(64 + 8)$  – первое место в хит-параде ошибок по невнимательности, здесь очень часто теряют минус:  $-\frac{1}{3}(4^3 - (-2)^3) = -\frac{1}{3}(64 - 8)$  (особенно, когда подстановка верхнего и нижнего предела проводится устно и не расписывается подробно).

Следует заметить, что рассмотренный способ решения – не единственный, и даже при небольшом опыте его можно значительно сократить. Примерно так:

$$\int_{-2}^4 (8 + 2x - x^2) dx = \left( 8x + x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-2}^4 = \dots$$

Здесь устно используем правила линейности, устно интегрируем по таблице и в результате получаем всего лишь одну скобку с отчёркиванием пределов:  $\left( 8x + x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-2}^4$  (в отличие от трёх скобок в первом способе). Далее в «цельную» *первообразную функцию*, сначала подставляем 4, затем –2, опять же выполняя все действия в уме.

Какие **достоинства** у «короткого» способа решения? Быстрота и компактность записи. А **недостатки**? Повышенный риск допустить ошибку. Поэтому «чайникам» я рекомендую подробное решение. А лучше оба. Для сверки.

Кстати, о сверках и проверках. **Запомните красное правило:**

**Перед тем, как использовать формулу Ньютона-Лейбница, полезно провести проверку: а сама-то первообразная найдена правильно?**

Ибо, если она найдена неверно, то и всё остальное тоже будет неправильным.

Так, применительно к рассмотренному примеру: перед тем, как в первообразную функцию  $8x + x^2 - \frac{x^3}{3}$  подставлять верхний и нижний пределы, желательно проверить, а правильно ли вообще найден неопределенный интеграл? Дифференцируем:

$$\left(8x + x^2 - \frac{x^3}{3}\right)' = 8(x)' + (x^2)' - \frac{1}{3}(x^3)' = 8 \cdot 1 + 2x - \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = 8 + 2x - x^2$$
 – получена

исходная подынтегральная функция, значит, неопределенный интеграл найден верно. Теперь можно и формулу Ньютона-Лейбница применить.

#### Пример 4

Вычислить определенный интеграл

$$\int_{-3}^1 (2x^2 + 3x - 1) dx$$

Решаем самостоятельно. И коротко, и подробно.

### **1.4. Замена переменной в определенном интеграле**

Для определённого интеграла справедливы все типы замен, что и для неопределенного интеграла, но **иногда её проводить нельзя** (о чём позже). Ну а основная новизна состоит в том, **как поменять пределы интегрирования при замене?** В примерах ниже я постараюсь привести такие типы замен, которые не встречались ранее:

#### Пример 5

Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x dx}{\sqrt{x^4 + 16}}$$

Во-первых, замечаем, что отрезок  $[0; \sqrt{3}]$  **входит** в область определения подынтегральной функции (подкоренное выражение больше нуля вообще при любом  $x$ ).

И главный вопрос здесь не в определённом интеграле, а в том, какую подобрать замену. Смотрим в **Таблицу интегралов** (см. приложения) и прикидываем, на что у нас больше всего похожа подынтегральная функция? Очевидно, что на длинный логарифм:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + A}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + A} \right| + C$$
. Но есть одна неувязочка: в табличном интеграле под

корнем  $x^2$ , а в нашем – «икс» в четвёртой степени. И из этих рассуждений следует идея замены – неплохо бы нашу четвертую степень превратить в квадрат. Это реально.

**Внимание!** Это демо-версия, полную и свежую версию курса можно найти здесь: [http://mathprofi.com/knigi\\_i\\_kursy/](http://mathprofi.com/knigi_i_kursy/)

Сначала готовим интеграл к замене:

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x dx}{\sqrt{x^4 + 16}} = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x dx}{\sqrt{(x^2)^2 + 16}} = (*) \text{ (прерываем решение для промежуточных действий)}$$

Из вышеуказанных соображений совершенно естественно напрашивается замена:

$$x^2 = t, \text{ после чего в знаменателе будет всё хорошо: } \sqrt{t^2 + 16}.$$

Теперь выясним, во что превратится оставшаяся часть  $x dx$  подынтегрального выражения, для этого навешиваем дифференциалы на обе части:

$$d(x^2) = dt$$

раскрываем дифференциал слева:

$$2x dx = dt$$

и выражаем нужный нам кусок:

$$x dx = \frac{dt}{2}$$

По сравнению с заменой в неопределённом интеграле, у нас добавляется **дополнительный этап: находим новые пределы интегрирования.**

Это достаточно просто. Смотрим на нашу замену  $t = x^2$  и старые пределы интегрирования  $a = 0$ ,  $b = \sqrt{3}$ .

Сначала подставляем в  $t = x^2$  *нижний предел интегрирования*, то есть, ноль:

$$t_1 = 0^2 = 0,$$

затем подставляем *верхний предел интегрирования* – корень из трёх:

$$t_2 = (\sqrt{3})^2 = 3$$

И всего-то лишь.... Завершаем решение:

$$\begin{aligned} (*) &= \frac{1}{2} \int_0^3 \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 16}} \stackrel{(2)}{=} \dots = \\ &= \frac{1}{2} (\ln 8 - \ln 4) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{8}{4} \right) = \frac{\ln 2}{2} \approx 0,35 \end{aligned}$$

(1) В соответствии с проведённой заменой, **записываем новый интеграл с новыми пределами интегрирования.**

(2) Это простейший табличный интеграл, интегрируем по таблице. Константу  $1/2$  лучше оставить за скобками, чтобы она не мешалась в дальнейших вычислениях. Справа отчеркиваем линию с указанием новых пределов интегрирования  $\Big|_0^3$  – это подготовка для применения *формулы Ньютона-Лейбница*.

(3) Используем формулу Ньютона-Лейбница  $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$  и упрощаем результат по известной формуле разности логарифмов.

И особенно приятно, что **никаких обратных замен проводить не нужно.**

А сейчас пара интегралов для самостоятельного решения. Какие замены проводить – постарайтесь догадаться самостоятельно.

### Пример 6

Вычислить определенные интегралы

$$\text{а) } \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x dx}{\cos^2 x + 1}, \quad \text{б) } \int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}} dx}{x^2}$$

Решения и ответы в конце книги. Приложение *Тригонометрические таблицы* – в помощь, в изучаемой теме этот справочный материал требуется довольно часто.

И теперь обещанный момент о **правомерности замены**. **В определённой ситуации её проводить нельзя!** Так, интеграл  $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x dx}{\cos^2 x + 1}$ , казалось бы, разрешим с

помощью *универсальной тригонометрической подстановки*  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ , однако верхний предел интегрирования («пи») **не входит** в область определения этого тангенса и поэтому данная подстановка нелегальна! Таким образом, **функция-«замена» должна быть непрерывна во всех точках отрезка  $[a; b]$  интегрирования.**

### 1.5. А если подвести функцию под знак дифференциала?

Как вы помните, это ускоренная реализация тех же действий – своеобразная «замена без замены». И если мы подводим функцию под знак дифференциала, то **менять пределы интегрирования не нужно!** Почему? Потому что в этом случае нет фактического перехода к новой переменной. Недавний пациент:

$$\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}} dx}{x^2} = - \int_1^2 e^{\frac{1}{x}} d\left(\frac{1}{x}\right) = -\dots, \text{ то есть, вместо академичной замены } \frac{1}{x} = t \text{ с росписью}$$

новых пределов интегрирования, мы сразу взяли интеграл. Но здесь на первом шаге

нужно проанализировать, что  $d\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)' dx = -\frac{dx}{x^2}$  и добавить минус перед интегралом,

чтобы в результате раскрытия дифференциала получился исходный интеграл. И ещё могут возникнуть непонятки с интегрированием – в этом случае удобно **МЫСЛЕННО**

обозначить  $\frac{1}{x}$  буквой «тэ». И, конечно, выполнить проверку *первообразной функции*

$$\text{дифференцированием: } -(e^x)' = -e^x \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = -e^x \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = e^x \cdot \frac{1}{x^2}.$$

**Таким образом, если определённый интеграл не очень сложен, то всегда старайтесь подвести функцию под знак дифференциала!**

Это быстрее, это компактнее в оформлении, и на самом деле – это обыденность, в чём вы убедитесь десятки раз. И раза так два-три прямо сейчас :)

### Пример 7

Вычислить определенные интегралы

$$\text{а) } \int_0^{\pi/2} \sin \frac{x}{3} dx, \quad \text{б) } \int_0^1 (1 - e^{-2x}) dx, \quad \text{в) } \int_{-1}^e \frac{\ln x dx}{4x}$$

Не пропускаем задания!! ;), и обязательно сверяемся в конце книги.

### 1.6. Метод интегрирования по частям в определенном интеграле

Здесь новизны еще меньше. Всё, что справедливо для неопределенного интеграла, в полной мере справедливы и для определенного интеграла. Плюс идет то, что в **формуле интегрирования по частям** добавляются *пределы интегрирования*:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

Формулу Ньютона-Лейбница здесь нужно применить дважды: для произведения  $uv$  и после того, как мы возьмём интеграл  $\int_a^b v du$ . Ну и, конечно, *подынтегральные функции* должна быть *непрерывны* на  $[a; b]$ , ибо на «нет» и интеграла нет.

Пример я подобрал не самый простой, но очень познавательный:

### Пример 8

Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^{\pi/4} x \operatorname{tg}^2 x dx = (*)$$

Сразу начинаем **решение** и сразу прерываем его «звёздочкой». Этот тип интеграла не встречался ранее, он тоже берётся по частям. Используем стандартную схему интегрирования по частям:

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dv = \operatorname{tg}^2 x dx \Rightarrow v = \int \operatorname{tg}^2 x dx = \operatorname{tg} x - x$$

Интеграл от квадрата тангенса я разбирал в **1-й части курса**, но на чистовике, естественно, всё расписываем подробно, вспоминая заодно насущные тригонометрические формулы:

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x dx}{\cos^2 x} = \dots$$

Далее открываем решение и на первом шаге:

$$(1) \text{ расписываем правую часть формулы } \int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du :$$

$$\begin{aligned}
(*) &= (x(\operatorname{tg}x - x))\Big|_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} (\operatorname{tg}x - x)dx \stackrel{(2)}{=} \dots - 0 \cdot (\operatorname{tg}0 - 0) - \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}x dx + \int_0^{\pi/4} x dx \stackrel{(3)}{=} \\
&= \frac{\pi}{4} \cdot \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) + \dots + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2}{16} - 0^2\right) = \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{16} + \ln \frac{\sqrt{2}}{2} - \ln 1 + \frac{\pi^2}{32} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{32} + \ln \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{32} + \ln \frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

(2) Для произведения  $x(\operatorname{tg}x - x)$  применяем формулу Ньютона-Лейбница. Для оставшегося интеграла используем **свойство линейности**, разделяя его на два интеграла. **Не пугаемся в знаках!**

(3) Берем два оставшихся интеграла. Интеграл  $\int \operatorname{tg}x dx$  также разобран ранее, однако, не поленись:  $\int \operatorname{tg}x dx = \int \frac{\sin x dx}{\cos x} = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x|$

(4) Применяем формулу Ньютона-Лейбница для двух найденных первообразных.

Далее ответ доводится «до ума». Повторюсь, будьте **ПРЕДЕЛЬНО ВНИМАТЕЛЬНЫ** при подстановках и заключительных вычислениях. Здесь допускают ошибки чаще всего.

Если честно, я недолюбиваю формулу  $\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du$  и, по возможности, ... обхожусь вообще без нее! Рассмотрим **второй способ решения**, который, с моей точки зрения, более рационален:

**На первом этапе находим неопределенный интеграл:**

$$\int x \operatorname{tg}^2 x dx = (*)$$

Интегрируем по частям:

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dv = \operatorname{tg}^2 x dx \Rightarrow v = \int \operatorname{tg}^2 x dx = \operatorname{tg}x - x$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\begin{aligned}
(*) &= x(\operatorname{tg}x - x) - \int (\operatorname{tg}x - x) dx = x \operatorname{tg}x - x^2 - \int \operatorname{tg}x dx + \int x dx = \\
&= x \operatorname{tg}x - x^2 + \dots - \frac{x^2}{2} + \ln|\cos x|
\end{aligned}$$

*Первообразная функция* найдена. ... Кстати, все ли поняли, почему в определённом интеграле не имеет смысла приплюсовывать константу  $C$ ?

В чём преимущество такого похода? Не нужно «гаскать за собой» пределы интегрирования, действительно, замучаться можно десяток раз записывать мелкие значки пределов интегрирования.

**На втором этапе проводим проверку** (обычно на черновике).

Тоже логично. Ведь если неправильно найден неопределённый интеграл, то... правильно! И это лучше выяснить немедленно, дифференцируем ответ:

$$\begin{aligned} \left( x \operatorname{tg} x - \frac{x^2}{2} + \ln |\cos x| \right)' &= (x)' \operatorname{tg} x + x (\operatorname{tg} x)' - \frac{1}{2} (x^2)' + (\ln |\cos x|)' = \\ &= 1 \cdot \operatorname{tg} x + x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{2} \cdot 2x + \frac{1}{\cos x} \cdot (\cos x)' = \operatorname{tg} x + \frac{x}{\cos^2 x} - x - \frac{\sin x}{\cos x} = \\ &= \operatorname{tg} x + \frac{x}{\cos^2 x} - x - \operatorname{tg} x = \frac{x}{\cos^2 x} - x = \frac{x(1 - \cos^2 x)}{\cos^2 x} = \frac{x \sin^2 x}{\cos^2 x} = x \operatorname{tg}^2 x \end{aligned}$$

исходная подынтегральная функция, значит, первообразная найдена верно.

**И третий этап – применение формулы Ньютона-Лейбница:**

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/4} x \operatorname{tg}^2 x dx &= \dots = \frac{\pi}{4} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{32} + \ln \left| \cos \frac{\pi}{4} \right| - \left( 0 \cdot \operatorname{tg} 0 - \frac{0^2}{2} + \ln \cos 0 \right) = \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{32} + \ln \frac{\sqrt{2}}{2} - (0 - 0 + 0) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{32} + \ln \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Здесь тоже есть существенная выгода! – это гораздо меньший риск запутаться в подстановках и вычислениях, т.к. *формула Ньютона-Лейбница* применяется всего лишь один раз.

**Рассмотренный алгоритм решения  
можно применить для любого определенного интеграла!**

**И нужно**, если интеграл трудный. Так, если «чайник» решит разобранный интеграл по формуле  $\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$  (1-м способом), то 99% где-нибудь допустит ошибку.

Уважаемый студент, **распечатай и наклейте** рядом с *формулой Ньютона-Лейбница*:

1) Сначала находим неопределенный интеграл (первообразную функцию). Если не получилось, повышаем свои навыки интегрирования.

2) Проверяем найденную *первообразную* дифференцированием. Здесь, кстати, может статься, позабылись **производные** – и тогда самое время подтянуть свои навыки!

3) Используем формулу Ньютона-Лейбница. Все вычисления проводим **ПРЕДЕЛЬНО ВНИМАТЕЛЬНО** – тут самое слабое звено задания. Царь тут!

И на холодную закуску интеграл для самостоятельного решения.

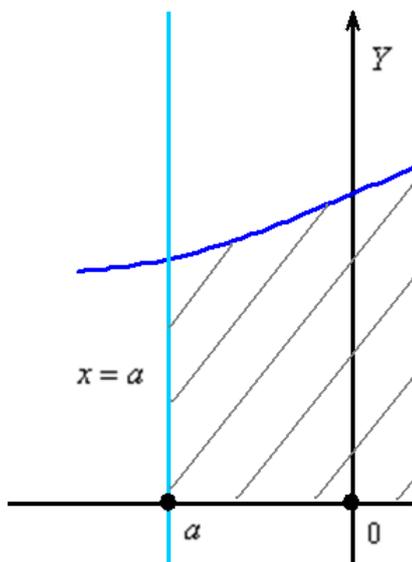
### Пример 9

Вычислить определенный интеграл

$$\int_{-1/2}^{1/2} \arccos 2x dx$$

## 1.7. Геометрический смысл определённого интеграла

Начнем с **криволинейной трапеции**. Криволинейной трапецией называется плоская фигура, ограниченная осью  $OX$ , прямыми  $x = a$ ,  $x = b$  и графиком функции  $y = f(x)$ , которая непрерывна и неотрицательна на отрезке  $[a; b]$ :



И смысл прост. Определённый интеграл  $\int_a^b f(x)dx$  численно равен **площади** этой криволинейной трапеции (заштрихована на чертеже). Площадь, как многие помнят, стандартно обозначается буквой  $S$ .

В самом начале курса я говорил, что определённый интеграл – это число. А сейчас пришла пора констатировать еще один полезный факт. **С точки зрения геометрии, это число – есть ПЛОЩАДЬ.**

Рассмотрим, например, определенный интеграл  $\int_1^4 \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}$ . Подынтегральная функция  $y = \frac{x}{\sqrt{x+1}}$  задает на плоскости вполне определённую непрерывную кривую, располагающуюся выше оси абсцисс (нам даже не важна её форма), а сам определенный интеграл  $\int_1^4 \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}$  численно равен площади соответствующей криволинейной трапеции.

И вообще, любому **определённому интегралу** (если он существует) **геометрически соответствует площадь некоторой фигуры**. Эта фигура не обязательно расположена выше оси абсцисс, она может располагаться и ниже, может располагаться и там и там; может быть более простой или более сложной.

В простых случаях (квадрат, треугольник и т.д.) площадь легко рассчитывается по «школьным» формулам, но что делать в случаях остальных? **Привлечь на помощь определённый интеграл!** Рассмотрим самую популярную и самую распространенную тематическую задачу:

## 1.8. Как вычислить площадь фигуры с помощью определённого интеграла?

Задача школьная, но, несмотря на то, почти 100% встретится в вашем курсе высшей математики. Поэтому **со всей серьёзностью** отнесёмся ко ВСЕМ примерам, и первое, что нужно сделать – это ознакомиться с *Приложением Графики основных функций и их построение*, чтобы освежить в памяти технику построения элементарных графиков. ...Есть? Отлично! Типовая формулировка задания звучит так:

### Пример 10

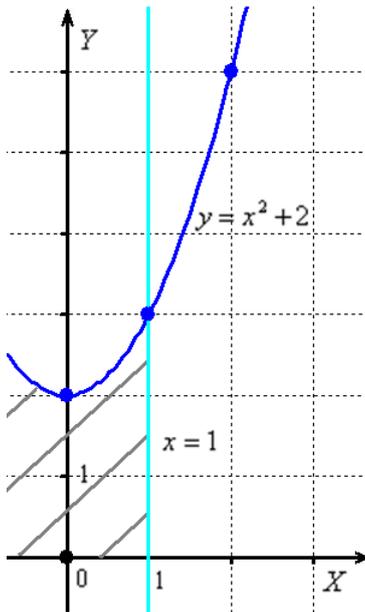
Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = x^2 + 2$ ,  $y = 0$ ,  $x = -2$ ,  $x = 1$ .

И **первый важнейший этап решения** состоит как раз в **построении чертежа**. При этом я рекомендую следующий порядок: **сначала** лучше построить все *прямые* (если они есть) и только **потом** – *параболы, гиперболы, графики других функций*.

В нашей задаче: *прямая*  $y = 0$  определяет ось  $OX$ , *прямые*  $x = -2$ ,  $x = 1$  параллельны оси  $OY$  и *парабола*  $y = x^2 + 2$  симметрична относительно оси  $OY$ , для неё находим несколько опорных точек:

$x$	0	-1	1	-2	2
$y$	2	3	3	6	6

Искомую фигуру желательно штриховать:



**Второй этап** состоит в том, чтобы **правильно составить** и **правильно вычислить** определённый интеграл. На отрезке  $[-2; 1]$  график функции  $y = x^2 + 2$  расположен **над осью**  $OX$ , поэтому искомая площадь:

$$S = \int_{-2}^1 (x^2 + 2) dx = \left( \frac{x^3}{3} + 2x \right) \Big|_{-2}^1 = \frac{1}{3} + 2 - \left( -\frac{8}{3} - 4 \right) = \frac{1}{3} + 2 + \frac{8}{3} + 4 = 9$$

**Ответ:**  $S = 9 \text{ ед.}^2$

**После того, как задание выполнено, полезно взглянуть на чертёж и прикинуть, реалистичный ли получился ответ.**

И мы «на глазок» подсчитываем количество заштрихованных клеточек – ну, примерно 9 наберётся, похоже на правду. Совершенно понятно, что если бы у нас получилось, скажем, 20 квадратных единиц, то, очевидно, где-то допущена ошибка – в построенную фигуру 20 клеток явно не вмещается, от силы десятков. Если ответ получился отрицательным, то задание тоже решено некорректно.

### Пример 11

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $x = 4$ ,  $x = 2$ ,  $x = 4$  и осью  $OX$

Быстренько разминаемся (обязательно!) и рассматриваем «зеркальную» ситуацию – когда криволинейная трапеция расположена **под осью  $OX$**  :

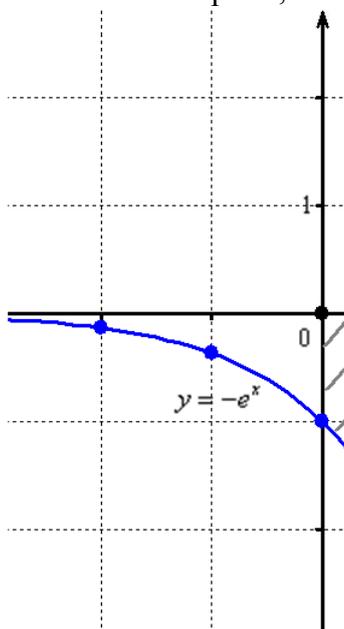
### Пример 12

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = -e^x$ ,  $x = 1$  и координатными осями.

**Решение:** найдём несколько опорных точек для построения экспоненты:

$x$	-2	-1	0	1	2
$y$	$-e^{-2} \approx -0,135$	$-e^{-1} \approx -0,368$	-1	$-e \approx -2,718$	$-e^2 \approx -7,389$

и выполним чертёж, получая фигуру площадью около двух клеток:



Если криволинейная трапеция расположена **не выше** оси  $OX$ , то её площадь можно найти по формуле:  $S = -\int_a^b f(x)dx$ .

$$\text{В данном случае: } S = -\int_0^1 (-e^x)dx = \int_0^1 e^x dx = e^x \Big|_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$$

**Ответ:**  $S = (e - 1) \text{ ед}^2 \approx 1,72 \text{ ед}^2$  – ну что же, очень и очень похоже на правду.

На практике чаще всего фигура расположена и в верхней и в нижней полуплоскости, а поэтому от простейших школьных задачек мы переходим к более содержательным примерам:

### Пример 13

Найти площадь плоской фигуры, ограниченной линиями  $y = 2x - x^2$ ,  $y = -x$ .

**Решение:** сначала нужно выполнить чертеж, при этом нас особо интересуют точки пересечения параболы  $y = 2x - x^2$  и прямой  $y = -x$ , поскольку здесь будут находиться *пределы интегрирования*. Найти их можно двумя способами. Первый способ – аналитический. Составим и решим уравнение:

$$2x - x^2 = -x$$

$$3x - x^2 = 0$$

$$x(3 - x) = 0$$

таким образом:

$$x_1 = 0 = a, \quad x_2 = 3 = b$$

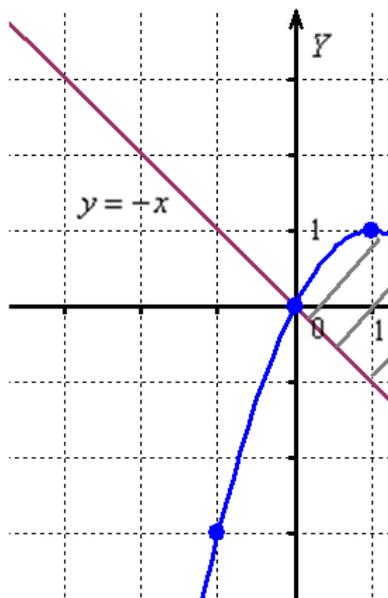
**Достоинство** аналитического способа состоит в его **точности**, а **недостаток** – в **длительности** (и в этом примере нам ещё повезло). Поэтому во многих задачах бывает выгоднее построить линии поточечно, при этом пределы интегрирования выясняются как бы «сами собой».

С прямой  $y = -x$  всё понятно, а вот для построения параболы удобно найти её вершину, для этого возьмём производную и приравняем её к нулю:

$y' = (2x - x^2)' = 2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 1$  – именно в этой точке и будет находиться вершина. И, в силу симметрии параболы, остальные опорные точки найдём по принципу «влево-вправо»:

$x$	1	0	2	-1	3
$y$	1	0	0	-3	-3

Выполним чертеж:



А теперь **рабочая формула**: если на отрезке  $[a; b]$  некоторая *непрерывная* функция  $f(x)$  **больше либо равна** *непрерывной* функции  $g(x)$ , то площадь фигуры, ограниченной графиками этих функций и отрезками прямых  $x = a$ ,  $x = b$ , можно найти по формуле:

...

Здесь уже не надо думать, где расположена фигура – над осью или под осью, а, грубо говоря, **важно, какой из двух графиков ВЫШЕ** относительно другого.

В нашем примере очевидно, что на отрезке  $[0; 3]$  парабола располагается выше прямой, а поэтому из  $2x - x^2$  нужно вычесть  $-x$

Завершение решения может выглядеть так:

На отрезке  $[0; 3]$ :  $2x - x^2 \geq -x$ , по соответствующей формуле:

$$S = \int_0^3 (2x - x^2 - (-x)) dx = \int_0^3 (3x - x^2) dx = \dots = \frac{27}{2} - \frac{27}{3} - (0 - 0) = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$$

**Ответ:**  $S = 4\frac{1}{2} \text{ ед.}^2$

Следует отметить, что простые формулы, рассмотренные в начале параграфа – это частные случаи формулы  $S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$ . Поскольку ось  $OX$  задаётся уравнением  $y = 0$ , то одна из функций будет нулевой, и в зависимости от того, выше или ниже лежит криволинейная трапеция, мы получим формулу  $S = \int_a^b f(x) dx$  либо  $S = -\int_a^b g(x) dx$ .

А сейчас пара типовых задач для самостоятельного решения

### Пример 14

Найти площадь фигур, ограниченных линиями:

а)  $y = x^2 - 2$ ,  $y = 2x + 1$ .

б)  $x + 2y = 0$ ,  $x = 2$ ,  $y = \sqrt{2x}$

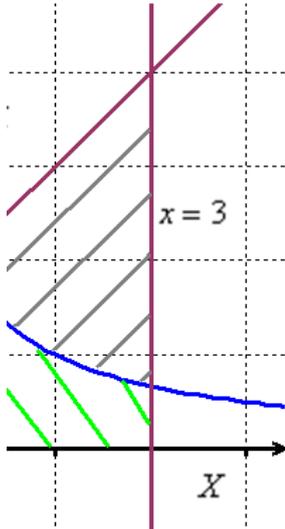
Решение с чертежами и краткими комментариями в конце книги

В ходе решения рассматриваемой задачи иногда случается забавный казус. Чертеж выполнен правильно, интеграл решён правильно, но по невнимательности... **найдена площадь не той фигуры**, именно так несколько раз ошибался ваш покорный слуга. Вот реальный случай из жизни:

### Пример 15

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = \frac{2}{x}$ ,  $y = x + 1$ ,  $y = 0$ ,  $x = 3$

**Решение:** выполним бесхитростный чертёж:



Хитрость же состоит в том, что **искомая площадь заштрихована зелёным цветом** (внимательно смотрите на условие – чем ограничена фигура!). Но на практике по невнимательности нередко возникает «глюк», что нужно найти площадь фигуры, которая заштрихована серым цветом! Особое коварство состоит в том, что прямую  $y = x + 1$  можно недочертить до оси  $OX$ , и тогда мы вовсе не увидим нужную фигуру.

Этот пример полезен ещё и тем, что в нём площадь фигуры считается с помощью двух определённых интегралов. Действительно:

- 1) на отрезке  $[-1; 1]$  над осью  $OX$  расположен график прямой  $y = x + 1$ ;
- 2) на отрезке  $[1; 3]$  над осью  $OX$  расположен график гиперболы  $y = \frac{2}{x}$ .

Совершенно понятно, что площади можно и нужно сложить:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^1 (x+1) dx + \int_1^3 \frac{2dx}{x} = \dots - \left( \frac{1}{2} - 1 \right) + 2(\ln 3 - \ln 1) = \\ &= \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} + 1 + 2(\ln 3 - 0) = 2 + 2\ln 3 = 2(1 + \ln 3) \end{aligned}$$

**Ответ:**  $S = 2(1 + \ln 3) \text{ ед}^2 \approx 4,2 \text{ ед}^2$

И познавательный пример для самостоятельного решения:

### Пример 16

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = \frac{2}{1 + \sqrt{x}}$ ,  $x + y = 1$ ,  $x = 4$  и координатными осями.

Итак, **систематизируем важные моменты этой задачи:**

**На первом шаге ВНИМАТЕЛЬНО** изучаем условие – КАКИЕ функции нам даны? Ошибки бывают даже здесь, в частности, арккотангенс  $y = \text{arcctg}$  зачастую принимают за арктангенс. Это, кстати, относится и к другим заданиям, где встречается арккотангенс.

Далее следует ПРАВИЛЬНО выполнить чертёж. Сначала лучше построить *прямые* (если они есть), затем графики других функций (если они есть ☺). Последние во многих случаях выгоднее строить *поточечно* – найти несколько опорных точек и аккуратно соединить их линией.

Но здесь могут подстергать следующие трудности. Во-первых, из чертежа не всегда понятны *пределы интегрирования* – так бывает, когда они велики по модулю или когда дробные. На mathprofi.ru в **соответствующей статье** я рассмотрел пример с параболой  $y = -\frac{3}{4}x^2$  и прямой  $y = \frac{-2x-1}{4}$ , где из чертежа не понятна одна из точек их пересечения. В таких случаях следует использовать аналитический метод, составляем уравнение:

$$\frac{-2x-1}{4} = -\frac{3}{4}x^2 \Rightarrow 3x^2 - 2x - 1 = 0$$

и находим его корни:

$$x_1 = -\frac{1}{3} = a \text{ – нижний предел интегрирования, } x_2 = 1 = b \text{ – верхний предел.}$$

Во-вторых, не всегда понятен «внешний вид» линии, и функция  $y = \frac{2}{1+\sqrt{x}}$

(Пример 16) – яркий тому пример. Я и сам «с ходу» не представляю, как выглядит график этой функции. Здесь можно воспользоваться специализированными программами или онлайн сервисами (а-ля «построить график онлайн»), а в экстремальной ситуации найти побольше опорных точек (штук 10-15), чтобы поточнее провести «неизвестную» кривую.

Ну и, конечно, я призываю вас повышать свои **знания и навыки в графиках**, в частности, приведу прямую ссылку на особо полезную статью:

[http://mathprofi.ru/kak\\_postroit\\_grafik\\_funkcii\\_s\\_pomoshyu\\_preobrazovani.html](http://mathprofi.ru/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovani.html)

**После того, как чертёж построен**, анализируем полученную фигуру – ещё раз окидываем взглядом предложенные функции и перепроверяем, ТА ЛИИ это фигура. Затем анализируем её форму и расположение, бывает, что площадь достаточно сложна и тогда её следует разделить на две, а то и на три части.

**Составляем определённый интеграл** или несколько интегралов по формуле

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx, \text{ все основные вариации мы разобрали выше.}$$

**Решаем определённый интеграл (ы)**. При этом он может оказаться достаточно сложным, и тогда применяем поэтапный алгоритм: **1)** находим первообразную и проверяем её дифференцированием, **2)** используем формулу Ньютона-Лейбница.

**Результат полезно проверить** с помощью программного обеспечения / онлайн сервисов или просто «прикинуть» по чертежу по клеточкам. Но и то, и другое не всегда осуществимо, поэтому **крайне внимательно относимся к каждому этапу решения!**

## 1.9. Объём тела вращения

Рассмотрим ещё одно распространённое приложение определённого интеграла.

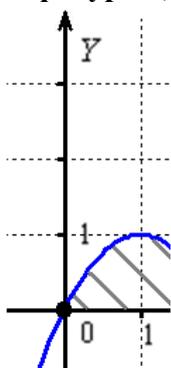
Представьте некоторую плоскую фигуру на координатной плоскости. Представили? ... интересно, кто что представил... ☺ Её площадь мы уже находили. Но, кроме того, данную фигуру можно ещё и вращать: вокруг оси  $OX$  или вокруг оси  $OY$ .

В рамках данного курса я остановлюсь на стандартном варианте:

### Пример 17

Вычислить объём тела, полученного вращением фигуры, ограниченной линиями  $y = 2x - x^2$ ,  $y = 0$  вокруг оси  $OX$ .

**Решение:** как и в задаче на нахождение площади, решение начинается с чертежа плоской фигуры. Да, с точно такого же чертежа:



Искомая плоская фигура заштрихована серым цветом, именно она и вращается вокруг оси  $OX$ . В результате получается такое... загадочное яйцо.

**Объём тела вращения можно вычислить по формуле:**

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx, \text{ где } f(x) \text{ – неотрицательная или неположительная функция,}$$

график которой ограничивает плоскую фигуру на отрезке  $[a;b]$ . Заметьте, что здесь не нужно думать, над осью расположена **криволинейная трапеция** или под осью, т.к. возведение в квадрат стирает разницу между функциями  $y = f(x)$  и  $y = -f(x)$ .

В нашей задаче:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^2 f^2(x) dx = \dots = \\ &= \pi \cdot \left( \frac{4x^3}{3} - x^4 + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^2 = \pi \cdot \left( \frac{32}{3} - 16 + \frac{32}{5} - (0 - 0 + 0) \right) = \frac{16\pi}{15} \end{aligned}$$

Интеграл почти всегда получается простой, главное, быть ВНИМАТЕЛЬНЫМ.

**Ответ:**  $V = \frac{16\pi}{15} \text{ ед}^3 \approx 3,35 \text{ ед}^3$  (кубических единиц - «кубиков» единичного объема)

**Напоминаю**, что  $\pi = 3,14159\dots$ , обычно принимают  $\pi \approx 3,14$  либо  $\pi \approx 3,1416$ .

### Пример 18

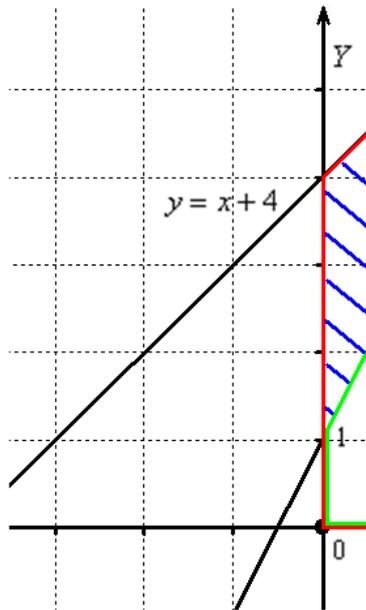
Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси  $OX$  фигуры, ограниченной линиями  $2x - y - 2 = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x = 3$

Тренируемся и переходим к более содержательному случаю:

### Пример 19

Вычислить объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями  $y = 2x + 1$ ,  $y = x + 4$ ,  $x = 0$  и  $x = 1$ .

**Решение:** изобразим на чертеже плоскую фигуру, ограниченную линиями  $y = 2x + 1$ ,  $y = x + 4$ ,  $x = 0$ ,  $x = 1$ , не забывая, что уравнение  $x = 0$  задаёт ось  $OY$ :



Искомая фигура заштрихована синим цветом. При её вращении вокруг оси  $OX$  получается такой сюрреалистический бублик с четырьмя углами. Объем этого бублика вычислим как *разность объёмов* с помощью стандартной формулы  $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$ .

1) Фигура, обведённая красным цветом ограничена сверху прямой  $y = x + 4$ , поэтому:  $V_1 = \pi \int_0^1 (x + 4)^2 dx = \pi \int_0^1 (x^2 + 8x + 16) dx = \pi \left( \frac{x^3}{3} + 4x^2 + 16x \right) \Big|_0^1 = \pi \left( \frac{1}{3} + 4 + 16 \right) = \frac{61\pi}{3}$

2) Фигура, обведенная зеленым цветом ограничена сверху прямой  $y = 2x + 1$ , поэтому:  $V_2 = \pi \int_0^1 (2x + 1)^2 dx = \dots = \pi \left( \frac{4}{3} + 2 + 1 \right) = \frac{13\pi}{3}$

3) Объем искомого тела вращения:  $V = V_1 - V_2 = \frac{61\pi}{3} - \frac{13\pi}{3} = \frac{48\pi}{3} = 16\pi$

**Ответ:**  $V = 16\pi \text{ ед.}^3 \approx 50,3 \text{ ед.}^3$

Решение можно оформить и короче, примерно в таком духе:

$$V = V_1 - V_2 = \pi \int_0^1 (x+4)^2 dx - \pi \int_0^1 (2x+1)^2 dx = \dots, \text{ но, как вы уже поняли, за скорость}$$

приходится расплачиваться повышенным риском допустить ошибку.

И ещё **хочу вас предостеречь от оценки результата «на глазок»**. При **вычислении объёмов этого делать НЕ НАДО**. Дело в том, что человек склонен неверно оценивать объёмы. Посмотрите на плоскую фигуру в прорешанной задаче – она вроде бы невелика по площади, а объем тела вращения составил чуть более 50 «кубиков», что кажется слишком большим. Кстати, среднестатистический человек за всю свою жизнь выпивает жидкость объемом с комнату площадью 18 квадратных метров, что, наоборот, кажется слишком маленьким объемом.

И после лирического отступления уместно решить изящную и, конечно же, важную;) задачу:

### Пример 20

Вычислить объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями  $y = 1$ ,  $y = -x$ ,  $y = x^3$

Дополнительные примеры можно найти в [соответствующей статье сайта](#), в том числе вращение вокруг оси  $OY$ , ну а сейчас есть более срочный материал:

## **1.10. Интеграл от чётной функции по симметричному относительно 0 отрезку**

Сначала вспомним, что такое *чётность* функции. Функция является **чётной**, если для неё выполнено условие  $f(-x) = f(x)$ . Для того, чтобы проверить этот факт, ВМЕСТО  $x$  нужно подставить  $-x$ , простейшие примеры:

$$f(x) = x^2, \text{ проверка: } f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x),$$

$$f(x) = |x|, \text{ проверка: } f(-x) = |-x| = |x| = f(x),$$

$$f(x) = \cos x, \text{ и косинус, как многие помнят, тоже чётный: } \cos(-x) = \cos x,$$

таким образом, все перечисленные функции являются чётными.

Теперь рассмотрим определённый интеграл вида  $\int_{-c}^c f(x) dx$ . Легко заметить, что отрезок интегрирования  $[-c; c]$  симметричен относительно нуля.

Если подынтегральная функция  $f(x)$  является **чётной**, то интеграл  $\int_{-c}^c f(x) dx$  можно **вычислить по половине отрезка, а результат – удвоить**:  $\int_{-c}^c f(x) dx = 2 \int_0^c f(x) dx$ .

Почему? ... догадались? Рассмотрим конкретный пример с чертежом:

### Пример 21

Вычислить определенный интеграл  $\int_{-2}^2 (4 - x^2) dx$

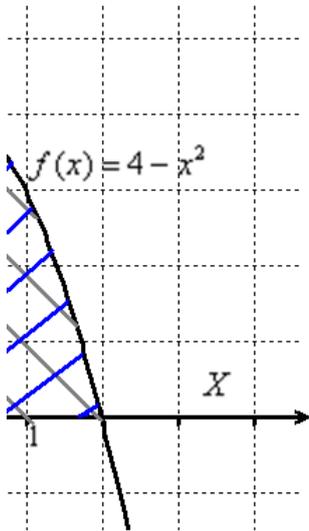
Хоть это и очевидно, но проверим функцию  $f(x) = 4 - x^2$  на чётность:

$$f(-x) = 4 - (-x)^2 = 4 - x^2 = f(x)$$

И, согласно правилу, на симметричном относительно нуля отрезке  $[-2; 2]$  наш интеграл можно «споловинить»:

$$\int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = 2 \int_0^2 (4 - x^2) dx = 2 \left( 4x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = 2 \left( 8 - \frac{8}{3} - 0 + 0 \right) = 2 \cdot \frac{16}{3} = \frac{32}{3} = 10 \frac{2}{3}$$

А сейчас геометрическая интерпретация: **график любой чётной функция**, в частности  $f(x) = 4 - x^2$ , **симметричен относительно оси  $OY$** , и сейчас вам особо понравится **геометрический смысл** определённого интеграла:)



Определенный интеграл  $\int_{-2}^2 (4 - x^2) dx$  численно равен площади фигуры, которая

заштрихована серым цветом. Но, в силу чётности подынтегральной функции и симметрии её графика, достаточно вычислить площадь синей фигуры, а результат удвоить. Одинаковые же половинки!

Возможно, некоторые скажут: «Да зачем это всё нужно? – можно ведь и так вычислить определенный интеграл». Можно. Давайте вычислим:

$$\int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = \dots - \left( -8 + \frac{8}{3} \right) = 8 - \frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} = \frac{32}{3} = 10 \frac{2}{3}$$

Но удобно ли было подставлять отрицательный нижний предел? Не очень-то. И «минус» тут частенько теряют. Поэтому гораздо проще и приятнее подставить ноль.

Замечу также, что это ещё был простой демонстрационный пример, на практике всё бывает хуже, особенно, когда имеешь дело с *двойными* и *тройными* интегралами, где вычислений и так хватает.

Разминочный интеграл для самостоятельного решения:

### Пример 22

$$\int_{-1}^1 (2x^4 - x^2 + 3) dx$$

И обратите внимание: **когда вам предложено ПРОСТО ВЫЧИСЛИТЬ определенный интеграл, то чертёж выполнять не нужно!** Достаточно убедиться в чётности функции (как правило, устно) и перед решением сделать соответствующий письменный комментарий. Кстати, о птичках:

### Пример 23

1) Вычислить определенный интеграл:  $-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$ .

2) Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линией  $y = -\cos x$  и осью  $OX$  на промежутке  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ .

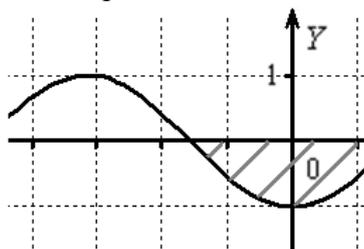
**Внимание! Это две РАЗНЫЕ задачи! Решаем:**

1) Подынтегральная функция является *чётной*, отрезок интегрирования симметричен относительно нуля, поэтому:

$$-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = -2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = -2(\sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -2(1 - 0) = -2 \text{ — определённый интеграл}$$

**получился отрицательным, и так бывает!**

2) Теперь задача на нахождение площади фигуры:



На отрезке  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  график функции расположен **ниже оси  $OX$** , поэтому:

$$S = -\int_a^b f(x) dx = -\left(-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx\right) = \dots = 2(1 - 0) = 2 \text{ ед.}^2 \text{ — площадь отрицательной}$$

**быть не может!** Для этого в формуле и нужен «минус».

Заметьте, что чётность косинуса никто не отменял, поэтому мы опять споловинили отрезок и удвоили интеграл.

Творческий пример для самостоятельного решения + новинка:

### Пример 24

Вычислить площадь круга, ограниченного окружностью  $x^2 + y^2 = 4$

Напоминаю, что уравнение  $x^2 + y^2 = r^2$  задаёт окружность радиуса  $r$  с центром в начале координат; а функции  $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ ,  $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$  – верхнюю и нижнюю полуокружности соответственно.

**Новизна** же состоит в ранее не встречавшейся замене  $x = r \sin t$ , где новые пределы интегрирования удобно отыскать из обратной функции  $t = \arcsin \frac{x}{r}$ . И, конечно, приятно, что ответ известен заранее, по школьной формуле, площадь круга:

$$S = \pi r^2 = \pi \cdot 2^2 = 4\pi \text{ ед.}^2$$

Забавно, что формула и выводится с помощью этого интеграла.

### 1.11. А если подынтегральная функция нечётная?

Вам понравится ещё больше ☺

**Кратко напомню**, что нечётная функция характеризуется свойством  $f(-x) = -f(x)$ , и для его проверки ВМЕСТО  $x$  опять же нужно подставить  $-x$ . Если удастся вынести минус и получить ту же функцию с противоположным знаком, то функция нечётная. Тривиальные примеры:

$$f(x) = x, \text{ проверка: } f(-x) = -x = -f(x),$$

$$f(x) = x^3, \text{ проверка: } f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

и нечётен, например, синус:  $f(x) = \sin x$ , поскольку  $\sin(-x) = -\sin x$

Если подынтегральная функция  $f(x)$  является **нечётной**, то  $\int_{-c}^c f(x) dx = 0$ . Такие интегралы можно встретить довольно часто:

$$\int_{-2}^2 (x^3 - x) dx = 0 \quad \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x dx = 0 \quad \int_{-1}^1 x^2 \operatorname{arctg} x dx = 0 \quad \int_{-3}^3 x e^{x^2} dx = 0 \quad \dots$$

Почему все они равны нулю?

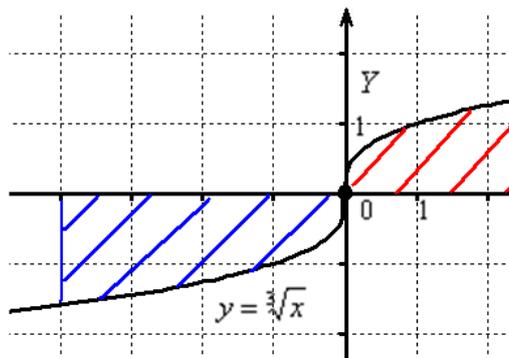
Рассмотрим очередной пример с иллюстрацией, и заодно я продолжу знакомить вас с графиками функций, которые не встречались ранее:

### Пример 25

Вычислить определенный интеграл  $\int_{-4}^4 \sqrt[3]{x} dx$

График функции  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  представляет собой «лежащую на боку» кубическую параболу  $f(x) = x^3$ , и данная функция тоже нечётна, т.к. «минус» выносится из-под нечётного корня:  $f(-x) = \sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x} = -f(x)$ .

**График любой нечётной функции симметричен относительно начала координат, в частности:**



И из центральной симметрии следует равенство площадей, которые заштрихованы красным и синим цветом.

При вычислении определенного интеграла  $\int_{-4}^4 \sqrt[3]{x} dx$  площадь, которая заштрихована синим цветом, формально является отрицательной. А площадь, которая заштрихована красным цветом – положительной. Поскольку площади равны и формально противоположны по знаку, то они взаимно уничтожаются, следовательно,  $\int_{-4}^4 \sqrt[3]{x} dx = 0$ .

**И еще раз подчеркиваю разницу между заданиями:**

1) Любой определенный интеграл – это всё равно формально площадь (пусть даже отрицательная). Поэтому  $\int_{-c}^c f(x) dx = 0$ , так как в силу нечётности функции  $f(x)$  площади «взаимно уничтожатся». Что и проиллюстрировано на конкретном примере.

2) **Задача на нахождение площади** – это совершенно другая задача. Так, если бы нам было предложено найти площадь фигуры в данном примере, то её следовало бы

вычислить следующим образом:  $S = -\int_{-4}^0 \sqrt[3]{x} dx + \int_0^4 \sqrt[3]{x} dx$

**Применять ли рассмотренное свойство на практике?** На самом деле вопрос не так прост, как кажется. Когда вам предложен сложный пример с большим количеством вычислений, то можно, и даже уместно указать, что такой интеграл равен нулю, сославшись на нечетность функции и симметричность промежутка интегрирования относительно нуля. Как говорится, знание – сила, а незнание – рабочая сила.

Но когда вам предложен короткий пример, то лучше «прикинуться простачком» и решить его подробно:

$\int_{-4}^4 \sqrt[3]{x} dx = \int_{-4}^4 x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{3}{4} (x^{\frac{4}{3}}) \Big|_{-4}^4 = \frac{3}{4} (\sqrt[3]{x^4}) \Big|_{-4}^4 = \frac{3}{4} (\sqrt[3]{4^4} - \sqrt[3]{(-4)^4}) = \frac{3}{4} (\sqrt[3]{4^4} - \sqrt[3]{4^4}) = 0$ , ну а то, что интеграл равен нулю, вы будете знать заранее ;-)

## 2. Несобственные интегралы

И, собственно, о них:

### 2.1. Понятие несобственного интеграла

Это «родственник» **определённого интеграла**. ...Нормальное такое определение ☺. И сразу возникает вопрос: **чем отличается несобственный интеграл** от «собрата»? Он может отличаться *пределами интегрирования*:

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ,  $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ ,  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$  – то есть, один или даже оба предела *бесконечны*, при этом подынтегральная функция *непрерывна* на промежутке интегрирования.

Такие интегралы получили название **несобственные интегралы первого рода**.

Кроме того, несобственный интеграл может быть «внешне похож» на определённый интеграл и иметь вид  $\int_a^b f(x)dx$ . Но есть один нюанс. Подынтегральная функция *не определена* в точке  $a$  или  $b$ . Или на обоих концах. Или даже во внутренних точках отрезка  $[a;b]$ .

Это так называемые **несобственные интегралы второго рода**.

**Что значит решить несобственный интеграл?** В отличие от определённого интеграла, тут есть три варианта. **Решить несобственный интеграл – это значит** найти *конечное число*, **либо** получить бесконечность, **либо** выяснить, что несобственного интеграла не существует.

1) Если несобственный интеграл равен *конечному числу*, то говорят, что он **сходится**. Число может быть как положительным, так и отрицательным. Или нулём.

2) Если несобственный интеграл равен бесконечности (со знаком «плюс» или «минус»), то говорят, он **расходится**.

3) И в ряде случаев несобственного интеграла может вовсе не существовать. Даже если подынтегральная функция *непрерывна* на промежутке интегрирования! (вспоминаем, что определённый интеграл при этом условии существует всегда).

**Как решить несобственный интеграл?** С помощью той же формулы Ньютона-Лейбница. С некоторыми особенностями.

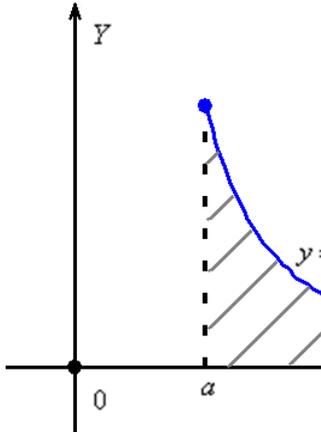
**И здесь вы должны понимать и уметь решать несложные пределы функций.**

**В чём смысл несобственного интеграла?** Геометрически – это тоже площадь (*если интеграл существует*). Но площадь своеобразная. И с этим своеобразием мы познакомимся прямо на следующей странице:

## 2.2. Несобственный интеграл первого рода

Это интеграл с бесконечным (и) *пределом интегрирования*, и самый популярный на практике вариант таков:  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ . При этом подынтегральная функция  $f(x)$  непрерывна на промежутке  $[a; +\infty)$ , и этот **важный факт следует всегда проверять, и проверять в первую очередь!** Ибо если есть разрывы, то это уже **особый случай**.

Для определённости положим, что  $f(x) > 0$ , и тогда типичная *криволинейная трапеция* будет выглядеть так:



Обратите внимание, что она бесконечна (не ограничена справа), и **несобственный интеграл**  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  численно равен её площади.

И первая мысль, которая приходит в голову: «раз фигура бесконечная, то  $\int_a^{+\infty} f(x)dx = +\infty$ », иными словами, площадь тоже бесконечна. **Так быть может.** И такой интеграл называют *расходящимся* (как отмечалось выше). **Но.** Как это ни парадоксально, площадь бесконечной фигуры может равняться... конечному числу! Например,  $\int_a^{+\infty} f(x)dx = 2$ . Такие интегралы называют *сходящимися*.

Если криволинейная трапеция лежит **под осью OX**, то получится «минус» бесконечность либо отрицательное конечное число, т.е. со знаками всё, как у «собрата».

И для решения рассматриваемого интеграла нужно немного модифицировать формулу Ньютона-Лейбница  $\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$  – с той поправкой, что  $b = +\infty$ , а это, как вы догадываетесь, попахивает применением теории пределов:

...

**В чем отличие от определённого интеграла? Да ни в чём особенном!** Как и в определенном интеграле, нужно уметь находить первообразную функцию  $F(x)$  (неопределенный интеграл), уметь применять формулу Ньютона-Лейбница. Единственное, что добавилось – это вычисление предела.

Следует отметить, что **строгое определение** несобственного интеграла даётся именно через предел, и иногда его не существует.

Классический пример:  $\int_0^{+\infty} \cos x dx$ . Несмотря на то, что косинус *непрерывен* на промежутке  $[0; +\infty)$ , этого несобственного интеграла не существует! Почему? Всё очень просто, потому что:

$$\int_0^{+\infty} \cos x dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\sin x) \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\sin b - \sin 0) = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\sin b) - \text{не существует}$$

соответствующего предела.

Обратите внимание, что вместо привычной буквы  $x$  «динамической» переменной выступает буква «бэ». Это не должно смущать или ставить в тупик, потому что другая буква ничем не хуже стандартного «икса». Ну, может, только не такая харизматичная :)

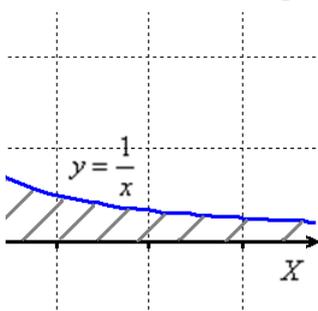
Теперь перейдём к «обычным» задачам и начнём с двух хрестоматийных примеров:

### Пример 26

Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость.

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$$

В таких заданиях чертежей строить не нужно, но понимания ради:



Подынтегральная функция  $y = \frac{1}{x}$  непрерывна на промежутке  $[1; +\infty)$ , а значит, перед нами несобственный интеграл 1-рода (не забываем, что есть и другие!). Используем

формулу  $\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} F(x) \Big|_a^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} (F(b) - F(a))$ :

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\ln |x|) \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\ln b^{+\infty} - \ln 1) = +\infty - 0 = +\infty - \text{таким образом,}$$

несобственный интеграл **расходится**, т.е. площадь криволинейной трапеции бесконечна.

Не забываем пометить, что  $\ln b \rightarrow +\infty$ . Все поняли, почему? Ещё раз откройте *Приложение Графики функций* и взгляните на график логарифма: при неограниченном увеличении аргумента ветка логарифма уходит вверх на «плюс» бесконечность.

**Таким образом, чтобы не было «затыков» с простейшими пределами, важно знать, как выглядят графики основных элементарных функций!**

Чистовое оформление задания может выглядеть так:

“

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = (*)$$

Подынтегральная функция непрерывна на  $[1; +\infty)$

$$(*) = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\ln|x|) \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\ln b^{\rightarrow +\infty} - \ln 1) = +\infty - 0 = +\infty$$

Таким образом, несобственный интеграл **расходится**.

“

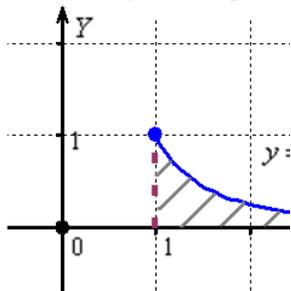
**! При оформлении примера всегда указываем, что происходит с подынтегральной функцией** – непрерывна она или нет. Этим мы идентифицируем тип несобственного интеграла и обосновываем дальнейшие действия.

### Пример 27

Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость.

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$$

Здесь ситуация вроде бы похожа:



$$\text{Но: } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = - \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x} \right) \Big|_1^b = - \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{1} \right) = -(0 - 1) = 1 \text{ – интеграл сходится, и}$$

площадь бесконечной криволинейной трапеции равна конечному числу!

Надеюсь ни у кого не возникло проблем с табличным интегралом и пониманием того, что при  $b \rightarrow +\infty$  ветка гиперболы  $\frac{1}{b} \rightarrow 0$ .

Чистовое оформление примера может быть ещё лаконичнее:

“

Подынтегральная функция непрерывна на  $[1; +\infty)$ , таким образом:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = - \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x} \right) \Big|_1^b = - \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{1} \right) = -(0 - 1) = 1$$

“

Тут даже без послесловия обошлось, ибо и так понятно, что интеграл сходится. И, что особенно приятно, никаких чертежей! По условию же не требуется.

Рассмотрим более содержательный пример:

### Пример 28

Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость.

$$\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt[4]{(x^2 + 16)^5}} = (*)$$

Со знаменателем всё хорошо, и подынтегральная функция непрерывна на  $[0; +\infty)$ . Но интеграл не так прост, особенно для «чайника». Что делать, если интеграл кажется не самым простым или не сразу понятно как его решать?

В этом случае целесообразно применить **тот же алгоритм**, что и для определённого интеграла... **вы точно наклеили его на стену?** ... Ай-яй-яй – а ведь давно пора организовать дома **красный угол** высшей математики!

**1) Сначала** попытаемся найти первообразную функцию  $F(x)$  (неопределённый интеграл). Если нам не удастся этого сделать, то несобственный интеграл мы, естественно, тоже не решим.

$$\int \frac{x dx}{\sqrt[4]{(x^2 + 16)^5}} = (*)$$

И тут прямо напрашивается навести под корнем порядок, проведём замену  $x^2 + 16 = t$  и навесим на обе части дифференциалы:

$$d(x^2 + 16) = dt$$

$$2x dx = dt, \text{ откуда выразим нужный кусок: } x dx = \frac{dt}{2}$$

$$(*) = \int \frac{dt}{2\sqrt[4]{t^5}} = \frac{1}{2} \int t^{-\frac{5}{4}} dt = \frac{1}{2} \cdot (-4) \cdot t^{-\frac{1}{4}} = -2 \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{t}} = \overset{t=x^2+16}{=} -\frac{2}{\sqrt[4]{x^2 + 16}}$$

**2) Проверим** найденную первообразную дифференцированием:

$$\begin{aligned} \left( -\frac{2}{\sqrt[4]{x^2 + 16}} \right)' &= -2 \cdot ((x^2 + 16)^{-\frac{1}{4}})' = -2 \cdot \left( -\frac{1}{4} \right) \cdot (x^2 + 16)^{-\frac{5}{4}} \cdot (x^2 + 16)' = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{(x^2 + 16)^5}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt[4]{(x^2 + 16)^5}} \end{aligned}$$

– в результате получена исходная

подынтегральная функция, что и требовалось проверить.

**3) И теперь** с несобственным интегралом никаких проблем, по формуле

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} F(x) \Big|_a^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} (F(b) - F(a)) :$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt[4]{(x^2 + 16)^5}} = -2 \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{x^2 + 16}} \Big|_0^b = \dots$$

Точно так же, как и у «собрата», в несобственном интеграле допустима замена переменной с вычислением новых пределов интегрирования, и поэтому решение можно оформить другим способом:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt[4]{(x^2 + 16)^5}} = (*)$$

Подынтегральная функция непрерывна на  $[0; +\infty)$ , проведём замену  $x^2 + 16 = t$ .

$$d(x^2 + 16) = dt$$

$$2x dx = dt \Rightarrow x dx = \frac{dt}{2}$$

Вычислим новые пределы интегрирования:

$$t_1 = 0^2 + 16 = 16 \quad t_2 = (+\infty)^2 + 16 = +\infty$$

$$\begin{aligned} (*) &= \int_{16}^{+\infty} \frac{dt}{2 \sqrt[4]{t^5}} = \frac{1}{2} \int_{16}^{+\infty} t^{-\frac{5}{4}} dt = \frac{1}{2} \cdot (-4) \lim_{b \rightarrow +\infty} (t^{-\frac{1}{4}}) \Big|_{16}^b = -2 \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{\sqrt[4]{t}} \right) \Big|_{16}^b = \\ &= -2 \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{\sqrt[4]{b}} - \frac{1}{\sqrt[4]{16}} \right) = -2 \left( 0 - \frac{1}{2} \right) = 1 \end{aligned}$$

**Но самый продвинутый и быстрый способ** – это подвести функцию под знак дифференциала, в этом случае решение будет выглядеть примерно так:

Подынтегральная функция непрерывна на  $[0; +\infty)$ , таким образом:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt[4]{(x^2 + 16)^5}} &= \dots = \\ &= -2 \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{\sqrt[4]{(x^2 + 16)^5}} \right) \Big|_0^b = -2 \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{\sqrt[4]{(b^2 + 16)^5}} - \frac{1}{\sqrt[4]{16^5}} \right) = -2 \left( 0 - \frac{1}{2} \right) = 1 \end{aligned}$$

**Кому как нравится, кому как удобнее!** И, конечно, тут нужно учитывать целесообразность того или иного способа – в зависимости от того, простой интеграл попался или посложнее.

А сейчас два типовых примера для самостоятельного решения:

### Пример 29

Исследовать сходимость несобственных интегралов

$$\text{а) } \int_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}, \quad \text{б) } \int_0^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

В пункте «а» используем *метод выделения полного квадрата*. **И обратите внимание на формулировку задания**, если оно сформулировано именно так, то, вообще говоря, нужно дать ответ: «сходится», «расходится» или «не существует». На практике встречаются *неберущиеся интегралы*, и тогда этот вопрос решается не вычислением, а использованием **признаков сравнения**, которые не вошли в настоящий курс ввиду их малой распространенности в «массовых» работах.

**Внимание!** Это демо-версия, полную и свежую версию курса можно найти здесь: [http://mathprofi.com/knigi\\_i\\_kursy/](http://mathprofi.com/knigi_i_kursy/)

### 2.3. Несобственный интеграл с бесконечным нижним пределом

Он выглядит так:  $\int_{-\infty}^b f(x)dx$  и отличается тем, что к бесконечности, причём

«минус», нужно устремить *нижний предел интегрирования*:

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} F(x) \Big|_a^b = \lim_{a \rightarrow -\infty} (F(b) - F(a))$$

#### Пример 30

Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость.

$$\int_{-\infty}^0 x e^{-x} dx$$

Во-первых, обращаем внимание, что подынтегральная функция непрерывна на  $(-\infty; 0]$ , и, кроме того, *неположительна* на этом промежутке:  $x e^{-x} \leq 0$ . Последний факт позволяет сразу сказать, что интеграл (если он существует) равен отрицательному числу либо «минус» бесконечности.

Сам интеграл *берётся по частям*, и, в принципе, для несобственных интегралов можно записать специальные формулы. Но это уже будет немножко извращение, так как **гораздо проще найти неопределённый интеграл, и затем всё остальное:**

$$\int x e^{-x} dx = (*)$$

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dv = e^{-x} dx \Rightarrow v = \int e^{-x} dx = -e^{-x}$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$(*) = -x e^{-x} + \dots$$

Не ленимся, **выполняем проверку**, по *правилу дифференцирования произведения*:

$$(-(x+1)e^{-x})' = -(x+1)'e^{-x} - (x+1)(e^{-x})' = -e^{-x} - (x+1)(-e^{-x}) =$$

$$= -e^{-x} + (x+1)e^{-x} = (-1+x+1)e^{-x} = x e^{-x} - \text{исходная подынтегральная функция, ОК.}$$

И, наконец, несобственный интеграл, **тут нужно быть аккуратным в знаках**:

$$\int_{-\infty}^0 x e^{-x} dx = - \lim_{a \rightarrow -\infty} ((x+1)e^{-x}) \Big|_a^0 = \dots = -(1+\infty) = -\infty, \text{ таким образом, несобственный}$$

интеграл **расходится**.

Самостоятельно:

#### Пример 31

$$\int_{-\infty}^0 x e^x dx \quad \dots \text{все справились? Да, бывает, возникают трудности и с пределом!}$$

## 2.4. Что делать, если оба предела интегрирования бесконечны?

Интеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$  тоже встречается на практике, и это очень интересный случай.

Для его вычисления без всяких комплексов можно использовать формулу:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{b \rightarrow +\infty \\ a \rightarrow -\infty}} F(x) \Big|_a^b = \lim_{\substack{b \rightarrow +\infty \\ a \rightarrow -\infty}} (F(b) - F(a)) - \text{предел с двумя «динамическими»}$$

переменными, и давайте рассмотрим простенький демонстрационный интеграл:

### Пример 32

Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 1}$$

Подынтегральная функция непрерывна всюду, и **прямое решение** таково:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} = \lim_{\substack{b \rightarrow +\infty \\ a \rightarrow -\infty}} (\arctg x) \Big|_a^b = \dots \frac{\pi}{2} - \left( -\frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

**Второй**, более академичный **способ** состоит в том, чтобы разделить интеграл на две части, обычно в качестве точки «распила» выбирают ноль:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2 + 1} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 1}$$

Далее разделяемся с каждой половинкой по отдельности:

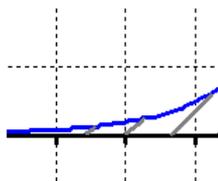
$$\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2 + 1} = \lim_{a \rightarrow -\infty} (\arctg x) \Big|_a^0 = \lim_{a \rightarrow -\infty} (0 - (\arctg a)^{\rightarrow -\pi/2}) = 0 - \left( -\frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\arctg x) \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} ((\arctg b)^{\rightarrow \pi/2} - 0) = \frac{\pi}{2}$$

после чего суммируем трофеи:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

Теперь обратим внимание на подынтегральную функцию. Она является **чётной** и промежуток интегрирования симметричен относительно нуля. Знакомая геометрия:



**В несобственных интегралах с бесконечными пределами интегрирования чётностью пользоваться МОЖНО.** Аналогично определённому интегралу, промежуток интегрирования выгодно споловинить, а результат – удвоить:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} = 2 \lim_{b \rightarrow +\infty} (\arctg x) \Big|_0^b = 2 \lim_{b \rightarrow +\infty} ((\arctg b)^{\rightarrow \pi/2} - 0) = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$$

Переходим к ещё более любопытному случаю:

### Пример 33

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x dx}{x^2 + 1}$$

Подынтегральная функция всюду *непрерывна*, **нечётна** и промежуток интегрирования симметричен относительно нуля. **Но пользоваться этим НЕЛЬЗЯ**, поскольку **интеграл от такой функции может быть вовсе не определён**. Как в нашем случае – по той причине:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x dx}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = \dots - \text{что этого предела не существует. Он не определён.}$$

Почему? Потому что переменная «а» может стремиться к «минус» бесконечности, например, **БЫСТРЕЕ**, чем переменная «бэ» к «плюс» бесконечности. Или наоборот.

К такому же выводу можно прийти, если распилить пациента на две части:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x dx}{x^2 + 1} = \int_{-\infty}^0 \frac{x dx}{x^2 + 1} + \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{x^2 + 1}$$

и выполнить мартышкин труд:

$$\int_{-\infty}^0 \frac{x dx}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 \frac{d(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow -\infty} (\ln(x^2 + 1)) \Big|_a^0 = \frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow -\infty} (\ln 1 - \ln(a^2 + 1)^{\rightarrow +\infty}) = \frac{1}{2}(0 - \infty) = -\infty$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{d(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = \dots$$

Несмотря на то, что оба интеграла *по отдельности* расходятся – значение итогового интеграла **не определено**, ибо не определена сумма  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x dx}{x^2 + 1} = -\infty + \infty$ . К слову, для чётной функции получаются бесконечности одного знака, и всё хорошо.

Следует отметить, что в теории рассматривается особый случай – когда обе переменные стремятся к бесконечностям с одинаковой скоростью. Это выражается пределом:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x dx}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \lim_{A \rightarrow +\infty} (\ln(x^2 + 1)) \Big|_{-A}^A = \frac{1}{2} \lim_{A \rightarrow +\infty} (\ln(A^2 + 1) - \ln((-A)^2 + 1)) =$$
$$= \frac{1}{2} \lim_{A \rightarrow +\infty} (\ln(A^2 + 1) - \ln(A^2 + 1)) = 0 \text{ и называется } \textit{сходимостью по Коши}. \text{ Само же}$$

значение предела называют **главным значением несобственного интеграла** и

**обозначают** так:  $V.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x dx}{x^2 + 1} = 0$  (*Valeur principale de Cauchy*).

Но это имеет смысл включать в решение тогда, когда вы учитесь сильно углублённо ☺ В «массовой» же практике такие вещи ни к чему, а посему просто даём **ответ**, что **значение интеграла не определено**.

Тонкость же состоит в том, что несобственные интегралы  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$  от некоторых нечётных функций  $f(x)$  определены и в самом деле равны нулю! А именно, это те функции, для которых «половинки»  $\int_{-\infty}^0 f(x)dx$ ,  $\int_0^{+\infty} f(x)dx$  сходятся, равны по модулю и противоположны по знаку (в силу нечётности функции):

### Пример 34

Исследовать сходимость несобственного интеграла.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2} dx$$

Это пример для самостоятельного решения. Но на практике, разумеется, функция не обязана быть чётной или нечётной, пожалуйста:  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$  – используем «двойной» предел или делим интеграл на две части в удобной точке. Если оказалось, что один интеграл равен  $+\infty$ , а другой  $-\infty$ , то общего интеграла не существует.

## 2.5. Несобственные интегралы второго рода

Это интегралы от неограниченных (сверху и / или снизу) функций. Несобственные интегралы второго рода коварно «шифруются» под обычный **определенный интеграл** и выглядят точно так же:  $\int_a^b f(x)dx$ . Но, в отличие от определенного интеграла, подынтегральная функция  $f(x)$  терпит **бесконечный разрыв** в точке  $x = a$ , или в точке  $x = b$ , или в обеих точках сразу. Или разрывы даже есть внутри.

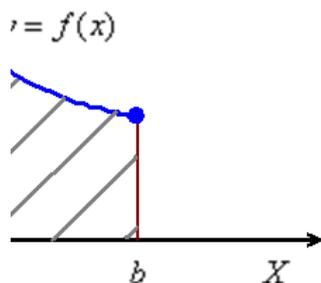
На практике гораздо чаще и одинаково часто встречаются первые два варианта, и сейчас я подброшу монетку... так, начинаем, со случая, когда **подынтегральной функции не существует в точке  $x = a$** .

Сразу пример, чтобы было понятно:  $\int_{3/4}^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{3-4x}}$ . Вроде бы это определенный интеграл. Но на самом деле нет – это *несобственный интеграл второго рода*: если мы подставим в подынтегральную функцию значение нижнего предела  $x = a = \frac{3}{4}$ , то знаменатель у нас обращается в ноль, то есть подынтегральной функции просто не существует в этой точке!

Проверим заодно и верхний предел:  $\frac{1}{\sqrt[5]{3-4 \cdot 1}} = \frac{1}{\sqrt[5]{-1}} = \frac{1}{-1} = -1$ . Здесь всё хорошо.

И вообще, **обязательно анализируем весь знаменатель**, а то, может статься, точки разрыва есть и внутри отрезка  $[a; b]$  (и это не выдумки). В нашем примере знаменатель обращается в ноль в единственной точке, а значит, вопрос закрыт.

Принципиально этот случай выглядит так:



И здесь почти всё так же, как в **интеграле первого рода**. Если интеграл  $\int_a^b f(x)dx$  существует, то он численно равен площади заштрихованной *криволинейной трапеции*, которая не ограничена сверху. При этом могут быть два варианта: несобственный интеграл *расходится* (площадь бесконечна) либо он равен *конечному числу* (площадь бесконечной фигуры – конечна!).

Осталось модифицировать формулу Ньютона-Лейбница, я приведу упрощённый по сравнению с учебниками вариант, без лишних букв:

...

«Добавка»  $+0$  символизирует тот факт, что к точке разрыва мы приближаемся **справа** (красная стрелка на чертеже). Такой предел в теории пределов называют *односторонним пределом*. В данном случае у нас *правосторонний предел*.

Разделаемся с демонстрационным интегралом:

### **Пример 35**

Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость.

$$\int_{3/4}^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{3-4x}}$$

**Во-первых, ПИСЬМЕННО констатируем тот факт, что** подынтегральная функция терпит бесконечный разрыв в точке  $a = \frac{3}{4}$ . Этим мы идентифицируем тип несобственного интеграла и обосновываем дальнейшие действия.

**И приём стар, как чешуя динозавра: сначала всегда можно найти неопределённый интеграл.**

Особенно, если пример не прост и особенно в кубе, если вы «чайник».

$$\int \frac{dx}{\sqrt[5]{3-4x}} = (*)$$

Проведём замену:  $3-4x = t \Rightarrow dt = d(3-4x) = -4dx$ , откуда выражаем оставшийся кусок исходного интеграла, сиротливый дифференциал:  $dx = -\frac{dt}{4}$

$$(*) = -\frac{1}{4} \int \frac{dt}{\sqrt[5]{t}} = \dots$$

**Проверка:**  $\left(-\frac{5}{16} \sqrt[5]{(3-4x)^4}\right)' = -\frac{5}{16} \left((3-4x)^{\frac{4}{5}}\right)' = -\frac{5}{16} \cdot \frac{4}{5} (3-4x)^{-\frac{1}{5}} \cdot (3-4x)' =$   
 $= -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt[5]{3-4x}} \cdot (0-4) = \frac{1}{\sqrt[5]{3-4x}}$ , в чём мы и хотели убедиться.

Теперь вычислим несобственный интеграл, сначала решение, затем комментарий:

$$\int_{3/4}^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{3-4x}} \stackrel{(1)}{=} -\frac{5}{16} \lim_{x \rightarrow \frac{3}{4}+0} \sqrt[5]{(3-4x)^4} \Big|_x^1 \stackrel{(2)}{=} \dots$$

(1) Используем формулу  $\int_a^b f(x)dx = \lim_{x \rightarrow a+0} F(x) \Big|_x^b$

(2) и её продолжение  $\lim_{x \rightarrow a+0} F(x) \Big|_x^b = \lim_{x \rightarrow a+0} (F(b) - F(x))$ , где при подстановке *нижнего предела интегрирования* вместо «икс» мы формально подставляем «икс».

(3) Но **самое главное**: как выяснить, куда стремится  $\sqrt[5]{(3-4x)^4}$ , если  $x \rightarrow \frac{3}{4} + 0$ ?

Всё просто. Мысленно либо на черновике подставляем  $\frac{3}{4} + 0$  под корень и проводим

упрощения:  $\sqrt[5]{\left(3-4\left(\frac{3}{4}+0\right)\right)^4} = \sqrt[5]{(3-3-0)^4} = \sqrt[5]{(-0)^4} = \sqrt[5]{+0} = +0$  – в результате получено

*бесконечно малое* положительное значение, поэтому  $\sqrt[5]{(3-4x)^4} \rightarrow 0$ .

Результат получился отрицательным, и в этом нет криминала, просто соответствующая криволинейная трапеция расположена под осью  $OX$ .

Решение можно оформить и по-другому. Например, провести ту же замену прямо в несобственном интеграле с пересчётом новых пределов интегрирования. Ну и совсем ~~никак~~ обыденно – это с ходу подвести под знак дифференциала:

$$\int_{3/4}^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{3-4x}} = -\frac{1}{4} \int_{3/4}^1 (3-4x)^{-\frac{1}{5}} d(3-4x) = -\frac{1}{4} \cdot \frac{5}{4} \lim_{x \rightarrow \frac{3}{4}+0} (3-4x)^{\frac{4}{5}} \Big|_x^1 =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{3}{4}+0} \sqrt[5]{(3-4x)^4} \Big|_x^1 \dots = -\frac{5}{16} (1-0) = -\frac{5}{16}$$

А сейчас два интеграла для самостоятельного решения:

### Пример 36

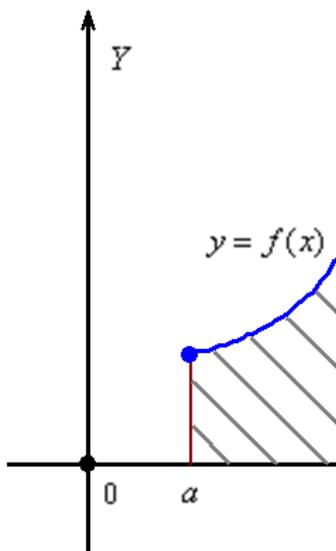
Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость

$$\text{а) } \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^3}}, \quad \text{б) } \int_0^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{x \ln^4 x}$$

В образце я привёл прямое решение с подведением под знак дифференциала и подробно закомментировал что, к чему и почему стремится. Обязательно разберитесь!

**Случай второй. Если подынтегральной функции не существует в точке  $x = b$ .**

Бесконечная *криволинейная трапеция* для такого несобственного интеграла принципиально выглядит так:



Здесь всё так же, за исключением того, что предел у нас стремится **к значению  $b$  слева**:

...

Такой предел называют *левосторонним*, и *бесконечно малая отрицательная «добавка»*  $-0$  означает, что к точке « $b$ » мы подбираемся по оси *OX* именно **слева**.

### Пример 37

Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость.

$$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-3)^5}}$$

Очевидно, что подынтегральная функция терпит *бесконечный разрыв* в точке  $b = 3$ , но **не пренебрегаем и проверяем**: а нет ли разрывов ещё? Нет. По той причине, что знаменатель обращается в ноль в единственной точке.

Интеграл решим методом подведения под знак дифференциала:

$$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-3)^5}} = \int_1^3 (x-3)^{-\frac{5}{3}} d(x-3) \stackrel{(1)}{=} -\frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 3-0} (x-3)^{-\frac{2}{3}} \Big|_1^x \stackrel{(2)}{=} \\ = -\frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 3-0} \left( \frac{1}{\sqrt[3]{(x-3)^2}} \right) \Big|_1^x \stackrel{(3)}{=} \dots$$

(1) Берём интеграл и используем формулу  $\int_a^b f(x)dx = \lim_{x \rightarrow b-0} F(x) \Big|_a^x$ . Наверное, вы

обратили внимание, что **саму формулу на чистовик записывать не нужно**. Все эти формулы носят частный характер и не предназначены даже для запоминания – **самое главное**, ПОНИМАТЬ, что происходит в том или ином интеграле, в том или ином случае. Не забываем быстренько выполнить черновую проверку:

$$\left( -\frac{3}{2} (x-3)^{-\frac{2}{3}} \right)' = -\frac{3}{2} \cdot \left( -\frac{2}{3} \right) (x-3)^{-\frac{5}{3}} \cdot (x-3)' = \frac{1}{\sqrt[3]{(x-3)^5}} \cdot (1-0) = \frac{1}{\sqrt[3]{(x-3)^5}}, \text{ ОК.}$$

(2) Представляем первообразную в более удобном виде.

(3) Подставляем в неё пределы интегрирования:  $\lim_{x \rightarrow b-0} F(x) \Big|_a^x = \lim_{x \rightarrow b-0} (F(x) - F(a))$ , формально считая, что вместо «икс» мы подставляем «икс».

Как выяснить, что при  $x \rightarrow 3-0$  дробь  $\frac{1}{\sqrt[3]{(x-3)^2}} \rightarrow +\infty$ ? Приём тот же самый:

мысленно либо на черновике подставляем  $3-0$  под корень и проводим упрощения:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(3-0-3)^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(-0)^2}} = \frac{1}{+0}, \text{ а единица, делённая на бесконечно малое и}$$

положительное значение – это «плюс» бесконечность:  $\frac{1}{+0} = +\infty$ .

И на завершающем шаге бесконечность меняет знак:  $-\frac{3}{2} \left( +\infty - \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \right) = -\infty$

**Будьте очень внимательны в знаках!** Да, конечно, несобственный интеграл расходится, но  $-\infty$  и  $+\infty$  – это две разные вещи, и если вы недосмотрите за знаками, то допустите серьезную ошибку.

Следующие интегралы для самостоятельного рассмотрения:

### Пример 38

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость.

а)  $\int_0^1 \frac{2x dx}{\sqrt{1-x^4}}$ ,      б)  $-\int_{0,5}^1 \frac{dx}{x \ln^3 x}$

В образце решения я опять использовал «быстрый» способ, но если вам трудно, то, конечно, сначала лучше найти неопределённый интеграл.

И в заключение курса коротко о более редких случаях:

## 2.6. Когда разрывы на обоих концах и / или внутри отрезка интегрирования

Итак, тот же интеграл  $\int_a^b f(x)dx$ , но разрывы уже на обоих концах отрезка. По

аналогии с несобственными интегралами 1-го рода, здесь можно записать двухсторонний предел, и мне таки придётся добавить пару новых букв, «эпсилон» и «ню»:

...

Но усложнять оформление мы не будем, ведь такой интеграл можно разделить на две части – с дальнейшим вычислением **знакомых интегралов**. А иногда всё ещё проще.

Редко, да метко, и, между прочим, задачка с «заочки»... прям как Маяковский:)

### Пример 39

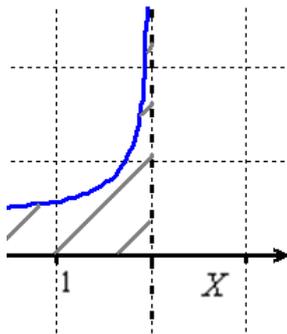
Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость

$$\int_{-2}^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$$

Подынтегральная функция терпит бесконечные разрывы на обоих концах отрезка интегрирования, но это не помеха:

$$\int_{-2}^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \int_{-2}^0 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} + \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} \quad \text{— и в то же время, помеха :)}$$

Поскольку подынтегральная функция является **чётной**, а промежуток интегрирования симметричен относительно нуля, то... правильно представили:



И **чётностью пользоваться МОЖНО**. Ибо если одна половинка конечна или бесконечна, то другая – такая же. Поэтому не будем допускать математический грех, интеграл споловиним, а результат удвоим:

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} &= 2 \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \\ &= 2 \lim_{b \rightarrow 2-0} \left( \arcsin \frac{x}{2} \right) \Big|_0^b = 2 \lim_{b \rightarrow 2-0} \left( \left( \arcsin \frac{b}{2} \right)^{\rightarrow \pi/2} - \arcsin 0 \right) \Big|_0^b = 2 \cdot \left( \frac{\pi}{2} - 0 \right) = \pi \end{aligned}$$

...опять это удивительное число.

Следующий интеграл для самостоятельного решения:

### Пример 40

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{tg} x dx$$

Точно так же, как у аналогичных интегралов 1-го рода, **нечетностью функции пользоваться НЕЛЬЗЯ**. Да, если интеграл сходится, то он действительно будет равен нулю, но если расходится, то... – смотрите образец решения!

Но, разумеется, подынтегральная функция может оказаться «обычной», да и промежуток интегрирования не симметричным относительно нуля:

### Пример 41

$$\int_0^2 \frac{dx}{x(x-2)}$$

Заметим, что подынтегральная функция отрицательна на интервале  $(0; 2)$ , а значит, сразу можно сказать, что результат (*конечный или бесконечный*) должен получиться отрицательным. И алгоритм тот же, делим интеграл на две части:

$$\int_0^2 \frac{dx}{x(x-2)} = \int_0^1 \frac{dx}{x(x-2)} + \int_1^2 \frac{dx}{x(x-2)}$$

Чтобы не «таскать за собой» пределы интегрирования, сначала удобно найти неопределённый интеграл. Выделяем полный квадрат в знаменателе и используем табличную формулу  $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right|$  – с той поправкой что ВМЕСТО  $x$  у нас  $(x-1)$ :

$$\int \frac{dx}{x(x-2)} = \int \frac{dx}{x^2 - 2x} = \int \frac{dx}{x^2 - 2x + 1 - 1} = \int \frac{d(x-1)}{(x-1)^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1-1}{x-1+1} \right| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-2}{x} \right|$$

$$\text{Контроль: } \left( \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-2}{x} \right| \right)' = \frac{1}{2} (\ln|x-2| - \ln|x|)' = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x} \right) = \frac{x - (x-2)}{2(x-2)x} = \frac{1}{x(x-2)}$$

Вычислим первый интеграл – с разрывом в точке  $a = 0$ :

$$\int_0^1 \frac{dx}{x(x-2)} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0+0} \ln \left| \frac{x-2}{x} \right| \Big|_0^1 = \dots$$

**Разберитесь, что куда стремится!** И второй, с разрывом  $b = 2$ :

$$\int_1^2 \frac{dx}{x(x-2)} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 2-0} \ln \left| \frac{x-2}{x} \right| \Big|_1^x = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 2-0} \left( \ln \left| \frac{x-2}{x} \right| - \ln|-1| \right) = \frac{1}{2} \left( \ln \left| \frac{-0}{2} \right| - 0 \right) = \frac{1}{2} \cdot \ln(+0) = -\infty$$

**Таким образом:**  $\int_0^2 \frac{dx}{x(x-2)} = -\infty - \infty = -\infty$ , т.е. несобственный интеграл расходится.

Как быть, если точка разрыва находится прямо на отрезке интегрирования? Точно так же! Алгоритм такой же. Самостоятельно:

### Пример 42

$$\int_0^3 \frac{dx}{x^2 - 1}$$

Встречаются ли такие примеры на практике? Да, реально встречаются, и поэтому со всей серьёзностью отнеситесь к этим, вроде бы несерьёзным примерам.

Следует отметить, что для интегралов 2-го рода тоже вводится понятие *сходимости по Коши*, но я оставлю эту информацию за кадром, т.к. она не входит в аптечку скорой математической помощи. И напоследок что-нибудь вкусное:

## 2.7. Интегралы-«ассорти»

Такие интегралы включают в себя и бесконечность, и точки разрыва, например:

### Пример 43

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x}$$

Этот интеграл похож на [интеграл 1-го рода](#), но, кроме того, подынтегральная функция терпит *бесконечный разрыв* в точке  $a = 0$ . Как быть? Точно так же, делим интеграл на 2 части, в качестве точки «распила» удобно выбрать единицу:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x} = \int_0^1 \frac{dx}{x} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$$

Разделаемся с [несобственным интегралом второго рода](#):

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \ln|x| \Big|_x^1 = \lim_{x \rightarrow 0+0} (\ln 1 - \ln|x|) = 0 - \ln(+0) = -(-\infty) = +\infty,$$

а [несобственный интеграл первого рода](#)  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = +\infty$  – уже найден ранее.

Таким образом:  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x} = +\infty + \infty = +\infty$ , т.е. интеграл-«ассорти» **расходится**.

**Но если вам встретился подобный интеграл, то, скорее всего, это опечатка.** А может, и нет. Особенно, если у вас углублённый курс обучения. Так или иначе, **здесь имеет смысл проконсультироваться с преподавателем.**

**И я вас поздравляю! Теперь вы во всеоружии на долгие многие темы вышмата!**

Места осталось мало, и поэтому оставляю ссылку на [соответствующий раздел](#) портала, также читайте: *К.А. Бохан* 1-й том, *Г.М. Фихтенгольц*, 2-й том, *Н.С. Пискунов*.

### 3. Решения и ответы

*Пример 2: Решение:*

*Пример 4: Решение: подробный способ:*

*Короткий способ:*

*Пример 6: Решение:*

*a)*

*Проведем замену переменной.; следовательно:*

*Вычислим новые пределы интегрирования:*

*Примечание 1: После замены удобно применить свойство.*

*Примечание 2: Вспоминаем, что арктангенс – есть функция нечётная.*

б)

Проведём замену:, следовательно:

Вычислим новые пределы интегрирования:

**Пример 7. Решение:**

а)

б)

в) Определённого интеграла не существует, т.к. подынтегральная функция не определена на промежутке.

**Примечание:** также не существует и определённых интегралов, т.к. подынтегральные функции не определены в точке.

**Пример 9. Решение:**

*Интегрируем по частям:*

**Пример 11. Решение:** найдём несколько опорных точек для построения гиперболы:

*и выполним чертеж:*

*На отрезке график функции расположен над осью, поэтому:*

**Ответ:**

**Пример 14. Решение:** а) найдём опорные точки для построения параболы:

и выполним чертеж:

На отрезке , по соответствующей формуле:

**Ответ:**

б) Найдём опорные точки для построения графика (ветвь параболы):

и выполним чертёж:

На отрезке:, по соответствующей формуле:

**Ответ:**

**Пример 16. Решение:** найдем опорные точки для построения графика функции:

и выполним чертёж:

Площадь фигуры найдём как сумму площадей:

1) На отрезке:, по соответствующей формуле:

В первом интеграле проведём замену:

Так как, то новые пределы интегрирования:

2) На отрезке:, следовательно:

Используем ту же замену и найдём новые пределы интегрирования:

Таким образом, искомая площадь:

**Ответ:**

**Пример 18. Решение:** выполним чертеж:

Вычислим объем тела вращения:

**Ответ:**

**Пример 20. Решение:** выполним чертеж:

Объём тела вращения вычислим как сумму объёмов с помощью формулы, при этом каждую часть вычислим как разность объёмов:

1) На отрезке:, поэтому:

2) На отрезке:, поэтому:

Таким образом, объём искомого тела:

**Ответ:**

**Пример 22. Решение:** так как подынтегральная функция чётная, а отрезок интегрирования симметричен относительно нуля, то:

**Пример 24. Решение:** выполним чертёж:

Поскольку круг симметричен относительно оси, то достаточно вычислить площадь его верхней половины, которая в свою очередь симметрична относительно оси, таким образом:

Проведём замену:

Выясним, во что превратится корень:

Если, то, откуда вычислим *новые пределы интегрирования*:

**Ответ:**

**Примечание:** неопределённый интеграл вида обычно решают другим способом, который можно найти в статье [Сложные интегралы](#) (ссылка на сайт).

**Пример 29. Решение:**

а) Подынтегральная функция непрерывна на:

– конечное число, т.е. несобственный интеграл **сходится**.

**Примечание 1:** при затруднениях с пределом удобно ориентироваться по графику арктангенса, значение же можно найти по тригонометрической таблице (см. соответствующие Приложения)

**Примечание 2:** по условию, требуется исследовать ряд на сходимость, и поэтому здесь желательно письменно констатировать факт сходимости.

б) Подынтегральная функция непрерывна на, таким образом:

Несобственный интеграл **расходится**.

**Пример 31. Решение:** сначала найдём неопределённый интеграл:

**Контроль:**

Вычислим несобственный интеграл:

**Примечание:** , так как более высокого порядка роста, чем. Кроме того, неопределённость можно устранить по правилу Лопиталья, продифференцировав числитель и знаменатель по «а»:

**Пример 34. Решение:** подынтегральная функция непрерывна на всей числовой прямой.

**Способ первый:**

**Способ второй:** представим интеграл в виде суммы двух интегралов:

Вычислим первый интеграл:

Вычислим второй интеграл:

Таким образом:

– интеграл сходится и равен нулю.

**Ответ:**

**Примечание 1:** В частности, равно нулю и главное значение интеграла.

**Примечание 2:** Будет серьезной оплошностью сразу записать, что, пользуясь нечетностью подынтегральной функции и симметричностью промежутка интегрирования. Стандартный алгоритм обязателен!!!

**Пример 36. Решение:**

**а)** Подынтегральная функция терпит бесконечный разрыв в точке:

**Пояснение:** чтобы разобраться с пределом, подставляем под корень:  
(единица, делённая на бесконечно малое положительное значение равна «плюс» бесконечности)

**б)** Подынтегральная функция терпит бесконечный разрыв в точке  $a = 0$ :

**Пояснение:** разбираемся, куда стремится дробь. Если, то (см. график логарифмической функции!), тогда: (бесконечно малое отрицательное значение)

**Пример 38. Решение:**

*а) Подынтегральная функция терпит бесконечный разрыв в точке.*

**Примечание:** чтобы разобраться в пределе, проще всего посмотреть на график арксинуса (см. Приложение **Графики основных функций и их построение**).

*б) Подынтегральная функция терпит бесконечный разрыв в точке.*

*Несобственный интеграл расходится.*

**Разбираемся**, почему. Если, то (см. график логарифма), и тогда.

**Будьте ОЧЕНЬ внимательны в знаках!**

**Пример 40. Решение:** подынтегральная функция терпит бесконечные разрывы в точках. Представим данный интеграл в виде суммы двух интегралов:

Вычислим первый интеграл:

Вычислим второй интеграл:

Таким образом: – значение не определено.

**Вывод:** значение данного несобственного интеграла **не определено**.

**Примечание 1:** Грамотным будет именно такой ответ, т.к. и здесь существует понятие сходимости по Коши, которое я оставляю за рамками настоящего курса.

**Примечание 2:** Если рассматривать «половинки» интеграла по отдельности, то каждая из них расходится.

**Пример 42. Решение:** подынтегральная функция терпит бесконечные разрывы в точках, однако на отрезок интегрирования попадает лишь значение. Представим интеграл в виде суммы двух несобственных интегралов второго рода:

Вычислим первый интеграл:

Вычислим второй интеграл:

Таким образом, значение **не определено**.

**Примечание:** см. Примечания к предыдущему примеру.