

Дополнительные материалы по производным

В этом файле я ответил на некоторые вопросы читателей, которые изучают или уже изучили тему «Производные».

1) Как найти производную логарифма с переменным основанием, ака $y = \log_x 3$?

Используем формулу $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$, в нашем случае:

$$y = \log_x 3 = \frac{1}{\log_3 x}$$

По правилу дифференцирования сложной функции:

$$y' = ((\log_3 x)^{-1})' = -(\log_3 x)^{-2} \cdot (\log_3 x)' = -\frac{1}{\log_3^2 x} \cdot \frac{1}{x \ln 3}$$

2) Как найти производную модуля?

В качестве демонстрации рассмотрим простейшую функцию $y = |x|$. Чтобы решить задачу, нужно расписать функцию в *кусочном* виде $y = |x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0 \\ -x, & \text{если } x < 0 \end{cases}$ и найти производную от каждого куска:

$$y' = (|x|)' = \begin{cases} (x)', & \text{если } x \geq 0 \\ (-x)', & \text{если } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{если } x \geq 0 \\ -1, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

Аналогично в более сложных случаях; освежить знания о модулях можно на [соответствующем уроке](#).

3) Как найти производную *кусочной* функции?

Собственно, ответ уже дан в предыдущем пункте – нужно взять производную от каждого куска. На практике это зачастую устная задача.

$$\text{Так, для функции } f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{если } x \leq 0 \\ 1 + 3x, & \text{если } 0 < x < 2 \\ e^{-x}, & \text{если } x \geq 2 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & \text{если } x \leq 0 \\ 3, & \text{если } 0 < x < 2 \\ -e^{-x}, & \text{если } x \geq 2 \end{cases}$$

4) Почему исчезает модуль при дифференцировании логарифма?

Рассмотрим опять же каноничный пример $y' = (\ln|x|)' = \frac{1}{x}$. Куда делся модуль?

Распишем функцию кусочно:

$$y = \ln|x| = \begin{cases} \ln x, & \text{если } x \geq 0 \\ \ln(-x), & \text{если } x < 0 \end{cases} \text{ и возьмём производную от каждой части, при этом}$$

для второго куска используем правило дифференцирования сложной функции:

$$y' = (\ln|x|)' = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{если } x \geq 0 \\ \frac{1}{-x} \cdot (-x)', & \text{если } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{если } x \geq 0 \\ \frac{1}{x}, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

$$\text{Таким образом, } y' = (\ln|x|)' = \frac{1}{x}.$$

По той же причине модуль исчезает в более сложных случаях, например:

$$y' = (\ln|2x+1|)' = \frac{2}{2x+1}, \quad y' = (\ln|x^2-3|)' = \frac{2x}{x^2-3} \text{ и тому подобное.}$$

$$\text{К слову, когда мы навешиваем логарифмы, скажем, на функцию } y = \frac{\sqrt[5]{(x+4)^3}}{(x-1)^2(x+3)^5}$$

для логарифмического дифференцирования: $\ln y = \ln \frac{\sqrt[5]{(x+4)^3}}{(x-1)^2(x+3)^5}$ – знаки модуля

$\ln|y| = \ln|\dots|$ можно не ставить как раз по этой причине – в связи с тем, что они всё равно пропадут в результате дифференцирования.

5) Логарифм «икс» и логарифм «модуля икс» – это разные функции, но почему у них одинаковые производные: $y' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$ и $y' = (\ln|x|)' = \frac{1}{x}$?

На самом деле это производные *разные*. Поскольку **производная** порождается функцией, то:

$$y' = (\ln x)' = \frac{1}{x}, \text{ если } x > 0;$$

$$y' = (\ln|x|)' = \frac{1}{x}, \text{ если } x < 0 \text{ или } x > 0.$$

Однако **номинально** (без учёта значений «икс») полученные функции имеют одинаковую запись, и этим можно пользоваться при нахождении производных (см. следующий пункт).

6) Почему формулы $\ln(ab) = \ln a + \ln b$, $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$, $\ln a^k = k \ln a$ ($a > 0, b > 0$, k – действительное число) можно использовать при нахождении производных, несмотря на возможную неравносильность преобразований?

В качестве примера рассмотрим преобразование $\ln\left(\frac{1-x}{2-x}\right) = \ln(1-x) - \ln(2-x)$. Оно *неравносильно* (справедливо не для всех допустимых «икс»). Например, для $x = 3$:

$\ln\left(\frac{1-3}{2-3}\right) = \ln\left(\frac{-2}{-1}\right) = \ln 2$, однако значения $\ln(1-3) - \ln(2-3) = \ln(-2) - \ln(-1)$ – не существует

То есть $y = \ln\left(\frac{1-x}{2-x}\right)$ и $y = \ln(1-x) - \ln(2-x)$ – это две РАЗНЫЕ функции. НО.

Фишка состоит том, что **номинально** (без учёта значений «икс») их производные имеют одну и ту же запись (см. предыдущий пункт), и этим можно пользоваться на практике:

$$y' = \left(\ln\left(\frac{1-x}{2-x}\right) \right)' = (\ln(1-x) - \ln(2-x))' = \dots$$

Хотя, строго говоря, эта запись не совсем корректна.

Следует заметить, что преобразования могут оказаться и равносильными:

$\ln \sqrt[5]{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{1}{5}(\ln(1-x) - \ln(1+x))$ – здесь преобразования справедливы для всех допустимых значений «икс».

То есть $y = \ln \sqrt[5]{\frac{1-x}{1+x}}$ и $y = \frac{1}{5}(\ln(1-x) - \ln(1+x))$ – это одна и та же функция, и

запись $y' = \left(\ln \sqrt[5]{\frac{1-x}{1+x}} \right)' = \frac{1}{5}((\ln(1-x) - \ln(1+x)))' = \dots$ легальна безо всяких оговорок.