maΣprof∫.ru

Высшая математика – просто и доступно!

Аналитическая геометрия для «чайников»

Прикладной курс для начинающих

Настоящая книга *позволяет в сжатые сроки (2-3 недели) освоить основы аналитической геометрии и научиться решать наиболее распространённые задачи по теме.* ***Материал предназначен для*** *студентов-заочников и других читателей, которые хотят быстро освоить минимум теории и максимум практики.*

Автор: Александр Емелин

Оглавление

Сначала немного о предмете…. Наверняка вам сейчас вспомнился курс школьной геометрии с многочисленными теоремами, их доказательствами, чертежами и т.д. Что скрывать, нелюбимый и часто малопонятный предмет для значительной доли учеников. ***Аналитическая геометрия***, как ни странно, может показаться более интересной и доступной. Что означает «аналитическая»? На ум сразу приходят два «штампованных» математических оборота: ***графический метод решения*** и ***аналитический метод решения***.

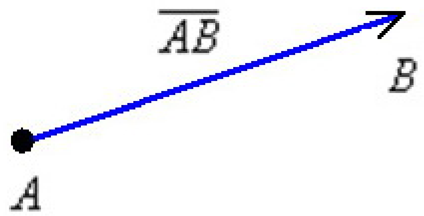
Графический метод связан с построением графиков, чертежей. *Аналитический* же *метод* предполагает решение задач *преимущественно* посредством алгебраических действий. В этой связи алгоритм решения многих задач аналитической геометрии прост и прозрачен, зачастую достаточно аккуратно применить нужные формулы – и ответ готов! Нет, конечно, совсем без чертежей тут не обойдется, к тому же для лучшего понимания материала я постараюсь приводить их сверх необходимости.

1. Векторы

Это «альфа» и «омега» аналитической геометрии.

1.1. Понятие вектора. Свободный вектор

Сначала вспомним школьное определение вектора. ***Вектором* называется** <u>направленный</u> **отрезок, для которого указано его начало и конец**:



В данном случае началом отрезка является точка A, а концом отрезка – точка B. Сам вектор обозначен через $\overline{AB}$. **Направление** имеет существенное значение, если переставить стрелку на другой конец отрезка, то получится вектор $\overline{BA}$, и это уже **совершенно другой вектор**. Понятие вектора удобно отождествлять с движением физического тела: согласитесь, зайти в двери института и выйти из дверей института – это две разные вещи.

Отдельные точки удобно считать так называемым ***нулевым вектором*** $\overline{0}$. У этого вектора начало и конец совпадают и его направление не определено.

Как многие помнят, в геометрии рассматривают ***векторы плоскости*** и ***векторы пространства***, и излагаемые факты справедливы *(если на сказано иного)* как для плоскости, так и для пространства.

Обозначения: многие сразу обратили внимание на палочку без стрелочки в обозначении $\overline{AB}$ и сказали: *«там же вверху еще стрелку ставят»*! Верно, можно записать со стрелкой: $\vec{AB}$, но допустима и **запись** $\overline{AB}$**, которую я буду использовать в дальнейшем**. Такая привычка сложилась из практических соображений – слишком разнокалиберными и «мохнатыми» получались мои стрелки в школе и ВУЗе. В некоторых источниках векторы выделяют жирным шрифтом: $\mathbf{AB}$, подразумевая тем самым, что это вектор.

Со стилистикой разобрались и теперь о главном:

1) Векторы можно записать двумя большими латинскими буквами:

$\overline{AB}, \overline{CD}, \overline{EF},...$ и так далее. При этом первая буква **обязательно** обозначает точку-начало вектора, а вторая буква – точку-конец вектора.

2) Векторы также записывают маленькими латинскими буквами:

$\overline{a}, \overline{b}, \overline{c},...$ В частности, наш вектор $\overline{AB}$ можно для краткости переобозначить маленькой латинской буквой $\overline{a}$.

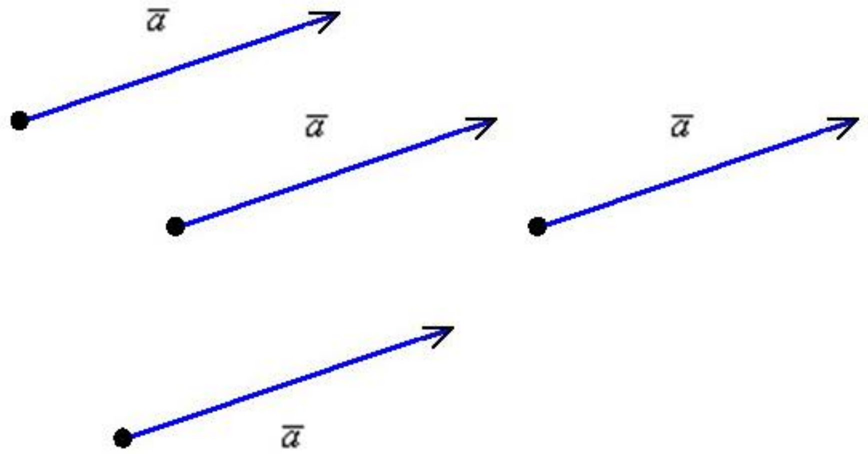
Длиной или ***модулем*** ненулевого вектора $\overline{AB}$ называется длина отрезка AB. Длина нулевого вектора $\overline{0}$ равна нулю.

Длина вектора **обозначается** знаком модуля: $|\overline{AB}|$, $|\overline{a}|$

Как находить длину вектора мы узнаем (или повторим, для кого как) чуть позже.

То были элементарные сведения о векторе, знакомые всем школьникам. В аналитической же геометрии рассматривается так называемый ***свободный вектор***.

Свободный вектор – это множество сонаправленных отрезков равной длины:



Часто говорят, что *«вектор, равный данному, можно отложить от любой точки»*, но далеко не все понимают настоящий смысл этого действия. С математической точки зрения это ОДИН И ТОТ ЖЕ ВЕКТОР. В чём состоит свобода? В ходе решения задачи вы можете «пристроить» направленный отрезок в ЛЮБУЮ, нужную вам точку плоскости или пространства. И это очень крутое свойство! Представьте направленный отрезок произвольной длины и направления – его можно «клонировать» в любой точке плоскости или пространства, по сути, он существует ВЕЗДЕ.

Следует отметить, что с точки зрения физики понятие свободного вектора в общем случае некорректно, и точка приложения вектора имеет значение. Ударьте кулаком по подушке и по кирпичу и почувствуйте разницу ☺. Кроме того, несвободные векторы рассматриваются и в некоторых разделах математики.

Далее, если не оговаривается иное, речь пойдёт только о свободных векторах.

Вспоминаем ещё одно понятие:

1.2. Коллинеарные векторы

Два вектора называются *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. **Никаких «параллельных» векторов!** **Коллинеарные.**

Если направления коллинеарных векторов совпадают *(стрелки «смотрят» в одну сторону)*, то они являются ***сонаправленными***. Если стрелки «смотрят» в разные стороны, то векторы будут ***противоположно направлены***.

Обозначения: коллинеарность векторов записывают привычным значком параллельности: $\overline{a} \parallel \overline{b}$, при этом возможна детализация: $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$ (векторы сонаправлены) или $\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$ (векторы направлены противоположно).

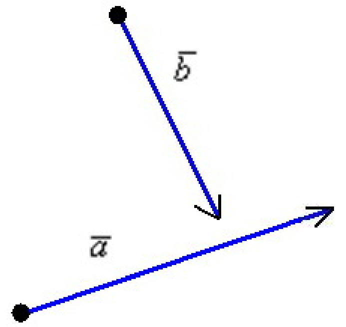
Коллинеарные векторы в общем случае имеют разные длины (разумеется), и давайте тут же ответим на лукавый вопрос: **какие векторы являются равными?** **Два вектора равны, если они сонаправлены и имеют одинаковую длину**. Это «по-школьному». Но теперь-то теперь мы знаем, что это ОДИН И ТОТ ЖЕ вектор.

1.3. Действия с векторами

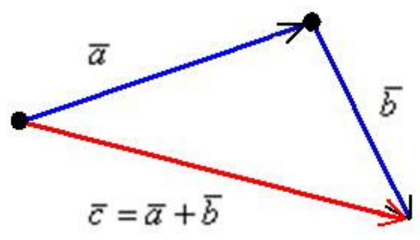
В школьном курсе геометрии рассматривается ряд действий и правил с векторами, и для начала мы повторим наиболее важные из них:

- **Правило сложения векторов по правилу треугольников**

Рассмотрим два произвольных ненулевых вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$:



Требуется найти их сумму. В силу того, что все векторы свободны, отложим вектор $\overline{b}$ от *конца* вектора $\overline{a}$:



Суммой векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ является вектор $\overline{c}$. Для лучшего понимания правила в него целесообразно вложить физический смысл: пусть некоторое тело совершило путь по вектору $\overline{a}$, а затем по вектору $\overline{b}$. Тогда сумма векторов $\overline{a}+\overline{b}$ представляет собой вектор результирующего пути $\overline{c}$ с началом в точке отправления и концом в точке прибытия.

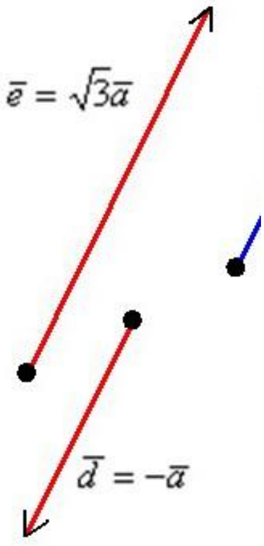
Векторы перестановочны: $\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$ – мысленно отложите вектор $\overline{a}$ от *конца* вектора $\overline{b}$ (см. рисунок выше), и вы поймёте, что получится тот же самый вектор $\overline{c}$.

Аналогичное правило справедливо для суммы любого количества векторов. Как говорится, тело может пройти свой путь по зигзагу, а может и ~~на автопилоте~~ по результирующему вектору суммы. Кстати, если вектор $\overline{b}$ отложить от *начала* вектора $\overline{a}$, то получится эквивалентное ***правило параллелограмма*** сложения векторов.

➢ Умножение вектора на число

Произведением ненулевого вектора $\overline{a}$ на число λ является такой вектор $\overline{b}$, длина которого равна $|\lambda|\cdot|\overline{a}|$, причём при $\lambda \geq 0$ векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ сонаправлены, а при $\lambda < 0$ направлены противоположно.

Правило умножения вектора на число легче понять с помощью рисунка:



…

Разбираемся более детально:

1) Направление. Если множитель λ отрицательный, то полученный вектор будет направлен в противоположную сторону – смотрим на векторы $\overline{c} = -2\overline{a}$ и $\overline{d} = -\overline{a}$.

2) Длина. Если множитель заключен в пределах …, то длина вектора соразмерно <u>уменьшается</u>. Так, длина вектора $\overline{b} = \frac{1}{2}\overline{a}$ в два раза меньше длины вектора $\overline{a}$. Если множитель λ по модулю больше единицы, то длина вектора <u>увеличивается</u> в λ раз. Так, длина вектора $\overline{c} = -2\overline{a}$ в два раза больше длины вектора $\overline{a}$.

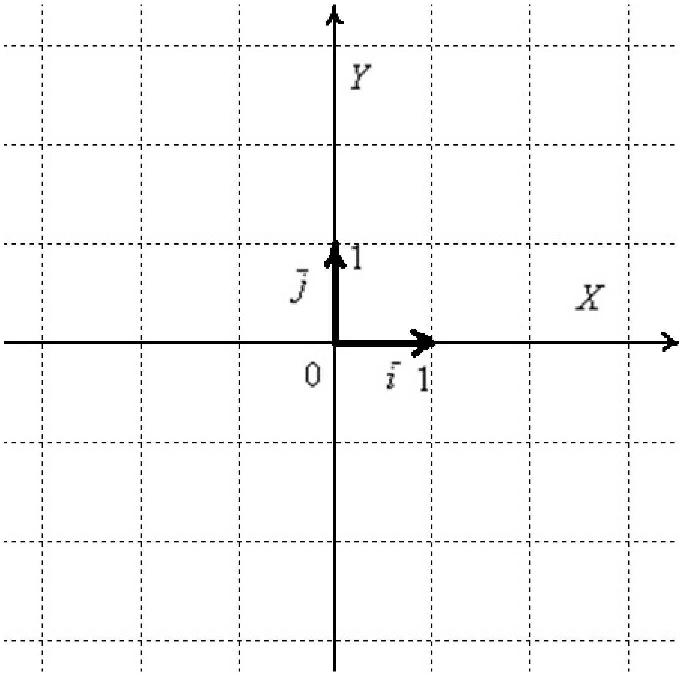
3) Очевидно, что **все векторы** коллинеарны, при этом один вектор *линейно** выражен через другой, например, $\overline{e} = \sqrt{3}\overline{a}$. **Обратное тоже справедливо**: если один вектор можно *линейно* выразить через другой, то такие векторы обязательно коллинеарны. Таким образом: **если мы умножаем вектор на число, то получится коллинеарный** (по отношению к исходному) **вектор**.

**** Справка***: *линейно – это значит, через множитель-константу.*

4) Векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{e}$ сонаправлены. Векторы $\overline{c}$ и $\overline{d}$ тоже сонаправлены. Любой вектор первой группы противоположно направлен по отношению к любому вектору второй группы.

1.4. Координаты вектора на плоскости и в пространстве

Сначала рассмотрим векторы на плоскости. Изобразим ***декартову прямоугольную систему координат*** и от начала координат отложим ***единичные векторы*** $\bar{i}$ и $\bar{j}$. Опять знакомая школьная картинка:



Векторы $\bar{i}$ и $\bar{j}$ ***ортогональны***. **А вот здесь можно также сказать, что векторы перпендикулярны.** Но лучше **ортогональны**. Привыкаем к новым терминам!

Обозначение: ортогональность векторов записывают привычным значком перпендикулярности, например: $\bar{i} \perp \bar{j}$.

Рассматриваемые векторы называют ***координатными векторами*** или ***ортами***. Данные векторы образуют ***базис*** на плоскости. Определение базиса мы сформулируем позже, а пока на уровне понимания: векторы базиса задают «координатную сетку». Да-да, прямо эту клетчатую разлиновку, которую вы видите на чертеже выше.

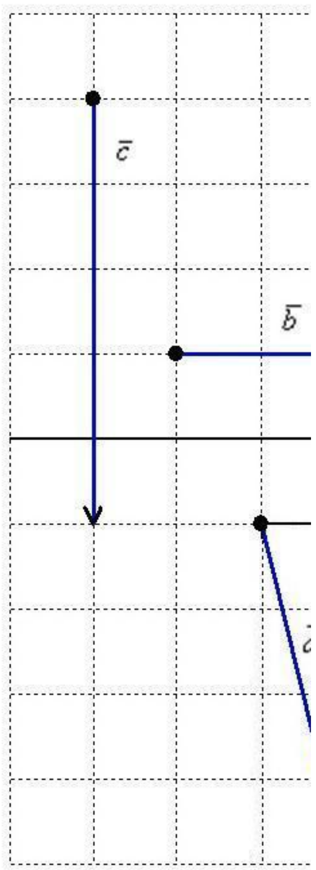
Иногда построенный базис называют ***ортонормированным*** *базисом плоскости*, «орто» – потому что координатные векторы ортогональны. Прилагательное «нормированный» в переводе с математического на русский означает *единичный*, т.е. длины векторов этого базиса равны единице.

Обозначение: базис обычно записывают в круглых скобках, внутри которых **в строгой последовательности** перечисляются базисные векторы, например: $(\bar{i}; \bar{j})$. Координатные векторы переставлять местами **нельзя**.

Любой вектор $\bar{v}$ плоскости **единственным образом** выражается в виде:

…, где v_1, v_2 – **числа**, которые называются ***координатами вектора*** в данном базисе. Само выражение … называют ***разложением вектора*** $\bar{v}$ ***по базису*** $(\bar{i}; \bar{j})$.

И примеры, примеры, примеры:



…

Начнём с вектора $\bar{a} = 3\bar{i} + 2\bar{j}$. По чертежу хорошо видно, что при разложении вектора по базису используются только что рассмотренные:

1) правило умножения вектора на число: $3\bar{i}$ и $2\bar{j}$;

2) сложение векторов по правилу треугольника: $3\bar{i} + 2\bar{j}$.

А теперь мысленно отложите вектор $\bar{a}$ от любой другой точки плоскости. Совершенно понятно, что его разложение $3\bar{i} + 2\bar{j}$ будет «неотступно следовать за ним». Вот она, свобода вектора! Это свойство, разумеется, справедливо для любого вектора. Забавно, что сами базисные (свободные) векторы $\bar{i}$, $\bar{j}$ можно начертить где угодно. Правда, делать так не нужно, а то преподаватель тоже проявит оригинальность и нарисует вам «зачтено» в неожиданном месте :)

Векторы $\bar{b} = 2\bar{i}$, $\bar{c} = -5\bar{j}$ иллюстрируют правило умножения вектора на число, вектор $\bar{b} = 2\bar{i}$ сонаправлен с базисным вектором $\bar{i}$, вектор $\bar{c} = -5\bar{j}$ направлен противоположно по отношению к базисному вектору $\bar{j}$. У этих векторов одна из координат равна нулю, дотошно можно записать так: ….

И, наконец: $\bar{d} = \bar{i} - 4\bar{j}$, $\bar{e} = -3\bar{i} - 3\bar{j}$. Кстати, **что такое вычитание векторов, и почему я не напомнил вам о правиле вычитания?** А потому что не нужно. **С алгебраической точки зрения, вычитание – это частный случай сложения.** Так, разложения векторов «дэ» и «е» преспокойно записываются в виде суммы: $\bar{d} = \bar{i} + (-4\bar{j})$, $\bar{e} = -3\bar{i} + (-3\bar{j})$. Проследите по чертежу, как чётко в этих ситуациях работает старое доброе сложение векторов по правилу треугольника.

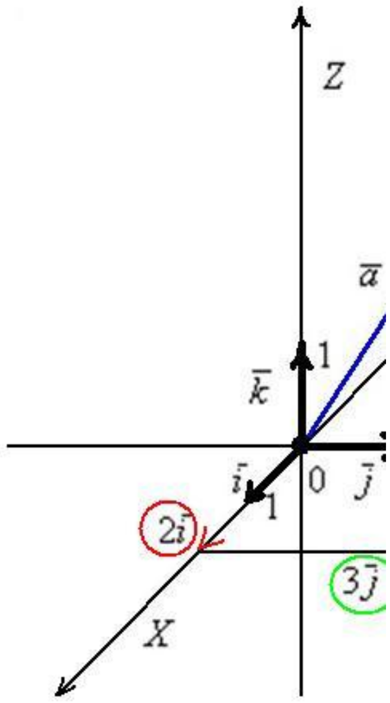
Разложение вида $\bar{v} = v_1 \cdot \bar{i} + v_2 \cdot \bar{j}$ иногда называют разложением вектора *в системе орт* (т.е. в системе единичных векторов). Но это не единственный способ записи вектора, на практике распространён следующий вариант:

$\bar{a}(3;\ 2)$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\bar{a} = (3;\ 2)$
$\bar{b}(2;\ 0)$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\bar{b} = (2;\ 0)$
$\bar{c}(0;\ -5)$ или *(реже)* со знаком равенства: $\bar{c} = (0;\ -5)$
$\bar{d}(1;\ -4)$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\bar{d} = (1;\ -4)$
$\bar{e}(-3;\ -3)$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\bar{e} = (-3;\ -3)$

То есть, в круглых скобках **в строгой последовательности** указываются координаты вектора. В практических задачах используются все три варианта записи.

Сами базисные векторы можно записать так: $\bar{i} = 1 \cdot \bar{i} + 0 \cdot \bar{j}$, $\quad \bar{j} = 0 \cdot \bar{i} + 1 \cdot \bar{j}$ или, соответственно: $\bar{i}(1;\ 0)$, $\ \bar{j}(0;\ 1)$.

С координатами на плоскости разобрались. Теперь рассмотрим векторы в трехмерном пространстве, здесь практически всё так же! Только добавится ещё одна координата. Трехмерные чертежи выполнять тяжко, поэтому ограничусь одним вектором, который для простоты отложу от начала координат:



Перед вами *ортонормированный* базис $(\bar{i};\ \bar{j};\ \bar{k})$ трёхмерного пространства, единичные векторы $\bar{i},\ \bar{j},\ \bar{k}$ данного базиса попарно *ортогональны*: $\bar{i} \perp \bar{j}$, $\bar{i} \perp \bar{k}$ и $\bar{j} \perp \bar{k}$. Ось OX наклонена под углом 45 градусов для того, чтобы складывалось визуальное впечатление пространства.

Любой вектор $\bar{v}$ трехмерного пространства можно **единственным способом** разложить по ортонормированному базису $(\bar{i};\ \bar{j};\ \bar{k})$:

…, где v_1, v_2, v_3 – координаты вектора $\bar{v}$ (числа) в этом базисе.

Пример с картинки: $\bar{a} = 2\bar{i} + 3\bar{j} + 4\bar{k}$. Давайте посмотрим, как здесь работают правила действий с векторами. Во-первых, умножение вектора на число: $2\bar{i}$ (красная стрелка), $3\bar{j}$ (зеленая стрелка) и $4\bar{k}$ (малиновая стрелка). Во-вторых, перед вами пример сложения нескольких, в данном случае трёх векторов: $2\bar{i} + 3\bar{j} + 4\bar{k}$. Вектор суммы $\bar{a}$ начинается в исходной точке отправления (начало вектора $2\bar{i}$) и утыкается в итоговую точку прибытия (конец вектора $4\bar{k}$).

Все векторы трехмерного пространства, естественно, тоже свободны, попробуйте мысленно отложить вектор $\bar{a}$ от любой другой точки, и вы поймёте, что его разложение $2\bar{i} + 3\bar{j} + 4\bar{k}$ «останется при нём».

Аналогично «плоскому» случаю, помимо записи $\bar{a} = 2\bar{i} + 3\bar{j} + 4\bar{k}$, широко используются версии со скобками: $\bar{a}(2; 3; 4)$ либо $\bar{a} = (2; 3; 4)$.

Если в разложении отсутствует один (или два) координатных вектора, то вместо них ставятся нули. Примеры:

вектор $\bar{b} = -\bar{i} + 3\bar{k}$ (дотошно $\bar{b} = -\bar{i} + 0 \cdot \bar{j} + 3\bar{k}$) – запишем $\bar{b}(-1; 0; 3)$;

вектор $\bar{c} = 2\bar{j} - 5\bar{k}$ (дотошно $\bar{c} = 0 \cdot \bar{i} + 2\bar{j} - 5\bar{k}$) – запишем $\bar{c}(0; 2; -5)$;

вектор $\bar{d} = 3\bar{k}$ (дотошно $\bar{d} = 0 \cdot \bar{i} + 0 \cdot \bar{j} + 3\bar{k}$) – запишем $\bar{d}(0; 0; 3)$.

Базисные векторы записываются следующим образом:

$\bar{i}(1; 0; 0)$, $\bar{j}(0; 1; 0)$, $\bar{k}(0; 0; 1)$

И мы переходим к практике, которая нас уже заждалась:

1.5. Простейшие задачи аналитической геометрии

Рассмотренные ниже задания крайне желательно научиться решать «на полном автомате», а формулы **запомнить наизусть**, ...впрочем, запоминать не надо – сами запомнятся :) Изложение материала пойдет «параллельным курсом» – и для плоскости, и для пространства. По той причине, что формулы однотипны:

➢ Как найти вектор по двум точкам?

Если даны две точки плоскости $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$, то вектор $\overline{AB}$ имеет следующие координаты:

…

Если даны две точки пространства $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$, то вектор $\overline{AB}$ имеет следующие координаты:

…

То есть, **из координат конца вектора нужно вычесть соответствующие координаты начала вектора**. Таким образом, для противоположно направленного вектора формулы запишутся так:

…

Задача 1

Даны две точки плоскости $A(2;1)$ и $B(-2;3)$. Найти координаты вектора $\overline{AB}$

Решение: по соответствующей формуле:

$\overline{AB}(-2-2;\,3-1)=\overline{AB}(-4;\,2)$

Как вариант, можно использовать следующую запись:

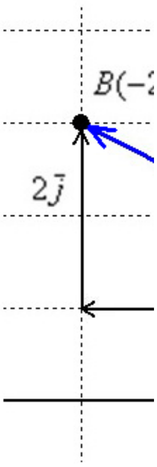
$\overline{AB}=(-2-2;\,3-1)=(-4;\,2)$

Эстеты решат и так: $\overline{AB}=(-2-2)\bar{i}+(3-1)\bar{j}=-4\bar{i}+2\bar{j}$

Лично я привык к первой версии записи.

Ответ: $\overline{AB}(-4;\,2)$

По условию не требовалось строить чертежа (что характерно для задач аналитической геометрии), но в целях пояснения **важного момента**, не поленюсь:



…

И момент здесь таков:
в чём различие между координатами точек и координатами векторов?

Координаты точек – это обычные координаты в прямоугольной системе координат (единичные векторы тут вообще ни при чём). Откладывать точки на координатной плоскости, думаю, все умеют ещё с 5-6 класса. Каждая точка обладает строгим местом на плоскости, и перемещать их куда-либо нельзя.

Координаты же вектора – это его разложение по базису $(\bar{i};\,\bar{j})$, в данном случае $\overline{AB}=-4\bar{i}+2\bar{j}$. Любой вектор является свободным, поэтому при желании мы легко можем переобозначить его через $\bar{a}$ и отложить от какой-нибудь другой точки плоскости. Следует отметить, что для векторов можно вообще не строить оси, прямоугольную систему координат, нужен лишь базис, в данном случае ортонормированный базис плоскости $(\bar{i};\,\bar{j})$.

Записи координат точек $A(2;1)$, $B(-2;3)$ и координат вектора $\overline{AB}(-4;\,2)$ формально одинаковы, но **смысл координат абсолютно разный**, и **вам следует хорошо понимать эту разницу**. Данное отличие, разумеется, справедливо и для пространства.

Дамы и господа, набиваем руку:

Задача 2

а) Даны точки $A(-4; 5)$ и $B(1; -3)$. Найти векторы $\overline{AB}$ и $\overline{BA}$.

б) Даны точки $A(2; 0), B(-7; 1)$ и $C(4; 1)$. Найти векторы $\overline{AB}, \overline{AC}$ и $\overline{BC}$.

в) Даны точки $F(-2; -1; 0)$ и $E(0; -1; -2)$. Найти векторы $\overline{FE}$ и $\overline{EF}$.

г) Даны точки $A_1(10; 5; -4), A_2(-8; 6; 3), A_3(1; 1; -1), A_4(0; 0; 1)$. Найти векторы $\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}, \overline{A_1A_4}$.

Пожалуй, достаточно…. **Не пропускаем! Решаем письменно и «от руки»!** Чертежи делать не нужно (коль скоро, не требовалось). Решения и ответы в конце книги.

Для проверки вычислений удобно использовать ***Геометрический калькулятор***, приложенные к данному курсу. Дабы избежать нелепых ошибок а-ля «2 + 2 = 5». А подобные «затмения» бывают. Даже у профессоров. Отвлёкся – и студентка сбежала :)

➢ Как найти длину отрезка?

Длина, как уже отмечалось, обозначается знаком модуля.

Если даны две точки плоскости $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$, то длину *отрезка* AB можно вычислить по формуле:

…

Если даны точки пространства $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$, то длину отрезка AB можно вычислить по формуле:

…

Примечание: *соответствующие координаты можно переставить местами:* $|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ *и* $|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$, *но это нестандартный вариант.*

Задача 3

Даны точки $A(-3; 5)$ и $B(1; -3)$. Найти длину отрезка AB.

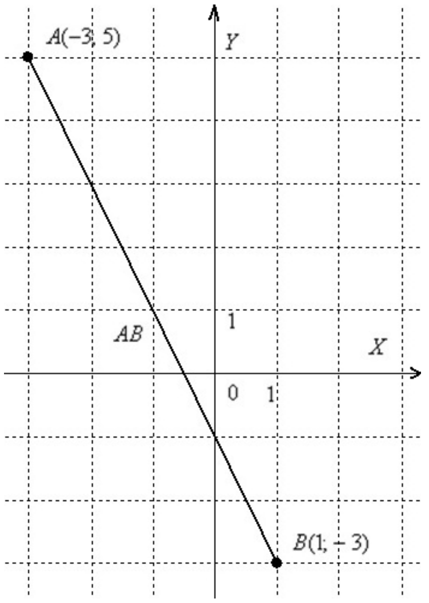
Решение: по соответствующей формуле:

$$|AB| = \sqrt{(1-(-3))^2 + (-3-5)^2} = \sqrt{4^2 + (-8)^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

Ответ: $|AB| = 4\sqrt{5}$ ед. $\approx 8{,}94$ ед. *(единицы)*

Обратите внимание на **вынесение множителя из-под корня**: $\sqrt{80} = \sqrt{16 \cdot 5} = 4\sqrt{5}$ *(см. Приложение* ***Школьные материалы****)*. **Это крайне желательное действие**, если оно возможно. Ибо будет придирка со стороны преподавателя. С высокой вероятностью.

И для наглядности снова выполню чертёж, тут есть что сказать:



Отрезок AB – **это не вектор**, а обычный ненаправленный отрезок. И перемещать его куда-либо, конечно, нельзя.

Кроме того, если вы выполните чертеж в масштабе: 1 ед. = 1 см (две тетрадные клетки), то полученный ответ $|AB| \approx 8{,}94$ ед. можно проверить обычной линейкой, непосредственно измерив длину отрезка AB. Но проще, конечно, использовать ***Калькулятор*** *(приложен к книге)*.

Кстати, в ответе не забываем указать размерность: «единицы». В условии не сказано, ЧТО это – миллиметры, сантиметры, метры или километры. Поэтому математически грамотным решением будет общая формулировка: «единицы» – сокращенно «ед.».

Задание для самостоятельного решения с отрезком в пространстве:

Задача 4

Даны точки $A(2; 3; -1)$ и $B(-5; 3; 0)$. Найти длину отрезка AB.

Решение и ответ в конце книги.

- **Как найти длину вектора?**

Если дан вектор плоскости $\bar{v}(v_1; v_2)$, то его длина вычисляется по формуле ….
Если дан вектор пространства $\bar{v}(v_1; v_2; v_3)$, то его длина вычисляется по формуле

….

Задача 5

Даны точки $A(-3; 5)$ и $B(1; -3)$. Найти длину вектора $\overline{AB}$.

Я взял те же точки, что и в Задаче 3.

Решение: сначала найдём вектор $\overline{AB}$:

$$\overline{AB}(1-(-3); -3-5) = \overline{AB}(4; -8)$$

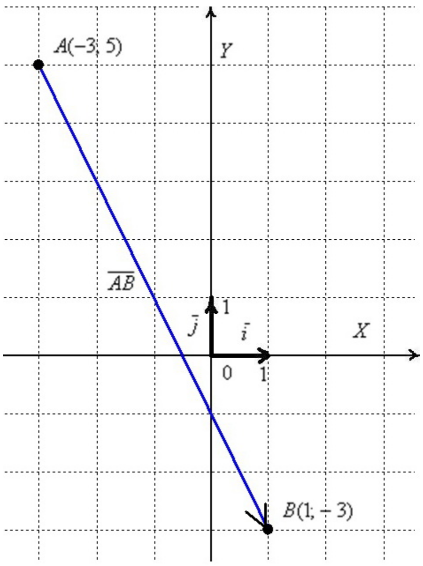
Длину вектора вычислим по формуле …:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{4^2 + (-8)^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

Ответ: $|\overline{AB}| = 4\sqrt{5}$ ед. $\approx 8{,}94$ ед.

Приближенные значения, в принципе, можно и не указывать, но я рекомендую. Округляют обычно до 1-2, иногда до 3-4 знаков после запятой

А теперь ответим на вопрос: в чём здесь принципиальное отличие от Задачи 3?



Отличие состоит в том, что здесь речь идёт о векторе, а не об обычном отрезке. Вектор можно переместить в любую точку плоскости, переобозначив его, например, буквой $\bar{a}$.

А в чём сходство этих задач? Очевидно, что длина простого отрезка AB равна длине вектора $\overline{AB}$. Так же очевидно, что длина вектора $\overline{BA}$ будет такой же. По итогу: $|AB| = |\overline{AB}| = |\overline{BA}|$

Задачу 3 можно было решить и другим способом, а именно вместо применения формулы $|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, найти вектор $\overline{AB}(1-(-3); -3-5) = \overline{AB}(4; -8)$ и сослаться на то, что длина отрезка AB равна длине вектора $\overline{AB}$:

$$|AB| = |\overline{AB}| = \sqrt{4^2 + (-8)^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5} \text{ ед.} \approx 8{,}94 \text{ ед.}$$

Этот способ широко практикуется в ходе решений задач аналитической геометрии.

Вышесказанное справедливо и для пространственного случая

Тренируемся самостоятельно:

Задача 6

а) Даны точки $A(0; 2; 5)$ и $B(-4; 7; 15)$. Найти длину вектора $\overline{BA}$.

б) Найти длины векторов $\bar{a}(-2; 6)$, $\bar{b}(-4\sqrt{2}; 2; 0)$, $\bar{c} = 4\bar{i} + \sqrt{2}\bar{j}$ и $\bar{d} = 4\bar{j} - 3\bar{k}$.

➢ Действия с векторами в координатах

Ранее мы рассмотрели правила сложения векторов и умножения вектора на число. Но рассмотрели их с принципиально-графической точки зрения. Посмотрим, как данные правила работают аналитически – когда нам известны координаты векторов в ортонормированном базисе $(\bar{i}; \bar{j})$ либо $(\bar{i}; \bar{j}; \bar{k})$:

1) Правило сложения векторов. Пусть есть два вектора плоскости $\bar{v} = (v_1; v_2)$ и $\bar{w} = (w_1; w_2)$. Для того, чтобы сложить эти векторы, нужно **сложить их соответствующие координаты**: …. Как просто. На всякий случай запишу частный случай – формулу разности векторов: ….

Аналогичное правило справедливо для суммы любого количества векторов, добавим например, вектор $\bar{s} = (s_1; s_2)$, и результат понятен: …

Если речь идёт о векторах в пространстве, то всё точно так же, только добавится дополнительная координата. Если даны векторы $\bar{v} = (v_1; v_2; v_3)$, $\bar{w} = (w_1; w_2; w_3)$, то их суммой является вектор ….

2) Правило умножения вектора на число. Ещё проще! Для того чтобы вектор $\bar{v}=(v_1;v_2)$ умножить на число λ, нужно каждую координату данного вектора умножить на число λ:

….

Для пространственного вектора $\bar{v}=(v_1;v_2;v_3)$ правило такое же:

…

Задача 7

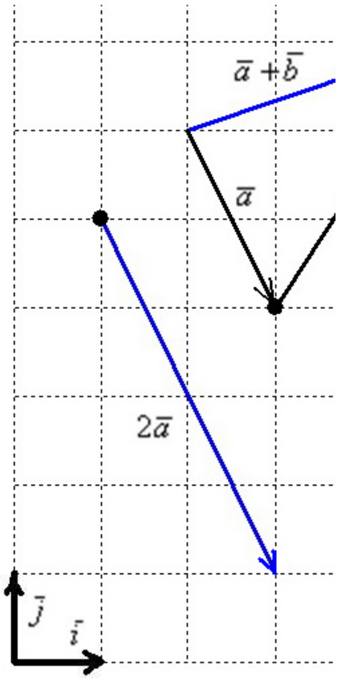
Даны векторы $\bar{a}(1;-2)$ и $\bar{b}(2;3)$. Найти $2\bar{a}$, $\bar{a}+\bar{b}$ и $\bar{a}-\bar{b}$

Решение чисто аналитическое:

$$2\bar{a}=2(1;-2)=(2;-4)$$
$$\bar{a}+\bar{b}=(1;-2)+(2;3)=(1+2;-2+3)=(3;1)$$
$$\bar{a}-\bar{b}=(1;-2)-(2;3)=(1-2;-2-3)=(-1;-5)$$

Ответ: $2\bar{a}=(2;-4)$, $\bar{a}+\bar{b}=(3;1)$, $\bar{a}-\bar{b}=(-1;-5)$

Чертеж в подобных задачах строить не надо, тем не менее, геометрическая демонстрация будет весьма полезной. Если считать, что векторы заданы в ортонормированном базисе $(\bar{i};\bar{j})$, то графическое решение задачи будет таким:



Коль скоро речь идет **только о векторах**, то оси рисовать не обязательно. Достаточно начертить базисные векторы, причём, где угодно. Ну и координатную сетку для удобства. Как видите, графический способ решения привёл к тем же результатам, что и аналитический способ решения. Ещё раз заметьте свободу векторов: любую из трёх «конструкций» можно переместить в любую точку плоскости.

Для векторов в пространстве можно провести аналогичные выкладки. Но там чертежи строить значительно сложнее, поэтому ограничусь аналитическим решением (на практике, собственно, бОльшего и не нужно):

Задача 8

Даны векторы $\overline{a}(0;4;-7)$ и $\overline{b}(7;-9;1)$. Найти $3\overline{a}-2\overline{b}$ и $-\overline{a}+4\overline{b}$

Решение: **для действий с векторами справедлив обычный алгебраический приоритет:** сначала умножаем, потом складываем:

$$3\overline{a}-2\overline{b}=3(0;4;-7)-2(7;-9;1)=(0;12;-21)-(14;-18;2)=$$
$$=(0-14;12-(-18);-21-2)=(-14;30;-23)$$

$$-\overline{a}+4\overline{b}=-(0;4;-7)+4(7;-9;1)=(0;-4;7)+(28;-36;4)=$$
$$=(0+28;-4-36;7+4)=(28;-40;11)$$

Ответ: $3\overline{a}-2\overline{b}=(-14;30;-23),\quad -\overline{a}+4\overline{b}=(28;-40;11)$

И для самостоятельного решения занятный пример с векторами на плоскости:

Задача 9

Даны векторы $\overline{a}(1;-2), \overline{b}(2;0), \overline{c}(-4;2)$. Найти $3\overline{a}-5\overline{b}+\frac{1}{2}\overline{c}$ и $-2(\overline{a}-2\overline{c})+4\overline{b}$

➢ Единичные векторы

Единичный вектор **– это вектор, длина которого в ортонормированном базисе равна единице**. Таковыми являются сами координатные векторы $\overline{i}(1;0), \overline{j}(0;1)$ и $\overline{i}(1;0;0)$, $\overline{j}(0;1;0)$, $\overline{k}(0;0;1)$ и противоположно направленные им векторы, например:

$$-\overline{i}=-1\cdot(1;0)=(-1;0)$$

То, что их длина равна единице, элементарно видно не только по чертежам, но и по формулам ….

А теперь рассмотрим произвольный вектор $\overline{v}=v_1\overline{i}+v_2\overline{j}$ либо $\overline{v}=v_1\overline{i}+v_2\overline{j}+v_3\overline{k}$ и **поставим задачу** найти единичный вектор $\overline{v}_0$, коллинеарный исходному. Таких векторов будет **два**. Чтобы найти сонаправленный единичный вектор нужно каждую координату вектора $\overline{v}$ разделить на его длину:

… либо $\overline{v}_0=\frac{\overline{v}}{|\overline{v}|}=\ldots$,

или, **что то же самое** – умножить каждую координату вектора $\overline{v}$ на $\frac{1}{|\overline{v}|}$. То есть, **деление – это частный случай умножения** (осознаём и привыкаем). Противоположно направленный единичный вектор очевиден:

$-\overline{v}_0=-\frac{\overline{v}}{|\overline{v}|}=\ldots$ либо $\overline{v}_0=-\frac{v_1}{|\overline{v}|}\cdot\overline{i}\ldots$

Задача 10

Найти единичные векторы, коллинеарные векторам а) $\bar{a}(-2;1)$, б) $\bar{b}(3;0;-4)$. Выполнить проверку.

Решение: а) вычислим длину вектора $|\bar{a}|=\sqrt{(-2)^2+1^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$ и найдём сонаправленный единичный вектор:

$\bar{a}_0=\dfrac{\bar{a}}{|\bar{a}|}=\ldots$, от иррациональности в знаменателе (корня) тут обычно не избавляются. Проверка состоит в нахождении длины полученного вектора:

$|\bar{a}_0|=\sqrt{\left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^2+\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{4}{5}+\dfrac{1}{5}}=\sqrt{\dfrac{5}{5}}=\sqrt{1}=1$, что и требовалось проверить.

Второй вектор очевиден: $-\bar{a}_0=-1\cdot\left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\bar{i}+\dfrac{1}{\sqrt{5}}\bar{j}\right)=\dfrac{2}{\sqrt{5}}\bar{i}-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\bar{j}$, как очевидна и его длина $|-\bar{a}_0|=1$.

Ответ: $\ldots -\bar{a}_0\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}};-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$

Потребность найти единичный вектор возникает не только в геометрических задачах, и **поэтому обязательно прорешайте пункт б) самостоятельно**.

➢ Деление отрезка в данном отношении

Рассмотрим пару точек A, B *(плоскости или пространства)* и отрезок AB:

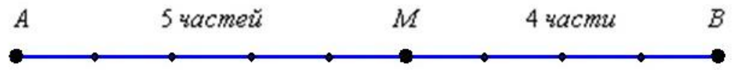
Что будем с ним делать? На это раз пилить. Точкой M:

В данном примере точка M делит отрезок AB ТАКИМ образом, что отрезок AM в два раза короче отрезка BM. ЕЩЁ можно сказать, что **точка** M **делит отрезок** AB **в отношении** $1:2$ **(«один к двум»), считая от вершины** A.

На сухом математическом языке этот факт записывают пропорцией $AM:BM=1:2$ или чаще в виде привычной дроби: $\dfrac{AM}{BM}=\dfrac{1}{2}$. Отношение отрезков принято стандартно обозначать греческой буквой «лямбда», в данном случае: $\lambda=\dfrac{1}{2}$.

Пропорцию можно составить и в другом порядке: $\lambda=\dfrac{BM}{AM}=2$ – сия запись означает, что отрезок BM в два раза длиннее отрезка AM, но какого-то принципиального значения для решения задач это не имеет. Можно так, а можно так.

Разумеется, отрезок легко разделить в каком-нибудь другом отношении, и в качестве закрепления понятия второй пример:



Здесь справедливо соотношение: $\lambda = \frac{AM}{BM} = \frac{5}{4}$. Если составить пропорцию наоборот, тогда получаем: $\lambda = \frac{BM}{AM} = \frac{4}{5}$.

Формулы деления отрезка в данном отношении:

Если известны две точки плоскости $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$, то координаты точки $M(x_M; y_M)$, которая делит отрезок AB в отношении $\lambda = \frac{AM}{BM}$, выражаются формулами:

$$x_M = \frac{x_A + ...}{1+\lambda}, \quad ...$$

В пространственном случае $A(x_A; y_A; z_A), B(x_B; y_B\ z_B)$ и $M(x_M; y_M; z_M)$ добавляется дополнительная координата:

$$x_M = \frac{x_A + ...}{1+\lambda}, \quad ....$$

Откуда взялись данные формулы? В курсе аналитической геометрии эти формулы выводятся с помощью векторов (куда ж теперь без них? =)).

Задача 11

Найти координаты точки M, делящей отрезок AB в отношении $1:3$, если известны точки $A(5; 3), B(-3; -1)$

Решение: по умолчанию, отсчёт начинается от первого конца отрезка: $\lambda = \frac{AM}{BM} = \frac{1}{3}$.

По формулам деления отрезка в данном отношении, найдём точку $M(x_M; y_M)$:

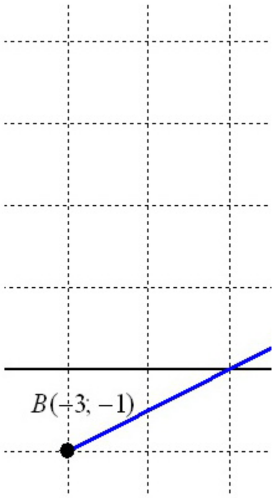
$$x_M = ... = \frac{5 + \frac{1}{3}\cdot(-3)}{1+\frac{1}{3}} = \frac{5-1}{\frac{4}{3}} = 4\cdot\frac{3}{4} = 3$$

$$y_M = ... = \frac{3 + \frac{1}{3}\cdot(-1)}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3-\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{\frac{8}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{8}{3}\cdot\frac{3}{4} = 2$$

Ответ: $M(3; 2)$

Обратите внимание на технику вычислений: сначала нужно отдельно вычислить числитель и отдельно знаменатель. В результате чего часто (но далеко не всегда) получается трёх- или четырёхэтажная дробь. После этого **избавляемся от многоэтажности дроби** *(см. Приложение **Школьные материалы**)* и проводим окончательные упрощения.

В задаче не требуется строить чертежа, но его полезно выполнить на черновике:



…

– чтобы убедиться в том, что соотношение $\frac{AM}{BM}=\frac{1}{3}$ действительно выполнено, то есть отрезок AM в три раза короче отрезка BM. Если длины не очевидны, то отрезки всегда можно тупо измерить обычной линейкой.

Существует и **второй способ решения**: в нём отсчёт начинается с точки B и справедливым является отношение: $\lambda=\frac{BM}{AM}=\frac{3}{1}=3$ *(иными словами, отрезок BM в три раза длиннее отрезка AM)*. По формулам деления отрезка в данном отношении:

$$x_M=...=\frac{-3+3\cdot 5}{1+3}=\frac{12}{4}=3$$
$$y_M=...=\frac{-1+3\cdot 3}{1+3}=\frac{8}{4}=2$$

Ответ: $M(3;\,2)$

Заметьте, что в формулах необходимо переместить координаты точки B на первое место, поскольку маленький триллер начинался именно с неё. Также видно, что второй способ рациональнее ввиду более простых вычислений. Но всё-таки данную задачу чаще решают в «традиционном» порядке. Так, если по условию дан отрезок AB, то предполагается, что вы составите пропорцию $\lambda=\frac{AM}{BM}$, если дан отрезок FG, то «негласно» подразумевается пропорция $\lambda=\frac{FM}{GM}$, и так далее.

Задача 12

а) Точка P принадлежит отрезку DH. Известно, что отрезок DP в два раза длиннее отрезка HP. Найти точку H, если $D(2;\,4),\ P\left(\frac{8}{3};\,2\right)$. Выполнить проверку.

б) Даны точки $K(-2;\,1;\,0),\ L(5;\,-6;\,-3)$. Найти точку M, делящую отрезок KL в отношении $2:5$.

Удачного распила!

➢ Формулы координат середины отрезка

И снова годы школьные. Задача деления отрезка на две равные части – это **частный случай** деления отрезка в данном отношении. Двуручная пила работает самым демократичным образом, и каждому соседу за партой достаётся по одинаковой палке:

В этот торжественный час стучат барабаны, приветствуя знаменательную пропорцию $\lambda = \frac{AM}{BM} = \frac{1}{1} = 1$. И общие формулы $x_M = \frac{x_A + \lambda \cdot x_B}{1+\lambda}$, $y_M = \frac{y_A + \lambda \cdot y_B}{1+\lambda}$ чудесным образом преображаются в нечто знакомое и простое:

$x_M = \frac{x_A + \ldots}{2}$, $y_M = \ldots$ – **формулы координат середины отрезка**.

Для пространственного случая справедлива очевидная аналогия. Если даны концы отрезка $A(x_A;\, y_A;\, z_A), B(x_B;\, y_B\; z_B)$, то координаты его середины M выражаются формулами

$$x_M = \frac{x_A + \ldots}{2}, \quad \ldots$$

Задача 13

Параллелограмм $ABCD$ задан координатами своих вершин $A(-4;\,0), B(4;\,4)$, $C(7;\,2), D(-1;\,-2)$ Найти точку пересечения его диагоналей.

Перед **решением** задачи **настоятельно рекомендую вспомнить основные геометрические фигуры и их основные свойства** *(Приложение* ***Школьные материалы****)*.

Желающие могут выполнить чертёж, и это особенно актуально для тех, кто капитально забыл школьный курс геометрии.

По известному свойству, диагонали параллелограмма своей точкой пересечения $O(x_O;\, y_O)$ делятся пополам, поэтому задачу можно решить двумя способами.

Способ первый: Рассмотрим противоположные вершины $A(-4;\,0), C(7;\,2)$. По формулам деления отрезка пополам найдём середину диагонали AC:

$$x_O = \ldots = \frac{-4+7}{2} = \frac{3}{2}, \quad y_O = \ldots = \frac{0+2}{2} = 1$$

В результате: $O\left(\frac{3}{2};\,1\right)$

Способ второй: Рассмотрим противоположные вершины $B(4;\,4), D(-1;\,-2)$. По формулам деления отрезка пополам найдём середину диагонали BD:

$$x_O = \ldots = \frac{4-1}{2} = \frac{3}{2}, \quad y_O = \ldots = \frac{4-2}{2} = 1$$

Ответ: $O\left(\frac{3}{2};\,1\right)$

Творческая задача для самостоятельного решения:

Задача 14

Равнобедренный треугольник задан своими вершинами $A_1(3; -3; -2)$, $A_2(1; 0; -1)$, $A_3(4; -2; 0)$. Найти середину его основания.

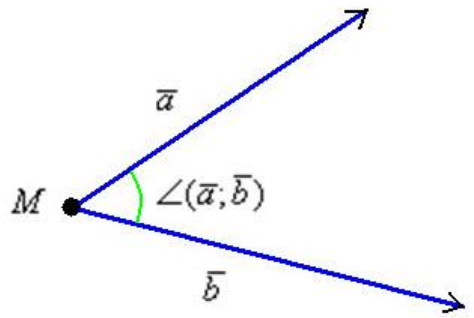
…что такое равнобедренный и основание? – Освежаем знания по геометрическим фигурам! – это китайское напоминание (*Приложение* ***Школьные Материалы***).

1.6. Скалярное произведение векторов

Сложение векторов, умножение вектора на число…. Было бы наивным думать, что этой всё. Приоткроем же, наконец, дверь и увлечённо посмотрим, что происходит, когда два вектора встречают друг друга…. Нижеследующие понятия, факты и задачи справедливы как для векторов плоскости, так и для векторов пространства:

➢ Угол между векторами

Думаю, всем интуитивно понятно, что это такое, но, тем не менее: ***угол между двумя ненулевыми векторами*** $\bar{a}$ **и** $\bar{b}$ **– это меньший угол между соответствующими направленными отрезками, отложенными от одной точки:**



В литературе значок угла $\angle$ часто пропускают и пишут просто $(\bar{a};\bar{b})$.

Угол между векторами $\angle(\bar{a};\bar{b})$ может принимать значения от 0 до 180 градусов (от 0 до π радиан) включительно. Аналитически данный факт записывается в виде двойного неравенства: $0^\circ \le \angle(\bar{a};\bar{b}) \le 180^\circ$ либо $0 \le \angle(\bar{a};\bar{b}) \le \pi$ (в радианах).

➢ Определение скалярного произведения

Скалярным произведением **двух векторов** $\bar{a}$ **и** $\bar{b}$ **называется ЧИСЛО, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними**:

…

Акцентируем внимание на существенной информации:

Обозначение: скалярное произведение обозначается через $\bar{a}\cdot\bar{b}$ или просто $\bar{a}\bar{b}$.

Результат операции является ЧИСЛОМ: умножается вектор на вектор, а получается число. Действительно, если длины векторов $|\bar{a}|, |\bar{b}|$ – это числа, косинус угла – число, то их произведение … тоже будет числом.

Сразу пара разминочных примеров:

Задача 15

Найти скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 5$, $\angle(\bar{a};\bar{b}) = \frac{\pi}{6}$

Решение: используем формулу …. В данном случае:

$$\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\angle(\bar{a};\bar{b}) = 2\cdot 5\cdot\cos\frac{\pi}{6} = 10\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$$

Ответ: $\bar{a}\bar{b} = 5\sqrt{3}$

Значения косинуса можно найти в **тригонометрической таблиц**е *(см. Приложение **Тригонометрия**)*, а если нужного значения там нет, то используйте калькулятор.

Чисто с математической точки зрения скалярное произведение безразмерно, то есть результат, в данном случае $5\sqrt{3}$, просто число и всё. С точки же зрения задач физики скалярное произведение всегда имеет определенный физический смысл, то есть после результата нужно указать ту или иную физическую единицу. Каноничный пример – это вычисление *работы силы* $A = |\bar{F}|\cdot|\bar{s}|\cdot\cos(\bar{F};\bar{s})$. Работа силы измеряется в Джоулях, поэтому, и ответ запишется вполне конкретно, например, $5\sqrt{3}$ Дж.

Задача 16

Найти $\bar{c}\bar{d}$, если $|\bar{c}| = 3$, $|\bar{d}| = \sqrt{2}$, а угол между векторами равен $135°$.

Это пример для самостоятельного решения.

➢ Угол между векторами и знак скалярного произведения

В Задаче 15 скалярное произведение получилось положительным, а в Задаче 16 – отрицательным. Выясним, от чего зависит знак скалярного произведения. Смотрим на нашу формулу: …. Длины ненулевых векторов всегда положительны: $|\bar{a}| > 0, |\bar{b}| > 0$, поэтому знак может зависеть только от значения косинуса:

1) Если угол между векторами **острый**: $0 < \angle(\bar{a};\bar{b}) < \frac{\pi}{2}$ (от 0 до 90 градусов), то $\cos\angle(\bar{a};\bar{b}) > 0$, и **скалярное произведение будет положительным**: $\bar{a}\bar{b} > 0$. Особый случай: если векторы сонаправлены, то угол между ними считается нулевым $\angle(\bar{a};\bar{b}) = 0$, и скалярное произведение также будет положительным. Поскольку $\cos 0 = 1$, то формула упрощается: ….

2) Если **угол** между векторами **тупой**: $\frac{\pi}{2} < \angle(\bar{a};\bar{b}) < \pi$ (от 90 до 180 градусов), то $\cos\angle(\bar{a};\bar{b}) < 0$, и, соответственно, **скалярное произведение отрицательно**: $\bar{a}\bar{b} < 0$. Особый случай: если векторы направлены противоположно, то угол между ними считается ***развёрнутым***: $\angle(\bar{a};\bar{b}) = \pi$ (180 градусов). Скалярное произведение здесь тоже отрицательно, так как $\cos\pi = -1$.

Справедливы и обратные утверждения:

Если $\overline{a}\overline{b} > 0$, то угол между данными векторами острый, как вариант, векторы сонаправлены. Если $\overline{a}\overline{b} < 0$, то угол между данными векторами тупой, как вариант, векторы направлены противоположно.

Но особый интерес представляет третий случай:

3) Если **угол** между векторами **прямой**: $\angle(\overline{a};\overline{b}) = \frac{\pi}{2}$ (90 градусов), то $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ и **скалярное произведение равно нулю**: $\overline{a}\overline{b} = 0$. Обратное тоже верно: если $\overline{a}\overline{b} = 0$, то $\angle(\overline{a};\overline{b}) = \frac{\pi}{2}$. Компактно утверждение формулируется так: **скалярное произведение двух векторов равно нулю тогда и только тогда, когда данные векторы ортогональны**. Короткая математическая запись: … *(т.е. из одного следует другое)*.

Третий случай имеет большую практическую значимость, поскольку позволяет выяснить, ортогональны векторы или нет.

➢ **Скалярный квадрат вектора**

Вернёмся к ситуации, когда два вектора *сонаправлены*. В этом случае угол между ними равен нулю, $\cos 0 = 1$, и формула скалярного произведения принимает вид: $\overline{a}\overline{b} = |\overline{a}|\cdot|\overline{b}|$.

А что будет, если вектор $\overline{a}$ умножить на самого себя? Понятно, что вектор сонаправлен сам с собой, поэтому пользуемся вышеуказанной упрощенной формулой:

$\overline{a}\overline{a} = |\overline{a}|\cdot|\overline{a}|$ или …

Число $\overline{a}\overline{a}$ называется ***скалярным квадратом*** вектора $\overline{a}$, и **обозначатся** как $\overline{a}^2$.

Таким образом, скалярный квадрат вектора $\overline{a}$ равен квадрату длины данного вектора: …

Из этого равенства легко получить формулу для вычисления длины вектора:

…

Пока она кажется малопонятной, но задачи параграфа всё расставят на свои места. И для решения задач нам также потребуются

➢ **свойства скалярного произведения.**

Для произвольных векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ и любого числа λ справедливы следующие свойства:

1) $\overline{a}\overline{b} = \overline{b}\overline{a}$ – *переместительный* или ***коммутативный*** закон

2) $(\overline{a}+\overline{b})\overline{c} = \overline{a}\overline{c} + \overline{b}\overline{c}$ – *распределительный* или ***дистрибутивный*** закон скалярного произведения. Попросту, можно раскрывать скобки.

3) $(\lambda\overline{a})\cdot\overline{b} = \lambda(\overline{a}\overline{b})$ – *сочетательный* или ***ассоциативный*** закон скалярного произведения относительно множителя (константу можно вынести из скалярного произведения)

Зачастую всевозможные свойства (которые ещё и доказывать надо!) воспринимаются студентами как ненужный хлам, который лишь необходимо вызубрить и сразу после экзамена благополучно забыть. Казалось бы, чего тут важного – все и так с первого класса знают, что от перестановки множителей произведение не меняется: $\bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{a}$. Должен предостеречь, в высшей математике с подобным подходом легко «наломать дров». Так, например, переместительное свойство не является справедливым для **алгебраических матриц**. Неверно оно и для векторного произведения векторов. Поэтому, **в любые свойства, которые вам встретятся, как минимум, нужно вникать, чтобы понять, что можно делать, а чего нельзя.**

Задача 17

Найти скалярное произведение векторов $\bar{c} = -2\bar{a} + \bar{b}$ и $\bar{d} = \bar{a} - \bar{b}$, если известно, что $|\bar{a}| = 4\sqrt{2}, \quad |\bar{b}| = 8, \quad \angle(\bar{a};\bar{b}) = \dfrac{\pi}{4}$

Решение: сначала проясним ситуацию с вектором $\bar{c} = -2\bar{a} + \bar{b}$. Что это вообще такое? Сумма векторов $-2\bar{a}$ и $\bar{b}$ представляет собой вполне определенный вектор, который и обозначен через $\bar{c}$. Такая же история с вектором $\bar{d}$ – это сумма векторов $\bar{a}$ и $-\bar{b}$

Итак, по условию требуется найти скалярное произведение $\bar{c}\bar{d}$. По идее, нужно применить рабочую формулу …, но беда в том, что нам неизвестны длины векторов $\bar{c}, \bar{d}$ и угол между ними. Зато в условии даны аналогичные параметры для векторов $\bar{a}, \bar{b}$, поэтому мы пойдём другим путём:

$$\bar{c} \cdot \bar{d} =^{(1)} = (-2\bar{a} + \bar{b}) \cdot (\bar{a} - \bar{b}) =^{(2)}$$
$$= \ldots =^{(3)}$$
$$= \ldots =^{(4)}$$
$$= -2\bar{a}^2 + 3\bar{a}\bar{b} - \bar{b}^2 =^{(5)}$$
$$= -2|\bar{a}|^2 + 3 \cdot |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\angle(\bar{a};\bar{b}) - |\bar{b}|^2 =^{(6)}$$
$$= -2 \cdot (4\sqrt{2})^2 + 3 \cdot 4\sqrt{2} \cdot 8 \cdot \cos\frac{\pi}{4} - 8^2 = -64 + 96\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 64 = -32$$

(1) Поставляем выражения векторов $\bar{c}, \bar{d}$.

(2) Используя дистрибутивное свойство, раскрываем скобки по правилу умножения многочленов: *чтобы умножить многочлен на многочлен нужно каждый член одного многочлена умножить на каждый член другого многочлена*.

(3) В первом и последнем слагаемом компактно записываем скалярные квадраты векторов: $\bar{a} \cdot \bar{a} = \bar{a}^2, \quad \bar{b} \cdot \bar{b} = \bar{b}^2$. Во втором слагаемом используем перестановочность скалярного произведения: $\bar{b} \cdot \bar{a} = \bar{a} \cdot \bar{b}$.

(4) Приводим подобные слагаемые: $\bar{a} \cdot \bar{b} + 2\bar{a} \cdot \bar{b} = 3\bar{a}\bar{b}$.

(5) В первом слагаемом используем формулу скалярного квадрата $\bar{a}^2 = |\bar{a}|^2$. В последнем слагаемом работает та же штука: $\bar{b}^2 = |\bar{b}|^2$. Второе слагаемое раскладываем по стандартной формуле ….

(6) Подставляем исходные данные $|\bar{a}|=4\sqrt{2}, |\bar{b}|=8, \angle(\bar{a};\bar{b})=\frac{\pi}{4}$ и ВНИМАТЕЛЬНО проводим окончательные вычисления.

Ответ: $\bar{c}\bar{d}=-32$

Отрицательное значение скалярного произведения констатирует тот факт, что угол между векторами $\bar{c}, \bar{d}$ является тупым.

Задача типовая, вот пример для самостоятельного решения:

Задача 18

Найти скалярное произведение векторов $\bar{c}=-\bar{a}+2\bar{b}$ и $\bar{d}=-\bar{a}+\bar{b}$, если известно, что $|\bar{a}|=4,\quad |\bar{b}|=2\sqrt{3},\quad \angle(\bar{a};\bar{b})=\frac{\pi}{6}$.

Теперь ещё одно распространённое задание, как раз на новую формулу длины вектора $|\bar{a}|=\sqrt{\bar{a}^2}$. Обозначения тут будут совпадать, поэтому для ясности я перепишу её с другой буквой: $|\bar{v}|=\sqrt{\bar{v}^2}$

Задача 19

Найти длину вектора $\bar{c}=-\bar{a}+3\bar{b}$, если $|\bar{a}|=3,\quad |\bar{b}|=2,\quad \angle(\bar{a};\bar{b})=\frac{\pi}{3}$.

Сначала **решение,** затем комментарии:

$$|\bar{c}|\overset{(1)}{=}|-\bar{a}+3\bar{b}|\overset{(2)}{=}\sqrt{(-\bar{a}+3\bar{b})^2}\overset{(3)}{=}\ldots=$$
$$=\sqrt{3^2-6\cdot 3\cdot 2\cdot\cos\frac{\pi}{3}+9\cdot 2^2}=\sqrt{9-36\cdot\frac{1}{2}+36}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$$

(1) Поставляем выражение вектора $\bar{c}$.

(2) Используем формулу длины: $|\bar{v}|=\sqrt{\bar{v}^2}$, при этом в качестве вектора «вэ» у нас выступает целое выражение $-\bar{a}+3\bar{b}$.

(3) Используем школьную формулу квадрата суммы $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$: … – обратите внимание, как она здесь любопытно сработала, фактически это квадрат разности $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$, и, по сути, так оно и есть. Переставим векторы местами: $\sqrt{(-\bar{a}+3\bar{b})^2}=\sqrt{(3\bar{b}-\bar{a})^2}=\sqrt{9\bar{b}^2-6\bar{a}\bar{b}+\bar{a}^2}$ – получилось то же самое с точностью до перестановки слагаемых.

(4) Дальнейшее уже знакомо из двух предыдущих задач.

Ответ: $|\bar{c}|=3\sqrt{3}$ ед. $\approx 5{,}20$ ед.

Коль скоро речь шла о длине, то не забываем указать размерность – «единицы».

Задача 20

Найти длину вектора $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$, если $|\bar{a}| = 5$, $|\bar{b}| = 10$, $\angle(\bar{a}; \bar{b}) = \frac{2\pi}{3}$.

Это пример для самостоятельного решения.

Продолжаем выжимать полезные вещи из скалярного произведения:

➤ Нахождение угла между векторами

Снова посмотрим на нашу формулу …. По правилу пропорции сбросим длины векторов в знаменатель левой части:

…, а части поменяем местами:

…

В чём смысл этой формулы? Если известны длины двух векторов и их скалярное произведение, то можно вычислить косинус угла между данными векторами, а, следовательно, и сам угол – с помощью обратной функции $\angle(\bar{a}; \bar{b}) = \arccos...$.

Задача 21

Найти угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если известно, что $|\bar{a}| = 4$, $|\bar{b}| = 2\sqrt{2}$, $\bar{a}\bar{b} = 8$.

Решение: используем формулу:

$$\cos\angle(\bar{a}; \bar{b}) = ... = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

На заключительном этапе вычислений использован **технический приём** – *устранение иррациональности в знаменателе*. В целях устранения иррациональности я домножил числитель и знаменатель на $\sqrt{2}$.

Итак, если $\cos\angle(\bar{a}; \bar{b}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, то $\angle(\bar{a}; \bar{b}) = \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$

Значения обратных тригонометрических функций можно находить по соответствующей тригонометрической таблице *(см. Приложение **Тригонометрия**)*. Но гораздо чаще появляется какой-нибудь неуклюжий медведь вроде $\arccos\frac{5}{17}$, и значение угла приходится находить приближенно, используя калькулятор.

Ответ: $\angle(\bar{a}; \bar{b}) = \frac{\pi}{4}$ рад. $= 45^\circ$

Опять – не забываем указывать размерность, радианы и градусы. Лично я, чтобы заведомо «снять все вопросы», предпочитаю указывать и то, и то (если по условию, конечно, не требуется представить ответ только в радианах или только в градусах).

Теперь вы сможете самостоятельно справиться с более сложным заданием:

Задача 22

Даны $|\bar{a}|=3, |\bar{b}|=4$ – длины векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и угол между ними $\angle(\bar{a};\bar{b})=\frac{\pi}{3}$. Найти угол между векторами $\bar{c}=-2\bar{a}+3\bar{b}$, $\bar{d}=4\bar{a}-3\bar{b}$.

Разберём алгоритм решения:

1) По условию требуется найти угол между векторами $\bar{c}$ и $\bar{d}$, поэтому нужно использовать формулу $\cos\angle(\bar{c};\bar{d})=\frac{\bar{c}\bar{d}}{|\bar{c}|\cdot|\bar{d}|}$.

2) Находим скалярное произведение $\bar{c}\bar{d}$ (см. Задачи 18-19).

3) Находим длину вектора $\bar{c}$ и длину вектора $\bar{d}$ (см. Задачи 20-21).

4) Концовка решения совпадает с Задачей 22.

Краткое решение и ответ в конце книги.

➢ Скалярное произведение векторов в координатах

Повествование опять пойдёт параллельно – и для векторов плоскости, и для пространственных векторов:

> **Скалярное произведение векторов** $\bar{v}(v_1;v_2)$ и $\bar{w}(w_1;w_2)$, заданных в ортонормированном базисе $(\bar{i};\bar{j})$, **выражается формулой** …
>
> **Скалярное произведение векторов** $\bar{v}(v_1;v_2;v_3), \bar{w}(w_1;w_2;w_3)$, заданных в ортонормированном базисе $(\bar{i};\bar{j};\bar{k})$, **выражается формулой** …

То есть, **скалярное произведение равно сумме произведений соответствующих ….**

Задача 23

Найти скалярное произведение векторов:

а) $\bar{a}(2;-5)$ и $\bar{b}(-1;0)$

б) $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, если даны точки $A(1;-1;3), B(0;1;-2), C(4;-4;0)$

Решение:

а) Здесь даны векторы плоскости. По формуле …:

$\bar{a}\bar{b}=2\cdot(-1)+(-5)\cdot 0=-2+0=-2$

К слову, скалярное произведение получилось отрицательным, а значит, угол между данными векторами тупой. Пытливые умы могут отложить на плоскости векторы $\bar{a},\bar{b}$ от одной точки, и убедиться, что это действительно так.

б) А тут речь идёт о точках и векторах пространства. Сначала найдём векторы:

$$\overline{AB}(0-1;1-(-1);-2-3)=\overline{AB}(-1;2;-5)$$
$$\overline{AC}(4-1;-4-(-1);0-3)=\overline{AC}(3;-3;-3)$$

Надеюсь, эта простейшая задача у вас уже отработана.

По формуле … вычислим скалярное произведение:

$$\overline{AB}\cdot\overline{AC}=-1\cdot 3+2\cdot(-3)+(-5)\cdot(-3)=-3-6+15=6$$

И здесь тоже к слову: скалярное произведение положительно, следовательно, угол между пространственными векторами $\overline{AB}, \overline{AC}$ острый.

Ответ: $а)\ \overline{a}\overline{b}=-2, \quad б)\ \overline{AB}\cdot\overline{AC}=6$

При некотором опыте скалярное произведение можно приноровиться считать устно. Но лучше письменно, ибо и на старуху бывает п~~орн~~оруха.

➢ Проверка векторов на ортогональность

Вернёмся к важному случаю, когда векторы являются ортогональными. Напоминаю, что векторы $\overline{v}$ и $\overline{w}$ ортогональны тогда и только тогда, когда $\overline{v}\cdot\overline{w}=0$. В координатах данный факт запишется следующим образом:

… (для векторов плоскости);

… (для векторов пространства).

Задача 24

а) Проверить ортогональность векторов: $\overline{a}(1;2;-4)$ и $\overline{b}(6;-1;1)$

б) Выяснить, будут ли перпендикулярными отрезки KL, MN, если $K(3;5), L(-2;0)$, $M(8;-1), N(1;4)$.

Решение:

а) Выясним, будут ли ортогональны пространственные векторы. Для этого вычислим их скалярное произведение:

$\overline{a}\overline{b}=1\cdot 6+2\cdot(-1)+(-4)\cdot 1=6-2-4=0$, следовательно, $\overline{a}\perp\overline{b}$

б) Здесь речь идёт об обычных отрезках плоскости. Отрезки обычные, а задача всё равно решается через векторы. Найдём векторы:

$$\overline{KL}(-2-3;0-5)=\overline{KL}(-5;-5)$$
$$\overline{MN}(1-8;4-(-1))=\overline{MN}(-7;5)$$

и вычислим их скалярное произведение:

$\overline{KL}\cdot\overline{MN}=\ldots$, следовательно, векторы $\overline{KL}$ и $\overline{MN}$ не перпендикулярны, а значит, не перпендикулярны и отрезки KL, MN.

Ответ: а) $\overline{a}\perp\overline{b}$, б) отрезки KL, MN не перпендикулярны.

Задача 25

Даны 4 точки пространства $A(-4;-3;-2), B(2;-2;-3), C(-8;-5;1)$ и $D(4;-3;-1)$. Выяснить будут ли перпендикулярными следующие ***прямые***:

а) AB, DC, б) AC, BD.

Это задача для самостоятельного решения. По условию требуется проверить перпендикулярность прямых, а решаем снова через векторы – по полной аналогии с предыдущим примером. Геометрически тоже всё очевидно: из ортогональности векторов автоматически следует перпендикулярность соответствующих прямых. Четыре вектора, которые вы найдёте, называют ***направляющими векторами*** прямых.

Мощь аналитической геометрии – в векторах

Так, в рассмотренных задачах, с помощью скалярного произведения можно установить не только ортогональность векторов самих по себе, но и перпендикулярность отрезков, прямых. И это приоткрылась только малая часть красоты предмета.

Завершая разговор об ортогональности, разберу ещё одну небольшую задачку, которая время от времени встречается на практике:

Задача 26

При каком значении λ векторы $\bar{a}(3;\lambda;-2), \bar{b}(2-\lambda;-1;5)$ будут ортогональны?

Решение: по условию требуется найти **такое** значение параметра λ, чтобы данные векторы были ортогональны. Два вектора пространства $\bar{v}(v_1;v_2;v_3), \bar{w}(w_1;w_2;w_3)$ ортогональны тогда и только тогда, когда $v_1w_1+v_2w_2+v_3w_3=0$.

Дело за малым, составим уравнение:

$$\bar{a}\bar{b}=0$$
$$3\cdot(2-\lambda)+\lambda\cdot(-1)+(-2)\cdot 5=0$$

Раскрываем скобки и приводим подобные слагаемые:

$$6-3\lambda-\lambda-10=0$$
$$-4\lambda-4=0$$

Решаем простейшее линейное уравнение:

$$-4\lambda=4$$
$$\lambda=-1$$

Ответ: при $\lambda=-1$

Здесь легко выполнить **проверку**, в исходные векторы $\bar{a}(3;\lambda;-2), \bar{b}(2-\lambda;-1;5)$ подставляем полученное значение параметра $\lambda=-1$:

$$\bar{a}(3;-1;-2), \bar{b}(3;-1;5)$$

и находим скалярное произведение:

$\bar{a}\bar{b}=3\cdot 3-1\cdot(-1)-2\cdot 5=9+1-10=0$ – да, действительно, при $\lambda=-1$ векторы $\bar{a}, \bar{b}$ ортогональны, что и требовалось проверить.

Простенький пример для самостоятельного решения:

Задача 27

При каком значении λ скалярное произведение векторов $\overline{a}(2;\lambda), \overline{b}(2;-3)$ будет равно –2?

Едем дальше:

➢ **Если векторы заданы суммами векторов с известными координатами**

Геометрическое масло-масляное:) И мы полакомимся:

Задача 28

Найти скалярное произведение векторов $\overline{c} = \overline{a} - 4\overline{b}, \overline{d} = -2\overline{a} - \overline{b}$, если $\overline{a}(5;7), \overline{b}(1;1)$.

Решение: напрашивается недавняя трафаретная схема, где мы составляли произведение и раскрывали скобки: $\overline{c}\overline{d} = \ldots$. Но сейчас нам неизвестны длины векторов $\overline{a}, \overline{b}$ и угол между ними. Зато известны координаты. И решение на самом деле очень простое.

Найдём вектор $\overline{c}$:

$$\overline{c} = \overline{a} - 4\overline{b} = (5;7) - 4(1;1) = (5;7) - (4;4) = (1;3)$$

Найдём вектор $\overline{d}$:

$$\overline{d} = -2\overline{a} - \overline{b} = \ldots$$

Проделаны элементарные действия с векторами.

Теперь вычислим скалярное произведение:

$$\overline{c}\overline{d} = 1\cdot(-11) + 3\cdot(-15) = -11 - 45 = -56$$

Ответ: $\overline{c}\overline{d} = -56$

Что и говорить, иметь дело с координатами значительно приятнее.

Задача 29

Найти скалярное произведение векторов $3\overline{c}$ и $2\overline{c} + \overline{d}$, если $\overline{c}(0;-3;5), \overline{d}(-4;1;0)$

Это пример для самостоятельного решения. И в заключение пункта провокационный пример на вычисление длины вектора:

Задача 30

Найти длины векторов $\overline{c} = \overline{a} - \overline{b}, \overline{d} = -5\overline{a}$, если $\overline{a}(2;-1;3), \overline{b}(4;0;-1)$

По «горячему» материалу и недавним задачам здесь снова напрашивается путь: $|\overline{c}| = |\overline{a} - \overline{b}| = \sqrt{(\overline{a} - \overline{b})^2} = \sqrt{\overline{a}^2 - 2\overline{a}\overline{b} + \overline{b}^2} = \ldots$, и да, можно найти длины, скалярное произведение…, но зачем нам эти трудности?

И **решение** элементарно, найдём вектор $\bar{c}$ **:**

$\bar{c} = \bar{a} - \bar{b} = (2; -1; 3) - (4; 0; -1) = (-2; -1; 4)$

и его длину по тривиальной формуле …:

$|\bar{c}| = ...$

Скалярное произведение здесь вообще не при делах!

Как не при делах оно и при вычислении длины вектора $\bar{d} = -5\bar{a}$:

$\bar{d} = -5\bar{a} = -5(2; -1; 3) = (-10; 5; -15)$... Стоп. А не воспользоваться ли нам очевидным фактом? Ведь вектор $-5\bar{a}$ в 5 раз длиннее вектора $\bar{a}$. Направление противоположно, но это не играет роли, ибо разговор о длине. Очевидно, что длина вектора $|\lambda\bar{a}|$ равна произведению модуля числа λ на длину вектора $\bar{a}$:

$|\lambda\bar{a}| = |\lambda| \cdot |\bar{a}|$ *(знак модуля «съедает» возможный минус числа λ).*

Таким образом:

$|\bar{d}| = |-5\bar{a}| = |-5| \cdot |\bar{a}| = ...$

Ответ: $|\bar{c}| = \sqrt{21}$ ед. $\approx 4{,}58$ ед., $|\bar{d}| = 5\sqrt{14}$ ед. $\approx 18{,}71$ ед.

Вот и всё…, всё только начинается!

➢ Угол между векторами в координатах

Теперь у нас есть полная информация, чтобы ранее выведенную формулу косинуса угла между векторами $\cos\angle(\bar{v}; \bar{w}) = \dfrac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{|\bar{v}| \cdot |\bar{w}|}$ выразить через координаты векторов $\bar{v}, \bar{w}$:

Косинус угла между векторами плоскости $\bar{v}(v_1; v_2)$ и $\bar{w}(w_1; w_2)$, заданными в ортонормированном базисе $(\bar{i}; \bar{j})$, **выражается формулой**:

….

Косинус угла между векторами пространства $\bar{v}(v_1; v_2; v_3)$, $\bar{w}(w_1; w_2; w_3)$, заданными в ортонормированном базисе $(\bar{i}; \bar{j}; \bar{k})$, **выражается формулой**:

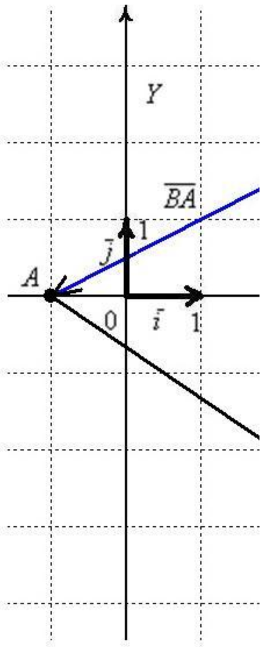
…

Возвращаемся к нашим треугольникам:

Задача 31

Даны три вершины треугольника $A(-1;0),\ B(3;2),\ C(5;-4)$. Найти $\angle ABC$.

Решение: по условию чертёж выполнять не требуется, но всё-таки:



Из чертежа совершенно очевидно, что угол $\angle ABC$ треугольника совпадает с углом между векторами $\overline{BA}$ и $\overline{BC}$, иными словами: $\angle ABC = \angle(\overline{BA};\overline{BC}) = \dfrac{\ldots}{|\overline{BA}|\cdot|\overline{BC}|}$, и дальнейшее понятно. Найдём векторы и их длины:

$$\overline{BA}(-1-3;\,0-2)=\overline{BA}(-4;\,-2),\qquad |\overline{BA}|=\sqrt{(-4)^2+(-2)^2}=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

$$\overline{BC}(5-3;\,-4-2)=\overline{BC}(2;\,-6),\qquad |\overline{BC}|=\sqrt{2^2+(-6)^2}=\sqrt{4+36}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$$

Вычислим скалярное произведение:

…

Таким образом:

$$\cos\angle(\overline{BA};\overline{BC})=\frac{\ldots}{|\overline{BA}|\cdot|\overline{BC}|}=\frac{4}{2\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{50}}=\frac{1}{5\sqrt{2}}$$

Именно такой порядок выполнения задания рекомендую «чайникам». Более подготовленные читатели могут записать вычисления «одной строкой»:

$$\cos\angle(\overline{BA};\overline{BC})=\frac{\ldots}{|\overline{BA}|\cdot|\overline{BC}|}=\frac{\ldots}{\sqrt{(-4)^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{2^2+(-6)^2}}=$$

$$=\frac{-8+12}{\sqrt{16+4}\cdot\sqrt{4+36}}=\frac{4}{\sqrt{20}\cdot\sqrt{40}}=\frac{4}{\sqrt{800}}=\frac{4}{20\sqrt{2}}=\frac{1}{5\sqrt{2}}$$

Косинус получился «плохим» (не табличным), однако, это не окончательный ответ задачи, и поэтому, к слову, не имеет особого смысла избавляться от корня в знаменателе.

Найдём сам угол: $\angle(\overline{BA};\ \overline{BC}) = \arccos\dfrac{1}{5\sqrt{2}} \approx 1{,}43\text{ рад.} \approx 82^\circ$

Если посмотреть на чертёж, то результат вполне правдоподобен. Для проверки можно использовать ***Алгебраический Калькулятор*** *(см. Приложения)* или даже измерить угол *транспортиром* (у кого он есть). Только не повредите покрытие монитора =)

Ответ: $\angle ABC = \arccos\dfrac{1}{5\sqrt{2}} \approx 1{,}43\text{ рад.} \approx 82^\circ$

В ответе не забываем, что **спрашивалось про угол треугольника** (а не про угол между векторами), не забываем указать точный ответ: $\arccos\dfrac{1}{5\sqrt{2}}$ и приближенное значение угла: $\approx 1{,}43\text{ рад.} \approx 82^\circ$, найденное с помощью калькулятора.

Задача 32

В пространстве задан треугольник координатами своих вершин $A_1(1;1;1),\ A_2(3;0;0)$, $A_3(2;3;7)$. Найти угол между сторонами A_1A_2 и A_1A_3

Это пример для самостоятельного решения, и, конечно же, задачка творческая, повторяем взаимосвязь между углом и знаком скалярного произведения:

Задача 33

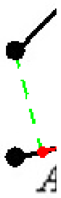
При каком значении λ угол между векторами $\overline{a}(2;\ \lambda),\ \overline{b}(2;\ -3)$ будет: а) острым, б) прямым, в) тупым?

1.7. Проекции вектора

Этот небольшой параграф будет посвящен *ортогональным* ***проекциям*** векторов, в которых тоже «замешано» скалярное произведение:

➢ Проекция вектора на вектор

Рассмотрим ненулевые векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$:



…

Спроецируем вектор $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$, для этого из начала и конца вектора $\overline{a}$ опустим перпендикуляры на вектор $\overline{b}$ *(зелёные пунктирные линии)*. Представьте, что на вектор $\overline{a}$ перпендикулярно сверху падают лучи света. Тогда отрезок AB будет «тенью» вектора $\bar{a}$. ***Проекцией вектора*** $\bar{a}$ ***на вектор*** $\bar{b}$ **является ДЛИНА отрезка** AB. То есть, ПРОЕКЦИЯ – ЭТО ЧИСЛО.

Это ЧИСЛО **обозначается** следующим образом: $Пр_{\bar{b}}\,\bar{a}$, «большим вектором» обозначают вектор **КОТОРЫЙ** проецируют, «маленьким подстрочным вектором» обозначают вектор **НА** который проецируют.

Сама запись $Пр_{\bar{b}}\,\bar{a}$ читается так: «проекция вектора «а» на вектор «бэ»».

Если угол между векторами $\bar{a}, \bar{b}$ **острый** (как на рисунке выше), то $Пр_{\bar{b}}\,\bar{a} > 0$

Если векторы $\bar{a}, \bar{b}$ **ортогональны**, то $Пр_{\bar{b}}\,\bar{a} = 0$ (проекцией является точка, размеры которой считаются нулевыми).

Если угол между векторами $\bar{a}, \bar{b}$ **тупой** (на рисунке мысленно переставьте стрелочку вектора $\bar{a}$), то $Пр_{\bar{b}}\,\bar{a} < 0$ (та же длина с добавленным знаком «минус»).

Отвечу на назревший вопрос: что произойдёт, если вектор «бэ» будет «слишком коротким»? Проводим прямую линию, содержащую вектор «бэ». И вектор «а» будет проецироваться уже *на направление вектора «бэ»*, попросту – на прямую, содержащую вектор «бэ». То же самое произойдёт, если вектор «а» отложить в тридесятом царстве – он всё равно легко спроецируется на прямую, содержащую вектор «бэ».

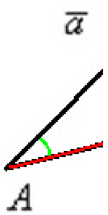
Из вышесказанного следует, что проекция вектора $\bar{a}$ на любой ненулевой сонаправленный вектор $\lambda\bar{b}$ $(\lambda > 0)$ будет точно такой же:

$Пр_{\bar{b}}\,\bar{a} = Пр_{\lambda\bar{b}}\,\bar{a}$ – **фактически это проекция вектора** $\bar{a}$ **на …**, которая содержит сонаправленные векторы $\lambda\bar{b}$ *(и поскольку векторы свободны, то таких прямых будет бесконечно много, все они будут параллельны друг другу)*;

а если векторы направлены противоположно $(\lambda < 0)$, то добавится знак «минус»:

$Пр_{\bar{b}}\,\bar{a} = -Пр_{\lambda\bar{b}}\,\bar{a}$

Отложим наши подопытные векторы от одной точки:



…

и рассмотрим прямоугольный треугольник. Косинус угла $\angle A = \angle(\bar{a}; \bar{b})$ – есть отношение *прилежащего* катета к гипотенузе:

$\cos\angle(\bar{a}; \bar{b}) = \dfrac{|AB|}{|\bar{a}|} = \dfrac{Пр_{\bar{b}}\,\bar{a}}{|\bar{a}|}$, но с другой стороны, у нас уже получена формула косинуса угла между векторами:

$$\cos\angle(\bar{a};\bar{b})=\frac{\bar{a}\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}$$

…все ли догадались, что будет дальше?

Приравниваем формулы:

…

и сокращаем знаменатели обеих частей на $|\bar{a}|$, получая **формулу для вычисления проекции**:

$$Пр_{\bar{b}}\,\bar{a}=\frac{\bar{a}\bar{b}}{|\bar{b}|}$$

Распишем её в координатах:

Если векторы плоскости $\bar{v}(v_1;\,v_2)$ и $\bar{w}(w_1;\,w_2)$ заданы в ортонормированном базисе $(\bar{i};\,\bar{j})$, то проекция вектора $\bar{v}$ на вектор $\bar{w}$ **выражается формулой**:

…

Если векторы пространства $\bar{v}(v_1;\,v_2;\,v_3)$, $\bar{w}(w_1;\,w_2;\,w_3)$ заданы в ортонормированном базисе $(\bar{i};\,\bar{j};\,\bar{k})$, то проекция вектора $\bar{v}$ на вектор $\bar{w}$ **выражается формулой**:

…

Легко убедиться, что проекция вектора $\bar{v}$ на коллинеарный вектор $\lambda\bar{w}$ $(\lambda\neq 0)$ может отличаться лишь знАком, приведу выкладки для «плоского» случая $\lambda\bar{w}=(\lambda w_1;\,\lambda w_2)$:

$$Пр_{\lambda\bar{w}}\,\bar{v}=...$$

$$=\frac{v_1w_1+v_2w_2}{\sqrt{w_1^2+w_2^2}}=Пр_{\bar{w}}\,\bar{v}\text{, если }\lambda>0\text{, и }=-\frac{v_1w_1+v_2w_2}{\sqrt{w_1^2+w_2^2}}=-Пр_{\bar{w}}\,\bar{v}\text{, если }\lambda<0$$

Задача 34

Найти проекцию вектора $\bar{a}(0;\,4;\,1)$ на вектор $\bar{b}(-1;\,2;\,7)$

Решение в одну строчку:

$$Пр_{\bar{b}}\,\bar{a}=\frac{\bar{a}\bar{b}}{|\bar{b}|}=...=\frac{15}{\sqrt{54}}=\frac{15}{3\sqrt{6}}=\frac{5}{\sqrt{6}}=\frac{5\sqrt{6}}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}=\frac{5\sqrt{6}}{6},$$ на завершающем шаге я умножил числитель и знаменатель на $\sqrt{6}$, избавившись тем самым от иррациональности в знаменателе.

Ответ: $Пр_{\bar{b}}\,\bar{a}=\dfrac{5\sqrt{6}}{6}$ ед. $\approx 2{,}04$ ед.

Проекция – это ДЛИНА, поэтому обязательно указываем размерность, правда, если получится знак «минус», то смотреться это будет своеобразно.

Задача 35

Треугольник задан своими вершинами $A(-1;0), B(3;2), C(5;-1)$. Найти:

а) проекцию стороны AB на сторону AC;

б) проекцию стороны AC на сторону AB.

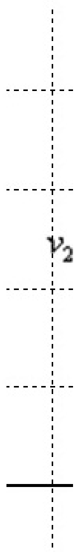
Это задача для самостоятельного решения.

Итак, **как найти проекцию вектора** $\overline{a}$ **на отрезок с известными концами** A, B**?** *(как вариант, на продолжение этого отрезка)*. Находим вектор $\overline{AB}$ и используем формулу …. Либо вектор $\overline{BA}$ и формулу $Пр_{\overline{BA}}\,\overline{a} = \frac{\overline{a}\cdot\overline{BA}}{|\overline{BA}|}$. В одном из случаев получится отрицательное значение, и если оно вас напрягает, выберите другой вариант :)

О проекции же вектора на прямую поговорим в следующей главе, а пока выясним **геометрический смысл координат векторов** в ортонормированном базисе:

➢ Проекции вектора на координатные оси. Направляющие косинусы

Рассмотрим вектор плоскости $\overline{v}(3;4)$, заданный своими координатами в ортонормированном базисе $(\overline{i};\overline{j})$. Для удобства я отложу его от начала координат:



…

Проекцией вектора $\overline{v}$ на координатную ось OX является в точности его первая координата: $v_1 = 3$ (красная черта). Обозначим через α угол между вектором $\overline{v}$ и координатным вектором $\overline{i}$: $\alpha = \angle(\overline{v};\overline{i})$ (красная дуга). По определению косинуса:

$$\cos\alpha = \frac{v_1}{|\overline{v}|} = \frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{3}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}$$

Аналогично со второй координатой: проекцией вектора $\overline{v}$ на координатную ось OY является его вторая координата: $v_2 = 4$ (малиновая черта). Обозначим через β угол между вектором $\overline{v}$ и координатным вектором $\overline{j}$: $\beta = \angle(\overline{v};\overline{j})$ (двойная малиновая дуга). Тогда: $\cos\beta = \frac{v_2}{|\overline{v}|} = \frac{4}{5}$

Косинусы $\cos\alpha, \cos\beta$ называются ***направляющими косинусами*** вектора. Причём, для любого ненулевого вектора справедливо равенство $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$. Проверим его справедливость для рассматриваемого вектора:

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = \frac{25}{25} = 1$, что и требовалось проверить.

Заметьте, что приведённые выше выкладки не изменятся, если вектор $\bar{v}(3;4)$ отложить от любой другой точки плоскости

Итак, **направляющие косинусы** ненулевого вектора $\bar{v}(v_1; v_2)$, заданного в ортонормированном базисе $(\bar{i};\ \bar{j})$, **выражаются формулами** $\cos\alpha = \frac{v_1}{|\bar{v}|}, \cos\beta = \frac{v_2}{|\bar{v}|}$, а сами координаты вектора можно выразить через его длину и данные косинусы:

…, то есть: ….

Вектор же с координатами $v_0\left(\frac{v_1}{|\bar{v}|}, \frac{v_2}{|\bar{v}|}\right)$ – это в точности единичный вектор, сонаправленный с вектором $\bar{v}$.

С пространственными векторами, заданными в ортонормированном базисе $(\bar{i};\ \bar{j}; \bar{k})$, разборки такие же. Рассмотрим произвольный ненулевой вектор $\bar{v}(v_1; v_2; v_3)$. Его координаты представляют собой проекции вектора на оси OX, OY, OZ соответственно. Обозначим углы данного вектора с ортами через: $\alpha = \angle(\bar{v};\bar{i}), \beta = \angle(\bar{v};\ \bar{j}), \gamma = \angle(\bar{v};\bar{k})$. Тогда направляющие косинусы вектора выражаются формулами:

…,

при этом справедливо равенство $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Вектор … – есть единичный вектор, сонаправленный с вектором $\bar{v}$.

В практических задачах чаще всего требуется найти направляющие косинусы вектора, заключительный пример параграфа:

Задача 36

Найти направляющие косинусы векторов:

а) $\bar{a}(-1;3)$, проверить, что $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$;

б) $\bar{b} = 2\bar{i} - 3\bar{k}$, проверить, что $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Направляющий косинусы можно найти по прямым формулам, либо сначала найти единичные векторы, и затем сослаться на тот факт, что их координаты – это соответствующие направляющие косинусы.

Решите эту задача самостоятельно! И, конечно, с проверкой, ибо без неё грех.

1.8. Линейная зависимость и линейная независимость векторов. Базис векторов. Аффинная система координат.

Не пугаемся :) Всё разберём по порядку:

➢ «Плоский» случай

Рассмотрим плоскость вашего компьютерного стола (просто стола, тумбочки, пола, потолка, кому что нравится). **Задача будет состоять в следующих действиях:**

1) Выбрать базис плоскости. Грубо говоря, у столешницы есть длина и ширина, поэтому интуитивно понятно, что для построения базиса потребуется два вектора. Одного вектора явно мало, три вектора – лишка.

2) На основе выбранного базиса задать систему координат, чтобы присвоить координаты всем находящимся на столе предметам.

Не удивляйтесь, сначала объяснения будут на пальцах. Причём, на ваших. Пожалуйста, поместите *указательный палец левой руки* на край столешницы так, чтобы он смотрел в монитор. Это будет вектор $\bar{e}_1$. Теперь поместите *мизинец правой руки* на край стола точно так же – чтобы он был направлен на экран монитора. Это будет вектор $\bar{e}_2$. …Улыбнитесь, вы замечательно выглядите! Что можно сказать о векторах $\bar{e}_1, \bar{e}_2$? Данные векторы коллинеарны, а значит, линейно *(через множитель-константу)* выражаются друг через друга:

$\bar{e}_1 = \alpha\bar{e}_2$, ну, или наоборот: $\bar{e}_2 = \frac{1}{\alpha}\bar{e}_1$, где α – некоторое число, отличное от нуля.

Картинку сего действия мы видели, когда умножали вектор на число.

Будут ли ваши пальчики $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ задавать базис на плоскости компьютерного стола? Очевидно, что нет. Коллинеарные векторы путешествуют туда-сюда по **одному** направлению, а у плоскости есть длина и ширина. Такие векторы называют ***линейно зависимыми***. **Два вектора плоскости линейно зависимы тогда и только тогда они коллинеарны**.

Скрестите пальцы на столе, чтобы между ними был любой угол, кроме 0 или 180 градусов. **Два вектора плоскости $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ линейно независимы в том и только том случае, если они** не коллинеарны. Итак, базис $(\bar{e}_1; \bar{e}_2)$ получен. Не нужно смущаться, что он получился «косым» с неперпендикулярными векторами разной длины. Очень скоро мы увидим, что для его построения пригоден не только угол в 90 градусов, и не только единичные, равные по длине векторы.

Любой вектор плоскости $\bar{v}$ **единственным образом** раскладывается по базису $(\bar{e}_1; \bar{e}_2)$:

… , где α, β – действительные числа. Числа α, β называют ***координатами вектора*** в данном базисе.

Также говорят, что **вектор $\bar{v}$ представлен в виде *линейной комбинации* базисных векторов**. То есть, выражение … называют **разложением вектора $\bar{v}$ по базису** $(\bar{e}_1; \bar{e}_2)$ или **линейной комбинацией** базисных векторов.

Так, можно сказать, что вектор $\bar{a} = -3\bar{i} + 2\bar{j}$ разложен по ортонормированному базису $(\bar{i}; \bar{j})$, а можно сказать, что он представлен в виде линейной комбинации векторов $\bar{i}$ и $\bar{j}$.

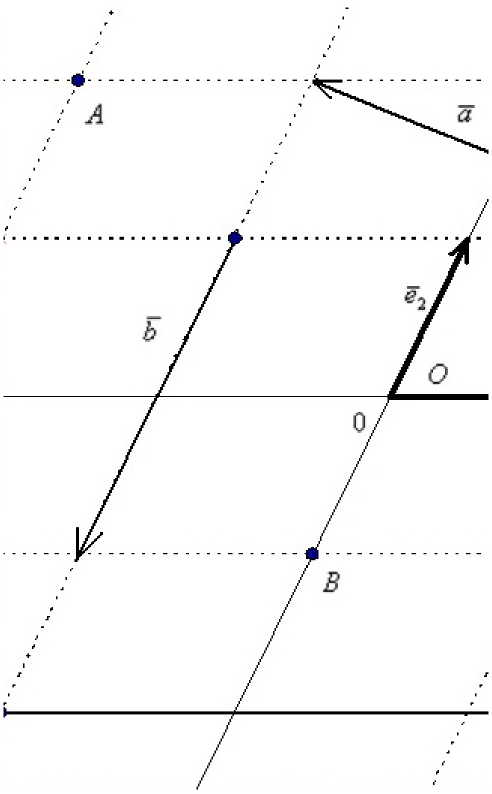
Сформулируем **определение базиса** формально:

Базисом плоскости **называется пара линейно независимых (неколлинеарных) векторов** $(\overline{e}_1; \overline{e}_2)$, **взятых в определённом порядке**, при этом **любой** вектор плоскости является линейной комбинацией базисных векторов.

Существенным моментом определения является тот факт, что векторы взяты в определённом порядке. Базисы $(\overline{e}_1; \overline{e}_2)$, $(\overline{e}_2; \overline{e}_1)$ – это два совершенно разных базиса! Как говорится, мизинец левой руки не переставишь на место мизинца правой руки.

Хорошо, с базисом разобрались, но его недостаточно, чтобы присвоить координаты каждому предмету вашего компьютерного стола. Почему недостаточно? Векторы являются свободными и блуждают по всей плоскости. Поэтому нужен отправной ориентир, и в роли такого ориентира выступает ***начало координат*** – это точка с координатами $O(0; 0)$, задающая начало отсчёта. В качестве начала координат мы можем выбрать любую точку плоскости, и располагаться она может хоть на краю Вселенной.

Начало координат $O(0; 0)$ и **неколлинеарные** векторы $\overline{e}_1, \overline{e}_2$, взятые в определённом порядке (базис), задают ***аффинную систему координат*** плоскости:



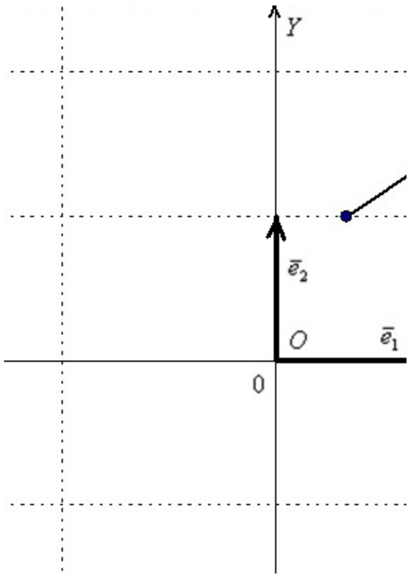
Иногда такую систему координат называют *косоугольной* системой. В качестве примеров на чертеже изображены точки $A(-2; 2)$, $B(0; -1)$ и векторы:

$$\overline{a} = -2\overline{e}_1 + \overline{e}_2 \quad \text{или} \quad \overline{a}(-2; 1);$$
$$\overline{b} = -2\overline{e}_2 \quad \text{или} \quad \overline{b}(0; -2);$$
$$\overline{c} = 3\overline{e}_1 \quad \text{или} \quad \overline{c}(3; 0).$$

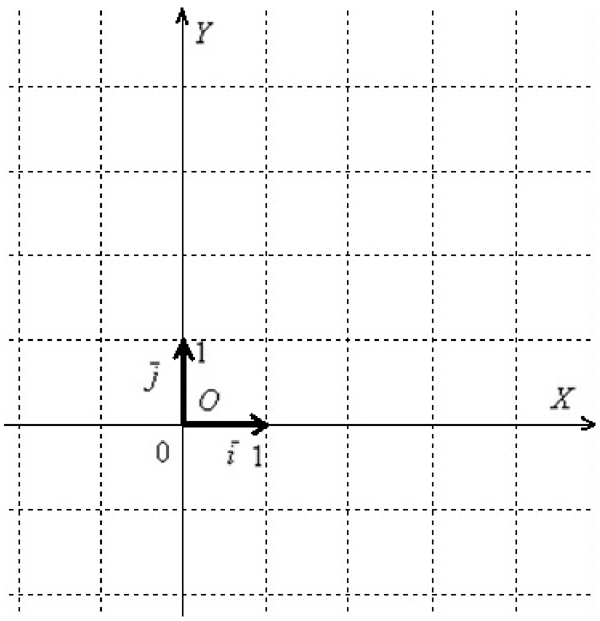
В аффинной системе координат перестают работать некоторые формулы, которые мы рассмотрели ранее, в частности, формулы вычисления длин.

…вы скажете неудобная система? Всё относительно! – да и рептилоиды с планеты Небиру одобряют ☺ Но мы, конечно, с ними не согласны:

Начало координат и два ортогональных вектора $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ произвольной ненулевой длины задают ***ортогональную систему координат***:



В качестве примера на чертеже изображена точка $M(1; -1)$ и вектор $\bar{a} = \bar{e}_1 + \bar{e}_2$ (или $\bar{a}(1; 1)$). Очевидное неудобство этого базиса состоит в том, что координатные векторы *в общем случае* имеют разные длины и не равны единице. А если они единичные, то получается привычная ***прямоугольная (декартова) система координат***, которая определяется началом координат $O(0; 0)$ и *ортонормированным* базисом $(\bar{i}; \bar{j})$:



Ось OX называют ***осью абсцисс***, а ось OY – ***осью ординат***. Чтобы задать размерность **достаточно** поставить нолик и две единички по осям. НЕ НУЖНО использовать «сплошную» нумерацию: … ~~-4, -3, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5,~~ … Ибо координатная плоскость – не памятник Декарту, а студент – не голубь :)

Популярные «тетрадные» масштабы: *1 ед. = 1 клетка* или *1 ед. = 2 клетки*.

Следует отметить, что декартову систему координат можно определить не только через векторы, и во многих задачах векторы $\bar{i}$, $\bar{j}$ не чертят.

Переходим к практической части. Все задачи этого параграфа справедливы как для «школьной» системы координат, так и для общего аффинного случая; ничего сложного:

➢ Как определить коллинеарность векторов плоскости?

Ортогональность векторов мы проверяли с помощью скалярного произведения, и вот теперь коллинеарность.

Для того чтобы два вектора плоскости $\overline{v}(v_1;\, v_2),\, \overline{w}(w_1;\, w_2)$ были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы их соответствующие координаты были пропорциональны: …, где λ – константа.

По существу, это покоординатная детализация очевидного соотношения $\overline{v} = \lambda\, \overline{w}$.

Задача 37

а) Проверить, коллинеарны ли векторы $\overline{a}(-2;\, 4),\, \overline{b}(1;\, -2)$.

б) Образуют ли базис векторы $\overline{k}(3;\, 7),\, \overline{m}(-6;\, 14)$?

Решение:

а) Выясним, существует ли для векторов $\overline{a}(-2;\, 4),\, \overline{b}(1;\, -2)$ коэффициент пропорциональности λ, такой, чтобы выполнялись равенства …:

$\begin{cases} -2 = \lambda \cdot 1 \\ 4 = \lambda \cdot (-2) \end{cases}$ – из **обоих** уравнений следует, что $\lambda = -2$, значит, данные векторы коллинеарны.

И обязательно расскажу о «пижонской» разновидности применения данного правила, которая вполне работает на практике. Идея состоит в том, чтобы сразу составить пропорцию $\frac{v_1}{w_1} = \frac{v_2}{w_2}$ и посмотреть, будет ли она верной:

$$\frac{-2}{1} = \frac{4}{-2}$$

сокращаем обе части:

$-2 = -2$ – в результате получено *верное равенство*, таким образом, соответствующие координаты пропорциональны, следовательно, $\overline{a} \parallel \overline{b}$.

Отношение можно было составить и наоборот, это равноценный вариант:

$\frac{1}{-2} = \frac{-2}{4} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ – верное равенство.

Для **проверки** можно использовать тот факт, что коллинеарные векторы линейно выражаются друг через друга. В данном случае имеют место равенства $\overline{a} = -2\overline{b},\, \overline{b} = -\frac{1}{2}\overline{a}$, и их справедливость легко проверяется через элементарные действия с векторами:

$$-2\overline{b} = -2(1;\, -2) = (-2;\, 4) = \overline{a}, \qquad -\frac{1}{2}\overline{a} = -\frac{1}{2}(-2;\, 4) = (1;\, -2) = \overline{b}.$$

б) Два вектора плоскости образуют базис, если они **не** коллинеарны (линейно независимы). Исследуем на коллинеарность векторы $\bar{k}(3; 7), \bar{m}(-6; 14)$. Составим систему:

$$\begin{cases} v_1 = \lambda w_1 \\ v_2 = \lambda w_2 \end{cases} \Rightarrow \ldots$$

Из первого уравнения следует, что $\lambda = -\frac{1}{2}$, а из второго уравнения следует, что $\lambda = \frac{1}{2}$, значит, система ***несовместна*** (решений нет). Таким образом, соответствующие координаты векторов не пропорциональны.

Вывод: векторы линейно независимы и образуют базис.

Упрощённая версия решения выглядит так:

Составим пропорцию из соответствующих координат векторов $\bar{k}(3; 7), \bar{m}(-6; 14)$:

$\frac{3}{-6} \neq \frac{7}{14}$, значит, данные векторы линейно независимы и образуют базис.

Обычно такой вариант не бракуют рецензенты, но он не применим в тех случаях, когда некоторые координаты равны нулю: $\bar{v}(0; v_2), \bar{w}(0; w_2)$. Или так: $\bar{v}(v_1; 0), \bar{w}(w_1; 0)$. Или так: $\bar{v}(0; v_2), \bar{w}(w_1; 0)$. Как тут действовать через пропорцию? (на ноль же делить нельзя). Именно по этой причине я и назвал упрощенное решение «пижонским».

Ответ: а) $\bar{a} \parallel \bar{b}$, б) образуют.

Небольшое творческое задание для самостоятельного решения:

Задача 38

При каком значении параметра α векторы $\bar{a}(1; \alpha), \bar{b}(5; -3)$ будут коллинеарны?

В образце решения параметр найден через пропорцию $\frac{v_1}{w_1} = \frac{v_2}{w_2}$.

Но это ещё не всё. Помимо рассмотренных, существует изящный **алгебраический способ** проверки векторов на коллинеарность, систематизируем наши знания и пятым пунктом как раз добавим этот способ:

Для двух векторов плоскости эквивалентны следующие утверждения:

1) векторы линейно независимы;

2) векторы образуют базис;

3) векторы не коллинеарны;

4) векторы нельзя линейно выразить друг через друга;

+ 5) определитель, составленный из координат данных векторов, отличен от нуля.

– далее нам потребуются некоторые алгебраические навыки, и по ходу изложения я буду проставлять гиперссылки на соответствующие статьи сайта.

и, соответственно, эквивалентны следующие противоположные утверждения:

1) векторы линейно зависимы;

2) векторы не образуют базиса;

3) векторы коллинеарны;

4) векторы можно линейно выразить друг через друга;

+ 5) определитель, составленный из координат данных векторов, равен нулю.

! Проконтролируйте ↑↑↑, всё ли вам понятно в терминах и утверждениях?

Я очень и очень надеюсь, что на данный момент вы уже эльфы 4-го уровня ☺.

Рассмотрим более подробно новый, пятый пункт: два вектора плоскости $\overline{v}(v_1; v_2)$, $\overline{w}(w_1; w_2)$ коллинеарны тогда и только тогда, когда определитель, составленный из координат данных векторов, равен нулю: $\begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} = 0$.

Решим Задачу 37 вторым способом:

а) Вычислим определитель, составленный из координат векторов $\overline{a}(-2; 4), \overline{b}(1; -2)$:

$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = \ldots$, значит, данные векторы коллинеарны.

б) Два вектора плоскости образуют базис, если они не коллинеарны. Вычислим определитель, составленный из координат векторов $\overline{k}(3; 7), \overline{m}(-6; 14)$:

$\begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 7 & 14 \end{vmatrix} = 3 \cdot 14 - 7 \cdot (-6) = 42 + 42 = 84 \neq 0$, значит, векторы $\overline{k}, \overline{m}$ линейно независимы и образуют базис.

Ответ: а) $\overline{a} \parallel \overline{b}$, б) образуют.

Выглядит значительно компактнее и симпатичнее, чем решение с пропорциями.

С помощью рассмотренных методов можно устанавливать не только коллинеарность векторов, но и доказывать параллельность отрезков, прямых. Разберём пару задач с конкретными геометрическими фигурами:

Задача 39

Даны вершины четырёхугольника $A(-4; 2), B(2; 6), C(5; 4), D(-1; 0)$. Доказать, что четырёхугольник $ABCD$ является параллелограммом.

Перед доказательством вспомним, что это за геометрическая фигура:

Параллелограммом называется четырёхугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны (см. *Приложение* ***Школьные Материалы***).

Таким образом, нужно доказать:

1) параллельность противоположных сторон AB и CD;

2) параллельность противоположных сторон AD и BC.

Доказываем:

1) Найдём векторы:

$\overline{AB}(2-(-4);\ 6-2)=\overline{AB}(6;\ 4)$
$\overline{CD}(-1-5;\ 0-4)=\overline{CD}(-6;\ -4)$

Вычислим определитель, составленный из координат векторов $\overline{AB},\overline{CD}$:

$\begin{vmatrix} 6 & -6 \\ 4 & -4 \end{vmatrix}=-24+24=0$, значит, данные векторы коллинеарны, откуда следует параллельность соответствующих сторон: $AB\parallel CD$.

2) Найдём векторы:

$\overline{AD}$..
$\overline{BC}$...

Получился один и тот же вектор («по-школьному» – равные векторы), но решение таки лучше оформить с толком, с расстановкой. Вычислим определитель, составленный из координат векторов $\overline{AD},\overline{BC}$:

$\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}=-6+6=0$, значит, данные векторы коллинеарны, и $AD\parallel BC$.

Вывод: противоположные стороны четырёхугольника $ABCD$ попарно параллельны, значит, он является параллелограммом по определению, **что и требовалось доказать**.

Обратите внимание, что чертёж здесь не нужен – решение чисто аналитическое.

Больше фигур хороших и разных:

Задача 40

Даны вершины четырёхугольника $A(-3;-1),B(-2;3),C(3;3),D(5;-1)$. Доказать, что четырёхугольник $ABCD$ является трапецией.

Это задание для самостоятельного решения.

А теперь пора потихонечку перебираться из плоскости в пространство:

➢ Как определить коллинеарность векторов пространства?

Правило то же самое, только добавляется дополнительная координата:

Для того чтобы два вектора пространства $\overline{v}(v_1;v_2;v_3),\overline{w}(w_1;w_2;w_3)$ были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы их соответствующие координаты были пропорциональны: *(λ – ненулевая константа).*

Данная система представляет собой покоординатную роспись линейной зависимости этих векторов: $\overline{v}=\lambda\overline{w}$

Задача 41

Выяснить, будут ли коллинеарны следующие векторы пространства:

а) $\bar{a}(1;3;-5), \bar{b}(2;-6;5)$;

б) $\bar{c}(4;-2;1), \bar{d}(8;-4;4)$;

в) $\overline{KL}(2;0;3), \overline{MN}\left(1;0;\frac{3}{2}\right)$.

Решение:

а) Проверим, существует ли коэффициент пропорциональности для соответствующих координат векторов:

…

Система не имеет решения, значит, векторы $\bar{a}, \bar{b}$ не коллинеарны.

«Упрощёнка» оформляется пропорцией …. В данном случае:

$\frac{1}{2} \neq \frac{3}{-6} \neq \frac{-5}{5}$ – соответствующие координаты не пропорциональны, значит, векторы $\bar{a}, \bar{b}$ не коллинеарны.

Ответ: векторы $\bar{a}, \bar{b}$ не коллинеарны.

б-в) Это пункты для самостоятельного решения. Попробуйте его оформить двумя способами.

Существует и другой метод проверки пространственных векторов на коллинеарность – с помощью векторного произведения векторов.

Аналогично «плоскому» случаю, эти методы можно применять для исследования параллельности пространственных отрезков и прямых.

➢ Пространственный базис и аффинная система координат

Многие закономерности, которые мы рассмотрели на плоскости, будут справедливыми и для пространства. Тем не менее, рекомендую внимательно прочитать вводную часть, так как появятся новые термины и понятия.

Теперь вместо плоскости компьютерного стола исследуем трёхмерное пространство. Сначала создадим его базис. Кто-то сейчас находится в помещении, кто-то на улице, но в любом случае нам никуда не деться от трёх измерений: ширины, длины и высоты. Поэтому для построения базиса потребуется три пространственных вектора. Одного-двух векторов мало, четвёртый – лишний.

И снова разминаемся на пальцах. Пожалуйста, поднимите руку вверх и растопырьте в разные стороны *большой, указательный и средний палец*. Это будут векторы $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$, они смотрят в разные стороны, имеют разную длину и имеют разные углы между собой. Поздравляю, базис трёхмерного пространства готов! Кстати, не нужно демонстрировать такое преподавателям, как ни крути пальцами, а от определений никуда не деться =)

Далее зададимся важным вопросом, **любые ли три вектора образуют базис трехмерного пространства**? Пожалуйста, плотно прижмите три пальца к столешнице компьютерного стола. Что произошло? Три вектора расположились в одной плоскости, и, грубо говоря, у нас пропало одно из измерений – высота. Такие векторы являются ***компланарными***, и совершенно понятно, что базиса трёхмерного пространства они не создают.

Следует отметить, что компланарные векторы не обязаны лежать в одной плоскости, они могут находиться в параллельных плоскостях (только не делайте этого с пальцами, так отрывался только Сальвадор Дали =)).

Определение: векторы называются *компланарными*, если существует плоскость, которой они параллельны. Здесь логично добавить, что если такой плоскости не существует, то и векторы будут не компланарны.

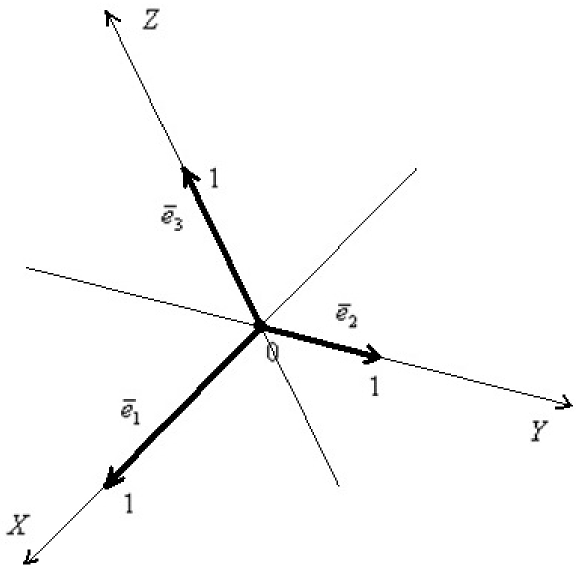
Три компланарных вектора всегда линейно зависимы, то есть линейно выражаются друг через друга. Для простоты снова представим, что они лежат в одной плоскости. Во-первых, векторы $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ мало того, что компланарны, могут быть вдобавок ещё и коллинеарны, тогда любой вектор можно выразить через любой вектор. Во втором случае, если, например, векторы $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ не коллинеарны, то третий вектор выражается через них единственным образом: … (почему?).

Справедливо и противоположное утверждение: **три некомпланарных вектора всегда линейно независимы**, то есть никоим образом не выражаются друг через друга. И, очевидно, только такие векторы могут образовать базис трёхмерного пространства.

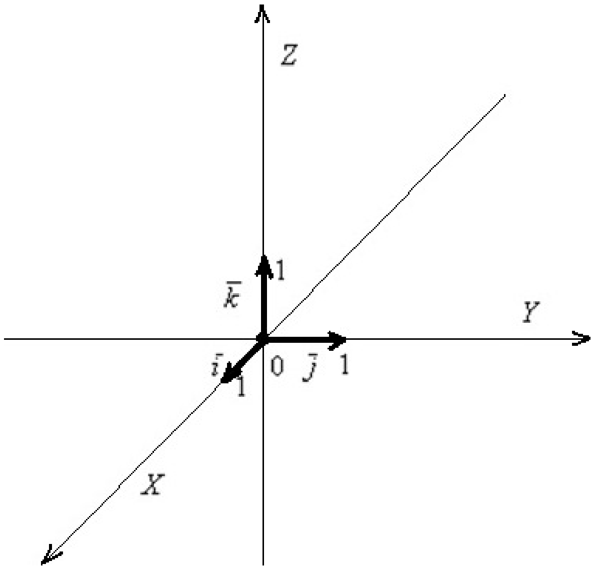
Определение: *базисом* трёхмерного пространства называется тройка линейно независимых (некомпланарных) векторов $(\bar{e}_1; \bar{e}_2; \bar{e}_3)$**, <u>взятых в определённом порядке</u>**, при этом любой вектор пространства <u>единственным образом</u> раскладывается по данному базису…, где α, β, γ – координаты вектора $\bar{v}$ в этом базисе. Также говорят, что вектор $\bar{v}$ представлен в виде ***линейной комбинации*** базисных векторов.

Понятие системы координат вводится точно так же, как и для плоского случая, достаточно одной точки (начала отсчёта) и любых трёх линейно независимых векторов:

Выбранное (где угодно) ***начало координат*** $O(0; 0; 0)$, и **некомпланарные** векторы $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$, <u>взятые в определённом порядке</u>, задают ***аффинную систему координат*** трёхмерного пространства:



Наиболее привычным и удобным частным случаем аффинной системы координат является «школьная» система. Начало координат $O(0;0;0)$ и *ортонормированный* базис $(\bar{i};\ \bar{j};\ \bar{k})$ задают ***декартову прямоугольную систему координат пространства***:



Ось абсцисс OX изображают под углом $45°$ по отношению к другим осям (к оси ординат OY и ***оси аппликат*** OZ). **Популярный «тетрадный» масштаб:** *1 ед. = 2 клетки* по осям OY, OZ и *1 ед. = диагональ одной клетки* – по оси OX.

И перед тем как перейти к практическим заданиям, вновь систематизируем теоретическую информацию:

Для трёх векторов пространства эквиваленты следующие утверждения:

1) векторы линейно независимы;

2) векторы образуют базис;

3) векторы не компланарны;

4) векторы нельзя линейно выразить друг через друга;

5) определитель, составленный из координат данных векторов, отличен от нуля.

Противоположные высказывания, думаю, понятны.

Линейная зависимость / независимость векторов пространства традиционно проверяется с помощью определителя (пункт 5), и оставшиеся практические задания параграфа будут носить ярко выраженный алгебраический характер. Повесим на гвоздь геометрическую клюшку и начнём орудовать бейсбольной битой линейной алгебры:

Три вектора пространства $\bar{v}(v_1;\ v_2;\ v_3),\ \bar{w}(w_1;\ w_2;\ w_3),\ \bar{s}(s_1;\ s_2;\ s_3)$ компланарны тогда и только тогда, когда определитель, составленный из координат данных векторов, равен нулю: $\begin{vmatrix} v_1 & w_1 & s_1 \\ v_2 & w_2 & s_2 \\ v_3 & w_3 & s_3 \end{vmatrix} = 0$.

Обращаю внимание на **небольшой технический нюанс:** координаты векторов можно записывать не только в столбцы, но и в строки (результат не изменится). Но гораздо лучше в столбцы, поскольку это выгоднее для решения некоторых практических задач.

Задача 42

Проверить, образуют ли векторы базис трёхмерного пространства:

а) $\overline{a}(4;-2;2), \overline{b}(-3;3;-4), \overline{c}(2;-4;3)$

б) $\overline{\mu}_1(2;5;7), \overline{\mu}_2(1;1;2), \overline{\mu}_3(1;3;4)$

Фактически всё **решение** сводится к **вычислению определителей**:

а) Вычислим определитель, составленный из координат векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ *(определитель раскрыт по первой строке)*:

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -2 & 3 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} =$$

$= 4 \cdot (9-16) + 3 \cdot \ldots$, значит, векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ линейно независимы (не компланарны) и образуют базис трёхмерного пространства.

Ответ: данные векторы образуют базис.

б) Это пункт для самостоятельного решения. **Не пропускаем!** Для проверки правильности вычислений определителей я приложил к книге ***Алгебраический Калькулятор***.

Решим творческую задачку:

Задача 43

При каком значении параметра α векторы $\overline{k}(2;\alpha;-2), \overline{m}(3;0;4), \overline{n}(-1;2;1)$ будут компланарны?

Решение: Векторы компланарны тогда и только тогда, когда определитель, составленный из координат данных векторов равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ \alpha & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

По существу, требуется решить уравнение с определителем. Определитель выгоднее всего раскрыть по второй строке:

$$-\alpha \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\alpha \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

Проводим дальнейшие упрощения и сводим дело к простейшему линейному уравнению:

$$\alpha \cdot (3+4) + 2 \cdot (8+6) = 0$$

$$7\alpha + 28 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = -4$$

Ответ: при $\alpha = -4$

Здесь легко выполнить проверку, для этого нужно подставить полученное значение $\alpha = -4$ в исходный определитель и убедиться, что $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$, раскрыв его заново.

И в заключение параграфа рассмотрим ещё одну типовую задачу, которая встречается в подавляющем большинстве контрольных работ по алгебре и геометрии:

Задача 44

Даны векторы $\overline{a}_1(4;1;4), \overline{a}_2(-2;-1;1), \overline{a}_3(3;1;5), \overline{b}(-3;-2;1)$. Показать, что векторы $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3$ образуют базис трехмерного пространства и найти координаты вектора $\overline{b}$ в этом базисе.

Решение: Сначала разбираемся с условием. По условию даны четыре вектора, и, как видите, у них уже есть координаты в некотором базисе. Какой это базис – нас не интересует. А интересует следующая вещь: три вектора $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3$ вполне могут образовывать свой базис. И первый этап полностью совпадает с решением Задачи 42 – необходимо проверить, действительно ли векторы $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3$ линейно независимы. Для этого нужно вычислить определитель, составленный из координат векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} =$$

$= \ldots$, значит, векторы $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3$ линейно независимы и образуют базис трехмерного пространства.

! Важно: координаты векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3$ обязательно записываем в столбцы определителя, а не в строки. Иначе будет путаница в дальнейшем алгоритме решения.

Теперь вспомним теоретическую часть: если векторы $\overline{e}_1; \overline{e}_2; \overline{e}_3$ образуют базис, то любой вектор $\overline{v}$ можно единственным способом разложить по данному базису: …, где α, β, γ – координаты вектора в базисе $(\overline{e}_1; \overline{e}_2; \overline{e}_3)$.

Поскольку наши векторы $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3$ образуют базис трёхмерного пространства (это уже доказано), то вектор $\overline{b}$ можно единственным образом разложить по данному базису:

…, где x_1, x_2, x_3 – координаты вектора $\overline{b}$ в базисе $(\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3)$.

И по условию требуется найти координаты x_1, x_2, x_3.

Для удобства объяснения поменяю части местами: $x_1\overline{a}_1 + x_2\overline{a}_2 + x_3\overline{a}_3 = \overline{b}$. В целях нахождения x_1, x_2, x_3 следует расписать данное равенство покоординатно:

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ \ldots \end{cases}$$ – коэффициенты левой части берём из опр-ля …, в правую часть записываем координаты вектора $\overline{b}(-3;-2;1)$.

Получилась система трёх линейных уравнений с тремя неизвестными. Обычно её решают по **формулам Крамера**, часто даже в условии задачи есть такое требование.

Главный определитель системы уже найден:

$\Delta = -7 \neq 0$, значит, система имеет единственное решение.

Дальнейшее дело техники:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -3 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -3 \cdot (-5 - 1) + 2 \cdot (-10 - 1) + 3 \cdot (-2 + 1) = 18 - 22 - 3 = -7$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-7}{-7} = 1$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 4 \cdot (-10 - 1) + 3 \cdot (5 - 4) + 3 \cdot (1 + 8) = -44 + 3 + 27 = -14$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-14}{-7} = 2$$

и ещё один определитель:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 4 \cdot (-1 + 2) + 2 \cdot (1 + 8) - 3 \cdot (1 + 4) = 4 + 18 - 15 = 7$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{7}{-7} = -1$$

Таким образом:

$\bar{b} = \ldots$ – разложение вектора $\bar{b}$ по базису $(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3)$.

Ответ:

Такая же задача для самостоятельного решения:

Задача 45

Даны векторы $\bar{a}(1; -2; 3), \bar{b}(4; 7; 2), \bar{c}(6; 4; 2), \bar{d}(14; 18; 6)$. Показать, что векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ образуют базис и найти координаты вектора $\bar{d}$ в этом базисе. Систему линейных уравнений решить методом Крамера.

Полное решение и примерный образец чистового оформления в конце книги. Для самоконтроля используйте тот же ***Алгебраический Калькулятор***, где есть макет с автоматическим расчётом системы по правилу Крамера.

1.9. Векторное произведение векторов

Данная операция определена для двух пространственных векторов, пусть это будут нетленные буквы $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Обозначение: $[\bar{a} \times \bar{b}]$, существуют и другие варианты

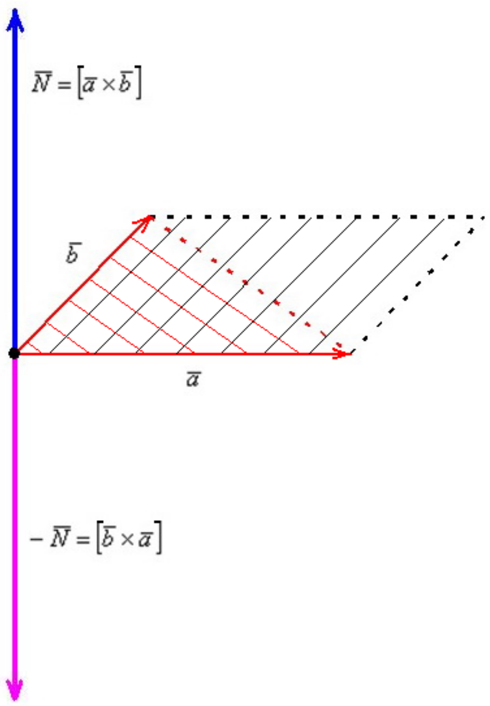
И сразу **вопрос**: в чём отличие векторного произведения от произведения скалярного? Явное отличие, прежде всего, в РЕЗУЛЬТАТЕ:

– Результатом скалярного произведения векторов является ЧИСЛО: $\bar{a} \cdot \bar{b} = C$

– Результатом векторного произведения векторов является ВЕКТОР:

$[\bar{a} \times \bar{b}] = \bar{N}$, то есть, умножаем векторы и получаем снова вектор. В учебной литературе обозначения тоже могут варьироваться, я буду использовать букву $\bar{N}$.

Определение: ***векторным произведением*** $[\bar{a} \times \bar{b}]$ неколлинеарных векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, взятых в данном порядке, называется ВЕКТОР $\bar{N}$, длина которого численно равна площади параллелограмма, построенного на данных векторах; вектор $\bar{N}$ ортогонален векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$, и направлен так, что базис $(\bar{a}; \bar{b}; \bar{N})$ имеет правую ориентацию.



Разберём определение «по косточкам»:

1) Исходные векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$, обозначенные красными стрелками, не коллинеарны.

2) Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ взяты **в строго определённом порядке**: $[\bar{a} \times \bar{b}]$ – **«а» умножается на «бэ»**, а не «бэ» на «а». Результатом умножения векторов является ВЕКТОР $\bar{N} = [\bar{a} \times \bar{b}]$, который обозначен синим цветом. Если векторы умножить в обратном порядке, то получим равный по длине и противоположный по направлению вектор $-\bar{N} = [\bar{b} \times \bar{a}]$ *(малиновый цвет)*. То есть, справедливо равенство $[\bar{a} \times \bar{b}] = -[\bar{b} \times \bar{a}]$.

3) **Геометрический смысл векторного произведения**. **Это очень важный пункт!** ДЛИНА «синего» вектора $\bar{N} = [\bar{a} \times \bar{b}]$ численно равна ПЛОЩАДИ параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$. На рисунке данный параллелограмм заштрихован чёрным цветом. Длина «малинового» вектора $-\bar{N} = [\bar{b} \times \bar{a}]$, естественно, равна этой же площади.

Примечание: *чертёж является схематическим, и поэтому номинальная длина векторного произведения не равна площади параллелограмма.*

Вспоминаем одну из геометрических формул: *площадь параллелограмма равна произведению смежных сторон на синус угла между ними*. Поэтому, исходя из вышесказанного, справедлива формула вычисления ДЛИНЫ векторного произведения:

…

Подчёркиваю, что в формуле речь идёт о ДЛИНЕ вектора, а не о самом векторе $\overline{N}$. Каков практический смысл? А смысл таков, что в задачах аналитической геометрии площадь параллелограмма часто находят через понятие векторного произведения:

…

Получим вторую важную формулу. Диагональ параллелограмма (красный пунктир) делит его на два равных треугольника. Следовательно, площадь треугольника, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$ (красная штриховка), можно найти по формуле:

…

4) Не менее важный факт состоит в том, что вектор $\overline{N}$ ортогонален векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$, то есть $\overline{N} \perp \overline{a}, \quad \overline{N} \perp \overline{b}$. Разумеется, противоположно направленный вектор $-\overline{N}$ (малиновая стрелка) тоже ортогонален исходным векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

5) Вектор $\overline{N}$ направлен так, что базис $(\overline{a}; \overline{b}; \overline{N})$ имеет ***правую ориентацию***. Что это значит? Объяснять буду на пальцах вашей **правой** *руки*. Мысленно совместите *указательный палец* с вектором $\overline{a}$ и *средний палец* с вектором $\overline{b}$, а *безымянный палец и мизинец* прижмите к ладони. В результате *большой палец* – векторное произведение $\overline{N}$ будет «смотреть» вверх. Это и есть ***правоориентированный*** базис (на рисунке именно он).

Теперь совместите *указательный палец* **левой** руки с тем же вектором $\overline{a}$, а *средний* – с вектором $\overline{b}$. При этом *большой палец* будет неизбежно смотреть вниз – по направлению вектора $-\overline{N}$. Это ***левый*** или ***левоориентированный*** базис $(\overline{a}; \overline{b}; -\overline{N})$.

Говорят, что эти базисы ***ориентируют*** пространство в разные стороны, и это понятие не следует считать чем-то надуманным или абстрактным – так, например, ***ориентацию пространства*** меняет самое обычное зеркало: если «вытащить отражённый объект из зазеркалья», то его в общем случае не удастся совместить с «оригиналом», ибо «лево» и «право» поменяются местами. Проверьте на собственном отражении!

Итак, **определение разобрано** и осталось выяснить, что происходит, когда векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны. **Если векторы коллинеарны**, то их можно расположить на одной прямой, и наш параллелограмм тоже «складывается» в одну прямую. Площадь такого, как говорят математики, ***вырожденного*** параллелограмма равна нулю. Это же следует и из формулы … – синус нуля или 180 градусов равен нулю, а значит, и площадь нулевая

Таким образом, если $\overline{a} \parallel \overline{b}$, то $\overline{N} = [\overline{a} \times \overline{b}] = \overline{0}$ с очевидной длиной $|\overline{N}| = |[\overline{a} \times \overline{b}]| = 0$. Обратите внимание, что само векторное произведение равно нулевому вектору, но на практике этим часто пренебрегают и пишут, что оно тоже равно нулю.

Справедливо и обратное: если $\overline{N} = [\overline{a} \times \overline{b}] = \overline{0}$, то $\overline{a} \parallel \overline{b}$ – и этот факт используют для проверки векторов на коллинеарность.

Частный случай – векторное произведение вектора на самого себя:

$$[\overline{a} \times \overline{a}] = \overline{0}$$

Ну что же, разжигаем огонь практики:

Задача 46

а) Найти длину векторного произведения векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если $|\bar{a}|=2,\quad |\bar{b}|=3,\quad \angle(\bar{a};\bar{b})=\frac{\pi}{3}$.

б) Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если $|\bar{a}|=2,\quad |\bar{b}|=3,\quad \angle(\bar{a};\bar{b})=\frac{\pi}{3}$.

Нет, это не опечатка! – исходные данные в пунктах условия я намеренно сделал одинаковыми. Чтобы подчеркнуть отличие в **решениях**:

а) По условию требуется найти **длину** вектора (векторного произведения). По соответствующей формуле:

…

Для нахождения значений синуса удобно использовать соответствующую Тригонометрическую таблицу *(см. Приложение **Тригонометрия**)*.

Ответ: $\left|[\bar{a}\times\bar{b}]\right|=3\sqrt{3}$ ед. $\approx 5{,}20$ ед.

Коль скоро спрашивалось о длине, то в ответе указываем размерность – единицы.

б) По условию требуется найти **площадь** параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Площадь данного параллелограмма численно равна длине векторного произведения:

…

Ответ: $S_{п-грамма}=3\sqrt{3}$ ед^2. $\approx 5{,}20$ ед^2.

Обратите внимание, что в ответе о векторном произведении речи не идёт вообще, нас спрашивали о **площади фигуры**, соответственно, размерность – квадратные единицы.

Всегда смотрим, ЧТО требуется найти по условию, и, исходя из этого, формируем чёткий ответ! В противном случае задание с высокой вероятностью вернётся на доработку, но это ещё не самое плохое. У рецензента может сложиться впечатление, что человек плохо разобрался в теме и его бы надо допросить с пристрастием ☺. Об этом нужно помнить, решая любую задачу по высшей математике, да и по другим предметам тоже.

Типовая задача для самостоятельного решения:

Задача 47

Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если $|\bar{a}|=2\sqrt{2},\quad |\bar{b}|=1,\quad \angle(\bar{a};\bar{b})=\frac{\pi}{4}$

Формула нахождения площади треугольника дана в комментариях к определению векторного произведения *(см. выше)*. Решение и ответ в конце книги.

Для решения других задач нам понадобятся:

➢ Свойства векторного произведения

Некоторые из них мы уже рассмотрели, но, тем не менее, включу их в данный список. Для произвольных векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ и произвольного числа λ справедливы следующие свойства:

1) $[\bar{a}\times\bar{a}]=\bar{0}$ В других источниках информации данный пункт обычно не выделяют в свойствах, но он очень важен в практическом плане. Поэтому пусть будет.

2) $[\bar{a}\times\bar{b}]=-[\bar{b}\times\bar{a}]$ – ***антикоммутативность*** векторного произведения; об этом свойстве я тоже рассказал выше. Иными словами, порядок векторов имеет значение.

3) $[\lambda\bar{a}\times\bar{b}]=\lambda[\bar{a}\times\bar{b}]$, $[\bar{a}\times(\lambda\bar{b})]=\lambda[\bar{a}\times\bar{b}]$ – *сочетательные* или ***ассоциативные*** законы векторного произведения. Константы беспроблемно выносятся за пределы векторного произведения. Действительно, чего им там делать?

4) … – *распределительные* или ***дистрибутивные*** законы. Как видите, с раскрытием скобок тоже нет проблем.

В качестве демонстрации рассмотрим коротенький пример:

Задача 48

Найти $\left|[-3\bar{a}\times 2\bar{b}]\right|$, если $|\bar{a}|=\frac{1}{2}$, $|\bar{b}|=\frac{1}{6}$, $\angle(\bar{a};\bar{b})=\frac{\pi}{2}$

Решение: по условию снова требуется найти длину векторного произведения. Распишем миниатюру:

$$\left|[-3\bar{a}\times 2\bar{b}]\right| \overset{(1)}{=}$$

$$=\ldots$$

$$=\ldots$$

$$=6\cdot|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\sin\angle(\bar{a};\bar{b})=6\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot\sin\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$$

(1) Согласно ассоциативным законам, выносим константы за переделы векторного произведения.

(2) Выносим константу за пределы модуля, при этом модуль «съедает» знак «минус». Длина же не может быть отрицательной.

(3) Дальнейшее понятно.

Ответ: $\left|[-3\bar{a}\times 2\bar{b}]\right|=\frac{1}{2}$ ед.

Пора подбросить дров в огонь…, а позже добавим уютную атмосферу и даже сказочных персонажей! – я глубоко убеждён, что высшую математику, тем более геометрию, нельзя излагать сухо и занудно!

Задача 49

Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\bar{c} = -\bar{m} + 2\bar{n}$, $\bar{d} = 3\bar{m} - \bar{n}$, если $|\bar{m}| = 5$, $|\bar{n}| = 4$, $\angle(\bar{m}; \bar{n}) = \dfrac{\pi}{6}$

Решение: площадь треугольника рассчитывается по формуле $S_{\Delta} = \dfrac{1}{2} \cdot \left| \left[\bar{c} \times \bar{d} \right] \right|$, но загвоздка состоит в том, что векторы «цэ» и «дэ» сами представлены в виде сумм векторов. Алгоритм здесь стандартен и чем-то напоминает Задачи 17, 18 из темы Скалярное произведение векторов. Решение для ясности разобьём на три этапа:

1) На первом шаге выразим векторное произведение $\left[\bar{c} \times \bar{d} \right]$ через векторное произведение $\left[\bar{m} \times \bar{n} \right]$, по сути, **выразим вектор через вектор**. О длинах пока ни слова!

$$
\begin{aligned}
&\left[\bar{c} \times \bar{d} \right] = ^{(1)} \\
&= \left[(-\bar{m} + 2\bar{n}) \times (3\bar{m} - \bar{n}) \right] = ^{(2)} \\
&= \ldots \\
&= \ldots \\
&= -3 \cdot 0 - 6 \cdot \left[\bar{m} \times \bar{n} \right] + \left[\bar{m} \times \bar{n} \right] - 2 \cdot 0 = ^{(5)} \\
&= -5 \cdot \left[\bar{m} \times \bar{n} \right]
\end{aligned}
$$

(1) Подставляем выражения векторов $\bar{c}, \bar{d}$.

(2) Используя дистрибутивные законы, раскрываем скобки по правилу умножения многочленов (каждый член одного многочлена нужно умножить на каждый член другого).

(3) Используя ассоциативные законы, выносим все константы за пределы векторных произведений. При маломальском опыте действия 2-3 можно выполнять за один шаг.

(4) Первое и последнее слагаемое равно нулю (нулевому вектору) благодаря приятному свойству $\left[\bar{a} \times \bar{a} \right] = \bar{0}$. Во втором слагаемом используем свойство антикоммутативности векторного произведения: $6 \cdot \left[\bar{n} \times \bar{m} \right] = -6 \cdot \left[\bar{m} \times \bar{n} \right]$

(5) Приводим подобные слагаемые.

В результате вектор оказался выражен через вектор, чего и требовалось достичь:

$$\left[\bar{c} \times \bar{d} \right] = -5 \cdot \left[\bar{m} \times \bar{n} \right]$$

2) На втором шаге найдем длину нужного нам векторного произведения. Данное действие напоминает недавнюю Задачу 48:

$$\left| \left[\bar{c} \times \bar{d} \right] \right| = \left| -5 \cdot \left[\bar{m} \times \bar{n} \right] \right| = 5 \cdot \left| \left[\bar{m} \times \bar{n} \right] \right| = 5 \cdot |\bar{m}| \cdot |\bar{n}| \cdot \sin \angle(\bar{m}; \bar{n}) =$$

$$= 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \sin \frac{\pi}{6} = 100 \cdot \frac{1}{2} = 50$$

3) Найдём площадь искомого треугольника:

$S_{\Delta} = \dfrac{1}{2} \cdot \left| \left[\bar{c} \times \bar{d} \right] \right| = \dfrac{1}{2} \cdot 50 = 25$, этапы 2-3 можно было оформить «одной строкой»

Ответ: $S_{\Delta} = 25$ ед.^{2}

Рассмотренная задача достаточно распространена в контрольных работах, вот пример для самостоятельного решения:

Задача 50

Найти $\left|\left[\overline{c}\times\overline{d}\right]\right|$, если $\overline{c}=\overline{m}+\overline{n}, \quad \overline{d}=\overline{m}+3\overline{n}, \quad |\overline{m}|=1, \quad |\overline{n}|=2, \quad \angle(\overline{m};\overline{n})=\frac{\pi}{2}$

Посмотрим, насколько вы были внимательны при изучении предыдущих примеров ;-)

➢ Векторное произведение в координатах

Векторное произведение векторов $\overline{v}(v_1;v_2;v_3),\overline{w}(w_1;w_2;w_3)$**, заданных в ортонормированном базисе** $(\overline{i};\overline{j};\overline{k})$**, выражается формулой**:

…

В верхнюю строку определителя записываем координатные векторы, во вторую и третью строки «укладываем» координаты векторов $\overline{v},\overline{w}$, причём укладываем их **в строгом порядке** – сначала координаты вектора «вэ», затем координаты вектора «дубль-вэ».

Данный определитель всегда раскрываем **по первой строке**, что продемонстрировано выше. Что получается в результате раскрытия определителя? **В результате получается ВЕКТОР**. А как иначе? Векторное произведение – это же вектор:

Задача 51

Найти векторное произведение векторов $\overline{a}(-1;2;-3),\overline{b}(0;-4;1)$ и его длину.

Решение: Задача состоит из двух частей: во-первых, необходимо найти само векторное произведение (вектор), а во-вторых – его длину.

1) Найдём векторное произведение:

$$\overline{N}=\left[\overline{a}\times\overline{b}\right]=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ -1 & 2 & -3\\ 0 & -4 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & -3\\ -4 & 1\end{vmatrix}\cdot\overline{i}-\begin{vmatrix}-1 & -3\\ 0 & 1\end{vmatrix}\cdot\overline{j}+\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 0 & -4\end{vmatrix}\cdot\overline{k}=$$

$$=(2-12)\cdot\overline{i}-(-1-0)\cdot\overline{j}+(4-0)\cdot\overline{k}=-10\overline{i}+\overline{j}+4\overline{k}$$

В результате получен вектор $\overline{N}=-10\overline{i}+\overline{j}+4\overline{k}$ или $\overline{N}(-10;1;4)$.

Выполним **проверку**: по определению, вектор $\overline{N}$ должен быть ортогонален векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Ортогональность векторов, как мы помним, проверяется с помощью скалярного произведения:

$$\overline{N}\cdot\overline{a}=-10\cdot(-1)+1\cdot2+4\cdot(-3)=10+2-12=0 \quad\Rightarrow\quad \overline{N}\perp\overline{a};$$
$$\overline{N}\cdot\overline{b}=-10\cdot0+1\cdot(-4)+4\cdot1=0-4+4=0 \quad\Rightarrow\quad \overline{N}\perp\overline{b}.$$

– если получилось хотя бы одно число, отличное от нуля, ищите ошибку в раскрытии определителя.

2) Вычислим длину векторного произведения. Используем простейшую формулу для вычисления длины вектора:

$$|\overline{N}| = \sqrt{(-10)^2 + 1^2 + 4^2} = \sqrt{100+1+16} = \sqrt{117} = 3\sqrt{13}$$

Ответ: $\overline{N} = -10\bar{i} + \bar{j} + 4\bar{k}$, $|\overline{N}| = 3\sqrt{13}$ ед. $\approx 10{,}82$ ед.

Аналогичный пример для самостоятельного решения:

Задача 52

Даны векторы $\overline{A_1A_2} = 2\bar{i} + 3\bar{k}$, $\overline{A_1A_3} = -\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}$. Найти $[\overline{A_1A_3} \times \overline{A_1A_2}]$ и вычислить $|[\overline{A_1A_3} \times \overline{A_1A_2}]|$.

Будьте внимательны!

Огонь камина в самом разгаре, и самое время добавить живительный геометрический смысл в наши задачи:

Задача 53

Даны вершины треугольника $A(0;\,2;\,0),\ B(-2;\,5;\,0),\ C(-2;\,2;\,6)$. Найти его площадь.

Решение: Алгоритм решения, думаю, многие уже представляют. Сначала найдём векторы:

$$\overline{AB} = (-2-0;\,5-2;\,0-0) = (-2;\,3;\,0);$$
$$\overline{AC} = (-2-0;\,2-2;\,6-0) = (-2;\,0;\,6).$$

Затем векторное произведение:

$$\overline{N} = [\overline{AB} \times \overline{AC}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -2 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \ldots$$

$$= (18-0)\cdot\bar{i} - (-12-0)\cdot\bar{j} + (0+6)\cdot\bar{k} = 18\bar{i} + 12\bar{j} + 6\bar{k}$$

Вычислим его длину:

$$|\overline{N}| = \sqrt{18^2 + 12^2 + 6^2} = \sqrt{324+144+36} = \sqrt{504} = 6\sqrt{14}$$

Формулы площадей параллелограмма и треугольника, само собой, остаются те же:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot|\overline{N}| = \frac{1}{2}\cdot 6\sqrt{14} = 3\sqrt{14}$$

Ответ: $S_{\Delta ABC} = 3\sqrt{14}$ ед^2.$\approx 11{,}22$ед^2.

В рассмотренной задаче было не обязательно выбирать стороны AB и AC, существует ещё два варианта. Решение допустимо провести через векторы $\overline{BA}, \overline{BC}$ либо $\overline{CA}, \overline{CB}$. Желающие могут проверить, что во всех трёх случаях получится один и тот же ответ. …Почему именно эти стороны? Мысленно представьте или изобразите на черновике этот треугольник.

Еще одна важная особенность состоит в том, что **в задачах на нахождение площади фигуры** порядок векторов не имеет значения. Действительно, если находить $[\overline{AC} \times \overline{AB}]$, то получим противоположно направленный вектор $-\overline{N} = -18\bar{i} - 12\bar{j} - 6\bar{k}$, но формула вычисления длины вектора всё равно «съест» эти минусы. Заметьте, что такую перестановку нельзя делать в Задачах 51-52, поскольку там требовалось найти вполне конкретный вектор.

Задача 54

Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{AB}, \bar{a}$, если $A(2; -1; 1),\ B(1; -1; 5),\ \bar{a}(-2; 1; 0)$

Самостоятельно.

И в заключение параграфа обещанная задача:

Задача 55

Проверить, будут ли коллинеарны следующие векторы пространства:

а) $\bar{c}(4; -2; 1),\ \bar{d}(8; -4; 4)$

б) $\overline{KL}(2; 0; 3),\ \overline{MN}\left(1; 0; \dfrac{3}{2}\right)$

Решение: проверка основана на упомянутом ранее факте: если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны, то их векторное произведение равно нулевому вектору: $|\overline{N}| = |[\bar{a} \times \bar{b}]| = \bar{0}$.

а) Найдём векторное произведение:

$$[\bar{c} \times \bar{d}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 4 & -2 & 1 \\ 8 & -4 & 4 \end{vmatrix} = \ldots$$

$$= (-8+4)\cdot\bar{i} - (16-8)\cdot\bar{j} + (-16+16)\cdot\bar{k} = -4\bar{i} - 8\bar{j} \neq \bar{0}$$

Таким образом, векторы $\bar{c}$ и $\bar{d}$ не коллинеарны.

б) Найдём векторное произведение:

$$[\overline{KL} \times \overline{MN}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 3/2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 3/2 \end{vmatrix}\cdot\bar{i} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3/2 \end{vmatrix}\cdot\bar{j} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\cdot\bar{k} =$$

$$= \ldots$$

Значит, $\overline{KL} \parallel \overline{MN}$

Ответ: а) не коллинеарны, б) $\overline{KL} \parallel \overline{MN}$

Вот, пожалуй, и все основные сведения о векторном произведении векторов.

1.10. Смешанное произведение векторов

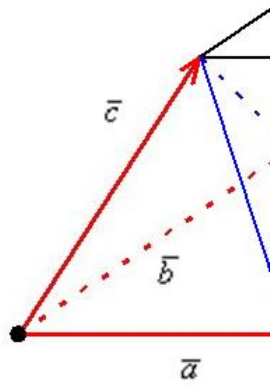
Данная операция тоже определена для пространственных векторов. ***Смешанное произведение векторов*** – это произведение трёх векторов:

$(\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c})$

Вот так вот они выстроились паровозиком и ждут, не дождутся, когда их вычислят.

Определение: ***смешанным произведением*** $(\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c})$ <u>некомпланарных</u> векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$, <u>взятых в данном порядке</u>, называется <u>объём параллелепипеда</u>, построенного на данных векторах, снабжённый знаком «+», если базис $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$ правый, и знаком «–», если базис $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$ левый.

Выполним рисунок, и ниже я снова подробно разберу определение:



1) Исходные векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$, обозначенные красными стрелками, не компланарны (со случаем компланарности разберёмся отдельно)

2) Векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ взяты <u>в определённом порядке</u>, то есть перестановка векторов в произведении $(\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c})$, как вы догадываетесь, не проходит без последствий.

3) Смешанное произведение векторов является ЧИСЛОМ: $(\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c}) = p$. В учебной литературе оформление может быть несколько другим, я привык обозначать смешанное произведение через $(\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c})$, а результат вычислений буквой «пэ».

По определению, смешанное произведение – это объём ***параллелепипеда***, построенного на векторах $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ *(фигура прочерчена красными векторами и линиями чёрного цвета; невидимые нам линии изображены пунктиром)*. То есть, число p равно объему данного параллелепипеда.

Примечание: *чертёж является схематическим.*

4) Не будем заново «париться» с понятием ориентации базиса и пространства. Смысл заключительной части определения состоит в том, что к объёму p может добавляться знак минус. Простыми словами, смешанное произведение может быть отрицательным: $p < 0$.

Непосредственно из определения следует формула вычисления объема параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$:

…

Знак модуля уничтожает возможный «минус» смешанного произведения.

И ещё одна важная формула. В курсе геометрии доказано, что объём ***тетраэдра*** *(на рисунке отсечён «синей» плоскостью)* равен одной шестой объёма параллелепипеда:

…

Тетраэдр часто называют ***треугольной пирамидой***, поскольку все грани тетраэдра – треугольники.

Теперь случай компланарности. Если векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ компланарны, то их можно расположить в одной плоскости. В результате параллелепипед «складывается» в плоскость, и объём такого *вырожденного* параллелепипеда равен нулю: $p = (\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c}) = 0$.

➢ Смешанное произведение в координатах

Смешанное произведение векторов $\overline{v}(v_1; v_2; v_3), \overline{w}(w_1; w_2; w_3), \overline{s}(s_1; s_2; s_3)$**, заданных в ортонормированном базисе** $(\overline{i}; \overline{j}; \overline{k})$ **(правой ориентации), выражается формулой:** …

Утверждение, строго говоря, неполное, но в теоретические тонкости вникать не будем, *правоориентированный* базис – это «привычный» базис, в котором мы будем решать практические задачи. Вполне достаточно.

Как и для векторного произведения, координаты векторов следует «укладывать» в определитель **в строгом порядке**. Если в смешанном произведении $(\overline{v} \cdot \overline{w} \cdot \overline{s})$ выбрать два вектора (любых) и переставить их местами, то нужно переставить и соответствующие строки определителя, **при этом определитель (смешанное произведение) сменит знак**.

Следует отметить, что координаты векторов не обязательно записывать в строки, их можно записать и в столбцы – слева направо, и тоже **в строгом порядке**:

$$p = (\overline{v} \cdot \overline{w} \cdot \overline{s}) = \begin{vmatrix} v_1 & w_1 & s_1 \\ v_2 & w_2 & s_2 \\ v_3 & w_3 & s_3 \end{vmatrix}$$, значение определителя от этого не изменится.

Как уже отмечалось, если векторы $\overline{v}, \overline{w}, \overline{s}$ компланарны, то

$$p = (\overline{v} \cdot \overline{w} \cdot \overline{s}) = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 \end{vmatrix} = 0$$

С такими определителями мы уже имели дело, когда проверяли, образуют ли три вектора базис. И теперь нам известен **геометрический смысл**: данный определитель равен объему параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{v}, \overline{w}, \overline{s}$.

Закидываем остатки Буратино в огонь:

Задача 56

Даны векторы $\bar{a}(1; -1; 2), \bar{b}(0; 4; 3), \bar{c}(3; 2; -6)$.

Вычислить:

а) смешанное произведение векторов;

б) объём параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$;

в) объём тетраэдра, построенного на векторах $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$.

Решение прозрачно:

а) По формуле смешанного произведения:

$$p = (\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = (-24-6) + 3 \cdot (-3-8) = -30 - 53 = -63$$

(определитель раскрыт по первому столбцу)

б) Объём параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, равен модулю их смешанного произведения:

…

в) Вычислим объём тетраэдра, построенного на данных векторах:

…

Ответ: а) $(\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}) = -63$, б) $V_{п-пипеда} = 63$ ед^3., в) $V_{тетраэдра} = 10\frac{1}{2}$ ед^3.

Следующая задача встречается так часто, что удостаивается отдельного заголовка:

➤ **Как вычислить объём треугольной пирамиды?**

или тетраэдра, …только что решали, но тут другое, типовое условие:

Задача 57

Вычислить объём треугольной пирамиды, если даны её вершины $A(-2; -2; 0), B(0; 4; -1), C(1; 2; 1), D(-13; 8; 11)$

Решение: «чайникам» рекомендую выполнить схематический рисунок пирамидки, чтобы лучше понять суть проводимых действий.

Сначала найдём векторы:

$$\overline{AB} = (0-(-2); 4-(-2); -1-0) = (2; 6; -1);$$
$$\overline{AC} = (1-(-2); 2-(-2); 1-0) = (3; 4; 1);$$
$$\overline{AD} = (-13-(-2); 8-(-2); 11-0) = (-11; 10; 11).$$

Вычислим смешанное произведение:

$$p=(\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD})=\begin{vmatrix}2 & 6 & -1\\ 3 & 4 & 1\\ -11 & 10 & 11\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix}4 & 1\\ 10 & 11\end{vmatrix}-6\cdot\begin{vmatrix}3 & 1\\ -11 & 11\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}3 & 4\\ -11 & 10\end{vmatrix}=$$

$$=2\cdot(44-10)-6\cdot(33+11)-(30+44)=68-264-74=-270$$

(определитель раскрыт по первой строке)

Вычислим объём треугольной пирамиды $ABCD$:

…

Ответ: $V_{ABCD}=45$ ед^3.

Рассмотренная задача имеет не единственное решение, можно было взять и другую группу векторов, начиная «движуху» от любой другой вершины пирамиды *(итого 4 варианта)*. Чем-то похоже на Задачу 53 о площади треугольника, где мы могли выбрать любую из трёх вершин.

Объём тетраэдра – это «хит» смешанного произведения, поэтому заключительное задание пусть будет таким же:

Задача 58

Вычислить объём пирамиды, заданной вершинами $A_1(2;-1;3)$, $A_2(-5;1;1)$, $A_3(0;3;-4)$, $A_4(-1;-3;4)$

В образце решения я рассмотрел векторы от «традиционной» точки A_1, но ради исследовательского интереса вы можете выбрать любую другую вершину. Результаты должны совпасть. Напоминаю, что для к книге приложены ***Алгебраический*** и ***Геометрический Калькулятор***. Они практически 100%-но позволят вам не пропустить вычислительную ошибку.

Точно так же как у скалярного и векторного, у смешанного произведения есть свои **свойства**, и о некоторых из них я рассказал в начале параграфа; другие же не имеют особого значения для «массовой» практики, и если они вам нужны, пожалуйста, обратитесь к учебной литературе.

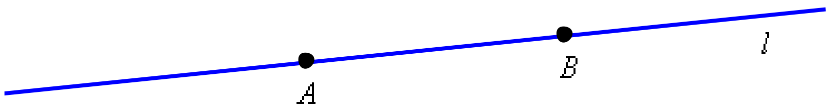
Остались только веселящие душу угольки, и повод для радости действительно есть! – ведь Главу о векторах удалось уместить всего лишь на 60 страницах, чего не ожидал даже я сам. Для такого объёма информация, пожалуй, рекорд.

И перед изучением других тем важное напутствие:

Любите векторы, и векторы полюбят вас!

2. Прямая на плоскости

Прямая – это одна из простейших геометрических фигур. Она бесконечна:

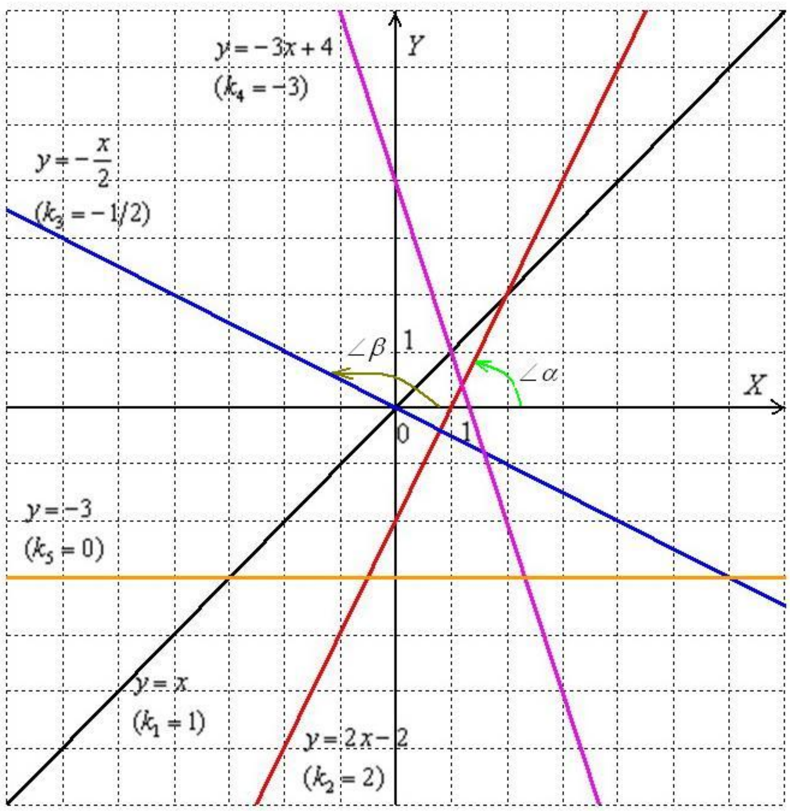


и **обозначается** маленькими латинскими буквами $a, b, c, ..., l, m, n, ...$, как вариант, с подстрочным индексом, например, m_1, m_2, m_3. Также прямую можно обозначить двумя различными точками, которые ей принадлежат, например, AB.

Прямую часто задают уравнением, и начнём мы опять со школьного материала:

2.1. Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Всем известное «школьное» уравнение $y = kx + b$ называется ***уравнением прямой с угловым коэффициентом*** k. Вспомним геометрический смысл данного коэффициента и то, как его значение влияет на расположение прямой:



Угловой коэффициент прямой равен <u>тангенсу угла</u> *(см. Приложение Тригонометрия)* **между положительным направлением оси** OX **и данной прямой:** $k = tg\varphi$. Чтобы не загромождать чертёж, я нарисовал углы только для двух прямых:

Это «красная» прямая $y = 2x - 2$ с коэффициентом $k_2 = 2$. Согласно вышесказанному, $tg\alpha = 2$ *(угол «альфа» обозначен зелёной дугой)*. Для «синей» прямой $y = -\frac{x}{2}$ с $k_3 = -\frac{1}{2}$ справедливо равенство $tg\beta = -\frac{1}{2}$ *(угол «бета» обозначен коричневой дугой)*.

Если известен тангенс угла, то при необходимости легко найти и <u>сам угол</u> с помощью обратной функции – арктангенса. Так, для «черной» прямой $y = x$ тангенс угла наклона равен $k_1 = tg\gamma = 1$, а сам угол наклона составляет:

$\gamma = \mathrm{arctg}1 = \frac{\pi}{4}$ радиан или 45 градусов, что хорошо видно по чертежу. Значения углов можно находить по ***Таблице*** или с помощью ***Калькулятора*** *(Приложения в помощь)*.

Таким образом, **угловой коэффициент характеризует степень наклона прямой к оси абсцисс**.

При этом возможны следующие случаи:

1) Если угловой коэффициент отрицателен: $k<0$, то линия, грубо говоря, идёт «сверху вниз». Примеры – «синяя» и «малиновая» прямые на чертеже.

2) Если угловой коэффициент положителен: $k>0$, то линия идёт «снизу вверх». Примеры – «чёрная» и «красная» прямые на чертеже.

3) Если угловой коэффициент равен нулю: $k=0$, то уравнение $y=kx+b$ принимает вид $y=b$, и соответствующая прямая параллельна оси OX. Пример – «жёлтая» прямая. **Неформальный смысл уравнения:** «игрек» ВСЕГДА (при любом «икс») равен «бэ».

4) Для семейства прямых $x=C$, где $C=const$, параллельных оси OY *(на чертеже нет примера, кроме самой оси OY)*, угловой коэффициент не определён. В данной ситуации $k=tg\varphi=\frac{\pi}{2}$, а тангенса угла 90 градусов не существует. **Неформальный смысл уравнения:** «икс» ВСЕГДА (при любом «игрек») равен «цэ».

Чем больше угловой коэффициент по модулю, тем круче идёт график прямой.

Рассмотрим прямые $y=2x-2\ (k_2=2)$ и $y=-3x+4\ (k_4=-3)$. Здесь $|k_4|>|k_2|$, поэтому прямая $y=-3x+4$ имеет более крутой наклон. Напоминаю, что модуль позволяет не учитывать знак, нас интересуют только *абсолютные значения* угловых коэффициентов.

В свою очередь, прямая $y=2x-2$ более крутА, чем прямые $y=x$, $y=-\frac{x}{2}$.

Обратно: чем меньше угловой коэффициент по модулю, тем прямая является более пологой. Так, для прямых $y=x\ (k_1=1)$, $y=-\frac{x}{2}\ (k_3=-1/2)$ справедливо неравенство $|k_3|<|k_1|$, таким образом, прямая $y=-\frac{x}{2}$ более пологая.

Зачем эта информация? ~~Продлить ваши мучения.~~ Знания вышеперечисленных фактов позволяет немедленно увидеть свои ошибки, в частности, ошибки при построении графиков – когда на чертеже получилось явно «что-то не то». Желательно, чтобы вам сразу было понятно, что прямая $y=10x+1$ весьма крутА и идёт «снизу вверх», а прямая $y=-\frac{x}{20}-3$ – очень полога, близко прижата к оси OX и идёт «сверху вниз».

Сомневался, напоминать ли, но на всякий пожарный: как построить прямую, если известно её уравнение?

Для того чтобы построить прямую, нужно знать две её точки (любые). Их легко найти из уравнения. Рассмотрим, например, уравнение $y=2x-2$ и выберем произвольное значение «икс», удобно взять $x=0$, тогда: $y=2\cdot 0-2=-2$, и первая точка найдена: $A(0;-2)$. Теперь выбираем другое значение x, например, $x=1$ и находим $y=2\cdot 1-2=0$ – точка $B(1;0)$. Отмечаем точки на чертеже и аккуратно проводим линию по линейке.

Ах да, чуть не забыл: прямая вида $y=kx$ называется ***прямой пропорциональностью***. Она проходит через начало координат, и для её построения достаточно найти одну точку. На чертеже выше изображены две таких прямых + ось OX $(k=0)$.

➢ Как составить уравнение прямой с угловым коэффициентом?

Если известна точка $M(x_0; y_0)$, принадлежащая некоторой прямой, и угловой коэффициент k этой прямой, то уравнение данной прямой выражается формулой:

…

Задача 59

Составить уравнение прямой с угловым коэффициентом $k = \frac{3}{2}$, если известно, что точка $A(3; -2)$ принадлежит данной прямой.

Решение: уравнение составим по формуле …. В данном случае:

$$y - (-2) = \frac{3}{2} \cdot (x - 3)$$

$$y + 2 = \frac{3}{2}x - \frac{9}{2}$$

$$y = \frac{3}{2}x - \frac{13}{2}$$

Ответ: $y = \frac{3}{2}x - \frac{13}{2}$

Проверка выполняется элементарно. Во-первых, смотрим на полученное уравнение $y = \frac{3}{2}x - \frac{13}{2}$ и убеждаемся, что наш угловой коэффициент $k = \frac{3}{2}$ на своём месте. Во-вторых, координаты точки $A(3; -2)$ должны удовлетворять данному уравнению. Подставим их в уравнение:

$$-2 = \frac{3}{2} \cdot 3 - \frac{13}{2}$$

$$-2 = \frac{9}{2} - \frac{13}{2}$$

$-2 = -2$ – получено *верное равенство*, значит, точка $A(3; -2)$ удовлетворяет полученному уравнению.

Вывод: уравнение найдено правильно.

Более хитрая задачка для самостоятельного решения:

Задача 60

Составить уравнение прямой, если известна её точка $K(-2; 1)$, а угол наклона к положительному направлению оси OX составляет $\alpha = \frac{3\pi}{4}$.

Ну что же, прозвенел «последний звонок», отгремел выпускной бал *(как это быстро у меня происходит ☺)*, и за воротами родной школы нас поджидает, собственно, аналитическая геометрия:

2.2. Общее уравнение прямой

Ностальгически машем ручкой привычному $y = kx + b$ и знакомимся с ***общим уравнением*** прямой. Поскольку в аналитической геометрии в ходу именно оно:

Общее уравнение прямой имеет вид: …, где A, B, C – некоторые числа, при этом коэффициенты A, B *одновременно* не равны нулю (т.к. теряется смысл).

Оденем в костюм и галстук уравнение с угловым коэффициентом $y = 2x - 2$. Сначала перенесём все слагаемые в левую часть:

$y - 2x + 2 = 0$, слагаемое с «иксом» нужно поставить на первое место:

$-2x + y + 2 = 0$

В принципе, уравнение уже имеет вид …, но по правилам математического этикета коэффициент первого слагаемого (в данном случае A) должен быть положительным. Меняем знаки у каждого слагаемого:

$2x - y - 2 = 0$, готово.

Запомните эту техническую особенность! Первый коэффициент (чаще всего A) делаем положительным!

По надобности общее уравнение легко привести к «школьному» виду (если $B \neq 0$):

$$\ldots \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

➢ Направляющий вектор прямой

Зададимся **вопросом**: что *достаточно* знать, чтобы построить прямую? Две точки. Но об этом детском случае позже, сейчас властвуют палочки со стрелочками. У каждой прямой есть вполне определённый наклон, к которому легко «приспособить» вектор.

Вектор, который параллелен прямой, называется *направляющим вектором* данной прямой. Очевидно, что у любой прямой бесконечно много направляющих векторов, причём все они будут коллинеарны (сонаправлены или нет – не важно).

Направляющий вектор стандартно **обозначается** следующим образом: $\bar{p}(p_1;\ p_2)$.

Но одного вектора недостаточно для построения прямой, вектор является свободным и не привязан к какой-либо точке плоскости. Поэтому дополнительно нужно знать некоторую точку $M(x_0;\ y_0)$, которая принадлежит прямой.

➢ Как составить уравнение прямой по точке и направляющему вектору?

Если известна некоторая точка $M(x_0;\ y_0)$, принадлежащая прямой, и направляющий вектор $\bar{p}(p_1;\ p_2)$ этой прямой $(p_1 \neq 0,\ p_2 \neq 0)$, то уравнение данной прямой можно составить по формуле:

…, иногда его называют ***каноническим уравнением прямой***.

Что делать, когда *одна из координат* $p_1,\ p_2$ равна нулю, мы разберёмся в практических примерах ниже. Кстати, заметьте – *сразу обе* координаты равняться нулю не могут, так как нулевой вектор не задаёт конкретного направления.

Задача 61

Составить уравнение прямой по точке $M(1;\ 2)$ и направляющему вектору $\bar{p}(2;1)$.

Решение: Используем формулу …. В данном случае:

…

С помощью свойств пропорции* ***(Школьные материалы)*** избавляемся от дробей:

$1\cdot(x-1)=2\cdot(y-2)$ *(* технически здесь также можно умножить обе части на 2)*

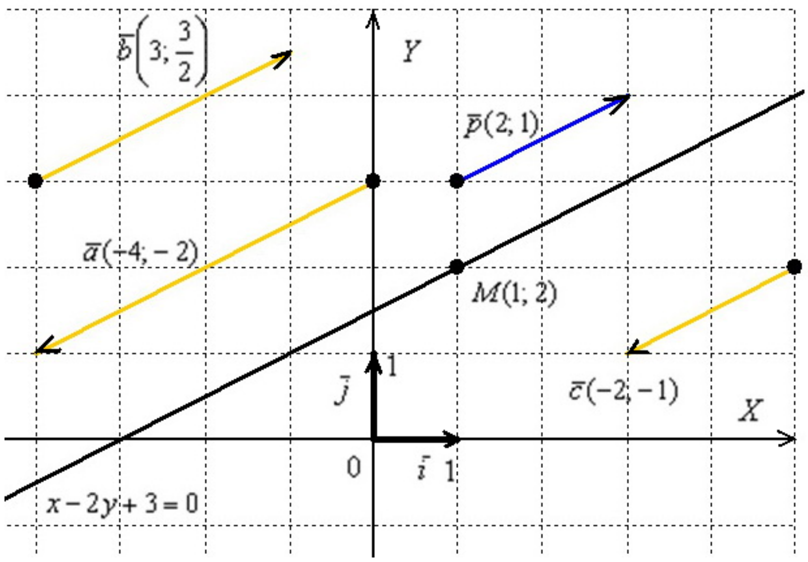
и приводим уравнение к общему виду:

$x-1=2y-4$

$x-2y+3=0$

Ответ: $x-2y+3=0$

Чертежа в таких примерах делать не нужно, но понимания ради:



На чертеже мы видим исходную точку $M(1;\ 2)$, исходный направляющий вектор $\bar{p}(2;1)$ (его можно отложить от любой точки плоскости) и построенную прямую $x-2y+3=0$.

Как отмечалось в начале параграфа, у прямой бесконечно много направляющих векторов, и все они коллинеарны. Для примера я нарисовал три таких вектора: $\bar{a}(-4;-2), \bar{b}\left(3;\frac{3}{2}\right), \bar{c}(-2;-1)$.

Какой бы направляющий вектор мы ни выбрали, в результате всегда получится одно и то же уравнение прямой $x-2y+3=0$.

Составим уравнение прямой по точке $M(1;\ 2)$ и, например, направляющему вектору $\bar{a}(-4;-2)$:

…, разруливаем пропорцию:

$-2\cdot(x-1)=-4\cdot(y-2)$

Делим обе части на –2 и получаем знакомое уравнение: $x-1=2\cdot(y-2)$

Желающие могут аналогичным образом протестировать векторы $\bar{b}\left(3;\frac{3}{2}\right), \bar{c}(-2;-1)$ или любой другой коллинеарный вектор.

Теперь решим обратную задачу:

➢ **Как найти направляющий вектор по общему уравнению прямой?**

Очень просто:

Если прямая задана общим уравнением $Ax+By+C=0$**, то вектор** $\overline{p}(-B;\,A)$ **является направляющим вектором данной прямой.**

Примеры нахождения направляющих векторов прямых:

1) $5x+7y-1=0 \quad \Rightarrow \quad \overline{p}(-7;\,5)$

2) $2y+3=0 \quad (0\cdot x+2y+3=0) \quad \Rightarrow \quad \overline{p}(-2;\,0)$

3) $5x-2=0 \quad (5x+0\cdot y-2=0) \quad \Rightarrow \quad \overline{p}(0;\,5)$

Утверждение позволяет найти лишь один направляющий вектор из бесчисленного множества, но нам больше и не нужно. Хотя в ряде случаев координаты направляющих векторов целесообразно сократить: так, уравнение $2y+3=0$ задаёт прямую, которая параллельна оси OX и координаты полученного направляющего вектора $\overline{p}(-2;\,0)$ удобно разделить на –2, получая в точности базисный вектор $\overline{i}(1;\,0)$ в качестве направляющего вектора. Аналогично, уравнение $5x-2=0$ задаёт прямую, параллельную оси OY, и, разделив координаты вектора $\overline{p}(0;\,5)$ на 5, получаем направляющий вектор $\overline{j}(0;\,1)$.

Читателям с низким уровнем подготовки рекомендую постоянно выполнять чертежи, чтобы лучше понимать мои объяснения!

Теперь выполним **проверку** Задачи 61. Решение уехало вверх, поэтому напоминаю, что в ней мы составили уравнение прямой $x-2y+3=0$ по точке $M(1;\,2)$ и направляющему вектору $\overline{p}(2;\,1)$. Проверка состоит в **двух** действиях:

Во-первых, по уравнению прямой $x-2y+3=0$ восстанавливаем её направляющий вектор: $\overline{p}(-B;\,A)=\overline{p}(2;\,1)$ – всё нормально, получили исходный вектор (в ряде случаев может получиться коллинеарный исходному вектор, и это несложно заметить по пропорциональности соответствующих координат).

Во-вторых, координаты точки $M(1;\,2)$ должны удовлетворять уравнению $x-2y+3=0$. Подставляем их в уравнение:

$1-2\cdot 2+3=0$

$1-4+3=0$

$0=0$ – получено *верное равенство*, чему мы очень рады.

Вывод: задание выполнено правильно.

Задача 62

Составить уравнение прямой по точке $M(0;\,-3)$ и направляющему вектору $\overline{p}(-7;\,5)$

Это задача для самостоятельного решения. **И проверка, проверка, проверка!**

**Старайтесь всегда (если это возможно) выполнять проверку на черновике.
Глупо допускать ошибки там, где их 100%-но можно избежать.**

В том случае, если одна из координат направляющего вектора равна нулю, поступают очень просто:

Задача 63

Составить уравнение прямой по точке $A(-4; 2)$ и направляющему вектору $\overline{p}(4; 0)$.

Решение: формула … не годится, так как знаменатель правой части равен нулю. Но выход прост! Используя свойства пропорции, перепишем уравнение в виде …, и дальнейшее покатилось по глубокой колее:

$$0\cdot(x-(-4))=4\cdot(y-2)$$
$$0=4\cdot(y-2)$$

переставим части местами:

$$4\cdot(y-2)=0$$
$$y-2=0$$

Ответ: $y-2=0$

Проверка:

1) Восстановим направляющий вектор найденной прямой $0\cdot x+y-2=0$:

$\overline{p}(-B; A)=\overline{p}(-1; 0)$ – полученный вектор коллинеарен исходному направляющему вектору $\overline{p}(4; 0)$.

2) Подставим координаты точки $A(-4; 2)$ в уравнение $0\cdot x+y-2=0$:

$$0\cdot(-4)+2-2=0$$

$0=0$ – получено *верное равенство*, значит, точка A удовлетворяет уравнению.

Вывод: задание выполнено правильно

Возникает вопрос: зачем маяться с формулой …, если существует универсальная версия $p_2\cdot(x-x_0)=p_1\cdot(y-y_0)$, которая сработает в любом случае?

Причин две. Во-первых, формула в виде дроби … **гораздо лучше запоминается**. А во-вторых, недостаток универсальной формулы $p_2\cdot(x-x_0)=p_1\cdot(y-y_0)$ состоит в том, что здесь **повышается риск запутаться** при подстановке координат.

Задача 64

Составить уравнение прямой по точке $A(0; 3)$ и направляющему вектору $\overline{j}(0; 1)$, выполнить проверку.

Это задача для самостоятельного решения. Кстати, **проверку можно выполнять и графически – решили задачу и изобразили всё на чертеже**. Правда, такой способ бывает неудобен или трудновыполнИм, и поэтому всё-таки «рулит» аналитика.

Вернёмся к вездесущим двум точкам:

➤ **Как составить уравнение прямой по двум точкам?**

Уравнение прямой, которая проходит через точки $M_1(x_1;\, y_1),\, M_2(x_2;\, y_2)$, можно составить по формуле:

…

На самом деле это разновидность уравнения …, и вот почему: если известны две точки $M_1(x_1;\, y_1),\, M_2(x_2;\, y_2)$, то вектор $\overline{M_1M_2}$ будет направляющим вектором данной прямой, а отыскивается он по элементарной формуле $\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1;\, y_2 - y_1)$.

Примечание: *точки можно поменять местами: …. Такое решение будет равноценным.*

Задача 65

Составить уравнение прямой по двум точкам $A\left(\frac{3}{2};\, \frac{7}{3}\right),\, B(-1;\, 7)$.

Решение: используем формулу:

…

Причёсываем знаменатели:

$$\frac{x - \frac{3}{2}}{-\frac{5}{2}} = \frac{y - \frac{7}{3}}{\frac{14}{3}}$$

и перетасовываем колоду:

$$\frac{14}{3} \cdot \left(x - \frac{3}{2}\right) = -\frac{5}{2} \cdot \left(y - \frac{7}{3}\right)$$

Именно сейчас удобно избавиться от дробных чисел. В данном случае следует умножить обе части на 6:

$$6 \cdot \frac{14}{3} \cdot \left(x - \frac{3}{2}\right) = -\frac{5}{2} \cdot 6 \cdot \left(y - \frac{7}{3}\right)$$

$$28 \cdot \left(x - \frac{3}{2}\right) = -15 \cdot \left(y - \frac{7}{3}\right)$$

Раскрываем скобки и доводим уравнение до ума:

$$28x-42=-15y+35$$
$$28x-42+15y-35=0$$

Ответ: $AB: 28x+15y-77=0$

Проверка очевидна – координаты исходных точек должны удовлетворять полученному уравнению:

1) Подставим координаты точки $A\left(\frac{3}{2}; \frac{7}{3}\right)$:

$$28\cdot\frac{3}{2}+15\cdot\frac{7}{3}-77=0$$
$$42+35-77=0$$

$0=0$ – *верное равенство*.

2) Подставим координаты точки $B(-1; 7)$:

$$28\cdot(-1)+15\cdot 7-77=0$$
$$-28+105-77=0$$

$0=0$ – *верное равенство*.

Вывод: уравнение прямой составлено правильно.

Если *хотя бы одна* из точек не удовлетворяет уравнению, ищите ошибку.

Стоит отметить, что это как раз тот случай, где графическая проверка затруднительна, поскольку построить прямую $AB: 28x+15y-77=0$, и посмотреть, принадлежат ли ей точки $A\left(\frac{3}{2}; \frac{7}{3}\right)$, $B(-1; 7)$, не так-то просто.

Отмечу ещё пару технических моментов решения. В данной задаче несколько выгоднее воспользоваться «зеркальной» формулой … и по тем же точкам $A\left(\frac{3}{2}; \frac{7}{3}\right)$, $B(-1; 7)$ составить уравнение:

$$\frac{x-(-1)}{\frac{3}{2}-(-1)}=\frac{y-7}{\frac{7}{3}-7}$$

Таки дробей поменьше. Если хотите, можете довести решение до конца, в результате должно получиться то же самое уравнение.

Второй момент состоит в том, чтобы посмотреть на итоговый ответ и прикинуть, а нельзя ли его ещё упростить? Так, если получилось уравнение $2x-4y+6=0$, то его целесообразно сократить на двойку: $x-2y+3=0$ – это уравнение будет задавать ту же самую прямую *(подумайте, почему)*.

Получив ответ $28x+15y-77=0$ в Задаче 65, я на всякий случай мысленно проверил, не делятся ли ВСЕ коэффициенты уравнения на 2, 3 или 7. Хотя, чаще всего подобные сокращения осуществляются ещё по ходу решения.

Задача 66

Составить уравнение прямой, проходящей через точки $K(8;\,2)$, $L\left(3;\,\frac{3}{4}\right)$.

Это пример для самостоятельного решения, который как раз позволит лучше понять и отработать технику вычислений.

Аналогично предыдущему параграфу, если в формуле … один из знаменателей (координата направляющего вектора) обращается в ноль, то переписываем её в виде …. И снова заметьте, как неуклюже и запутанно она стала выглядеть. Не вижу особого смысла приводить практические примеры, поскольку такую задачу мы уже фактически прорешали (см. Задачи 63-64).

➢ Вектор нормали прямой (нормальный вектор)

Что такое ***нормаль***? Простыми словами, нормаль – это перпендикуляр. То есть, ***вектор нормали*** прямой перпендикулярен данной прямой. Очевидно, что у любой прямой их бесконечно много *(так же, как и направляющих векторов)*, но нам хватит одного:

Если прямая задана общим уравнением … в декартовой системе координат, то вектор … является вектором нормали данной прямой.

Обратите внимание, что это утверждение справедливо лишь для «школьной» системы координат; все предыдущие выкладки п. 2.2 работают и в общем аффинном случае.

Вектор нормали всегда ортогонален направляющему вектору прямой. Убедимся в ортогональности данных векторов с помощью скалярного произведения:

$$\overline{p}\cdot\overline{n} = -B\cdot A + A\cdot B = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{p}\perp\overline{n}$$

И тут всё ещё проще: если координаты направляющего вектора $\overline{p}(-B;\,A)$ приходилось аккуратно «вытаскивать» из уравнения, то координаты вектора нормали $\overline{n}(A;\,B)$ достаточно просто «снять».

Приведу примеры с теми же уравнениями, что и для направляющего вектора:

1) $5x+7y-1=0 \quad \Rightarrow \quad \overline{n}(5;\,7)$

2) $2y+3=0 \;\; (0\cdot x+2y+3=0) \quad \Rightarrow \quad \overline{n}(0;\,2)$

3) $5x-2=0 \;\; (5x+0\cdot y-2=0) \quad \Rightarrow \quad \overline{n}(5;\,0)$

Можно ли составить уравнение прямой, зная одну точку и вектор нормали? Нутром чувствуется, можно. Ведь вектор нормали ортогонален направляющему вектору и образует с ним «жесткую конструкцию».

➢ Как составить уравнение прямой по точке и вектору нормали?

Если известна некоторая точка $M(x_0;\,y_0)$, принадлежащая прямой, и вектор нормали $\overline{n}(n_1;\,n_2)$ этой прямой, то уравнение данной прямой выражается формулой:

…

Тут всё обошлось без дробей и прочих нежданчиков. Такой вот у нас нормальный вектор! Любите его. И уважайте :)

Задача 67

Составить уравнение прямой по точке $M(-1;-3)$ и вектору нормали $\overline{n}(3;-1)$. Найти направляющий вектор прямой.

Решение: используем формулу:

...

...

$3\cdot(x+1)-(y+3)=0$

$3x+3-y-3=0$

$3x-y=0$

Общее уравнение прямой получено, выполним **проверку**:

1) На первом шаге «снимаем» координаты вектора нормали с уравнения $3x-y=0$: $\overline{n}(A;B)=\overline{n}(3;-1)$ – да, действительно, получен исходный вектор из условия (либо должен получиться коллинеарный исходному вектор).

2) Проверим, удовлетворяет ли точка $M(-1;-3)$ уравнению $3x-y=0$:

$3\cdot(-1)-(-3)=0$

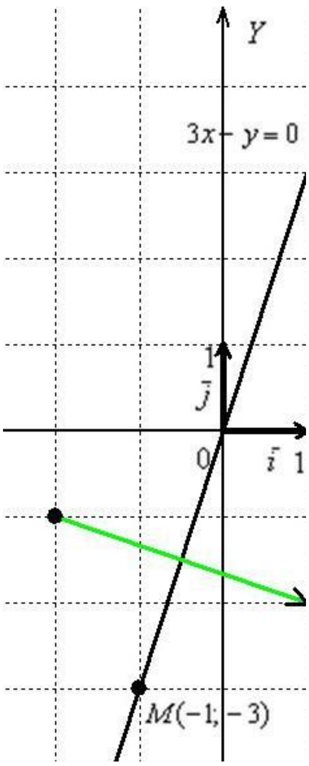
$-3+3=0$

$0=0$ – *верное равенство*.

После того, как мы убедились в том, что уравнение составлено правильно, выполним вторую, более лёгкую часть задания. Из найденного уравнения $3x-y=0$ «вытаскиваем» направляющий вектор прямой: $\overline{p}(-B;A)=\overline{p}(1;3)$

Ответ: $3x-y=0, \quad \overline{p}(1;3)$

На чертеже ситуация выглядит следующим образом:



...

В целях тренировки аналогичная задача для самостоятельного решения:

Задача 68

Составить уравнение прямой по точке $A(0;\,2)$ и нормальному вектору $\overline{n}(-8;\,6)$. Найти направляющий вектор прямой.

Следующие параграфы посвящены менее распространённым, но тоже важным видам уравнений:

2.3. Уравнение прямой в отрезках

Уравнение прямой в отрезках имеет вид …, где M,N – ненулевые константы. Следует отметить, что некоторые прямые нельзя представить в таком виде, например, *прямую пропорциональность* $Ax+By=0$ (так как свободный член C равен нулю и единицу в правой части никак не получить). Но в других случаях нет никакой проблемы привести общее уравнение … к виду ….

Чем оно удобно? **Уравнение прямой в отрезках позволяет быстро найти точки пересечения прямой с координатными осями**, что бывает важным в некоторых задачах высшей математики.

И в самом деле, найдём точку пересечения прямой с осью OX. Обнуляем «игрек», и уравнение принимает вид $\frac{x}{M}=1$. Нужная точка получается автоматически: $M_1(M;0)$.

Аналогично с осью $OY: x=0 \Rightarrow \frac{y}{N}=1 \Rightarrow M_2(0;\,N)$ – точка, в которой прямая пересекает ось ординат.

Как получить уравнение прямой в отрезках?

Задача 69

Дана прямая $5x-7y+11=0$. Составить уравнение прямой в отрезках и определить точки пересечения графика с координатными осями.

Решение: приведём уравнение к виду …. Сначала перенесём свободный член в правую часть:

$$5x-7y=-11$$

Чтобы получить справа единицу, разделим каждый член уравнения на –11:

$$\frac{5x}{-11}+\frac{7y}{11}=1$$

Делаем дроби трёхэтажными *(см. Приложение* ***Школьные материалы****)*:

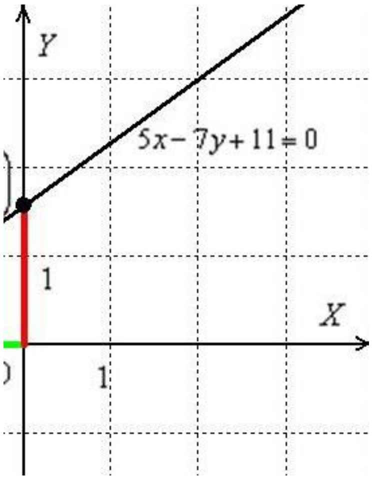
$$\frac{x}{\left(\frac{-11}{5}\right)}+\frac{y}{\frac{11}{7}}=1$$, готово.

Точки пересечения прямой с координатными осями как на блюдечке:

$M_1(M;0)=M_1\left(\frac{-11}{5};0\right)$, $\quad M_2(0;N)=M_2\left(0;\frac{11}{7}\right)$ – для **проверки** устно подставим координаты полученных точек в исходное уравнение $5x-7y+11=0$.

Ответ: $\frac{x}{\left(\frac{-11}{5}\right)}+\frac{y}{\frac{11}{7}}=1 \qquad M_1\left(\frac{-11}{5};0\right), M_2\left(0;\frac{11}{7}\right)$

Осталось приложить линеечку и провести прямую:



Несложно усмотреть, что данная прямая однозначно определяется красным и зелёным отрезками, отсюда и название – «уравнение прямой в отрезках».

Да, конечно, точки M_1, M_2 не так трудно найти и из уравнения $5x-7y+11=0$, но задача всё равно полезная. Рассмотренный алгоритм потребуется для нахождения точек пересечения плоскости с координатными осями, для приведения кривой второго порядка к каноническому виду и в некоторых других задачах. Поэтому пара прямых для самостоятельного решения:

Задача 70

Составить уравнение прямой в отрезках и определить точки её пересечения с координатными осями.

а) $3x+2y-4=0$, $\quad$ б) $y=\frac{x}{2}+8$

2.4. Параметрические уравнениЯ прямой

Собственно:

Если известна некоторая точка $M_0(x_0;y_0)$, принадлежащая прямой, и направляющий вектор $\overline{p}(p_1;p_2)$ этой прямой, то параметрические уравнения данной прямой задаются системой: …

В чём смысл? Параметр t принимает все значения от «минус» до «плюс» бесконечности и каждому значению параметра соответствует конкретная точка $M(x;y)$ прямой

Задача 71

Составить параметрические уравнения прямой по точке $M_0(4; -3)$ и направляющему вектору $\bar{p}(-2; 1)$.

Решение закончилось, не успев начаться:

$$\ldots \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = -2t + 4 \\ y = t - 3 \end{cases}$$

Как найти точки прямой? Возьмём какое-нибудь значение параметра, например, $t = 3$. Тогда соответствующая точка:

$$\begin{cases} x = -2 \cdot 3 + 4 \\ y = 3 - 3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad M(-2; 0)$$

Обратная задача: как проверить, будет ли точка $M(-2; 0)$ принадлежать данной прямой? Подставим её координаты параметрические уравнения:

$$\begin{cases} -2 = -2t + 4 \\ 0 = t - 3 \end{cases}$$

Из **обоих** уравнений следует, что $t = 3$, значит, система *совместна* (имеет решение) и точка $M(-2; 0)$ действительно принадлежит данной прямой.

Рассмотрим более содержательные примеры:

Задача 72

Составить параметрические уравнения прямой $2x + y - 5 = 0$

Решение: по условию прямая задана в общем виде. Для того чтобы составить параметрические уравнения прямой, нужно знать её направляющий вектор и какую-нибудь точку. Найдём направляющий вектор: $\bar{p}(-B; A) = \bar{p}(-1; 2)$

Теперь нужно найти какую-нибудь точку, принадлежащую прямой, здесь проще всего обнулить «иксовую» координату $(x = 0)$, тогда: $0 + y - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 5 \quad \Rightarrow \quad M(0; 5)$

Составим параметрические уравнения прямой:

$$\ldots \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = 2t + 5 \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x = -t \\ y = 2t + 5 \end{cases}$

И небольшое творческие задание для самостоятельного решения.

Задача 73

Составить параметрические уравнения прямой, если известна принадлежащая ей точка $A\left(1; -\frac{1}{2}\right)$ и вектор нормали $\bar{n}\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{4}\right)$

Укрепляем заложенный геометрический фундамент:

2.5. Простейшие задачи с прямой на плоскости

Поехали:

Взаимное расположение двух прямых

Рассмотрим две прямые, уравнения которых заданы в общем виде:

$$d_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$$
$$d_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

Тот случай, когда зал подпевает хором. **Две прямые могут**:

1) совпадать;

2) быть параллельными: $d_1 \parallel d_2$;

3) или пересекаться в единственной точке: $M = d_1 \cap d_2$.

Справка: *$\cap$ – это математический знак пересечения.*

Как определить взаимное расположение двух прямых?

Начнём с первого случая:

> **1) Две прямые совпадают, тогда и только тогда, когда их соответствующие коэффициенты пропорциональны**, то есть, существует такое число «лямбда», что выполняются равенства …

Рассмотрим прямые $d_1 : -x + 2y - 3 = 0$, $d_2 : 2x - 4y + 6 = 0$ и составим три уравнения из соответствующих коэффициентов: …. Из **каждого** уравнения следует, что $\lambda = -2$, следовательно, данные прямые совпадают.

И действительно, если все коэффициенты уравнения $d_1 : -x + 2y - 3 = 0$ умножить на –1 (сменить знаки), и все коэффициенты уравнения $d_2 : 2x - 4y + 6 = 0$ сократить на 2, то получится одно и то же уравнение: $x - 2y + 3 = 0$ – **вспоминаем, что это «эталонный» вид** общего уравнения прямой.

Второй случай, когда прямые параллельны:

> **2) Две прямые параллельны тогда и только тогда, когда их коэффициенты при переменных x и y пропорциональны: …, но** …

В качестве примера рассмотрим прямые $d_1 : 2x - y + 5 = 0$, $d_2 : 2x - y - 11 = 0$. Сначала проверяем пропорциональность соответствующих коэффициентов при переменных x и y:

…

Однако совершенно очевидно, что $\frac{C_2}{C_1} = \frac{-11}{5} \neq 1$.

Вывод: $d_1 \parallel d_2$

И третий случай, когда прямые пересекаются:

3) Две прямые пересекаются, тогда и только тогда, когда их коэффициенты при переменных x и y НЕ пропорциональны, то есть НЕ существует такого значения «лямбда», чтобы выполнялись равенства …

Так, оставим систему для прямых $d_1: 4x+3y-1=0,\quad d_2: 5x-2y+3=0$:

$$\ldots \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 5=\lambda\cdot 4 \\ -2=\lambda\cdot 3 \end{cases}$$

Из первого уравнения следует, что $\lambda=\frac{5}{4}$, а из второго уравнения: $\lambda=-\frac{2}{3}$, значит, **система несовместна** (нет решений). Таким образом, коэффициенты при переменных x и y не пропорциональны.

Вывод: прямые пересекаются

В практических задачах можно использовать только что рассмотренную схему решения, но существует и более «цивилизованная» упаковка:

Задача 74

Выяснить взаимное расположение прямых:

а) $d_1: 2y+3=0,\quad d_2: 5x+2y-7=0$;

б) $f_1: x+3y-8=0,\quad f_2: x+3y+15=0$;

в) $h_1: 5x-y=0,\quad h_2: -10x+2y=0$

Решение основано на исследовании направляющих векторов прямых:

а) Из уравнений $d_1: 2y+3=0,\quad d_2: 5x+2y-7=0$ найдём направляющие векторы прямых: $\overline{p}_1(-2;0),\ \overline{p}_2(-2;5)$.

Вычислим определитель, составленный из координат данных векторов:

$\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -2\cdot 5-0\cdot(-2)=-10-0=-10\neq 0$, значит, векторы $\overline{p}_1,\ \overline{p}_2$ не коллинеарны и прямые $d_1,\ d_2$ пересекаются.

Вопрос: всё ли вам понятно? Если нет, то используйте три ссылки выше. Ну а остальные перепрыгивают камень и следуют дальше, прямо к Кощею Бессмертному =)

б) Найдем направляющие векторы прямых $f_1: x+3y-8=0,\quad f_2: x+3y+15=0$:

$\overline{p}_1(-3;1),\ \overline{p}_2(-3;1)$ – прямые имеют один и тот же направляющий вектор, значит, они либо параллельны, либо совпадают (тут и определитель считать не надо). Очевидно, что коэффициенты при переменных x и y пропорциональны и $\lambda=\frac{-3}{-3}=\frac{1}{1}=1$.

Выясним, справедливо ли равенство $C_2=\lambda C_1$:

$$15=\lambda\cdot(-8)\Rightarrow \lambda=-\frac{15}{8}\neq 1$$

Таким образом, $f_1 \parallel f_2$

в) Найдем направляющие векторы прямых $h_1: 5x - y = 0, \quad h_2: -10x + 2y = 0$:

$\overline{p}_1(1; 5),\ \overline{p}_2(-2; -10)$

Вычислим определитель, составленный из координат данных векторов:

$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -10 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-10) - 5 \cdot (-2) = -10 + 10 = 0$, следовательно, направляющие векторы коллинеарны и прямые либо параллельны, либо совпадают.

Коэффициент пропорциональности «лямбда» можно узнать прямо соотношения коллинеарных направляющих векторов $\overline{p}_2 = -2\overline{p}_1$. Впрочем, можно и через коэффициенты самих уравнений: $\lambda = \dfrac{-10}{5} = \dfrac{2}{-1} = -2$.

Теперь выясним, справедливо ли равенство $C_2 = \lambda C_1$. Оба свободных члена нулевые, поэтому:

$0 = \lambda \cdot 0$

Полученное значение $\lambda = -2$ удовлетворяет данному уравнению (ему удовлетворяет вообще любое число).

Таким образом, прямые совпадают.

Ответ: а) $d_1 \cap d_2$, б) $f_1 \parallel f_2$, в) совпадают

Очень скоро вы научитесь (или даже уже научились) решать рассмотренную задачу устно и буквально в считанные секунды – присмотрелись к уравнениям, и всё понятно.

➢ Как найти прямую, параллельную данной?

За незнание этой простейшей задачи сурово наказывает Соловей-Разбойник.

Задача 75

Прямая задана уравнением $c: x - y + 3 = 0$. Составить уравнение параллельной прямой, которая проходит через точку $M(1; -1)$.

Решение: обозначим неизвестную прямую буквой d. Что о ней сказано в условии? Прямая d проходит через точку $M(1; -1)$ и $d \parallel c$. А если прямые параллельны, то очевидно, что направляющий вектор прямой «цэ» подойдёт и для построения прямой «дэ».

Вытаскиваем направляющий вектор из уравнения $c: x - y + 3 = 0$:

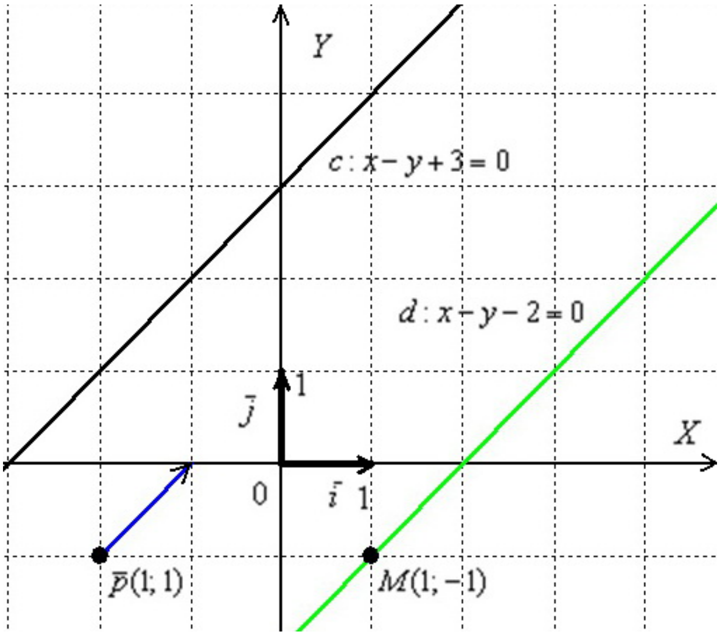
$\overline{p}(1; 1)$

Уравнение искомой прямой d составим по точке $M(1; -1)$ и направляющему вектору $\overline{p}(1; 1)$:

…

Ответ: $d: x - y - 2 = 0$

Геометрия задачи выглядит незатейливо:



Аналитическая же **проверка** состоит в следующих шагах:

1) Проверяем, что у прямых c, d один и тот же направляющий вектор *(если уравнения не упрощены должным образом, то векторы будут коллинеарны)*. Да что тут векторы?! – посмотрим на коэффициенты: $c: x-y+3=0, \quad d: x-y-2=0$ – параллельность прямых понятна без всякого чертежа!

2) Проверяем, удовлетворяет ли точка $M(1;-1)$ полученному уравнению $d: x-y-2=0$. И это тоже устный пункт!

Примеры для самостоятельного решения сегодня будут творческими. Потому что вам ещё придётся тягаться с Бабой-Ягой, а она, знаете, любительница всяких загадок.

Задача 76

Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-2;3)$, параллельную прямой BC, если $B(2;-2), C(-6;-2)$

Существует рациональный и не очень рациональный способ решения. Самый короткий путь в конце книги.

С параллельными прямыми немного поработали и к ним ещё вернёмся. Случай совпадающих прямых малоинтересен, поэтому перейдём к задаче, которая хорошо знакома вам из школьной программы:

➢ Как найти точку пересечения прямых?

Если прямые $\begin{matrix} d_1: A_1x+B_1y+C_1=0 \\ d_2: A_2x+B_2y+C_2=0 \end{matrix}$ **пересекаются в точке** $M(x_0; y_0)$**, то её координаты являются решением системы линейных уравнений** …

Как найти точку пересечения прямых? Решить систему.

И вот вам, кстати, **геометрический смысл системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными** – это две пересекающиеся (чаще всего) прямые. И реже:

– если система несовместна (без решений), то прямые параллельны;

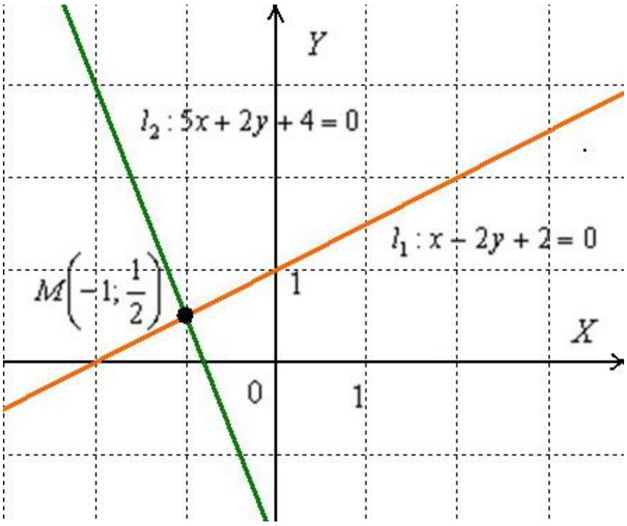
– если $\dfrac{A_2}{A_1}=\dfrac{B_2}{B_1}=\dfrac{C_2}{C_1}=\lambda$, то прямые совпадают, то есть, фактически нам дано не два, а одно уравнение.

Задача 77

Найти точку пересечения прямых $l_1: x-2y+2=0, \quad l_2: 5x+2y+4=0$

Существуют два способа **решения** – графический и аналитический.

Графический способ состоит в том, чтобы просто начертить данные прямые и узнать точку пересечения непосредственно из чертежа:



Искомая точка: $M\left(-1; \frac{1}{2}\right)$. Для **проверки** следует подставить её координаты в уравнение каждой прямой, они должны подойти и там, и там.

Графический способ, конечно, неплох, но существует и заметные минусы. Нет, дело не в том, что так решают семиклассники, дело в том, что на правильный и ТОЧНЫЙ чертёж уйдёт время. Кроме того, некоторые прямые построить не так-то просто, да и сама точка пересечения может находиться где-нибудь в тридесятом царстве за пределами тетрадного листа.

Поэтому точку пересечения $M = l_1 \cap l_2$ целесообразнее искать **аналитическим методом**. Решим систему, уравнения проще всего **сложить почленно**:

$$M: \begin{cases} x-2y+2=0 \\ 5x+2y+4=0 \end{cases} + \quad \Rightarrow \quad 6x+6=0 \Rightarrow x=-1$$

$$-1-2y+2=0 \;\Rightarrow\; 2y=1 \;\Rightarrow\; y=\frac{1}{2}$$

Ответ: $M\left(-1; \frac{1}{2}\right)$

Проверка тривиальна – координаты точки пересечения должны удовлетворять каждому уравнению системы. К слову, этой задачей мы заодно рассмотрели **графический способ решения** системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными.

Задача 78

Найти точку пересечения прямых AB, CD, если известны координаты точек $A(6; -7), B(9; 14), C(-2; 5), D(3; 6)$

Это задача для самостоятельного решения, которое удобно разбить на несколько этапов. Анализ условия подсказывает, что нужно:

1) составить уравнение прямой AB;

2) составить уравнение прямой CD;

3) выяснить взаимное расположение прямых AB, CD;

4) если прямые пересекаются, то найти точку пересечения.

Разработка алгоритма действий типична для геометрических задач, и я на этом буду неоднократно заострять внимание.

В первой части параграфа мы узнали, как построить прямую, параллельную данной, и сейчас избушка на курьих ножках разворачивается на 90 градусов:

➢ Как найти прямую, перпендикулярную данной?

В отличие от предыдущих задач п. 2.5, рассмотренные ниже схемы работают лишь в декартовой системе координат *(но не в общем аффинном случае)*:

Задача 79

Прямая задана уравнением $l: 2x + y - 3 = 0$ в декартовой системе координат. Составить уравнение перпендикулярной прямой m, проходящей через точку $M(2; 3)$.

Решение: по условию известна точка $M \in m$ ($\in$ – *значок принадлежности*), и нам неплохо бы найти направляющий вектор прямой m. Так как прямые перпендикулярны, то фокус прост: из уравнения $l: 2x + y - 3 = 0$ «снимаем» вектор нормали: $\bar{n}(2; 1)$, который и будет направляющим вектором прямой m.

Уравнение прямой m составим по точке $M(2; 3)$ и направляющему вектору $\bar{n}(2; 1)$:

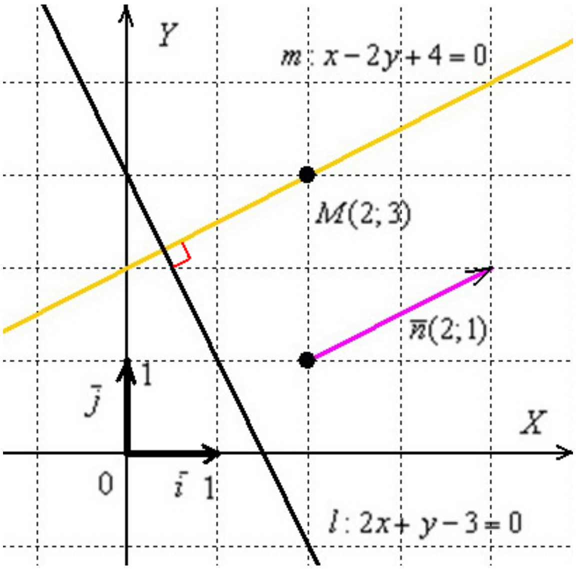
...

$x - 2 = 2(y - 3)$

$x - 2 = 2y - 6$

Ответ: $m: x - 2y + 4 = 0$

Развернём геометрический этюд:



И аналитическая **проверка** решения:

1) Из уравнений $l: 2x + y - 3 = 0$, $m: x - 2y + 4 = 0$ вытаскиваем направляющие векторы $\bar{p}_1(-1; 2)$, $\bar{p}_2(2; 1)$ и с помощью скалярного произведения приходим к выводу, что прямые действительно перпендикулярны: $\bar{p}_1 \cdot \bar{p}_2 = -1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 0 \Rightarrow \bar{p}_1 \perp \bar{p}_2 \Rightarrow l \perp m$.

Кстати, можно использовать векторы нормали, это даже проще.

2) Проверяем, удовлетворяет ли точка $M(2; 3)$ полученному уравнению $x - 2y + 4 = 0$

Оба пункта легко выполнить устно!

Самостоятельно:

Задача 80

Найти точку пересечения перпендикулярных прямых d_1 и d_2, если известно уравнение $d_1: x - 4y + 4 = 0$ в декартовой системе координат и точка $A\left(-\frac{9}{2}; 2\right) \in d_2$.

В задаче несколько действий, поэтому решение удобно оформить по пунктам. И наше увлекательное путешествие продолжается:

➢ Расстояние от точки до прямой

Впереди прямая река и задача состоит в том, чтобы дойти до неё кратчайшим путём. Препятствий нет, и самым оптимальным маршрутом будет движение по перпендикуляру. То есть, ***расстояние от точки до прямой*** – это длина перпендикулярного отрезка.

> **Расстояние от точки** $M(x_0;\ y_0)$ **до прямой** $d: Ax+By+C=0$**, заданной в ортонормированном базисе** $(\bar{i};\ \bar{j})$**, выражается формулой** …

Расстояние в геометрии традиционно **обозначают** греческой буквой «ро», в частности: $\rho(M;\ d)$ – расстояние от точки «эм» до прямой «дэ».

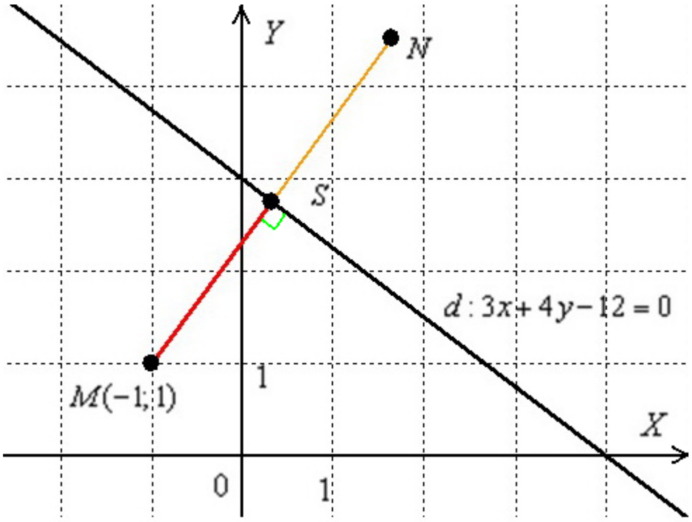
Задача 81

Найти расстояние от точки $M(-1;\ 1)$ до прямой $d: 3x+4y-12=0$

Решение: всё что нужно, это аккуратно подставить числа в формулу и провести вычисления: $\rho(M;\ d)=...=\dfrac{|-3+4-12|}{\sqrt{9+16}}=\dfrac{|-11|}{\sqrt{25}}=\dfrac{11}{5}$

Ответ: $\rho(M;\ d)=\dfrac{11}{5}=2{,}2$ ед.

Найденное расстояние – это в точности длина красного отрезка:



Если оформить чертёж на клетчатой бумаге в масштабе 1 ед. = 1 см (2 клетки), то расстояние можно измерить обыкновенной линейкой.

Рассмотрим ещё одно задание по этому же чертежу:

➢ Как найти точку, симметричную относительно прямой?

Задача состоит в том, чтобы найти координаты точки N, которая симметрична точке $M(-1;\ 1)$ относительно прямой $d: 3x+4y-12=0$.

Предлагаю выполнить действия самостоятельно:

1) Находим прямую $MN: 4x-3y+7=0$, которая перпендикулярна прямой d.

2) Находим точку пересечения прямых: $MN \cap d = S\left(\dfrac{8}{25};\ \dfrac{69}{25}\right)$.

3) Точка S является серединой отрезка MN. Нам известны координаты середины и одного из концов. По формулам координат середины отрезка находим $N\left(\dfrac{41}{25};\ \dfrac{113}{25}\right)$.

…слишком «страшные» дроби? Обычное дело! И лёгкое, если у вас есть калькулятор-«дробовик». Проверьте, что расстояние $\rho(N;\ d)$ тоже равно 2,2 единицам.

➢ Как найти расстояние между двумя параллельными прямыми?

Ответьте на этот вопрос самостоятельно:

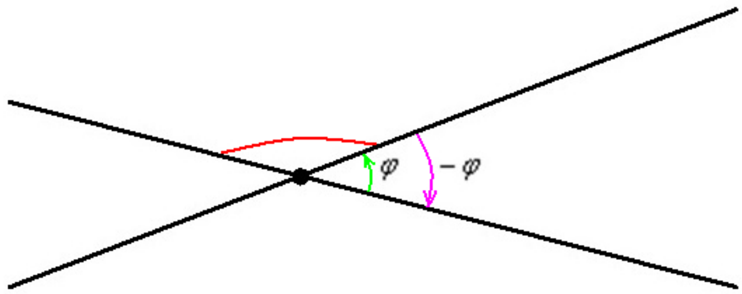
Задача 82

Найти расстояние $\rho(l_1; l_2)$ между двумя параллельными прямыми, заданными в декартовой системе координат: $l_1: x - y - 2 = 0, \quad l_2: x - y + 3 = 0$.

Немного подскажу: тут бесконечно много способов решения. Разбор полётов в конце книги, но лучше постарайтесь догадаться сами, думаю, вашу смекалку удалось неплохо разогнать.

➢ Угол между прямыми

Новая картинка за очередным поворотом:



В геометрии за угол между «плоскими» прямыми принимается МЕНЬШИЙ угол, из чего автоматически следует, что он не может быть *тупым*. На рисунке угол, обозначенный красной дугой, не считается углом между пересекающимися прямыми. А считается таковым его «зелёный» сосед φ или *отрицательно ориентированный* «малиновый» угол $-\varphi$. Если прямые перпендикулярны, то за угол между ними можно принять любой из 4 углов.

…**что-то не понятно? Срочно изучаем** *Приложение* ***Тригонометрия****!*

Однако ещё раз: чем отличаются углы φ и $-\varphi$? Ориентацией (направлением «прокрутки» угла). Напоминаю, что *отрицательно ориентированный* угол «прокручивается» **по** часовой стрелке и записывается со знаком «минус». Следует отметить, что ориентацию угла часто не принимают во внимание, и рассматривают «просто угол», который ≥ 0.

Как найти угол между прямыми? Существуют три основные формулы.

Способ первый. Рассмотрим две прямые, заданные общими уравнениями в декартовой системе координат: $\begin{matrix} d_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ d_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{matrix}$

Если $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$, то прямые перпендикулярны ($\varphi = \frac{\pi}{2}$ либо $-\frac{\pi}{2}$).

Если $A_1A_2 + B_1B_2 \neq 0$, то прямые **не перпендикулярны** и *ориентированный* угол φ между ними можно вычислить с помощью формулы:

…

Знаменатель этой формулы – в точности, скалярное произведение направляющих векторов: $\bar{p}_1(-B_1; A_1) \cdot \bar{p}_2(-B_2; A_2) = -B_1 \cdot (-B_2) + A_1 \cdot A_2 = B_1B_2 + A_1A_2 = A_1A_2 + B_1B_2$, которое равно нулю тогда и только тогда, когда векторы ортогональны. …надеюсь, не забыли ☺

Задача 83

Найти угол между прямыми $d_1: 2x-3y=0,\quad d_2: x+3y-7=0$, заданными в декартовой системе координат.

Исходя из вышесказанного, **решение** удобно оформить в два шага:

1) Вычислим произведение:

$A_1A_2+B_1B_2=2\cdot 1-3\cdot 3=2-9=-7\neq 0$, значит, прямые не перпендикулярны.

2) Угол между прямыми найдём с помощью формулы:

$$tg\varphi=...=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 3 \end{vmatrix}}{-7}=\frac{6+3}{-7}=-\frac{9}{7}$$

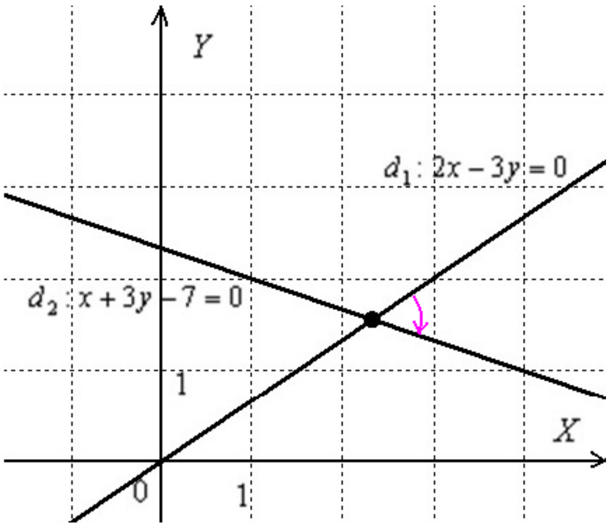
И с помощью обратной функции *(см. Приложение **Тригонометрия**)* легко найти сам угол, при этом используем **нечётность арктангенса**:

$$\varphi=arctg\left(-\frac{9}{7}\right)=-arctg\,\frac{9}{7}$$

Ответ: $\varphi=-arctg\,\frac{9}{7}\approx-0{,}91\,\text{рад.}\approx-52^\circ$

В ответе указываем точное значение, а также приближённое значение (желательно и в градусах, и в радианах), вычисленное с помощью калькулятора.

Ну, минус, так минус, ничего страшного, вот геометрическая иллюстрация:



Неудивительно, что угол получился *отрицательной ориентации*, ведь в условии задачи «первым номером» идёт прямая $d_1: 2x-3y=0$ и «открутка» угла началась именно с неё. Если очень хочется получить положительное значение, то нужно поменять прямые местами, то есть коэффициенты A_1, B_1 взять из второго уравнения $d_2: x+3y-7=0$, а коэффициенты A_2, B_2 – из первого уравнения $d_1: 2x-3y=0$. Короче говоря, начать нужно с прямой $d_2: x+3y-7=0$.

Скрывать не буду, сам подбираю прямые в том порядке, чтобы угол получился положительным. Так красивее, но не более того.

Способ второй, он удобен, когда прямые заданы уравнениями с угловым коэффициентом: $\begin{matrix} d_1 : y = k_1x + b_1 \\ d_2 : y = k_2x + b_2 \end{matrix}$ *(в декартовых координатах)*.

Если $1+k_1k_2=0$, то прямые перпендикулярны ($\varphi = \frac{\pi}{2}$ либо $-\frac{\pi}{2}$).

Если $1+k_1k_2 \neq 0$, то *ориентированный* угол φ между ними можно найти с помощью формулы:

…, и на самом деле это частный случай предыдущей формулы.

К слову, из равенства $1+k_1k_2=0$ следует полезная взаимосвязь угловых коэффициентов перпендикулярных прямых: $k_1 = -\frac{1}{k_2}$, которая используется в некоторых задачах.

Решим Задачу 83 вторым способом, для этого перепишем прямые в нужном виде:

$$d_1 : 2x - 3y = 0 \quad \Rightarrow \quad 3y = 2x \quad \Rightarrow \quad y = \frac{2}{3}x$$

$$d_2 : x + 3y - 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3y = -x + 7 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$$

Таким образом, угловые коэффициенты: $k_1 = \frac{2}{3},\ k_2 = -\frac{1}{3}$, и алгоритм похож:

1) Проверим, будут ли прямые перпендикулярны:

$1+k_1k_2 = 1+\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) = 1-\frac{2}{9} = \frac{7}{9} \neq 0$, значит, прямые не перпендикулярны.

2) Используем формулу:

$$tg\varphi = \ldots = \frac{-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}}{\frac{7}{9}} = \frac{-1}{\frac{7}{9}} = -\frac{9}{7}$$

Ответ: $\varphi = -arctg\frac{9}{7} \approx -0{,}91\,\text{рад.} \approx -52^\circ$

И **третий способ** состоит нахождении угла между направляющими векторами прямых с помощью скалярного произведения: $\cos\alpha = \frac{\bar{p}_1 \cdot \bar{p}_2}{|\bar{p}_1| \cdot |\bar{p}_2|}$, но здесь не принимается во внимание ориентация угла *(по любому получится $\alpha \geq 0$)*. Кроме того, он может оказаться тупым, и тогда придётся делать оговорку, что угол между прямыми – это меньший угол, и из π радиан *(не из 180°!)* вычитать получившийся арккосинус. **Какой способ выбрать?** Ориентируйтесь на вашу задачу, методичку или ситуацию.

Задача 84

Найти угол между прямыми $d_1 : 2x + 3 = 0, \quad d_2 : 7x + 2y + 1 = 0$.

Самостоятельно, всеми тремя способами!

И по просьбам учащихся ещё один пункт:

➢ Как найти проекцию вектора на прямую?

Об ортогональной проекции вектора на вектор мы говорили ранее, и в том параграфе было фактически установлено следующее:

Чтобы найти *ортогональную проекцию* вектора на прямую, нужно найти его проекцию на ЛЮБОЙ направляющий вектор этой прямой.

…возможно, не всем понятен термин «ортогональная» – это **такая** проекция, при которой на вектор «падают лучи света» строго перпендикулярно по отношению к прямой *(см. рис. ниже)*. Существует куча иных («косых») проекций, когда проецирование осуществляется под другими углами, но для данной книги этот материал не столь актуален.

Решим символическую задачку:

Задача 85

Найти проекцию вектора $\overline{a}(0;\,2)$ на прямую $l: x-2y+2=0$

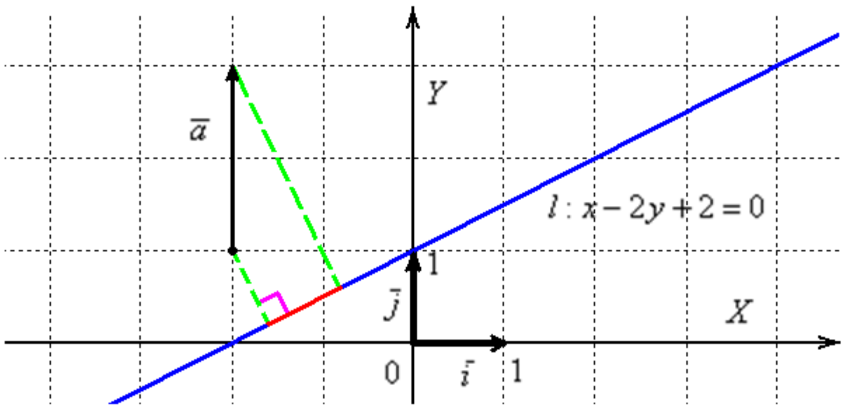
Решение: найдём какой-нибудь направляющий вектор прямой, проще и быстрее взять стандартный вариант: $\overline{p}(-B;\,A)=\overline{p}(2;1)$.

Проекция вектора на прямую – есть его проекция на любой направляющий вектор этой прямой, по соответствующей формуле:

$$Пр_l\,\overline{a}=Пр_{\overline{p}}\,\overline{a}=...=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Ответ: $Пр_l\,\overline{a}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ ед. $\approx 0{,}9$ ед.

Напоминаю, что проекция – это длина «тени» вектора $\overline{a}$ (красный цвет):



Желающие могут взять любые точки M_1, M_2 прямой, найти направляющий вектор $\overline{M_1M_2}$ и убедиться в том, что проекция $Пр_{\overline{M_1M_2}}\,\overline{a}$ будет такой же, как вариант, со знАком «минус».

Ну вот и подошло к концу наше путешествие по основным задачам с «плоской» прямой, и никакого Кощея Бессмертного тут нет…. – Здесь есть я, с новыми знаниями и задачами ☺ Потому что Бабу-Ягу никто не отменял =)

2.6. Линейные неравенства

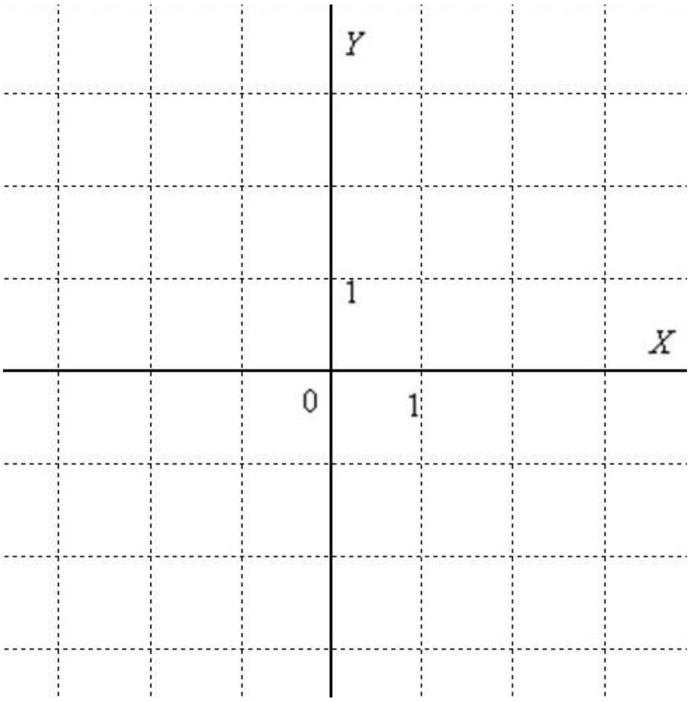
В контексте темы речь пойдёт о ***линейных неравенствах*** с **двумя** переменными *(«иксом» и «игреком»)*. И они бывают такими:

1) ***Строгие*** неравенства: ….

2) ***Нестрогие*** неравенства: ….

Какой геометрический смысл этих неравенств? Если линейное уравнение $Ax+By+C=0$ задаёт прямую, то любое из четырёх неравенств определяет ***полуплоскость***, плюс прямую, если неравенство *нестрогое*.

Начнём с простейших случаев. Голубая мечта любого двоечника – координатная плоскость, на которой нет ничегошеньки. Даже стрелочки для вас забыл:))



Как известно, *ось абсцисс* OX задаётся уравнением $y=0$ – «игрек» **всегда** (при любом «икс») равен нулю.

Рассмотрим неравенство $y>0$. Как его понимать **неформально?** «Игрек» **всегда** (при любом «икс») положителен. Очевидно, что данное неравенство определяет верхнюю полуплоскость – ведь там и находятся все точки с положительными «игреками». Если неравенство нестрогое $y\geq 0$, то к верхней полуплоскости **дополнительно** добавляется сама ось OX.

Аналогично, неравенству $y<0$ удовлетворяют все точки нижней полуплоскости; нестрогому неравенству $y\leq 0$ соответствует нижняя полуплоскость + ось OX.

С *осью ординат* OY та же самая прозаичная история:

– неравенство $x>0$ задаёт правую полуплоскость;

– неравенство $x\geq 0$ задаёт правую полуплоскость, включая ось ординат;

– неравенство $x<0$ задаёт левую полуплоскость;

– неравенство $x\leq 0$ задаёт левую полуплоскость, включая ось ординат.

На втором шаге рассмотрим неравенства, где в *явном виде** отсутствует одна из переменных, «игрек»:

$$Ax+C>0,\quad Ax+C\geq 0,\quad Ax+C<0,\quad Ax+C\leq 0$$

или «икс»:

…

* *Недостающую переменную всегда можно дописать, например:* $Ax+0\cdot y+C>0$.

С такими неравенствами можно разобраться двумя способами, и мы разберём оба подхода. Попутно вспомним «школьные» действия с неравенствами, которые во многом напоминают действия с уравнениями:

Задача 86

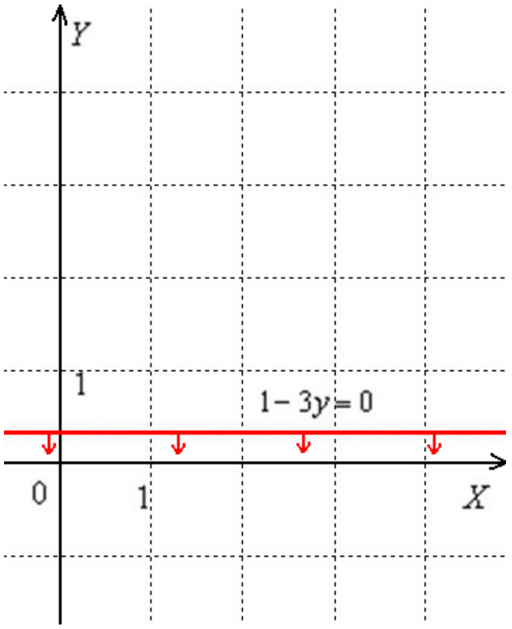
Решить линейные неравенства:

а) $2x+5<0$, б) $1-3y\geq 0$

Что значит решить линейное неравенство с двумя переменными?

Решить такое неравенство – это значит найти полуплоскость, точки которой удовлетворяют данному неравенству + добавить прямую, если неравенство *нестрогое*.

Решение, как правило, **графическое**, удобнее сразу выполнить чертёж, а потом всё закомментировать:



а) Решим неравенство $2x+5<0$

Способ первый весьма напоминает историю с координатными осями, которую мы рассмотрели выше. Идея состоит в преобразовании неравенства – чтобы в левой части оставить одну переменную без всяких констант, в данном случае – переменную «икс».

Для этого переносим «пятёрку» в правую часть со сменой знака:

$2x<-5$ и умножим обе части неравенства на $\frac{1}{2}$:

$x<-\frac{5}{2}$

Теперь чертим прямую $x=-\frac{5}{2}$ *(синий пунктир)*.

Каков смысл неравенства $x<-\frac{5}{2}$? «Икс» **всегда** (при любом значении «игрек») меньше, чем $-\frac{5}{2}$. Очевидно, что этому условию удовлетворяют все точки левой полуплоскости. Эту полуплоскость, в принципе, можно заштриховать, но я ограничусь маленькими синими стрелочками, чтобы не превращать чертёж в художественную палитру.

Сама прямая проведена пунктиром – по той причине, что неравенство **строгое**, и точки, принадлежащие прямой $x=-\frac{5}{2}$, не удовлетворяют неравенству $2x+5<0$.

Способ второй, **универсальный**. ЧИТАЕМ ОЧЕНЬ ВНИМАТЕЛЬНО!

Сначала чертим прямую $2x+5=0$. Для ясности, кстати, уравнение удобно представить в виде $x=-\frac{5}{2}$.

Теперь выбираем любую точку плоскости, **не принадлежащую прямой**. В большинстве случаев самая лакомая точка, конечно $O(0;0)$. Подставим координаты этой точки в неравенство $2x+0\cdot y+5<0$:

…

Получено *неверное неравенство* (простыми словами, неправда), значит, точка $O(0;0)$ **не удовлетворяет** неравенству $2x+5<0$.

Ключевое правило:

– Если какая-либо точка, не принадлежащая прямой, **не удовлетворяет** неравенству, то и **ВСЕ** точки этой полуплоскости **не удовлетворяют** данному неравенству.

– Если какая-либо точка, не принадлежащая прямой, **удовлетворяет** неравенству, то и **ВСЕ** точки этой полуплоскости **удовлетворяют** данному неравенству

Можете протестировать: любая точка справа от прямой $2x+5=0$ вместе с проверенной точкой $O(0;0)$ **не будет** удовлетворять неравенству $2x+5<0$.

Деваться некуда – неравенству $2x+5<0$ удовлетворяют все точки левой полуплоскости (тоже можете проверить).

б) Решим неравенство $1-3y\geq 0$

Способ первый. Преобразуем неравенство, чтобы получить слева «игрек»:

$-3y\geq -1$

и специфичное для неравенств правило, которое помнят далеко не все:

Если обе части неравенства умножить на **отрицательное** число, то знак неравенства меняется на противоположный *(например, если было $>$, то станет $<$; если было $\leq$, то станет $\geq$).*

Умножим обе части неравенства на $-\frac{1}{3}$:

$y\leq \frac{1}{3}$

Начертим прямую $y=\frac{1}{3}$ (красный цвет на чертеже), причём, начертим сплошной линией, так как неравенство у нас **нестрогое** и прямая заведомо принадлежит решению.

Проанализировав полученное неравенство $y\leq \frac{1}{3}$, приходим к выводу, что его решением является нижняя полуплоскость + сама прямая.

Нужная полуплоскость штрихуется либо помечается стрелочками.

Способ второй. Начертим прямую $y=\frac{1}{3}$. Выберем произвольную точку плоскости, не принадлежащую прямой, например, $O(0;0)$ и подставим её координаты в наше неравенство $0\cdot x+1-3y\geq 0$:

$0\cdot 0+1-3\cdot 0\geq 0$
$1\geq 0$

Получено *верное неравенство*, значит, точка $O(0;0)$ удовлетворяет неравенству $1-3y\geq 0$, и вообще – ВСЕ точки нижней полуплоскости удовлетворяют этому неравенству. Здесь подопытной точкой мы «попали» в нужную полуплоскость.

Решение задачи обозначено красными стрелочками на чертеже выше.

Лично мне нравится больше первый способ решения, хотя второй, на мой взгляд, чуть проще.

Задача 87

Решить линейные неравенства:
а) $2-2x\leq 0$, б) $y-3>0$

Постарайтесь решить задачу двумя способами (к слову, это хороший способ проверки решения). Чертёж с графическим решением в конце книги.

Думаю, после всех проделанных в примерах действий вам ~~придётся на них жениться~~ не составит труда быстро решить простейшие неравенства вроде $x<2$, $y\geq -1$ и т.п.

Переходим к рассмотрению **третьего, общего случая**, когда в неравенстве присутствуют обе переменные:

…

(как вариант, свободный член «цэ» может быть нулевым)

Во всех перечисленных случаях используется **универсальный метод решения** с подстановкой точки:

Задача 88

Найти полуплоскости, соответствующие следующим неравенствам:
а) $2x+y-4>0$, б) $x-y\geq 0$

Решение:

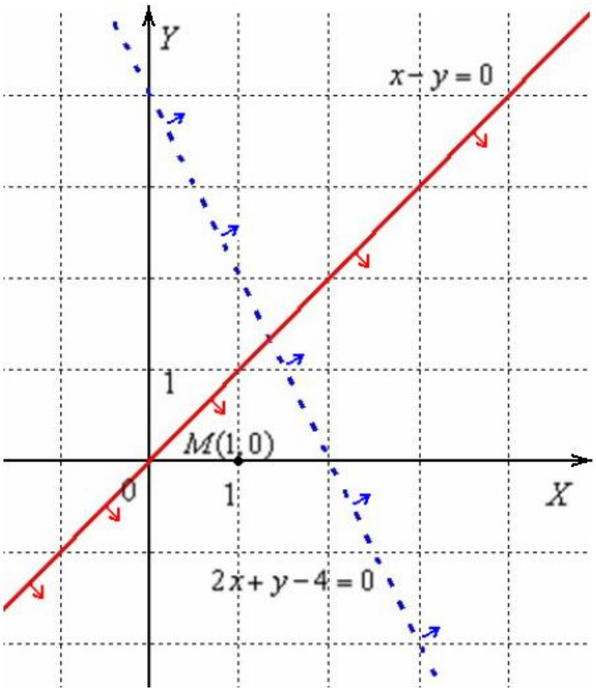
а) Построим уравнение прямой $2x+y-4=0$, при этом линию следует провести пунктиром, так как неравенство у нас строгое и сама прямая не войдёт в решение.

Выбираем подопытную точку плоскости, которая не принадлежит данной прямой, например, $O(0;0)$, и подставляем её координаты в наше неравенство:

…

Получено *неверное неравенство*, значит, точка $O(0;0)$ и ВСЕ точки данной полуплоскости не удовлетворяют неравенству $2x+y-4>0$.

Таким образом, решением неравенства $2x + y - 4 > 0$ будет другая полуплоскость, помечаем её синими стрелочками:



б) Решим неравенство $x - y \geq 0$. Сначала построим прямую – это каноничная прямая пропорциональность $y = x$. Линию проводим «сплошняком», так как неравенство у нас нестрогое.

Выберем произвольную точку, не принадлежащую прямой $y = x$. Хотелось бы снова использовать начало координат, но, увы, оно не годится. Что выбрать? Выгоднее взять точку с небольшими значениями координат, например, $M(1; 0)$. Подставим её координаты в наше неравенство:

$$1 - 0 \geq 0$$

$$1 \geq 0$$

Получено *верное неравенство*, значит, точка $M(1; 0)$ и все точки данной полуплоскости удовлетворяют неравенству $x - y \geq 0$. Помечаем решение красными стрелочками, кроме того, в него входит сама прямая $y = x$.

Задача 89

Найти полуплоскости, соответствующие неравенствам:

а) $y < -3x$, б) $x + y \leq 3$

Тренируемся! – примерный образец чистового оформления решения в конце книги.

Разберём **обратную задачу**:

Задача 90

а) Дана прямая $2x - y + 1 = 0$. Определить полуплоскость, в которой находится точка $M(-1; 2)$, при этом сама прямая должна входить в решение.

б) Дана прямая $2x + 3 = 0$. Определить полуплоскость, в которой находится точка $N(0; 2)$. Сама прямая не входит в решение.

Здесь нет надобности в чертеже и **решение** чисто аналитическое:

а) Составим вспомогательный многочлен $p(x; y) = 2x - y + 1$ и вычислим его значение в точке …. Таким образом, искомое неравенство будет со знаком «меньше». По условию прямая $2x - y + 1 = 0$ входит в решение, поэтому неравенство нестрогое: $2x - y + 1 \leq 0$

б) Составим многочлен $p(x; y) = 2x + 0 \cdot y + 3$ и вычислим его значение в точке …. Таким образом, искомое неравенство будет со знаком «больше». По условию прямая $2x + 3 = 0$ не входит в решение, поэтому неравенство строгое: $2x + 3 > 0$.

Ответ: а) $2x - y + 1 \leq 0$, б) $2x + 3 > 0$

Творческая задача для самостоятельного решения:

Задача 91

Среди точек $M_1(-3;0), M_2(1;4), M_3\left(-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right), M_4(4;3), M_5(-2;1)$ найти те, которые вместе с началом координат лежат по одну сторону от прямой $x-2y+4=0$.

Аналитическое решение и ответ в конце книги.

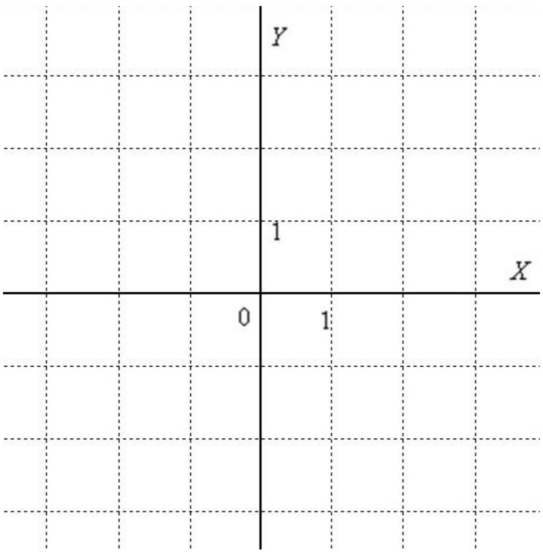
2.7. Системы линейных неравенств

Система линейных неравенств – это система, составленная из линейных неравенств. …Обожаю такие определения :)

Что значит решить систему линейных неравенств с двумя переменными?

Решить такую систему – это значит **найти множество точек плоскости**, которые удовлетворяют **каждому** неравенству системы.

В качестве простейших примеров рассмотрим системы неравенств, определяющих ***координатные четверти*** прямоугольной системы координат. Вспоминаем «рисунок двоечников», уменьшу его в размерах:



Система неравенств $\begin{cases} x>0 \\ y>0 \end{cases}$ задаёт ***первую*** *координатную четверть* (правая верхняя). Координаты любой точки первой четверти, например, $M_1(3;5), M_2(9;10)$ и т.д. удовлетворяют **каждому** неравенству данной системы.

Аналогично:

– система $\begin{cases} x<0 \\ y>0 \end{cases}$ задаёт ***вторую*** *координатную четверть* (левая верхняя);

– система $\begin{cases} x<0 \\ y<0 \end{cases}$ задаёт ***третью*** *координатную четверть* (левая нижняя);

– и система $\begin{cases} x>0 \\ y<0 \end{cases}$ задаёт ***четвёртую*** *координатную четверть* (правая нижняя).

Система линейных неравенств может не иметь решений, то есть, быть **несовместной**. Снова простейший пример: $\begin{cases} x>3 \\ x<2 \end{cases}$. Совершенно понятно, что «икс» не может быть одновременно больше трёх и меньше двух.

Решением системы неравенств может быть прямая, например: $\begin{cases} y\geq x \\ y\leq x \end{cases}$. Лебедь, рак, без щуки, тянут воз в две разные стороны. Да воз и ныне там – решением данной системы является прямая $y=x$.

Но самый распространённый случай, это когда решением системы является некоторая *область плоскости*. ***Область решений*** может быть *не ограниченной* (например, координатные четверти) либо *ограниченной*. Ограниченная область решений называется ***многоугольником решений системы***, и это самый популярный вариант:

Задача 92

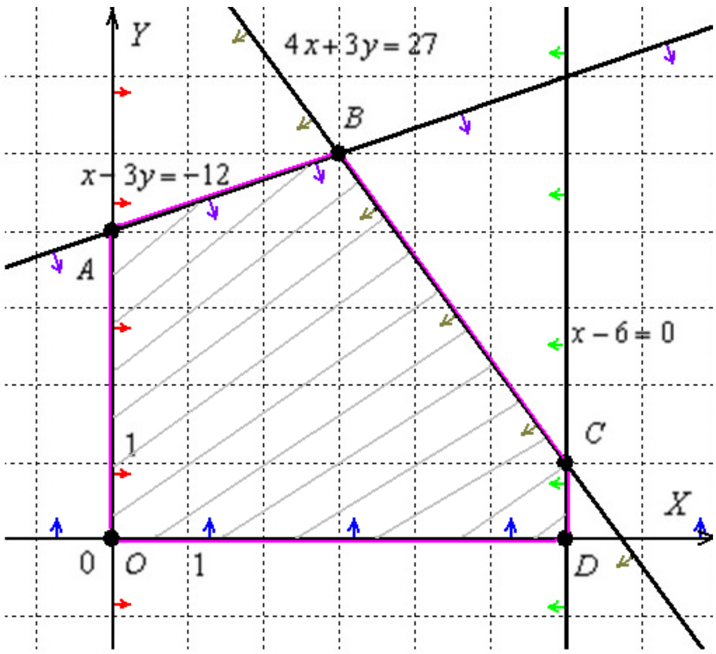
Решить систему линейных неравенств

$$\begin{cases} x-3y\geq -12 \\ x-6\leq 0 \\ 4x+3y\leq 27 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases}$$

Сколько может быть неравенств в системе? Да сколько угодно.

Решение: и то, что неравенств многовато, пугать не должно, главное придерживаться **рационального алгоритма построения** **области решений**:

1) Сначала разбираемся с простейшими неравенствами. Неравенства $x\geq 0, y\geq 0$ определяют первую координатную четверть, включая границу из координатных осей. Уже значительно легче, так как область поиска значительно сузилась. На чертеже сразу отмечаем стрелочками соответствующие полуплоскости (красные и синие стрелки)



2) Второе по простоте неравенство $x-6\leq 0$ – здесь отсутствует «игрек». Во-первых, строим саму прямую $x-6=0$, а, во-вторых, после преобразования неравенства к виду $x\leq 6$, сразу становится понятно, что все «иксы» меньше, чем 6. Отмечаем зелёными стрелками соответствующую полуплоскость.

3) На последнем шаге решаем неравенства «с полным боекомплектом»: $x-3y\geq -12$, $4x+3y\leq 27$. Так как прямые не самые простые, то сначала подбираем и указываем опорные точки для их построения:

x	0	3
y	4	5

x	0	6
y	9	1

Область решений системы представляет собой *многоугольник* $OABCD$, на чертеже он обведён малиновой линией и заштрихован. В тетради его достаточно либо заштриховать, либо жирнее обвести простым карандашом. Любая точка данного многоугольника удовлетворяет КАЖДОМУ неравенству системы (можете для интереса проверить).

Хорошим тоном считается найти координаты вершин, здесь они очевидны. Однако не лишним будет составить систему … и убедиться, что точка $B(3;5)$ - не фейк

Ответ: многоугольник с вершинами $O(0;0), A(0;4), B(3;5), C(6;1), D(6;0)$.

Аналогичная задача для самостоятельного решения:

Задача 93

Решить систему и найти координаты вершин полученной области

$$\begin{cases} 2x-3y \ge -18 \\ x+y \ge -2 \\ 4x+y \ge -10 \\ x \le 0 \end{cases}$$

А вот здесь для нахождения некоторых вершин уже придётся решать системы, поскольку координаты точек не очевидны. И это, кстати, хороший способ проверить правильность чертежа. У вас, скорее всего, будут другие буквенные обозначения, но это не принципиально, главное, правильно определить и построить область.

Не удивляйтесь, что все неравенства нестрогие – именно они часто используются в прикладных задачах, например, в задачах *линейного программирования*.

2.8. Как научиться решать задачи по аналитической геометрии?

Откуда такой вопрос? Дело в том, что задач по геометрии можно придумать очень много, и никакой учебник не вместит в себя всё множество и разнообразие примеров. Увы, это не **производная** с 5 правилами и жесткими алгоритмами решения.

Но решение есть! Не буду говорить громких слов о том, что я разработал какую-то грандиозную методику, однако нижеследующие советы позволят достигнуть хорошей и отличной результативности даже полному «чайнику». **Итак,**

ЧТО НУЖНО знать и уметь для успешного решения задач по ангему?

Ступень первая. **Требуется освоить азы аналитической геометрии**. Векторы **(!)**, информацию о прямой на плоскости, простейшие задачи с прямой и другие темы, которые мы изучим позже. Образно говоря, это кирпичики фундамента, на котором строится всё остальное. Без него никак.

Уровень второй, когда вы уже обладаете элементарными знаниями и навыками решения простейших задач. Но вот бывает же так, читаешь условие задачи, и… не понятно, что делать, не понятно, как подступиться к решению…. **Что делать?**

Не бояться задачи, которая вам не понятна!

Во-первых, следует установить – **это «плоская» или пространственная задача?** Тупо посмотреть, сколько координат у векторов и точек, две или три? Результаты первого шага уже неплохи, ведь удалось отсечь громадное количество ненужной информации!

Второе. Условие, как правило, озаботит вас некоторой геометрической фигурой, **и вы можете вообще не помнить, что это за фигура**. Или не помнить её свойств. Ангем ангемом, но **задачу помогут решить геометрические свойства самих фигур**, известные нам из школьной программы. Поэтому в *Приложение* ***Школьные Материалы*** я включил краткий конспект об основных фигурах и их свойствах, которые (по моему опыту) точно пригодятся для решения задач аналитической геометрии. Следует отметить, что перечисленные фигуры могут рассматриваться как на плоскости, так и в пространстве. К «чисто» пространственным распространённым фигурам можно отнести *параллелепипед* и *треугольную пирамиду* (*тетраэдр*), с которыми мы уже сталкивались, и ещё не вечер.

Третье. **ВСЕГДА старайтесь выполнять чертёж** (на черновике / чистовике / мысленно / в сердце), **даже если этого не требуется по условию**. В «плоских» задачах сам Евклид велел взять в руки линейку с карандашом – и не только для того, чтобы понять условие, но и в целях самопроверки. При этом наиболее удобный масштаб *1 единица = 1 см (2 тетрадные клетки)*. Для пространственных заданий выполняем схематический рисунок, который тоже поможет проанализировать условие.

Чертёж или схематический чертёж зачастую сразу позволяет увидеть путь решения задачи. Но, конечно, для этого нужно знать фундамент и рубить в свойствах геометрических фигур (см. предыдущие пункты)

Четвёртое. **Разработка алгоритма решения**. Многие задачи являются многоходовыми, и поэтому решение и его оформление очень удобно разбивать на пункты. Нередко алгоритм сразу же приходит в голову, после того как вы прочитали условие или выполнили чертёж. **В случае возникновения трудностей начинаем с ВОПРОСА задачи**. Например, по условию требуется построить прямую. И здесь самый логичный вопрос такой: *А что нужно знать, чтобы построить эту прямую?* Предположим, точка нам известна, тогда нужно узнать ещё одну точку или направляющий вектор. Задаём следующий вопрос: *Как найти эту точку / направляющий вектор? Откуда?* и т.д.

Кстати, этот пункт полезен не только в геометрии и не только в математике. И не только в науках,… впрочем, не будем развивать попсовые темы, сейчас геометрия!

Иногда случается «затык» – не решается задача и всё тут. Причины «стопора» могут быть следующими:

– Серьёзный пробел в элементарных знаниях. Иными словами, вы не знаете или (и) не видите какой-то очень простой вещи. Да просто неправильно извлекаете корень или упрощаете трёхэтажную дробь *(см. Приложение **Школьные Материалы**)*.

– Незнание свойств геометрических фигур. Следует отметить, что некоторые из них имеют специфические и малоизвестные свойства, и поэтому я рекомендую не ограничиваться упомянутым выше *Приложением*, а посмотреть более подробные источники, хотя бы Википедию, где авторы стараются упомянуть всё-всё-всё.

– Задача попалась трудная. Да, так бывает. И тут нет смысла париться часами, обратитесь за консультацией к преподавателю, сокурсникам или задайте вопрос на форуме. Причём, его постановку лучше сделать **конкретной – о том участке решения, который вам не понятен**. Клич в виде «Как решить задачу?» выглядит не очень-то….

Этап пятый. Решаем-проверяем, решаем-проверяем, решаем-проверяем-даём ответ. **Каждый пункт задачи выгодно проверять СРАЗУ после его выполнения.** Это поможет немедленно обнаружить ошибку. Естественно, никто не запрещает быстренько прорешать задачу целиком, но это чревато переписыванием всего решения заново (порой, несколько страниц).

Шестое: **решаем, решаем, решаем!** А теперь **самый главный, Седьмой секрет:**

Получаем удовольствие!

И начнём мы прямо сейчас. Пройдёмся по нити алгоритма, который я только что рассмотрел в своём маленьком научном труде.

Задач будет две, но мало не покажется =)

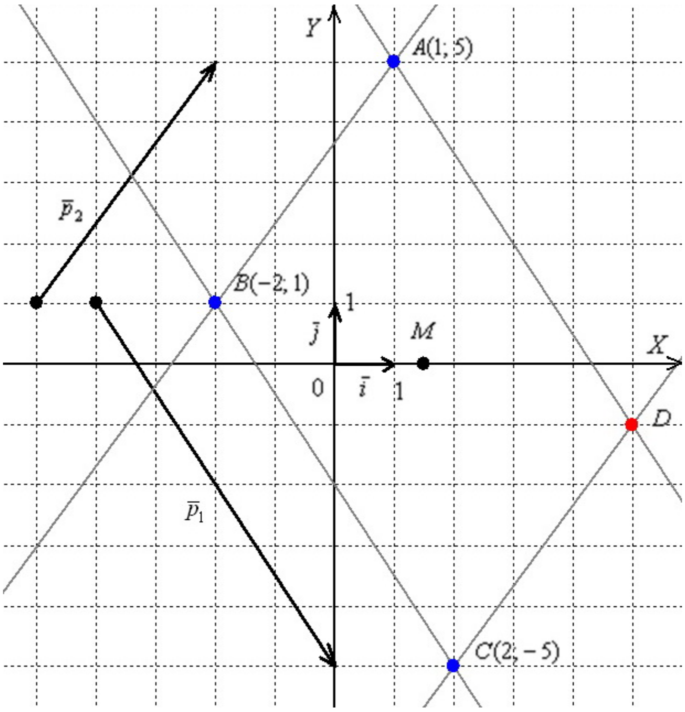
Задача 94

Даны три вершины $A(1;5), B(-2;1), C(2;-5)$ параллелограмма $ABCD$. Найти вершину D.

Шаг первый: очевидно, что речь идёт о «плоской» задаче.

Шаг второй: в задаче речь идёт о *параллелограмме*. Все помнят такую фигуру? ;)

Шаг третий: Выполним чертёж, на котором отметим три известные вершины, да и вообще всё остальное, искомую точку D в том числе:



Построить – это хорошо, но решение нужно оформить аналитически.

Шаг четвёртый: Разработка алгоритма решения. Первое, что приходит в голову – точку D можно найти как пересечение прямых AD и CD. Их уравнения нам неизвестны, и поэтому придётся заняться этим вопросом.

Шаг5 **Прорешиваем самостоятельно и проверяем каждый пункт:**

1) Противоположные стороны BC и AD параллельны. По точкам $B(-2;1), C(2;-5)$ найдём направляющий вектор этих прямых: $\overline{BC} = \overline{p}_1$.

2) Составим уравнение прямой AD по известной точке $A(1;5)$ и направляющему вектору $\overline{p}_1$.

3) Противоположные стороны BA и CD параллельны. По точкам $B(-2;1), A(1;5)$ найдём направляющий вектор этих сторон $\overline{BA} = \overline{p}_2$.

4) Составим уравнение CD по точке $C(2;-5)$ и направляющему вектору $\overline{p}_2$

5) Теперь уравнения прямых AD, CD известны, находим точку $D = AD \cap CD$.

Записываем **ответ:** ... – не забываем об этом важном элементе решения!

Задача довольно-таки простая, но существует ещё более короткий путь!

Второй способ решения: диагонали параллелограмма своей точкой пересечения делятся пополам *(точку M я отметил, но сами диагонали не провёл).*

1) С помощью формул координат середины отрезка найдём точку M – середину диагонали AC.

2) Рассмотрим диагональ BD. Из условия известна вершина «бэ», из предыдущего пункта найдена середина M. Используя те же формулы, находим вершину D.

Знание свойств параллелограмма позволило значительно сократить решение! Как говорится, знание – сила, а незнание – рабочая сила.

Переходим к очень популярной задаче, которая встречается практически в каждом сборнике, в каждой методичке:

2.9. Типовая задача с треугольником

Многие помнят из школы признаки равенства треугольников, признаки подобия треугольников и мучительное заучивание доказательств теорем. Как в сердцАх сказал один мой одноклассник, «не понимаю, на### доказывать равенство треугольников, если и так видно, что они одинаковые». Мы тоже не будем ничего доказывать, поскольку аналитическая геометрия рассматривает треугольник совсем с другой стороны.

Типовая задача, как правило, формулируется так: *Даны три вершины треугольника. Требуется найти…* много чего требуется найти…. Повезёт, если будет пункта 3-4, но чаще всего их 5-6 и даже больше. И вам повезло – разберём всё! Или почти всё:

Задача 95

Даны вершины треугольника …. Требуется:

1) составить уравнения сторон AB, AC, BC и найти их угловые коэффициенты;

2) найти длину стороны BC;

3) найти $\angle BAC$;

4) составить прямой l, проходящей через точку C параллельно прямой AB;

5) составить уравнение высоты AH и найти её длину;

6) вычислить площадь треугольника ABC;

7) составить уравнение медианы BM;

8) найти точку пересечения $G = AH \cap BM$.

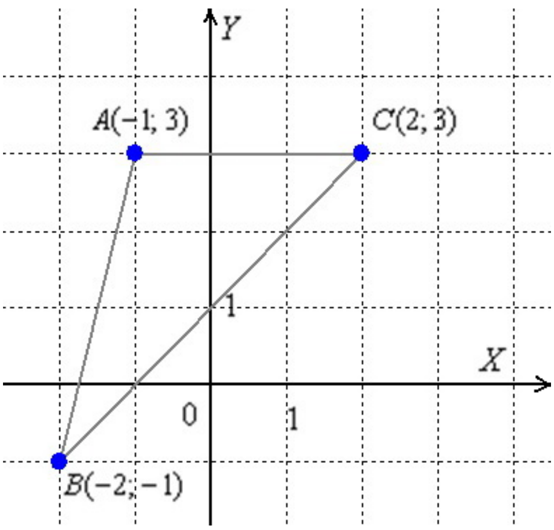
и для особо опасных энтузиастов:

9) найти уравнение биссектрисы CF;

10) найти центр тяжести N треугольника;

11) составить систему линейных неравенств, определяющих треугольник.

С чего начать **решение**? Начать целесообразно с выполнения чертежа. По условию этого можно не делать, но **для самоконтроля и самопроверки всегда строим чертёж на черновике**, не устану это рекомендовать:



Ещё раз напоминаю, что самый выгодный масштаб 1 единица = 1 см (2 тетрадные клетки). Всё хорошо видно, и расстояния удобно измерять линейкой.

Вперёд без страха и сомнений:

1) Составим уравнения сторон AB, AC, BC и найдём их угловые коэффициенты.

Поскольку известны вершины треугольника, то уравнения каждой стороны составим по двум точкам.

Составим уравнение стороны AB по точкам …:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

$$\frac{x - (-1)}{-2 - (-1)} = \frac{y - 3}{-1 - 3}$$

$$\frac{x + 1}{-1} = \frac{y - 3}{-4}$$

$$4(x + 1) = y - 3$$

$$4x + 4 = y - 3$$

$$AB: 4x - y + 7 = 0$$

Для **проверки** мысленно либо на черновике подставляем координаты **каждой** точки в полученное уравнение. Теперь найдём угловой коэффициент. Для этого перепишем общее уравнение в виде уравнения с угловым коэффициентом:

$$4x - y + 7 = 0 \Rightarrow y = 4x + 7$$

Таким образом, угловой коэффициент: $k_{AB} = 4$

Самостоятельно разбираемся со сторонами AC, BC и сверяемся, что получилось:

$$AC: y - 3 = 0 \qquad k_{AC} = 0;$$

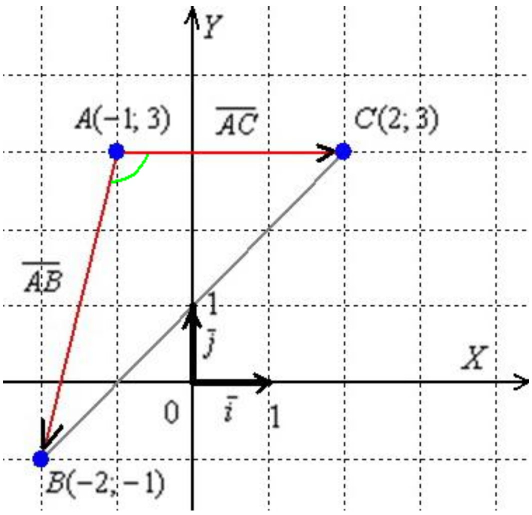
$$BC: x - y + 1 = 0 \qquad k_{BC} = 1.$$

2) Найдём длину стороны BC. Используем соответствующую формулу для точек $B(-2; -1), C(2; 3)$:

$|BC| = ...$

Сторону легко измерить обычной линейкой, хотя это не сильно строгая проверка :)

3) Найдём $\angle BAC$. Это Задача 31, повторим:



Используем формулу:

$$\cos\angle(\overline{AB}; \overline{AC}) = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}|}.$$

Найдём векторы:

$$\overline{AB}(-2 - (-1); -1 - 3) = \overline{AB}(-1; -4)$$

$$\overline{AC}(2 - (-1); 3 - 3) = \overline{AC}(3; 0)$$

Таким образом:

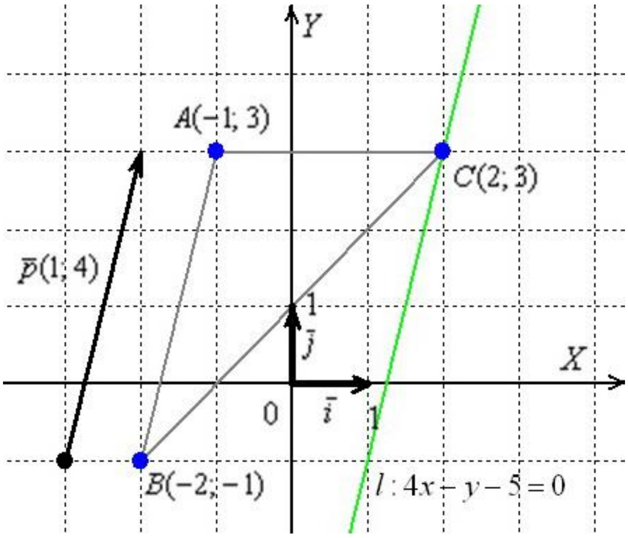
$$\cos\angle(\overline{AB}; \overline{AC}) = \frac{-1 \cdot 3 - 4 \cdot 0}{\sqrt{(-1)^2 + (-4)^2} \cdot \sqrt{3^2 + 0^2}} =$$

$$= \frac{-3}{\sqrt{17} \cdot 3} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$, и сам угол:

$\angle BAC = \angle(\overline{AB}; \overline{AC}) = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) \approx ...$, ну что же, похоже на правду, желающие могут приложить транспортир, у кого он есть.

Внимание! При выполнении этого пункта **лучше не использовать** формулы ориентированного угла между прямыми, так как они всегда дают острый угол.

4) Составим уравнение прямой l, проходящей через точку C параллельно прямой AB. Это стандартная задача, и мы ленимся отработать её вновь!

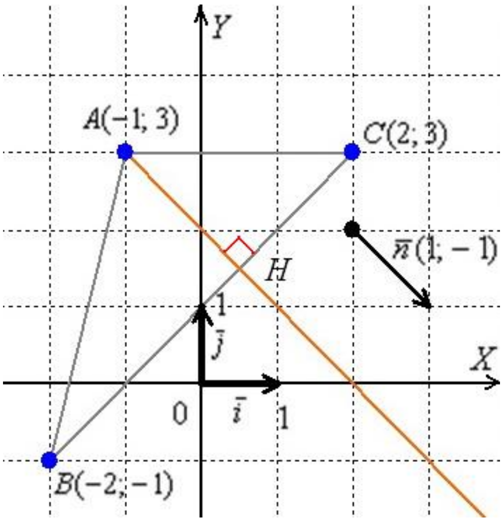


Из общего уравнения прямой $AB: 4x - y + 7 = 0$ вытащим направляющий вектор $\overline{p}(1;4)$. Составим уравнение прямой l по точке … и направляющему вектору …:

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{4}$$
$$4(x-2) = y-3$$
$$4x-8 = y-3$$
$$l: 4x-y-5=0$$

5) Составим уравнение высоты AH и найдём её длину.

Первую часть задания мы тоже решали:



Из уравнения стороны $BC: x-y+1=0$ снимаем вектор нормали $\overline{n}(1;-1)$. Уравнение высоты AH составим по точке … и направляющему вектору …:

$$\frac{x-(-1)}{1} = \frac{y-3}{-1}$$
$$-(x+1) = y-3$$
$$-x-1 = y-3$$
$$AH: x+y-2=0$$

Обратите внимание, что координаты точки H нам не известны.

Иногда уравнение высоты находят из соотношения угловых коэффициентов перпендикулярных прямых: $k_{AH} = -\frac{1}{k_{BC}}$. В данном случае $k_{BC} = 1$, тогда: $k_{AH} = -\frac{1}{1} = -1$. Уравнение высоты AH составим по точке $A(-1;3)$ и угловому коэффициенту $k_{AH} = -1$:

$$y-3 = -1\cdot(x-(-1))$$
$$y-3 = -(x+1)$$
$$y-3 = -x-1$$
$$AH: x+y-2=0$$

Длину высоты можно найти двумя способами.

Существует окольный путь:

а) находим H – точку пересечения высоты и стороны BC;

б) находим длину отрезка AH по двум известным точкам.

Но зачем? – ведь есть удобная формула расстояния от точки $A(-1;3)$ до прямой $BC: x-y+1=0$:

$$|AH|=\rho(A;BC)=\ldots=\frac{3\sqrt{2}}{2}\text{ 2,2 ед.}\approx 2{,}12\text{ ед.}$$

6) Вычислим площадь треугольника. Используем «школьную» формулу:

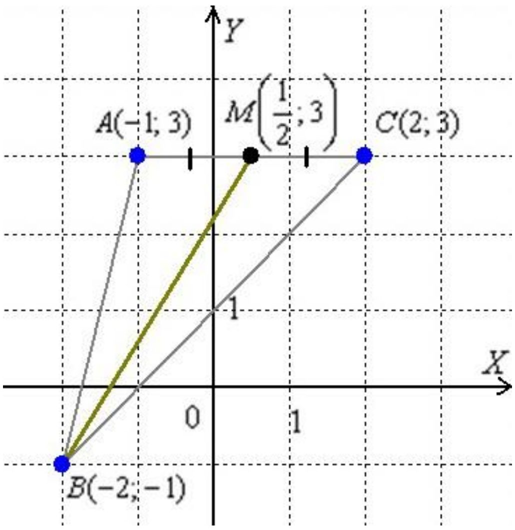
$$S_\Delta=\frac{1}{2}\cdot|BC|\cdot|AH|=\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{2}\cdot\frac{3\sqrt{2}}{2}=6\text{ ед.}^2$$

7) Уравнение медианы BM составим в два шага:

а) Найдём точку M – середину стороны AC. Используем формулы координат середины отрезка. Известны концы $A(-1;3), C(2;3)$, и тогда середина:

$$x_M=\ldots=\frac{1}{2},\quad y_M=\ldots=3\quad\Rightarrow\quad M\left(\frac{1}{2};3\right)$$

б) Уравнение медианы BM составим по точкам $B(-2;-1), M\left(\frac{1}{2};3\right)$:



$$\frac{x-(-2)}{\frac{1}{2}-(-2)}=\ldots$$

$$\frac{x+2}{\frac{5}{2}}=\ldots$$

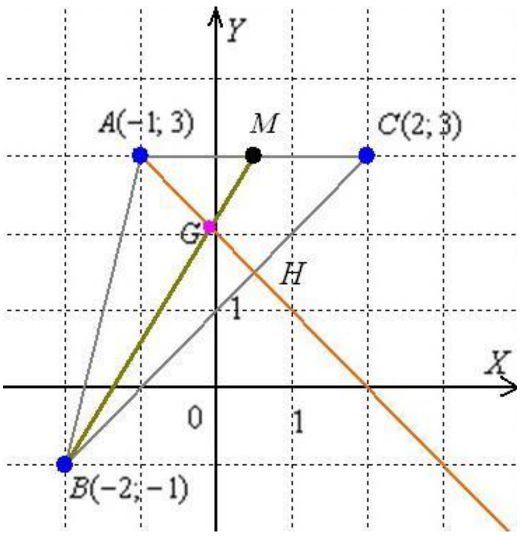
$$\ldots=\frac{5}{2}(y+1)$$

$$8(x+2)=5(y+1)$$

$$8x+16=5y+5$$

$BM: 8x-5y+11=0$ – для **проверки** подставим координаты точек B, M.

8) Найдём точку пересечения $G=AH\cap BM$ высоты и медианы:



$$G:\begin{cases}x+y-2=0\\8x-5y+11=0\end{cases}\Rightarrow\ldots\text{в}$$

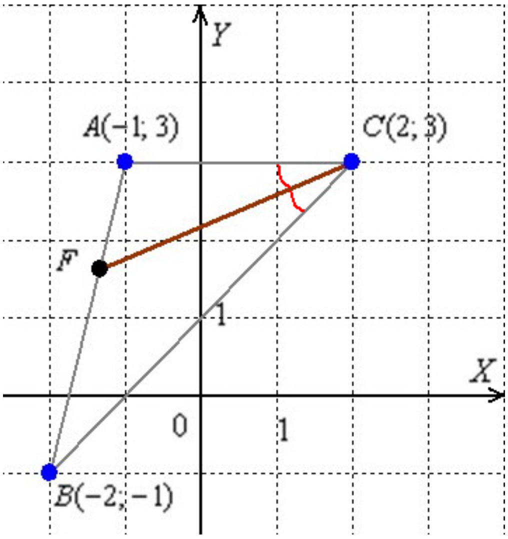
Первое уравнение умножили на 5, складываем их почленно:

$13x+1=0\ \Rightarrow\ x=-\frac{1}{13}$ – подставим в первое уравнение:

$$-\frac{1}{13}+y-2=0\ \Rightarrow\ y=\frac{27}{13}$$

…

9) Биссектриса делит угол пополам:



Из свойств биссектрисы внутреннего угла следует соотношение длин следующих отрезков:

…

Длины сторон уже найдены в предыдущих пунктах: $|AC| = 3,\ |BC| = 4\sqrt{2}$.

Таким образом, $\lambda = \dfrac{|AF|}{|BF|} = \dfrac{3}{4\sqrt{2}}$. Координаты точки F найдём по формулам деления отрезка в данном отношении. Да, параметр «лямбда» получился просто сказочным, ну а кому сейчас легко? Точки $A(-1; 3),\ B(-2; -1)$ известны и понеслась нелёгкая:

$$x_F = \ldots = \frac{\dfrac{-4\sqrt{2}-6}{4\sqrt{2}}}{\dfrac{4\sqrt{2}+3}{4\sqrt{2}}} = \frac{-4\sqrt{2}-6}{4\sqrt{2}+3} = \frac{(-4\sqrt{2}-6)(4\sqrt{2}-3)}{(4\sqrt{2}+3)(4\sqrt{2}-3)} =$$

$$= \frac{-32+12\sqrt{2}-24\sqrt{2}+18}{32-9} = \frac{-12\sqrt{2}-14}{23} \approx -1{,}35$$

Примечание: *на последнем шаге я умножил числитель и знаменатель на сопряжённое выражение* $(4\sqrt{2}-3)$ *– чтобы использовать формулу* $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ *и избавиться от иррациональности в знаменателе.*

Разбираемся со второй координатой:

$$y_F = \frac{y_A + \lambda \cdot y_B}{1+\lambda} = \frac{3 + \dfrac{3}{4\sqrt{2}} \cdot (-1)}{1 + \dfrac{3}{4\sqrt{2}}} = \frac{\dfrac{12\sqrt{2}-3}{4\sqrt{2}}}{\dfrac{4\sqrt{2}+3}{4\sqrt{2}}} = \frac{12\sqrt{2}-3}{4\sqrt{2}+3} = \frac{(12\sqrt{2}-3)(4\sqrt{2}-3)}{(4\sqrt{2}+3)(4\sqrt{2}-3)} =$$

$$= \frac{96-36\sqrt{2}-12\sqrt{2}+9}{32-9} = \frac{-48\sqrt{2}+105}{23} \approx 1{,}61$$

Таким образом: $F\left(\dfrac{-12\sqrt{2}-14}{23}; \dfrac{-48\sqrt{2}+105}{23}\right)$

И предчувствие вас не обмануло, уравнение биссектрисы CF составим по точкам $C(2; 3),\ F\left(\dfrac{-12\sqrt{2}-14}{23}; \dfrac{-48\sqrt{2}+105}{23}\right)$ по формуле $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$:

$$\frac{x-2}{\dfrac{-12\sqrt{2}-14}{23} - 2} = \frac{y-3}{\dfrac{-48\sqrt{2}+105}{23} - 3}$$

обратите внимание на технику упрощений:

$$\frac{23(x-2)}{-12\sqrt{2}-14-46}=\frac{23(y-3)}{-48\sqrt{2}+105-69}$$

$$\frac{x-2}{-12\sqrt{2}-60}=\frac{y-3}{-48\sqrt{2}+36}$$

$$-12(4\sqrt{2}-3)(x-2)=-12(\sqrt{2}+5)(y-3)$$

$$(4\sqrt{2}-3)x-2(4\sqrt{2}-3)=(\sqrt{2}+5)y-3(\sqrt{2}+5)$$

$$(4\sqrt{2}-3)x-8\sqrt{2}+6=(\sqrt{2}+5)y-3\sqrt{2}-15$$

$$CF:(4\sqrt{2}-3)x-(\sqrt{2}+5)y+21-5\sqrt{2}=0$$

Проверил, всё сходится. На практике, конечно, вычисления почти всегда будут проще. Никого не хотел запугать, так уж получилось =)

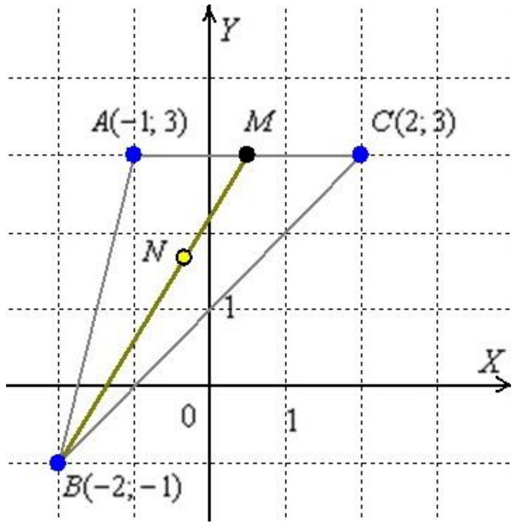
10) Найдём центр тяжести треугольника.

Но сначала поймём, что такое центр тяжести плоской фигуры. Мысленно вырежьте из тонкого однородного картона любую фигуру. …Почему-то фигура зайца в голову пришла. Так вот: если слегка насадить данную фигуру центром тяжести (какой же я изверг =)) на вертикально расположенную иголку, то теоретически фигура не должна свалиться.

Центром тяжести треугольника является точка пересечения его медиан. В треугольнике три медианы и пересекаются они в одной точке. Из пункта 7 нам уже известна одна из медиан: $BM:8x-5y+11=0$. Как решить задачу?

Напрашивается очевидный алгоритм: можно найти уравнение второй медианы (любой из двух оставшихся) и точку пересечения этих медиан. **Но есть путь короче!** Нужно только знать полезное свойство:

Точка пересечения медиан делит каждую из медиан в отношении $2:1$, считая от вершины треугольника. Поэтому справедливо отношение $\lambda=\frac{|BN|}{|NM|}=\frac{2}{1}=2$



Нам известны концы отрезка – точки $B(-2;-1)$ и $M\left(\frac{1}{2};3\right)$.

По формулам деления отрезка в данном отношении:

$$x_N=\ldots\frac{-2+2\cdot\frac{1}{2}}{1+2}=-\frac{1}{3}$$

$$y_N=\frac{y_B+\ldots}{1+\lambda}=\ldots=\frac{5}{3}$$

Таким образом, центр тяжести треугольника: $N\left(-\frac{1}{3};\frac{5}{3}\right)$

И заключительный пункт задачи, для освоения которого нужно уметь решать недавно разобранные линейные неравенства:

11) Составим систему линейных неравенств, определяющих треугольник.

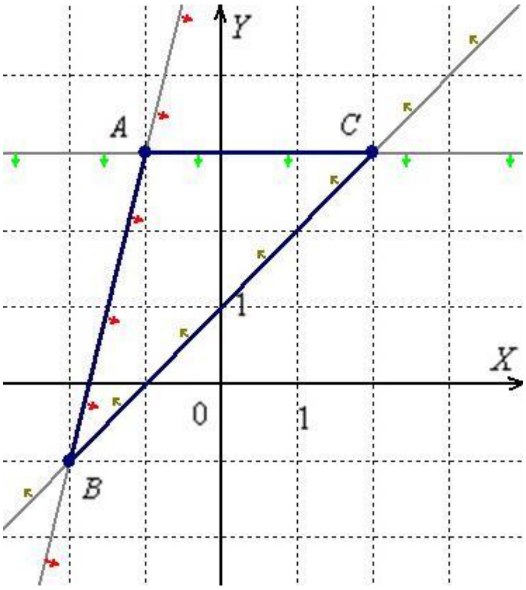
Для удобства я перепишу найденные уравнения сторон:

$AB: 4x - y + 7 = 0$

$AC: y - 3 = 0$

$BC: x - y + 1 = 0$

Рассмотрим прямую $AB: 4x - y + 7 = 0$. Треугольник лежит в полуплоскости, где находится вершина C. Составим вспомогательный многочлен $p(x; y) = 4x - y + 7$ и вычислим его значение в точке $C(2; 3)$: $p(2; 3) = 4 \cdot 2 - 3 + 7 = 12 > 0$. Поскольку сторона AB принадлежит треугольнику, то неравенство будет нестрогим: $4x - y + 7 \geq 0$



Внимание! Если вам не понятен этот алгоритм, то обратитесь к Задаче 90.

Рассмотрим прямую $y - 3 = 0$. Треугольник расположен ниже данной прямой, поэтому очевидно неравенство $y - 3 \leq 0$.

И, наконец, для $BC: x - y + 1 = 0$ составим многочлен $p(x; y) = x - y + 1$, в который подставим координаты точки …: $p(-1; 3) = -1 - 3 + 1 = -3 < 0$.

Таким образом, получаем третье неравенство: $x - y + 1 \leq 0$.

Итак, треугольник ABC определяется следующей системой линейных неравенств:

…

Готово.

Какой можно сделать вывод?

Многие задачи аналитической геометрии прозрачны и просты, главное, не допустить вычислительных ошибок.

Следует отметить, что по настоящему трудные задачи в аналитической геометрии встречаются редко, и вы справитесь практически с любой из них! Главное, придерживаться методики решения и проявить маломальское упорство.

Ну что, может ещё задачку? Да ладно, не надо стесняться, я же по глазам вижу, что хотите =)

Но сейчас на очереди другая увлекательная тема, продолжаем изучать геометрию плоскости:

3. Линии второго порядка

И сразу разбираемся в терминах:

3.1. Понятие алгебраической линии и её порядка

Линию на плоскости называют ***алгебраической***, если в аффинной системе координат её уравнение имеет вид $F(x;\ y)=0$, где $F(x;\ y)$ – многочлен, состоящий из слагаемых вида $kx^m y^n$, где k – действительное число, m, n – целые неотрицательные числа.

Как видите, уравнение алгебраической линии не содержит синусов, косинусов, логарифмов и прочего функционального бомонда. Только «иксы» и «игреки» в целых неотрицательных степенях (т.е. корней и переменных в знаменателе тоже нет).

Порядок линии равен **максимальному значению** $m+n$ входящих в него слагаемых $kx^m y^n$. Так, в уравнении прямой $Ax+By+C=0$:

– слагаемое Ax содержит «икс» в 1-й степени;
– слагаемое By содержит «игрек» в 1-й степени;
– в слагаемом C переменные отсутствуют, поэтому сумма их степеней равна нулю.

Максимальное значение равно 1, и поэтому **прямая – это** ***линия первого порядка***.

Общее уравнение линии второго порядка имеет вид:

$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$, где A, B, C, D, E, F – произвольные действительные числа *(B, D, E принято записывать с множителем-«двойкой»)*, причём коэффициенты A, B, C не равны одновременно нулю.

Почему порядок этой линии равен двум?

– слагаемое Ax^2 содержит «икс» во 2-й степени;
– у слагаемого $2Bx^1y^1$ сумма степеней равна: 1 + 1 = 2;
– слагаемое Cy^2 содержит «игрек» во 2-й степени;
– все остальные слагаемые – *меньшей* степени.

Максимальное значение 2, и поэтому порядок линии равен двум.

Если к этому уравнению дополнительно приплюсовать, скажем, x^2y, то оно уже будет определять ***линию третьего порядка***. Очевидно, что ***общее уравнение*** *линии третьего порядка* содержит «полный комплект» слагаемых, сумма степеней переменных в которых равна трём:

$Kx^3+Lx^2y+Mxy^2+Ny^3+Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$, где коэффициенты K, L, M, N не равны одновременно нулю.

В том случае, если добавить одно или несколько слагаемых, которые содержат $x^4,\ x^3y,\ x^2y^2,\ xy^3,\ y^4$, то речь уже зайдёт о ***линии четвёртого порядка***, и так далее.

С алгебраическими линиями 3-го, 4-го и более высоких порядков нам придется столкнуться ещё не раз, в частности, при знакомстве с полярной системой координат. Ну а пока осваиваем порядок второй. Далее под словом «линия» по умолчанию будет подразумеваться алгебраическая линия на плоскости, и для простоты будем считать, что все события происходят в декартовой системе координат $(O, \bar{i}, \bar{j})$.

3.2. Классификация линий второго порядка

Вернёмся к общему уравнению $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ и вспомним его простейшие школьные вариации. В качестве примера напрашивается ***парабола*** $y = x^2$, уравнение которой легко привести к общему виду: $x^2 - y = 0$. Однако не всё так гладко….

Существенный недостаток общего уравнения состоит в том, что почти всегда не понятно, какую линию оно задаёт. Даже в простейшем случае $xy - 1 = 0$ не сразу сообразишь, что это гипербола. Поэтому в курсе аналитической геометрии рассматривается типовая задача **приведения уравнения линии 2-го порядка к *каноническому виду*** – виду, в котором сразу понятно, что это за линия и как она выглядит.

И если любая *линия 1-го порядка* представляет собой прямую, то на втором этаже нас уже ждёт более разнообразная компания. С помощью специального комплекса действий *(который мы освоим позже)* общее уравнение линии второго порядка $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ приводится к одному из следующих видов *(a и b – положительные действительные числа)*:

1) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b)$ – каноническое уравнение эллипса;

2) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ – каноническое уравнение гиперболы;

3) $y^2 = 2px \quad (p > 0)$ – каноническое уравнение параболы;

4) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ – **мнимый** эллипс;

5) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ – пара пересекающихся прямых;

6) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ – пара мнимых пересекающихся прямых с единственной действительной точкой пересечения в начале координат;

7) $y^2 - a^2 = 0$ – пара параллельных прямых;

8) $y^2 + a^2 = 0$ – пара мнимых параллельных прямых;

9) $y^2 = 0$ – пара совпавших прямых.

Возможно, у вас сложилось впечатление неполноты списка. Например, в пункте 7 уравнение $y^2 - a^2 = 0$ задаёт пару прямых $y = -a, y = a$, параллельных оси OX, и возникает вопрос: а где же уравнение $x^2 - a^2 = 0$, определяющее прямые $x = -a, x = a$, параллельные оси ординат? Ответ: оно хоть и эквивалентно, но **не считается каноническим**. Прямые $x = -a, x = a$ представляют собой тот же самый случай $y = -a, y = a$, повёрнутый на 90 градусов, и дополнительная запись $x^2 - a^2 = 0$ в классификации избыточна, поскольку не несёт ничего принципиально нового.

Таким образом, существует девять и только девять различных видов линий второго порядка, и особый интерес представляют *эллипс*, *гипербола* и *парабола*. Рассмотрим их по порядку:

3.3. Эллипс и его каноническое уравнение

Во-первых, правописание…. Пожалуйста, не повторяйте ошибок некоторых юзеров, которые запрашивают «элипс», «эллибз» и даже «элебс» ☺ ***Эллипс.***

Каноническое уравнение эллипса имеет вид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, где a, b – положительные действительные числа, причём $a>b$. Определение эллипса я сформулирую чуть позже, а пока самое время отдохнуть от говорильни и решить распространённую задачу:

➢ Как построить эллипс?

Да, вот взять его и просто начертить. Задание встречается часто, и значительная часть студентов не совсем грамотно справляются с чертежом:

Задача 96

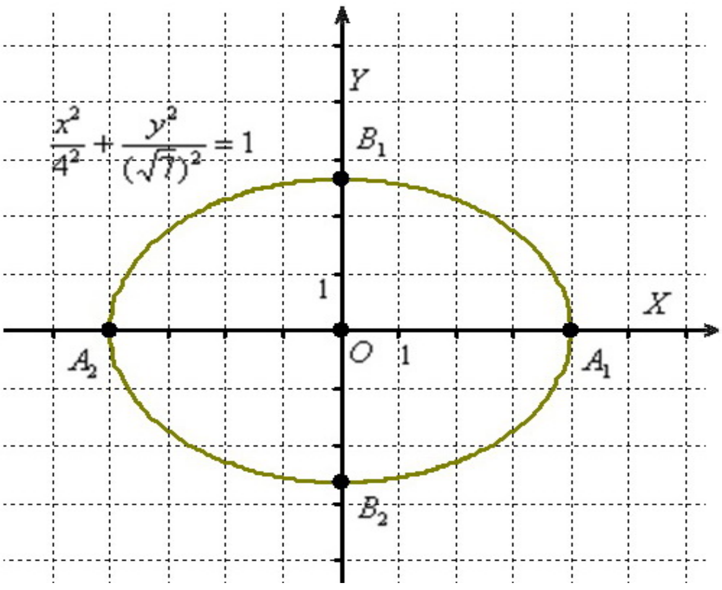
Построить эллипс, заданный уравнением $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$

Решение: сначала приведём уравнение к каноническому виду:

…

Зачем приводить? Большое преимущество канонического уравнения $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ заключается в том, что оно позволяет моментально определить ***вершины эллипса***, которые находятся в точках $A_1(a;0), A_2(-a;0), B_1(0;b), B_2(0;-b)$. Легко заметить, что координаты каждой из этих точек удовлетворяют уравнению $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

В нашем случае …:



<u>Число</u> … называют ***большой полуосью*** эллипса;

<u>число</u> … – ***малой полуосью***;

<u>отрезок</u> … называют ***большой осью*** эллипса;

<u>отрезок</u> … – ***малой осью***.

Очевидно, что значения «а» и «бэ» (в нашем примере $a=4$, $b=\sqrt{7}$) вместе центром симметрии (в нашем примере $O(0;0)$) однозначно определяют эллипс.

Всё выглядит красиво, ладно, но есть один нюанс: я выполнил чертёж с помощью *Приложения* ***Геометрический Калькулятор***. И вы тоже можете так поступить.

Однако в суровой действительности на столе лежит клетчатый листок бумаги, и на наших руках водят хоровод мыши. Люди с художественным талантом, конечно, могут поспорить, но мыши есть и у вас (правда, поменьше). Поэтому для ручного построения чертежа крайне желательно найти дополнительные точки.

Существует два подхода к построению эллипса – геометрический и алгебраический. Построение с помощью циркуля и линейки мне не нравится по причине замороченного алгоритма и существенной загромождённости чертежа. В случае крайней необходимости обратитесь к учебнику, а в реальности же гораздо удобнее воспользоваться средствами алгебры. Из уравнения эллипса $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$ на черновике быстренько выражаем:

$$\frac{y^2}{7}=1-\frac{x^2}{16} \quad \Rightarrow \quad y^2=7\cdot\frac{(16-x^2)}{16}$$

Далее уравнение распадается на две функции:

… – определяет верхнюю дугу эллипса;

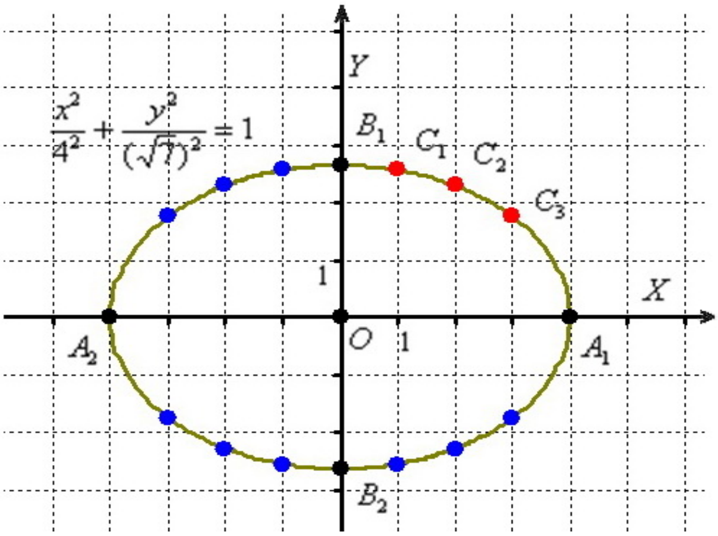
…– определяет нижнюю дугу эллипса.

Каноничный эллипс симметричен относительно координатных осей, а также относительно начала координат. И это отлично! – ибо работы будет в 4 раза меньше. Рассмотрим 1-ю координатную четверть, соответствующую функцию …, и здесь напрашивается найти точки с абсциссами $x=1,\ x=2,\ x=3$:

$$C_1: x=1 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{1}{4}\sqrt{7\cdot(16-1^2)}=\frac{\sqrt{105}}{4}\approx 2{,}56;$$

$$C_2: x=2 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{1}{4}\sqrt{7\cdot(16-2^2)}=\frac{\sqrt{84}}{4}\approx 2{,}29;$$

$$C_3: x=3 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{1}{4}\sqrt{7\cdot(16-3^2)}=\frac{7}{4}=1{,}75.$$



Безусловно, приятно и то, что если допущена серьёзная ошибка в вычислениях, то это сразу же выяснится в ходе построения.

Отметим на чертеже точки C_1, C_2, C_3 (красный цвет), симметричные точки на остальных дугах (синий цвет) и аккуратно соединим линией всю компанию.

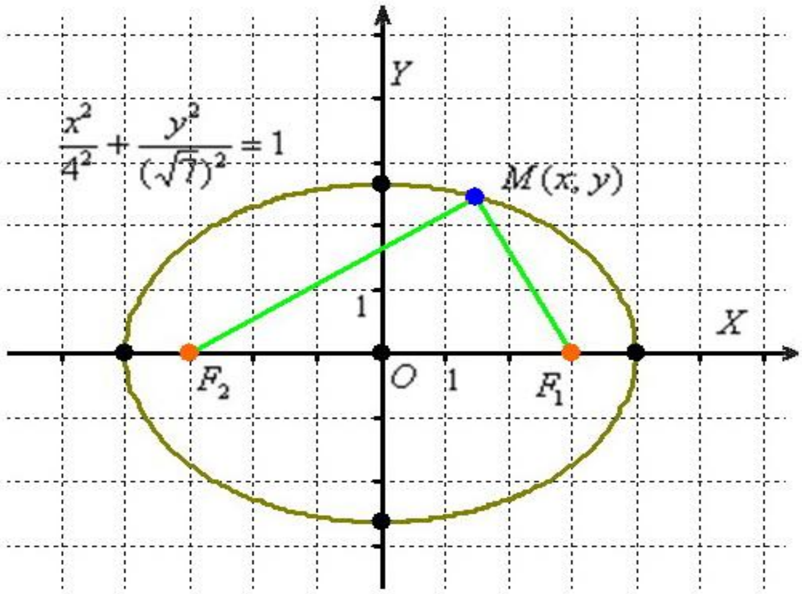
Первоначальный набросок лучше прочертить тонко-тонко, и только потом придать нажим карандашу.

В результате должен получиться вполне симпатичный эллипс. Кстати, не желаете ли узнать, что это за кривая?

➢ Определение эллипса

Эллипс – это частный случай овала, и его строгое определение таково:

Эллипс **– это множество всех точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек F_1, F_2, называемых *фокусами* эллипса, равна длине большой оси: $2a$. При этом расстояния между фокусами меньше этого значения $|F_1F_2| < 2a$.** Сейчас станет понятнее:



Представьте, что синяя точка «ездит» по эллипсу. Так вот, какую бы точку эллипса $M(x; y)$ мы ни взяли, сумма длин отрезков F_1M, F_2M всегда будет одной и той же:

$|F_1M|+|F_2M|=2a=const$

Убедимся, что в нашем примере значение суммы $|F_1M|+|F_2M|$ будет равно 8. Мысленно поместите точку «эм» в правую вершину эллипса, где хорошо видно, что:

$|F_1M|+|F_2M|=1+7=8=2a$

На определении эллипса основан ещё один способ его вычерчивания. Пожалуйста, возьмите ватман либо большой лист картона и приколотите его к столу двумя гвоздиками. Это будут фокусы F_1, F_2. К торчащим шляпкам гвоздей привяжите зелёную нитку и до упора оттяните её карандашом. Гриф карандаша окажется в некоторой точке M, которая принадлежит эллипсу. Теперь начинайте вести карандаш по листу бумаги, сохраняя зелёную нить сильно натянутой. Продолжайте процесс до тех пор, пока не вернётесь в исходную точку…, отлично! – чертёж можно сдать на проверку ~~врачу~~ преподавателю =)

➢ Как найти фокусы эллипса?

В приведённом примере я изобразил «готовенькие» точки фокуса, и сейчас мы научимся добывать их из недр фигуры.

Если эллипс задан каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, то его фокусы имеют координаты …, где $c=\sqrt{a^2-b^2}$ – это **расстояние от каждого из фокусов до центра симметрии эллипса**.

Вычисления простецкие:

…, таким образом: $F_1(3; 0), F_2(-3; 0)$

Внимание! Со значением $c=\sqrt{a^2-b^2}$ нельзя отождествлять конкретные координаты фокусов! Повторюсь, что это <u>РАССТОЯНИЕ от каждого из фокусов до центра</u> (который в общем случае не обязан располагаться именно в начале координат). Иными словами, эллипс можно перенести в другое место и значение $2c$ останется неизменным, в то время как фокусы, естественно, поменяют свои координаты.

➢ Эксцентриситет эллипса и его геометрический смысл

Эксцентриситетом эллипса называют отношение $\varepsilon = \frac{c}{a}$ *(греч. буква «эпсилон»)*, которое может принимать значения в пределах $0 \le \varepsilon < 1$.

В нашем примере: $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{3}{4}$

Выясним, как форма эллипса зависит от его эксцентриситета. Для этого **зафиксируем левую и правую вершины эллипса** (грубо говоря, ширина эллипса будет оставаться постоянной). У рассматриваемого эллипса *(см. рис. выше)* большая полуось равна $a = 4$ и формула примет вид $\varepsilon = \frac{c}{4}$.

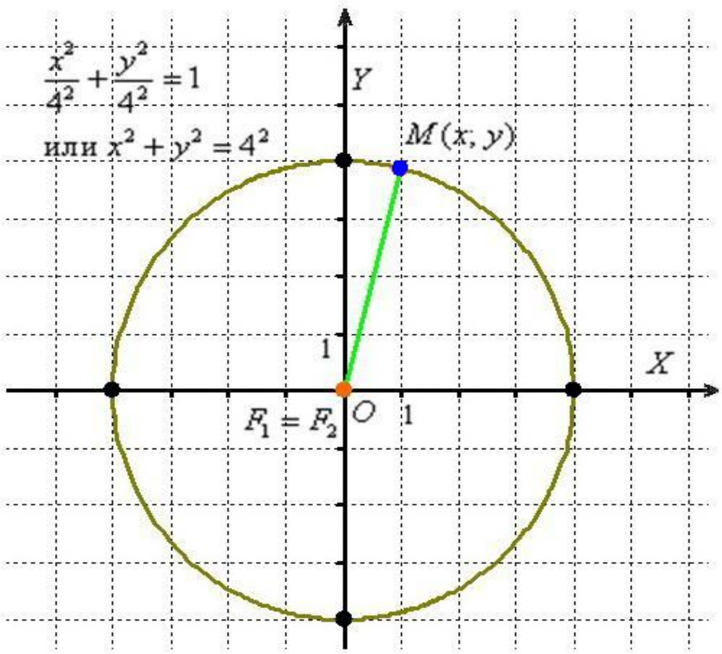
Начнём приближать значение эксцентриситета к единице. Это возможно только в том случае, если $c \to 4$. А что это значит? …вспоминаем про фокусы …. Это значит, что фокусы эллипса будут «разъезжаться» к боковым вершинам. И, поскольку «зелёные» отрезки F_1M, F_2M «не резиновые», то эллипс неизбежно начнёт сплющиваться, превращаясь всё в более и более тонкую сосиску, нанизанную на ось OX.

Таким образом, **чем ближе значение эксцентриситета эллипса к единице, тем эллипс более продолговат**.

Теперь смоделируем противоположный процесс: фокусы эллипса … «пошли навстречу друг другу», приближаясь к центру. Это означает, что значение «цэ» становится всё меньше и, соответственно, эксцентриситет стремится к нулю: $\varepsilon = \frac{c}{4} \to 0$.

При этом отрезкам F_1M, F_2M будет, наоборот – «становиться тесно» и они начнут «выталкивать» линию эллипса вверх и вниз.

Таким образом, **чем ближе значение эксцентриситета к нулю, тем эллипс всё больше похож**…, смотрим на предельный случай $c = 0$, когда фокусы успешно воссоединились в начале координат:



Окружность **– это частный случай эллипса**.

И действительно, в случае равенства полуосей каноническое уравнение эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ принимает вид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$, который элементарно преобразуется к $x^2 + y^2 = a^2$ – хорошо известному из школьного курса уравнению окружности с центром в начале координат ***радиуса*** «а».

На практике чаще используют запись с «говорящей» буквой «эр»: $x^2 + y^2 = r^2$.

Заметьте, что определение эллипса остаётся полностью корректным: фокусы совпали $F_1 = F_2$, и сумма длин совпавших отрезков $|F_1M| + |F_2M|$ для каждой точки окружности – есть величина постоянная, равная $2r$. Так как расстояние между фокусами $2c = 0$, то **эксцентриситет** $\varepsilon = \frac{c}{a}$ **любой окружности равен нулю**.

Строится окружность легко и быстро, достаточно вооружиться циркулем. Тем не менее, иногда бывает нужно выяснить координаты некоторых её точек, в этом случае уравнение $x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow y^2 = r^2 - x^2$ удобно привести к бодрому «матановскому» виду:

$y = \sqrt{r^2 - x^2}$ – функция верхней полуокружности;

$y = -\sqrt{r^2 - x^2}$ – функция нижней полуокружности.

После чего подставляем нужные значения «икс» и получаем «игреки».

Творческое задание для самостоятельного решения, а то как-то вы расслабились:)

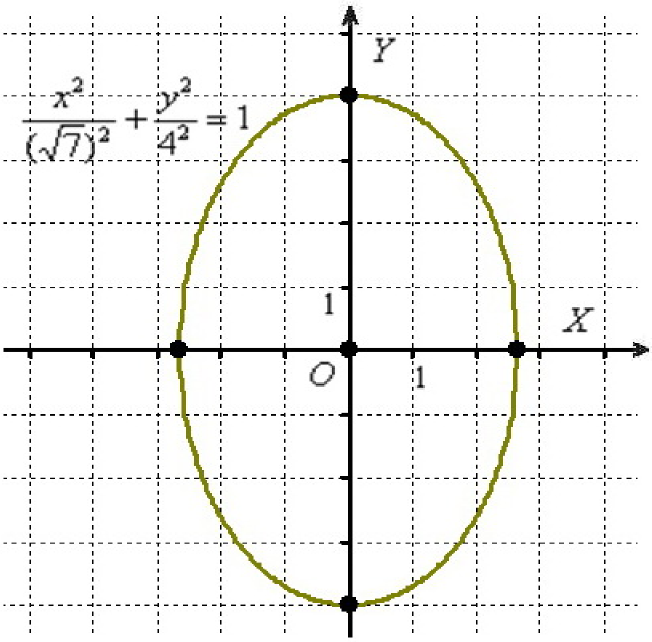
Задача 97

Составить каноническое уравнение эллипса, центр которого находится в начале координат, если известен один из его фокусов $F_2(-2;0)$ и малая полуось $b = 2$. Найти вершины, дополнительные точки и выполнить чертеж. Вычислить эксцентриситет.

Решение и чертёж в конце книги

➢ Поворот и параллельный перенос эллипса

Вернёмся к каноническому уравнению эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, а именно к условию $a > b$, загадка которого уже давно терзает пытливые умы. Вот мы рассмотрели эллипс $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{7})^2} = 1$, но разве на практике не может встретиться уравнение $\frac{x^2}{(\sqrt{7})^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$? Ведь здесь $\sqrt{7} < 4$, однако, это вроде бы как тоже эллипс! И да, это действительно эллипс, развеем мистику:



В результате построения получен наш родной эллипс, повёрнутый на 90 градусов. То есть, $\frac{x^2}{(\sqrt{7})^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$ – это **неканоническая запись** эллипса $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{7})^2} = 1$.

Запись!

– уравнение $\frac{x^2}{(\sqrt{7})^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$ **не задаёт какой-то другой эллипс**, поскольку на оси OX не существует точек F_1, F_2 (фокусов), которые бы удовлетворяли определению эллипса.

Как быть, если такой вариант встретился на жизненном пути? В том случае, если вам предложено построить эллипс, то, наверное, лучше построить его в нестандартном виде. С вершинами и дополнительными точками, думаю, трудностей не возникнет. Но если требуется найти фокусы, эксцентриситет и т.д., то **настоятельно рекомендую** начать (или продолжить после чертежа) решение примерно так:

«Повернём эллипс на 90 градусов и перепишем его уравнение $\frac{x^2}{(\sqrt{7})^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$ *в каноническом виде* $\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{(\sqrt{7})^2}=1$*»* – дальше по обычной схеме.

Впрочем, эрудиты могут встать на скользкий путь путаницы, модифицировав все расчёты с учётом поворота. Но всё равно не советую. Ведь эллипс можно повернуть и на другой угол =)

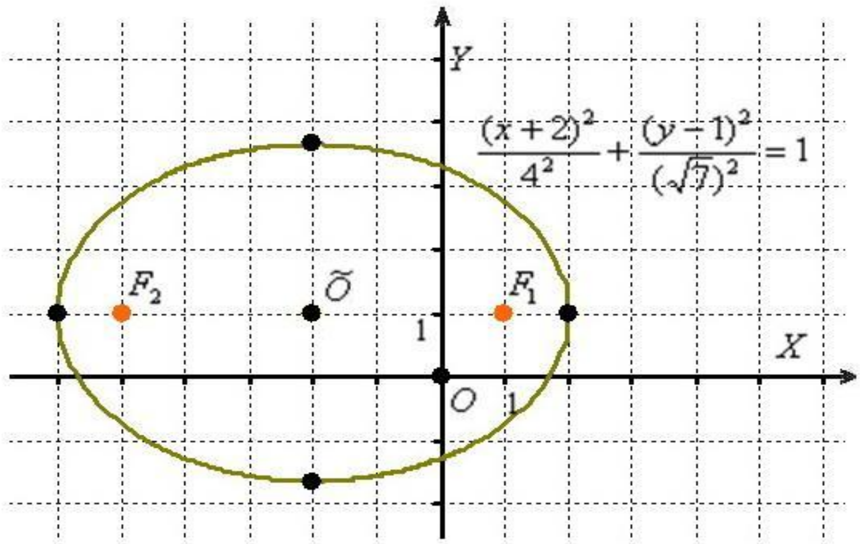
***! Примечание**: в теории принято поворачивать не саму фигуру, а оси! И если от вас требуется именно **ПРИВЕСТИ уравнение к каноническому виду**, то решение, строго говоря, следует оформить иначе: «Перейдём к новой прямоугольной системе координат* $O\tilde{X}\tilde{Y}$*, повернув координатные оси на 90 градусов против часовой стрелки, и запишем уравнение эллипса в каноническом виде: ...».*

В практических задачах чаще встречается ***параллельный перенос*** эллипса:

Уравнение ... задаёт эллипс с большой полуосью «а», малой полуосью «бэ» и центром симметрии в точке $\tilde{O}(x_0;\, y_0)$.

Изобразим на чертеже эллипс $\frac{(x+2)^2}{4^2}+\frac{(y-1)^2}{(\sqrt{7})^2}=1$. Согласно формуле, ... и наш подопытный эллипс вполне комфортно «устроился» в точке $\tilde{O}(-2;1)$.

Значения $a=4, b=\sqrt{7}, c=3$ остались прежними, а вот фокусы, разумеется, «уехали» вместе с эллипсом, и их координаты придётся находить с поправкой на соответствующие сдвиги *(расчёты справа)*:



...

$\Downarrow$

$F_1(c-2;1),\ F_2(-c-2;1)$

$\Downarrow$

$F_1(3-2;1),\ F_2(-3-2;1)$

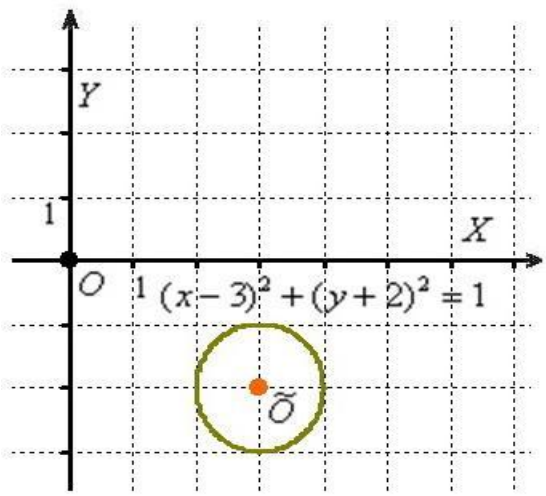
$\Downarrow$

$F_1(1;1),\ F_2(-5;1)$

Здесь всё обходится значительно проще, чем при повороте, и если по условию не нужно приводить уравнение к каноническому виду, то лично я предпочту оставить его в виде $\frac{(x+2)^2}{4^2}+\frac{(y-1)^2}{(\sqrt{7})^2}=1$. Что делать, если приводить нужно? «Чайникам» в большинстве случаев простят фразу: *«Осуществим параллельный перенос эллипса в начало координат и перепишем уравнение … в каноническом виде:* $\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{(\sqrt{7})^2}=1$*»*. Но **строгий подход** предполагает параллельный перенос **не самой фигуры, а координатных осей**! Поэтому людям, изучающим математику углублённо, гораздо лучше сказать примерно следующее: *«С помощью параллельного переноса системы OXY перейдём к новой прямоугольной системе координат $\widetilde{O}\widetilde{X}\widetilde{Y}$ с началом в точке $\widetilde{O}(-2;1)$, и запишем уравнение эллипса в каноническом виде* $\frac{\widetilde{x}^2}{4^2}+\frac{\widetilde{y}^2}{(\sqrt{7})^2}=1$*»*.

На самом деле с упрощённой версией рассматриваемой формулы мы знакомы ещё со школьных времён: уравнение $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$ задаёт окружность радиуса r с центром в точке $\widetilde{O}(-2;1)$.

Освежая ностальгические воспоминания, изобразим на чертеже окружность, заданную уравнением $(x-3)^2+(y+2)^2=1$:



В исследовательских целях приведём это уравнение к общему виду. Выполним возведение в квадрат по формулам $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$ и приведём подобные слагаемые:

$$(x-3)^2+(y+2)^2=1$$

$$x^2-6x+9+y^2+4y+4=1$$

$x^2-6x+y^2+4y+12=0$ – как правило, в таком обличье уравнение и встречается в природе.

И в практических задачах часто нужно выполнить обратное действие – **выделить полные квадраты**, «сконструировав» трёхчлены и применив формулы в обратном порядке: ….

Выполняем это креативное задание самостоятельно:

Задача 98

Построить график линии, заданной уравнением $x^2-2y+y^2-3=0$

Решение и чертёж в конце книги.

На практике эллипс *(как, впрочем, и другая линия)* может быть **одновременно** повёрнут на любой угол относительно своего канонического положения и перенесён в любую точку, отличную от начала координат. В таком случае решается более трудная версия задачи приведения линии 2-го порядка к каноническому виду, к которой я потихоньку начал вас готовить уже сейчас.

3.4. Гипербола и её каноническое уравнение

Общая структура изложения материала будет напоминать предыдущий параграф. Начнём с общего понятия гиперболы и задачи на её построение.

Каноническое уравнение гиперболы имеет вид …, где a, b – положительные действительные числа. Обратите внимание, что в отличие от эллипса, здесь не накладывается условие $a > b$, то есть, значение «а» может быть и меньше, чем «бэ».

Надо сказать, довольно неожиданно… – уравнение «школьной» гиперболы $y = \frac{1}{x}$ и близко не напоминает каноническую запись. Но эта загадка нас ещё подождёт, а пока раскинем на экране своего воображения график функции $y = \frac{1}{x}$…. Какие мысли?

У гиперболы две симметричные ветви.

У гиперболы две **асимптоты**.

Неплохой прогресс! Данными свойствами обладает любая гипербола, и сейчас вы с неподдельным восхищением заглянем в декольте этой линии:

Задача 99

Построить гиперболу, заданную уравнением $5x^2 - 4y^2 = 20$

Решение: на первом шаге приведём данное уравнение к каноническому виду $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. **Пожалуйста, запомните типовой порядок действий**. Справа необходимо получить «единицу», поэтому обе части исходного уравнения делим на 20:

$$\frac{5x^2 - 4y^2}{20} = \frac{20}{20}$$

$$\frac{5x^2}{20} - \frac{4y^2}{20} = 1$$

Здесь можно сократить обе дроби, но технически грамотнее сделать каждую из них трёхэтажной *(см. Приложение **Школьные материалы**)*:

…

и только после этого провести сокращение:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$$

Выделяем квадраты в знаменателях:

$$\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{5})^2} = 1$$

Готово.

Почему преобразования лучше проводить именно так? Ведь дроби левой части $\frac{5x^2}{20}-\frac{4y^2}{20}=1$ можно сразу сократить и получить $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$. Дело в том, что в рассматриваемом примере немного повезло: число 20 делится и на 4 и на 5. В общем случае получится что-нибудь вроде … и без 3-го этажа не обойтись: $\frac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{20}{3}}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2}=1$.

Воспользуемся плодом наших трудов – каноническим уравнением $\frac{x^2}{2^2}-\frac{y^2}{(\sqrt{5})^2}=1$:

➢ Как построить гиперболу?

Существует два подхода к построению гиперболы – геометрический и алгебраический. С практической точки зрения вычерчивание с помощью циркуля я бы даже сказал утопично, поэтому гораздо выгоднее вновь привлечь на помощь нехитрые расчёты.

Целесообразно придерживаться следующего **алгоритма** *(читайте и смотрите на чертёж, расположенный на следующей странице)*:

1) Сначала находим *асимптоты*. Если гипербола задана каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, то её асимптотами являются прямые …. В нашем случае: $y=\frac{\sqrt{5}}{2}x,\quad y=-\frac{\sqrt{5}}{2}x$. **Данный пункт обязателен!** Это принципиальная особенность чертежа, и будет грубой ошибкой, если ветви гиперболы «вылезут» за свои асимптоты.

2) Теперь находим две ***вершины гиперболы***, которые расположены на оси абсцисс в точках $A_1(a;0),\ A_2(-a;0)$. Выводится элементарно: если $y=0$, то каноническое уравнение $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ превращается в $\frac{x^2}{a^2}=1$, откуда и следует, что $x^2=a^2 \Rightarrow x=a,\ x=-a$. Наша гипербола имеет вершины $A_1(2;0),\ A_2(-2;0)$

3) Ищем дополнительные точки. Обычно хватает двух-трёх. В каноническом положении гипербола симметрична относительно начала координат и обеих координатных осей, поэтому вычисления достаточно провести для 1-й координатной четверти. Методика точно такая же, как и при построении эллипса. Из канонического уравнения $\frac{x^2}{2^2}-\frac{y^2}{(\sqrt{5})^2}=1$ на черновике выражаем:

$$\frac{y^2}{5}=\frac{x^2}{4}-1 \quad\Rightarrow\quad y^2=\frac{5}{4}(x^2-4)$$

и уравнение распадается на две функции:

$y=\frac{1}{2}\sqrt{5(x^2-4)}$ – определяет верхние дуги гиперболы (то, что нам надо);

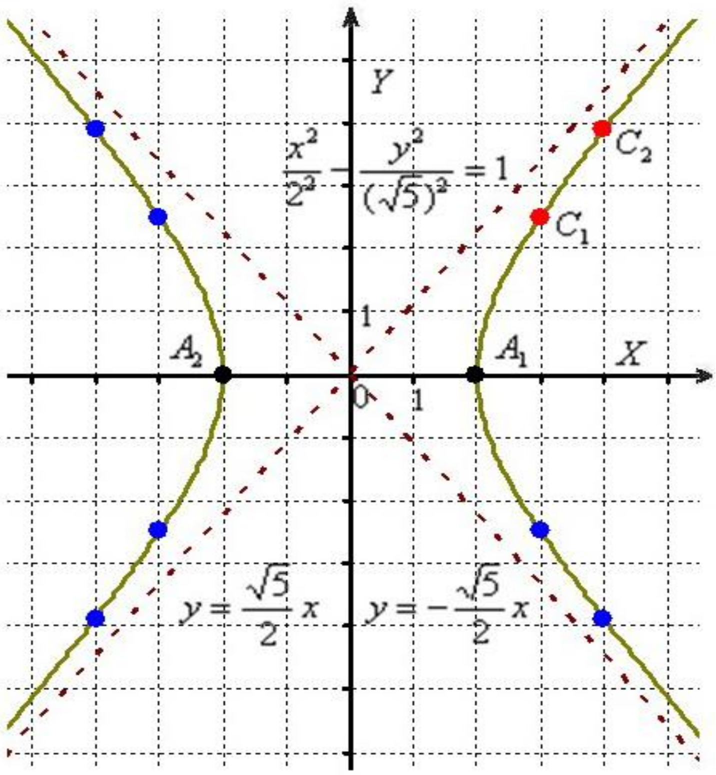
$y=-\frac{1}{2}\sqrt{5(x^2-4)}$ – определяет нижние дуги гиперболы.

Напрашивается нахождение точек с абсциссами $x=3, x=4$:

$$C_1: x=3 \Rightarrow y=\frac{1}{2}\sqrt{5(3^2-4)}=\frac{\sqrt{25}}{2}=\frac{5}{2}=2{,}5;$$

$$C_2: x=4 \Rightarrow y=\frac{1}{2}\sqrt{5(4^2-4)}=\frac{\sqrt{60}}{2}\approx 3{,}87.$$

4) Изобразим асимптоты $y=\frac{\sqrt{5}}{2}x,\quad y=-\frac{\sqrt{5}}{2}x$, вершины $A_1(2;0), A_2(-2;0)$, дополнительные C_1, C_2 и симметричные им точки в других координатных четвертях. Аккуратно соединим соответствующие точки у каждой ветви гиперболы:



Техническая трудность может возникнуть с иррациональным угловым коэффициентом $\frac{\sqrt{5}}{2}\approx 1{,}12$, но это вполне преодолимая проблема.

Отрезок … называют ***действительной осью*** гиперболы;

Число … называют ***действительной полуосью*** гиперболы;

число ... – ***мнимой полуосью***.

В нашем случае: $|A_1A_2|=4$, $a=2, b=\sqrt{5}$, и, очевидно, если гиперболу повернуть вокруг центра симметрии и / или переместить, то эти значения не изменятся.

➢ Определение гиперболы

У гиперболы, точно так же, как и у эллипса, есть две особенные точки F_1, F_2, которые называются ***фокусами***.

Не говорил, ***но на всякий случай***, *вдруг кто неверно понимает: центр симметрии и точки фокуса, разумеется, не принадлежат кривым.*

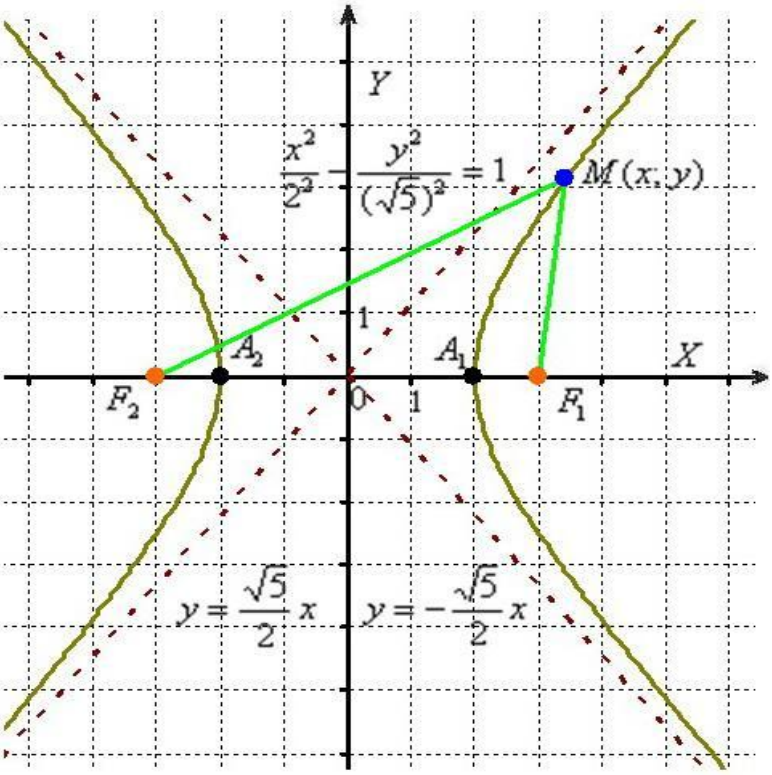
Общая концепция определения тоже похожа:

Гиперболой **называют множество всех точек плоскости, абсолютное значение разности расстояний до каждой из которых от двух данных точек F_1, F_2 – есть величина постоянная, равная расстоянию между вершинами данной гиперболы: $2a$. При этом расстояние между фокусами превосходит длину действительной оси: $|F_1F_2|>2a$.**

Иными словами, для каждой точки M гиперболы модуль разности расстояний $\big||F_1M|-|F_2M|\big|=2a$ – есть величина постоянная, равная расстоянию между вершинами

…не очень понятно? – сейчас поправим!

Представьте, что синяя точка $M(x;\, y)$ «ездит» по правой ветви гиперболы:



– так вОт, где бы мы ни находились, **модуль** разности между **длинами** отрезков F_1M, F_2M равен расстоянию между вершинами гиперболы:

…

Если точку M «перекинуть» на левую ветвь и перемещать её там, то данное значение останется неизменным.

Модуль нужен по той причине, что разность длин $|F_1M|-|F_2M|$ может быть как положительной, так и отрицательной. Для любой точки правой ветви $|F_1M|-|F_2M|<0$ (так как отрезок F_1M короче отрезка F_2M). Для любой точки M левой ветви ситуация ровно противоположная и $|F_1M|-|F_2M|>0$. Более того, ввиду очевидного свойства модуля $\big|\,|F_1M|-|F_2M|\,\big|=\big|\,|F_2M|-|F_1M|\,\big|$ – без разницы, что из чего вычитать.

Удостоверимся, что в нашем примере модуль этой разности действительно равен расстоянию между вершинами A_1, A_2. Мысленно поместите точку $M(x;\, y)$ в правую вершину гиперболы (A_1). Тогда:

$\big|\,|F_1M|-|F_2M|\,\big|=|\,1-5\,|=|-4|=4=2a$, что и требовалось проверить.

Чуть, конечно, всё занятнее, чем с эллипсом, но вполне доступно. Если что-то осталось недопонятым, то вдумчиво перечитайте вышеизложенные абзацы снова.

➢ Фокусы и эксцентриситет гиперболы

Ввиду неравенства $|F_1F_2|>2a$, фокусы гиперболы лежат «внутри» её ветвей и только там. Координаты фокусов определяются следующим образом:

Если гипербола задана каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, то РАССТОЯНИЕ от центра симметрии $O(0;\, 0)$ до каждого из фокусов рассчитывается по формуле:

$c=\sqrt{a^2+b^2}$, и, соответственно, фокусы имеют координаты ….

Для нашей гиперболы $\frac{x^2}{2^2}-\frac{y^2}{(\sqrt{5})^2}=1$: $c=\sqrt{2^2+(\sqrt{5})^2}=\sqrt{4+5}=\sqrt{9}=3$, таким образом: … *(см. рис. выше)*.

Если гиперболу переместить / повернуть, то фокусы, естественно, мигрируют вместе с ней и их координаты изменятся.

Эксцентриситетом гиперболы называют отношение $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$.

Так как расстояние от центра до фокуса больше расстояния от центра до вершины: $c > a$, то эксцентриситет гиперболы всегда больше «единицы»: $\varepsilon > 1$.

Для нашего примера: $\varepsilon = \dfrac{c}{a} = \dfrac{3}{2}$.

По аналогии с эллипсом, зафиксируйте значение $a = 2$ и проведите самостоятельный анализ и проверку следующих фактов:

При увеличении эксцентриситета ветви гиперболы «распрямляются» к оси OY. В предельном случае $\varepsilon \to \infty$ они стремятся занять положение двух прямых, проходящих через точки A_1, A_2 параллельно оси ординат.

Если же значение эксцентриситета приближается к единице, то ветви гиперболы «сплющиваются» к оси OX.

➢ Равносторонняя гипербола

На практике часто встречается гипербола с равными полуосями, такую гиперболу называют ***равносторонней***. Если $b = a$, то каноническое уравнение $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ заметно упрощается:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 - y^2 = a^2$$

а вместе с ним упрощаются и уравнения асимптот:

$$y = \frac{b}{a}x \quad \Rightarrow \quad y = \frac{a}{a}x \quad \Rightarrow \quad y = x$$

$$y = -\frac{b}{a}x \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{a}{a}x \quad \Rightarrow \quad y = -x$$

Прямые $y = x, y = -x$ пересекаются под прямым углом и «справедливо» делят координатную плоскость на 4 одинаковые части, в двух из которых находятся ветви кривой. Образно говоря, равносторонняя гипербола «идеально сложена», то есть и не растянута и не сплющена.

Так как $b = a$, то …, следовательно, эксцентриситет любой равносторонней гиперболы равен: $\varepsilon = \dfrac{c}{a} = \dfrac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$.

Предлагаю закрепить теорию и практические навыки миниатюрной задачей:

Задача 100

Построить гиперболу $x^2 - y^2 = 1$ и найти её фокусы.

И я поздравляю вас с юбилейной задачей! Решение и чертёж в конце книги.

Начнём тревожить беззаботное существование нашей кривой:

➢ Поворот вокруг центра и параллельный перенос гиперболы

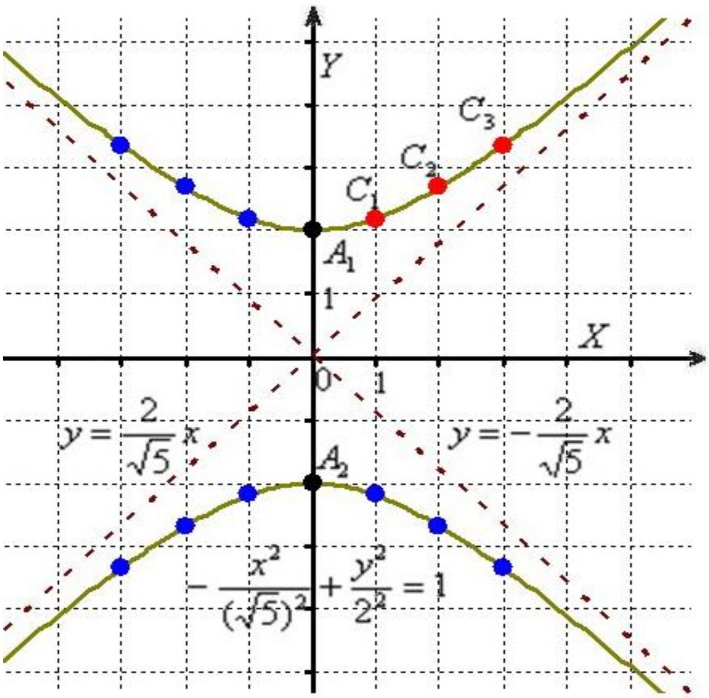
Вернёмся к демонстрационной гиперболе $\frac{x^2}{2^2}-\frac{y^2}{(\sqrt{5})^2}=1$. Что произойдёт, если в полученном уравнении поменять значения полуосей: $\frac{x^2}{(\sqrt{5})^2}-\frac{y^2}{2^2}=1$? Для эллипса данный трюк означал поворот на 90 градусов. Но здесь всё иначе! Уравнение $\frac{x^2}{(\sqrt{5})^2}-\frac{y^2}{2^2}=1$ определяет **совершенно другую гиперболу**. Ну, хотя бы обратите внимание на иные вершины: $A_1(\sqrt{5};\,0),\ A_2(-\sqrt{5};\,0)$.

Теперь рассмотрим уравнение …, которое, очевидно, тоже задаёт гиперболу. Однако и оно не имеет отношения к исходному уравнению! Это предыдущая гипербола, повёрнутая на 90 градусов, с вершинами $A_1(0;\,\sqrt{5}),\ A_2(0;\,-\sqrt{5})$ на оси ординат.

И, наконец, оставшийся четвёртый случай $-\frac{x^2}{(\sqrt{5})^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$ задаёт нашу гиперболу $\frac{x^2}{2^2}-\frac{y^2}{(\sqrt{5})^2}=1$, повёрнутую на 90 градусов. Как быть, если в практической задаче встретилась такая неканоническая запись?

Если требуется **только построить** кривую, то строим её именно в таком, неканоническом виде. Это довольно просто. Уравнения асимптот гиперболы $-\frac{x^2}{(\sqrt{5})^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$ обладают обратными угловыми коэффициентами: ….

Поскольку оси «поменялись ролями», то вершины будут расположены на оси ординат в точках $A_1(0;\,2),\ A_2(0;\,-2)$. Выразим верхнюю ветвь гиперболы:



$$\frac{y^2}{4}=\frac{x^2}{5}+1 \Rightarrow y=2\sqrt{\frac{x^2+5}{5}}$$

и найдём несколько дополнительных точек:

$$C_1: x=1 \Rightarrow y=2\cdot\sqrt{\frac{1^2+5}{5}}=2\cdot\sqrt{\frac{6}{5}}\approx 2{,}2;$$

$$C_2: x=2 \Rightarrow y=2\sqrt{\frac{2^2+5}{5}}=2\cdot\frac{3}{\sqrt{5}}\approx 2{,}7;$$

$$C_3: x=3 \Rightarrow y=2\sqrt{\frac{3^2+5}{5}}=2\sqrt{\frac{14}{5}}\approx 3{,}35.$$

Отметим на чертеже найденные точки, симметричные им точки и аккуратно соединим их линиями.

Помимо геометрии, похожие графики требуется строить в некоторых задачах математического анализа.

Это то, что касаемо построения. Если же по условию требуется найти фокусы, эксцентриситет и т.д., то уравнение $-\frac{x^2}{(\sqrt{5})^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$ лучше привести к каноническому виду. Напоминаю, что это можно сделать двумя способами. **Способ первый, «чайниковский»**: *повернём гиперболу на* 90^0 *и запишем уравнение в каноническом виде: ….*

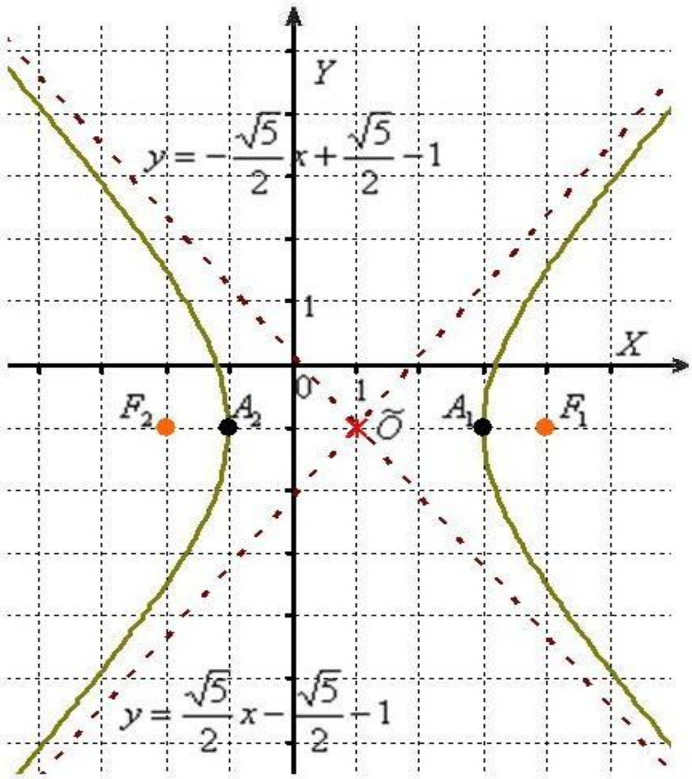
Способ второй, строгий: *перейдём к системе координат* $O\tilde{X}\tilde{Y}$ *, которая получена поворотом системы* OXY *на* $\pi/2$ *радиан против часовой стрелки, и запишем уравнение гиперболы в новой системе: ….*

Параллельный перенос гиперболы доставляет заметно больше хлопот, чем таковой у эллипса. Но уравнение похоже: … – оно задаёт гиперболу с действительной полуосью «а», мнимой полуосью «бэ» и центром в точке $\tilde{O}(x_0;\, y_0)$.

Так, гипербола … имеет центр симметрии в точке $\tilde{O}(1;-1)$. Асимптоты, само собой, переместились вместе с гиперболой, их уравнения отыскиваются по формулам:

$$y-y_0=\frac{b}{a}(x-x_0)\ \Rightarrow\ y+1=\frac{\sqrt{5}}{2}(x-1)\ \Rightarrow\ y=\frac{\sqrt{5}}{2}x-\frac{\sqrt{5}}{2}-1,$$

$$y-y_0=-\frac{b}{a}(x-x_0)\ \Rightarrow\ y+1=-\frac{\sqrt{5}}{2}(x-1)\ \Rightarrow\ y=-\frac{\sqrt{5}}{2}x+\frac{\sqrt{5}}{2}-1.$$



Полуоси $a=2, b=\sqrt{5}$ и расстояние от фокусов до центра симметрии $c=3$ остались прежними, а вот координаты фокусов изменились с учётом параллельного переноса:

…

$F_1(3+1;-1),\ F_2(-3+1;-1)$

$F_1(4;-1),\ F_2(-2;-1)$

Если уравнение $\frac{(x-1)^2}{2^2}-\frac{(y+1)^2}{(\sqrt{5})^2}=1$ нужно привести к каноническому виду, то способы аналогичны:

по «чайниковски»: *осуществим параллельный перенос гиперболы в начало координат и запишем её уравнение в виде* $\frac{x^2}{2^2}-\frac{y^2}{(\sqrt{5})^2}=1$;

и **по строгости**: *осуществим параллельный перенос системы координат* OXY *в точку* $\tilde{O}(1;-1)$ *и запишем уравнение гиперболы в системе* $\tilde{O}\tilde{X}\tilde{Y}$: $\frac{\tilde{x}^2}{2^2}-\frac{\tilde{y}^2}{(\sqrt{5})^2}=1$.

3.5. Парабола и её каноническое уравнение

Свершилось! Она самая. Готовая раскрыть немало тайн. ***Каноническое уравнение параболы*** имеет вид …, где $p > 0$ – действительное число. Нетрудно понять, что в своём стандартном положении парабола «лежит на боку» и её вершина находится в начале координат. При этом функция $y = \sqrt{2px}$ задаёт верхнюю ветвь данной линии, а функция $y = -\sqrt{2px}$ – нижнюю ветвь. Очевидно, что парабола симметрична относительно оси OX. Собственно, чего париться:

➢ Построение, определение, фокусы, директриса, эксцентриситет

Разберём всё в одной задаче:

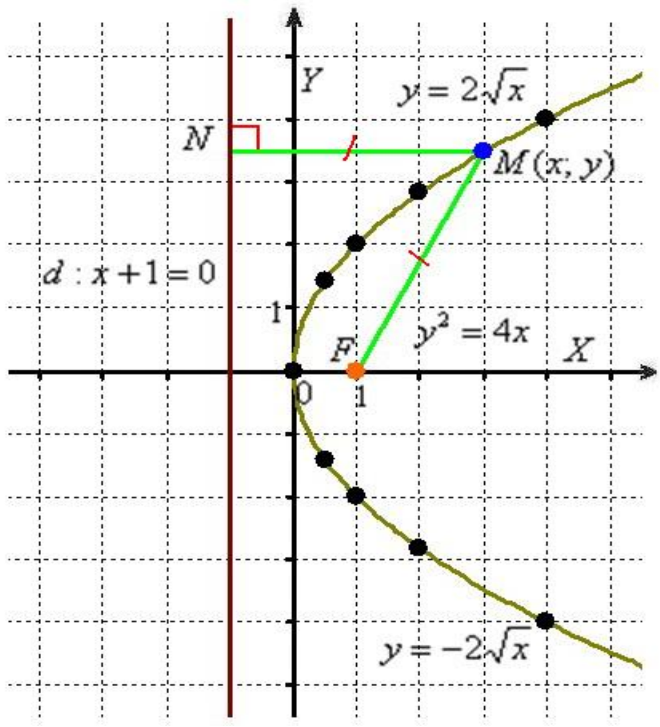
Задача 101

Построить параболу $y^2 = 4x$

Решение: вершина параболы очевидна, найдём дополнительные точки. Уравнение $y = \sqrt{4x} = 2\sqrt{x}$ определяет верхнюю дугу параболы, уравнение $y = -2\sqrt{x}$ – нижнюю дугу. Вычисления удобно провести «под одной гребёнкой» $y = \pm 2\sqrt{x}$:

…

Отмечаем найденные точки на чертеже и аккуратно соединяем их линией:



***Параболой* называется множество всех точек плоскости, равноудалённых от данной точки F и данной прямой d, не проходящей через точку F.**

Определение параболы понимается ещё проще, чем определения эллипса и гиперболы. Для любой точки $M(x; y)$ параболы длина отрезка FM (расстояние от точки до фокуса) равна длине перпендикуляра MN (расстоянию от точки до директрисы):

…

Точка F называется ***фокусом*** параболы, а прямая d – ***директрисой*** параболы *(пишется с одной «эс»)*.

Константа «пэ» канонического уравнения $y^2 = 2px$ называется ***фокальным параметром*** параболы, в данном случае $p = 2$. При этом фокус имеет координаты $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$, а директриса задаётся уравнением $x + \frac{p}{2} = 0$.

В нашем примере: $F(1; 0)$, $d : x + 1 = 0$.

Поздравляю! Многие из вас сегодня сделали самое настоящие открытие!

Оказывается, гипербола и парабола вовсе не являются графиками «рядовых» функций, а имеют ярко выраженное геометрическое происхождение.

Очевидно, что при увеличении фокального параметра ветви графика $y^2 = 2px$ будут «раздаваться» вверх и вниз, бесконечно близко приближаясь к оси OY. При уменьшении же значения «пэ» они начнут сжиматься и вытягиваться вдоль оси OX

Эксцентриситет любой параболы равен единице: $\varepsilon = 1$

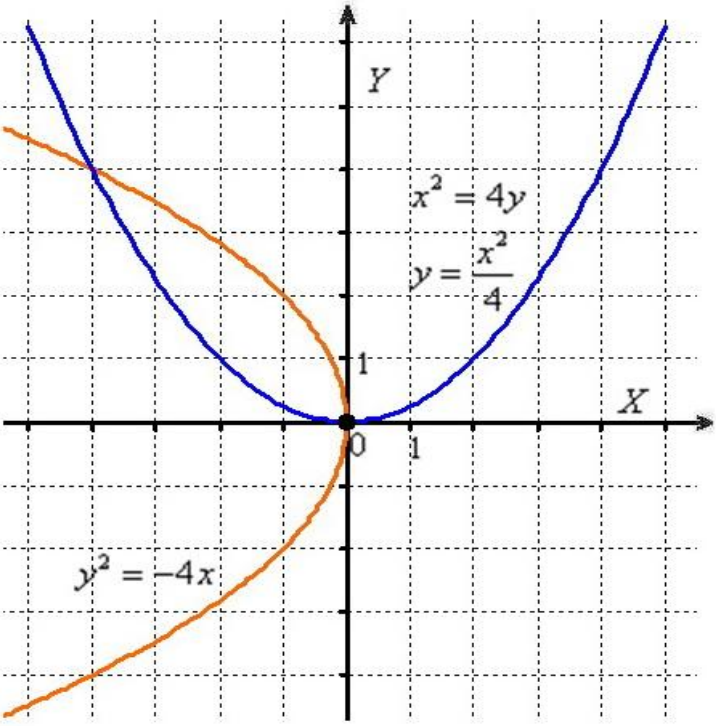
➢ Поворот и параллельный перенос параболы

Парабола – одна из самых распространённых линий, и строить её придётся действительно часто. Поэтому **отнеситесь к этому параграфу особо внимательно**, поскольку я разберу типовые варианты расположения данной кривой.

! Примечание: *как и с предыдущими кривыми, корректнее говорить о повороте и параллельном переносе координатных осей, но я ограничусь упрощённым вариантом изложения, чтобы у вас сложились элементарные представления об этих преобразованиях.*

1) Поворот вокруг вершины. Если в уравнении присутствует знак «минус»: $y^2 = -2px$, то это означает **разворот параболы на 180 градусов** относительно своего канонического положения. А если в уравнении $y^2 = 2px$ переменные «поменялись местами»: $x^2 = 2py$, то это означает **поворот канонической параболы на 90 градусов против часовой стрелки**.

На следующем чертеже изображены графики парабол $y^2 = -4x,\ x^2 = 4y$:



Оба уравнения задают неканоническое расположение нашей подопытной параболы $y^2 = 4x$, причём во втором случае легко получить функциональную запись, к которой мы привыкли в курсе математического анализа: $x^2 = 4y \Rightarrow y = \frac{x^2}{4}$.

Таким образом, все параболы, с которыми мы обычно работаем – не каноничны!

Я очень хотел «уложить на бок» классическую параболу $y = x^2$ и разобрать каноническое уравнение $y^2 = x$, но, к сожалению, у неё достаточно малый фокальный параметр $p = \frac{1}{2}$, и чертёж с точкой фокуса $F\left(\frac{p}{2}; 0\right) = F\left(\frac{1}{4}; 0\right)$ и директрисой $x + \frac{p}{2} = 0 \Rightarrow x + \frac{1}{4} = 0$ был бы немножко лилипутским ☺

2) Параллельный перенос параболы. Без всякой оригинальности. Уравнение … задаёт ту же параболу $y^2 = 2px$ с вершиной в точке …. По моим наблюдениям, во многих задачах математического анализа популярен частный случай … – когда каноническая парабола сдвигается влево или вправо по оси абсцисс. Ну, и как дополнительная опция, разворачивается, если при переменной «икс» есть знак «минус».

Соответствующее творческое задание для самостоятельного решения:

Задача 102

Построить параболу $y^2 = -2x + 3$. Привести уравнение линии к каноническому виду, найти фокус и уравнение директрисы.

Как лучше действовать?

По условию требуется построить параболу $y^2 = -2x + 3$. Именно такую – в неканоническом виде! Поэтому в первой части задачи следует представить уравнение в виде…, что позволит сразу определить вершину. Затем по образцу Задачи 101 нужно провести поточечное построение линии, работая с уравнениями ….

Вторая часть задания предполагает приведение уравнения к каноническому виду. Проанализируйте равенство … – есть ли поворот, есть ли параллельный перенос? После того, как выясните каноническую запись $y^2 = 2px$, необходимо найти фокус параболы и уравнение её директрисы. Обратите внимание, что в контексте условия это, вероятнее всего, нужно сделать именно в каноническом положении!

3.6. Неравенства с линиями второго порядка

Они имеют аналогичный смысл, что и неравенства линейные. Такое неравенство определяет некоторую *область* на плоскости, ограниченную или неограниченную.

Так, если уравнение $x^2 + y^2 = 4^2$ задаёт *окружность*, то неравенство … определяет ***круг*** радиуса $r = 4$ с центром в начале координат.

! Примечание: ***круг*** *и* ***окружность*** *– не путайте эти понятия!*

Координаты любой точки, лежащей внутри круга либо на его границе (на окружности) удовлетворяют данному неравенству. Да хотя бы начало координат $O(0;0)$:

$$0^2 + 0^2 \le 4^2$$
$$0 \le 16$$ – *верное неравенство*.

Соответственно, неравенству $x^2 + y^2 > 4^2$ удовлетворяют все точки, лежащие вне этого круга. …Если позабылось, как выглядят линии, то я проставил ссылки.

Аналогично с эллипсом: неравенству $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{7})^2} \le 1$ удовлетворяет любая точка, лежащая внутри либо на самом эллипсе. Разумеется, можно рассмотреть и *строгое* неравенство $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{7})^2} < 1$ – тогда сам эллипс отпадает. Неравенству … соответствуют все точки, лежащие вне эллипса.

Гипербола. Неравенству … соответствует область, лежащая между ветвей гиперболы. Кстати, **как определить нужную область?** Точно так же: берём любую точку, которая не принадлежит линии, проще всего взять $O(0;0)$ и подставляем её координаты в неравенство: $\frac{0^2}{2^2}-\frac{0^2}{(\sqrt{5})^2}<1 \Rightarrow 0<1$ – получено *верное неравенство*, значит, эта точка и **вообще ВСЕ** точки этой области удовлетворяют данному неравенству.

Соответственно, неравенству $\frac{x^2}{2^2}-\frac{y^2}{(\sqrt{5})^2}>1$ будут удовлетворять ВСЕ точки, которые лежат внутри ветвей гиперболы. Поскольку неравенства *строгие*, то и там и там сама гипербола не входит в решение. При желании легко выразить левую $x=-2\sqrt{\frac{y^2}{5}+1}$ либо правую $x=2\sqrt{\frac{y^2}{5}+1}$ ветвь гиперболы и рассмотреть неравенства, которые определяют ту или иную область *(одну из двух)* координатной плоскости XOY. Ради интереса проведите самостоятельное исследование.

И в заключение этого коротенького параграфа:

Устное задание:

Мысленно представьте «школьную» параболу в своём каноническом положении $y^2=x$ и определите, какие области соответствуют неравенствам $y^2>x$ и $y^2<x$.

Что для этого нужно сделать, смотрите выше ;)

Продолжаем развивать практическое направление:

3.7. Задачи с линиями 2-го порядка

Сначала вспомним – какие задачи мы уже решали?

– на построение линий;

– на нахождение вершин, фокусов, эксцентриситета и других «атрибутов»;

– начали рассматривать важнейшую задачу на **приведение уравнения линии к каноническому виду**.

И сейчас мы научимся решать ещё одну популярную задачу, которая часто встречается в самостоятельных и контрольных работах:

– **Найти геометрическое место точек** (или **составить уравнение множества точек**), каждая из которых удовлетворяет определённым аналитическим условиям.

Безусловно, данная формулировка является общей и не факт, что в итоге должна получиться обязательно линия, и обязательно второго порядка. Однако в контексте рассматриваемой темы сии магические слова практически всегда вызывают к жизни уравнение окружности, эллипса, гиперболы либо параболы.

Кстати, такие задачи вроде есть и в школьной программе, по крайней мере, в факультативном курсе:

Задача 103

Составить уравнение линии, расстояние каждой точки которой от точки $A(1;\,2)$ в два раза больше, чем от точки $B(4;\,5)$. Определить тип линии и выполнить чертёж.

Решение такой задачи всегда начинается стандартно – в рассмотрение вводится точка $M(x;\,y)$ с переменными координатами, которая принадлежит искомой линии.

Таким образом, наша аналитическая формулировка конкретизируется следующим образом: *Составить уравнение линии, расстояние каждой точки* $M(x;\,y)$ *которой от точки* $A(1;\,2)$ *в два раза больше, чем от точки* $B(4;\,5)$.

Расстояние между двумя точками – это длина соответствующего отрезка, и мы используем элементарную формулу длины отрезка:

– расстояние между точками $A(1;\,2),\,M(x;\,y)$ – это длина $|AM|=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}$;

– и между точками $B(4;\,5),\,M(x;\,y)$ – длина $|BM|=\sqrt{(x-4)^2+(y-5)^2}$.

Теперь нужно составить уравнение. Согласно условию, расстояние $|AM|$ **в два раза больше** расстояния $|BM|$, следовательно, справедливо равенство:

$|AM|=2|BM|$

или:

…

Уравнение успешно составлено, но какую линию оно задаёт – совершенно не понятно. Поэтому дальнейшие действия состоят в упрощении полученной конструкции, и сейчас мы ознакомимся с **типовым техническим алгоритмом**.

Во-первых, избавимся от корней. Для этого возведём в квадрат обе части:

…

Далее, пользуясь формулами $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$, раскроем все скобки:

$$x^2-2x+1+y^2-4y+4=4(x^2-8x+16+y^2-10y+25)$$
$$x^2-2x+1+y^2-4y+4=4x^2-32x+64+4y^2-40y+100$$

перенесём всё в левую часть и приведём подобные слагаемые:

$$x^2-2x+1+y^2-4y+4-4x^2+32x-64-4y^2+40y-100=0$$
$$-3x^2+30x-3y^2+36y-159=0$$

замечаем, что каждое слагаемое можно разделить на –3 – именно на «минус три», чтобы первый коэффициент (при «икс квадрат») был положительным:

$x^2-10x+y^2-12y+53=0$ – именно на «– 3

Получено уравнение линии 2-го порядка в общем виде. Уже лучше, однако, и оно как неведома зверушка. А нам нужно определить тип линии.

Поэтому **уравнение следует привести если не к каноническому, то к близкому виду**. Искусственным приёмом *выделяем полные квадраты*, чтобы воспользоваться формулами …:

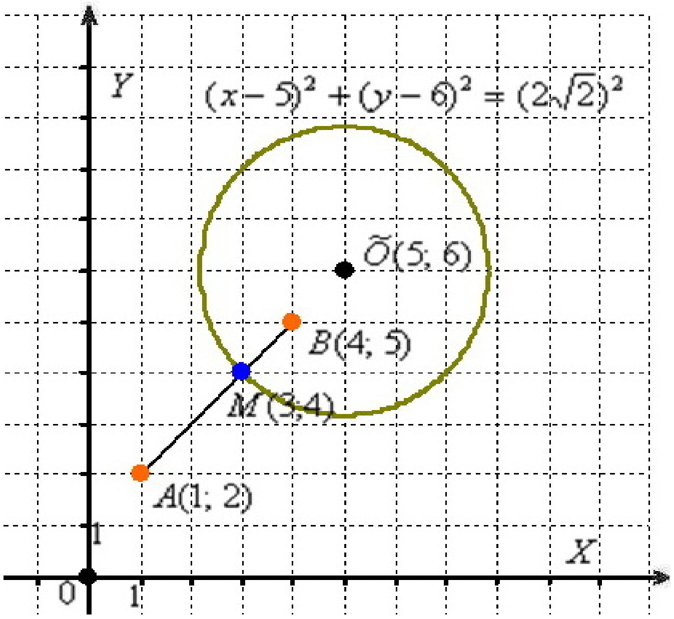
$$(x^2-10x+25)-25+(y^2-12y+36)-36+53=0$$

$$(x-5)^2+(y-6)^2-8=0$$

$(x-5)^2+(y-6)^2=8$ – здесь не лишним будет раскрыть скобки и убедиться, что получилось исходное уравнение $x^2-10x+y^2-12y+53=0$.

И завершающим штрихом рождаем квадрат в правой части:

$(x-5)^2+(y-6)^2=(2\sqrt{2})^2$ – уравнение окружности с центром в точке $\tilde{O}(5;6)$ радиуса $r=2\sqrt{2}\approx 2{,}83$ ед. Возьмём в руки остроногого друга:



Проведём “любительскую”, но эффективную геометрическую **проверку**. По условию, для любой точки $M(x;y)$ построенной линии расстояние $|AM|$ должно быть в 2 раза больше расстояния $|BM|$. Мысленно выбираем наиболее удобную точку $M(3;4)$ построенной окружности и убеждаемся в справедливости данного соотношения. В целях контроля можно взять ещё какую-нибудь точку и измерить длины $|AM|,|BM|$ обычной линейкой.

Аналогичный пример для самостоятельного решения:

Задача 104

Составить уравнение множества точек, для каждой из которых сумма квадратов расстояний от точек $A(1;1)$, $B(-3;3)$ равна 20. Выполнить чертёж.

Итак, **систематизируем порядок решения задачи:**

На первом шаге необходимо рассмотреть точку $M(x;y)$ с неизвестными координатами, которая принадлежит искомому множеству точек, и **разобраться в условии задачи**. Как правило, в нём говорится о расстояниях от точки «эм» до других точек и / или других линий, а также о соотношениях этих длин.

На втором шаге следует найти длины нужных отрезков и в соответствии с аналитическим условием задачи составить уравнение.

На третьем шаге осуществляем упрощение полученного уравнения. Сначала приводим его к общему виду, а затем к форме, которая близА к канонической. В некоторых задачах получается непосредственно каноническое уравнение.

На четвёртом шаге – чертёж и проверка. Чертеж, кстати, требуют далеко не всегда.

Кроме того, вас могут попросить продолжить:

На пятом шаге – приведение уравнения линии к каноническому виду.

На шестом – фокусы, асимптоты, эксцентриситет и т.д. Напоминаю, что находить их гораздо удобнее именно из канонической записи.

И мы обязательно продолжим тренироваться:

Задача 105

Составить уравнение множества точек, для каждой из которых квадрат расстояния до точки $K(2;0)$ на 16 больше квадрата расстояния до оси ординат. Привести уравнение линии к каноническому виду.

Решение: прежде всего, **вчитываемся и разбираемся в условии**. Иногда его не удаётся осмыслить с первого раза, но 2-3 попытки должны помочь :) …Есть?

Итак, здесь речь идёт о расстояниях в квадрате, но это не влияет на алгоритм решения. Пусть точка $M(x;\, y)$ принадлежит искомому множеству. Тогда:

…

Чему равно расстояние от точки $M(x;\, y)$ до оси ординат? Можно воспользоваться стандартной формулой расстояния от точки до прямой, но если подключить логику и немного воображения, то легко понять, что расстояние от любой точки до оси OY равно модулю её «иксовой» координаты:

$$\rho(M;\, OY) = |x|$$

По условию, $|KM|^2$ *(квадрат расстояния)* **на 16 больше**, чем $(\rho(M;\, OY))^2$, следовательно, справедливо следующее равенство:

$$|KM|^2 - 16 = (\rho(M;\, OY))^2$$

(либо так: $|KM|^2 = (\rho(M;\, OY))^2 + 16$*)*

Таким образом:

…

Раскручиваем гайки:

$$(x-2)^2 + y^2 - 16 = x^2$$
$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 16 = x^2$$

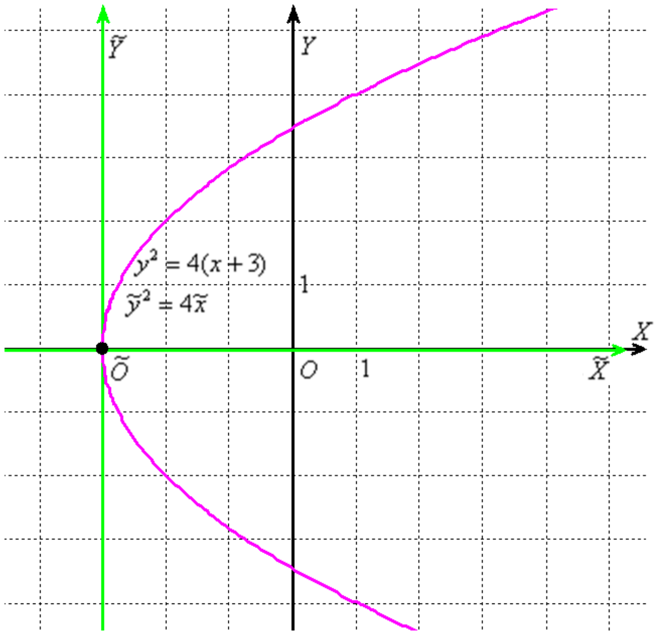
«Икс квадрат» сокращается, и, очевидно, мы имеем дело с уравнением параболы:

$$-4x + y^2 - 12 = 0$$
$$y^2 = 4x + 12$$

$y^2 = 4(x+3)$ – парабола с вершиной в точке $\tilde{O}(-3;0)$ и фокальным параметром $p = 2$, ветви параболы направлены вправо *(в каноническом направлении)*.

! Словесный комментарий должен однозначно определять линию.

Теперь вторая часть задачи. Приведём уравнение линии к каноническому виду. И я снова не поленюсь, приведу оба способа:



1) Способ «чайниковский». Осуществим параллельный перенос параболы в начало координат, тогда её уравнение запишется в каноническом виде $y^2 = 4x$ *(на чертеже отсутствует)*.

2) Способ строгий. Перейдём к системе координат $\tilde{O}\tilde{X}\tilde{Y}$, которая получена параллельным переносом системы OXY в точку $\tilde{O}(-3;0)$. Тогда уравнение параболы примет вид: $\tilde{y}^2 = 4\tilde{x}$ (в новой системе координат).

И я всё же рекомендовал бы вам второй способ – меньше потенциальных проблем. Впрочем, если спрос нестрогий, «прокатит» и первый. Скорее всего.

Ответ: искомое множество точек представляет собой параболу $y^2 = 4(x+3)$, каноническое уравнение: $\tilde{y}^2 = 4\tilde{x}$ – в системе координат $\tilde{O}\tilde{X}\tilde{Y}$, полученной параллельным переносом системы OXY в точку $\tilde{O}(-3;0)$

Если дополнительно нужно найти фокус, директрису и другие характеристики, то пройдите по ссылке – там мы разобрали именно эту параболу. Кстати, по условию не требовалось строить чертежа, но я, конечно, исправил эту недоработку:)

Задача 106

Составить уравнение множества точек, для каждой из которых расстояние до точки $M(0;5)$ равно расстоянию до оси абсцисс. Выполнить чертёж. Привести уравнение к каноническому виду.

В образце решения последний пункт реализован обоими способами.

Усложняем задание:

Задача 107

Найти уравнение геометрического места точек, для каждой из которых отношение расстояния до точки $A(\sqrt{5};0)$ к расстоянию до прямой $d: \sqrt{5}x - 9 = 0$ постоянно и равно $\frac{\sqrt{5}}{3}$. Сделать чертеж. Привести уравнение линии к каноническому виду, найти фокусы, эксцентриситет, асимптоты и директрисы (если они существуют).

Решение: пусть точка $M(x;y)$ принадлежит искомому множеству точек. В задаче говорится о расстоянии: $|AM| = \sqrt{(x-\sqrt{5})^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-\sqrt{5})^2 + y^2}$, а также о расстоянии от точки до прямой: $\rho(M;d) = ... = \frac{|\sqrt{5}x - 9|}{\sqrt{5}}$.

По условию, для каждой точки $M(x; y)$ **отношение** расстояния $|AM|$ к расстоянию $\rho(M; d)$ должно быть равно $\frac{\sqrt{5}}{3}$. А что такое отношение? Отношение – это пропорция, или попросту дробь:

$$\frac{|AM|}{\rho(M; d)} = \frac{\sqrt{5}}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{(x-\sqrt{5})^2 + y^2}}{\frac{|\sqrt{5}x - 9|}{\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

Уравнение составлено, но его вид оставляет желать лучшего. Сначала избавимся от трёхэтажной дроби. Для этого знаменатель левой части (дробь) перекинем направо:

$$\sqrt{(x-\sqrt{5})^2 + y^2} = \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{|\sqrt{5}x - 9|}{\sqrt{5}}$$

Сократим справа на $\sqrt{5}$:

$$\sqrt{(x-\sqrt{5})^2 + y^2} = \frac{1}{3} \cdot |\sqrt{5}x - 9|$$

и чтобы окончательно избавиться от дробей, «поднимем» тройку на левый берег:

…

Дальнейшие упрощения приобретают знакомые очертания. Возводим обе части в квадрат и раскрываем скобки:

$$\left(3\sqrt{(x-\sqrt{5})^2 + y^2}\right)^2 = |\sqrt{5}x - 9|^2$$

$$9((x-\sqrt{5})^2 + y^2) = 5x^2 - 18\sqrt{5}x + 81$$

$$9(x^2 - 2\sqrt{5}x + 5 + y^2) = 5x^2 - 18\sqrt{5}x + 81$$

$$9x^2 - 18\sqrt{5}x + 45 + 9y^2 = 5x^2 - 18\sqrt{5}x + 81$$

Перенесём всё налево и причешем слагаемые:

$$9x^2 - 18\sqrt{5}x + 45 + 9y^2 = 5x^2 - 18\sqrt{5}x + 81$$

$$9x^2 - 18\sqrt{5}x + 45 + 9y^2 - 5x^2 + 18\sqrt{5}x - 81 = 0$$

$$4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$$

$$4x^2 + 9y^2 = 36$$

Разделим обе части на 36:

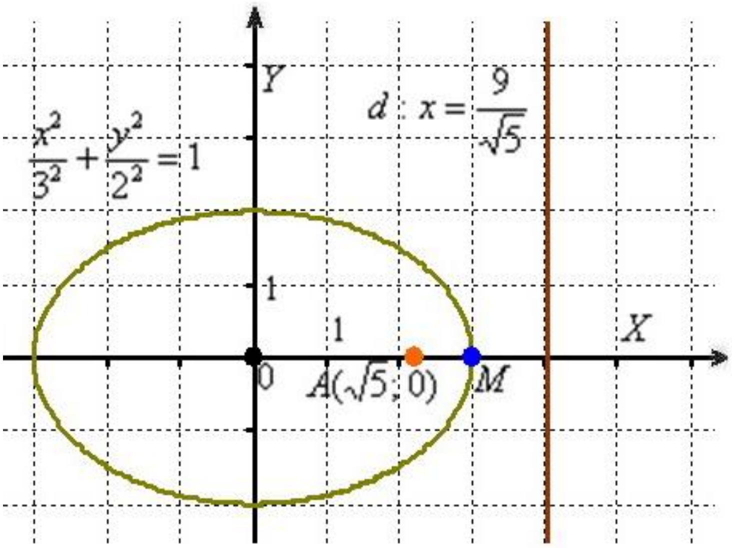
$\frac{4x^2}{36} + \frac{9y^2}{36} = 1$, организуем трёхэтажные дроби:

$\frac{x^2}{\frac{36}{4}} + \frac{y^2}{\frac{36}{9}} = 1$ и выполним деление *(почему именно так – см. Задачу 99)*:

$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ – эллипс с центром в начале координат, полуосями $a = 3, b = 2$.

Обратите внимание, что такая формулировка однозначно определяет эллипс и добавлять что-то ещё излишне.

Изобразим найденный эллипс, точку $A(\sqrt{5};0)$ и прямую $d: x = \dfrac{9}{\sqrt{5}} \approx 4{,}02$:



Геометрическая проверка тут затруднена, но с другой стороны и не сверхъестественна. Возьмём какую-нибудь точку эллипса, проще всего рассмотреть $M(3;0)$.

Для неё $|AM| = 3 - \sqrt{5}$, $\rho(M;d) = \dfrac{9}{\sqrt{5}} - 3 = \dfrac{9 - 3\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$.

По условию, отношение $\dfrac{|AM|}{\rho(M;d)}$ должно равняться $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

Проверим, так ли это:

$\dfrac{|AM|}{\rho(M;d)} = \dfrac{3-\sqrt{5}}{\dfrac{9-3\sqrt{5}}{\sqrt{5}}} = (3-\sqrt{5}) \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{9-3\sqrt{5}} = \dfrac{(3-\sqrt{5}) \cdot \sqrt{5}}{3(3-\sqrt{5})} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$, что и требовалось проверить.

На практике можно выбрать любую точку эллипса, измерить расстояния линейкой, разделить на калькуляторе $|AM|$ на $\rho(M;d)$ и удостовериться, что получилось $\dfrac{\sqrt{5}}{3} \approx 0{,}7$.

В данной задаче уравнение линии нарисовалось сразу в каноническом виде, что облегчает решение. Осталось разобраться с фокусами, эксцентриситетом, **асимптотами** и директрисами. Очевидно, что у эллипса отсутствуют асимптоты.

Вычислим $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$ и запишем фокусы:

…

Первый фокус совпал с точкой $A(\sqrt{5};0)$.

Найдём эксцентриситет: $\varepsilon = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$. По ещё одному странному совпадению эксцентриситет оказался равен отношению $\dfrac{|AM|}{\rho(M;d)} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$. …Однако, совпадения ли это?

➢ Директрисы эллипса

Да, они есть не только у параболы! – и эта прямая обрела тысячи горячих поклонников, которые по статистике запросов Яндекса ищут в Сети п@рно с директрисой ☺…, и не только. **…**Ну что же, шалуны, завидуйте, у эллипса их две!

Директрисами эллипса **называются две прямые, параллельные** малой оси **и отстоящие от неё на расстоянии …, где** a **–** большая полуось**, а** ε **–** эксцентриситет **данного эллипса**.

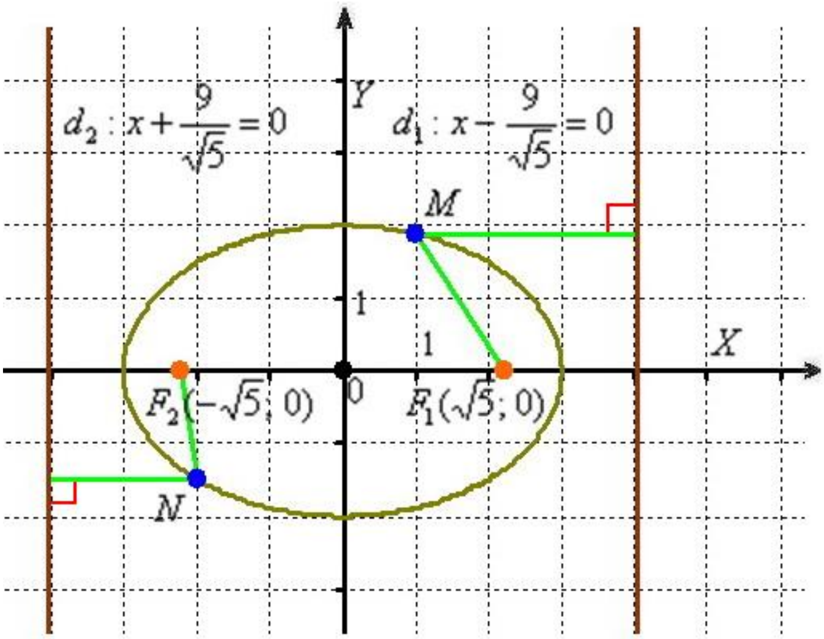
Директрисы лежат вне эллипса и в каноническом положении $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ задаются уравнениями …. Для нашего героя $\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$:

$$d_1: x-\frac{3}{\frac{\sqrt{5}}{3}}=0 \quad\Rightarrow\quad x-\frac{9}{\sqrt{5}}=0 \quad\Rightarrow\quad \sqrt{5}x-9=0,$$

$$d_2: x+\frac{3}{\frac{\sqrt{5}}{3}}=0 \quad\Rightarrow\quad x+\frac{9}{\sqrt{5}}=0 \quad\Rightarrow\quad \sqrt{5}x+9=0$$

Так и есть, первая директриса полностью совпала с прямой d. Более того, в условии задачи фактически сформулирован следующая **теорема** аналитической геометрии:

Эллипс – есть множество всех точек плоскости, таких, что отношение расстояния до каждой точки от фокуса к расстоянию от неё до соответствующей (ближайшей) директрисы равно эксцентриситету:



То есть, **для любой** точки M эллипса *отношение* её расстояния до фокуса $|F_1M|$ к расстоянию от неё же до ближайшей директрисы $\rho(M;d_1)$ в точности равно эксцентриситету:
$\frac{|F_1M|}{\rho(M;d_1)}=\varepsilon=\frac{\sqrt{5}}{3}$

Со вторым фокусом и директрисой история аналогичная, какую бы точку N эллипса мы ни взяли – будет справедливо отношение:
$\frac{|F_2N|}{\rho(N;d_2)}=\varepsilon=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

И не забываем об **ответе**: искомое геометрическое место точек представляет собой эллипс $\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$ с фокусами $F_1(\sqrt{5};0), F_2(-\sqrt{5};0)$, эксцентриситетом $\varepsilon=\frac{\sqrt{5}}{3}$ и директрисами $d_1:\sqrt{5}x-9=0$, $d_2:\sqrt{5}x+9=0$.

Похожий пример для самостоятельного решения:

Задача 108

Найти уравнение геометрического места точек, для каждой из которых отношение расстояния до точки $A(0;\sqrt{3})$ к расстоянию до прямой $d:\sqrt{3}y-4=0$ постоянно и равно $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Выполнить чертеж. Привести уравнение линии к каноническому виду, найти фокусы, эксцентриситет, асимптоты и директрисы, если они существуют.

Повышаем техническую сложность и знакомимся с новым материалом:

Задача 109

Составить уравнение линии, для каждой из которых разность расстояний до точек $A(0;10)$ и $O(0;0)$ по модулю равна 8. Привести уравнение к каноническому виду и выполнить чертёж. Найти асимптоты, фокусы, эксцентриситет и директрисы, если они существуют.

…здесь уже из условия понятно, о какой кривой идёт речь ;)

Решение: пусть точка $M(x;y)$ принадлежит искомой линии. Тогда:

$$|AM| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-10)^2} = \sqrt{x^2 + (y-10)^2}$$
$$|OM| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

По условию, $\big||AM| - |OM|\big| = 8$ или:

$$\left|\sqrt{x^2 + (y-10)^2} - \sqrt{x^2 + y^2}\right| = 8$$

Корни? Модуль? ~~Застрелитесь!~~ Ерунда!

От **модуля** избавляемся немедленно:

…

Теперь нужно избавиться от радикалов. Возводить в квадрат сразу – идея плохая *(можете попробовать)*, поэтому разведём корни по углам ринга:

…

Ну вот, теперь совсем другое дело, возводим обе части в квадрат:

$$(\sqrt{x^2 + (y-10)^2})^2 = (\sqrt{x^2 + y^2} \pm 8)^2$$
$$x^2 + (y-10)^2 = (\sqrt{x^2 + y^2})^2 \pm 2 \cdot 8 \cdot \sqrt{x^2 + y^2} + 8^2$$
$$x^2 + y^2 - 20y + 100 = x^2 + y^2 \pm 16 \cdot \sqrt{x^2 + y^2} + 64$$

Успехи есть, но один корень остался, да ещё и со знаком «+–». Оставим нашего зловреда в одиночестве и максимально упростим левую часть уравнения:

$$x^2 + y^2 - 20y + 100 - x^2 - y^2 - 64 = \pm 16 \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$-20y + 36 = \pm 16 \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$4(9-5y) = \pm 16 \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$9 - 5y = \pm 4 \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$$

Возводим в квадрат обе части ещё раз, и заметьте, как попутно и совершенно спокойно исчезает знак «+–»:

$$(9-5y)^2 = (\pm 4 \cdot \sqrt{x^2 + y^2})^2$$
$$81 - 90y + 25y^2 = 16(x^2 + y^2)$$
$$81 - 90y + 25y^2 = 16x^2 + 16y^2$$

Перебросим всё направо и «развернём» уравнение:

$$0 = 16x^2 + 16y^2 - 25y^2 + 90y - 81$$

$$16x^2 - 9y^2 + 90y - 81 = 0$$

Получено уравнение линии 2-го порядка в общем виде. Выделяем полный квадрат при переменной «игрек», для этого вынесем «минус девять» за скобку:

$$16x^2 - 9(y^2 - 10y) - 81 = 0$$

Далее внутри скобки искусственно добавляем +25 (в целях применения формулы $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$ на следующем шаге) и, чтобы уравнение не изменилось, за скобками нужно прибавить $9 \cdot 25$:

…

Хорошо осмыслите выполненное действие! – фишка распространённая.

Собираем квадрат разности и допиливаем константы:

$$16x^2 - 9(y-5)^2 + 225 - 81 = 0$$

$$16x^2 - 9(y-5)^2 + 144 = 0$$

$$16x^2 - 9(y-5)^2 = -144$$

Вот тебе и раз. По всем признакам мыльная опера должна была закончиться гиперболой $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, но у нас «лишний» минус. Выполним проверку и раскроем скобки (что желательно сделать в любом случае)… нет, всё верно – получается исходное общее уравнение $16x^2 - 9y^2 + 90y - 81 = 0$.

Изменим знаки у обеих частей:

$$-16x^2 + 9(y-5)^2 = 144$$

Уже ближе к правде, но «минус» оказался «не на своём месте». Из параграфа о повороте и переносе гиперболы вспоминаем, что это означает поворот данной кривой на 90 градусов относительно своего канонического положения.

Но давайте сначала доведём до ума уравнение. Делим обе части на 144:

$$-\frac{16x^2}{144} + \frac{9(y-5)^2}{144} = 1$$

и завершающий тонкий тюнинг:

$$-\frac{x^2}{\frac{144}{16}} + \frac{(y-5)^2}{\frac{144}{9}} = 1$$

$-\frac{x^2}{9} + \frac{(y-5)^2}{16} = 1$ – получены «хорошие» значения полуосей – отличный признак!

$-\frac{x^2}{3^2} + \frac{(y-5)^2}{4^2} = 1$ – вот она, долгожданная гипербола, удовлетворяющая условию задачи, которое фактически представляет собой… определение гиперболы!

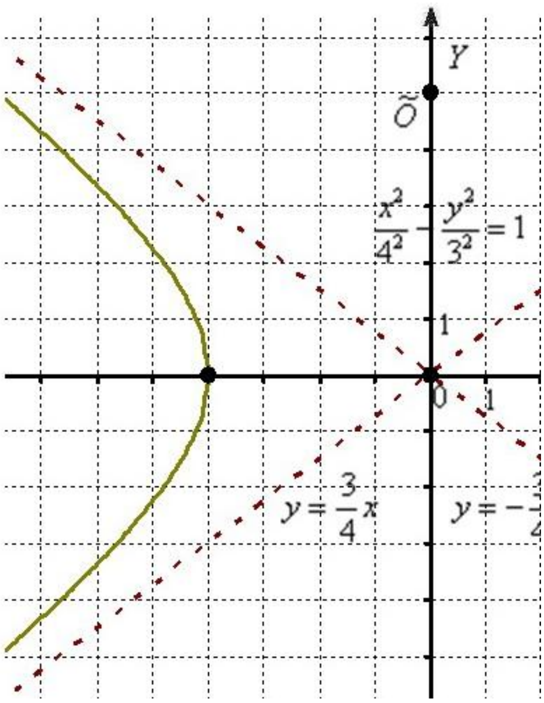
Едем дальше:

По условию требуется **сначала** привести уравнение к каноническому виду, **и только потом** выполнить чертёж. Дабы не превысить точку кипения серого вещества, применим упрощенную схему. Однако случай всё равно не самый простой. Центр симметрии нашей подопечной находится в точке $\tilde{O}(0;5)$, и, кроме того, она повёрнута на 90 градусов вокруг этой точки

В «чайниковском» способе сначала удобно осуществить параллельный перенос линии … в начало координат: $-\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$. **И только потом** повернуть гиперболу на 90 градусов по часовой стрелке *(относительно начала координат)*, при этом **значения полуосей меняются местами, а знак «минус» переносится к переменной «игрек»**: $\frac{x^2}{4^2}-\frac{y^2}{3^2}=1$.

Если же сначала повернуть гиперболу вокруг точки $\tilde{O}(0;5)$, то уравнение запишется в виде …, и после переноса получится тот же результат $\frac{x^2}{4^2}-\frac{y^2}{3^2}=1$.

Не забывая про асимптоты $y=\frac{b}{a}x=\frac{3}{4}x,\quad y=-\frac{b}{a}x=-\frac{3}{4}x$, выполним чертёж:



Ещё раз, где **изначально** расположена гипербола? В точке $\tilde{O}(0;5)$ *(центр симметрии)*, ветви направлены вверх и вниз. И если по условию вам требуется построить график $-\frac{x^2}{3^2}+\frac{(y-5)^2}{4^2}=1$, то руководствуйтесь разобранным ранее алгоритмом.

Но работать гораздо удобнее с приведённым уравнением. Найдём фокусы:

$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{25}=5 \quad\Rightarrow\quad F_1(5;0),\, F_2(-5;0)$ – самостоятельно проанализируйте, что в неканоническом положении фокусы находятся в точках $A(0;10),\, O(0;0)$.

Вычислим эксцентриситет: $\varepsilon=\frac{5}{4}$

➢ Директрисы гиперболы

У гиперболы, как и у эллипса, **две** директрисы, и определяются они точно так же.

В каноническом положении $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ директрисы расположены между ветвями гиперболы и задаются теми же уравнениями …, где «эпсилон» – эксцентриситет данной гиперболы.

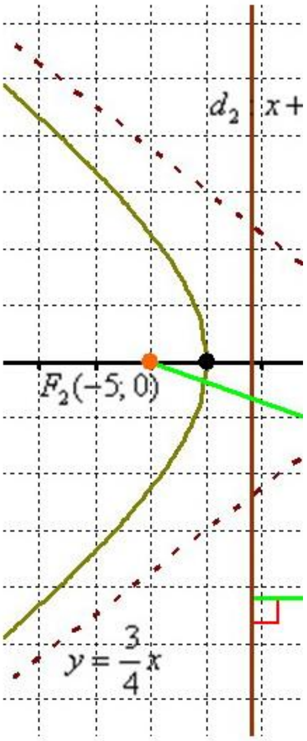
В нашей задаче:

$$d_1: x-\frac{4}{\frac{5}{4}}=0 \quad\Rightarrow\quad x-\frac{16}{5}=0 \quad\Rightarrow\quad 5x-16=0$$

$$d_2: x+\frac{4}{\frac{5}{4}}=0 \quad\Rightarrow\quad x+\frac{16}{5}=0 \quad\Rightarrow\quad 5x+16=0$$

Более того, для гиперболы справедлива абсолютно такая же теорема:

Гипербола – есть множество всех точек плоскости, таких, что отношение расстояния от каждой точки до фокуса к расстоянию от неё до соответствующей (ближайшей) директрисы равно эксцентриситету:



…

То есть, **для любой** точки M гиперболы отношение её расстояния до фокуса $|F_1M|$ к расстоянию от неё же до ближайшей директрисы $\rho(M;d_1)$ равно эксцентриситету: $\frac{|F_1M|}{\rho(M;d_1)}=\varepsilon=\frac{5}{4}$. Для пары F_2, d_2 и **любой** точки N гиперболы (ради разнообразия я выбрал демонстрационную точку дальней ветви) отношение такое же: $\frac{|F_2N|}{\rho(N;d_2)}=\varepsilon=\frac{5}{4}$

К слову, у параболы с её единственным фокусом и единственной директрисой по определению эти длины относятся «один к одному», поэтому эксцентриситет любой параболы и равен единице.

Ответ: искомая линия представляет собой гиперболу $-\frac{x^2}{3^2}+\frac{(y-5)^2}{4^2}=1$ с центром симметрии в точке $\tilde{O}(0;5)$ и повёрнутую на $90°$ относительно своего канонического положения. Каноническое уравнение: $\frac{x^2}{4^2}-\frac{y^2}{3^2}=1$, фокусы: $F_1(5;0), F_2(-5;0)$, эксцентриситет: $\varepsilon=\frac{5}{4}$, асимптоты: $y=\frac{3}{4}x,\ y=-\frac{3}{4}x$, директрисы: $d_1:5x-16=0,\ d_2:5x+16=0$.

Но я вас просто так не отпущу :) – всё-таки разберу **второй способ** приведения линии $-\frac{x^2}{3^2}+\frac{(y-5)^2}{4^2}=1$ к каноническому виду. Осуществим поворот системы OXY на угол $\frac{\pi}{2}$ радиан против часовой стрелки и её параллельный перенос в точку $\tilde{O}(0;5)$. Тогда в системе $\tilde{O}\tilde{X}\tilde{Y}$ уравнение примет вид: $\frac{\tilde{x}^2}{4^2}-\frac{\tilde{y}^2}{3^2}=1$.

Чертёж будет выглядеть точно так же, как и чертежи выше – с той поправкой, что гиперболу мы изобразим в системе $\tilde{O}\tilde{X}\tilde{Y}$. Соответственно, все вычисления будут проводиться в новых координатах, и переменные следует записывать со значком «тильда»: $\tilde{x},\tilde{y}$. В частности, асимптоты запишутся так: $\tilde{y}=\frac{3}{4}\tilde{x},\ \tilde{y}=-\frac{3}{4}\tilde{x}$, а директрисы – так: $d_1:5\tilde{x}-16=0,\ d_2:5x+16=0$.

Очень хотелось упростить и даже вообще не рассматривать эту задачу, но она взята из конкретной контрольной работы, причём, заочного отделения. Поэтому пришлось с упорным занудством разобрать все-все-все тонкости и технические приёмы.

Налью вам стакан молока за вредность и предложу задачу для самостоятельного решения, она проще:)

Задача 110

Найти уравнение геометрического места точек, для каждой из которых отношение расстояния до точки $A(-\sqrt{20};0)$ к расстоянию до прямой $d:\sqrt{5}x+8=0$ постоянно и равно $\frac{\sqrt{5}}{2}$. Сделать точный чертеж.

Подумайте, о какой это точке и о какой прямой шепчет условие ;-)

Краткое решение и чертёж в конце книги.

И теперь вы готовы! *(в хорошем смысле:))*

– готовы рассмотреть **суперзадачу**, к которой я вас морально и технически готовил чуть ли не с первых параграфов темы.

…анекдот тут ещё вспомнился садистский про готовку, но, пожалуй, не буду – он неэтичный :)

3.8. Как привести уравнение линии второго порядка к каноническому виду?

Эта задача следовала за нами практически с самого начала главы и в заключительном параграфе мы окончательно разберёмся, как общее уравнение линии второго порядка $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$ *(A, B, C не равны одновременно нулю)* свести к одному из девяти канонических случаев.

В предыдущих параграфах мы очень подробно отработали частный случай уравнения, когда коэффициент $B=0$:

$$Ax^2+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \qquad (D, E \text{ не равны нулю одновременно})$$

Такое уравнение приводится *методом выделения полного квадрата(ов)* с дальнейшим применением формул …, далее осуществляется поворот (опционально) на угол 90° либо в некоторых случаях на 180° и непременно параллельный перенос линии или системы координат.

…У вас такое уравнение? Значит, вам хватит материалов предыдущих параграфов!

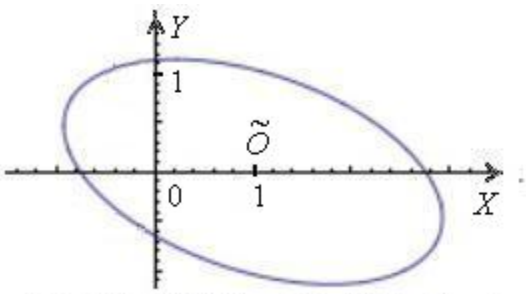
Не такое? Значит, не хватит ☺

Как многие подметили, члены $2Dx, 2Ey$ общего уравнения «отвечают» за **параллельный перенос**, и логично предположить, что ненулевое слагаемое $2Bxy$ «отвечает» за **поворот** *(за исключением угла 90° и кратных ему углов, при которых $B=0$, и мы отделываемся лёгким испугом)*. Простейший пример поворота на «нехалявный» угол нам уже встречался – это неканонически расположенная «школьная» гипербола $xy-1=0$.

Уравнение $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$ с ненулевым коэффициентом B неприятно тем, что в общем случае его невозможно привести к каноническому виду с помощью обычных средств алгебры: переноса слагаемых, их группировки, вынесений за скобки, выделения полных квадратов и прочей школьной самодеятельности. Поэтому на помощь приходится привлекать более мощные методы решения.

Рассмотрим в качестве примера уравнение $13x^2+18xy+37y^2-26x-18y-27=0$. Какие будут идеи? …Да ладно с ними, с идеями, тут даже не понятно, какую линию оно задаёт. Эллипс? Гиперболу? Параболу? Что-то другое из классификации?

Немного потраченного времени, и вы научитесь довольно легко находить ответы на эти вопросы, в частности, без особых проблем сможете определить, что данное уравнение определяет эллипс с полуосями $a=2, b=1$, который расположен центром в точке $\tilde{O}(1;0)$ и повёрнут относительного своего канонического положения на отрицательный угол, составляющий примерно -18°:



$13x^2+18xy+37y^2-26x-18y-27=0$

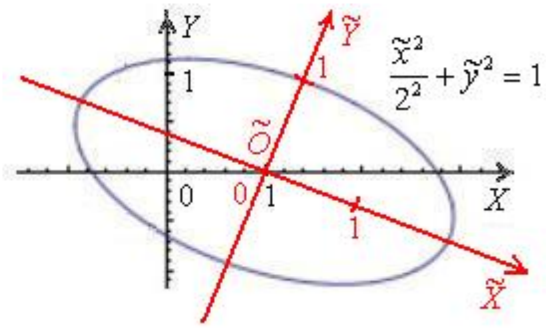
Мысленно возьмите эллипс в руки, поверните его на любой угол и переместите в произвольное место плоскости. Новому положению эллипса будет соответствовать **совершенно другое уравнение**, и если вам предъявить его без чертежа, то никто в жизнь не догадается, что оно определяет тот же самый эллипс.

Именно поэтому и появилась **задача приведения уравнения к каноническому виду** – чтобы <u>независимо от расположения линии</u> выяснить, что это за зверь и каким нравом он обладает.

Выше я рассматривал два способа приведения. Применительно к нашему примеру:

1) Осуществим параллельный перенос эллипса центром в начало координат *(представляем мысленно)* и повернём его на угол $\frac{1}{2}arctg\frac{3}{4}\approx 18^\circ$ *(против часовой стрелки)*. В результате получится нужное уравнение $\frac{x^2}{2^2}+y^2=1$.

2) Перейдём к прямоугольной системе координат $\tilde{O}\tilde{X}\tilde{Y}$, которая получается путём поворота исходной системы координат OXY на $-\frac{1}{2}arctg\frac{3}{4}\approx -18^\circ$ вокруг начала координат и её параллельного переноса центром в точку $\tilde{O}(1;0)$. Таким образом, в новой системе координат $\tilde{O}\tilde{X}\tilde{Y}$ уравнение данного эллипса запишется в каноническом виде $\frac{\tilde{x}^2}{2^2}+\tilde{y}^2=1$:



«Навскидку» второй способ кажется вычурным и неуклюжим, однако, если немного призадуматься, то он более корректен. И толстый намёк на это уже проскочил чуть выше: куда бы мы ни переместили данную линию, какую бы систему координат ни выбрали – **эллипс останется тем же самым эллипсом** с полуосями $a=2, b=1$, своими фокусами и другими индивидуальными характеристиками.

Но стОит ли перемещать САМУ линию? Представьте, что крыша вашего дома имеет эллиптическую форму, а Карлсон, который живёт на крыше, выбрал начало координат на трубе кочегарки ☺. Что вы будете делать, чтобы с комфортом исследовать эллипс? Разумеется, не станете переносить крышу, а перейдёте к удобной системе координат.

То есть, **система координат *относительна* и *вторична* по отношению к тому или иному объекту**. Следовательно, вполне логично и правомерно тревожить именно её, а не «уникальный» эллипс, крышу дома или что-то ещё.

А суть преамбулы состоит в том, что далее мы будем **приводить уравнение линии 2-го порядка путём перехода к <u>новой прямоугольной системе координат</u>, в которой уравнение исследуемой линии <u>примет канонический вид</u>**.

Существует несколько практических методов приведения уравнения линии к каноническому виду, причём, некоторые из них являются достаточно трудными. Я постараюсь составить максимально простой конспект, доступный человеку с любым уровнем подготовки.

Для этого нам потребуется ещё одно теоретическое понятие:

Все линии 2-го порядка **можно разделить на две большие группы:**

1) ***центральные линии***, обладающие <u>единственным</u> центром (точкой) симметрии (эллипс, мнимый эллипс, гипербола, пара мнимых или действительных пересекающихся прямых);

2) ***нецентральные линии***, у которых центры симметрии отсутствуют (парабола), либо их бесконечно много (пара действительных или мнимых параллельных прямых, пара совпавших прямых).

Итак, вы счастливый обладатель уравнения $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ с ненулевым коэффициентом B.

С чего начать? **На первом шаге** целесообразно выяснить, к какой группе относится линия. Для этого нужно мысленно либо на черновике составить и **вычислить определитель** …. Если $\delta \neq 0$, то перед нами уравнение *центральной линии*, если же $\delta = 0$ – то *нецентральной*.

Для уравнения $13x^2 + 18xy + 37y^2 - 26x - 18y - 27 = 0$:

$... = 13 \cdot 37 - 9 \cdot 9 = 481 - 81 = 400 \neq 0$, значит, оно определяет центральную линию.

Зачем это нужно? Чтобы выбрать наиболее выгодный способ решения. Да, конечно, ваш учебный план может и не предоставить возможность выбора, но, тем не менее, я постараюсь провести вас через дебри самой комфортной и короткой тропинкой.

Для приведения уравнения *центральной линии*, по моему мнению, лучше всего использовать ***метод инвариантов***. Но, к сожалению, он перестаёт работать в *нецентральном* случае, поэтому на помощь придётся привлечь достаточно трудоёмкий ***универсальный способ решения*** либо **ортогональное преобразование квадратичной формы** *(но тут уже надо ориентироваться в другой теме)*. Сначала разберём одно, затем другое, и даже если вам нужно разделаться лишь с *нецентральной линией*, постарайтесь не пропускать нижеследующий параграф, поскольку вся информация взаимосвязана:

➢ Приведение уравнения центральной линии. Метод инвариантов

Во-первых, термин. ***Инвариант* – это величина, которая остаётся неизменной при тех или иных преобразованиях.**

Простейший пример геометрического инварианта – это длина отрезка относительно его параллельного переноса. В результате данного преобразовании меняются координаты концов отрезка, но его длина остаётся неизменной (инвариантной).

В частности, **длина, ширина** и **толщина** учебника Фихтенгольца *(который можно положить на стол, на стул, на кровать, под кровать, в мусорное ведро)* – это инварианты относительно перемещения книги в пространстве. А вот если ненавистный томик порвать в клочья, то его размеры уже перестанут быть инвариантами относительно этих механических повреждений. Но инвариантом останется сам математический анализ. Так что рви, не рви, а осваивать его придётся ☺

Однако вернёмся к нашему демонстрационному уравнению:

$$13x^2 + 18xy + 37y^2 - 26x - 18y - 27 = 0$$

Очевидно, что можно выбрать бесконечно много других прямоугольных систем координат и получить бесконечно много различных уравнений вида $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$, которые задают один и тот же эллипс.

И возникает вопрос: а есть ли у этого множества уравнений что-то одинаковое, характерное **только для данной линии**? Иными словами, есть ли инварианты?

Да, есть!

Если линия второго порядка задана $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$ – общим уравнением в некоторой прямоугольной системе координат, то **инвариантами относительно поворота и параллельного переноса прямоугольной системы координат** являются следующие **ЧИСЛА**:

$S=A+C$ – сумма коэффициентов при x^2, y^2,

старый знакомец …

и ещё один определитель: $\Delta=\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$.

Рассмотрим исходное уравнение $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$ и поставим задачу подобрать новую прямоугольную систему координат $\tilde{O}\tilde{X}\tilde{Y}$ **ТАК**, чтобы уравнение данной линии приняло в ней вид $A_1\tilde{x}^2+C_1\tilde{y}^2+F_1=0$ (который элементарно сводится к канонической форме). Заметим попутно логичную вещь – коэффициенты итогового уравнения, «отвечающие» за поворот и параллельный перенос равны нулю: $B_1=D_1=E_1=0$

Поскольку инварианты (числа) S, δ, Δ **НЕ ЗАВИСЯТ** от коэффициентов того или иного уравнения, то справедливыми являются следующие равенства:

$S=A+C=A_1+C_1$

$\delta=...$

$$\Delta=\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ B_1 & C_1 & E_1 \\ D_1 & E_1 & F_1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & F_1 \end{vmatrix}=A_1C_1F_1$$

откуда следует простой и изящный **алгоритм решения** нашей задачи:

1) Из исходного уравнения находим числа $S=A+C,\quad ...,\quad \Delta=\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$.

2) Решаем систему $\begin{cases} A_1+C_1=S \\ A_1C_1=\delta \\ A_1C_1F_1=\Delta \end{cases}$ и записываем уравнение $A_1\tilde{x}^2+C_1\tilde{y}^2+F_1=0$, которое легко приводится к каноническому виду. При этом угол поворота новой системы координат $\tilde{O}\tilde{X}\tilde{Y}$ относительно старой системы OXY находится из уравнения $tg2\alpha=\dfrac{2B}{A-C}$.

Если $A-C=0$, то угол равен либо $\alpha=\dfrac{\pi}{4}\ рад.=45^\circ$, либо $\alpha=-\dfrac{\pi}{4}$ и это недостаток формулы. Но это не беда. Потому что есть другая формула: …. Координаты нового начала координат $\tilde{O}(x_0;\,y_0)$ отыскиваются как решение системы ….

Таким образом, решение нашей задачи укладывается в стройную и понятную схему, доступную даже школьнику. Выясним же, наконец, как из потрёпанного уравнения $13x^2+18xy+37y^2-26x-18y-27=0$ получается канонический эллипс $\frac{\tilde{x}^2}{2^2}+\tilde{y}^2=1$:

Задача 111

Привести уравнение линии второго порядка к каноническому виду

$13x^2+18xy+37y^2-26x-18y-27=0$

Найти начало соответствующей системы координат и угол её поворота

Решение: перейдём к новой прямоугольной системе координат $\tilde{O}\tilde{X}\tilde{Y}$, в которой уравнение данной линии примет вид $A_1\tilde{x}^2+C_1\tilde{y}^2+F_1=0$.

На первом шаге из исходного уравнения находим коэффициенты A, B, C, D, E, F.

В тетради это удобно сделать следующим образом:

…

Здесь важно не потерять «минусы», а также **не забыть разделить пополам** нужные числа. Кроме того, **некоторые слагаемые могут отсутствовать**, и тогда соответствующие коэффициенты будут равны нулю – **не спешим и не путаемся!** В нашем случае всё на месте и, соответственно, все коэффициенты ненулевые:

$A=13,\ B=9,\ C=37,\ D=-13,\ E=-9,\ F=-27$

Вычислим инварианты:

$S=A+C=13+37=50$

$\delta=...$

Последний определитель выгодно раскрыть с помощью **элементарного преобразования**, прибавив к третьей строке первую строку:

$$\Delta=\begin{vmatrix}A & B & D\\ B & C & E\\ D & E & F\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}13 & 9 & -13\\ 9 & 37 & -9\\ -13 & -9 & -27\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}13 & 9 & -13\\ 9 & 37 & -9\\ 0 & 0 & -40\end{vmatrix}=-40\cdot\begin{vmatrix}13 & 9\\ 9 & 37\end{vmatrix}=-40\cdot 400$$

Инварианты найдены, составим и решим систему:

$$\begin{cases}A_1+C_1=S\\ A_1C_1=\delta\\ A_1C_1F_1=\Delta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A_1+C_1=50\\ A_1C_1=400\\ A_1C_1F_1=-40\cdot 400\end{cases}$$

Из последних двух уравнений сразу просматривается значение коэффициента F_1:

поскольку $A_1C_1=400$, то, подставляя это произведение в 3-е уравнение, получаем:

$400\cdot F_1=-40\cdot 400\quad\Rightarrow\quad F_1=-40$

Но тут важнее разобраться с другими коэффициентами. Есть длинный путь, и есть короткий. **Путь длинный**: из 1-го уравнения выражаем $C_1 = 50 - A_1$ – подставляем во второе уравнение:

$$A_1C_1 = 400$$
$$A_1(50 - A_1) = 400$$
$$-A_1^2 + 50A_1 = 400$$
$$A_1^2 - 50A_1 + 400 = 0$$

Решим **квадратное уравнение**:

$$D = 2500 - 1600 = 900$$
$$\sqrt{D} = \sqrt{900} = 30$$

В результате получается два комплекта симметричных корней:

1) $A_1 = \dfrac{50-30}{2} = 10 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 50 - A_1 = 50 - 10 = 40$

2) $A_1 = \dfrac{50+30}{2} = 40 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 50 - A_1 = 50 - 40 = 10$

Путь короткий, к которому я рекомендую «пристреляться», в том числе, и «чайникам». Это подбор корней. Смотрим на первые два уравнения системы: $\begin{cases} A_1 + C_1 = 50 \\ A_1C_1 = 400 \end{cases}$. Прикидку можно делать либо по первому уравнению, либо по второму, кому как удобнее. Лично я привык ориентироваться по сумме коэффициентов. Правдоподобных вариантов здесь не так и много:

0 и 50

10 и 40 – удовлетворяет и первому и второму уравнению

20 и 30

30 и 20

40 и 10 – симметричная пара корней

50 и 0

Как видите, на подходящую пару чисел мы «натыкаемся» практически сразу. В силу симметричности уравнений решением будут являться и «зеркальные» значения 40 и 10.

Таким образом, в нашем распоряжении оказывается два набора корней:

…

Не забываем выполнить проверку, подставив значения первого (можно второго) комплекта в левую часть **каждого** уравнения системы:

$$A_1 + C_1 = 10 + 40 = 50$$
$$A_1C_1 = 10 \cdot 40 = 400$$
$$A_1C_1F_1 = 10 \cdot 40 \cdot (-40) = -40 \cdot 400$$

В результате получены соответствующие правые части исходных уравнений, что и требовалось проверить.

Теперь мысленно либо на черновике следует выяснить, какое решение приведёт нас к желаемому результату.

Подставляем первый комплект корней $A_1 = 10,\ C_1 = 40,\ F_1 = -40$ в уравнение $A_1\tilde{x}^2 + C_1\tilde{y}^2 + F_1 = 0$:

$$10\tilde{x}^2 + 40\tilde{y}^2 - 40 = 0$$

Техника завершающих преобразований хорошо знакома:

$$10\tilde{x}^2 + 40\tilde{y}^2 = 40$$

$$\frac{10\tilde{x}^2}{40} + \frac{40\tilde{y}^2}{40} = 1$$

$$\frac{\tilde{x}^2}{\frac{40}{10}} + \frac{\tilde{y}^2}{\frac{40}{40}} = 1$$

$$\frac{\tilde{x}^2}{4} + \frac{\tilde{y}^2}{1} = 1$$

$\frac{\tilde{x}^2}{2^2} + \frac{\tilde{y}^2}{1^2} = 1$ – эллипс с центром в точке $\tilde{O}(x_0;\ y_0)$, большой полуосью $a = 2$, малой полуосью $b = 1$.

Такой фразы будет достаточно – нас никто не спрашивал про фокусы, эксцентриситет и другие характеристики линии.

Всё вышло удачно с первой попытки. Если в уравнение $A_1\tilde{x}^2 + C_1\tilde{y}^2 + F_1 = 0$ подставить второй набор корней $A_1 = 40, C_1 = 10, F_1 = -40$, то получится неканоническая запись того же эллипса $\frac{\tilde{x}^2}{1^2} + \frac{\tilde{y}^2}{2^2} = 1$ – повёрнутого на 90 градусов.

Найдём угол поворота новой системы координат $\tilde{O}\tilde{X}\tilde{Y}$ относительно старой:

$$tg\,2\alpha = ... = \frac{18}{-24} = -\frac{3}{4}$$

$$2\alpha = arctg\left(-\frac{3}{4}\right) = -arctg\,\frac{3}{4}$$

$$\alpha = -\frac{1}{2}arctg\,\frac{3}{4} \approx -0{,}32 \text{ рад.} \approx -18^\circ$$

Или по второй, более лёгкой, но почему-то менее распространённой формуле:

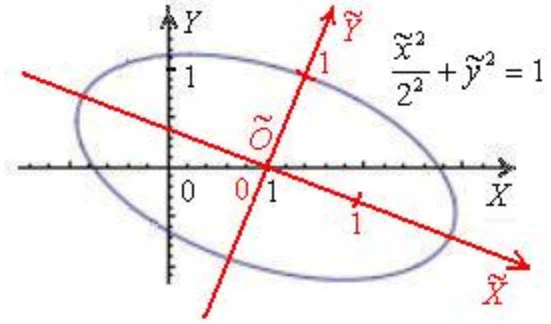
$$tg\,\alpha = ... = -\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha = -arctg\,\frac{1}{3} \approx -0{,}32 \text{ рад.} \approx -18^\circ$$

Координаты $x_0;\ y_0$ начала новой системы координат $\tilde{O}\tilde{X}\tilde{Y}$ найдём как решение системы: ... $\Rightarrow \begin{cases} 13x_0 + 9y_0 - 13 = 0 \\ 9x_0 + 37y_0 - 9 = 0 \end{cases}$

Первое уравнение умножим на 9, второе уравнение умножим на 13 и из 2-го уравнения почленно вычтем 1-е *(проще способа не видно)*:

$\begin{cases} 117x_0 + 81y_0 - 117 = 0 \\ 117x_0 + 481y_0 - 117 = 0 \end{cases} \Rightarrow 400y_0 = 0 \Rightarrow \quad y_0 = 0,\ x_0 = 1$, таким образом: $\tilde{O}(1;\,0)$.

В том случае если по условию необходимо выполнить чертёж – выполняем чертёж, приведённый выше. Впрочем, мне нетрудно скопировать:



Ввиду сложности чертежа вполне допустимо его схематичное оформление, однако всё-таки постарайтесь, чтобы рисунок был похож на правду. Как вариант, можно изобразить только новую систему координат $\tilde{O}\tilde{X}\tilde{Y}$ и эллипс в горизонтальном положении, но тогда прокомментируйте, что она получена поворотом системы OXY на угол $\alpha = ... \approx -18°$ и её параллельным переносом в точку $\tilde{O}(1;0)$.

Ответ: $\frac{\tilde{x}^2}{2^2}+\frac{\tilde{y}^2}{1^2}=1$ – эллипс с полуосями $a=2, b=1$ – в системе координат $\tilde{O}\tilde{X}\tilde{Y}$ с началом в точке $\tilde{O}(1;0)$, повёрнутой относительно исходной системы координат OXY на угол $\alpha = -\frac{1}{2}arctg\frac{3}{4} \approx -0{,}32$ рад. $\approx -18°$.

Это мы рассмотрели так называемый ***эллиптический случай***, когда коэффициенты A_1, C_1 – отличны от нуля и одного знака (оба положительны либо оба отрицательны), т.е. когда их произведение $A_1C_1 > 0$.

И в этом случае может получиться не только эллипс. Если **все три** коэффициента A_1, C_1, F_1 одного знака, то это мнимый эллипс. Так, если бы в рассмотренной задаче мы получили уравнение $10\tilde{x}^2+40\tilde{y}^2+40=0$, то пришли бы к уравнению $\frac{\tilde{x}^2}{2^2}+\frac{\tilde{y}^2}{1^2}=-1$. Причём, весь алгоритм и порядок оформления остались бы прежними + приятный бонус – отсутствие чертежа, поскольку мнимый эллипс остаётся разве что мнить =)

Ещё одна разновидность эллиптического случая – нулевой свободный член: $F_1=0$, предвестником которого является нулевой третий инвариант: $\Delta=0$. В частности, уравнение $10\tilde{x}^2+40\tilde{y}^2=0$ сводится к виду $\frac{\tilde{x}^2}{2^2}+\frac{\tilde{y}^2}{1^2}=0$ – и это пара мнимых пересекающихся прямых с единственной действительной точкой их пересечения $\tilde{O}(0;0)$ (с нулевыми координатами в **новой** системе координат $\tilde{O}\tilde{X}\tilde{Y}$).

Предлагаю самостоятельно ознакомиться с ***гиперболическим случаем***:

Задача 112

Привести уравнение линии второго порядка к каноническому виду

$3x^2+10xy+3y^2-2x-14y-13=0$, найти начало соответствующей системы координат, угол её поворота и выполнить чертёж.

После краткого образца решения есть важные дополнительные комментарии!

Теперь переходим к рассмотрению ***параболического случая*** …, где по очевидной причине метод инвариантов становится непригодным:

➤ Приведение уравнения нецентральной линии

И сейчас мы, по сути, разберём частный случай универсального метода решения, который вкратце состоит в следующем:

На первом шаге выясняется угол поворота системы OXY – угол ТАКОЙ, чтобы **в новой** прямоугольной системе координат $OX'Y'$ исходное уравнение исследуемой линии $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$ приняло вид:

…

На втором шаге выделяются полные квадраты (при необходимости) и проводится параллельный перенос системы $OX'Y'$ началом в точку O' – **такую**, чтобы **в итоговой системе координат** $O'X''Y''$ получилось уравнение $A''x''^2+C''y''^2+F''=0$, от которого до канонической формы рукой подать.

Должен отметить неудачные обозначения со штрихами, но так принято практически во всех учебниках, и поэтому я не буду отклоняться от стандарта. Штрихи, как вы поняли, к **производным** никакого отношения не имеют. В предыдущем параграфе, к слову, я намеренно использовал обозначения $\tilde{O}\tilde{X}\tilde{Y}$, $A_1\tilde{x}^2+C_1\tilde{y}^2+F_1=0$ вместо $O'X''Y''$ и $A''x''^2+C''y''^2+F''=0$ чтобы не привить «чайникам» отвращение к теме.

Таким образом, универсальный способ приведения к линии 2-го порядка к каноническому виду предполагает два последовательных преобразования прямоугольной системы координат – поворот и параллельный перенос:

$$OXY \to OX'Y' \to O'X''Y''$$

Как, наверное, вы уже догадались и горестно вздохнули, удобный метод инвариантов позволял получить то же самое «одним махом»:

$$OXY \to \tilde{O}\tilde{X}\tilde{Y}$$

Но в параболическом случае мы вынуждены выехать с тихой просёлочной дороги метода инвариантов на оживлённую автостраду общего способа решения:

Задача 113

Привести уравнение линии второго порядка к каноническому виду

$$x^2-2xy+y^2-2x+6y+4=0$$

Выполнить чертёж.

Решение: в первую очередь выясним тип линии. Вычислим определитель, составленный из коэффициентов $A=1,\ B=-1,\ C=1$:

…, значит, у нас *нецентральная линия* и это может быть или парабола, или пара параллельных прямых (действительных либо мнимых), или пара совпавших прямых.

1) Осуществим поворот исходной системы координат OXY **ТАК** – чтобы в новой системе $OX'Y'$ получить уравнение вида $A'x'^2+C'y'^2+2D'x'+2E'y'+F'=0$ (без слагаемого, «отвечающего» за поворот).

Искомый угол поворота найдём по формуле:

… или …

***Внимание!* Данная формула справедлива только для параболического случая!**

В нашем примере: $tg\alpha = \dots$.

Очевидно, что $\alpha = arctg1 = \frac{\pi}{4}$ рад. $= 45^\circ$, но здесь не всё так просто. Наверняка многие обратили внимание на тот факт, что если линию 2-го порядка (например, гиперболу) повернуть на 180 градусов, то она совпадёт сама с собой. Исключение составляет капризная парабола, ветви которой развернутся в противоположную сторону. А парабола у нас вполне может нарисоваться, поэтому, необходимо взять на заметку ещё один угол: $\alpha = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$ рад. $(45^\circ + 180^\circ = 225^\circ)$, или, что то же самое: $\alpha = -\frac{3\pi}{4}$ рад. $= -135^\circ$.

Продолжаем:

Если осуществляется поворот прямоугольной системы координат OXY на произвольный угол α и переход к новой системе координат $OX'Y'$, то **формулы перехода от старых координат к новым координатам** выражается следующей системой:

$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}$, где «альфа» – угол данного поворота.

Из тригонометрических формул $tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, $ctg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha}$ нетрудно выразить синус и косинус через известный нам тангенс, однако выражения получатся **не однозначными**:

$$\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{tg^2\alpha + 1}}, \quad \sin\alpha = \pm\frac{tg\alpha}{\sqrt{tg^2\alpha + 1}}$$

И сложившейся ситуации вполне прагматичным решением будет привлечь на помощь метод ~~научного~~ практического тыка. Не теряя времени, начинаем работать с углом $\alpha = \frac{\pi}{4}$ и используем формулы $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{tg^2\alpha + 1}}$, $\sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\sqrt{tg^2\alpha + 1}}$. В результате дальнейших действий может получиться неканоническое уравнение (а это возможно в единственном случае – когда исследуемое уравнение задаёт параболу и она оказывается развёрнутой в другую сторону). Тогда следует рассмотреть противоположный угол поворота $\alpha + \pi$ системы координат, при этом **значение тангенса угла останется тем же самым**: $tg(\alpha + \pi) = tg\alpha$, но формулы сменят знаки: $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{tg^2\alpha + 1}}$, $\sin\alpha = -\frac{tg\alpha}{\sqrt{tg^2\alpha + 1}}$.

Итак, для угла $\alpha = \frac{\pi}{4}$ выбираем первый комплект формул и находим:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{tg^2\alpha + 1}} = \dots$$

$$\sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\sqrt{tg^2\alpha + 1}} = \dots$$

Подставим найденные значения $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ в аналитические выражения поворота $\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}$:

$$\begin{cases} x = x' \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - y' \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \\ y = x' \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + y' \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') \end{cases}$$

Подставляем $x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y')$ и $y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y')$ *(не пугаемся)* в исходное уравнение $x^2 - 2xy + y^2 - 2x + 6y + 4 = 0$:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y')\right)^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y')\frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y')\right)^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') + 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') + 4 = 0$$

Теперь нужно возвести в квадраты, раскрыть все скобки,… но что-то не хочется. Для *нецентральной линии* существует эксклюзивная «фишка»: в результате рассматриваемой подстановки сумма $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ упрощается до Sy'^2, где $S = A + C$ – старый знакомый инвариант. Таким образом, громоздкая сумма первых трёх слагаемых превращается в $(A + C)y'^2 = (1+1)y'^2 = 2y'^2$:

$$2y'^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') + 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') + 4 = 0$$

Внимательно раскрываем скобки и приводим подобные слагаемые. И НЕ ТЕРЯЕМ ШТРИХИ:

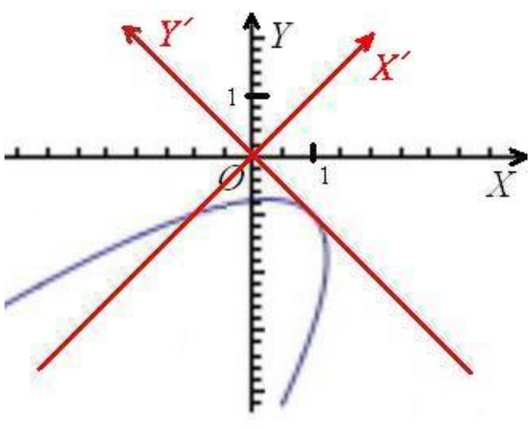
$$2y'^2 - \sqrt{2}x' + \sqrt{2}y' + 3\sqrt{2}x' + 3\sqrt{2}y' + 4 = 0$$

$$2y'^2 + 2\sqrt{2}x' + 4\sqrt{2}y' + 4 = 0$$

И по всем признакам получается как раз парабола. Сократим каждое слагаемое на 2 и перебросим некоторые из них в правую часть:

…

Перед слагаемым, содержащим «икс штрих», нарисовался знак минус, и это плохо. Для лучшего понимания проиллюстрирую выполненное действие готовым чертежом:



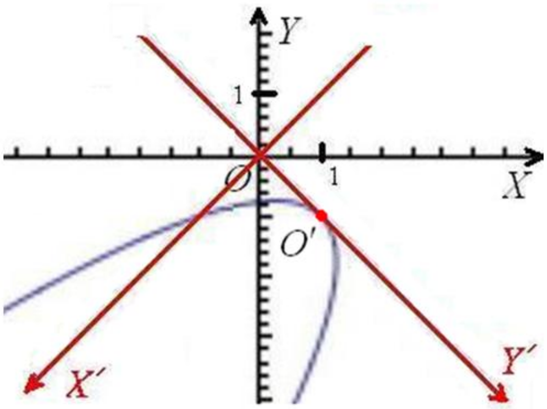
В результате поворота исходной системы координат OXY вокруг точки O на 45 градусов, мы перешли от уравнения $x^2 - 2xy + y^2 - 2x + 6y + 4 = 0$ к уравнению $y'^2 + 2\sqrt{2}y' = -\sqrt{2}x' - 2$ **в новой** системе координат $OX'Y'$. Но загвоздка состоит в том, что ветви параболы направлены «в противоход» оси OX' (наклоните головы влево на 45 градусов), о чём нам и сообщил знак «минус» при переменной x' нового уравнения.

С углом не повезло…, **что делать?**

Если вы уже оформили решение на чистовик (что очень вероятно), то поступаем хитро. Невозмутимо **выделяем в полученном уравнении полный квадрат** и представляем его в виде …:

$$y'^2+2\sqrt{2}y'+(\sqrt{2})^2-2=-\sqrt{2}x'-2$$
$$(y'+\sqrt{2})^2=-\sqrt{2}x'$$

Теперь осуществляем поворот системы $OX'Y'$ **ещё на** π радиан (180 градусов) против часовой стрелки:



При таком «довороте» меняется знак у правой («иксовой») части уравнения, а также знаки внутри скобок:

$$(y'-\sqrt{2})^2=\sqrt{2}x'$$

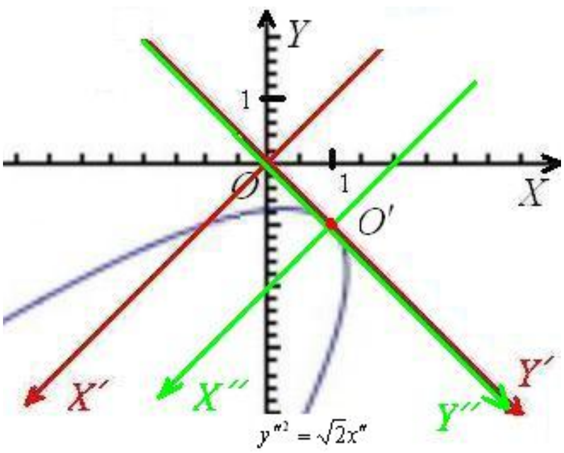
Проведём физкульт-разминку и заодно спасём от онемения некоторые части тела ☺ Пожалуйста, встаньте лицом к монитору и наклонитесь вправо на 90 градусов. Теперь поверните голову ещё на 45 градусов в том же направлении и полюбуйтесь почти канонической параболой.

Если же решение ещё не оформлено на чистовик, то можно сразу выбрать угол $\alpha=-\dfrac{3\pi}{4}$ рад. $=-135^\circ$, тангенс которого тоже равен единице: $tg\,\alpha=tg\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right)=1$, и подставить это значение во второй комплект формул:

$$\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{tg^2\alpha+1}}=-\frac{1}{\sqrt{1^2+1}}=-\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \sin\alpha=-\frac{tg\,\alpha}{\sqrt{tg^2\alpha+1}}=-\frac{1}{\sqrt{1^2+1}}=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$ после

чего «проворачиваем» тот же алгоритм и получаем уравнение $(y'-\sqrt{2})^2=\sqrt{2}x'$.

2) Шаг второй, параллельный перенос системы $OX'Y'$. Полный квадрат у нас уже выделен: $(y'+\sqrt{2})^2=\sqrt{2}x'$ и из этого уравнения следует, что в <u>новой системе</u> $OX'Y'$ вершина параболы имеет координаты $O'(0;\sqrt{2})$ *(смотрим на чертёж под углом* -135°*)*:



Осуществим параллельный перенос системы $OX'Y'$ в точку O', то есть перейдём к новой системе координат $O'X''Y''$. Аналитически это действие выражается заменами $y'-\sqrt{2}=y''$, $x'=x''$, в результате которых получается долгожданное каноническое уравнение:

$$(y'-\sqrt{2})^2=\sqrt{2}x' \Rightarrow y''^2=\sqrt{2}x''$$

Вновь наклонитесь вправо на 135° и в «позе страуса» хорошенько осмыслите выполненные действия ☺

Ответ: данная линия представляет собой параболу $y''^2=\sqrt{2}x''$ – в системе координат $O'X''Y''$, которая получена поворотом системы OXY вокруг своего начала на угол $\alpha=-3\pi/4$ рад. $=-135^\circ$ и её параллельным переносом в точку O'.

Интересно отметить, что для параболы метод инвариантов, хоть и не работает, но тоже позволяет найти её каноническое уравнение. Во-первых, полезно иметь в виду следующий **характеристический признак**: уравнение линии 2-го порядка, инварианты которого удовлетворяют условиям $S \neq 0,\ \delta = 0,\ \Delta \neq 0$, задаёт параболу и только её.

Представьте, что вы видите уравнение $x^2 - 2xy + y^2 - 2x + 6y + 4 = 0$ в первый раз. Да… с оттенком черного юмора получилась фраза =) Выпишем коэффициенты $A = 1,\ B = -1,\ C = 1,\ D = -1,\ E = 3,\ F = 4$ и вычислим инварианты:

$$S = A + C = 1 + 1 = 2 \neq 0, \quad ..., \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

$S \neq 0,\ \delta = 0,\ \Delta \neq 0$, следовательно, данное уравнение определяет именно параболу, а не какую-то другую линию.

И, во-вторых, найденные инварианты позволяют найти фокальный параметр p параболы $y''^2 = 2px''$ по формуле: $p = \sqrt{-\frac{\Delta}{S^3}} = \sqrt{-\frac{-4}{2^3}} = \sqrt{\frac{4}{8}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Таким образом: $y''^2 = 2px'' \quad \Rightarrow \quad y''^2 = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} x'' \quad \Rightarrow \quad y''^2 = \sqrt{2}x''$

Желающие могут использовать данный путь для самопроверки или даже в качестве основного решения в критической ситуации – когда не получается найти уравнение параболы стандартным способом, но жизненно важно «родить» хоть что-то.

Следующий пример для самостоятельной разработки:

Задача 114

Привести уравнение линии второго порядка к каноническому виду

$4x^2 + 4xy + y^2 - 12x - 6y + 5 = 0$, выполнить чертёж, на котором отразить все преобразования системы координат.

Примерный образец чистового оформления задачи в конце книги.

Следует отметить, что на практике достаточно популярна урезанная версия задачи. Случай, когда нужно выполнять только параллельный перенос, досконально изучен в предыдущих параграфах, но бывает и так, что необходимо осуществить только поворот системы координат.

Так, например, в уравнении $x^2 + 4xy + 4y^2 - 9 = 0$ отсутствуют слагаемые, «отвечающие» за параллельный перенос. Угол поворота системы координат находится элементарно: $... \Rightarrow \alpha = arctg\left(-\frac{1}{2}\right) \approx -27^\circ$, и, более того, с помощью магической плюшки $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 \Rightarrow (A + C)y'^2$ легко узнать итоговое уравнение:

$(1 + 4)y'^2 - 9 = 0$

$5y'^2 - 9 = 0 \Rightarrow y'^2 - \frac{9}{5} = 0 \Rightarrow y' = -\frac{3}{\sqrt{5}},\ y' = \frac{3}{\sqrt{5}}$ – две параллельные прямые в системе $OX'Y'$, которая получена поворотом системы OXY на угол $\alpha = arctg\left(-\frac{1}{2}\right) \approx -27^\circ$.

Также полезно знать, что *вырожденное* уравнение параболического типа несложно выразить **в явном виде** и в исходной системе координат, поскольку проходят тривиальные алгебраические преобразования. Так, для того же уравнения $x^2+4xy+4y^2-9=0$:

$$(x+2y)^2-9=0 \Rightarrow (x+2y)^2=9 \Rightarrow x+2y=\pm 3 \Rightarrow \begin{cases} x+2y=3 \\ x+2y=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-\dfrac{x}{2}+\dfrac{3}{2} \\ y=-\dfrac{x}{2}-\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Полученный результат удобно использовать для проверки и выполнения чертежа.

Что касается инвариантов, то дела тут обстоят хуже. Если для параболы мы ещё смогли «вытянуть» некоторую информацию из инвариантов, то здесь будем созерцать малополезный набор $S\neq 0,\ \delta=0,\ \Delta=0$.

Итак, **систематизируем порядок действий в параболическом случае:**

1) Из формулы … либо … находим угол поворота исходной системы координат OXY: …

2) Для данного угла «альфа» рассчитываем $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{tg^2\alpha+1}},\quad \sin\alpha=\dfrac{tg\alpha}{\sqrt{tg^2\alpha+1}}$.

При этом проводим максимальные упрощения: выносим из-под корней всё, что можно вынести, и избавляемся от многоэтажных дробей, если таковые образовались.

3) Подставляем найденные значения $\cos\alpha,\ \sin\alpha$ в формулы поворота $\begin{cases} x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha \\ y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha \end{cases}$.

4) Подставляем найденные выражения $x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha,\quad y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha$ в исходное уравнение $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$, внимательно раскрываем все скобки и приводим подобные слагаемые, в результате чего в новой системе координат $OX'Y'$ должно получиться уравнение вида …, где $S=A+C$.

4*) Примерно в 15% случаев может получиться уравнение, которое определяет параболу, развёрнутую относительно своего канонического положения (положительного направления оси OX') на 180 градусов. Тогда следует использовать хитрый план **или** вернуться к Пункту 2 алгоритма: рассмотреть противоположный угол поворота $\alpha+\pi$ и использовать формулы $\cos\alpha=-\dfrac{1}{\sqrt{tg^2\alpha+1}},\ \sin\alpha=-\dfrac{tg\alpha}{\sqrt{tg^2\alpha+1}}$, не забывая, что само значение тангенса осталось таким же: $tg(\alpha+\pi)=tg\alpha$.

5) В полученном уравнении $Sy'^2+2D'x'+2E'y'+F'=0$ выделяем полный квадрат (если необходимо), в результате чего должно получиться уравнение вида …, где y'_0, K, x'_0 – некоторые константы. И, наконец, после параллельного переноса системы координат $OX'Y'$ началом в точку $O'(x'_0;\, y'_0)$ (замен $y'-y'_0=y'',\quad x'-x'_0=x''$ и перехода к окончательной системе координат $O'X''Y''$) наша цель достигнута: $y''^2+Kx''=0$ – «допиливаем» уравнение до канонического вида.

6) Чертёж. Если совсем тяжко, пойдёт схематический, но проявИте аккуратность.

И в заключение главы коротко об **общем алгоритме решения**, который годится для всех случаев, и из которого, собственно, следуют все рассмотренные выше схемы:

➢ Универсальный метод решения

1) По уравнению $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$ составляем ***характеристическое уравнение*** $\lambda^2-S\lambda+\delta$, где $S=A+C$, … – старые знакомые инварианты.

2) Решаем **квадратное уравнение** $\lambda^2-S\lambda+\delta$ и находим его корни λ_1, λ_2. При любых раскладах это будут действительные корни.

3) Данные корни определяют два угла поворота системы координат OXY, вычисляем их тангенсы: …

Теперь нам нужно выбрать нужный угол (тот, который приведёт к каноническому виду). Выбор осуществляем на черновике, методом «практического тыка». Опытные читатели могут провести анализ в уме или даже сразу «увидеть» желаемый вариант.

4) Начинаем с 1-го угла. Берём значение $tg\alpha_1=\dfrac{\lambda_1-A}{B}$ и рассчитываем косинус и синус этого угла: $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{tg^2\alpha+1}}$, $\sin\alpha=\dfrac{tg\alpha}{\sqrt{tg^2\alpha+1}}$. Найденные значения подставляем в формулы поворота: $\begin{cases} x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha \\ y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha \end{cases}$.

5) Подставляем $x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha$ и $y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha$ в исходное уравнение $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$ и проводим упрощения. Если всё сделано правильно, то должно получиться уравнение вида:

… в системе $OX'Y'$

Но это может оказаться неканоническое уравнение, и тогда Пункты 4, 5 следует проделать для второго угла. Кроме того, в случае с параболой есть ещё одна «заморочка» с углами, которую я подробно осветил в Задаче 113.

6) В уравнении $A'x'^2+C'y'^2+2D'x'+2E'y'+F'=0$ выделяем полные квадраты:

$A''(x'-x'_0)^2+C''(y'-y'_0)^2+F''=0$ и с помощью замен $x'-x'_0=x''$, $y'-y'_0=y''$ (параллельного переноса системы $OX'Y'$ в точку $O'(x'_0;\, y'_0)$) переходим к уравнению:

$A''x''^2+C''y''^2+F''=0$ в системе $O'X''Y''$

7) Доводим уравнение до ума – чтобы получилось одно из этих уравнений.

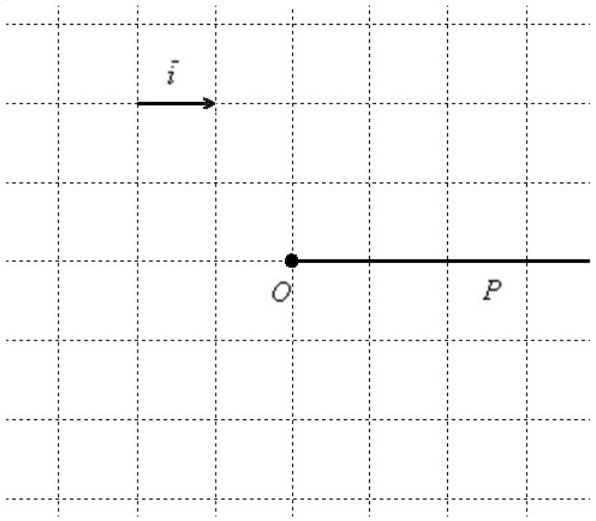
Основная трудность общего способа состоит в его длительности и трудоёмкости, но любители сложностей могут «потягать» им Задачи 111, 112.

Ну а некоторые оказываются любителями поневоле – на первом курсе Физмата мне «повезло» с билетом по аналитической геометрии и я где-то 3 часа мучился с поворотом линии 2-го порядка, решая задачу в общем виде. Поэтому сейчас было бы просто кощунственно скрыть от вас эти знания!

4. Полярная система координат

Помимо аффинной системы координат и её популярного частного случая – *прямоугольной (декартовой) системы*, существуют и другие подходы к построению координатной сетки плоскости и пространства. В частности, на плоскости широкое распространение получила ***полярная система координат***, которая невероятно удобна для решения целого спектра практических задач.

Чтобы определить эту систему, достаточно зафиксировать начало координат O и задать единичный координатный вектор $\bar{i}$:

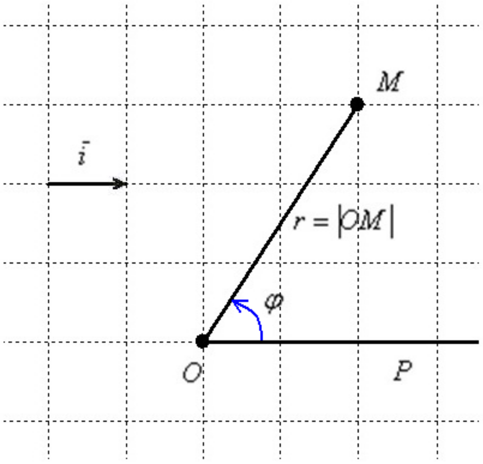


Точка O называется ***полюсом***, а луч OP, сонаправленный с вектором $\bar{i}$ – ***полярной осью***. Графический шаблон – проще некуда, одна точка, один вектор, одна линия.

На практике вместо вектора можно где-нибудь в углу указать масштаб, например: **1 ед. = 1 см** (две тетрадные клетки при ручном построении). По возможности, старайтесь выбирать именно такую, удобную во многих отношениях метрику.

А теперь мякотка:

Любая *отличная от начала координат* точка M плоскости **однозначно** определяется своим **расстоянием** $r = |OM|$ от полюса и *ориентированным* **углом** φ между полярной осью и отрезком OM. Для самого полюса $r = 0$, а угол φ не определён.

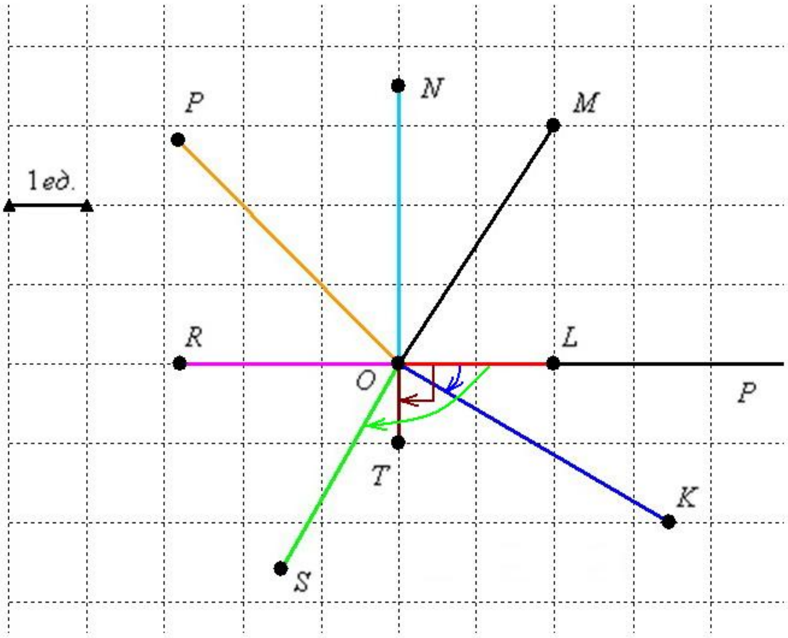


Число $r = |OM|$ называют ***полярным радиусом*** точки M или ***первой полярной координатой***. Расстояние не может быть отрицательным, поэтому полярный радиус любой точки $r \geq 0$. Полярный радиус также обозначают греческой буквой ρ («ро»).

Число φ называют ***полярным углом*** данной точки или ***второй полярной координатой***. Полярный угол чаще отсчитывают в пределах $-\pi < \varphi \leq \pi$ (так называемые *главные значения угла*). Также используется диапазон $0 \leq \varphi < 2\pi$ и даже $0 \leq \varphi < +\infty$.

Пару (r, φ) называют ***полярными координатами*** точки M. Из ΔOMP легко найти и их конкретные значения. По определению тангенса острого угла: $tg\varphi = \frac{MP}{OP} = \frac{3}{2}$ и сам угол: $\varphi = arctg\frac{3}{2} \approx 0{,}98\text{ рад.} \approx 56^\circ$. По теореме Пифагора, $OM^2 = OP^2 + MP^2$, откуда находим: $r = \sqrt{OP^2 + MP^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} \approx 3{,}6$ ед. Таким образом, $M\left(\sqrt{13};\, arctg\frac{3}{2}\right)$.

Один пингвин хорошо, а стая – лучше, **внимательно изучаем их по чертежу:**



$K\left(4;-\frac{\pi}{6}\right)$

$L(2;0)$

$M\left(\sqrt{13};\, arctg\frac{3}{2}\right)$

$N\left(\frac{7}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

$P\left(5;\frac{3\pi}{4}\right)$

$R(2{,}8;\pi)$

$S\left(3;-\frac{2\pi}{3}\right)$

$T\left(1;-\frac{\pi}{2}\right)$

При желании к любому *отрицательно ориентированному* углу можно «прикрутить» один оборот (2π рад.) и получить табличные значения:

$$\varphi_K=-\frac{\pi}{6}+2\pi=\frac{11\pi}{6},\quad \varphi_S=-\frac{2\pi}{3}+2\pi=\frac{4\pi}{3},\quad \varphi_T=-\frac{\pi}{2}+2\pi=\frac{3\pi}{2}$$

Но недостаток этих «традиционно» ориентированных углов состоит в том, что они слишком далеко (более чем, на 180 градусов) «закручены» против часовой стрелки. Ну а в математике ценятся самые короткие и рациональные пути, не говоря уже о физике.

4.1. Порядок и техника построения точек в полярных координатах

Красивые картинки – красивы, однако построение в полярной системе координат – занятие достаточно кропотливое. Трудностей не возникает с точками, у которых полярные углы равны $\varphi=0, \varphi=\pm\frac{\pi}{2}, \varphi=\pi$, в нашем примере …, $\left(1;-\frac{\pi}{2}\right)$. Особых хлопот также не доставляют значения, кратные 45 градусам: $P\left(5;\frac{3\pi}{4}\right)$. Но как правильно и грамотно построить от руки, скажем, точку $S\left(3;-\frac{2\pi}{3}\right)$?

Потребуется клетчатый лист бумаги, карандаш и следующие чертёжные инструменты: линейка, циркуль, транспортир. В крайнем случае, можно обойтись одной линейкой, а то… и вообще без неё! Читайте дальше и вы получите ещё одно доказательство, что эта страна непобедима =)

Задача 115

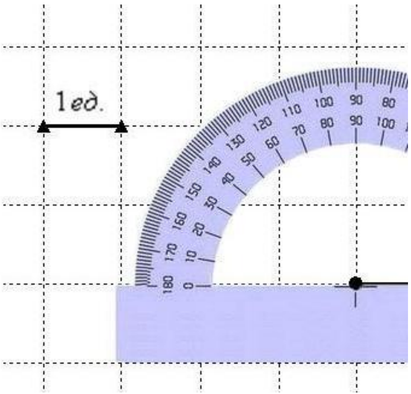
Построить точку $S\left(3;-\frac{2\pi}{3}\right)$ в полярной системе координат.

Строим!

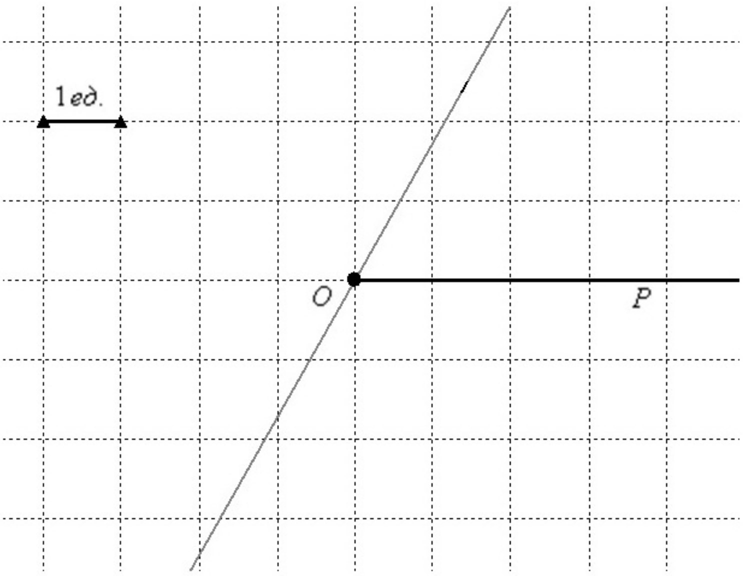
Прежде всего, выясним градусную меру угла $-\frac{2\pi}{3}$. Если угол малознаком или вас есть сомнения, то лучше воспользоваться Таблицей либо формулой перевода радианов в градусы *(см. Приложение* ***Тригонометрия****)*. Итак, наш угол составляет -120° (или 240°).

Начертим полярную систему координат и возьмём в руки транспортир. Обладателям круглого инструмента не составит труда отмерить 240 градусов, но с большой вероятностью у вас на руках будет полукруглая версия девайса. Проблема полного отсутствия транспортира при наличии принтера и ножниц **решается рукоделием**.

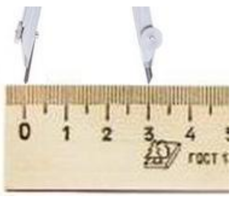
Есть два пути: перевернуть тетрадный лист и отмерить 120 градусов, либо «прикрутить» пол оборота и рассмотреть противоположный угол $-\frac{2\pi}{3}+\pi=\frac{\pi}{3}$. Выберем взрослый способ и сделаем отметку в 60 градусов:



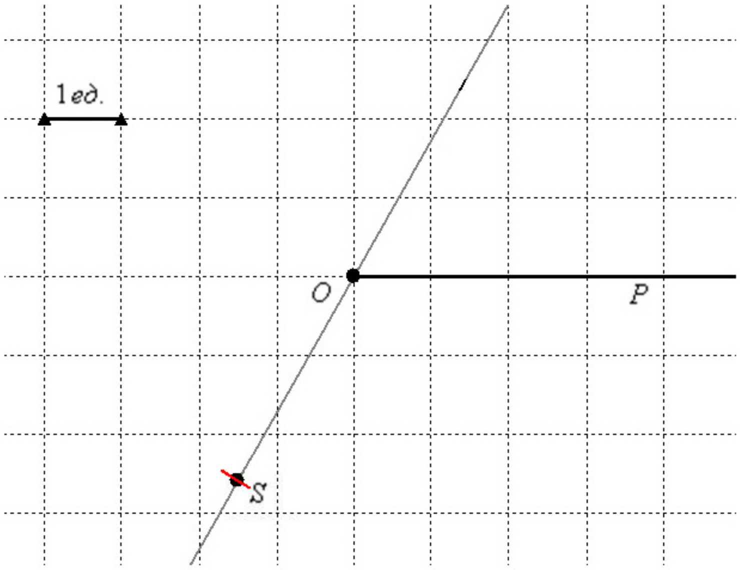
Проводим карандашом тонкую-тонкую прямую, проходящую через полюс и сделанную отметку:



С углом разобрались, на очереди полярный радиус. Берём в руки циркуль и **по линейке** устанавливаем его раствор в 3 единицы, чаще всего, это, конечно же, сантиметры:



Теперь аккуратно устанавливаем иглу на полюс, и вращательным движением выполняем небольшую засечку (красный цвет). Искомая точка $S\left(3; -\frac{2\pi}{3}\right)$ построена:

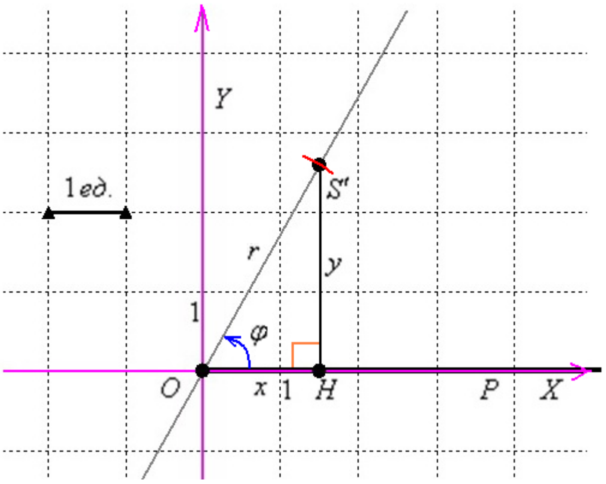


Можно обойтись без циркуля, приложив линейку непосредственно к построенной прямой и отмерив 3 сантиметра. Но, как мы увидим позже, в задачах на построение типична ситуация, когда нужно отметить две или бОльшее количество точек с одним и тем же полярным радиусом, поэтому эффективнее закалять металл. В частности, на нашем чертеже, развернув ногу циркуля на 180 градусов, легко сделать вторую засечку и построить симметричную относительно полюса точку $S'\left(3; \frac{\pi}{3}\right)$.

На ней и отработаем материал следующего параграфа:

4.2. Взаимосвязь прямоугольной и полярной системы координат

Очевидным образом *присоединим* к полярной системе прямоугольную систему координат OXY и изобразим на чертеже точку $S'\left(3; \frac{\pi}{3}\right)$:



Установим взаимосвязь полярных $(r; \varphi)$ и декартовых $(x; y)$ координат на примере конкретной точки S'. Рассмотрим прямоугольный $\Delta OHS'$, в котором гипотенуза равна полярному радиусу: $OS' = r$, а катеты – «иксовой» и «игрековой» координатам точки S' в декартовой системе координат: $OH = x,\ HS' = y$. Тогда:

$$\sin\varphi = \frac{HS'}{OS'} = \ldots$$

$$\cos\varphi = \frac{OH}{OS'} = \ldots$$

Вычислим координаты точки $S'\left(3; \frac{\pi}{3}\right)$ в прямоугольной системе координат:

$$x = \ldots = 3\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$y = \ldots = 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2{,}6$$

Таким образом: $S'\left(\frac{3}{2}; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

Полученные формулы открывают ещё одну лазейку в задаче построения, когда можно обойтись вообще без транспортира: сначала находим декартовы координаты точки *(понятно, на черновике)*, затем мысленно находим нужное место на чертеже и отмечаем данную точку. Затем проводим тонкую прямую, которая проходит через построенную точку и полюс. В результате получается, что угол якобы был отмерян транспортиром.

Совсем отчаянные студенты могут обойтись даже без линейки, используя вместо неё ровный край учебника, тетради или зачётной книжки – ведь о метрике позаботились производители тетрадей, 1 клетка = 5 мм. Впрочем, китайцы подпортили стандарт :)

Используя ту же теорему Пифагора, легко получить формулы обратного перехода – от декартовой к полярной системе: поскольку $\sqrt{OH^2 + HS'^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = r$, следовательно:

$\cos\varphi = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, откуда легко найти угол φ.

$\sin\varphi = ...$

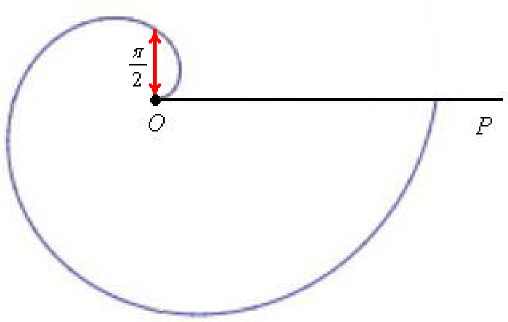
После подробного разбора полётов с отдельно взятыми точками перейдём к закономерному продолжению темы:

4.3. Уравнение линии в полярных координатах. Простейшие примеры

По существу, уравнение линии в полярной системе координат представляет собой **функцию полярного радиуса** $r = r(\varphi)$ **от полярного угла (аргумента)**. При этом полярный угол учитывается в радианах (!) и *непрерывно* принимает значения от 0 до 2π *(иногда следует рассмотреть до бесконечности, или же в ряде задач для удобства от* $-\pi$ *до* π*)*. Каждому значению угла «фи», которое входит в **область определения** функции $r = r(\varphi)$, соответствует единственное значение полярного радиуса.

Полярную функцию можно сравнить со своеобразным радаром – когда луч света, исходящий из полюса, вращается против часовой стрелки и «прорисовывает» линию.

«Дежурным» примером полярной кривой является *Архимедова спираль* $r = \varphi$. На следующем рисунке изображен её *первый виток* – когда полярный радиус вслед за полярным углом принимает значения от 0 до 2π:



Далее, пересекая полярную ось в точке $r = \varphi = 2\pi$, спираль продолжит раскручиваться, бесконечно далеко удаляясь от полюса. Но подобные случаи на практике встречаются довольно редко; более типичная ситуация, когда на всех последующих оборотах мы «пройдёмся по той же самой линии», которая получена в диапазоне $0 \le \varphi < 2\pi$.

В первом же примере мы сталкиваемся и с понятием ***области определения*** полярной функции: поскольку полярный радиус неотрицателен $r \ge 0$, то отрицательные углы у функции $r = \varphi$ рассматривать нельзя.

! Примечание: *в ряде случаев принято использовать* ***обобщённые полярные координаты****, где радиус может быть отрицательным, и такой подход мы вкратце изучим чуть позже*

Кроме спирали Архимеда, есть множество других известных кривых, но искусством, как говорится, сыт не будешь, поэтому я подобрал примеры, которые очень часто встречаются в реальных практических заданиях.

Сначала простейшие уравнения и простейшие линии:

…

Уравнение вида задаёт *луч*, исходящий из полюса. Действительно, вдумайтесь, если значение угла **всегда** (каким бы ни было «эр») постоянно, то какая это линия?

Примечание: *в обобщённой полярной системе координат данное уравнение задаёт прямую, проходящую через полюс.*

Уравнение вида … определяет… догадайтесь с первого раза – если **для любого** угла «фи» радиус остаётся постоянным? Фактически это определение окружности с центром в полюсе радиуса K.

Например, $r = 2$. Для наглядности найдём уравнение этой линии в прямоугольной системе координат. Используя полученную ранее формулу $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, проведём замену:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2$$

Возведём обе части в квадрат:

$x^2 + y^2 = 2^2$ – уравнение окружности с центром в начале координат радиуса 2, что и требовалось проверить.

А теперь оценИте удобство – с окружностью значительно выгоднее работать именно в полярных координатах по причине предельной простоты уравнения $r = const$.

Рассмотрим более содержательные задачи на построение:

Задача 116

Построить линию …

Решение: в первую очередь найдём *область определения*. Так как полярный радиус неотрицателен, то должно выполняться неравенство $\cos\varphi \geq 0$. Можно вспомнить школьные правила решения тригонометрических неравенств, но в простых случаях как этот, я советую более быстрый графический метод решения:

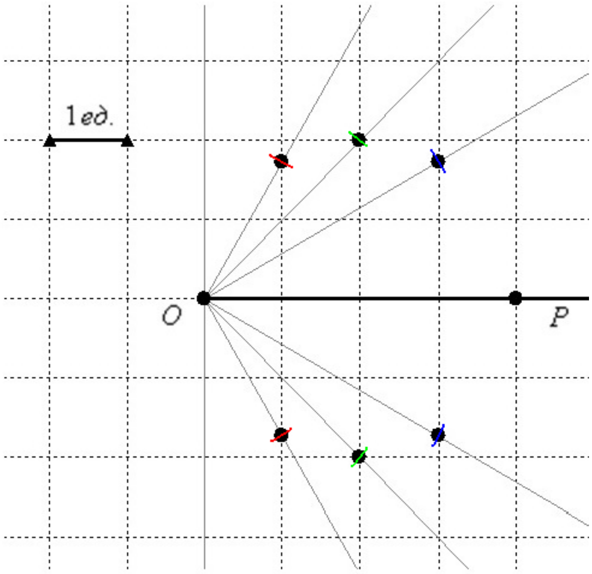
– Посмотрим на график функции $y = \cos x$ *(см. Приложение **Тригонометрия**)*. Что означает неравенство $\cos\varphi \geq 0$? Оно означает, что нас устраивает тот кусок графика, который **не ниже** *оси абсцисс* $(x = 0)$, а именно, его часть на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. И, соответственно, интервал $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ не подходит. Таким образом, область определения нашей функции: $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то есть график $r = 4\cos\varphi$ расположен справа от полюса (по терминологии декартовой системы – в правой полуплоскости).

В полярных координатах часто бывает смутное представление о том, какую линию определяет то или уравнение, поэтому чтобы её построить, необходимо найти принадлежащие ей точки – и чем больше, тем лучше. Обычно ограничиваются десятком-другим (а то и меньшим количеством). Проще всего, конечно же, взять табличные значения угла.

Для бОльшей ясности к отрицательным значениям угла я буду «прикручивать» один оборот *(левая колонка)*, и в силу чётности косинуса $\cos(-\varphi)=\cos\varphi$ соответствующие положительные значения можно заново не считать *(справа)*:

$\varphi=-\frac{\pi}{2} \Rightarrow r=4\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=4\cos\frac{3\pi}{2}=4\cdot 0=0$ $\varphi=-\frac{\pi}{3} \Rightarrow r=4\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=4\cos\frac{5\pi}{3}=4\cdot\frac{1}{2}=2$ $\varphi=-\frac{\pi}{4} \Rightarrow r=4\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=4\cos\frac{7\pi}{4}=4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 2{,}83$ $\varphi=-\frac{\pi}{6} \Rightarrow r=4\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=4\cos\frac{11\pi}{6}=4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 3{,}46$ $\varphi=0 \Rightarrow r=4\cos 0=4\cdot 1=4$	$\varphi=\frac{\pi}{6} \Rightarrow r\approx 3{,}46$ $\varphi=\frac{\pi}{4} \Rightarrow r\approx 2{,}83$ $\varphi=\frac{\pi}{3} \Rightarrow r=2$ $\varphi=\frac{\pi}{2} \Rightarrow r=0$

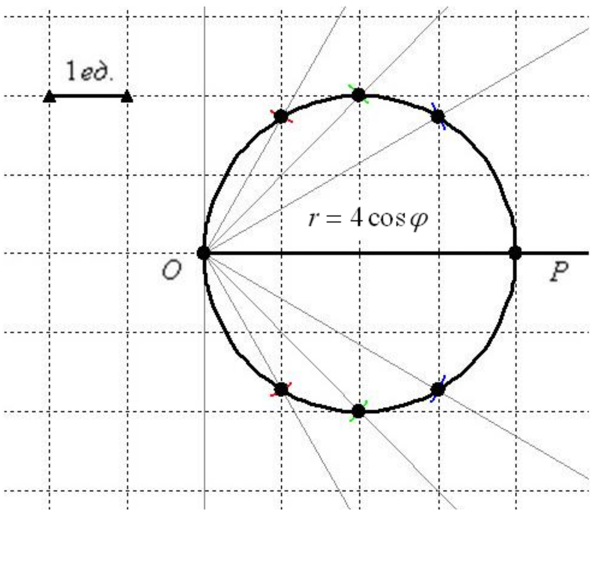
Изобразим полярную систему координат и отложим найденные точки, при этом одинаковые значения «эр» удобно откладывать за один раз, делая парные засечки циркулем по рассмотренной ранее технологии:



В принципе, линия отчётливо прорисовывается, но чтобы стопроцентно подтвердить догадку, давайте найдём её уравнение в декартовой системе координат. Можно применить недавно выведенные формулы $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\cos\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, но я расскажу вам о более хитром приёме.

Обе части уравнения $r=4\cos\varphi$ искусственно домножаем на «эр»: $r^2=4r\cos\varphi$ и используем более компактные формулы перехода: $r^2=x^2+y^2,\ r\cos\varphi=x \Rightarrow x^2+y^2=4x$

Выделяя полный квадрат, приводим уравнение к понятному виду:



$$x^2-4x+y^2=0$$

$$x^2-4x+4+y^2=4$$

$(x-2)^2+y^2=2^2$ – уравнение окружности с центром в точке $(2;0)$, радиуса 2.

Коль скоро по условию требовалось просто выполнить построение и всё, плавно соединяем найденные точки линией. Ничего страшного, если получится немного неровно, вы же не обязаны были знать, что это окружность ;-)

Почему мы не рассмотрели значения угла вне промежутка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$? Ответ прост: нет смысла. Ввиду периодичности функции $r = 4\cos\varphi$ нас ждёт бесконечный «бег» по построенной окружности.

Несложно провести нехитрый анализ и прийти к выводу, что уравнение вида … задаёт окружность диаметра d с центром в точке $\left(\frac{d}{2}; 0\right)$. Образно говоря, все такие окружности «сидят» на полярной оси OP и обязательно проходят через полюс. Если же $d < 0$, то весёлая компания перекочует налево – на продолжение полярной оси (подумайте, почему).

Похожая задача для самостоятельного решения:

Задача 117

Построить линию $r = 3\sin\varphi$ и найти её уравнение в декартовой системе координат.

Систематизируем порядок решения задачи:

Находим *область определения функции*, для этого удобно посмотреть на синусоиду *(Приложение **Тригонометрия**)*, чтобы сразу же понять, где синус неотрицателен.

На втором шаге рассчитываем полярные координаты точек, используя табличные значения углов; проанализируйте, нельзя ли сократить количество вычислений?

На третьем шаге откладываем точки в полярной системе координат и аккуратно соединяем их линией.

И, наконец, находим уравнение линии в декартовой системе координат.

Примерный образец решения в конце книги.

Общий алгоритм и технику построения в полярных координатах мы детализируем **и существенно ускорим** совсем скоро, но перед этим познакомимся ещё с одной распространённой линией:

4.4. Полярная роза

Совершенно верно, речь пойдёт о цветке с лепестками:

Задача 118

Построить линии, заданные уравнениями в полярных координатах

а) $r = 2\sin 2\varphi$, б) $r = 2\sin 3\varphi$

Существует два подхода к построению полярной розы. Сначала пойдём по накатанной колее, считая, что полярный радиус не может быть отрицательным:

Решение: **а)** Найдём область определения функции:

$r \ge 0 \Rightarrow \sin 2\varphi \ge 0$

Неравенство решим графически. Согласно **геометрическим преобразованиям графиков**, если аргумент функции умножить на $k > 1$, то её график сожмётся к оси OY в k раз. Смотрим на **нашу синусоиду** и отвечаем на вопрос: на каких промежутках она *не ниже* оси абсцисс?

Неравенству … удовлетворяет бесконечно много отрезков, но нас интересуют только два, и *область определения* нашей функции: $\varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Возможно, некоторым читателям более лёгким покажется аналитический способ нахождения области определения, условно назову его «нарезка круглого пирога». Резать будем **на равные части** и, прежде всего, найдём границы первого куска. Рассуждаем следующим образом: **синус неотрицателен, когда <u>его аргумент</u>** находится в пределах от 0 до π рад. включительно. В нашем примере: $0 \le 2\varphi \le \pi$. Разделив все части двойного неравенства на 2, получаем искомый промежуток: $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$

Теперь начинаем последовательно «нарезать равные куски по 90 градусов» против часовой стрелки:

– найденный отрезок $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, понятно, входит в область определения;

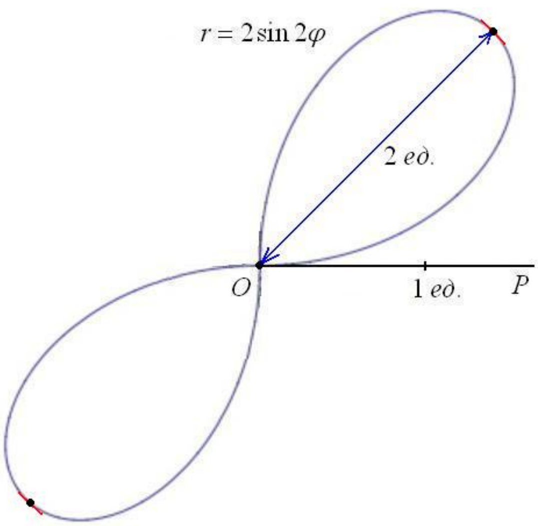
– следующий интервал $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ – не входит;

– следующий отрезок $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ – входит;

– и, наконец, интервал $\left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$ – не входит.

Прямо, как по ромашке – «любит, не любит, любит, не любит» =) С тем отличием, что тут не гадание. …Да, прямо какая-то любовь по-китайски получается….

Итак, $\varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ и линия $r = 2\sin 2\varphi$ представляет собой розу с двумя одинаковыми лепестками. Чертёж вполне допустимо выполнить схематически, однако крайне желательно правильно найти и отметить **вершины лепестков**. Им соответствуют <u>середины отрезков области определения</u>, которые в данном примере имеют очевидные угловые координаты $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}, \varphi_2 = \frac{5\pi}{4}$. При этом **длины лепестков** составляют:



$$r\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = 2\sin\frac{\pi}{2} = 2 \cdot 1 = 2 \text{ ед.}$$

$$r\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 2\sin\left(2 \cdot \frac{5\pi}{4}\right) = 2\sin\frac{5\pi}{2} = 2 \cdot 1 = 2 \text{ ед.}$$

И слева вы видите закономерный результат заботливого садовника.

Следует отметить, что длину лепестка легко сразу усмотреть из уравнения $r = 2\sin 2\varphi$ – так как синус ограничен: $-1 \le \sin 2\varphi \le 1$, то максимальное значение «эр» заведомо не превзойдёт двух.

б) Построим линию, заданную уравнением $r = 2\sin 3\varphi$. Очевидно, что длина лепестка этой розы тоже равна двум, но, прежде всего, нас интересует *область определения*. Применим аналитический метод «нарезки»: **синус неотрицателен, когда его аргумент** находится в пределах от нуля до «пи» включительно, в данном случае: …. Делим все части неравенства на 3 и получаем первый промежуток: $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$. Теперь начинаем «нарезку пирога равными кусками» по $\frac{\pi}{3}$ рад. (60 градусов):

– отрезок $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ войдёт в область определения;

– интервал $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right)$ – не войдёт;

– отрезок $\left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$ – войдёт;

– интервал $\left(\pi; \frac{4\pi}{3}\right)$ – не войдёт;

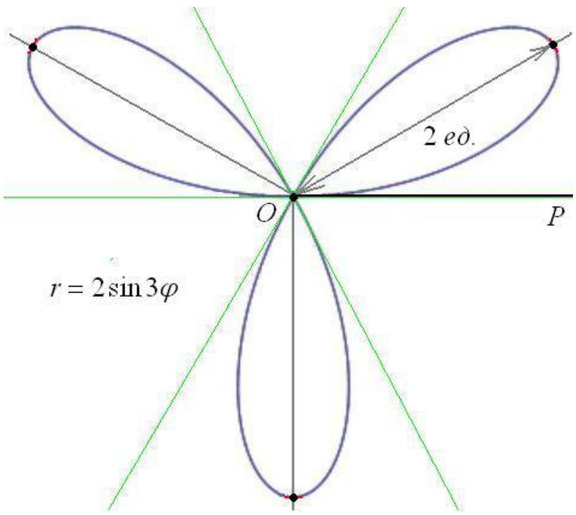
– отрезок $\left[\frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right]$ – войдёт;

– интервал $\left(\frac{5\pi}{3}; 2\pi\right)$ – нет, процесс успешно завершён на отметке 360 градусов.

Таким образом, область определения: ….

Построение. Если в предыдущем пункте всё благополучно обошлось прямыми углами и углами в 45 градусов, то здесь придётся немного повозиться. Найдём **вершины лепестков**. Их длина $r = 2$ была видна с самого начала задания, осталось вычислить угловые координаты, которые равны серединам отрезков области определения:

$\varphi_1 = \frac{0 + \frac{\pi}{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$ рад. (30°), $\varphi_2 = \frac{\frac{2\pi}{3} + \pi}{2} = \frac{5\pi}{6}$ рад. (150°), $\varphi_3 = \frac{\frac{4\pi}{3} + \frac{5\pi}{3}}{2} = \frac{3\pi}{2}$ рад. (270°) а



Обратите внимание, что между вершинами лепестков должны обязательно получиться равные промежутки, в данном случае 120 градусов.

Чертёж желательно разметить на 60-градусные секторы (отграничены зелёными линиями) и провести направления вершин лепестков (серые линии). Сами вершины удобно наметить с помощью циркуля – единожды отмерить по линейке расстояние в 2 единицы и нанести три засечки на прочерченных направлениях в 30, 150 и 270 градусов.

Понимаю, что занятие хлопотное, но если хотите всё оформить по уму, то придётся потратить время.

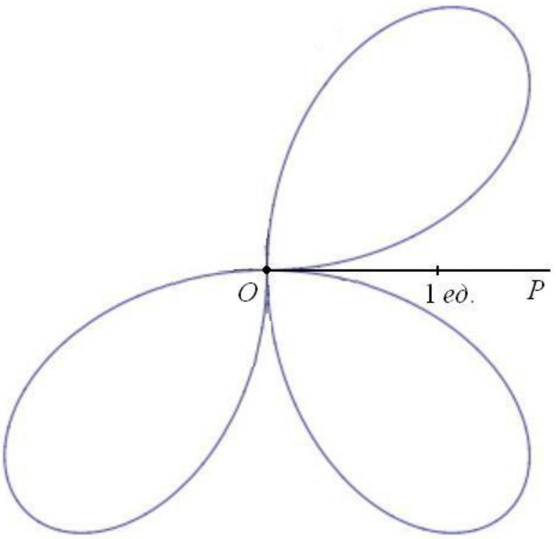
Сформулируем общую формулу: уравнение вида …, k – натуральное), задаёт полярную k-лепестковую розу, длина лепестка которой равна m.

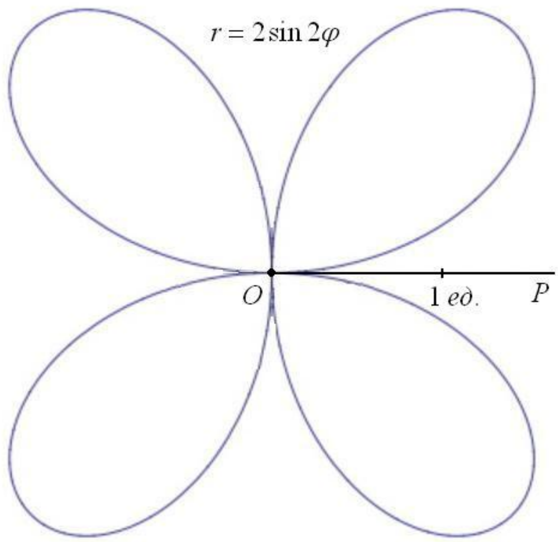
Например, уравнение $r = 5\sin 4\varphi$ задаёт четырёхлистник с лепестком в 5 единиц, уравнение $r = 3\sin 5\varphi$ – 5-лепестковую розу с длиной лепестка в 3 ед. и т.д.

О **втором подходе** я хотел вообще умолчать, однако не могу пройти мимо – уж слишком он распространён. Суть состоит в том, что полярная роза часто рассматривается в ***обобщённых полярных координатах***, где **полярный радиус может быть отрицательным**. Вопрос области определения отпадает, но появляются другие приколы.

Во-первых, разберёмся, как строить точки с отрицательным значением «эр». Если $r < 0$, то нужно **мысленно** найти точку с таким же углом, но радиуса $|r|$ и **отобразить её симметрично** относительно полюса. Вернёмся к первой полярной розе $r = 2\sin 2\varphi$ и рассмотрим интервал $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, на котором полярный радиус отрицателен *(рисунок слева)*. Как, например, изобразить точку $\left(-2; \frac{3\pi}{4}\right)$? **Мысленно** находим точку $\left(2; \frac{3\pi}{4}\right)$ (левый верхний сектор) и отображаем её симметрично относительно полюса в точку $\left(2; -\frac{\pi}{4}\right)$. Таким образом, **когда угол принимает значения из интервала** $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, то **прорисовывается ещё один лепесток в правом нижнем секторе** *(тот же рисунок слева)*.

И, соответственно, когда угол проходит значения $\left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$, то прорисовывается лепесток в противоположном (левом верхнем) секторе *(рисунок справа)*:





Интересно отметить, что при таком подходе роза с нечётным количеством лепестков, в частности, роза $r = 2\sin 3\varphi$ сохраняет своё количество лепестков. А происходит это по одной простой причине: когда угол проходит пустующие секторы *(посмотрите на нижний чертёж предыдущей страницы!)*, то полярный радиус принимает отрицательные значения, и из этих пустых секторов точки отображаются напротив – ровнёхонько накладываясь на «легальные» лепестки.

Сформулируем правило розы для обобщенной системы координат: уравнение вида …, k – натуральное) задаёт полярную розу с длиной лепестка m, при этом:

1) **если k - чётное**, то роза имеет ровно $2k$ лепестков;

2) **если k - нечётное**, то роза имеет ровно k лепестков.

Например, роза $r = \sin 4\varphi$ имеет 8 лепестков, роза $r = \sin 5\varphi$ – пять лепестков, роза $r = \sin 6\varphi$ – 12 лепестков, роза $r = \sin 7\varphi$ – 7 лепестков и т.д.

А почему закономерность столь необычна, я только что проиллюстрировал выше.

Какую систему выбрать, «классическую» или обобщённую? Зависит от вашего учебного плана. **Но по «умолчанию» я бы рекомендовал использовать «обычные» полярные координаты**, ибо, зачем вам лишние вопросы со стороны преподавателя?

Похожая задача для самостоятельного решения:

Задача 119

Построить линии, заданные уравнением в полярных координатах

а) $r = \frac{3}{2}\cos 2\varphi$, б) $r = \cos 3\varphi$

Сформулировать общее правило о количестве и длине лепестков полярной розы вида …, k – натуральное)

В образце приведено решение в «классической» полярной системе.

Повторим схему решения:

– Сначала находим область определения. При этом для лучшего понимания своих действий постарайтесь соотнести аналитический способ «нарезки» с графической интерпретацией. По материалам статьи **геометрические преобразования графиков** выясните, как выглядят, и при необходимости начертите графики функций $y = \cos 2x$, $y = \cos 3x$.

– Находим угловые координаты **вершин лепестков** – они расположены ровно посередине промежутков области определения.

– Выполняем чертёж. Пойдёт схематическая версия, однако желательно разметить найденные секторы и угловые направления вершин лепестков (в случае необходимости – с помощью транспортира). Вершины удобно засекать циркулем, предварительно установив раствор, равный длине лепестка.

Существуют более солидные и общие формулы окружности, полярной розы и желающие могут с ними ознакомиться в других источниках информации. Я лишь ограничился практически значимыми (с моей точки зрения) примерами.

И сейчас мы **систематизируем алгоритм построения линий в полярной системе координат**, и что немаловажно, **значительно ускорим решение:**

4.5. Общий алгоритм и техника построения линий в ПСК

Собственно:

– Сначала нужно построить полярную систему координат: отметить полюс, изобразить полярную ось и указать масштаб. Впрочем, этот пункт можно выполнить позже.

– Определяем *область определения функции* – угловые секторы, в которых линия существует, и в которых нет. Тонко прочерчиваем соответствующие угловые направления *(прямые и / или лучи, разграничивающие эти секторы)*. Лучше пунктиром.

– В большинстве случаев потребуется найти десяток-другой точек, принадлежащих линии. Но иногда можно обойтись меньшим количеством, а то и вовсе отделаться схематическим чертежом.

– На следующем шаге следует прочертить угловые направления точек (тонкие прямые) и отметить на них найденные точки. Как это сделать с помощью ~~каменного топора~~ транспортира, циркуля и линейки, я подробнейшим образом объяснил выше.

– И, наконец, отложенные точки нужно аккуратно-аккуратно соединить линией (линиями).

Отработаем алгоритм на более основательных типовых задачах:

Задача 120

Построить по точкам линию, заданную в полярной системе координат уравнением $r(\varphi) = 1 + \cos\varphi$, рассматривая значения угла с интервалом в $\frac{\pi}{8}$ рад. Найти уравнение линии в прямоугольной системе координат.

Решение: найдём область определения. Поскольку полярный радиус неотрицателен, то: …

Неравенство опять же удобно решить графически. Мысленно либо на черновике изобразите график косинуса *(см. Приложение* ***Тригонометрия****)* и прямой $y = -1$. Что означает неравенство …? Оно означает, что нас устраивает та часть ~~ко~~синусоиды, которая **не ниже** прямой $y = -1$. График косинуса полностью удовлетворяет этому условию, поэтому φ может принимать любые значения, и нам предстоит «перепахать» весь круг от 0 до 2π, причём, по условию сделать это требуется строго с интервалом в $\frac{\pi}{8}$ рад. (22,5 градусов). Ложку в зубы, калькулятор в руки:

$$\varphi = 0 \quad \Rightarrow r = 1 + \cos 0 = 1 + 1 = 2 \qquad \varphi = \frac{3\pi}{8} \quad \Rightarrow r = 1 + \cos\frac{3\pi}{8} \approx 1{,}38$$

$$\varphi = \frac{\pi}{8} \quad \Rightarrow r = 1 + \cos\frac{\pi}{8} \approx 1{,}92 \qquad \varphi = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow r = 1 + \cos\frac{\pi}{2} = 1 + 0 = 1$$

$$\varphi = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow r = 1 + \cos\frac{\pi}{4} \approx 1{,}71 \qquad \varphi = \frac{5\pi}{8} \quad \Rightarrow r = 1 + \cos\frac{5\pi}{8} \approx 0{,}62$$

$$\ldots$$

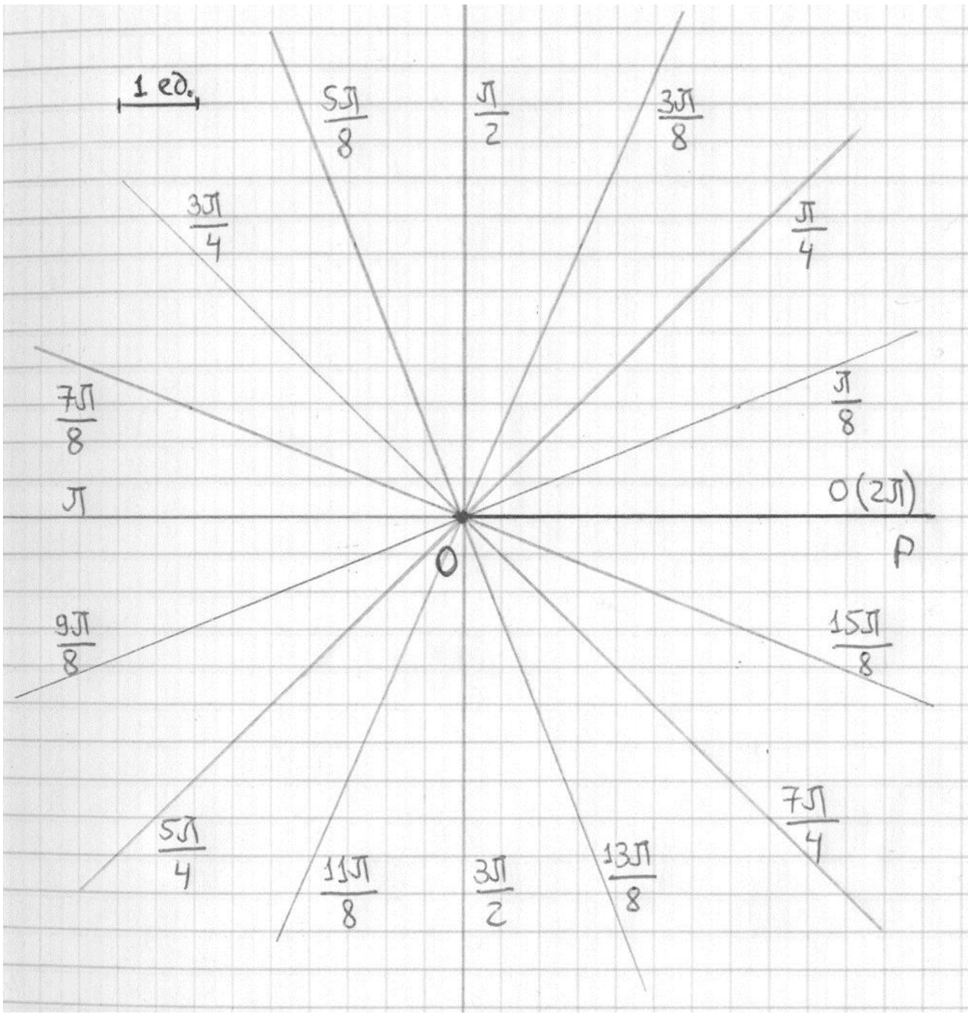
и так далее, пока не будет пройден весь оборот до «двух пи»…., но хочется ли вам сидеть с калькулятором… и ложкой? ☺ **Используйте** *Приложение* ***Геометрический Калькулятор***, который позволит буквально в пару щелчков вычислить все значения r!

Вычисления, как правило, не расписывают подробно, а сразу заносят их результаты в таблицу:

φ	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	π
r	2	1,92	1,71	1,38	1	0,62	0,29	0,08	0
φ	$\frac{9\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{13\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{15\pi}{8}$	2π	
r	0,08	0,29	0,62	1	1,38	1,71	1,92	0	

Изобразим на чертеже полярную систему координат и угловые направления – тонкие прямые, соответствующие вышеуказанным углам. Здесь можно опять воспользоваться ***Геометрическим Калькулятором***, где все направления уже прочерчены, но вы должны быть готовы к самым суровым обстоятельствам ☺

Если у вас под рукой нет ни программы, ни транспортира, ни даже линейки, то используйте мой handmade-продукт – выполните этот чертёж, ориентируясь по клеточкам:

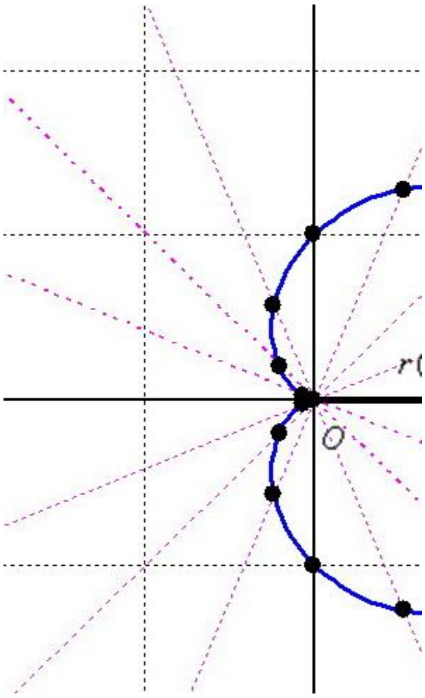


(углы проставлены для удобства, и на чистовике их записывать не надо)

До сих пор бережно храню этот листок бумаги, чтобы лет через 10-20 продать его на антикварном аукционе ☺

… Шутки шутками, а оперативная память моего первого компьютера ZX Spectrum составляла 32 килобайта. КИЛОбайта. При этом программисты умудрялись заталкивать туда аркадные игры с сотнями экранов и отличной графикой (по меркам 8-разрядных машин, конечно). …А ведь с той поры прошло немногим больше двух десятилетий.

После ностальгических воспоминаний отметим найденные точки на чертеже и аккуратно соединим их линией:



…

Напоминаю, что одинаковые значения радиуса эффективнее засекать циркулем, а слишком малые значения для углов $\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}, \frac{5\pi}{4}$ допустимо отметить и «на глазок».

Данная кривая называется ***кардиоидой***. Найдём её уравнение в декартовой системе координат. Для этого используем знакомый приём – домножим обе части уравнения $r = 1 + \cos\varphi$ на «эр»:

$$r \cdot r = r(1 + \cos\varphi)$$

$$r^2 = r + r\cos\varphi$$

И по формулам перехода к прямоугольным координатам $r^2 = x^2 + y^2, r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $r\cos\varphi = x$ получим:

$$x^2 + y^2 = \sqrt{x^2 + y^2} + x$$

Перенесём «икс» налево и возведём обе части в квадрат:

$$x^2 + y^2 - x = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$(x^2 + y^2 - x)^2 = (\sqrt{x^2 + y^2})^2$$

$$(x^2 + y^2 - x)^2 = x^2 + y^2$$

Дальнейшее возведение левой части в квадрат только усложнит запись, поэтому результат целесообразнее оставить в таком виде.

Из полученного уравнения следует, что кардиоида – это алгебраическая линия 4-го порядка, и обратите внимание, насколько сложной получилась её формула по сравнению с полярной системой координат. Алгебраическим линиям 3-го, 4-го, 5-го, 6-го и высших порядков посвящены серьёзные исследования, и желающие без труда могут отыскать море информации по данной теме. Хорошая тема для курсовика, кстати, или реферата. Ну а я, как обычно, предлагаю полезную и здоровую пищу на каждый день:

Задача 121

Линия задана уравнением $r(\varphi)=\dfrac{6}{2-\cos\varphi}$ в полярной системе координат. Треба:

1) построить линию по точкам, придавая φ значения через интервал $\dfrac{\pi}{8}$, начиная с $\varphi=0$ и заканчивая $\varphi=2\pi$;

2) найти уравнение линии в декартовой системе координат;

3) определить вид кривой.

Типовая формулировка, предвещающая час (а то и больше) усердного пыхтения, а нередко и чертыханья студента. Но только не того, кто прочитал эту книгу! Примерный образец оформления задачи в конце урока.

Рассмотрим ряд других важных особенностей решения:

Задача 122

Линия задана уравнением $r=\dfrac{9}{4-5\cos\varphi}$ в полярной системе координат. Требуется:

1) построить линию по точкам, начиная от $\varphi=0$ до $\varphi=2\pi$ и придавая φ значения через промежуток $\dfrac{\pi}{8}$;

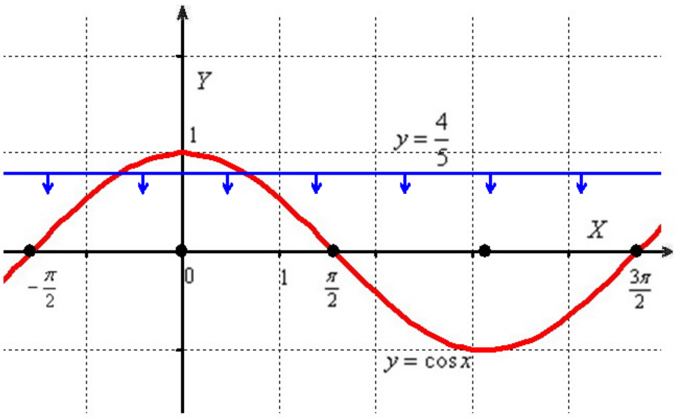
2) найти уравнение данной линии в прямоугольной системе координат;

3) назвать линию, найти координаты фокусов и эксцентриситет.

Решение: **1)** найдём область определения: $r\ge 0 \Rightarrow 4-5\cos\varphi>0$.

Заметьте, что ноль в знаменателе нас тоже не устраивает, и поэтому неравенство строгое. Перенесём косинус направо: $4>5\cos\varphi$ и развернём избушку – к нам передом, а к лесу задом: $5\cos\varphi<4 \Rightarrow \cos\varphi<\dfrac{4}{5}$

Неравенство несложно решить аналитически, но для лучшего понимания я опять воспользуюсь графическим методом. Мысленно или на черновике изобразим графики $y=\cos x$, $y=\dfrac{4}{5}$, при этом нас будет интересовать только один период – от $-\dfrac{\pi}{2}$ до $\dfrac{3\pi}{2}$:



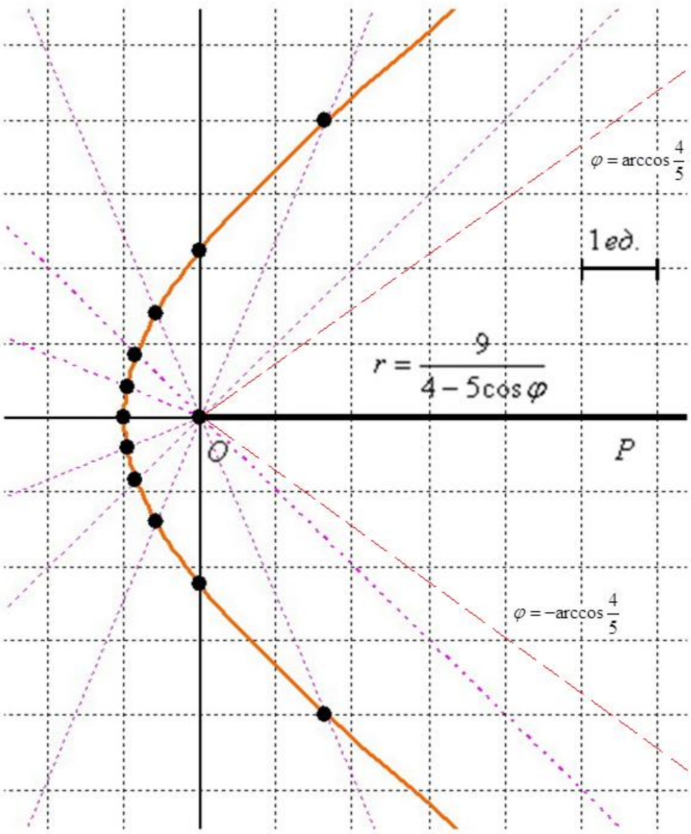
Условию $\cos x<\dfrac{4}{5}$ удовлетворяет та часть синусоиды, которая расположена **ПОД** прямой $y=\dfrac{4}{5}$.

То есть, в нашем распоряжении оказываются почти все значения угла за исключением «макушки», расположенной на симметричном отрезке $\left[-\arccos\dfrac{4}{5};\arccos\dfrac{4}{5}\right]$.

Таким образом, $\varphi \notin ...$. Арккосинус $\dfrac{4}{5}$ составляет примерно $37°$, поэтому из рассмотрения исключаем углы $0, \dfrac{\pi}{8}$ $(22{,}5°)$ и $\dfrac{15\pi}{8}\left(-\dfrac{\pi}{8}\right)$. Заполним расчётную таблицу с прочерками в соответствующих ячейках:

φ	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	π
r	–	–	19,38	4,31	2,25	1,52	1,19	1,04	1,00
φ	$\frac{9\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{13\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{15\pi}{8}$	2π	
r	1,04	1,19	1,52	2,25	4,31	19,38	–	–	

Изобразим полярную систему координат и *лучи* $\varphi = -\arccos\frac{4}{5}, \varphi = \arccos\frac{4}{5}$, между которыми **нет** точек линии. Прочертим угловые направления найденных точек и с помощью циркуля сделаем засечки. Аккуратно соединим отмеченные точки линией *(точки, соответствующие углам $\varphi = \pm\pi/4$, не вместились на чертёж)*:



2) Найдём уравнение линии в прямоугольной системе координат. Судя по всему должна получиться гипербола. Избавляемся от дроби:

$$r = \frac{9}{4-5\cos\varphi}$$

$$r(4-5\cos\varphi) = 9$$

$$4r - 5r\cos\varphi = 9$$

Используем формулы перехода $r = \sqrt{x^2+y^2}, r\cos\varphi = x$

$$4\sqrt{x^2+y^2} - 5x = 9$$

и дальнейшее знакомо из задач с линиями второго порядка:

$$4\sqrt{x^2+y^2} = 5x+9$$

$$(4\sqrt{x^2+y^2})^2 = (5x+9)^2$$

$$16(x^2+y^2) = 25x^2+90x+81$$

$$16x^2+16y^2 = 25x^2+90x+81$$

$$25x^2+90x+81-16x^2-16y^2 = 0$$

$$9x^2+90x+81-16y^2 = 0$$

$$9(x^2+10x+25) - 9\cdot 25 + 81 - 16y^2 = 0$$

$$9(x+5)^2 - 16y^2 = 144$$

$$\frac{(x+5)^2}{16} - ...$$ – искомое уравнение.

3) Данная линия представляется собой гиперболу с центром симметрии в точке $\tilde{O}(-5;0)$, действительной полуосью $a = 4$, мнимой полуосью $b = 3$.

Вы спрОсите: «но в полярной же системе координат прорисовалась **только одна** ветвь гиперболы, поэтому не ошибочно ли сейчас говорить о **целой** гиперболе?». Не ошибочно! И вот по какой причине: если подразумевать **обобщённую полярную систему** координат с отрицательными значениями «эр», то при значениях угла из интервала $\left(-\arccos\frac{4}{5}; \arccos\frac{4}{5}\right)$ прорисуется левая ветвь! Желающие могут провести самостоятельную проверку и анализ этого факта. Я не сторонник и даже противник обобщенных полярных координат, но в данном случае всё получается ловко и очень хитро – можно как бы и не оговариваться о том, что на чертеже только одна ветвь гиперболы.

Вычислим координаты фокусов и эксцентриситет. По условию уравнение не нужно приводить к каноническому виду, а значит, требуемые вещи проще найти напрямую – с учётом параллельного переноса гиперболы, к тому же, она не повёрнута.

Вычислим значение $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{25}=5$ и поправкой на параллельный перенос в точку $\widetilde{O}(x_0; y_0)$ найдём фокусы:

...

$F_1(5-5; 0),\ F_2(5+5; 0) \quad \Rightarrow \quad F_1(0; 0),\ F_2(10; 0)$

Эксцентриситет: $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{5}{4}$

Готово. Педантичные люди могут ещё записать развёрнутый ответ.

Заключительное задание для самостоятельного решения:

Задача 123

Линия задана уравнением $r=\frac{4}{1+\sin\varphi}$ в полярной системе координат. Требуется:

1) построить линию по точкам, начиная от $\varphi=0$ до $\varphi=2\pi$ и придавая φ значения через промежуток $\frac{\pi}{8}$;

2) найти уравнение данной линии в прямоугольной системе координат и определить её вид;

3) привести уравнение к каноническому виду и выполнить чертёж в прямоугольной системе координат. Найти фокусы кривой и её эксцентриситет.

Внимательно проанализируйте, **что** и **в каком порядке** требуется выполнить по условию. Сам много раз «налетал» – краем глаза показалось одно, а нужно совсем другое. В образце решения приведение уравнения линии 2-го порядка к каноническому виду выполнено строгим академическим способом.

Когда удобно использовать полярные координаты? Ну, конечно, когда мы имеем дело со всевозможными окружностям, дугами, кругами, эллипсами, спиралями и т.д. А причина простА – уравнения получаются простые.

На основе полярных координат плоскости базируются ***цилиндрические*** и ***сферические координаты пространства***. В частности, угловые величины широко используются в воздушной навигации и астрономии. Действительно, представьте земной шар *(а если строго, эллипсоид)*, эллиптические орбиты планет и вы поймёте, что «распиаренная» прямоугольная система координат как-то здесь совсем «не в тему».

5. Плоскость и прямая в пространстве

Пространственная геометрия не намного сложнее «плоской», и на самом деле мы уже совершили основательную «предполётную подготовку». Но сейчас Бэтмен окончательно сошёл с плоского экрана телевизора, чтобы стартовать с космодрома Байконур:

5.1. Плоскость и её уравнение

Начнём с чертежей и обозначений. Схематически плоскость можно нарисовать в виде параллелограмма, что создаёт впечатление пространства:

Плоскость **бесконечна**, но у нас есть возможность изобразить лишь её кусочек. На практике помимо параллелограмма также прорисовывают овал или даже облачко. Мне по техническим причинам удобнее изображать плоскость именно так и именно в таком положении. Реальные плоскости, которые мы рассмотрим в практических примерах, могут располагаться как угодно – мысленно возьмите чертёж в руки и покрутите его в пространстве, придав плоскости любой наклон, любой угол.

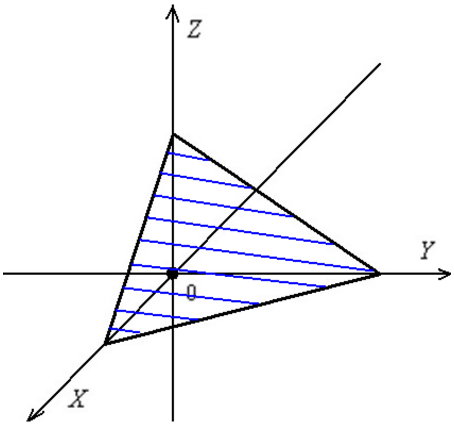
Обозначения: плоскости принято обозначать маленькими греческими буквами $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, видимо, чтобы не путать их с прямой на плоскости или с прямой в пространстве. Я привык использовать букву σ. На чертеже именно буква «сигма», а вовсе не дырочка. Хотя, дырявая плоскость, это, безусловно, весьма забавно.

В ряде случаев для обозначения плоскостей удобно использовать те же греческие буквы с нижними подстрочными индексами, например, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Очевидно, что **плоскость однозначно определяется тремя различными точками, не лежащими на одной прямой**. Поэтому достаточно популярны трёхбуквенные обозначения плоскостей – по принадлежащим им точкам, например, KLM, $A_1A_2A_3$ и т.д. Нередко буквы заключают в круглые скобки: $(KLM), (A_1A_2A_3)$, чтобы не перепутать плоскость с другой геометрической фигурой.

➢ Общее уравнение плоскости

В аффинной системе координат ***общее уравнение плоскости*** имеет вид …, где коэффициенты A, B, C *одновременно* не равны нулю. В самом общем случае, когда числа A, B, C, D не равны нулю, плоскость пересекает все три координатные оси, например, так: *(для простоты рассмотрим привычную систему $OXYZ$).*



Вот, кстати, ещё одно графическое представление плоскости – треугольник.

А теперь **немного потренируем пространственное воображение**. Ничего страшного, если у вас оно плохое, сейчас немного разовьём. **Изобразите в тетради декартову систему координат** $OXYZ$ *(пустую)* **и мысленно представляйте плоскости, о которых пойдёт речь ниже. Обязательно! – это ОЧЕНЬ важно для качественного понимания всего дальнейшего курса!!!**

Начнём с простейших случаев:

$z = 0$

Как понимать данное уравнение? Вдумайтесь: «зет» ВСЕГДА, при любых значениях «икс» и «игрек» равно нулю. Это уравнение «родной» координатной плоскости XOY. Формально уравнение можно переписать так: $0 \cdot x + 0 \cdot y + z = 0$, откуда хорошо видно, что нам фиолетово, какие значения принимают «икс» и «игрек», **важно**, что «зет» равно нулю.

Аналогично:

$x = 0$ – уравнение координатной плоскости YOZ *(осмысливаем почему!)*;

$y = 0$ – уравнение координатной плоскости XOZ *(осмысливаем почему!)*.

Немного усложним задачу, рассмотрим плоскость $Ax + D = 0$ (здесь и далее в параграфе предполагаем, что числовые коэффициенты не равны нулю). Перепишем уравнение в виде $x = -\frac{D}{A}$. Как его понимать? «Икс» ВСЕГДА, при любых значениях «игрек» и «зет» равно некоторому числу $-\frac{D}{A}$. Эта плоскость параллельна координатной плоскости YOZ. Так, плоскость $x = 2$ параллельна плоскости YOZ и проходит через точку $(2; 0; 0)$.

Аналогично:

$By + D = 0$ – уравнение плоскости, которая параллельна плоскости XOZ ();

$Cz + D = 0$ – уравнение плоскости, которая параллельна плоскости XOY.

Осмысливаем! И добавляем членов: $Ax + By + D = 0$. Это уравнение можно переписать так: $Ax + By + 0 \cdot z + D = 0$, то есть «зет» может быть любым. Что это значит? «Икс» и «игрек» связаны соотношением $Ax + By + D = 0$, которое «прочерчивает» в плоскости XOY некоторую прямую (узнаёте уравнение прямой на плоскости?). Поскольку «зет» может быть **любым**, то эта прямая «тиражируется» на любой высоте. Таким образом, уравнение $Ax + By + D = 0$ определяет плоскость, параллельную координатной оси OZ

Аналогично:

$\ldots$ – уравнение плоскости, которая параллельна оси OY *(почему?)*;

$\ldots$ – уравнение плоскости, которая параллельна оси OX *(почему?)*.

Если свободные члены D нулевые, то эти плоскости будут непосредственно проходить через соответствующие оси. Например, классическая «прямая пропорциональность»: $y = x$. Начертите в плоскости XOY прямую $y = x$ и мысленно размножьте её вверх и вниз (так как «зет» любое). Вывод: плоскость, заданная уравнением $y = x$, проходит через координатную ось OZ.

Завершаем обзор: плоскость $Ax + By + Cz = 0$ проходит через начало координат. Ну, здесь совершенно очевидно, что точка $O(0; 0; 0)$ удовлетворяет данному уравнению.

И, наконец, случай, который изображён на чертеже выше: $\ldots$ – данная плоскость дружит со всеми координатными осями, при этом она всегда «отсекает» треугольник, который может располагаться в любом из восьми ***октантов*** (координатные плоскости системы $OXYZ$ делят пространство на 8 равных частей – *октантов*).

И пока у вас **разогретое пространственное воображение** ☺, совсем кратко о линейных неравенствах, хотя по логике изложения, они здесь немного не к месту:

➢ Линейные неравенства в пространстве

Всё очень похоже на «плоский» случай.

Если уравнение … задаёт плоскость пространства, то неравенства $Ax + By + Cz + D > 0, \quad Ax + By + Cz + D < 0,$ … определяют ***полупространства***. Если неравенство нестрогое (два последних в списке), то в его решение кроме полупространства входит и сама плоскость.

Как и для линейных неравенств плоскости, справедлив **аналогичный принцип:** если одна точка полупространства удовлетворяет неравенству, то и ВСЕ точки этого полупространства удовлетворяют данному неравенству.

Читайте примеры и посматривайте на ту же систему $OXYZ$ в тетради:

1) $y \geq 0$. Как понимать это неравенство? «Икс» и «зет» могут быть любыми, а вот «игрек» всегда больше либо равно нулю. Данное неравенство определяет правое полупространство; так как оно нестрогое, то координатная плоскость XOZ входит в решение.

2) $x < 0$ – «игрек» и «зет» могут быть любыми, а вот «икс» строго меньше нуля. Неравенство задаёт дальнее от нас полупространство, и ввиду его строгости, координатная плоскость YOZ не входит в решение.

3) $z \leq 2$ Сначала мысленно начертим плоскость $z = 2$ – данная плоскость параллельна «родной» координатной плоскости XOY и расположена на высоте $z = 2$ (на 2 единицы выше плоскости XOY). При любых «икс» и «игрек» – «зет» меньше либо равно двум. Поэтому неравенство определяет нижнее полупространство + саму плоскость $z = 2$.

4) $y > x$ – мысленно представляем «прямую пропорциональность» – плоскость, которая проходит через ось OZ. И если «игрек» должен быть **больше**, чем «икс» *(«зет» – любое)*, то этому условию соответствуют все точки дальнего от нас полупространства, при этом плоскость $x - y = 0$ не входит в решение.

5) Дана плоскость $x + 2y + 5z - 6 = 0$. Я специально подобрал плоскость, которая «высекает» треугольник в *первом октанте* (такой, как на чертеже выше). Требуется строгим неравенством задать полупространство, которое содержит начало координат.

Решение: составим вспомогательный многочлен $p(x; y; z) = x + 2y + 5z - 6$ и вычислим его значение в начале координат: …, таким образом, искомое неравенство: $x + 2y + 5z - 6 < 0$.

Система линейных неравенств определяет некоторую *область пространства*. Она может быть ограниченной или не ограниченной. **Любая** точка области решений обязательно удовлетворяет **каждому** неравенству системы. Так, система:

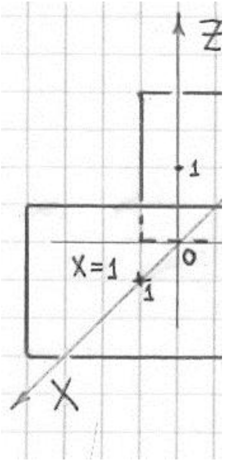
$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ z > 0 \end{cases}$ – определяет *первый координатный октант*, и любая точка этого октанта удовлетворяет каждому неравенству системы (т.к. имеет положительные координаты). Это пример *неограниченной* области решения.

Пространственное понимание уравнений и неравенств крайне полезно не только в аналитической геометрии, но и для решения других задач высшей математики. И поэтому мы **прямо сейчас закрепим эту чрезвычайно важную тему:**

➢ Как построить плоскость?

Несмотря на обилие программ и онлайн сервисов, ручное построение чертежей сохранит актуальность и через много лет, хотя бы потому, что позволит учащимся **качественно** усвоить материал. Что нужно знать и уметь в самых суровых условиях?

Прежде всего, вы должны на полном автомате узнавать уравнения плоскостей, которые параллельны координатным плоскостям $YOZ\ (x=0)$, $XOZ\ (y=0)$, $XOY\ (z=0)$. Фрагменты плоскостей стандартно обозначают прямоугольниками, которые в последних двух случаях выглядят, как параллелограммы. Размеры выбираем разумные, при этом желательно, чтобы точка, в которой координатная ось «протыкает» плоскость являлась центром симметрии:



…

! Все помнят неформальный смысл этих уравнений**?**

Повторим заодно и неравенства:

– неравенство $x<-2$ *(левый чертёж)* задаёт дальнее от нас полупространство, исключая саму плоскость $x=-2$;

– неравенство $y\ge 2$ *(чертёж посередине)* задаёт правое полупространство, включая плоскость $y=2$;

– двойное неравенство $-\frac{3}{2}\le z\le 1$ *(правый чертёж)* задаёт «слой», расположенный между плоскостями $z=-\frac{3}{2}$, $z=1$, включая обе плоскости.

Задача 124

Изобразить тело, ограниченное плоскостями $x=-3, x=0, y=-1, y=2, z=0, z=1$, составить систему неравенств, определяющих данное тело.

Это задание для самостоятельного решения. Из-под грифеля вашего карандаша должен выйти старый знакомый ***прямоугольный параллелепипед***. Не забывайте, что невидимые рёбра и грани следует прочертить пунктиром. Готовый чертёж в конце книги.

НЕ ПРЕНЕБРЕГАЙТЕ учебными задачами!
Особенно, если они кажутся простыми

А то может статься, раз пропустили, два пропустили, а затем потратили битый час, вымучивая трёхмерный чертёж в каком-нибудь реальном примере. Причём, несложный.

Следующую группу плоскостей условно назовём «прямыми пропорциональностями» – это плоскости, проходящие через координатные оси:

1) уравнение вида … *(здесь и далее* $k = const$*)* задаёт плоскость, проходящую через ось OY;

2) уравнение вида … задаёт плоскость, проходящую через ось OX;

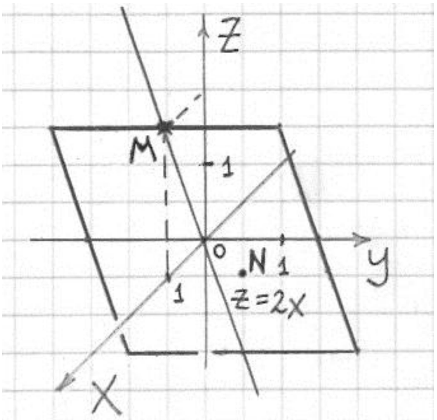
3) уравнение вида … задаёт плоскость, проходящую через ось OZ.

Задача 125

Построить плоскость $z = 2x$

Как лучше осуществить **построение**? Предлагаю следующий **алгоритм:**

Сначала перепишем уравнение в виде $z = 2x + 0 \cdot y$, из которого хорошо видно, что «игрек» может принимать **любые** значения. Зафиксируем значение $y = 0$, то есть, будем рассматривать координатную плоскость XOZ. Уравнения $z = 2x,\ y = 0$ задают пространственную прямую, лежащую в этой плоскости. Данная прямая проходит через начало координат, поэтому для её построения достаточно найти одну точку. Пусть $x = 1 \Rightarrow z = 2 \cdot 1 = 2$. Откладываем точку $M(1;\ 0;\ 2)$ и проводим прямую:



Теперь возвращаемся к уравнению плоскости $z = 2x + 0 \cdot y$. Поскольку «игрек» принимает **любые** значения, то построенная в плоскости XOZ прямая непрерывно «тиражируется» влево и вправо. Именно так и образуется наша плоскость $z = 2x$, проходящая через ось OY. Чтобы завершить чертёж, слева и справа от прямой $z = 2x,\ y = 0$ откладываем две параллельные линии и поперечными горизонтальными отрезками «замыкаем» символический параллелограмм.

И ещё раз повторим смысл пространственного линейного неравенства на примере $z < 2x$. Как определить полупространство, которое оно задаёт? Берём какую-нибудь точку, **не принадлежащую** плоскости $z = 2x$, например, точку $N(1;1;0)$ из ближнего к нам полупространства и подставляем её координаты в неравенство:

$0 < 2 \cdot 1 \Rightarrow 0 < 2$ – получено *верное неравенство*, значит, неравенство $z < 2x$ задаёт нижнее (относительно плоскости $z = 2x$) полупространство, при этом сама плоскость не входит в решение.

Задача 126

Построить плоскости

а) $z = \dfrac{y}{2}$, б) $y = x$.

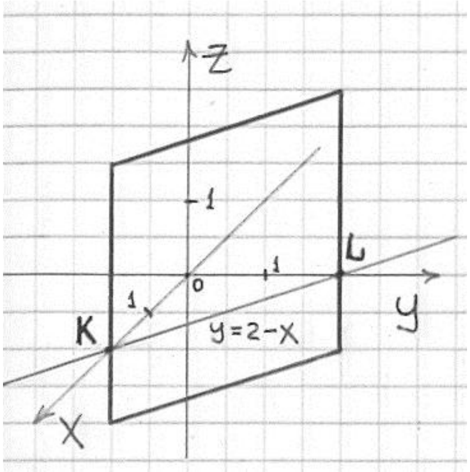
Это задания для самостоятельного решения, в случае затруднений используйте аналогичные рассуждения. Краткие указания и чертежи в конце книги.

На практике особенно распространены плоскости, параллельные оси OZ. Частный случай, когда плоскость проходит через ось, только что был в пункте «бэ», и сейчас мы разберём более общую задачу:

Задача 127

Построить плоскость $x+y-2=0$

Решение: в уравнение в явном виде не участвует переменная «зет», а значит, плоскость параллельна оси аппликат. Применим ту же технику, что и в предыдущих примерах.



Перепишем уравнение плоскости в виде $x+y+0\cdot z-2=0$, из которого понятно, что «зет» может принимать **любые** значения. Зафиксируем $z=0$ и в «родной» плоскости XOY начертим обычную «плоскую» прямую $x+y-2=0\,(z=0)$. Для её построения удобно взять опорные точки $K(2;0;0),\ L(0;2;0)$.

Поскольку «зет» принимает **все** значения, то построенная прямая непрерывно «размножается» вверх и вниз, образуя тем самым искомую плоскость $x+y+0\cdot z-2=0$. Аккуратно оформляем параллелограмм разумной величины.

➢ Уравнение плоскости в отрезках

Важнейшая прикладная разновидность. Если **все** коэффициенты **общего уравнения плоскости** … **отличны от нуля**, то оно представимо в виде… , который называется ***уравнением плоскости в отрезках***. Очевидно, что плоскость пересекает координатные оси в точках …, и большое преимущество такого уравнения состоит в лёгкости построения чертежа:

Задача 128

Построить плоскость $4x+3y+6z-12=0$

Решение: составим уравнение плоскости в отрезках. Перебросим свободный член направо и разделим обе части на 12:

$$4x+3y+6z=12$$

$$\frac{4x+3y+6z}{12}=\frac{12}{12}$$

$$\frac{4x}{12}+\frac{3y}{12}+\frac{6z}{12}=1,$$

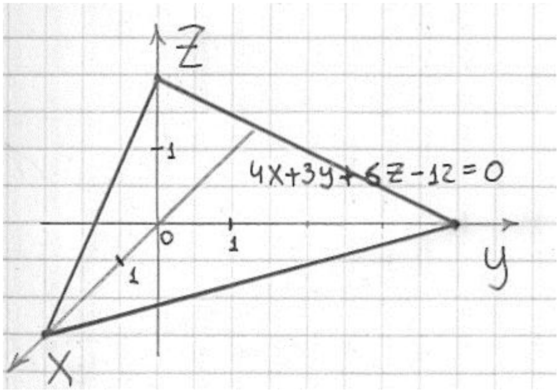
Делаем дроби трёхэтажными:

$$\frac{x}{\frac{12}{4}}+\frac{y}{\frac{12}{3}}+\frac{z}{\frac{12}{6}}=1$$

Именно так! – ведь знаменатели могут оказаться и дробными. Но в данном случае всё разделилось нацело:

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{2}=1$$

Таким образом, плоскость проходит через точки $(3; 0; 0), (0; 4; 0), (0; 0; 2)$. В целях самоконтроля координаты каждой точки устно подставим в исходное уравнение $4x + 3y + 6z - 12 = 0$. После чего выполним чертёж:



В отличие от предыдущих примеров здесь фрагмент плоскости изображается в виде треугольника, который, как я уже отмечал, может «прорисоваться» в любом из 8 октантов.

Уравнение $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{2} = 1$ содержит длины $a = 3, b = 4, c = 2$ трёх отрезков, которые «исходят» из начала координат и однозначно определяют плоскость (отсюда и название уравнения).

Задание для тренировки:

Задача 129

Построить плоскость $3x - 2y + 12z - 6 = 0$

После чего возвращаемся к аналитике.

5.2. Как составить уравнение плоскости?

Конструировать уравнение будем с помощью векторов и точек. Их должно быть **как можно меньше**, но **достаточно**, чтобы **однозначно** определить плоскость. Одним словом, красивая математическая лаконичность.

Казалось бы, плоскость можно однозначно определить с помощью двух неколлинеарных векторов. Но нет – векторы свободны и бродят по всему пространству, поэтому ещё нужна фиксированная точка:

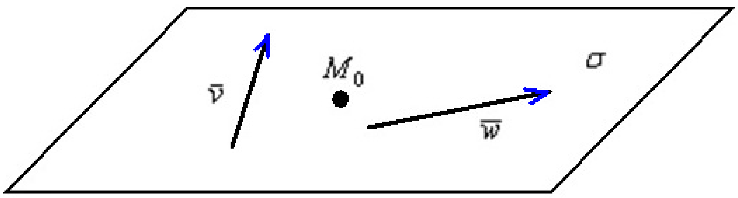
➢ **Уравнение плоскости по точке и двум неколлинеарным векторам**

Уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ параллельно неколлинеарным векторам $\overline{v}(v_1; v_2; v_3), \overline{w}(w_1; w_2; w_3)$, **выражается формулой**:

…

! Примечание: *под выражением «вектор параллелен плоскости» подразумевается, что вектор можно отложить и в самой плоскости. Для наглядности я буду откладывать векторы прямо в плоскости.*

Принципиально ситуация выглядит так:



Обратите внимание, что точка и два коллинеарных вектора не определят плоскость однозначно (они будут «вертеться» вокруг точки и зададут целый «пучок» плоскостей).

Задача 130

Составить уравнение плоскости по точке $M(-1;2;-3)$ и неколлинеарным векторам $\overline{p}_1(4;3;2),\ \overline{p}_2(-5;7;1)$.

Решение: искомое уравнение составим по формуле:

$$\ldots = \begin{vmatrix} x-(-1) & 4 & -5 \\ y-2 & 3 & 7 \\ z-(-3) & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Определитель удобнее всего раскрыть по первому столбцу:

$$(x+1)\cdot\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - (y-2)\cdot\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (z+3)\cdot\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

Раскрываем определители второго порядка:

$$(x+1)\cdot(3-14)-(y-2)\cdot(4+10)+(z+3)\cdot(28+15)=0$$

$$-11\cdot(x+1)-14\cdot(y-2)+43\cdot(z+3)=0$$

На первом месте у нас нарисовался знак «минус», и хорошим тоном считается его убрать (точно так же, как и у общего уравнения «плоской» прямой).

Меняем у каждого слагаемого знак и проводим дальнейшие упрощения:

$$11\cdot(x+1)+14\cdot(y-2)-43\cdot(z+3)=0$$

$$11x+11+14y-28-43z-129=0$$

$11x+14y-43z-146=0$, сократить здесь ничего нельзя, поэтому:

Ответ: $11x+14y-43z-146=0$

Как проверить задание? Для проверки пока не хватает информации, но мы обязательно выполним её чуть позже. Решаем самостоятельно:

Задача 131

Составить уравнение плоскости по векторам $\overline{p}_1(2;1;-3),\ \overline{p}_2(0;-2;6)$ и принадлежащей ей точке $M(3;0;-1)$.

Кстати, если векторы коллинеарны, то и на этот случай есть корректный ответ ;)

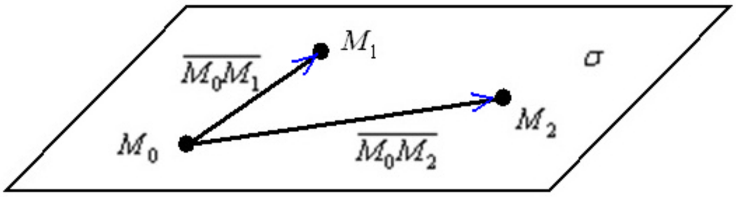
➢ Как составить уравнение плоскости по трём точкам?

Этот способ промелькнул в самом начале главы и уже громко стучится в дверь. Любые ли три точки пространства задают плоскость? Нет. Во-первых, точки должны быть различными. А во-вторых, они не должны лежать на одной прямой (сразу все три).

Уравнение плоскости, проходящей через три различные точки $M_0(x_0;y_0;z_0),\ M_1(x_1;y_1;z_1),\ M_2(x_2;y_2;z_2)$, которые не лежат на одной прямой, **можно составить по формуле**:

…

На самом деле это разновидность предыдущего способа, смотрим на картинку:



Если известны три различные точки, не лежащие на одной прямой, то легко найти два неколлинеарных вектора, параллельных этой плоскости:

$\overline{M_0M_1}(x_1 - x_0;\ y_1 - y_0;\ z_1 - z_0)$

$\overline{M_0M_2}(x_2 - x_0;\ y_2 - y_0;\ z_2 - z_0)$

То есть, наша формула фактически совпадает с формулой предыдущего параграф, и чтобы не уснуть от скуки, предлагаю раскрутить задачи-«шарады»:

Задача 132

Составить уравнение плоскости по точкам $M_0(1;-2;0),\ M_1(2;0;-1),\ M_2(0;-1;2)$.

Решение: по соответствующей формуле:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 2-1 & 0-1 \\ y-(-2) & 0-(-2) & -1-(-2) \\ z-0 & -1-0 & 2-0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & -1 \\ y+2 & 2 & 1 \\ z & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Вот теперь и аналитически видно, что всё дело свелось к координатам двух векторов. Раскрываем определитель по первому столбцу и находим уравнение плоскости:

$$(x-1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - (y+2)\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + z\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(4+1)(x-1) - (2-1)(y+2) + (1+2)z = 0$$

$$5(x-1) - (y+2) + 3z = 0$$

$$5x - 5 - y - 2 + 3z = 0$$

$5x - y + 3z - 7 = 0$, больше ничего упростить нельзя, записываем:

Ответ: $5x - y + 3z - 7 = 0$

Проверка напрашивается сама собой – в полученное уравнение плоскости нужно подставить координаты **каждой** точки. Если **хотя бы одна** из трёх точек «не подойдёт», ищите ошибку.

Для «мёртвого» зачёта всегда выполняйте проверку – мысленно, на черновике или прямо на чистовике!!! Не устану повторять этот вечно живой и актуальный призыв.

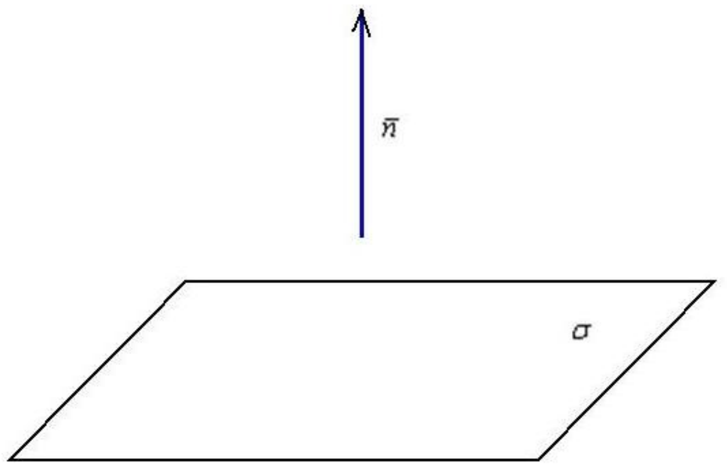
Задача 133

Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1;2;3),\ B(-3;-2;-1)$ и начало координат.

Выберите наиболее выгодный способ решения ;)

➢ **Вектор нормали плоскости (нормальный вектор)**

Вектор нормали плоскости – это вектор, который перпендикулярен данной плоскости. Очевидно, что у любой плоскости бесконечно много нормальных векторов.



Но для решения задач нам будет хватать и одного: **если плоскость задана общим уравнением … в прямоугольной (!) системе координат, то вектор … является нормальным вектором данной плоскости**.

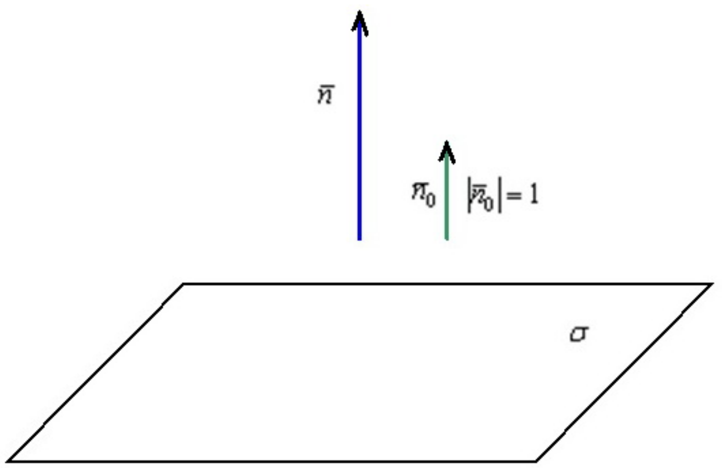
Просто до безобразия! – всё, что нужно сделать – это «снять» коэффициенты из уравнения плоскости.

И чтобы хоть как-то усложнить практику **рассмотрим тоже простую, но очень важную задачу**, которая часто встречается, причём, не только в геометрии:

Задача 134

Найти единичный нормальный вектор плоскости $2x-3y+5z+7=0$.

Решение: принципиально ситуация выглядит так:



Сначала из уравнения плоскости «снимем» вектор нормали: ….

И эту задачку мы уже решали: **для того чтобы найти** единичный **вектор $\bar{n}_0$, нужно <u>каждую</u> координату вектора $\bar{n}$ разделить на длину вектора $\bar{n}$.**

Вычислим длину вектора нормали: $|\bar{n}|=\sqrt{2^2+(-3)^2+5^2}=$

$=\sqrt{4+9+25}=\sqrt{38}$

Таким образом: $\bar{n}_0=\dfrac{\bar{n}}{|\bar{n}|}=\dfrac{2\bar{i}-3\bar{j}+5\bar{k}}{\sqrt{38}}=\dfrac{2}{\sqrt{38}}\bar{i}-\dfrac{3}{\sqrt{38}}\bar{j}+\dfrac{5}{\sqrt{38}}\bar{k}$

Контроль: $|\bar{n}_0|=\sqrt{\left(\dfrac{2}{\sqrt{38}}\right)^2+\left(-\dfrac{3}{\sqrt{38}}\right)^2+\left(\dfrac{5}{\sqrt{38}}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{4}{38}+\dfrac{9}{38}+\dfrac{25}{38}}=\sqrt{\dfrac{38}{38}}=\sqrt{1}=1$, ОК

Ответ: $\bar{n}_0\left(\dfrac{2}{\sqrt{38}};-\dfrac{3}{\sqrt{38}};\dfrac{5}{\sqrt{38}}\right)$

Вспоминаем, что координаты этого вектора – есть в точности направляющие косинусы вектора $\bar{n}$: $\cos\alpha=\dfrac{n_1}{|\bar{n}|}=\dfrac{2}{\sqrt{38}}$, $\cos\beta=\dfrac{n_2}{|\bar{n}|}=-\dfrac{3}{\sqrt{38}}$, $\cos\gamma=\dfrac{n_3}{|\bar{n}|}=\dfrac{5}{\sqrt{38}}$.

И, как говорится, обещанного три страницы ждут ☺ – вернёмся к Задаче 130, чтобы выполнить её проверку. Напоминаю, что там требовалось построить уравнение плоскости по точке $M(-1;2;-3)$ и двум векторам $\overline{p}_1(4;3;2)$, $\overline{p}_2(-5;7;1)$, и в результате решения мы получили уравнение $11x+14y-43z-146=0$. **Проверяем**:

Во-первых, подставим координаты точки $M(-1;2;-3)$ в полученное уравнение:

$$11\cdot(-1)+14\cdot 2-43\cdot(-3)-146=0$$

$$-11+28+129-146=0$$

$0=0$ – получено *верное равенство*, значит, точка M лежит в данной плоскости.

На втором шаге из уравнения плоскости «снимаем» вектор нормали: $\overline{n}(A;B;C)=\overline{n}(11;14;-43)$. Поскольку векторы $\overline{p}_1(4;3;2)$, $\overline{p}_2(-5;7;1)$ параллельны плоскости, а вектор $\overline{n}(11;14;-43)$ ей перпендикулярен, то должны иметь место следующие факты: $\overline{p}_1\perp\overline{n}$ и $\overline{p}_2\perp\overline{n}$. Ортогональность векторов элементарно проверяется с помощью скалярного произведения:

$$\overline{p}_1\cdot\overline{n}=4\cdot 11+3\cdot 14+2\cdot(-43)=44+42-86=0 \quad\Rightarrow\quad \overline{p}_1\perp\overline{n}$$

$$\overline{p}_2\cdot\overline{n}=-5\cdot 11+7\cdot 14+1\cdot(-43)=-55+98-43=0 \quad\Rightarrow\quad \overline{p}_2\perp\overline{n}$$

Вывод: уравнение плоскости найдено правильно.

В ходе проверки я фактически процитировал следующее утверждение теории: **вектор** $\overline{v}(v_1;v_2;v_3)$ **параллелен плоскости** $Ax+By+Cz+D=0$ **в том и только том случае, когда** $Av_1+Bv_2+Cv_3=0$**.**

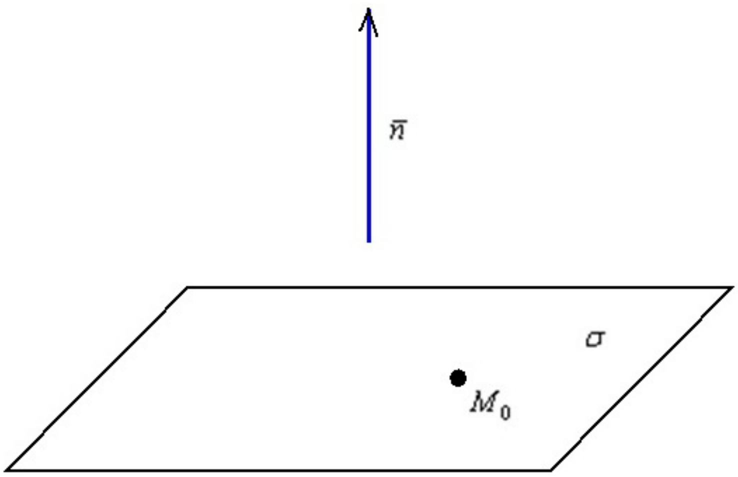
Итак, с «выуживанием» нормального вектора разобрались, теперь ответим на противоположный вопрос:

➢ Как составить уравнение плоскости по точке и вектору нормали?

Вытяните вперёд руку и мысленно зафиксируйте произвольную точку пространства… прямо, как Владимир Ильич Ленин ☺. Очевидно, что эта конструкция тоже однозначно определяет плоскость:

Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ перпендикулярно вектору $\overline{n}(n_1;n_2;n_3)$, в декартовой системе **координат выражается формулой**:

…



Выглядит значительно привлекательнее, чем предыдущие мытарства. И поэтому если в какой-то задаче вам известен вектор нормали, то, конечно же, уравнение выгодно составлять через него.

Но ещё раз обращаю внимание, что формулы, касаемые вектора нормали, работают лишь в декартовой системе координат, но не в общем аффинном случае.

Задача 135

Составить уравнение плоскости по точке $M_0(4;-2;3)$ и вектору нормали $\bar{n}(-1;4;0)$.

Решение: используем формулу …:

…

$-(x-4)+4(y+2)=0$

$(x-4)-4(y+2)=0$

$x-4-4y-8=0$

$x-4y-12=0$

Ответ: $x-4y-12=0$

Проверка выполняется очень легко:

1) Из полученного уравнения $x-4y+0\cdot z-12=0$ «снимаем» вектор нормали: $\bar{n}(A;B;C)=\bar{n}(1;-4;0)$ – всё хорошо, полученный вектор совпал с вектором из условия (в ряде случаев может получиться коллинеарный вектор).

2) Подставим координаты точки $M_0(4;-2;3)$ в уравнение плоскости:

$4-4\cdot(-2)+0\cdot 3-12=0$

$4+8+0-12=0$

$0=0$ – *верное равенство*, значит, точка M_0 принадлежит данной плоскости.

Вывод: уравнение плоскости найдено правильно.

Пример настолько прозрачен, что хочется немного завуалировать условие:

Задача 136

Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $K(-1;5;3)$ перпендикулярно оси абсцисс.

Это задача для самостоятельного решения. Просто, но со вкусом. И тема получает закономерное продолжение:

5.3. Простейшие задачи с плоскостью

Без лишних слов:

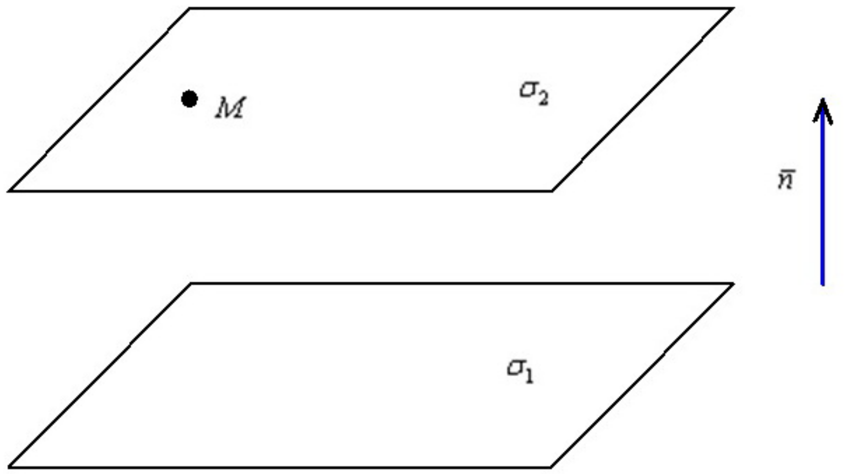
➢ Как найти плоскость, параллельную данной?

Задача 137

Найти плоскость, проходящую через точку $M(2;8;-5)$ параллельно плоскости $3x+y-4z-11=0$.

Решение: Обозначим известную плоскость через $\sigma_1: 3x+y-4z-11=0$. По условию требуется найти плоскость σ_2, которая параллельна плоскости σ_1 и проходит через точку M. …**Какие есть идеи?** Немножко подумайте …

А ещё лучше выполнить схематический чертёж, который сразу поможет с идеей:



У параллельных плоскостей один и тот же вектор нормали. Добавить нечего =) Осталось оформить мат в два хода:

1) Из уравнения $\sigma_1 : 3x + y - 4z - 11 = 0$ найдём нормальный вектор $\overline{n}(3;1;-4)$.

2) Уравнение плоскости σ_2 составим по точке $M(2;8;-5)$ и вектору $\overline{n}(3;1;-4)$:

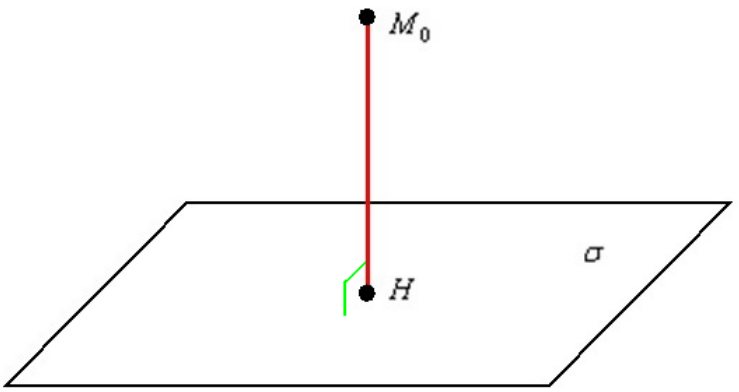
$$3\cdot(x-2)+1\cdot(y-8)-4\cdot(z-(-5))=0$$
$$3(x-2)+(y-8)-4(z+5)=0$$
$$3x-6+y-8-4z-20=0$$
$$3x+y-4z-34=0$$

Ответ: $\sigma_2 : 3x + y - 4z - 34 = 0$

Как выполнить проверку, я уже рассказал. Продолжаем раскидывать стог сена пространственной геометрии:

➢ Как найти расстояние от точки до плоскости?

Расстояние от точки до прямой – это длина перпендикуляра, опущенного из точки M_0 к данной плоскости:



Тут всё понятно: сначала найдём координаты точки H. Для этого нужно составить уравнение прямой M_0H и найти её точку пересечения с плоскостью σ. Затем вычислить длину $|M_0H|$. Но это долго, лениво, да и знаний пока не хватает. Поэтому используем специальную формулу, которая по своему виду напоминает формулу расстояния от точки до прямой:

Расстояние от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости $\sigma : Ax + By + Cz + D = 0$ в декартовой системе координат **выражается формулой** $\rho(M_0;\sigma) = \ldots$.

Задача 138

Найти расстояние от точки $N(10; 20; -30)$ до плоскости $8x+6z+15=0$

Решение: анализировать тут нечего, главное, не допустить ошибку в вычислениях:

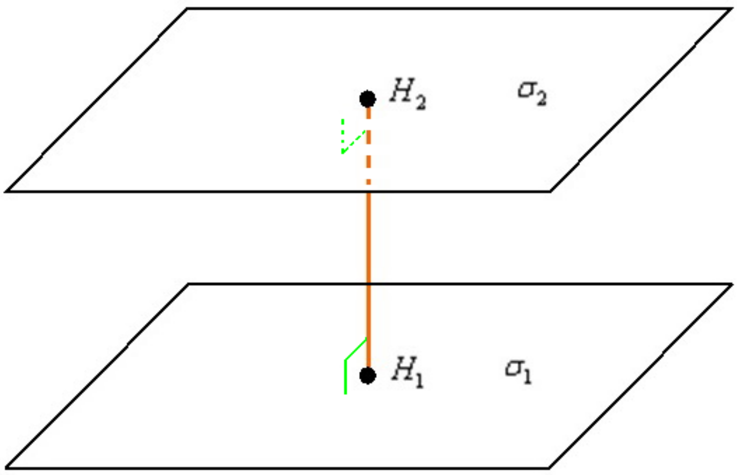
$$\rho(N;\sigma)=...=\frac{|-85|}{\sqrt{100}}=\frac{85}{10}=\frac{17}{2}=8\frac{1}{2}$$

Ответ: $\rho(N;\sigma)=8\frac{1}{2}$ ед.

Такое даже для самостоятельного решения как-то неловко предлагать….

➢ Как найти расстояние между плоскостями?

Об этом расстоянии заходит речь, когда плоскости параллельны:



И если мы знаем точки H_1, H_2, то никаких проблем. Впрочем, знать их не обязательно, поскольку перпендикуляр между плоскостями можно «протянуть» в любом месте. Гораздо выгоднее располагать уравнениями σ_1, σ_2. В этом случае можно найти любую точку любой плоскости и воспользоваться формулой предыдущего параграфа.

Но и тут есть спецформула:

Расстояние между параллельными плоскостями $\begin{matrix}\sigma_1: Ax+By+Cz+D_1=0\\ \sigma_2: Ax+By+Cz+D_2=0\end{matrix}$, заданными в декартовой системе, **выражается формулой**: ….

Задача 139

Найдём расстояние между параллельными плоскостями $\begin{matrix}\sigma_1: 3x+y-4z-11=0\\ \sigma_2: 3x+y-4z-34=0\end{matrix}$

Это плоскости из Задачи 137.

Решение: используем формулу:

$$\rho(\sigma_1;\sigma_2)=...=\frac{|-23|}{\sqrt{26}}=\frac{23\sqrt{26}}{26}$$

Ответ: $\rho(\sigma_1;\sigma_2)=\frac{23\sqrt{26}}{26}$ ед. $\approx 4{,}51$ ед.

И вот здесь уже можно предложить занятный пример:

Задача 140

Найти расстояние между параллельными плоскостями $\begin{matrix} \sigma_1 : 2x - 5y + 6z + 15 = 0 \\ \sigma_2 : 4x - 10y + 12z + 43 = 0 \end{matrix}$

Есть два пути решения:

1) Найти какую-нибудь точку, принадлежащую любой из плоскостей. Проще всего взять первую плоскость и обнулить «икс» и «зет». Далее используем формулу расстояния от точки до плоскости.

2) Используем формулу …. …Предложенные уравнения не имеют вид $\begin{matrix} \sigma_1 : Ax + By + Cz + D_1 = 0 \\ \sigma_2 : Ax + By + Cz + D_2 = 0 \end{matrix}$? Подумайте, что можно сделать ;)

Решение и ответ в конце книги.

➢ Взаимное расположение двух плоскостей

С параллельными плоскостями мы только что столкнулись и сейчас разовьём тему. Рассмотрим две плоскости пространства, заданные общими уравнениями:

$$\sigma_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$\sigma_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

Они могут:

1) совпадать;

2) быть параллельными: $\sigma_1 \parallel \sigma_2$;

3) пересекаться по некоторой прямой «эль»: $l = \sigma_1 \cap \sigma_2$.

По пунктам:

1) Совпадающие плоскости

Две плоскости совпадают, тогда и только тогда, когда их соответствующие коэффициенты пропорциональны, то есть, существует такое число «лямбда», что выполняются равенства …

Рассмотрим плоскости $\begin{matrix} \sigma_1 : 2x - y + 5 = 0 \\ \sigma_2 : -4x + 2y - 10 = 0 \end{matrix}$ и составим систему:

$$\begin{cases} A_2 = \lambda A_1 \\ B_2 = \lambda B_1 \\ C_2 = \lambda C_1 \\ D_2 = \lambda D_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4 = \lambda \cdot 2 \\ 2 = \lambda \cdot (-1) \\ 0 = \lambda \cdot 0 \\ -10 = \lambda \cdot 5 \end{cases}$$

Из **каждого** уравнения системы следует, что $\lambda = -2$. Таким образом, система совместна и плоскости σ_1, σ_2 совпадают.

2) Параллельные плоскости

Две плоскости параллельны тогда и только тогда, когда их коэффициенты при переменных x, y и z пропорциональны:…, но …

На практике первые три коэффициента часто банально попарно совпадают $(\lambda = 1)$:

$\begin{matrix} \sigma_1 : 3x + y - 4z - 11 = 0 \\ \sigma_2 : 3x + y - 4z - 34 = 0 \end{matrix}$ (Задача 139), но могут и не совпадать, как, например, в следующей Задаче 140: $\begin{matrix} \sigma_1 : 2x - 5y + 6z + 15 = 0 \\ \sigma_2 : 4x - 10y + 12z + 43 = 0 \end{matrix}$.

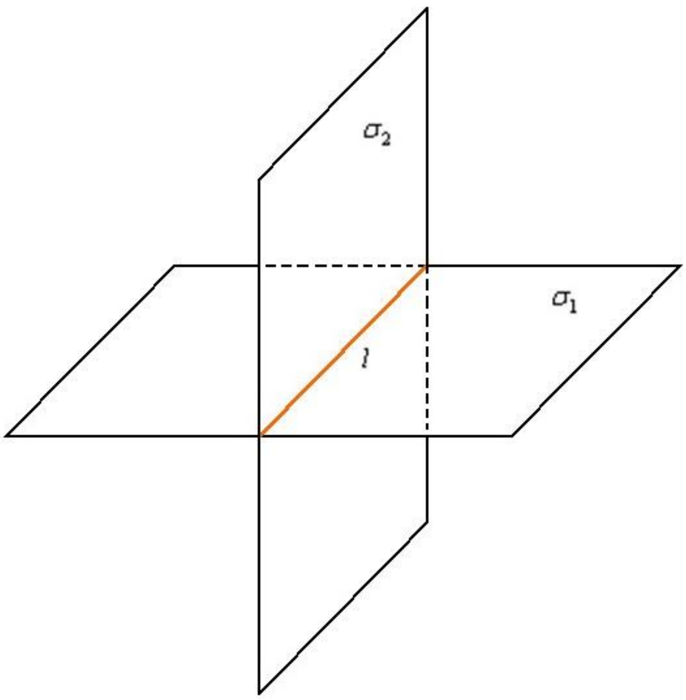
Убедимся, что эти прямые действительно параллельны. Составим пропорцию из соответствующих коэффициентов $\frac{4}{2} = \frac{-10}{-5} = \frac{12}{6} = 2$, но $\frac{D_2}{D_1} = \frac{43}{15} \neq 2$, что и требовалось проверить. Теперь способ академический, составим соответствующую систему:

$$\begin{cases} A_2 = \lambda A_1 \\ B_2 = \lambda B_1 \\ C_2 = \lambda C_1 \\ D_2 = \lambda D_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 = \lambda \cdot 2 \\ -10 = \lambda \cdot (-5) \\ 12 = \lambda \cdot 6 \\ 43 = \lambda \cdot 15 \end{cases}$$

Из первых трёх уравнений следует, что $\lambda = 2$, а из четвёртого уравнения следует, что $\lambda = \frac{43}{15} \neq 2$, значит, *система несовместна*, но коэффициенты при переменных x, y, z пропорциональны, следовательно, плоскости параллельны.

3) Пересекающиеся плоскости

И третий, самый распространённый случай, когда две плоскости пересекаются по некоторой прямой $l = \sigma_1 \cap \sigma_2$:



Две плоскости пересекаются тогда и только тогда, когда их коэффициенты при переменных x, y, z НЕ пропорциональны, то есть НЕ существует такого значения «лямбда», чтобы выполнялись равенства …

Попутно заметим **важный факт**: если плоскости пересекаются, то система линейных уравнений $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ задаёт уравнение прямой в пространстве.

Но о пространственной прямой позже.

В качестве примера рассмотрим плоскости $\begin{matrix} \sigma_1 : x+4y-3z+1=0 \\ \sigma_2 : x+4y-9z+1=0 \end{matrix}$. Составим систему для соответствующих коэффициентов:

…

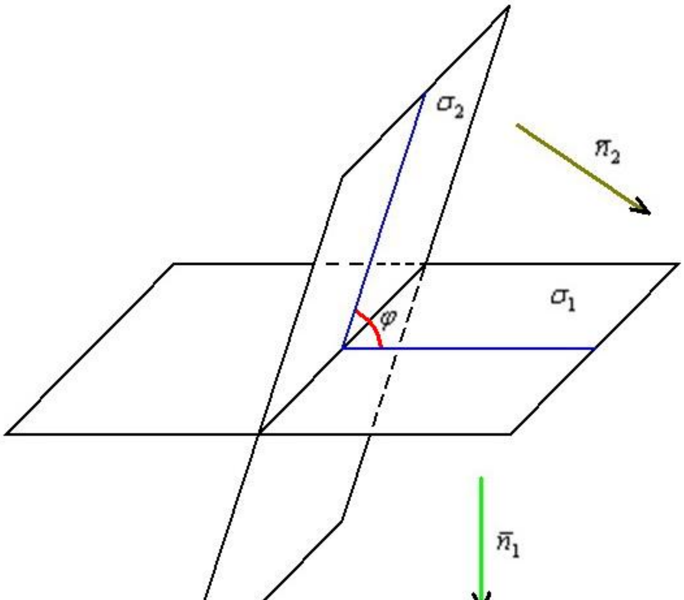
Из первых двух уравнений следует, что $\lambda = 1$, но из третьего уравнения следует, что $\lambda = 3$, значит, *система несовместна* и плоскости пересекаются.

Проверку можно выполнить и «по пижонски», одной строкой: $\frac{1}{1} = \frac{4}{4} \neq \frac{-9}{-3}$.

И из этого случая логично вытекает следующий параграф:

➢ Как найти угол между плоскостями?

Две пересекающиеся плоскости $\begin{matrix} \sigma_1 : A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ \sigma_2 : A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{matrix}$ образуют четыре *двухгранных угла* и любой из этих углов можно считать углом между плоскостями. Иными словами, острый или тупой угол получится – не имеет значения. Обозначим угол между плоскостями через $\varphi = \angle(\sigma_1; \sigma_2)$:



Наклон плоскости однозначно определяется её вектором нормали, и поэтому угол между плоскостями равен углу между нормальными векторами данных плоскостей. В системе $OXYZ$ угол между векторами рассчитывается с помощью обыденной формулы …. Распишем её в коэффициентах:

$$\cos\varphi = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

….и всего-то.

Ну, коль скоро формула простецкая, то пусть будет вам задачка поинтереснее, решаем её самостоятельно:

Задача 141

Найти угол между плоскостями $\begin{matrix} \sigma_1 : 5y-z-3=0 \\ \sigma_2 : 4x+z=0 \end{matrix}$, координаты декартовы.

И из всех вариантов пересечения плоскостей особый интерес, конечно же, находится вокруг нас – это перпендикулярные плоскости:

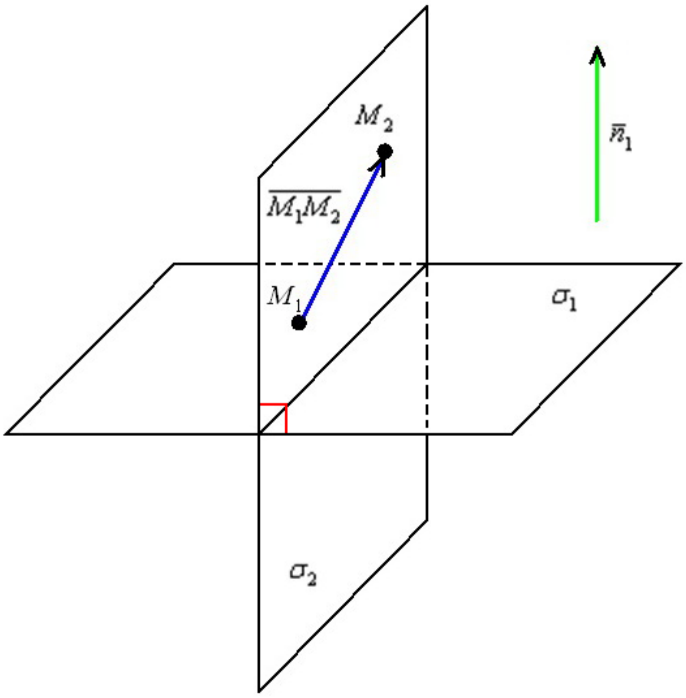
➢ Как найти плоскость, перпендикулярную данной?

Очевидно, что к любой плоскости можно провести бесконечно много перпендикулярных плоскостей, и для того, чтобы зафиксировать **конкретную** перпендикулярную плоскость, нужно задать точку и вектор *либо* две точки:

Задача 142

Дана плоскость $\sigma_1 : x - y + z + 5 = 0$ (координаты декартовы). Найти плоскость σ_2, перпендикулярную данной и проходящую через точки $M_1(2; 1; -3), M_2(1; 0; 5)$.

Решение начнём с вопроса задачи: что мы знаем о плоскости σ_2?



Известны две точки. Можно найти вектор $\overline{M_1M_2}$, параллельный данной плоскости. Маловато. Было бы неплохо раздобыть ещё один подходящий вектор. Так как плоскости должны быть перпендикулярны, то подойдёт нормальный вектор $\overline{n}_1$ плоскости σ_1 (для лучшего понимания задачи отложите вектор нормали $\overline{n}_1$ от точки M_1 в плоскости σ_2).

Проводить подобные рассуждения здОрово помогает схематический чертёж! – повторю этот красный, а точнее, золотой совет ☺

Итак, задача «раскручена», и решение удобно оформить по пунктам *(это совет серебряный:)*:

1) Найдём вектор $\overline{M_1M_2} = (1-2; 0-1; 5-(-3)) = (-1; -1; 8)$.

2) Из уравнения $\sigma_1 : x - y + z + 5 = 0$ снимем вектор нормали: $\overline{n}_1(1; -1; 1)$.

3) Уравнение плоскости σ_2 составим по точке $M_2(1; 0; 5)$ (можно взять M_1) и двум неколлинеарным векторам $\overline{M_1M_2}(-1; -1; 8), \overline{n}_1(1; -1; 1)$:

$$\begin{vmatrix} x-1 & -1 & 1 \\ y-0 & -1 & -1 \\ z-5 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} - y \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} + (z-5) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(-1+8)(x-1) - (-1-8)y + (1+1)(z-5) = 0$$

$$7(x-1) + 9y + 2(z-5) = 0$$

$$7x - 7 + 9y + 2z - 10 = 0$$

Ответ: $\sigma_2 : 7x + 9y + 2z - 17 = 0$

Проверка состоит из двух этапов:

1) Проверяем, действительно ли плоскости будут перпендикулярны. Если две плоскости перпендикулярны, то их векторы нормали будут ортогональны. Логично. Из полученного уравнения $\sigma_2 : 7x + 9y + 2z - 17 = 0$ снимаем вектор нормали $\bar{n}_2(7; 9; 2)$ и рассчитываем скалярное произведение векторов:

$$\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2 = 1 \cdot 7 - 1 \cdot 9 + 1 \cdot 2 = 7 - 9 + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{n}_1 \perp \bar{n}_2, \text{ а значит, } \sigma_1 \perp \sigma_2$$

К слову, здесь мы разобрали ещё одну задачу – проверили плоскости на перпендикулярность, и теперь вы знаете, как это сделать.

2) В уравнение плоскости $\sigma_2 : 7x + 9y + 2z - 17 = 0$ подставляем координаты точек $M_1(2; 1; -3), M_2(1; 0; 5)$. Обе точки должны «подойти».

И первый, и второй пункт можно выполнить устно. **Но выполнить обязательно!** И это уже даже не платиновый совет – это аксиома!

…Что-то не хочется мне вас сегодня отпускать…, наверное, хорошо себя вели и добросовестно прорешали все задачи =) Придётся рассказать что-нибудь ещё:

➢ Взаимное расположение трёх плоскостей

Три плоскости могут располагаться в пространстве **8 способами**, и я предлагаю вам **творческое задание:** найдите и изобразите схематически все варианты в тетради

Самый известный случай взаимного расположения трёх плоскостей – это когда плоскости пересекаются в одной точке. Живой пример находится совсем недалеко от вас. Посмотрите вверх – в угол комнаты, где пересекаются две стены и потолок. Пессимисты могут посмотреть вниз. Аналитически данному случаю соответствует система линейных уравнений $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \end{cases}$, которая имеет единственное решение:

И вот, оно, оказывается как: геометрический смысл системы трёх линейных уравнений с тремя неизвестными состоит во взаимном расположении трёх плоскостей в пространстве. От этого зависит количество решений системы (ни одного, одно или бесконечно много).

5.4. УравнениЯ прямой в пространстве

Для лёгкого понимания темы целесообразно освоить или вспомнить уравнение «плоской» прямой, поскольку будет очень много похожих вещей. Но будут и отличия, на одно из которых вы уже наверняка обратили внимание. Я выделил прописной буквой окончание слова «уравнениЯ», подчеркивая, что оно находится ВО МНОЖЕСТВЕННОМ ЧИСЛЕ. И это не случайно: **особенность пространственной прямой состоит в том, что она задаётся не одним уравнением, а некоторым множеством уравнений**.

Теперь о совпадениях: пространственную прямую точно так же **обозначают** строчными латинскими буквами $..., l, m, n, ...$, как вариант, с подстрочными индексами: l_1, l_2, l_3. Либо двумя точками, принадлежащими данной прямой: KL.

И точно так же – её можно задать несколькими способами. Начнём с канонов, точки и направляющего вектора:

➢ Канонические уравнения прямой

Если известна некоторая точка пространства $M(x_0;\, y_0;\, z_0)$, принадлежащая прямой, и направляющий вектор $\overline{p}(p_1;\, p_2;\, p_3)$ данной прямой, то ***канонические уравнения*** **этой прямой выражаются формулами**:

…

Приведённая запись предполагает, что координаты направляющего вектора $p_1,\, p_2,\, p_3$ **не равны нулю**. Что делать, если одна или две координаты нулевые, мы рассмотрим чуть позже.

Задача 143

Составить канонические уравнения прямой по точке $M(-2;\, 0;\, 3)$ и направляющему вектору $\overline{p}(4;\, 1;\, -5)$

Решение: по соответствующим формулам:

…

Ответ: $\dfrac{x+2}{4}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-3}{-5}$

Что следует отметить в этом очень простом примере? **Во-первых, полученные уравнения НЕ НАДО сокращать на единицу**:

$$\cancel{\frac{x+2}{4}=y=\frac{z-3}{-5}}$$

Сократить, точнее, можно, но это режет глаз и создаёт неудобства в ходе решения задач. А **во-вторых**, **проверка**, которая очень легко (и быстро!) выполняется устно:

Сначала смотрим на *знаменатели* уравнений и сверяемся – **правильно ли** там записаны координаты направляющего вектора $\overline{p}(4;\, 1;\, -5)$? Нет, не подумайте, у нас не урок в детском садике «Тормозок», эта мера позволит исключить ошибку по невнимательности. Никто не застрахован от «наваждения», или вдруг вы условие неправильно переписали?

Далее подставляем координаты точки $M(-2;\, 0;\, 3)$ в найденные уравнения:

$$\frac{-2+2}{4}=\frac{0}{1}=\frac{3-3}{-5}$$

$0=0=0$ – получены *верные равенства*, значит, координаты точки M удовлетворяют нашим уравнениям, и сама точка действительно принадлежит данной прямой.

Довольно часто требуется найти какую-нибудь другую точку N, принадлежащую данной прямой. Как это сделать? Берём полученные уравнения $\dfrac{x+2}{4}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-3}{-5}$ и мысленно «отщипываем», например, левый кусочек: $\dfrac{x+2}{4}$. Теперь этот кусочек приравниваем **к любому числу** (помним, что ноль уже был), например, к единице: $\dfrac{x+2}{4}=1$.

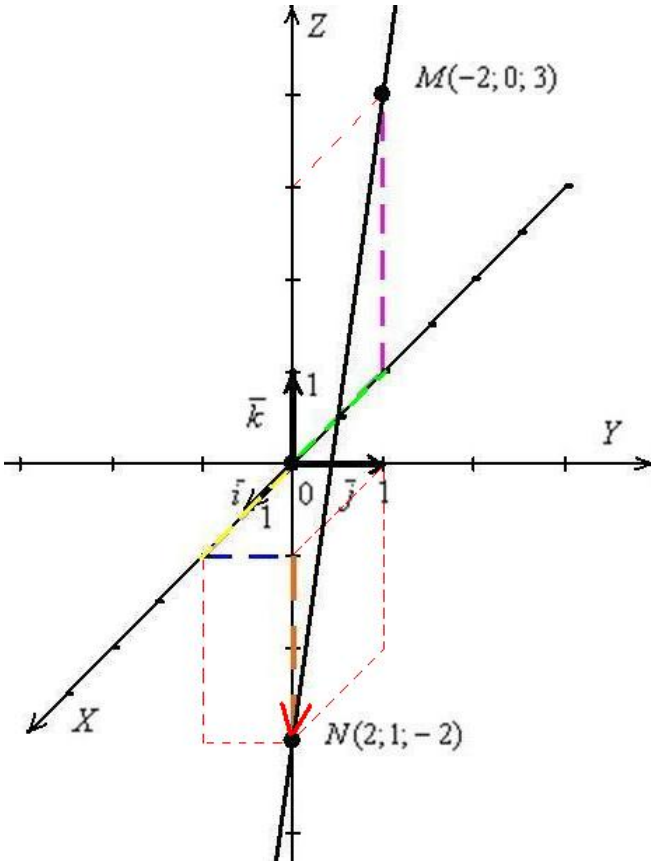
Так как $\frac{x+2}{4}=1$, то и два других «куска» тоже должны быть равны единице. По сути, нужно решить систему:

$$\begin{cases} \frac{x+2}{4}=1 \\ \frac{y}{1}=1 \\ \frac{z-3}{-5}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2=4 \\ y=1 \\ z-3=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=-2 \end{cases}$$

Проверим, удовлетворяет ли точка $N(2;1;-2)$ уравнениям $\frac{x+2}{4}=\frac{y}{1}=\frac{z-3}{-5}$:

$\frac{2+2}{4}=\frac{1}{1}=\frac{-2-3}{-5} \Rightarrow \frac{4}{4}=\frac{1}{1}=\frac{-5}{-5} \Rightarrow 1=1=1$ – получены *верные равенства*, значит, точка N действительно принадлежит данной прямой.

Выполним чертёж в прямоугольной системе координат. Заодно вспомним, как правильно откладывать точки в пространстве. Строим точку $M(-2;0;3)$:



– от начала координат в отрицательном направлении оси OX откладываем отрезок первой координаты $x=-2$ *(зелёный пунктир)*;

– вторая координата $y=0$ нулевая, поэтому «не уходим» с оси OX ни влево, ни вправо;

– в соответствие с третьей координатой $z=3$ отмеряем три единицы вверх *(фиолетовый пунктир)*.

Строим точку $N(2;1;-2)$:

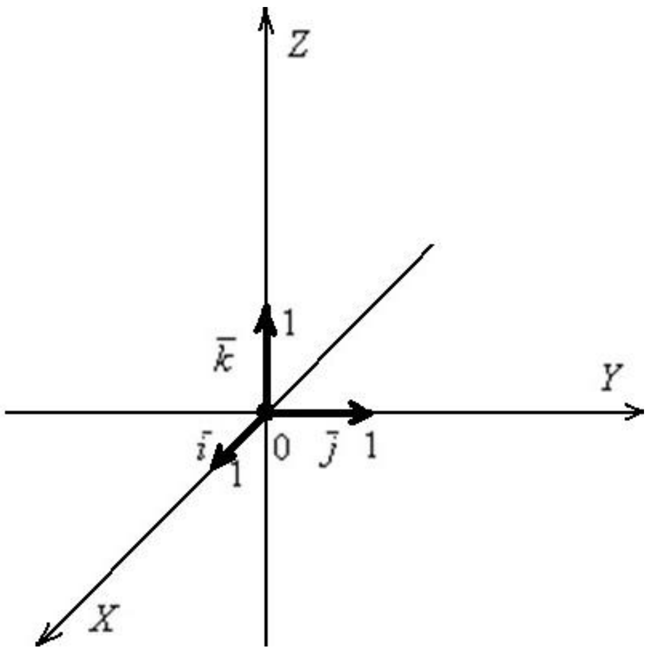
– отмеряем две единицы «на себя» *(желтый пунктир)*, одну единицу вправо *(синий пунктир)* и две единицы вниз *(коричневый пунктир)*. Коричневый пунктир и сама точка N наложились на координатную ось, обратите внимание, что они находятся в нижнем полупространстве и расположены ПЕРЕД осью OZ.

Сама прямая MN проходит над осью OX и, если меня не подводит глазомер, над осью OY. Не подводит, убедился аналитически. Если бы прямая MN проходила ЗА осью OY, то следовало бы стереть частичку линии MN сверху и снизу точки скрещивания.

У прямой бесконечно много направляющих векторов, например:

… *(красная стрелка)*. Получился в точности исходный вектор $\bar{p}(4;1;-5)$, но это чистая случайность (такую уж я выбрал точку N). Любой коллинеарный вектор, например, $\bar{a}\left(\frac{4}{3};\frac{1}{3};-\frac{5}{3}\right)$, $\bar{b}(-8;-2;10)$ тоже будет направляющим вектором данной прямой *(вспоминаем, как их получить)*.

Разберёмся с частными случаями, когда одна или две координаты направляющего вектора нулевые. **Попутно продолжим тренировать пространственное воображение**. **Изобразите в тетради декартову систему координат** $OXYZ$. Напоминаю удобный масштаб: *2 клетки = 1 ед.* – по осям OY, OZ и *диагональ одной клетки = 1 ед.* – по оси OX.



Теперь я буду рассказывать о прямых, **а вы их мысленно представляйте!** Рассмотрим все шесть случаев:

1) Для точки $M(x_0; y_0; z_0)$ и направляющего вектора $\bar{p}(p_1; 0; 0)$ канонические уравнения прямой распадаются на три **отдельных** уравнения:

$$0 \cdot x = 0; \quad y - y_0 = 0; \quad z - z_0 = 0$$

или короче: $y - y_0 = 0; \quad z - z_0 = 0$

Что это за прямая?

Поскольку направляющий вектор $\bar{p}(p_1; 0; 0)$ коллинеарен *орту* $\bar{i}(1; 0; 0)$, то такая прямая будет параллельна оси OX, в частности, уравнения $y = 0; \quad z = 0$ задают саму *ось абсцисс*.

В чём смысл уравнений $y = 0; \quad z = 0 \quad (0 \cdot x = 0)$? «Игрек» и «зет» ВСЕГДА *(при любом «икс»)* равны нулю. А это ось OX. Кроме того, есть и другая интерпретация – ведь перед нами уравнения двух плоскостей! Уравнение $y = 0$ задаёт координатную плоскость XOZ, а уравнение $z = 0$ – плоскость XOY. Смотрим на чертёж и ищем их пересечение!

Задача 144

Составить уравнения прямой по точке $M(6; -7; 8)$ и вектору $\bar{p}(-3; 0; 0)$.

Решение и **ответ** в одну строчку: $y + 7 = 0; \quad z - 8 = 0$

Какому условию удовлетворяет каждая точка этой прямой?

«Иксовая» координата может быть любой: $0 \cdot x = 0$ *(на практике данное уравнение, как правило, не записывают)*. А вот «игрековая» и «зетовая» координата **постоянны**, равны **конкретным числам**: $y = -7; \quad z = 8$.

Самостоятельно осмысливаем два «родственных» случая:

2) Канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(x_0; y_0; z_0)$ параллельно вектору $\bar{p}(0; p_2; 0)$, выражаются формулами …. Такие прямые будут параллельны координатной оси OY, в частности, уравнения $x = 0; \quad z = 0$ *(y любое)* задают координатную саму *ось ординат*.

3) Канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(x_0; y_0; z_0)$ параллельно вектору $\bar{p}(0; 0; p_3)$, выражаются формулами …. Данные прямые параллельны координатной оси OZ, а уравнения $x = 0; \quad y = 0$ *(z любое)* задают саму *ось аппликат*.

Обкатываем вторую тройку:

4) Для точки $M(x_0; y_0; z_0)$ и направляющего вектора $\overline{p}(p_1; p_2; 0)$ канонические уравнения прямой распадаются на пропорцию … и уравнение плоскости $z - z_0 = 0$.

Задача 145

Составить уравнения прямой по точке $M(0; -1; 4)$ и вектору $\overline{p}(2; -3; 0)$.

Решение и **ответ** в одну строчку: …

Разберём **суть** полученной записи. Уравнение $z - 4 = 0$ задаёт плоскость, причём данная плоскость будет параллельна «родной» координатной плоскости XOY. Из пропорции $\frac{x}{2} = \frac{y+1}{-3}$ легко выразить уравнение «плоской» прямой, единственное, эта прямая будет находиться не на плоскости XOY, а на высоте $z = 4$.

Если высота нулевая: $z_0 = 0$, то уравнения принимают вид $\frac{x - x_0}{p_1} = \frac{y - y_0}{p_2}$; $z = 0$, и вот это уже в точности наша «плоская» прямая, лежащая в плоскости XOY.

Таким образом, **рассмотренный случай задаёт прямую, параллельную координатной плоскости** XOY. Действительно, задумайтесь, ведь направляющий вектор $\overline{p}(p_1; p_2; 0)$ параллелен данной плоскости, ибо «зетовая» координата равна нулю.

Аналогично – **читаем, вдумываемся и представляем:**

5) Прямая, заданная точкой $M(x_0; y_0; z_0)$ и направляющим вектором $\overline{p}(p_1; 0; p_3)$, параллельна координатной плоскости XOZ, и её канонические уравнения выражаются формулами: $\frac{x - x_0}{p_1} = \frac{z - z_0}{p_3}$; $y - y_0 = 0$. В частности, уравнения $\frac{x - x_0}{p_1} = \frac{z - z_0}{p_3}$; $y = 0$ определяют прямую, лежащую в плоскости XOZ.

6) Прямая, заданная точкой $M(x_0; y_0; z_0)$ и направляющим вектором $\overline{p}(0; p_2; p_3)$, параллельна координатной плоскости YOZ, и её канонические уравнения выражаются формулами: …. В частности, уравнения $\frac{y - y_0}{p_2} = \frac{z - z_0}{p_3}$; $x = 0$ определяют прямую, лежащую в плоскости YOZ.

Настала пора закусить – **составляем уравнения и вникаем в их смысл:**

Задача 146

Записать канонические уравнения прямой, если известна точка и направляющий вектор данной прямой:

а) $M(3; 0; 0)$, $\overline{p}(0; -1; 7)$;

б) $M(2; -3; 4)$, $\overline{p}(2; -3; -4)$.

в) Прямая проходит через точку $M(8; 9; 10)$ параллельно оси OZ.

Это задание для самостоятельного решения, ответы в конце книги.

> ➢ **Как составить уравнения прямой по двум точкам?**

Если известны две точки пространства $M_1(x_1; y_1; z_1), M_2(x_2; y_2; z_2)$, то уравнения прямой, проходящей через данные точки, выражаются формулами:

…

Очевидно, что вектор $\overline{M_1M_2}(x_2-x_1; y_2-y_1; z_2-z_1)$ является направляющим вектором прямой, и фактически это вариация канонических уравнений. Поскольку у них есть много частных случаев, которые мы только что рассмотрели, то **сначала** я рекомендую находить направляющий вектор, **и только потом** составлять уравнения:

Задача 147

Составить уравнения прямой, проходящей через точки $M_1(2; -3; 6), M_2(4; -3; -10)$

Решение: найдём направляющий вектор прямой:

$$\overline{M_1M_2}=(4-2; -3-(-3); -10-6)=(2; 0; -16)$$

Уравнения прямой составим по точке $M_1(2; -3; 6)$ *(можно выбрать точку M_2)* и направляющему вектору $\overline{M_1M_2}(2; 0; -16)$:

$$\frac{x-2}{2}=\frac{z-6}{-16}; \quad y-(-3)=0$$

Ответ: $\frac{x-2}{2}=\frac{z-6}{-16}; \quad y+3=0$

Здесь, в принципе, можно сократить знаменатели на два: $\frac{x-2}{1}=\frac{z-6}{-8}; \quad y+3=0$, но надобности в этом нет никакой. Выполним **проверку**:

1) Подставим координаты точки $M_1(2; -3; 6)$ в полученные уравнения:

$$\frac{2-2}{2}=\frac{6-6}{-16}; \quad -3+3=0$$

$0=0; \quad 0=0$ – получены *верные равенства*.

2) Подставим координаты точки $M_2(4; -3; -10)$:

$$\frac{4-2}{2}=\frac{-10-6}{-16}; \quad -3+3=0$$

$1=1; \quad 0=0$ – получены *верные равенства*.

Вывод: канонические уравнения прямой составлены правильно.

Самостоятельно:

Задача 148

Составить уравнения прямой, проходящей через точки $M_1(0; 8; 1), M_2(0; 7; 1)$

➢ Параметрические уравнения пространственной прямой

Важнейший вид! Да, параметрические уравнения, конечно, не альфа и омега пространственной геометрии, но «рабочая лошадка» многих задач. Причём, этот вид уравнений часто применяется неожиданно, и я бы сказал, изящно.

Если известна точка $M(x_0;\ y_0;\ z_0)$, принадлежащая прямой, и направляющий вектор $\overline{p}(p_1;\ p_2;\ p_3)$ данной прямой, то параметрические уравнения этой прямой задаются системой:

…

Всё проще пареной репы, поэтому придётся приперчить задачу:

Задача 149

Составить параметрические уравнения следующих прямых:

а) $\dfrac{x+4}{1}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z-5}{-4}$

б) $\dfrac{y+1}{7}=\dfrac{z}{-3};\quad x+2=0$

в) $x=0;\quad y-6=0$

Решение: прямые заданы каноническими уравнениями и на первом этапе следует найти какую-нибудь точку, принадлежащую прямой, и её направляющий вектор.

а) Из уравнений $\dfrac{x+4}{1}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z-5}{-4}$ «снимаем» точку и направляющий вектор: $M_0(-4;0;5)$, $\overline{p}(1;5;-4)$. Точку можно выбрать и другую *(как это сделать – рассказано после Задачи 143)*, но лучше взять самую очевидную. Кстати, во избежание ошибок, всегда подставляйте её координаты в уравнения.

Составим параметрические уравнения данной прямой:

$$\ldots\ \Rightarrow \begin{cases} x=t-4 \\ y=5t \\ z=-4t+5 \end{cases}$$

Одно из удобств состоит в том, с помощью этих уравнений легко находить как раз другие точки прямой. Например, найдём точку K, координаты которой, скажем, соответствуют значению параметра $t=3$:

$$\begin{cases} x=3-4 \\ y=5\cdot 3 \\ z=-4\cdot 3+5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=15 \\ z=-7 \end{cases}$$

Таким образом: $K(-1;15;-7)$

б) Рассмотрим канонические уравнения $\frac{y+1}{7}=\frac{z}{-3}; \quad x+2=0$. Выбор точки здесь несложен, но коварен: $M_0(-2;-1;0)$ – **будьте внимательны, не перепутайте координаты!!!**. Как «вытащить» направляющий вектор? Можно порассуждать, чему параллельна данная прямая, а можно использовать простой **формальный приём:** в пропорции находятся «игрек» и «зет», поэтому запишем направляющий вектор $\overline{p}(?;7;-3)$, а на оставшееся место поставим ноль: $\overline{p}(0;7;-3)\ldots$, зря я об этом рассказал, теперь расслабитесь :)

Составим параметрические уравнения прямой:

$$\ldots \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=7t-1 \\ z=-3t \end{cases}$$

в) Перепишем уравнения $x=0; \quad y-6=0$ в виде $x=0; \quad y-6=0; \quad 0\cdot z=0$, то есть «зет» может быть любым. А если любым, то пусть, например, $z=1$. Таким образом, точка $M_0(0;6;1)$ принадлежит данной прямой. Для нахождения направляющего вектора используем следующий **формальный приём:** в исходных уравнениях $x=0; \quad y-6=0$ находятся «икс» и «игрек», и в направляющем векторе на этих местах записываем нули: $\overline{p}(0;0;?)$. На оставшееся место ставим единицу: $\overline{p}(0;0;1)$. Вместо единицы подойдёт любое число, кроме нуля, но единица лаконичнее всего.

Запишем параметрические уравнения прямой:

$$\begin{cases} x=p_1t+x_0 \\ y=p_2t+y_0 \\ z=p_3t+z_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0\cdot t+0 \\ y=0\cdot t+6 \\ z=1\cdot t+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=6 \\ z=t+1 \end{cases}$$

И в академичном стиле тут ещё можно записать **ответ**, в котором под пунктами «а», «бэ» и «вы» перечислить полученные уравнения.

Аналогичное задание для самостоятельного решения:

Задача 150

Составить параметрические уравнения следующих прямых:

а) $\frac{x}{8}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{-1}$;

б) $y+1=0; \quad z-5=0$;

в) прямая проходит через точки $A(1;3;3), B(3;-3;3)$.

Полученные вами ответы могут несколько отличаться от моих ответов, дело в том, что **параметрические уравнения можно записать не единственным способом**. Важно, чтобы ваши и мои направляющие векторы были коллинеарны, и ваша точка «подходила» к моим уравнениям (ну, или наоборот, моя точка – к вашим уравнениям ☺).

Как ещё можно задать прямую в пространстве? Хочется что-нибудь придумать с вектором нормали. Но тут ничего не получится – у пространственной прямой нормальные векторы могут смотреть совершенно в разные стороны.

Ещё один способ уже несколько раз «проскакивал» ранее:

➢ Прямая, заданная пересечением двух плоскостей

Если плоскости $\sigma_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\quad \sigma_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ **пересекаются, то система линейных уравнений** $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$ **задаёт прямую в пространстве.**

То есть прямая задана уравнениями двух плоскостей. Типовая и распространенная задача состоит в том, чтобы переписать уравнения прямой в каноническом виде:

Задача 151

Записать канонические уравнения прямой $d: \begin{cases} 2x-y+3z+4=0 \\ x+5y-3z-7=0 \end{cases}$

Решение: чтобы составить канонические уравнения прямой, нужно знать точку и направляющий вектор. А у нас даны уравнения двух плоскостей….

1) Сначала найдём какую-либо точку, принадлежащую данной прямой. Как это сделать? Методом подбора. В системе уравнений обнулим какую-нибудь координату, например, $y=0$. Тогда получается система двух линейных уравнений с двумя неизвестными: $\begin{cases} 2x+3z+4=0 \\ x-3z-7=0 \end{cases}$. Почленно складываем уравнения и находим решение системы:

$$\begin{cases} 2x+3z+4=0 \\ x-3z-7=0 \end{cases} \Rightarrow 3x-3=0 \Rightarrow x=1;\ z=-2$$

Таким образом, точка $M(1;0;-2)$ принадлежит данной прямой. Но принадлежит ли? Выполним **проверку** – подставим её координаты в исходную систему уравнений:

$$\begin{cases} 2\cdot 1-0+3\cdot(-2)+4=0 \\ 1+5\cdot 0-3\cdot(-2)-7=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2-6+4=0 \\ 1+6-7=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0=0 \\ 0=0 \end{cases}$$

Получены верные равенства, значит, действительно $M\in d$.

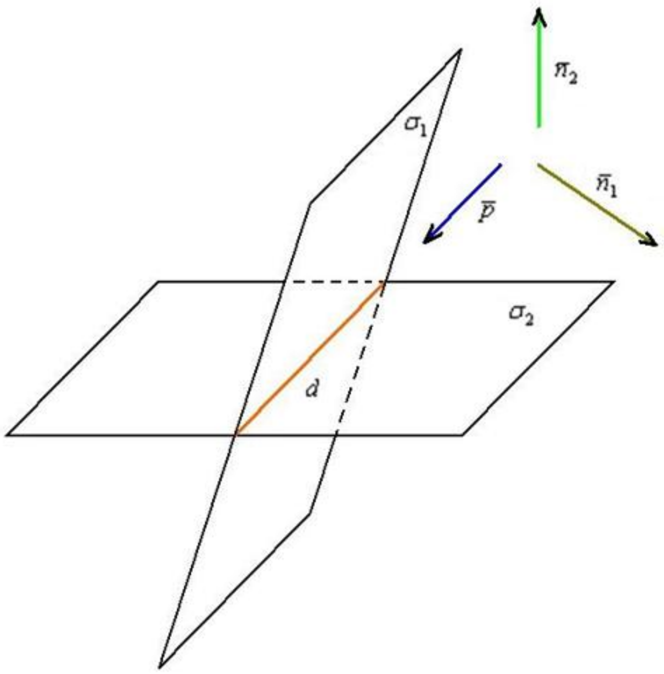
В процессе подбора обратите внимание на следующий **технический момент:** желательно найти точку с **целыми** координатами. Если бы в системе мы обнулили «икс» или «зет», то не факт, что получилась бы «хорошая» точка без дробных координат. Такой анализ и подбор точки следует проводить мысленно или на черновике.

2) Как найти направляющий вектор прямой? Существует **готовая формула:** если прямая задана пересечением двух плоскостей $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$, то вектор … является направляющим вектором данной прямой.

В нашей задаче:

$$\overline{p}\left(\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -3 \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}\right)=\overline{p}(3-15;\ 3+6;\ 10+1)=\overline{p}(-12;\ 9;\ 11)$$

Однако всех формул не упомнишь и поэтому **очень важно понимать, откуда они взялись**. Направляющий вектор нашей прямой ортогонален нормальным векторам плоскостей: $\bar{p} \perp \bar{n}_1$ и $\bar{p} \perp \bar{n}_2$, поэтому вектор «пэ» можно найти как векторное произведение векторов нормали: $\bar{p} = [\bar{n}_1 \times \bar{n}_2]$.



Из уравнений плоскостей $\sigma_1: 2x - y + 3z + 4 = 0$, $\sigma_1: x + 5y - 3z - 7 = 0$ «снимаем» их векторы нормали:

$$\bar{n}_1(2; -1; 3),\ \bar{n}_2(1; 5; -3)$$

и находим направляющий вектор прямой:

$$\bar{p} = [\bar{n}_1 \times \bar{n}_2] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} \cdot \bar{i} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \cdot \bar{j} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \cdot \bar{k} =$$

$$= (3 - 15) \cdot \bar{i} - (-6 - 3) \cdot \bar{j} + (10 + 1) \cdot \bar{k} =$$

$$= -12\bar{i} + 9\bar{j} + 11\bar{k}$$

Проверим результат с помощью скалярного произведения:

$$\left.\begin{array}{l} \bar{p} \cdot \bar{n}_1 = -12 \cdot 2 + 9 \cdot (-1) + 11 \cdot 3 = -24 - 9 + 33 = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{p} \perp \bar{n}_1 \\ \bar{p} \cdot \bar{n}_2 = -12 \cdot 1 + 9 \cdot 5 + 11 \cdot (-3) = -12 + 45 - 33 = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{p} \perp \bar{n}_2 \end{array}\right., \text{ ч.т.п.}$$

И, наконец, завершающий этап:

3) Составим канонические уравнения прямой по точке $M(1; 0; -2)$ и направляющему вектору $\bar{p} = -12\bar{i} + 9\bar{j} + 11\bar{k}$:

…

Ответ: …

Аналогичная задача для самостоятельного решения:

Задача 152

Записать канонические уравнения прямой $d: \begin{cases} 2y + z + 5 = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$

Будьте внимательны!

Ваш ответ может отличаться от моего ответа (смотря, какую точку подберёте). Если отличие есть, то для проверки возьмите точку из вашего уравнения и подставьте в моё уравнение (или наоборот).

Полное решение и ответ в конце книги.

5.5. Задачи с прямой в пространстве

Их много. Поэтому лирического вступления не будет. Будет прозаическая порка =)

➢ Взаимное расположение прямых в пространстве

Две прямые d_1, d_2 пространства могут:

1) ***скрещиваться***;

2) пересекаться в точке $M = d_1 \cap d_2$;

3) быть параллельными $d_1 \parallel d_2$;

4) совпадать.

Случай № 1 принципиально отличается от других случаев. **Две прямые скрещиваются, если они не лежат в одной плоскости**. Поднимите одну руку вверх, а другую руку вытяните вперёд – вот вам и пример скрещивающихся прямых. В пунктах же № 2-4 прямые обязательно лежат **в одной плоскости**.

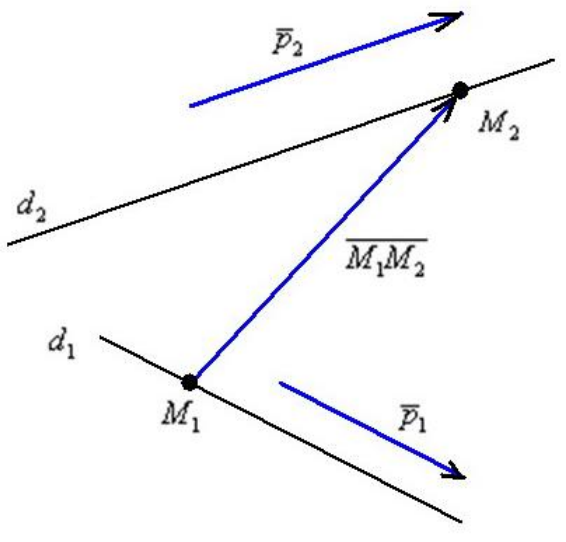
Как выяснить взаимное расположение прямых в пространстве?

Рассмотрим **общий алгоритм** и две прямые:

– прямую d_1, заданную точкой M_1 и направляющим вектором $\overline{p}_1$;

– прямую d_2, заданную точкой M_2 и направляющим вектором $\overline{p}_2$.

Для лучшего понимания выполним схематический чертёж, на котором в качестве примера изображены скрещивающиеся прямые



Так как известны точки M_1, M_2, то легко найти вектор $\overline{M_1M_2}$.

1) Если прямые **скрещиваются**, то векторы $\overline{p}_1, \overline{p}_2, \overline{M_1M_2}$ не компланарны, а, значит, определитель, составленный из их координат, ненулевой. Или, что фактически то же самое, смешанное произведение векторов отлично от нуля: $(\overline{p}_1 \cdot \overline{p}_2 \cdot \overline{M_1M_2}) \neq 0$

Пусть $(\overline{p}_1 \cdot \overline{p}_2 \cdot \overline{M_1M_2}) = 0$. Это означает, что векторы компланарны, и вся конструкция «схлопнулась» в одну плоскость. Следовательно, прямые либо пересекаются, либо параллельны, либо совпадают.

2) Если направляющие векторы $\overline{p}_1, \overline{p}_2$ не коллинеарны, то прямые **пересекаются**.

3-4) Если направляющие векторы $\overline{p}_1, \overline{p}_2$ коллинеарны, то прямые либо параллельны, либо совпадают. Финальным гвоздём предлагаю следующий приём: берём какую-либо точку одной прямой и подставляем её координаты в уравнение другой прямой. Если координаты «подошли», то прямые **совпадают**, если нет – то прямые **параллельны**.

…**Всё ли вам понятно? Если нет, то милости прошу по ссылкам**, если да, то отработаем этот незатейливый алгоритм на конкретных практических примерах:

Задача 153

Выяснить взаимное расположение двух прямых

$d_1: \frac{x+4}{-2} = \frac{y+5}{4} = \frac{z-6}{6}$, $\quad d_2: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+3}{-3}$

Решение: как и во многих задачах, решение удобно оформить по пунктам:

1) Вытаскиваем из уравнений прямых их точки и направляющие векторы:

$$d_1: \frac{x+4}{-2} = \frac{y+5}{4} = \frac{z-6}{6} \quad \Rightarrow \quad M_1(-4; -5; 6),\ \bar{p}_1(-2; 4; 6)$$

$$d_2: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+3}{-3} \quad \Rightarrow \quad M_2(0; 1; -3),\ \bar{p}_2(1; -2; -3)$$

2) Найдём вектор: $\overline{M_1M_2} = (0-(-4); 1-(-5); -3-6) = (4; 6; -9)$

3) Вычислим смешанное произведение векторов:

$$(\bar{p}_1 \cdot \bar{p}_2 \cdot \overline{M_1M_2}) = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 4 & -2 & 6 \\ 6 & -3 & -9 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 6 \\ -3 & -9 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 6 & -9 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 \cdot (18+18) - (-36-36) + 4 \cdot (-12+12) = -72 + 72 + 0 = 0$$

Таким образом, векторы $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \overline{M_1M_2}$ компланарны, а значит, прямые d_1, d_2 лежат в одной плоскости и могут пересекаться, быть параллельными или совпадать.

4) Проверим направляющие векторы $\bar{p}_1(-2; 4; 6),\ \bar{p}_2(1; -2; -3)$ на коллинеарность.

Составим систему из соответствующих координат данных векторов:

…

Из **каждого** уравнения следует, что $\lambda = -\frac{1}{2}$, следовательно, система совместна, соответствующие координаты векторов пропорциональны, и векторы коллинеарны.

Следовательно, прямые d_1, d_2 параллельны либо совпадают.

5) Выясним, есть ли у прямых общие точки. Возьмём точку $M_1(-4; -5; 6)$, принадлежащую первой прямой, и подставим её координаты в уравнения прямой d_2:

$$\frac{-4}{1} = \frac{-5-1}{-2} = \frac{6+3}{-3}$$

$$-4 \neq 3 \neq -3$$

Получены *неверные равенства*, значит, точка «не подошла». Таким образом, общих точек у прямых нет, и им ничего не остаётся, как быть параллельными.

Ответ: $d_1 \parallel d_2$

Интересный пример для самостоятельного решения:

Задача 154

Выяснить взаимное расположение прямых

$$d_1:\begin{cases} x=-t+3 \\ y=t-3 \\ z=2t+2 \end{cases}, \qquad d_2:\begin{cases} x=3s-1 \\ y=-4s+4 \\ z=6s-26 \end{cases}$$

Обратите внимание, что у второй прямой в качестве параметра выступает буква s. Логично. В общем случае – это две различные прямые, и у каждой прямой свой параметр.

Далее мы по порядку рассмотрим задачи, «посвященные» скрещивающимся прямым, затем – пересекающимся, затем – параллельным и совпадающим.

➢ Скрещивающиеся прямые

Напоминаю, что прямые скрещиваются, если не существует плоскости, в которой бы они обе лежали. Когда я продумывал практику, в голову пришла задача-монстр, и сейчас рад представить вашему вниманию дракона с четырьмя головами:

Задача 155

Даны прямые $d_1:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{-3}=\dfrac{z}{-1}$, $\quad d_2:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{-2}$; $\quad z-1=0$. Требуется:

а) доказать, что прямые скрещиваются;

б) найти уравнения прямой d, проходящей через точку $M(5;-4;7)$ перпендикулярно данным прямым;

в) составить уравнения прямой m, которая содержит *общий перпендикуляр* скрещивающихся прямых;

г) найти расстояние $\rho(d_1;d_2)$ между прямыми.

Дорогу осилит идущий, **решение**:

а) Докажем, что прямые скрещиваются. Найдём точки и направляющие векторы данных прямых:

…

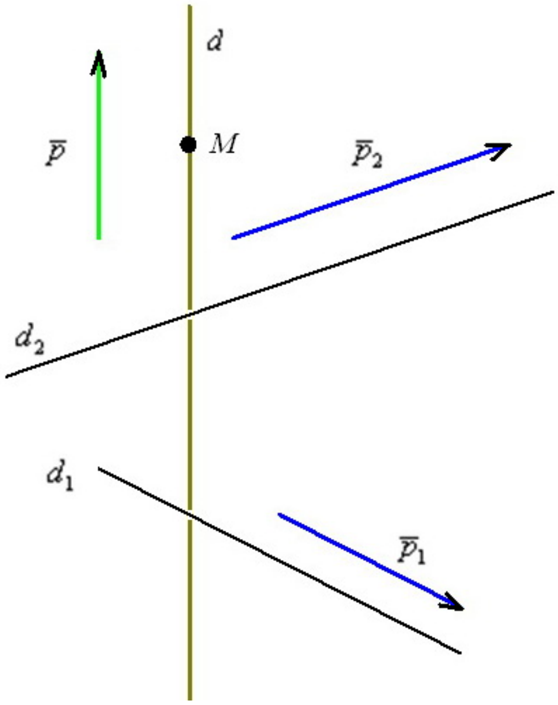
Найдём вектор ….

Вычислим смешанное произведение векторов:

$$(\overline{p}_1\cdot\overline{p}_2\cdot\overline{M_1M_2})=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -3 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}=-(1-6)+(-4+3)=5-1=4\neq 0,$$

таким образом, векторы $\overline{p}_1, \overline{p}_2, \overline{M_1M_2}$ не компланарны, а значит, прямые d_1, d_2 скрещиваются, что и требовалось доказать.

б) Найдём уравнения прямой d, которая проходит через точку $M(5;-4;7)$ и перпендикулярна прямым d_1, d_2. Выполним схематический чертёж:



Для разнообразия я разместил прямую d **ЗА** прямыми d_1, d_2, посмотрите, как она немного стёрта в точках скрещивания. Скрещивания? Да, в общем случае прямая «дэ» будет скрещиваться с исходными прямыми. Хотя данный момент нас пока не интересует, надо просто построить перпендикулярную прямую и всё.

Что известно о прямой «дэ»? Известна принадлежащая ей точка M. Не хватает направляющего вектора.

По условию прямая d должна быть перпендикулярна прямым d_1, d_2, а значит, её направляющий вектор $\bar{p}$ будет ортогонален направл. векторам $\bar{p}_1(2;-3;-1)$, $\bar{p}_2(1;-2;0)$. А это уже знакомый из Задачи 151 мотив, найдём их векторное произведение:

$$\bar{p}=[\bar{p}_1\times\bar{p}_2]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & -3 & -1\\ 1 & -2 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-3 & -1\\ -2 & 0\end{vmatrix}\cdot\bar{i}-\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}\cdot\bar{j}+\begin{vmatrix}2 & -3\\ 1 & -2\end{vmatrix}\cdot\bar{k}=$$

$$=(0-2)\cdot\bar{i}-(0+1)\cdot\bar{j}+(-4+3)\cdot\bar{k}=-2\bar{i}-\bar{j}-\bar{k}$$

Уравнения искомой прямой составим по точке $M(5;-4;7)$ и направляющему вектору $\bar{p}(-2;-1;-1)$:

…

Готово. В принципе, можно сменить знаки в знаменателях и записать уравнения в виде …, но надобности в этом, опять же, особой нет.

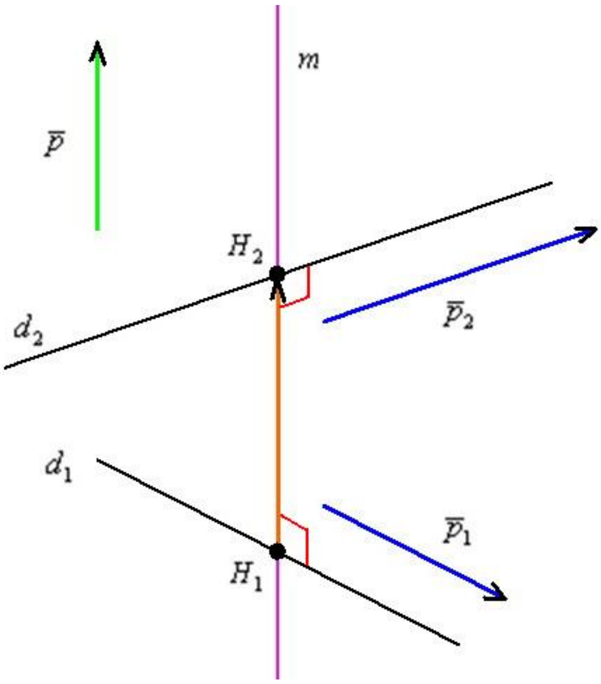
Для проверки нужно подставить координаты точки $M(5;-4;7)$ в полученные уравнения, затем с помощью скалярного произведения векторов убедиться, что вектор $\bar{p}(-2;-1;-1)$ действительно ортогонален направляющим векторам $\bar{p}_1$ и $\bar{p}_2$.

➢ Как найти прямую, содержащую общий перпендикуляр?

в) Эта задачка посложнее будет. «Чайникам» рекомендую пропустить данный пункт, не хочу охлаждать вашу искреннюю симпатию к аналитической геометрии =) Кстати, и более подготовленным читателям, возможно, лучше тоже повременить – дело в том, что по сложности эту задачу надо бы поставить последней в параграфе, но по логике изложения она должна располагаться здесь. …Впрочем, ~~танцуйте~~ читайте все! ☺

Итак, требуется найти уравнения прямой m, которая содержит ***общий перпендикуляр*** скрещивающихся прямых.

Общий перпендикуляр скрещивающихся прямых – это отрезок, соединяющий данные прямые и перпендикулярный данным прямым:



Вот наш красавец: H_1H_2 – общий перпендикуляр прямых d_1, d_2. Он единственный. Другого такого нет. Нам же требуется составить уравнения прямой m, которая содержит данный отрезок.

Что известно о прямой «эм»? Известен её направляющий вектор $\bar{p}(-2; -1; -1)$, найденный в предыдущем пункте. Но, к сожалению, мы не знаем ни одной точки, принадлежащей прямой «эм», не знаем и концов перпендикуляра – точек H_1, H_2. Где эта перпендикулярная прямая пересекает две исходные прямые? В Африке, в Антарктиде? Из первоначального обзора и анализа условия вообще не видно, как решать задачу…. Но есть хитрый ход, связанный с использованием параметрических уравнений прямой.

Решение оформим по пунктам:

1) Перепишем уравнения первой прямой в параметрической форме:

…

Рассмотрим точку $H_1(x_1; y_1; z_1)$. Координат мы не знаем. **НО**. Если точка принадлежит данной прямой, то её координатам $x_1; y_1; z_1$ соответствует **вполне конкретное значение параметра**, обозначим его через t_0. Тогда координаты точки запишутся в виде:

$$H_1: \begin{cases} x_1 = 2t_0 + 2 \\ y_1 = -3t_0 - 1 \\ z_1 = -t_0 \end{cases}, \text{ или: } H_1(2t_0 + 2; -3t_0 - 1; -t_0)$$

Жизнь налаживается, одна неизвестная – это всё-таки не три неизвестных.

2) Аналогичные действия проведём со второй прямой. Перепишем её уравнения в параметрическом виде:

$$d_2: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{-2}; \quad z - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad d_2: \begin{cases} x = s - 1 \\ y = -2s \\ z = 1 \end{cases}$$

Если точка $H_2(x_2; y_2; z_2)$ принадлежит данной прямой, то **при вполне конкретном значении** s_0 её координаты должны удовлетворять параметрическим уравнениям:

$$H_2: \begin{cases} x_2 = s_0 - 1 \\ y_2 = -2s_0 \\ z_2 = 1 \end{cases}, \text{ или: } H_2(s_0 - 1; -2s_0; 1)$$

3) Запишем вектор $\overline{H_1H_2}$. Ну и что, что нам не известны координаты точек – это же не мешает из координат конца вектора $H_2(s_0-1; -2s_0; 1)$ вычесть соответствующие координаты начала $H_1(2t_0+2; -3t_0-1; -t_0)$:

…

4) Вектор $\overline{H_1H_2}$, как и ранее найденный вектор $\overline{p}(-2; -1; -1)$, является направляющим вектором прямой m. Таким образом, они коллинеарны, и один вектор можно линейно выразить через другой с некоторым коэффициентом пропорциональности «лямбда»: $\overline{H_1H_2}(s_0-2t_0-3; -2s_0+3t_0+1; 1+t_0)=\lambda\cdot\overline{p}(-2; -1; -1)$

или покоординатно:

…

Получилась самая, что ни на есть обычная система линейных уравнений с тремя неизвестными $s_0; t_0; \lambda$, которая стандартно разрешима, например, **методом Крамера**. Но так извращаться мы, конечно, не будем. Выразим из 3-го уравнения $\lambda=-t_0-1$ и подставим эту «лямбду» в первые два уравнения:

$$\begin{cases} s_0-2t_0-3=-2(-t_0-1) \\ -2s_0+3t_0+1=-(-t_0-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s_0-2t_0-3=2t_0+2 \\ -2s_0+3t_0+1=t_0+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s_0-4t_0-5=0 \\ -2s_0+2t_0=0 \end{cases}$$

Из 2-го уравнения выразим $s_0=t_0$ и подставим в 1-е уравнение:

$t_0-4t_0-5=0 \Rightarrow -3t_0-5=0 \Rightarrow s_0=-\dfrac{5}{3}, t_0=-\dfrac{5}{3}$, а «лямбда» нам не потребуется.

То, что значения параметров получились одинаковыми – чистая случайность.

5) Небо полностью проясняется, подставим найденные значения $s_0=-\dfrac{5}{3}, t_0=-\dfrac{5}{3}$ в наши точки:

$$H_1(2t_0+2; -3t_0-1; -t_0) \Rightarrow H_1\left(2\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)+2; -3\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)-1; -\left(-\frac{5}{3}\right)\right) \Rightarrow H_1\left(-\frac{4}{3}; 4; \frac{5}{3}\right)$$

$$H_2(s_0-1; -2s_0; 1) \Rightarrow H_2\left(-\frac{5}{3}-1; -2\cdot\left(-\frac{5}{3}\right); 1\right) \Rightarrow H_2\left(-\frac{8}{3}; \frac{10}{3}; 1\right)$$

Сам вектор $\overline{H_1H_2}$ нам не нужен, так как уже найден его коллега $\overline{p}(-2; -1; -1)$.

И после длинного пути всегда интересно выполнить проверку. Подставим координаты точки $H_1\left(-\dfrac{4}{3}; 4; \dfrac{5}{3}\right)$ в уравнения $d_1: \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{-3}=\dfrac{z}{-1}$:

$$\frac{-\frac{4}{3}-2}{2}=\frac{4+1}{-3}=\frac{\frac{5}{3}}{-1}$$

$-\dfrac{5}{3}=-\dfrac{5}{3}=-\dfrac{5}{3}$ – получены верные равенства.

Подставим координаты $H_2\left(-\frac{8}{3}; \frac{10}{3}; 1\right)$ в уравнения $d_2: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{-2}; \quad z-1=0$:

$$\frac{-\frac{8}{3}+1}{1} = \frac{\frac{10}{3}}{-2}; \quad 1-1=0$$

$-\frac{5}{3} = -\frac{5}{3}; \quad 0=0$ – получены верные равенства.

Вывод: найденные точки действительно принадлежат соответствующим прямым.

6) Заключительный аккорд: составим уравнения прямой m по точке $H_1\left(-\frac{4}{3}; 4; \frac{5}{3}\right)$ (можно взять H_2) и направляющему вектору $\overline{p}(-2; -1; -1)$:

…

В принципе, можно подобрать «хорошую» точку с целыми координатами, но это уже косметика.

➢ Как найти расстояние между скрещивающимися прямыми?

г) Срубаем четвёртую голову дракона.

Способ первый. Расстояние между скрещивающимися прямыми равно длине их общего перпендикуляра: $\rho(d_1; d_2) = |H_1H_2|$.

Вершины общего перпендикуляра $H_1\left(-\frac{4}{3}; 4; \frac{5}{3}\right)$, $H_2\left(-\frac{8}{3}; \frac{10}{3}; 1\right)$ найдены в предыдущем пункте, и задача элементарна:

$$\rho(d_1; d_2) = |H_1H_2| = \sqrt{\left(-\frac{8}{3}-\left(-\frac{4}{3}\right)\right)^2 + \left(\frac{10}{3}-4\right)^2 + \left(1-\frac{5}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{9}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{24}{9}} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \text{ ед.}$$

Но на практике концы общего перпендикуляра почти всегда неизвестны, и поэтому используют **второй способ**. В курсе аналитической геометрии выведена специальная **формула нахождения расстояния между скрещивающимися прямыми**:

$\rho(d_1; d_2) = \ldots$

Смешанное произведение векторов уже найдено в пункте «а»: $(\overline{p}_1 \cdot \overline{p}_2 \cdot \overline{M_1M_2}) = 4$.

Векторное произведение векторов найдено в пункте «бэ»: $[\overline{p}_1 \times \overline{p}_2] = -2\overline{i} - \overline{j} - \overline{k}$, вычислим его длину: $|\,[\overline{p}_1 \times \overline{p}_2]\,| = \sqrt{(-2)^2+(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$

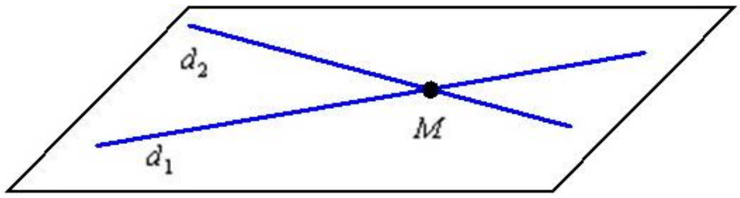
Таким образом: $\rho(d_1; d_2) = \frac{|4|}{\sqrt{6}} = \frac{4\cdot\sqrt{6}}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} = \frac{4\sqrt{6}}{6} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ ед. $\approx 1{,}63$ ед.

Осталось записать **ответ**, где под пунктами а)-г) гордо выложить 4 трофея.

Что ещё можно рассказать про скрещивающиеся прямые? Между ними определён угол. Но универсальную формулу угла рассмотрим чуть позже.

➢ Пересекающиеся прямые в пространстве

Пересекающиеся прямые пространства обязательно лежат в одной плоскости, причём их направляющие векторы неколлинеарны:



Первая мысль – всеми силами навалиться на точку пересечения $M = d_1 \cap d_2$. И тут сразу же подумалось, зачем себе отказывать в правильных желаниях?! Давайте навалимся на неё прямо сейчас!

➢ Как найти точку пересечения пространственных прямых?

Собственно:

Задача 156

Найти точку пересечения прямых

$$d_1 : \frac{x-3}{-1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-2}{2}, \qquad d_2 : \frac{x+1}{3} = \frac{y-4}{-4} = \frac{z+26}{6}$$

Решение: Перепишем уравнения прямых в параметрической форме:

…

Приём решения стандартен и уже встречался, когда мы вымучивали уравнения общего перпендикуляра скрещивающихся прямых.

Точка пересечения прямых $M(x_0; y_0; z_0)$ принадлежит прямой d_1, поэтому её координаты $x_0; y_0; z_0$ удовлетворяют параметрическим уравнениям данной прямой, и им соответствует **вполне конкретное значение параметра** t_0:

$$M : \begin{cases} x_0 = -t_0 + 3 \\ y_0 = t_0 - 3 \\ z_0 = 2t_0 + 2 \end{cases}$$

Но эта же точка принадлежит и второй прямой, следовательно, **существует значение** s_0, такое, что:

$$M : \begin{cases} x_0 = 3s_0 - 1 \\ y_0 = -4s_0 + 4 \\ z_0 = 6s_0 - 26 \end{cases}$$

Приравниваем соответствующие уравнения и проводим упрощения:

$$\begin{cases} -t_0+3=3s_0-1 \\ t_0-3=-4s_0+4 \\ 2t_0+2=6s_0-26 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -t_0-3s_0+4=0 \\ t_0+4s_0-7=0 \\ 2t_0-6s_0+28=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_0+3s_0-4=0 \\ t_0+4s_0-7=0 \\ t_0-3s_0+14=0 \end{cases}$$

Получена система трёх линейных уравнений с двумя неизвестными, которую опять же решим «школьным» способом. Из 1-го уравнения выразим $t_0=-3s_0+4$ – подставим в два нижних уравнения: $\begin{cases} -3s_0+4+4s_0-7=0 \\ -3s_0+4-3s_0+14=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s_0-3=0 \\ -6s_0+18=0 \end{cases}$

В результате получилась совместная система, из которой следует, что $s_0=3$. Тогда: $t_0=-3s_0+4=-3\cdot 3+4=-5$

Подставим найденное значение параметра $t_0=-5$ в уравнения координат точки:

$M:\begin{cases} x_0=-t_0+3 \\ y_0=t_0-3 \\ z_0=2t_0+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0=-(-5)+3 \\ y_0=-5-3 \\ z_0=2\cdot(-5)+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0=8 \\ y_0=-8 \\ z_0=-8 \end{cases}$, и для **проверки** подставим значение $s_0=3$ в уравнения: $M:\begin{cases} x_0=3s_0-1 \\ y_0=-4s_0+4 \\ z_0=6s_0-26 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0=3\cdot 3-1 \\ y_0=-4\cdot 3+4 \\ z_0=6\cdot 3-26 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0=8 \\ y_0=-8 \\ z_0=-8 \end{cases}$

Ответ: $M(8;-8;-8)$

Рассмотрим особый случай пересечения прямых:

➢ Как найти прямую, перпендикулярную данной?

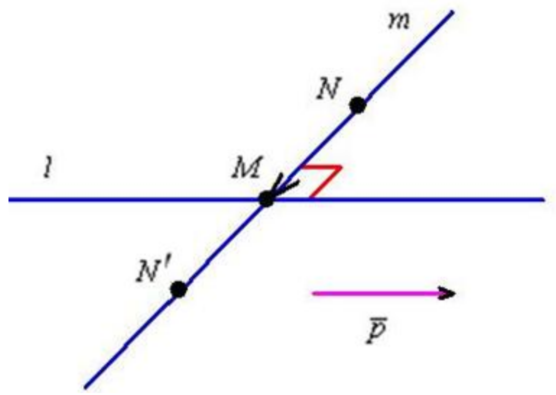
Обращаю внимание, что для скрещивающихся прямых таких прямых можно провести бесконечно много, а вот для пересекающихся – задача имеет единственное решение:

Задача 157

а) Составить уравнения прямой, проходящей через точку $N(-2;1;0)$ перпендикулярно прямой $l:\frac{x+4}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{-1}$ (прямые пересекаются).

б) Найти расстояние от точки N до прямой l, в) симметричную точку N'.

а) Решение: обозначим неизвестную прямую через m:



И начинаем раскручивать задачу: что нам известно об этой прямой?

Известна её точка $N(-2;1;0)$. Неплохо бы найти направляющий вектор. В качестве такого вектора вполне подойдёт вектор $\overline{NM}$. Но мы не знаем точку M. Вот ей-то и займёмся

План есть, и мы счастливы:

1) Вытащим из уравнений прямой «эль» её направляющий вектор $\bar{p}(3;\,2;\,-1)$, а сами уравнения перепишем в параметрической форме:

…

И вот уже в третий раз используем тот же самый фокус. Рассмотрим точку $M(x_0;\,y_0;\,z_0)$ с *пока ещё* неизвестными координатами. Поскольку точка $M \in l$, то её координаты $x_0;\,y_0;\,z_0$ удовлетворяют параметрическим уравнениям прямой «эль» и им соответствует **конкретное значение параметра** t_0:

$$M:\begin{cases} x_0 = 3t_0 - 4 \\ y_0 = 2t_0 \\ z_0 = -t_0 - 1 \end{cases}, \text{ или в строчку: } M(3t_0-4;\,2t_0;\,-t_0-1)$$

Тогда: $\overline{NM} = (3t_0 - 4 - (-2);\,2t_0 - 1;\,-t_0 - 1 - 0) = (3t_0 - 2;\,2t_0 - 1;\,-t_0 - 1)$

2) По условию прямые должны быть перпендикулярны, следовательно, их направляющие векторы … – ортогональны. А если векторы ортогональны, то их скалярное произведение равно нулю:

...

$3\cdot(3t_0 - 2) + 2\cdot(2t_0 - 1) - 1\cdot(-t_0 - 1) = 0$

Что получилось? Простейшее линейное уравнение с одной неизвестной:

$9t_0 - 6 + 4t_0 - 2 + t_0 + 1 = 0$

$14t_0 - 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_0 = \frac{1}{2}$

3) Значение параметра известно, находим точку:

$$M(3t_0-4;\,2t_0;\,-t_0-1) \quad \Rightarrow \quad M\left(3\cdot\frac{1}{2} - 4;\,2\cdot\frac{1}{2};\,-\frac{1}{2} - 1\right) \quad \Rightarrow \quad M\left(-\frac{5}{2};\,1;\,-\frac{3}{2}\right)$$

И направляющий вектор: $\overline{NM} = \left(-\frac{5}{2} - (-2);\,1 - 1;\,-\frac{3}{2} - 0\right) = \left(-\frac{1}{2};\,0;\,-\frac{3}{2}\right)$.

4) Уравнения прямой m составим по точке $N(-2;\,1;\,0)$ и вектору… избавимся-ка мы от дробей и возьмём направляющий вектор $-2\overline{NM} = -2\cdot\left(-\frac{1}{2};\,0;\,-\frac{3}{2}\right) = (1;\,0;\,3)$:

$$m: \frac{x+2}{1} = \frac{z}{3}; \quad y - 1 = 0$$

Ответ: $m: \frac{x+2}{1} = \frac{z}{3}; \quad y - 1 = 0$

Но, разумеется, тут можно было взять и вектор $\overline{NM}$: $m: \dfrac{x+2}{-\frac{1}{2}} = \dfrac{z}{-\frac{3}{2}}; \quad y - 1 = 0$

Проверка состоит из двух этапов:

1) проверяем направляющие векторы прямых на ортогональность;

2) подставляем координаты точки M в уравнения **каждой** прямой, они должны «подойти» и там и там.

Об этих действиях говорилось много, поэтому я выполнил проверку на черновике.

➢ **Как найти расстояние от точки до прямой?**

б) Решение: Найдём расстояние от точки N до прямой l.

Способ первый. Данное расстояние в точности равно длине перпендикуляра NM: $\rho(N;l)=|NM|$, и решение очевидно: если известны точки $N(-2;1;0)$, $M\left(-\frac{5}{2};1;-\frac{3}{2}\right)$, то:

$$\rho(N;l)=|NM|=\sqrt{\left(-\frac{5}{2}-(-2)\right)^2+(1-1)^2+\left(-\frac{3}{2}-0\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+0+\frac{9}{4}}=\sqrt{\frac{10}{4}}=\frac{\sqrt{10}}{2}\text{ ед.}$$

Способ второй. В практических задачах основание перпендикуляра M частенько тайна за семью печатями, и поэтому рациональнее пользоваться готовой **формулой**:

$\rho(N;l)=...$, где $\bar{p}$ – направляющий вектор прямой «эль», а M_0 – **произвольная** точка, принадлежащая данной прямой.

Но здесь тоже придётся потрудиться:

1) Из уравнений прямой $l:\frac{x+4}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{-1}$ достаём направляющий вектор $\bar{p}(3;2;-1)$ и самую доступную точку $M_0(-4;0;-1)$. И тут же, не отходя от кассы, вычислим длину $|\bar{p}|=\sqrt{3^2+2^2+(-1)^2}=\sqrt{9+4+1}=\sqrt{14}$.

2) Точка $N(-2;1;0)$ известна из условия, находим вектор:

$$\overline{NM_0}=(-4-(-2);0-1;-1-0)=(-2;-1;-1)$$

3) Найдём векторное произведение и вычислим его длину:

$$\left[\overline{NM_0}\times\bar{p}\right]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ -2 & -1 & -1\\ 3 & 2 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 2 & -1\end{vmatrix}\cdot\bar{i}-\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 3 & -1\end{vmatrix}\cdot\bar{j}+\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 3 & 2\end{vmatrix}\cdot\bar{k}=$$

$$=(1+2)\cdot\bar{i}-(2+3)\cdot\bar{j}+(-4+3)\cdot\bar{k}=3\bar{i}-5\bar{j}-\bar{k}$$

$$\left|\left[\overline{NM_0}\times\bar{p}\right]\right|=\sqrt{3^2+(-5)^2+(-1)^2}=\sqrt{9+25+1}=\sqrt{35}$$

4) Таким образом, искомое расстояние:

$$\rho(N;l)=...=\frac{\sqrt{10}}{2}$$

Ответ: $\rho(N;l)=\frac{\sqrt{10}}{2}$ ед. $\approx 1{,}58$ ед.

➢ Как найти точку, симметричную относительно прямой?

Это полный аналог соответствующей «плоской» задачи.

в) Решение: Найдём точку $N'(x'; y'; z')$, симметричную точке N относительно прямой l. Точка $N(-2; 1; 0)$ известна, середина отрезка NN' известна: $M\left(-\frac{5}{2}; 1; -\frac{3}{2}\right)$, и по формулам координат середины отрезка:

$$x_M = \frac{x_N + x'}{2} \Rightarrow -\frac{5}{2} = \frac{-2 + x'}{2} \Rightarrow -5 = -2 + x' \Rightarrow x' = -3$$

$$y_M = \frac{y_N + y'}{2} \Rightarrow 1 = \frac{1 + y'}{2} \Rightarrow 1 + y' = 2 \Rightarrow y' = 1$$

$$z_M = \frac{z_N + z'}{2} \Rightarrow -\frac{3}{2} = \frac{0 + z'}{2} \Rightarrow z' = -3$$

Ответ: $N'(-3; 1; -3)$

Проверку легко выполнить с помощью тех же самых формул. Причём, устно.

И после этой бойни вам не составит труда разобраться в следующей задаче:

Задача 158

Треугольник задан координатами своих вершин $A(5; -2; 4), B(3; -1; 3), C(4; 1; 3)$. Найти высоту AH и её длину.

Полное решение и ответ в конце книги.

Не забывайте выполнять схематические чертежи!

Это здОрово помогает понять алгоритм решения.

➢ Как найти угол между прямыми в пространстве?

Рисунка уж приводить не буду, думаю, всем понятно, что такое угол.

Понятие угла в пространстве определено **не только для пересекающихся прямых, но и для** скрещивающихся прямых. **Угол «альфа» между двумя прямыми определяется как угол между их направляющими векторами.** А формула едина и хорошо вам знакома:

…, где $\bar{p}, \bar{p}_2$ – направляющие векторы двух пересекающихся либо скрещивающихся пространственных прямых.

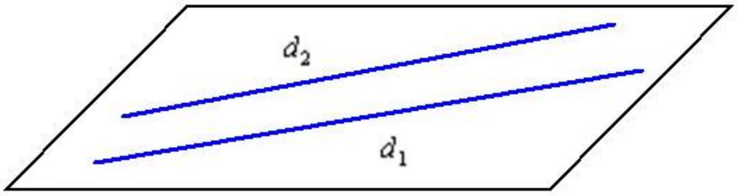
В частности, если $\bar{p}_1 \cdot \bar{p}_2 = 0$, то прямые перпендикулярны.

Отличие от угла между «плоскими» прямыми состоит в том, что **углом между пространственными прямыми считается <u>любой</u> из четырёх углов**. И действительно, приведённая формула может дать нам любой угол от 0 до 180 градусов включительно.

Приводить примеры особого смысла нет, сильно сомневаюсь, что кто-то неправильно найдёт направляющие векторы пространственных прямых по их уравнениям. К тому же, похожие задачи неоднократно встречались ранее.

➢ Параллельные прямые в пространстве

Параллельные прямые пространства, как и пересекающиеся прямые, тоже лежат в одной плоскости:



Что сразу можно сказать? Они не пересекаются, и у них один и тот же направляющий вектор. Не так давно я зарубил четырёхглавого дракона, и сейчас ваша очередь – ловите мой меч-кладенец, вас поджидает стандартноголовый зверь:)

Задача 159

Дана прямая $d_1 : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+6}{2}$. Требуется:

а) построить прямую d_2, параллельную данной и проходящую через точку $K(3; 0; -5)$

б) будут ли параллельные прямые d_1, d_2 однозначно определять плоскость в пространстве? Если да, то составить уравнение данной плоскости;

в) найти расстояние между параллельными прямыми.

Постарайтесь самостоятельно, не заглядывая в образец решения, выполнить предложенные задания.

И теперь логично рассмотреть:

5.6. Основные задачи с прямой и плоскостью

На удивление их набралось не так уж и много:

➢ Взаимное расположение прямой и плоскости

Рассмотрим плоскость $\sigma : Ax + By + Cz + D = 0$ и прямую d, заданную точкой $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и направляющим вектором $\overline{p}(p_1; p_2; p_3)$.

Существует три варианта взаимного расположения прямой и плоскости:

1) прямая пересекает плоскость в некоторой точке $M = d \cap \sigma$;

2) прямая параллельна плоскости: $d \parallel \sigma$;

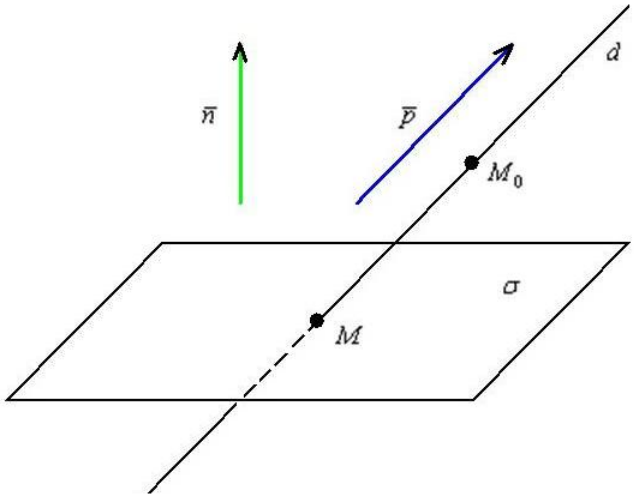
3) прямая лежит в плоскости: $d \in \sigma$. Да, так вот нагло взяла, и лежит.

Как выяснить взаимное расположение прямой и плоскости?

Это заметно проще, чем выяснить взаимное расположение двух прямых.

Изучим аналитические условия, которые позволят нам ответить на данный вопрос.

Выполним схематический чертёж, на котором прямая пересекает плоскость:



1) Прямая пересекает плоскость тогда и только тогда, когда её направляющий вектор $\overline{p}(p_1;\, p_2;\, p_3)$ не ортогонален нормальному вектору … плоскости.

Из этого следует, что скалярное произведение вектора нормали и направляющего вектора будет отлично от нуля: ….

В координатах это условие запишется следующим образом:

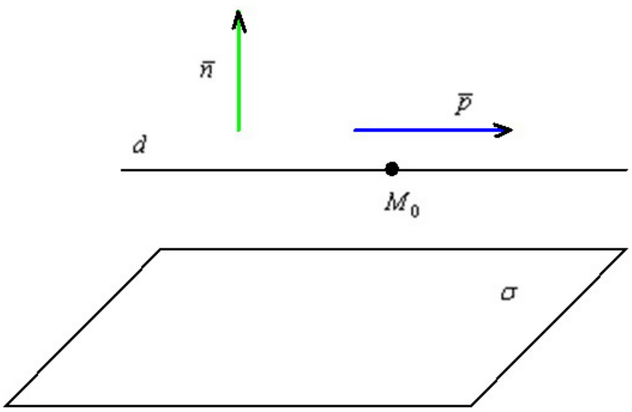
…

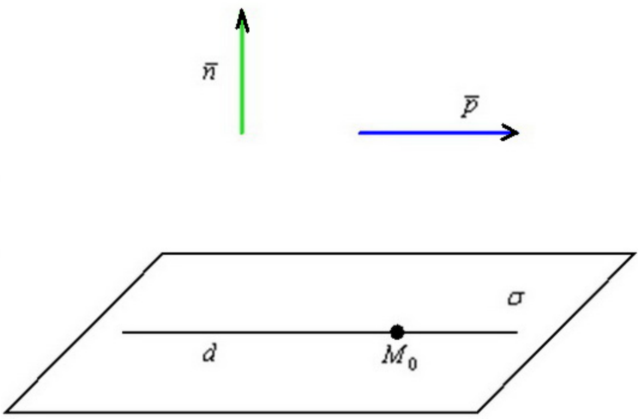
Если же данные векторы ортогональны, то их скалярное произведение равно нулю:…, и прямая либо параллельна плоскости, либо лежит в ней.

Разграничим эти случаи:

2) Если прямая параллельна плоскости *(рисунок внизу слева)*, то **любая** точка $M_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$ прямой не удовлетворяет уравнению плоскости: $Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0$. Таким образом, условие параллельности прямой и плоскости записывается системой:

$$\begin{cases} Ap_1+Bp_2+Cp_3=0 \\ Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0 \end{cases}$$





3) Если прямая лежит в плоскости *(рис. справа)* то **любая** точка $M_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$ прямой удовлетворяет уравнению плоскости: $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$, и аналитические условия данного случая запишутся системой:

$$\begin{cases} Ap_1+Bp_2+Cp_3=0 \\ Ax_0+By_0+Cz_0+D=0 \end{cases}$$

Алгоритм выяснения взаимного расположения прямой и плоскости достаточно примитивен – всего в два шага. Кроме того, оформляя задачи, можно обойтись вообще без составления системы:

Задача 160

Выяснить взаимное расположение прямой, заданной точкой $M_0(0;5;-1)$ и направляющим вектором $\overline{p}(3;-2;4)$, и плоскости $2x-3y-3z+12=0$.

Решение: вытащим нормальный вектор плоскости: $\overline{n}(2;-3;-3)$.

Вычислим скалярное произведение вектора нормали плоскости и направляющего вектора прямой: …, значит, данные векторы ортогональны и прямая либо параллельна плоскости, либо лежит в ней.

Подставим координаты точки $M_0(0;5;-1)$ в уравнение плоскости:

$$2\cdot 0-3\cdot 5-3\cdot(-1)+12=0$$
$$0-15+3+12=0$$
$$0=0$$

Получено верное равенство, следовательно, точка M_0 лежит в данной плоскости, и вообще все точки прямой лежат в ней.

Ответ: прямая лежит в плоскости

Самостоятельно:

Задача 161

Выяснить взаимное расположение плоскости $\sigma: 5x+4z-13=0$ и прямой $d: \dfrac{x-2}{-4}=\dfrac{y+5}{1}=\dfrac{z}{5}$.

И после небольшой разминки начинаем накидывать «блины» на штангу:

➢ Как найти точку пересечения плоскости и прямой?

Ответим на этот (и не только) вопрос на конкретном примере, я постарался собрать в одной задаче всё, что связано с этой точкой:

Задача 162

Дана прямая $d: \dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z+1}{2}$ и плоскость $\sigma: 2y-z-11=0$. Требуется:

а) доказать, что прямая пересекает плоскость;

б) найти точку пересечения прямой и плоскости;

в) через прямую d провести плоскость ω, перпендикулярную плоскости σ;

г) найти проекцию прямой d на плоскость σ;

д) найти угол между прямой d и плоскостью σ.

НеслАбо. А ведь всё началось с единственной точки пересечения =)

…и осталось тут ещё местечко на странице, поэтому давайте улыбнёмся друг другу ☺☺ и продолжим. Хотя, штанга не располагает к улыбкам :)

Решение: сначала закрепим задачу о взаимном расположении прямой и плоскости:

а) Из уравнений прямой находим принадлежащую ей точку и направляющий вектор: $d: \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-3}{3} = \dfrac{z+1}{2} \quad \Rightarrow \quad M_0(-2;3;-1),\ \overline{p}(1;3;2)$

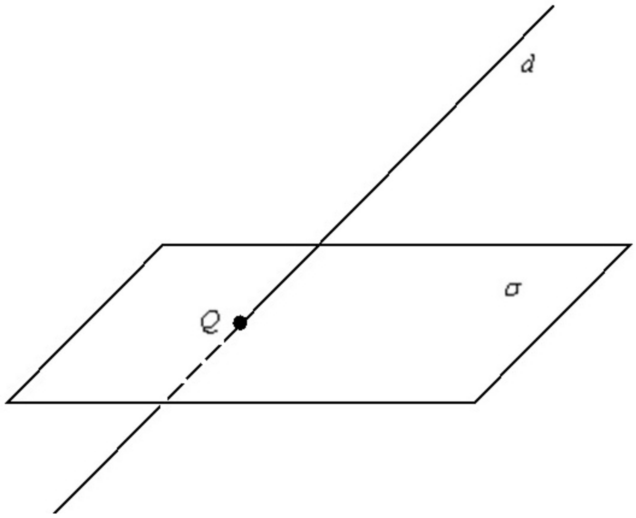
Вектор нормали плоскости, как всегда, сдаётся без боя:

$\sigma: 2y - z - 11 = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{n}(0;2;-1)$

Вычислим скалярное произведение:

$\overline{n} \cdot \overline{p} = 0 \cdot 1 + 2 \cdot 3 - 1 \cdot 2 = 0 + 6 - 2 = 4 \neq 0$, значит, прямая пересекает плоскость, что и требовалось доказать.

б) Найдём точку пересечения плоскости и прямой: $Q(x_Q; y_Q; z_Q) = d \cap \sigma$. Не «Чёрный квадрат» Малевича, но я тоже надеюсь:



Приём решения стандартен и неоднократно применялся в предыдущем параграфе. Сначала перепишем уравнения прямой в параметрической форме:

$$d: \frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+1}{2} \quad \Rightarrow \quad d: \begin{cases} x = t - 2 \\ y = 3t + 3 \\ z = 2t - 1 \end{cases}$$

Точка $Q(x_Q; y_Q; z_Q)$ принадлежит данной прямой, поэтому её координаты $x_Q; y_Q; z_Q$ при некотором значении параметра t_0 удовлетворяют параметрическим уравнениям:

$$Q: \begin{cases} x_Q = t_0 - 2 \\ y_Q = 3t_0 + 3 \\ z_Q = 2t_0 - 1 \end{cases}$$, или одной строчкой: $Q(t_0 - 2; 3t_0 + 3; 2t_0 - 1)$.

С другой стороны, точка $Q(t_0 - 2; 3t_0 + 3; 2t_0 - 1)$ принадлежит и плоскости σ, следовательно, её координаты должны удовлетворять уравнению $0 \cdot x + 2y - z - 11 = 0$, то есть должно выполняться равенство:

… – ну, или попросту параметрические координаты точки нужно подставить в уравнение плоскости.

Раскрываем скобки, приводим подобные слагаемые и находим «тэ нулевое»:

$0 + 6t_0 + 6 - 2t_0 + 1 - 11 = 0$

$4t_0 - 4 = 0$

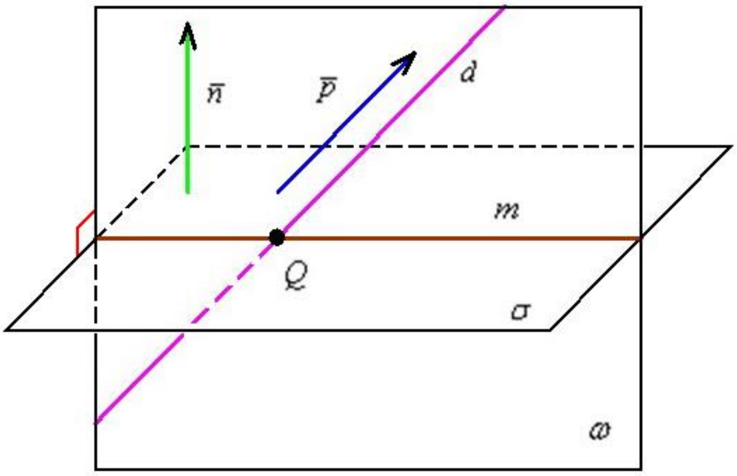
$t_0 = 1$ – полученное значение параметра подставляем в параметрические выражения координат нашей точки:

$Q(t_0 - 2; 3t_0 + 3; 2t_0 - 1) \quad \Rightarrow \quad Q(1 - 2; 3 \cdot 1 + 3; 2 \cdot 1 - 1) \quad \Rightarrow \quad Q(-1; 6; 1)$

Самостоятельно выполните устную **проверку** – подставьте координаты точки в уравнение плоскости и в уравнения прямой. Они должны «подойти» и там и там.

в) Найдём уравнение плоскости ω *(«омега»)*, которая перпендикулярна плоскости σ и проходит через прямую d. Задача весьма напоминает Задачу 142, где мы рассмотрели построение перпендикулярной плоскости, проходящей через две точки.

Выполним схематический чертёж:



Уравнение плоскости ω можно составить **<u>по любой</u>** точке, <u>которая принадлежит прямой</u> d, направляющему вектору $\overline{p}(1; 3; 2)$ прямой d и вектору нормали $\overline{n}(0; 2; -1)$ плоскости σ.

В качестве точки, принадлежащей прямой «дэ», не возбраняется, конечно, взять найденную в предыдущем пункте точку пересечения $Q(-1; 6; 1)$, но в произвольной практической задаче она чаще всего не известна. Поэтому обычно используют самую «лёгкую добычу». В данном случае, очевидно, точку:

$$d: \frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+1}{2} \quad \Rightarrow \quad M_0(-2; 3; -1).$$

Уравнение плоскости «омега» составим по точке … и двум неколлинеарным векторам …:

$$\begin{vmatrix} x-(-2) & 1 & 0 \\ y-3 & 3 & 2 \\ z-(-1) & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x+2)\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - (y-3)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + (z+1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x+2)\cdot(-3-4) - (y-3)\cdot(-1-0) + (z+1)\cdot(2-0) = 0$$

$$-7(x+2) + (y-3) + 2(z+1) = 0$$

$$7(x+2) - (y-3) - 2(z+1) = 0$$

$$7x + 14 - y + 3 - 2z - 2 = 0$$

Таким образом: $\omega: 7x - y - 2z + 15 = 0$

Проверка опять же простая:

1) Мысленно вычислим скалярное произведение нормальных векторов $\overline{n}(0; 2; -1), \overline{n}_\omega(7; -1; -2)$ двух плоскостей. Оно равно нулю, значит, плоскости перпендикулярны.

2) Теперь нужно убедиться, что прямая «дэ» действительно лежит в найденной плоскости «омега». Можно использовать типовой алгоритм, но тут есть быстрое решение – устно подставляем координаты двух известных точек $M_0(-2; 3; -1), Q(-1; 6; 1)$ в полученное уравнение плоскости $\omega: 7x - y - 2z + 15 = 0$. Обе точки «подходят», и это гарантирует, что и вся прямая d лежит в плоскости ω.

➢ Как найти ортогональную проекцию прямой на плоскость?

г) Во-первых, что это за проекция?

Проведём очередную физкульт-пятиминутку:

Пожалуйста, найдите дома швабру и поместите её между ног. Представьте, что она бесконечна. Подбородок плотно прижат к груди. Теперь строго перпендикулярно смотрим вниз на швабру..., при этом получается такое умное лицо…. Все выполнили задание? Тень от швабры – это и есть её ортогональная проекция на пол.

На чертеже выше наша «швабра» d проведена малиновым цветом, а её проекция, прямая m – коричневым цветом. Легко заметить, что проекция задаётся пересечением плоскостей: $m = \sigma \cap \omega$, и на самом деле ответ уже готов:

$$m: \begin{cases} 2y - z - 11 = 0 \\ 7x - y - 2z + 15 = 0 \end{cases}$$

Другое дело, что часто требуется представить уравнения прямой в канонической форме, это стандартная задача:

Точка $Q(-1; 6; 1)$, принадлежащая проекции, уже известна, осталось найти её направляющий вектор. Для быстроты используем формулу:

…

$$\bar{p}_m\left(\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 7 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 7 & -1 \end{vmatrix}\right)$$

$$\bar{p}_m(-5; -7; -14)$$

Таким образом, канонические уравнения проекции:

$$m: \frac{x+1}{-5} = \frac{y-6}{-7} = \frac{z-1}{-14}$$

Как уже отмечалось, для решения этой задачи, не обязательно находить именно точку пересечения Q (лишняя работа). Нас устроит **любая** точка, принадлежащая проекции, и её легко подобрать из системы $m: \begin{cases} 2y - z - 11 = 0 \\ 7x - y - 2z + 15 = 0 \end{cases}$.

Есть и **другой способ нахождения проекции**, связанный с построением перпендикуляра к плоскости «сигма», но я тут прикинул, он вряд ли короче. Однако на всякий случай озвучу **алгоритм**, вдруг понадобится кому:

– находим точку пересечения прямой и плоскости: $Q = d \cap \sigma$ (вот в этом способе уже обязательно находим);

– берём произвольную точку $A \in d$, не совпадающую с точкой Q) и опускаем из неё перпендикуляр AH на плоскость σ (см. следующие параграфы);

– находим основание перпендикуляра H (как пересечение прямой AH и плоскости σ);

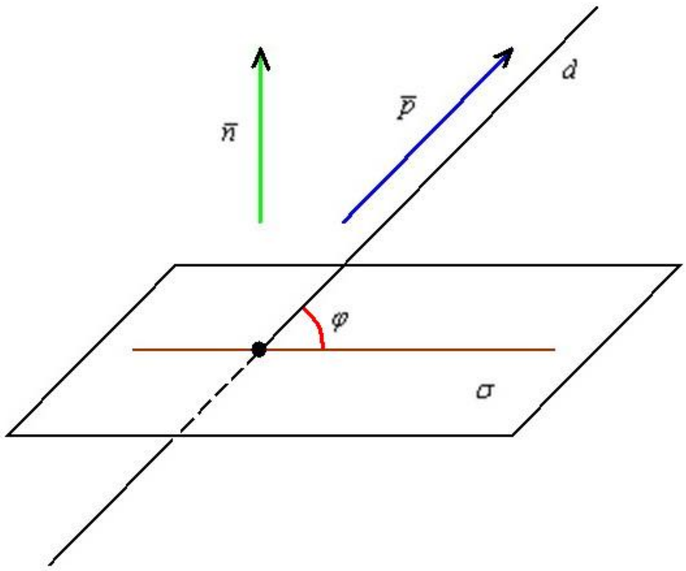
– составляем канонические уравнения проекции m по двум точкам: Q, H.

➢ **Как найти угол между прямой и плоскостью?**

д) Логическое продолжение темы.

Если прямая d не перпендикулярна плоскости σ, то **углом φ между прямой и плоскостью называется острый угол между прямой d и её проекцией на плоскость**. Если прямая перпендикулярна плоскости, то угол между ними равен 90 градусов.

Продолжим эксплуатацию геометрического инвентаря:



Используем формулу синуса угла между прямой и плоскостью:

… *(новинка)*

Таким образом, для нахождения искомого угла достаточно знать лишь нормальный вектор плоскости и направляющий вектор прямой.

Скалярное произведение векторов уже найдено в пункте «а»: $\bar{n}\cdot\bar{p}=4$. Обратите внимание, что в формуле скалярное произведение находится под знаком модуля, который «съедает» возможный «минус».

Вычислим длины векторов:

$$|\bar{n}|=\sqrt{0^2+2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$$
$$|\bar{p}|=\sqrt{1^2+3^2+2^2}=\sqrt{14}$$

По формуле: $\sin\varphi=\dfrac{|\bar{n}\cdot\bar{p}|}{|\bar{n}|\cdot|\bar{p}|}=\dfrac{|4|}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{14}}=\dfrac{4}{\sqrt{70}}$

На иррациональность в знаменателе забиваем, поскольку нам нужен сам угол:

$$\varphi=\arcsin\frac{4}{\sqrt{70}}\approx 0{,}5\text{ рад.}\approx 29^\circ$$

Выложим в ряд головы очередного Змея-Горыныча:

Ответ:

а) $\bar{n}\cdot\bar{p}=4\neq 0$, значит, прямая пересекает плоскость;

б) $Q(-1;6;1)$;

в) $\omega: 7x-y-2z+15=0$;

г) $m: \dfrac{x+1}{-5}=\dfrac{y-6}{-7}=\dfrac{z-1}{-14}$;

д) $\varphi=\arcsin\dfrac{4}{\sqrt{70}}\approx 0{,}5\text{ рад.}\approx 29^\circ$

Переходим к рассмотрению частного случая – когда:

➢ Прямая перпендикулярна плоскости, задачи

И я так чувствую, вы уже заскучали, поэтому пусть эта задача (точнее несколько) будет для самостоятельного решения. А потом ещё десяток =)

Задача 163

Дана плоскость $\sigma: 8x+6y+8z-25=0$ и точка $M(3;3;3)$. Требуется:

а) составить канонические уравнения прямой d, проходящей через точку M, перпендикулярно данной плоскости;

б) найти точку $H = d \cap \sigma$ пересечения перпендикулярной прямой и плоскости;

в) найти точку N, симметричную точке M относительно плоскости σ.

После прочтения пункта «а» **выполняем схематический чертёж**, который ответит на многие вопросы. Постарайтесь не заглядывать в образец, сложного-то здесь ничего нет.

И на всякий случай отвечу на обратный вопрос: **как составить уравнение плоскости, которая проходит через данную точку перпендикулярно данной прямой?** Берём направляющий вектор прямой – он же является вектором нормали плоскости.

Поставлю и другую «заплатку», вроде в явном виде нигде не упоминал**: можно ли составить уравнение плоскости, проходящей через прямую и точку, не принадлежащую прямой?** Да, конечно, причём плоскость будет определена однозначно. Конкретный пример можно посмотреть в *Пункте 12* задачи с треугольной пирамидой.

Все задачи на пересечение прямой и плоскости, пожалуй, исчерпаны, теперь рассмотрим случай, когда:

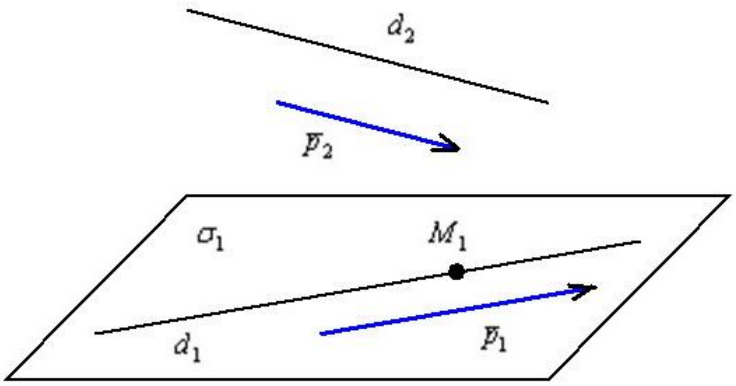
➢ Прямая параллельна плоскости

Таких задач я отыскал совсем немного и решил приютить сироту:

Задача 164

Даны скрещивающиеся прямые $d_1: \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{-1};\ x+2=0,\quad d_2: \frac{x-1}{4} = \frac{y+5}{-2} = \frac{z}{1}$. Через прямую d_1 провести плоскость, параллельную прямой d_2.

Решение: задачка простая, но всё равно выполним схематический чертёж:



Итак, нам нужно составить уравнение плоскости σ_1, которая проходит через прямую d_1 параллельно второй прямой.

И прямо из рисунка видно, что для этого подойдёт любая точка прямой d_1 и её направляющий вектор. Их легко «снять» из уравнений прямой:

…

По условию плоскость σ_1 должна быть параллельна прямой $d_2: \frac{x-1}{4} = \frac{y+5}{-2} = \frac{z}{1}$, а значит, и её направляющему вектору $\overline{p}_2(4;-2;1)$. Так как прямые скрещиваются, то их направляющие векторы $\overline{p}_1, \overline{p}_2$ будут не коллинеарны.

Уравнение плоскости σ_1 составим по точке … и двум неколлинеарным векторам $\overline{p}_1(0;3;-1), \overline{p}_2(4;-2;1)$:

$$\begin{vmatrix} x-(-2) & 0 & 4 \\ y-2 & 3 & -2 \\ z-(-1) & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x+2)\cdot\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - (y-2)\cdot\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + (z+1)\cdot\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x+2)-4(y-2)-12(z+1)=0$$

$$x+2-4y+8-12z-12=0$$

Ответ: $\sigma_1: x-4y-12z-2=0$

Как выполнить **проверку**? Устно. «Снимаем» из уравнения плоскости вектор нормали $\overline{n}_1(1;-4;-12)$ и с помощью скалярного произведения убеждаемся, что он ортогонален направляющим векторам прямых. Тренируем устный счёт!

Аналогично можно составить уравнение плоскости σ_2, которая проходит через прямую d_2 параллельно прямой d_1. Решение будет точно таким же, изменится только точка – необходимо взять какую-нибудь точку, принадлежащую второй прямой. Очевидно, что данные плоскости будут параллельны: $\sigma_1 \parallel \sigma_2$.

По ходу создания этой главы мне совершенно случайно попалась на глаза одна методичка для студентов-заочников, где среди прочих заданий, как раз есть десять задач по аналитической геометрии в пространстве. Находка оказалась очень своевременной и удачной, поскольку предоставила отличную возможность прикинуть, насколько пОлно я рассмотрел всю тему. И, конечно же, предложить вам эти задачи для самопроверки:

➢ **Добро пожаловать в «реальные боевые условия»!**

Действуйте следующим образом: читаем условие задачи, **выполняем схематический чертёж (!)** и «раскручиваем» алгоритм решения, отвечая на вопросы: **что нужно знать для нахождения …?** и **как это найти?** В случае возникновения алгоритмических или технических трудностей читайте мои подсказки, которые я выделил курсивом:

Задача 165

ну а ответы к каждой задаче можно найти в конце книги:

1) Из точки $A(3;-2;4)$ опустить перпендикуляр на плоскость $5x+3y-7z+1=0$

Смотрите Задачу 163, пункт «а».

2) Найти проекцию точки $A(4;-3;1)$ на плоскость $x+2y-z-3=0$

Проекция точки на плоскость – это в точности основание перпендикуляра, смотрите Задачу 163, пункт «б».

3) Через прямую $\frac{x-2}{5}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+1}{2}$ провести плоскость, перпендикулярную к плоскости $x+4y-3z+7=0$.

Смотрите Задачу 162, пункт «в».

4) Написать уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые $\frac{x}{7}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{5}$ и $\frac{x-1}{7}=\frac{y-3}{3}=\frac{z+2}{5}$

Смотрите Задачу 159, пункт «б».

5) Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(3;-1;-5)$ перпендикулярно плоскостям $3x-2y+2z+7=0$ и $5x-4y+3z+1=0$.

Вот этой задачи нигде не встречалось. Уравнение искомой плоскости нужно составить по точке M и двум нормальным векторам плоскостей.

6) Найти длину перпендикуляра, опущенного из точки $M(2;3;-5)$ на плоскость $4x-2y+5z-12=0$

Смотрите Задачу 138.

7) Найти уравнение плоскости, зная, что точка $P(4;-3;12)$ служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту плоскость.

Фактически нужно составить уравнение плоскости по точке P и вектору нормали $\overline{OP}$, где O – начало координат.

8) Найти расстояние от точки $M(3;5;5)$ до прямой $\frac{x-1}{-2}=\frac{y}{4}=\frac{z}{1}$.

Смотрите Задачу 157, пункт «б».

9) Через начало координат провести плоскость, перпендикулярную прямой $\frac{x+2}{4}=\frac{y-3}{5}=\frac{z-1}{-2}$.

Необходимо составить уравнение плоскости по точке и вектору нормали.

10) Найти уравнения перпендикуляра, опущенного из точки $M(2;-1;-3)$ на прямую $\frac{x-1}{3}=\frac{y}{1}=\frac{z+4}{-2}$

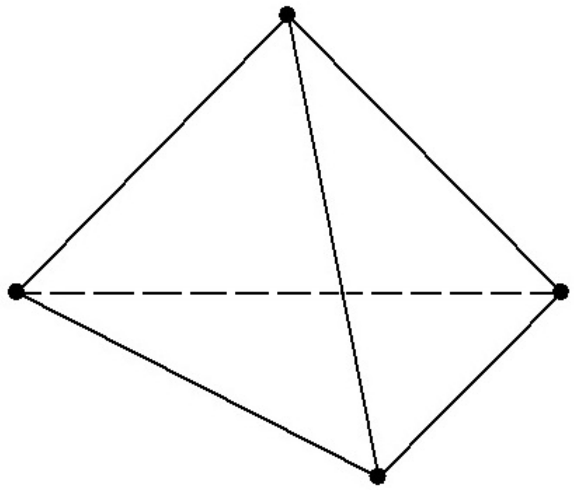
Смотрите Задачу 157, пункт «а».

Ну что же, из 10 пробных задач оказалась не разобрана только одна (№ 5), да и та простая. Таким образом, примерно с 90%-ной вероятностью, вы должны найти то, что нужно! Иногда, конечно, встречаются трудные задачи или задачи с дОнельзя «зашифрованным» условием, но это редкость.

И в заключение главы рассмотрим ещё одну типовую и очень распространённую задачу, которая встречается примерно в 80-90% самостоятельных и контрольных работ:

5.7. Задача с треугольной пирамидой

Концептуально эта задача напоминает задачу с треугольником на плоскости. Только вот треугольников у нас теперь четыре, и образуют они ***треугольную пирамиду*** или ***тетраэдр***:



У треугольной пирамиды есть:

– четыре вершины;

– шесть рёбер (сторон);

– четыре грани.

Чем богаты, тем и рады.

Не буду перечислять геометрические свойства данной фигуры, известные из школьной программы, поскольку аналитическую геометрию интересует совсем другое, а именно: уравнения рёбер, плоскостей, всевозможные длины, углы и некоторые другие вещи, которые вы увидите прямо сейчас. Типовая задача формулируется так:

Задача 166

Треугольная пирамида задана координатами своих вершин, пусть это будут вершины $A_1(2;-3;-1),\ A_2(5;4;2),\ A_3(-1;-4;3),\ A_4(-5;1;0)$. Требуется: … если повезёт, то только 3-4 пункта из перечисленных:

1) найти длину ребра A_1A_2;

2) составить уравнения стороны A_1A_2;

3) найти угол между рёбрами A_1A_2, A_1A_4;

4) найти площадь грани $A_1A_2A_3$;

5) найти угол между ребром A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$;

6) составить уравнение грани $A_1A_2A_3$;

7) составить уравнения высоты A_4H, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$;

8) вычислить длину высоты A_4H;

9) найти основание высоты H;

10) вычислить объем пирамиды;

11) составить уравнения медианы A_4M грани $A_1A_2A_4$;

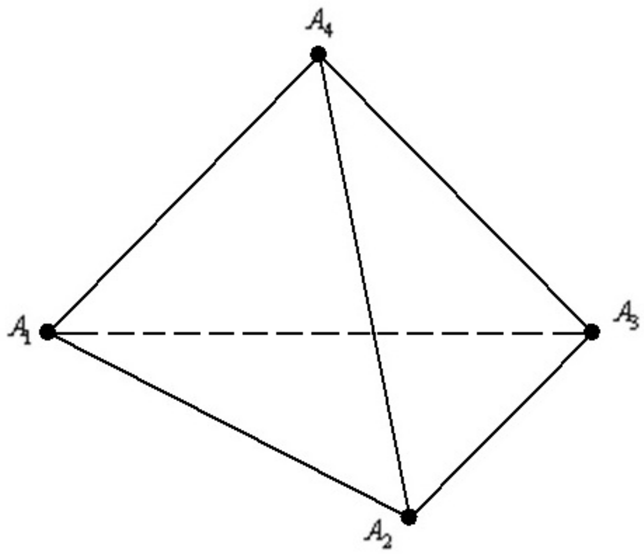
12) составить уравнение плоскости, проходящей через прямую A_4M и вершину A_3;

13) найти угол между плоскостями $A_1A_2A_3$ и A_4MA_3

14) выполнить чертёж пирамиды $A_1A_2A_3A_4$ в прямоугольной системе координат.

15) перекреститься левой пяткой.

Во-первых, разберёмся с обозначениями вершин. Самый распространённый вариант, когда они обозначены буквами A_1, A_2, A_3, A_4:



Если бегло просмотреть пункты условия, то легко заметить, что там часто встречается грань $A_1A_2A_3$. Чаще всего требуется составить уравнение этой «особенной» грани, а также найти её площадь. В качестве «особенной» вершины выступает точка A_4, обычно из неё строится перпендикуляр к плоскости $A_1A_2A_3$.

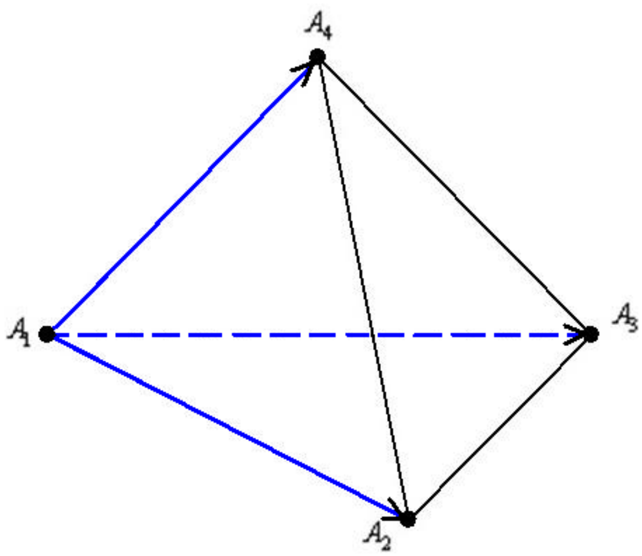
А всё это я сказал к тому, что **в вашей задаче могут быть совершенно другие обозначения вершин**. Например, A, B, C, D. Здесь «особой» гранью, скорее всего, будет ABC, а «особенной» точкой – вершина D.

В этой связи **очень важно выполнить схематический рисунок пирамиды**, чтобы не запутаться в дальнейшем алгоритме решение. Да, более подготовленные читатели могут представлять тетраэдр мысленно, но для «чайников» чертёж просто обязателен.

Итак, **на предварительном этапе** разбираемся с обозначениями вершин, анализируем условие, находим «особенную» плоскость и точку и выполняем бесхитростный набросок на черновике.

С чего начать решение? Начать лучше всего с того, что загнать координаты вершин в ***Геометрический калькулятор*** *(см. приложения)*, который автоматически рассчитает наиболее популярные пункты. Ибо приятно заранее знать правильные ответы ;)

Но расписать-то всё нужно подробно. И поэтому оформление **решения** удобно начать с нахождения векторов. Почти всегда векторы откладываются от первой вершины, в данном случае – от точки A_1:



Решим эту элементарную задачу:

$\overline{A_1A_2} = (5-2;\, 4-(-3);\, 2-(-1)) = (3;\, 7;\, 3);$

$\overline{A_1A_3} = (-1-2;\, -4-(-3);\, 3-(-1)) = (-3;\, -1;\, 4);$

$\overline{A_1A_4} = (-5-2;\, 1-(-3);\, 0-(-1)) = (-7;\, 4;\, 1).$

Чтобы комфортнее воспринимать информацию, координаты четырёх точек и трёх полученных вектора рекомендую переписать на отдельный листочек.

Это же сделайте, когда будете решать свою задачу – чтобы каждый раз не выискивать нужный вектор, нужную точку. Их удобно держать перед глазами.

Понеслось:

1) Найдём длину ребра A_1A_2. Длина данного ребра равна длине вектора $\overline{A_1A_2}$:

…

Я обычно округляю результаты до двух знаков после запятой, но в условии задачи может быть дополнительное указание проводить округления, например, до 1 или 3 десятичных знаков.

Полагаю, в случае надобности никого не затруднит аналогичным образом найти длину ребра A_1A_3 или A_1A_4. Как вариант, можно использовать формулу расстояния между двумя точками: $|\ldots| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Но зачем? У нас уже найдены векторы.

2) Найдём уравнения ребра A_1A_2. Строго говоря, здесь следует сказать «уравнения прямой, которая содержит ребро», но этим почти всегда пренебрегают. «По умолчанию» обычно подразумевается, что студент запишет канонические уравнения прямой.

Уравнения ребра A_1A_2 составим по точке $A_1(2; -3; -1)$ (можно взять A_2) и направляющему вектору $\overline{A_1A_2}(3; 7; 3)$:

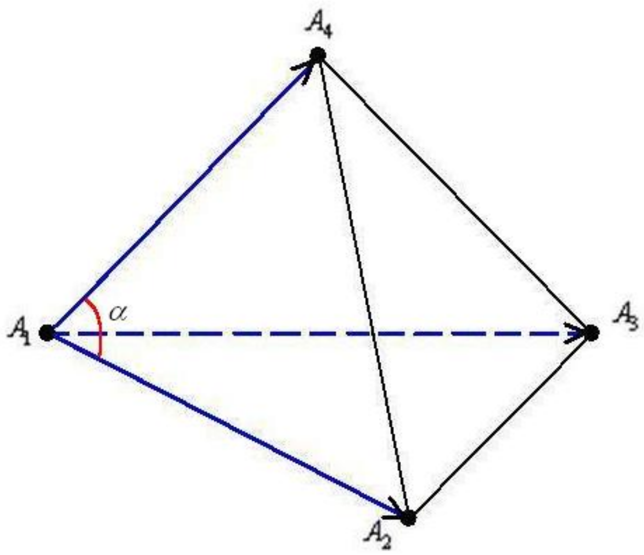
...

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-(-3)}{7} = \frac{z-(-1)}{3}$$

$$A_1A_2: \ \frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{7} = \frac{z+1}{3}$$

Для проверки подставляем координаты точек A_1, A_2 в полученное уравнение. Обе должны «подойти».

3) Найдём угол между сторонами A_1A_2, A_1A_4:



Перед вами обычный угол пространственного треугольника, который рассчитывается как угол между векторами: $\alpha = \angle(\overline{A_1A_2}; \overline{A_1A_4})$. И снова при делах ~~задро~~ тривиальная формула:

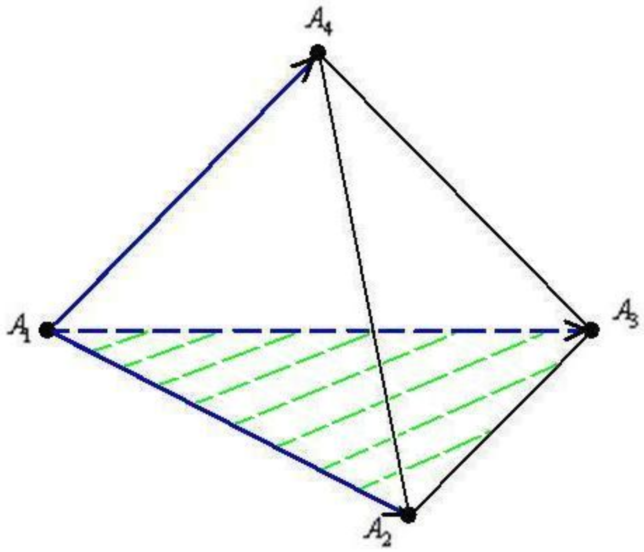
$$\cos\alpha = \ldots = \frac{3\cdot(-7) + 7\cdot 4 + 3\cdot 1}{\sqrt{67}\cdot\sqrt{(-7)^2 + 4^2 + 1^2}} =$$

$$= \frac{-21 + 28 + 3}{\sqrt{67}\cdot\sqrt{66}} = \frac{10}{\sqrt{4422}}$$ – заметьте, что в ходе вычислений можно (и нужно) использовать ранее полученные результаты, в данном случае нам уже известно, что $|\overline{A_1A_2}| = \sqrt{67}$ *(см. пункт 1)*.

С помощью обратной функции находим сам угол:

$$\angle(A_1A_2; A_1A_4) = \alpha = \arccos\frac{10}{\sqrt{4422}} \approx 1{,}42 \text{ рад.} \approx 81^\circ$$

4) Найдём площадь грани $A_1A_2A_3$:



Площадь треугольника вычислим с помощью векторного произведения векторов, используя формулу:

$$S_{(123)} = \frac{1}{2} \cdot ...$$

Найдём векторное произведение:

$$\overline{N} = \left[\overline{A_1A_2} \times \overline{A_1A_3}\right] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & 7 & 3 \\ -3 & -1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \cdot \bar{i} - \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} \cdot \bar{j} + \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} \cdot \bar{k} =$$

$$= (28+3)\bar{i} - (12+9)\bar{j} + (-3+21)\bar{k} =$$

$$= 31\bar{i} - 21\bar{j} + 18\bar{k}$$

и вычислим его длину:

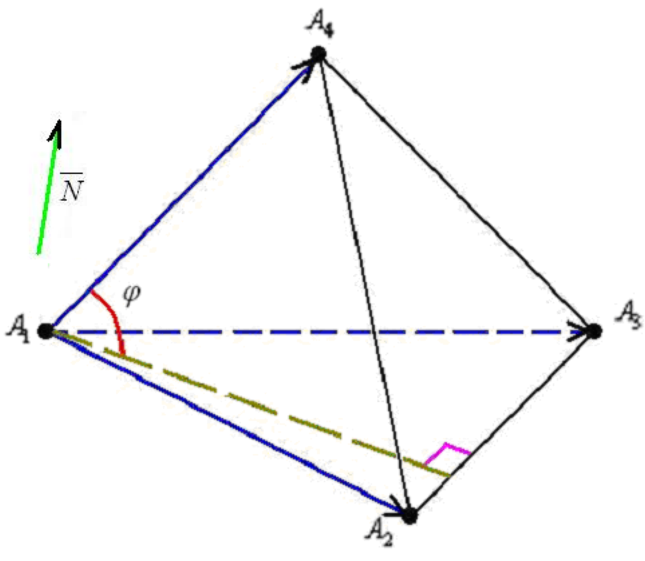
$\left|\overline{N}\right| = \sqrt{31^2 + (-21)^2 + 18^2} = \sqrt{961 + 441 + 324} = \sqrt{1726}$ …и вынести из-под корня ничего нельзя, поэтому он войдёт в ответ в неизменном виде.

Таким образом, площадь грани $A_1A_2A_3$:

$$S_{(123)} = \frac{1}{2} \cdot ...$$

Если получаются страшноватые числа, не обращайте внимания, обычная картина. Главное, не допустить ошибку в вычислениях.

5) Найдём угол $\varphi = \angle(A_1A_4;\, A_1A_2A_3)$ между ребром A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$, прошу прощения за неточность последующих чертежей, я рисую от руки:



Это стандартная задача, рассмотренная в Задаче 162 *(пункт «д»)*.

Используем формулу:

$$\sin\varphi = ... =$$

$$= \frac{|-7 \cdot 31 + 4 \cdot (-21) + 1 \cdot 18|}{\sqrt{66} \cdot \sqrt{1726}} =$$

$$= \frac{|-283|}{2\sqrt{28479}} = \frac{283}{2\sqrt{28479}}$$

И с помощью арксинуса рассчитываем сам угол:

$$\varphi = \arcsin\frac{283}{2\sqrt{28479}} \approx 1 \text{ рад.} \approx 57^\circ$$

6) Составим уравнение грани $A_1A_2A_3$. А точнее, «уравнение плоскости, которая содержит грань».

Первая мысль – использовать точки $A_1(2;-3;-1)$, $A_2(5;4;2)$, $A_3(-1;-4;3)$, но есть более выгодное решение. У нас уже найден вектор нормали $\overline{N}=\left[\overline{A_1A_2}\times\overline{A_1A_3}\right]$ плоскости $A_1A_2A_3$. Поэтому уравнение грани $A_1A_2A_3$ составим по точке $A_1(2;-3;-1)$ (можно взять A_2 либо A_3) и вектору нормали $\overline{N}(31;-21;18)$:

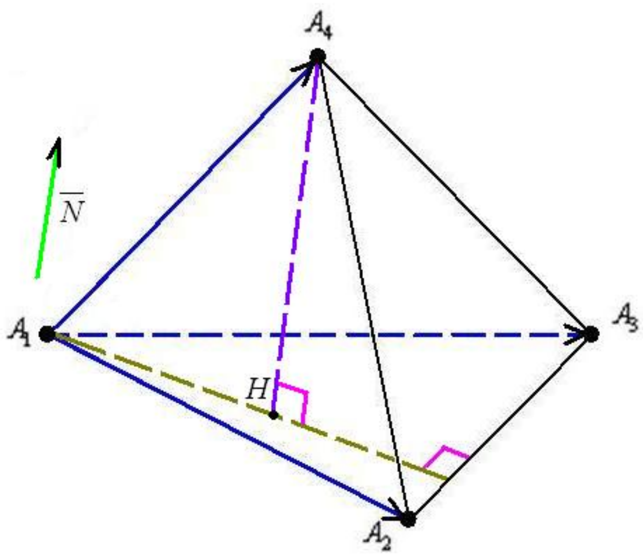
$$31\cdot(x-2)-21\cdot(y-(-3))+18\cdot(z-(-1))=0$$
$$31\cdot(x-2)-21\cdot(y+3)+18\cdot(z+1)=0$$
$$31x-62-21y-63+18z+18=0$$

Таким образом:

…

Для проверки можно подставить координаты точек A_1, A_2, A_3 в полученное уравнение, все три точки должны «подойти».

7) Как составить уравнения высоты пирамиды? Звучит грозно, решается просто.



Уравнения высоты A_4H, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$, составим по точке $A_4(-5;1;0)$ и направляющему вектору $\overline{N}(31;-21;18)$:

…– по умолчанию записываем канонические уравнения.

Вектор нормали в рассматриваемой задаче работает «на всю катушку», и как только вам предложили найти площадь грани, составить уравнение грани или уравнения высоты – сразу «пробивайте» векторное произведение.

8) Длину высоты A_4H найдём как расстояние от точки $A_4(-5;1;0)$ до плоскости $A_1A_2A_3: 31x-21y+18z-107=0$:

$$|A_4H|=\rho(A_4;\,A_1A_2A_3)=\ldots=\frac{|31\cdot(-5)-21\cdot 1+18\cdot 0-107|}{\sqrt{31^2+(-21)^2+18^2}}=$$
$$=\frac{|-155-21+0-107|}{\sqrt{1726}}=\frac{|-283|}{\sqrt{1726}}=\frac{283}{\sqrt{1726}}\text{ ед.}\approx 6{,}81\text{ ед.}$$

Результат громоздкий, поэтому позволим себе вольность не избавляться от иррациональности в знаменателе.

Теперь пунктик потруднее:

9) Найдём основание высоты – точку H. Тема пересечения прямой и плоскости подробно муссировалась в той же в Задаче 162 *(пункт «б»)*. Повторим. Перепишем уравнения высоты в параметрической форме:

$$A_4H: \frac{x+5}{31}=\frac{y-1}{-21}=\frac{z}{18} \quad \Rightarrow \quad A_4H: \begin{cases} x=31t-5 \\ y=-21t+1 \\ z=18t \end{cases}$$

Неизвестным координатам точки $H(x_H; y_H; z_H)$ соответствует вполне конкретное значение параметра t_0:

$$H: \begin{cases} x_H=31t_0-5 \\ y_H=-21t_0+1 \\ z_H=18t_0 \end{cases}, \text{ или: } H(31t_0-5; -21t_0+1; 18t_0).$$

Основание высоты, понятно, лежит в плоскости. Подставим параметрические координаты точки H в уравнение $A_1A_2A_3: 31x-21y+18z-107=0$:

$$31\cdot(31t_0-5)-21\cdot(-21t_0+1)+18\cdot 18t_0-107=0$$
$$961t_0-155+441t_0-21+324t_0-107=0$$
$$1726t_0-283=0 \quad \Rightarrow \quad t_0=\frac{283}{1726}$$

Кому-то покажется жестью, но на самом деле шифер :) Который шуршит.

Полученное значение параметра подставим в координаты нашей точки:

$$H(31t_0-5; -21t_0+1; 18t_0) \Rightarrow H\left(31\cdot\frac{283}{1726}-5; -21\cdot\frac{283}{1726}+1; 18\cdot\frac{283}{1726}\right) \Rightarrow H\left(\frac{143}{1726}; -\frac{4217}{1726}; \frac{5094}{1726}\right)$$

Сурово, но идеально точно. Я проверил.

10) Объём треугольной пирамиды в ангеме традиционно рассчитывается с помощью смешанного произведения векторов:

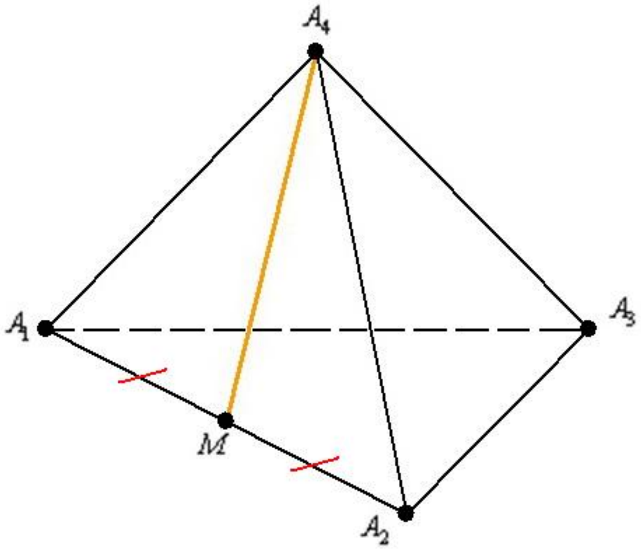
$$p=(\overline{A_1A_2}\cdot\overline{A_1A_3}\cdot\overline{A_1A_4})=\begin{vmatrix} 3 & 7 & 3 \\ -3 & -1 & 4 \\ -7 & 4 & 1 \end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}-7\cdot\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -7 & 1 \end{vmatrix}+3\cdot\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -7 & 4 \end{vmatrix}=$$
$$=3\cdot(-1-16)-7\cdot(-3+28)+3\cdot(-12-7)=-51-175-57=-283$$

Таким образом, $V=...=47\frac{1}{6}$ ед.^{3}

И тут уместно выполнить проверку, вычислив объем тетраэдра по школьной формуле $V=\frac{1}{3}Sh$, где S – площадь грани, h – длина высоты, опущенной к этой грани. Уместно ПОТОМУ, что мы знаем и площадь грани $S_{(123)}=\frac{\sqrt{1726}}{2}$ ед^2., и длину соответствующей высоты $|A_4H|=\rho(A_4; A_1A_2A_3)=\frac{283}{\sqrt{1726}}$ ед.:

$$V=\frac{1}{3}\cdot S_{(123)}\cdot|A_4H|=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{1726}}{2}\cdot\frac{283}{\sqrt{1726}}=\frac{283}{6}=47\frac{1}{6} \text{ ед.}^3\text{, чему мы очень рады.}$$

11) Составим уравнения медианы A_4M грани $A_1A_2A_4$. Ничего сложного, обычная медиана обычного пространственного треугольника:



По сравнению с треугольником на плоскости, добавится лишь дополнительная координата. Нам известны вершины …, и по формулам координат середины отрезка находим адрес точки M:

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{2+5}{2} = \frac{7}{2}$$

$$y_M = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{-3+4}{2} = \frac{1}{2}$$

$$z_M = \frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2}$$

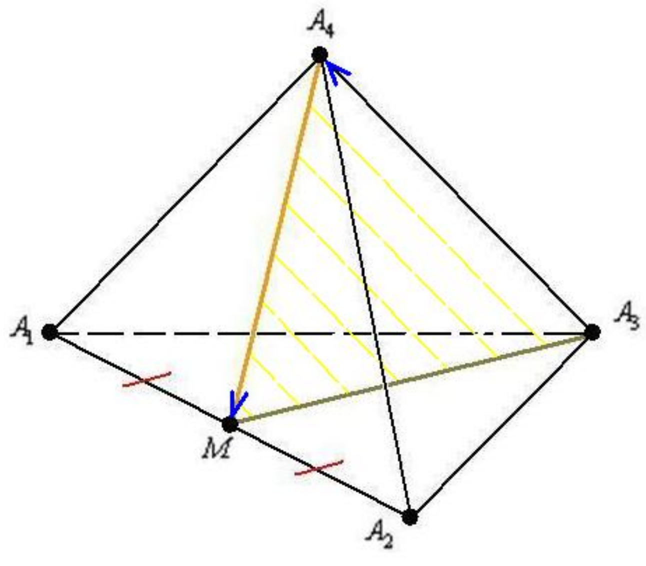
$$M\left(\frac{7}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

Уравнения медианы можно составить по двум точкам, но сначала *(см. по ссылке, почему)* лучше найти направляющий вектор: $\overline{A_4M} = \left(\frac{7}{2} - (-5); \frac{1}{2} - 1; \frac{1}{2} - 0\right) = \left(\frac{17}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. В качестве направляющего можно взять любой коллинеарный вектор, и сейчас подходящий момент избавиться от дробей: $2\overline{A_4M} = 2 \cdot \left(\frac{17}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) = (17; -1; 1)$

Уравнения медианы составим по точке $A_4(-5; 1; 0)$ и направляющему вектору $2\overline{A_4M} = (17; -1; 1)$: $A_4M: \ \frac{x+5}{17} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{1}$

Заметьте, что уравнения с эстетической точки зрения лучше составить по точке $A_4(-5; 1; 0)$, так как координаты точки «эм» – дробные. **Проверка** обыденна, нужно подставить координаты точек $A_4(-5; 1; 0)$, $M\left(\frac{7}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ в полученные уравнения.

12) Составим уравнение плоскости, проходящей через прямую A_4M и вершину A_3:



Увы, мы не знаем «вкусный» вектор нормали, и поэтому уравнение плоскости A_4MA_3 придётся добывать по точке и двум неколлинеарным векторам.

В качестве точки **обязательно** выбираем «одинокую» точку, которая не принадлежит прямой, в данном случае – это вершина A_3. Один из нужных векторов уже известен: $\overline{A_4M}\left(\frac{17}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, но, конечно же, удобнее выбрать друга-мажора $2\overline{A_4M} = (17; -1; 1)$. Ему в пару подходит вектор $\overline{A_3M}$, но лучше $\overline{A_3A_4}$.

Ибо координаты этого вектора будут целыми:

…

Уравнение плоскости составим по точке $A_3(-1;-4;3)$ и двум неколлинеарным векторам $2\overline{A_4M}=(17;-1;1)$, $\overline{A_3A_4}=(-4;5;-3)$:

$$\begin{vmatrix} x-(-1) & 17 & -4 \\ y-(-4) & -1 & 5 \\ z-3 & 1 & -3 \end{vmatrix}=0$$

$$(x+1)\cdot\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}-(y+4)\cdot\begin{vmatrix} 17 & -4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}+(z-3)\cdot\begin{vmatrix} 17 & -4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}=0$$

$$-2(x+1)+47(y+4)+81(z-3)=0$$

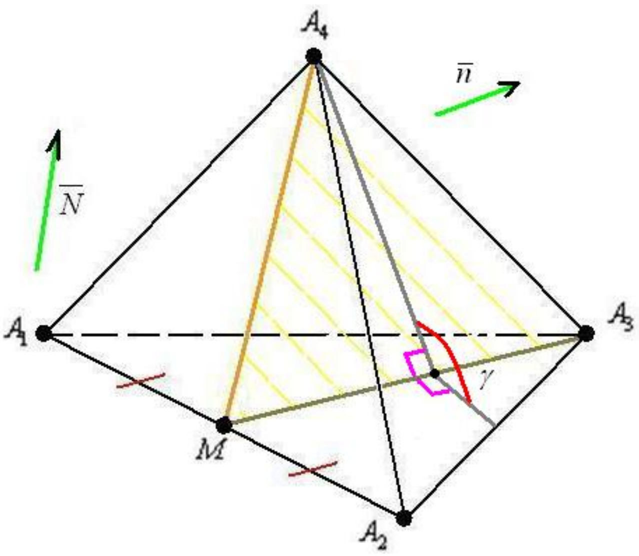
$$2(x+1)-47(y+4)-81(z-3)=0$$

$$2x+2-47y-188-81z+243=0$$

$$A_4MA_3: 2x-47y-81z+57=0$$

Непременно **проверяем**, что координаты точек A_3, A_4, M удовлетворяют полученному уравнению.

13) Найдём угол между плоскостями $A_1A_2A_3$ и A_4MA_3.



Это типовая задача.

Обозначим искомый угол через $\angle(A_1A_2A_3; A_4MA_3)=\gamma$ и используем формулу: …, где $\overline{n}$ – вектор нормали плоскости A_4MA_3. Напоминаю, что вектор $\overline{N}(31;-21;18)$ и его длина $|\overline{N}|=\sqrt{1726}$ уже известны. Осталось из уравнения $A_4MA_3: 2x-47y-81z+57=0$ снять вектор нормали: $\overline{n}(2;-47;-81)$ и аккуратно провести вычисления:

$$\cos\gamma=\frac{31\cdot 2-21\cdot(-47)+18\cdot(-81)}{\sqrt{1726}\cdot\sqrt{2^2+(-47)^2+(-81)^2}}=\frac{-409}{\sqrt{1726}\cdot\sqrt{8774}}$$

Возиться с такими корнями смысла нет, поэтому сразу находим угол:

$$\gamma=\arccos\left(-\frac{409}{\sqrt{1726}\cdot\sqrt{8774}}\right)\approx 1{,}68\text{ рад.}\approx 96^\circ$$

От тупизны подальше за ответ таки лучше принять смежного соседа:

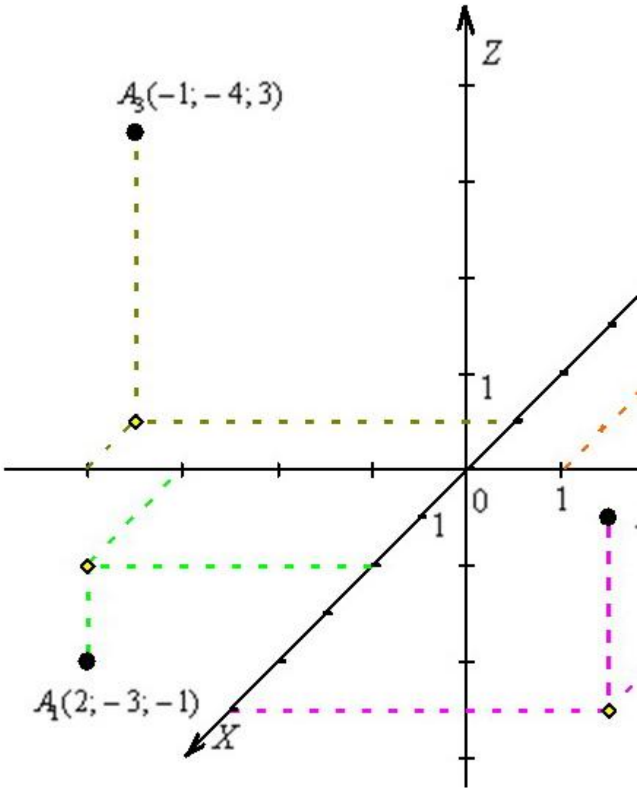
$$\pi-\arccos\left(-\frac{409}{\sqrt{1726}\cdot\sqrt{8774}}\right)\approx 1{,}47\text{ рад.}\approx 84^\circ$$

14) Выполним точный чертёж пирамиды $A_1A_2A_3A_4$ прямоугольной системе координат. Да, конечно, существуют программы и онлайн сервисы для построения чертежей, но не факт, что они под рукой, и не факт, что такой чертёж будет качественным. Поэтому я расскажу вам о ручном способе построения – в тетради с помощью карандаша и линейки.

С чего начать?

Во-первых, нужно правильно изобразить декартову систему координат на клетчатой бумаге. **Во-вторых**, необходимо уметь строить точки в трёхмерном пространстве, о чём мы уже вспомнили, когда разбирали канонические уравнения прямой. И сейчас тема получает продолжение.

Построим точку $A_1(2;-3;-1)$. Для этого отмеряем 2 единицы в положительном направлении оси OX и 3 единицы в отрицательном направлении оси OY. В плоскости XOY прочерчиваем тонкие пунктирные дорожки, которые **параллельны соответствующим координатным осям**. Пересечение этих дорожек отмечено ромбиком *(слева внизу)*:



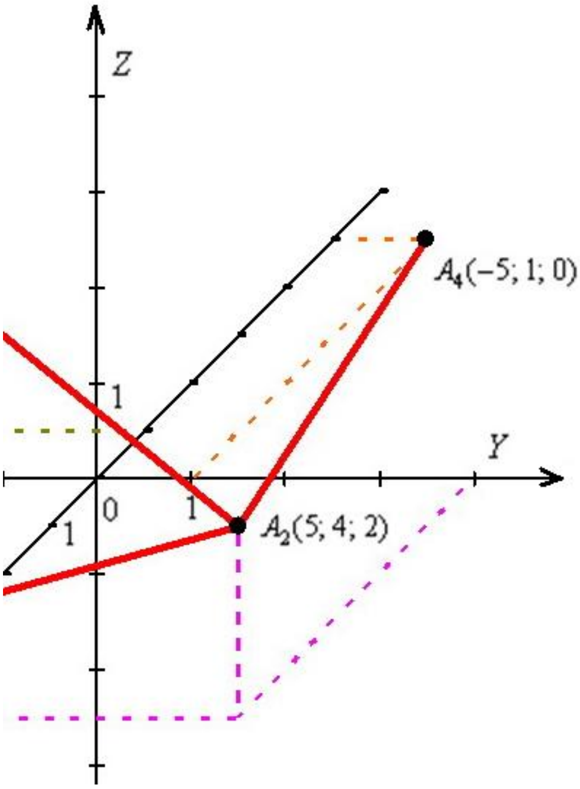
Теперь, в соответствии с отрицательной «зетовой» координатой, отмеряем 1 единицу вниз и тоже проводим пунктирную дорожку. Здесь и будет находиться наша точка $A_1(2;-3;-1)$, она расположена в нижнем полупространстве.

Для точки $A_2(5;4;2)$ отмеряем 5 единиц «на себя» и 4 единицы вправо, строим параллельные осям пунктирные дорожки и находим их точку пересечения. В соответствии с «зетовой» координатой, чертим пунктиром «подставку для точки» – 2 единицы вверх. Данная точка расположена в верхнем полупространстве.

Аналогично строятся две другие точки. Заметьте, что вершина $A_4(-5;1;0)$ лежит в самой плоскости XOY.

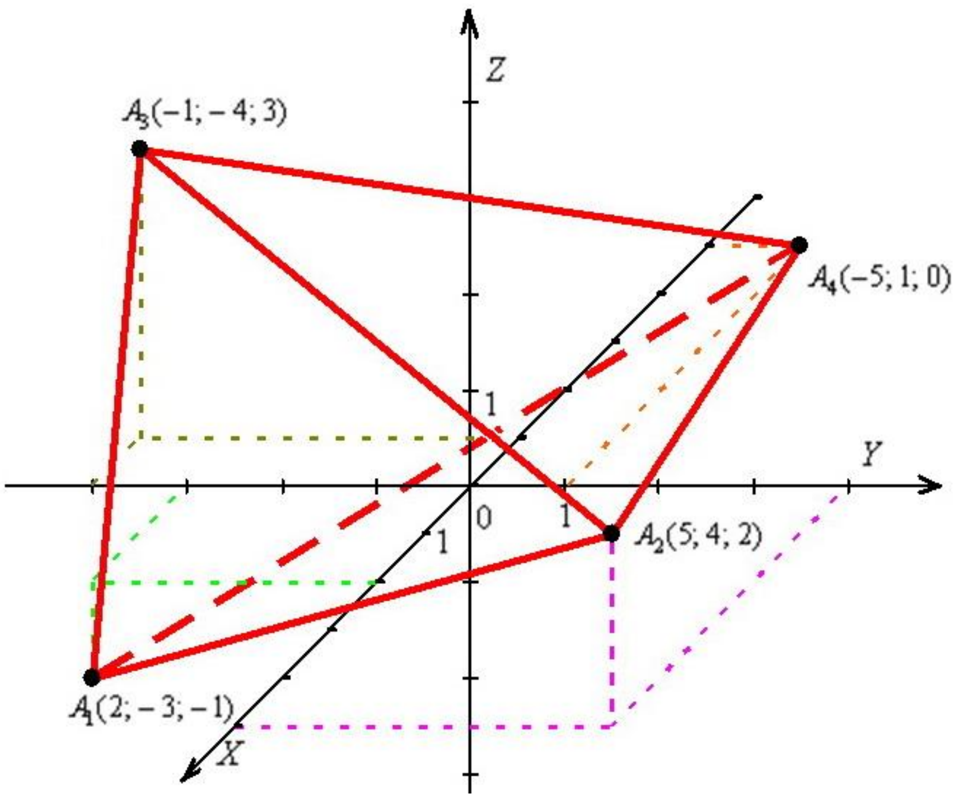
Теперь нужно разобраться в удалённости точек, а в этом как раз и помогут пунктирные линии. Немного включаем пространственное воображение и внимательно смотрим на ось OX. Очевидно, что самая близкая к нам вершина – A_2, а самая удалённая – A_4.

Строим рёбра. Если есть сомнения, то сначала тонко-тонко прочерчиваем все 6 сторон и начинаем разбираться, какие рёбра видимы, а какие нет. **Лучше начать от самой близкой точки** A_2. Очевидно, что все три «исходящих» ребра в поле нашего зрения:



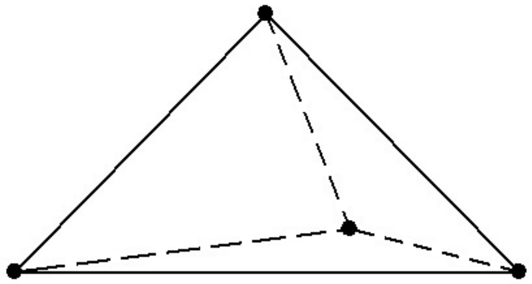
Должен предостеречь, что так бывает далеко не всегда, одно ребро, например, может быть от нас скрыто. Не теряйте визуального восприятия пространства!

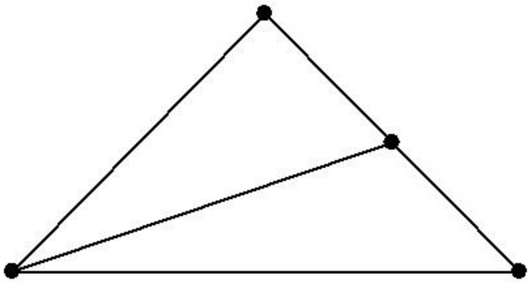
Какие ещё стороны в зоне видимости? ВиднЫ рёбра A_1A_3, A_3A_4, а вот сторона A_1A_4 спряталась за пирамидой. Обратите внимание, что она лежит в нижнем полупространстве и проходит **под** осями OX, OY:



Готово.

Следует отметить, что чертеж-«конфетка» получается далеко не всегда. Бывает, что фортуна разворачивается задом. Так, грань пирамиды может полностью или частично закрывать всё остальное *(слева)*.





Но самое скверное, когда перекрываются рёбра *(справа)*. Тут сразу три ребра выстроились на одной прямой *(правая верхняя прямая)*. В подобной ситуации можно жирно прочертить накладывающиеся стороны разными цветами и ниже чертежа записать дополнительные комментарии о расположении пирамиды. А можно поступить творчески – поменять оси местами (например, OX и OY).

Существуют и более мелкие неприятности, например, одна из сторон пирамиды может наложить на координатную ось (а то и вовсе расположиться за ней).

Увы, перечисленные случаи – не редкость на практике.

В конце решения следует выполнить *Пункт 15*, после чего желательно записать **ответ**, где по пунктам перечислить полученные результаты.

6. Поверхности второго порядка

Здесь будет прослеживаться очевидная аналогия с «плоскими» линиями.

Поверхность называется ***алгебраической***, если в некоторой аффинной системе координат её уравнение $F(x; y; z) = 0$ представляет собой многочлен с членами $kx^m y^n z^p$, где k – действительное число, m, n, p – целые неотрицательные числа. Других членов нет.

Максимальное значение суммы $m + n + p$ называют ***порядком*** поверхности.

Очевидно, что плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$ – это ***алгебраическая поверхность первого порядка***, и любая алгебраическая поверхность первого порядка – есть плоскость.

Алгебраическая поверхность второго порядка имеет вид:

…, где все коэффициенты действительны и A, B, C, D, E, F не равны нулю *одновременно*.

Здесь вариантов больше. Все поверхности 2-го порядка можно разделить на несколько групп: ***цилиндры***, ***конические поверхности***, ***эллипсоиды***, ***параболоиды*** и ***гиперболоиды***. Но мы, конечно, не будем изучать их досконально, и тем более приводить к каноническому виду ☺.

Наша цель прежняя – решение распространённых прикладных задач. После изучения этой главы вы научитесь определять тип поверхности по около- и каноническому уравнению, представлять её в функциональном виде $z = f(x; y)$, решать простейшие задачи и самое главное, строить поверхности от руки. Кроме того, будет краткая информация о цилиндрической и сферической системе координат.

Что нужно уметь на данный момент? Самое элементарное:

Во-первых, необходимо уметь правильно строить пространственную декартову систему координат *(далее она подразумевается по умолчанию)*.

Во-вторых, необходимо уметь откладывать точки в этой системе координат, о чём я достаточно подробно рассказал буквально несколько страниц назад.

…Есть? Начинаем!

На практике поверхность, как правило, задаётся уравнением $F(x;y;z)=0$ либо **функцией двух переменных** $z=f(x;y)$. Первый способ больше характерен для алгебры и геометрии, второй – для математического анализа. Уравнение $F(x;y;z)=0$ также называют ***неявно заданной*** *функцией двух переменных*, которую во многих задачах нетрудно представить в ***явном виде***: $z=f(x;y)$. Так, уравнение плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ легко привести к явному функциональному виду $z=-\frac{A}{C}x-\frac{B}{C}y-\frac{D}{C}$, если $C\neq 0$.

И мы расширяем свой кругозор:

6.1. Цилиндрические поверхности

Или ***цилиндры***. Под *цилиндром* также понимают геометрическое тело.

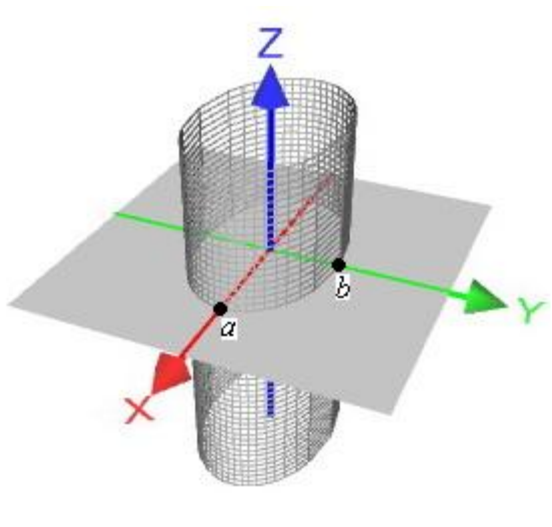
И это не совсем то, что обычно подразумевает обыватель – класс цилиндрических поверхностей не ограничивается чёрным цилиндром на голове:

Задача 167

Построить поверхность, заданную уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b)$

…что за дела?! Не опечатка ли здесь? Вроде как дано уравнение эллипса…

Нет, здесь не опечатка и все дела происходят именно в пространстве! Исследуем предложенную поверхность тем же методом, что использовали для плоскостей. Перепишем уравнение в виде $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+0\cdot z=1$, из которого следует, что «зет» принимает **любые** значения. Зафиксируем $z=0$ и построим в плоскости XOY эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Так как «зет» принимает **все** значения, то построенный эллипс непрерывно «тиражируется» вверх и вниз до бесконечности.



Данная поверхность называется ***эллиптическим цилиндром***. Эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (на любой высоте) называется ***направляющей*** цилиндра, а параллельные прямые, проходящие через каждую точку эллипса называются ***образующими*** цилиндра (которые в прямом смысле слова его и образуют).

Ось OZ является *осью симметрии* поверхности (но не её частью!).

Координаты любой точки, принадлежащей данной поверхности, обязательно удовлетворяют уравнению $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+0\cdot z=1$.

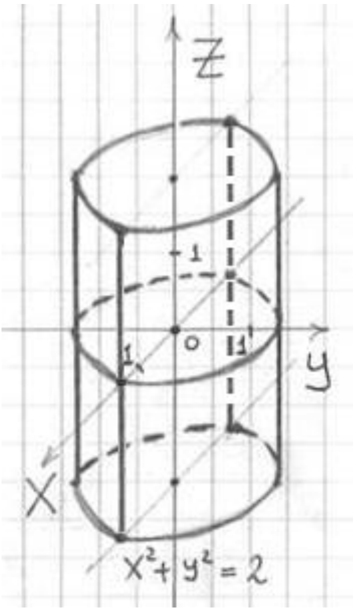
Пространственное неравенство $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$ задаёт «внутренность» бесконечной «трубы», включая саму цилиндрическую поверхность, и, соответственно, противоположное неравенство $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}>1$ определяет множество точек вне цилиндра.

В практических задачах наиболее популярен частный случай, когда *направляющей* цилиндра является окружность:

Задача 168

Построить поверхность, заданную уравнением $x^2+y^2=2$

Бесконечную «трубу» изобразить невозможно, поэтому художества ограничиваются, как правило, «обрезком».



Сначала удобно построить окружность радиуса $\sqrt{2}$ в плоскости XOY $(z=0)$, а затем ещё пару окружностей сверху и снизу. Полученные окружности (*направляющие* цилиндра) аккуратно соединяем 4 параллельными прямыми (*образующими* цилиндра):

Не забываем использовать пунктир для невидимых нам линий!

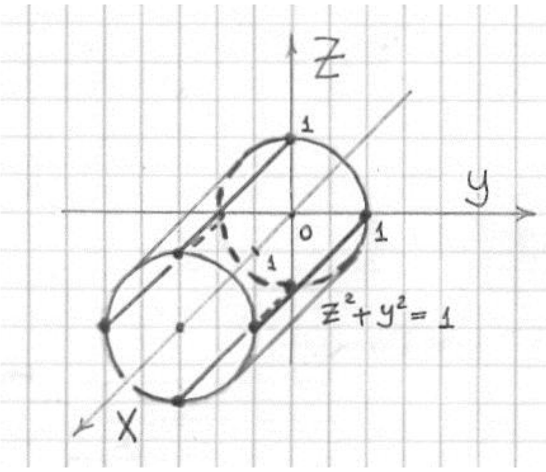
Координаты любой точки, принадлежащей данному цилиндру, удовлетворяют уравнению $x^2+y^2+0\cdot z=2$. Координаты любой точки, лежащей строго внутри «трубы», удовлетворяют неравенству $x^2+y^2+0\cdot z<2$, а неравенство $x^2+y^2+0\cdot z>2$ задаёт множество точек внешней части. Для лучшего понимания рекомендую рассмотреть несколько конкретных точек пространства и убедиться в этом самостоятельно.

Часто эту поверхность некорректно называют ***круговым цилиндром***. **Круглым!** Круговой цилиндр, строго говоря – есть *тело*, по той причине, что его *направляющей* является круг. И тело, кстати, определяется неравенством $x^2+y^2\le 2$.

Задача 169

Построить поверхность $z^2+y^2=1$ и найти её проекцию на плоскость XOY

Перепишем уравнение в виде $0\cdot x+z^2+y^2=1$, из которого следует, что «икс» принимает **любые** значения. Зафиксируем $x=0$ и в плоскости YOZ изобразим окружность $z^2+y^2=1$ – с центром в начале координат, единичного радиуса. Так как «икс» непрерывно принимает **все** значения, то построенная окружность порождает цилиндр с осью симметрии OX. Рисуем ещё одну окружность (*направляющую* цилиндра) и аккуратно соединяем их прямыми (*образующими* цилиндра). Местами получились накладки, но что делать, такой уж наклон:



На этот раз я ограничился кусочком цилиндра на промежутке $0 \le x \le 3$ и это не случайно. На практике зачастую и требуется изобразить лишь небольшой фрагмент поверхности.

Тут, к слову, получилось 6 образующих – две дополнительные прямые «закрывают» поверхность с левого верхнего и правого нижнего углов.

Теперь разбираемся с проекцией цилиндра на плоскость XOY. Многие читатели понимают, что такое проекция, но, тем не менее, проведём очередную физкульт-пятиминутку:

Пожалуйста, встаньте и склоните голову над чертежом так, чтобы остриё оси OZ смотрело перпендикулярно вам в лоб. То, чем с этого ракурса кажется цилиндр – и есть его проекция на плоскость XOY. А кажется он бесконечной полосой, заключенным между прямыми $y=-1,\ y=1\,(z=0)$, включая сами прямые. Данная проекция – это в точности **область определения** функций … (верхний «жёлоб» цилиндра), …(нижний «жёлоб»).

Давайте заодно проясним ситуацию и с проекциями на другие координатные плоскости. Пусть лучи солнца светят на цилиндр со стороны острия и вдоль оси OY. Тенью (проекцией) цилиндра на плоскость XOZ является аналогичная бесконечная полоса – часть плоскости XOZ, ограниченная прямыми $z=-1,\ z=1$ ($y=0,\ x$ – любое), включая сами прямые.

А вот проекция на плоскость YOZ несколько иная. Если смотреть на цилиндр из острия оси OX, то он спроецируется в окружность (не круг!) единичного радиуса $z^2+y^2=1\ \ (x=0)$, с которой мы начинали построение.

Задача 170

Построить поверхность $z=\sqrt{4-x^2}$ и найти её проекции на координатные плоскости

Это задача для самостоятельного решения. Если условие не очень понятно, возведите обе части в квадрат и проанализируйте результат – выясните, какую именно часть цилиндра задаёт функция …. Используйте методику построения, неоднократно применявшуюся выше. Краткое решение, чертёж и комментарии в конце книги.

Цилиндрические поверхности могут быть смещены относительно координатных осей, например:

$(x-1)^2+(y+2)^2=1$ – данное уравнение *(по знакомым мотивам линий 2-го порядка)* задаёт цилиндр единичного радиуса с линией симметрии, проходящей через точку $(1;-2;0)$ параллельно оси OZ.

Однако на практике подобные цилиндры попадаются довольно редко, и совсем уж невероятно встретить «косую» относительно координатных осей цилиндрическую поверхность.

Параболические цилиндры

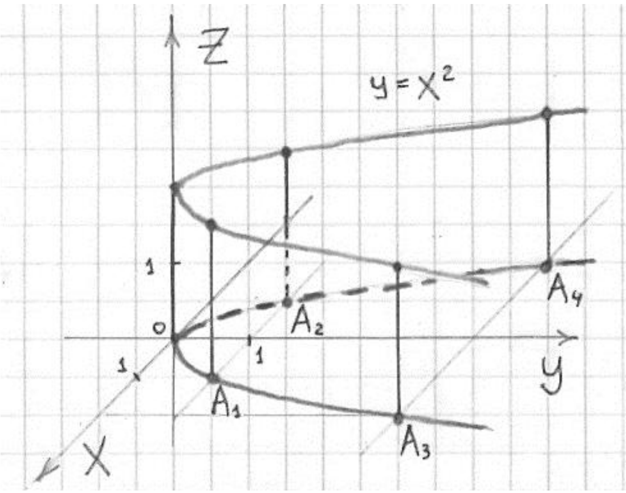
Как следует из названия, *направляющей* такого цилиндра является параболa.

Задача 171

Построить поверхность $y = x^2$ и найти её проекции на координатные плоскости.

Не мог удержаться от этого примера =)

Решение: идём проторенной тропой. Перепишем уравнение в виде $0 \cdot z + y = x^2$, из которого следует, что «зет» может принимать любые значения. Зафиксируем $z = 0$ и построим обычную параболу $y = x^2$ на плоскости XOY, предварительно отметив тривиальные опорные точки …. Поскольку «зет» принимает **все** значения, то построенная парабола непрерывно «тиражируется» вверх и вниз до бесконечности. Откладываем такую же параболу, скажем, на высоте (в плоскости) $z = 2$ и аккуратно соединяем их параллельными прямыми (*образующими цилиндра*):



Напоминаю **полезный технический приём**: если изначально нет уверенности в качестве чертежа, то линии сначала лучше прочертить тонко-тонко карандашом. Затем оцениваем качество эскиза, выясняем участки, где поверхность скрыта от наших глаз, и только потом придаём нажим грифелю.

Теперь вторая часть задания, отыскание проекций:

1) Проекцией цилиндра на плоскость XOY является парабола $y = x^2$.

2) Проекция цилиндра на плоскость YOZ представляет собой полуплоскость …, включая ось OZ

3) И, наконец, проекцией цилиндра на плоскость XOZ является вся плоскость XOZ.

Тренируемся самостоятельно:

Задача 172

Построить параболические цилиндры:

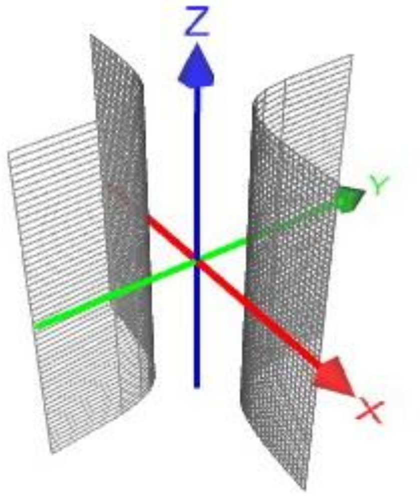
а) $z = 1 - y^2$, ограничиться фрагментом поверхности в ближнем полупространстве;

б) $z = x^2 + 1$ на промежутке $-2 \le y \le 2$

В случае затруднений не спешим и рассуждаем по аналогии с предыдущими примерами, благо, технология досконально отработана. Не критично, если поверхности будут получаться немного корявыми – важно правильно отобразить принципиальную картину. Я и сам особо не заморачиваюсь над красотой линий – если получился сносный чертёж «на троечку», обычно не переделываю. В образце решения, кстати, использован ещё один приём, позволяющий улучшить качество чертежа ;-)

Гиперболические цилиндры

Направляющими таких цилиндров являются гиперболы.



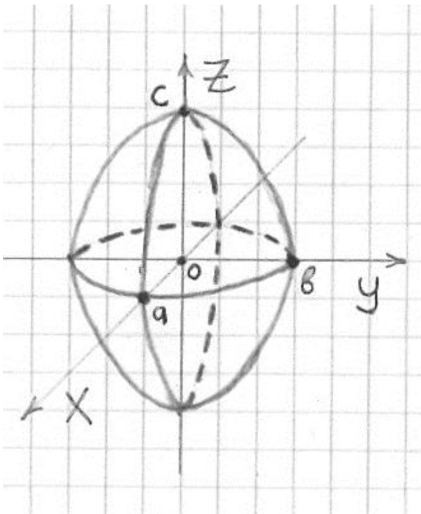
Этот тип поверхностей, по моим наблюдениям, встречается значительно реже, и поэтому я ограничился единственным схематическим чертежом гиперболического цилиндра $y = \frac{1}{x}$.

Принцип рассуждения здесь точно такой же – обычная «школьная» гипербола $y = \frac{1}{x}$ из плоскости XOY непрерывно «размножается» вверх и вниз до бесконечности.

Переходим к следующей поверхности:

6.2. Эллипсоид

Каноническое уравнение ***эллипсоида*** имеет вид …, где a, b, c – положительные числа (***полуоси*** эллипсоида), которые в общем случае *различны*. Эллипсоидом называют как **поверхность**, так и **тело**, ограниченное данной поверхностью. Тело задаётся неравенством … и координаты любой внутренней точки (а также любой точки поверхности) обязательно удовлетворяют этому неравенству. Конструкция симметрична относительно координатных осей и координатных плоскостей:



Происхождение термина «эллипсоид» тоже очевидно: если поверхность «разрезать» координатными плоскостями, то в сечениях получатся три различных (в общем случае) эллипса. В зависимости от значений a, b, c эллипсоид может быть вытянут вдоль любой оси, причём вытянут достаточно далеко.

Если две полуоси совпадают, то данную поверхность / тело называют ***эллипсоидом вращения***. Так, например, эллипсоид … получен вращением эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ вокруг оси OX *(представьте мысленно)*.

Небольшая задачка для самостоятельного решения:

Задача 173

Построить эллипсоид $x^2 + y^2 + \frac{4z^2}{9} = 1$. Записать уравнение порождающего эллипса и ось, вокруг которой осуществляется его вращение.

В случае равенства всех полуосей $a = b = c = R$, эллипсоид *вырождается* в ***сферу***:

$\frac{x^2}{R^2}+\frac{y^2}{R^2}+\frac{z^2}{R^2}=1 \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2+z^2=R^2$ – данное уравнение задаёт *сферу* с центром в начале координат радиуса R.

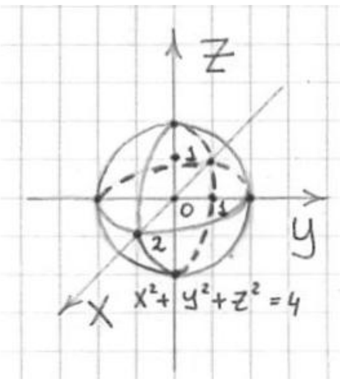
Тело, ограниченное сферой, называется ***шаром***. Неравенство $x^2+y^2+z^2 \le R^2$ определяет шар с центром в начале координат радиуса R. И, соответственно, противоположному условию $x^2+y^2+z^2 > R^2$ удовлетворяют координаты любой внешней точки.

Разделаемся с аппетитным Колобком:

Задача 174

Построить поверхность $x^2+y^2+z^2=4$. Найти функции, задающие верхнюю и нижнюю полусферу, указать их области определения. Записать аналитическое выражение шара, ограниченного данной сферой и проверить, принадлежат ли ему точки $D(1;-1;2),\ F(1;\sqrt{2};1)$.

Решение: уравнение $x^2+y^2+z^2=2^2$ задаёт сферу с центром в начале координат радиуса 2. Здесь, как и в примерах с параболическими цилиндрами, удобно уменьшить масштаб чертежа:



Выразим «зет»: $z^2=4-x^2-y^2$, после чего уравнение распадается на две функции:

$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ – задаёт верхнюю полусферу;

$z=-\sqrt{4-x^2-y^2}$ – задаёт нижнюю полусферу.

Область определения функции $z=f(x;y)$ – это её ортогональная проекция на плоскость XOY. Очевидно, что областью определения наших функций является *круг* $x^2+y^2 \le 4$ с центром в начале координат радиуса 2.

Неравенство … определяет шар с центром в начале координат радиуса 2. Подставим координаты точек $D(1;-1;2),\ F(1;\sqrt{2};1)$ в данное неравенство:

1) $D(1;-1;2)$ $1^2+(-1)^2+2^2 \le 4$ $6 \le 4$ – получено *неверное неравенство*, следовательно, точка «дэ» лежит вне шара.	2) $F(1;\sqrt{2};1)$ $1^2+(\sqrt{2})^2+1^2 \le 4$ $4 \le 4$ – получено *верное неравенство*, значит, точка «эф» принадлежит шару, а конкретнее – его границе (сфере).

Следующее задание для самостоятельного решения:

Задача 175

Найти область определения функции двух переменных $z=\sqrt{3-x^2-y^2}$ и построить соответствующую поверхность.

Кстати, наша планета, кто не знает, имеет форму эллипсоида. Чуть-чуть-чуть, но Земля – таки не шар.

6.3. Коническая поверхность. Метод сечений

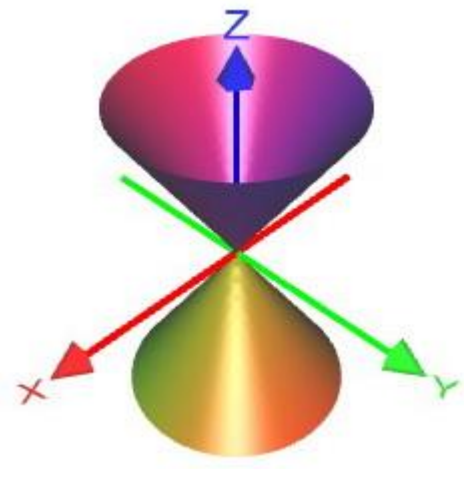
Каноническое уравнение … задаёт ***коническую поверхность*** или, если короче, ***конус***. Но это опять же не совсем тот конус, который всем знаком со времён далёкого детства.

Форму многих поверхностей удобно исследовать ***методом сечений***, который я потихоньку начал использовать в предыдущих параграфах. Суть метода состоит в том, что мы «рассекаем пациентов» плоскостями, и получившиеся сечения позволяют нам хорошо понять, как выглядит та или иная поверхность.

Перепишем уравнение в виде … и исследуем сечения конуса плоскостями $z = C = const$, параллельными плоскости XOY. Подставим $z = C$ в уравнение конической поверхности: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{C^2}{c^2}$.

Очевидно, что случаю $z = C = 0$ соответствует уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$, задающее пару мнимых пересекающихся прямых с единственной действительной точкой пересечения в начале координат. Данная точка называется ***вершиной конуса***.

Если же $z = C \neq 0$, то уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{C^2}{c^2} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2 \cdot \frac{C^2}{c^2}} + \frac{y^2}{b^2 \cdot \frac{C^2}{c^2}} = 1$ задаёт эллипсы различных размеров, причём из последнего уравнения хорошо видно, что с увеличением *абсолютного значения* C полуоси эллипсов неограниченно растут. Таким образом, коническая поверхность бесконечна:



Если коническую поверхность «разрезать» любой плоскостью $y = kx$, проходящей через ось OZ, то каждое такое сечение будет представлять собой две пересекающиеся прямые, лежащие в плоскости $y = kx$ и проходящие через начало координат.

Множество всех этих прямых, собственно, и образуют коническую поверхность. И логично, что каждая такая прямая называется ***образующей*** конуса.

На практике почти всегда приходится иметь дело с упрощенной версией конуса, когда сечения плоскостями $z = C$ представляют собой окружности. Такой конус называют ***конусом вращения***, и во многих практических задачах его легко определить по следующему уравнению:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \Rightarrow z^2 = \frac{c^2}{a^2}(x^2 + y^2)$ – с «зет» в левой части и **равными коэффициентами при** x^2 и y^2.

Как вы правильно догадались, функция $z = \frac{c}{a}\sqrt{x^2 + y^2}$ задаёт верхнюю часть конуса, а функция $z = -\frac{c}{a}\sqrt{x^2 + y^2}$ – его нижнюю часть.

Познавательная вариация по теме:

Задача 176

Построить поверхность $z = 2 \cdot \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{3}}$

Решение: уравнение имеет вид $z = \dfrac{c}{a}\sqrt{x^2 + y^2}$ и определяет половину конуса, располагающуюся в верхнем полупространстве. Вершина конической поверхности, понятно, расположена в начале координат, но как построить всё остальное?

Возведём обе части исходного уравнения в квадрат:

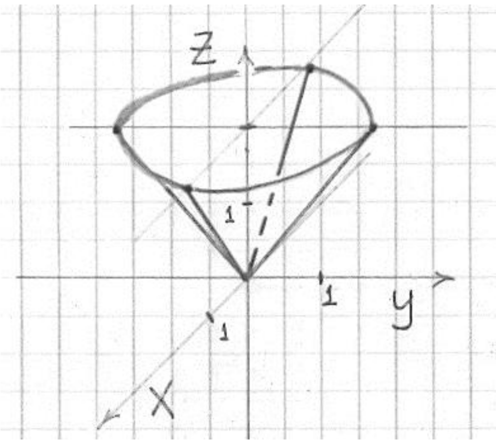
$$z^2 = 4 \cdot \frac{x^2 + y^2}{3}$$

$$\frac{3}{4}z^2 = x^2 + y^2$$

Далее выберем небольшое положительное значение «зет», например, $z = 2$ и найдём линию пересечения этой плоскости с нашей поверхностью:

$$\begin{cases} \dfrac{3}{4}z^2 = x^2 + y^2 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{3}{4} \cdot 2^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 3 \text{ – окружность радиуса } \sqrt{3}.$$

Теперь на высоте $z = 2$ изобразим окружность $x^2 + y^2 = 3$ и аккуратно проведём 4 образующие конуса:



Образующие, в принципе, можно было продолжить и выше плоскости $z = 2$.

Но не ниже плоскости $z = 0$**!** – Не забываем, что уравнение $z = 2 \cdot \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{3}}$ задаёт только верхнюю часть поверхности и поэтому никаких «хвостиков» в нижнем полупространстве быть не должно.

Пожалуй, простейшая коническая поверхность для самостоятельного изучения:

Задача 177

Построить коническую поверхность $z^2 = x^2 + y^2$. Записать неравенства, определяющие внутреннюю и внешнюю часть конуса.

В образце решения изображён фрагмент конуса, расположенный между плоскостями $z = -3, z = 3$. Ну, а с неравенствами, думаю, сообразите самостоятельно. В случае мучительных сомнений всегда можно взять точку (внутри или снаружи конуса) и проверить, удовлетворяют ли её координаты неравенству.

Переходим к следующему семейству:

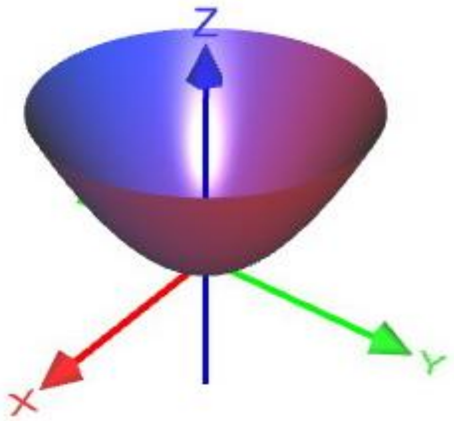
6.4. Параболоиды

Их два. Сначала рассмотрим мегапопулярный

➢ Эллиптический параболоид

Каноничный ***эллиптический параболоид*** задаётся уравнением *(система координат, напоминаю, везде декартова)* ….

Данная поверхность выглядит бесконечной чашей:



Название «эллиптический параболоид» тоже произошло из результатов исследования сечений. В горизонтальных сечениях плоскостями $z = C\ (C \ge 0)$ получаются различные эллипсы:

$$\begin{cases} \ldots \\ z = C\ (C \ge 0) \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2C,$$ в частности,

при $C = 0$ эллипс *вырождается* в точку (начало координат), которая называется ***вершиной*** эллиптического параболоида.

А вертикальные сечения плоскостями, параллельными оси OZ, представляют собой различные параболы. Например, сечение координатной плоскостью XOZ:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2z \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + 0 = 2z \Rightarrow z = \frac{x^2}{2a^2}$$ – парабола, лежащая в плоскости XOZ.

и сечение плоскостью YOZ:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2z \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow 0 + \frac{y^2}{b^2} = 2z \Rightarrow z = \frac{y^2}{2b^2}$$ – парабола, лежащая в плоскости YOZ.

Отсюда и эллиптический параболоид.

На практике обычно встречается упрощенная версия поверхности с горизонтальными сечениями-окружностями. Перепишем каноническое уравнение в прикладном функциональном виде: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 2z \Rightarrow z = \dfrac{1}{2a^2}(x^2 + y^2)$ – характерным признаком этой функции, как и в ситуации с конусом, является **равенство коэффициентов при** x^2, y^2.

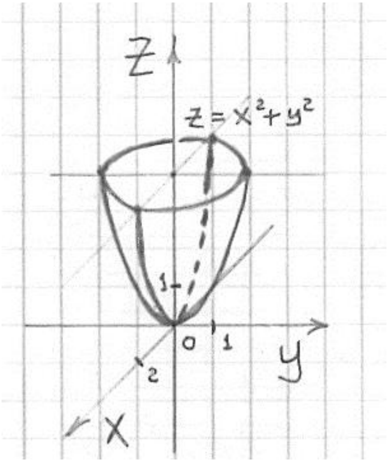
Задача 178

Построить поверхность $z = x^2 + y^2$. Записать неравенства, определяющие внутреннюю и внешнюю часть эллиптического параболоида.

Решение: используем ту же методику, что и при построении конической поверхности. Рассмотрим какое-нибудь не очень большое значение «зет», здесь удобно выбрать $z = 4$, и найдём сечение эллиптического параболоида этой плоскостью:

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 4 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$$ – окружность радиуса 2.

Теперь на высоте $z = 4$ изобразим данную окружность и аккуратно соединим её с *вершиной* (началом координат) двумя параболами. В результате получится такая вот симпатичная чашка:



Рассматриваемый частный случай параболоида с сечениями-окружностями называют ***параболоидом вращения***, поскольку его можно получить вращением параболы вокруг оси OZ

С неравенствами ничего нового. Нетрудно догадаться, что неравенство $z > x^2 + y^2$ или, если развернуть запись в более привычном порядке, $x^2 + y^2 < z$ определяет множество точек внутри чаши *(т.к. неравенство строгое, то сама поверхность не входит в решение)*. И, соответственно, неравенство $x^2 + y^2 > z$ задаёт множество внешних точек.

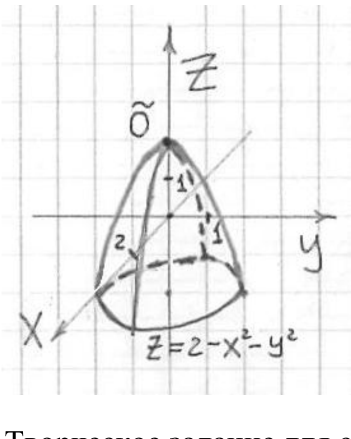
По моим наблюдениям, на практике часто встречается эллиптический параболоид вида …, который выглядит точно так же, но мигрировал вершиной в точку ….

Ещё одно типичное расположение эллиптического параболоида:

Задача 179

Построить поверхность $z = 2 - x^2 - y^2$

Решение: если коэффициенты при x^2, y^2 отрицательны (сразу оба), то чаша параболоида «смотрит вниз». Вершина поверхности расположена в точке $\tilde{O}(0;\,0;\,2)$. Это понятно не только интуитивно, но и подкрепляется простым аналитическим рассуждением: очевидно, что, рассмотрев любую другую пару значений $(x;\,y)$, мы уменьшим функцию $z = 2 - x^2 - y^2$. Таким образом, точка $\tilde{O}(0;\,0;\,2)$ – это самая высокая точка (максимум).



В целях построения поверхность удобно «отсечь» плоскостью $z = -2$. Сечение представляет собой:

$$\begin{cases} z = 2 - x^2 - y^2 \\ z = -2 \end{cases} \Rightarrow\ -2 = 2 - x^2 - y^2 \ \Rightarrow\ x^2 + y^2 = 4$$

– окружность радиуса 2.

Отмечаем точку $\tilde{O}(0;\,0;\,2)$, проводим окружность $x^2 + y^2 = 4$ на высоте $z = -2$ и аккуратно завершаем конструкцию 4 направляющими (ветвями параболы).

Творческое задание для самостоятельного решения:

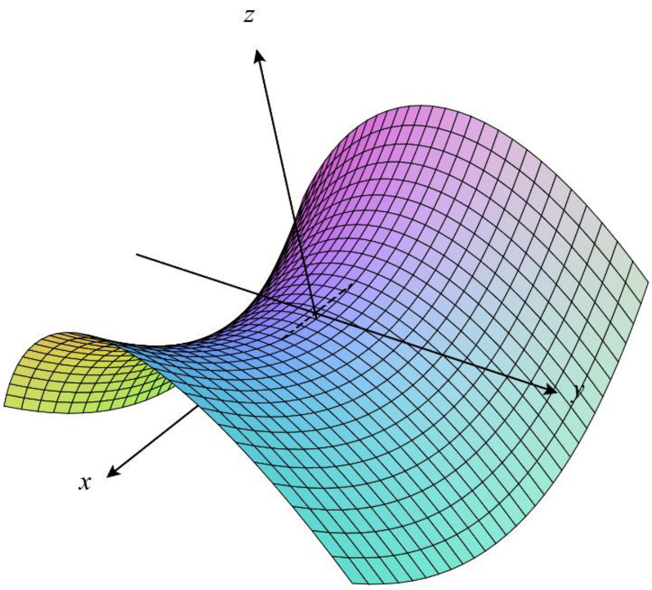
Задача 180

Построить эллиптический параболоид $z = (x-1)^2 + (y+1)^2 + 1$

Теперь менее распространённый «собрат»:

➢ Гиперболический параболоид

Его каноническое уравнение имеет вид …. Данную поверхность также называют ***седловой поверхностью***, а всадники – ***седлом***:



Если его рассекать плоскостями $z=C$, то в общем случае будут получаться гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2C$, а при $z=0$ мы получим две пересекающиеся прямые: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0 \Rightarrow y=-\frac{b}{a}x,\ y=\frac{b}{a}x$ *(на чертеже отсутствуют)*. Таким образом, гиперболический параболоид пересекает плоскость XOY по двум прямым.

Если его рассекать плоскостями $y=C$ (параллельными плоскости XOZ), то в сечениях будут получаться параболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{C^2}{b^2}=2z \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}=2z+\frac{C^2}{b^2}$, ветви которых направлены вверх, и множество таких парабол легко увидеть на чертеже.

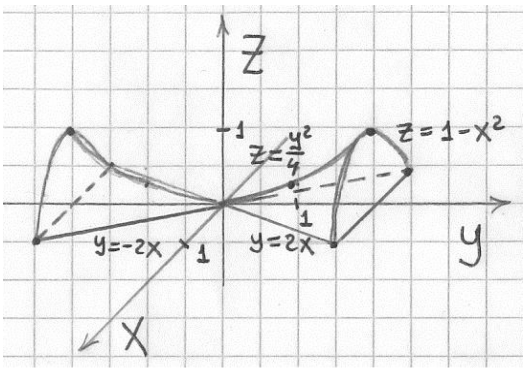
И, наконец, если параболоид рассекать плоскостями $x=C$ (параллельными плоскости YOZ), то в сечениях будут получаться параболы $\frac{C^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z \Rightarrow \frac{y^2}{b^2}=-2z+\frac{C^2}{a^2}$, ветви которых смотрят вниз, эти параболы тоже есть на чертеже.

Таким образом, происхождение гиперболического параболоида полностью расшифровано. Как и конус, как и «чаша», седло симметрично относительно плоскостей XOZ, YOZ и относительно оси OZ. Рассмотрю один демонстрационный пример:

Задача 181

Построить тело, ограниченное поверхностями $z=0,\ y=-2,\ y=2,\ z=y^2/4-x^2$.

Решение: найдём линии пересечения параболоида с плоскостью XOY: $\frac{y^2}{4}-x^2=0$ $\Rightarrow y=-2x, y=2x$. Слева и справа тело ограничено плоскостями $y=-2,\ y=2$, и ввиду его симметрии достаточно рассмотреть пересечение параболоида с плоскостью $y=2$:



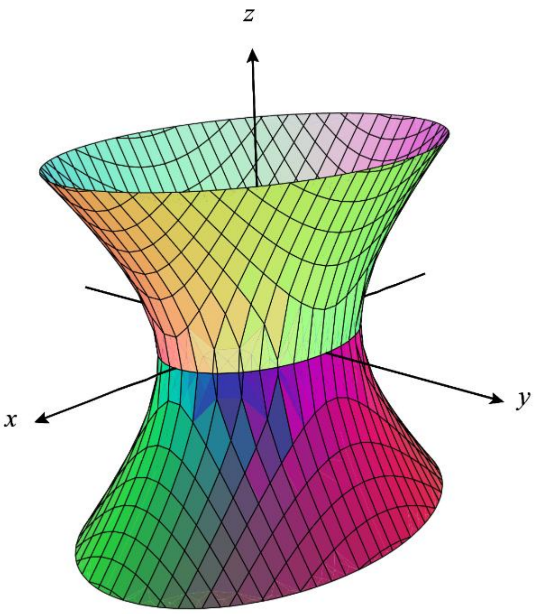
$\frac{2^2}{4}-x^2=z \Rightarrow z=1-x^2$ – изобразим эти параболы в плоскостях $y=-2,\ y=2$. Осталось «замкнуть» чертёж сверху, для этого найдем пересечение параболоида с фронтальной плоскостью $YOZ: z=\frac{y^2}{4}$ – изобразим эту параболу в плоскости $x=0$. Заметьте, что здесь под седлом скрылась ось OY, т.к. уравнение неканоническое.

6.5. Гиперболоиды

Их тоже два, и это тоже нечастые гости в массовой практике:

- **Однополостной гиперболоид**

имеет каноническое уравнение …, числа $a>0, b>0, c>0$ называют ***полуосями*** гиперболоида. Если его рассекать плоскостями $z=C$, то будут получаться эллипсы: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{C^2}{c^2}$, которые неограниченно увеличиваются, когда мы уходим по оси OZ вверх или вниз к бесконечности. Эллипс, лежащий в плоскости XOY: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ называется ***горловым эллипсом***, он самый маленький и хорошо просматривается на чертеже.



Если рассекать поверхность плоскостями, параллельными плоскостям XOZ, YOZ, то в сечениях будут получаться гиперболы:

$$x=0 \;\Rightarrow\; \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

$$y=0 \;\Rightarrow\; \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

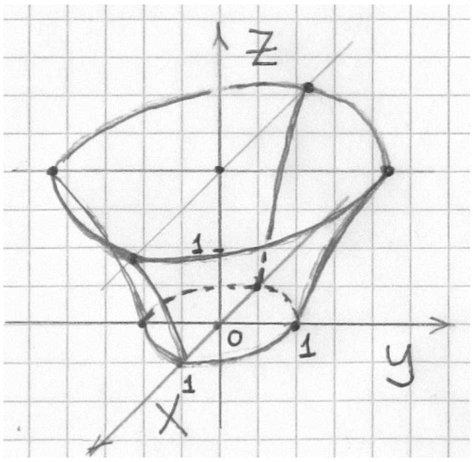
и эти гиперболы хорошо видны на поверхности. А посему и «гиперболоид».

Однополостной гиперболоид симметричен относительно всех координатных плоскостей, осей и начала координат.

Если $a=b$, то мы имеем дело с ***гиперболоидом вращения***: … – он получен вращением гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ вокруг оси OZ. Горизонтальные же сечения представляют собой окружности, в чём мы убедимся на конкретном примере:

Задача 182

Построить тело, ограниченное поверхностями $z=0,\ z=2,\ x^2+y^2-z^2=1$



Решение: найдём пересечение гиперболоида с плоскостью $z=0$: $x^2+y^2=1$ – *горловая* окружность радиуса 1. Найдём пересечение с плоскостью $z=2$:

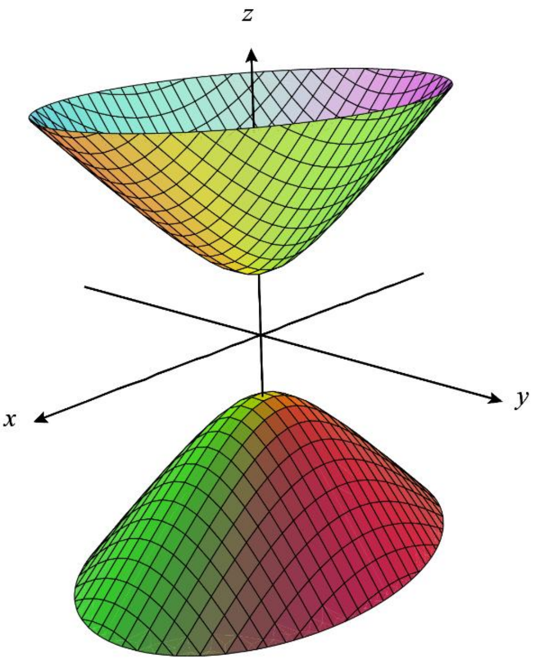
$x^2+y^2-2^2=1 \Rightarrow x^2+y^2=5$ – окружность с центром в точке $(0;0;2)$ радиуса $\sqrt{5}\approx 2{,}24$.

Изобразим на чертеже обе окружность и соединим их *направляющими* – 4 ветвями гиперболы.

Такой вот получился симпатичный горшок. …А вверху у меня чертёж, к слову, ассоциируется с унитазом ☺

➢ **Двуполостной гиперболоид**

имеет похожее каноническое уравнение …. Поверхность представляет собой 2 бесконечные чаши с вершинами $C_1(0;0;-c), C_2(0;0;c)$:



Для двуполостного гиперболоида справедливы почти все утверждения, что и для однополостного. Горизонтальные сечения плоскостями представляют собой эллипсы, а вертикальные – гиперболы. Но, естественно, тут нет горлового эллипса. Однако в плане симметрии всё так же.

Вообще, оба типа поверхностей можно назвать *эллиптическими гиперболоидами*, но это название не учитывает различие между ними. И поэтому их различают по количеству полостей – у предыдущего одна полость, а у этого – две.

И да, частный случай: …– есть *гиперболоид вращения*.

Следующее задание для самостоятельного решения:

Задача 183

Построить тело, ограниченное поверхностями $2x^2+4y^2-z^2=-1,\ z=3$

С поверхностями всё! Теперь пару ласковых о координатах.

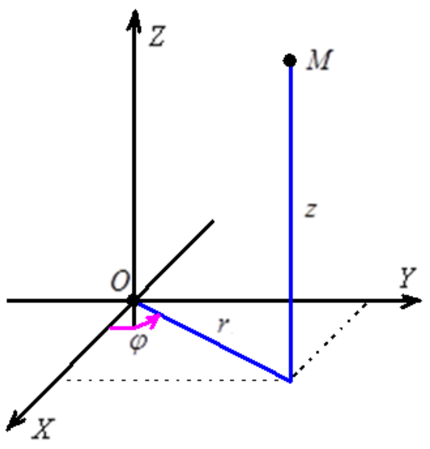
Как вы заметили, во всех случаях у нас фигурировала прямоугольная система координат, но в некоторых задачах бывают выгодны другие системы:

6.6. Цилиндрическая и сферическая система координат

Начнём с гораздо более распространённой:

➢ **Цилиндрическая система координат**

По технической сути эта система представляет собой «плоскую» полярную систему координат + дополнительную координату «зет».



В ***цилиндрической системе координат*** любая точка пространства однозначно определяется упорядоченной тройкой: полярным радиусом r, полярным углом φ и аппликатой z: $M(r;\varphi;z)$.

Формулы перехода от декартовой системы к цилиндрической такие же: …, а переменная z не меняется.

С какими поверхностями удобно иметь дело в цилиндрических координатах? Ну, конечно же, в первую очередь с круглыми цилиндрами.

Так, представим в цилиндрической системе уравнение $x^2+y^2=2$ *(z – любое)*:

$(r\cos\varphi)^2+(r\sin\varphi)^2=2 \Rightarrow r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi=2$, надеюсь, все помнят *основное тригонометрическое тождество*: $r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=2 \Rightarrow r^2=2 \Rightarrow r=\sqrt{2}$.

В чём смысл полученного уравнения? Радиус «эр» ВСЕГДА *(при любых «фи» и «зет»)* равно $\sqrt{2}$. А это в точности круглый цилиндр с осью симметрии OZ .

Удачна история и с конусом вращения:

$z^2=x^2+y^2 \Rightarrow z^2=r^2 \Rightarrow z=r$ и $z=-r$,

и с параболоидом вращения:

$z=x^2+y^2 \Rightarrow z=r^2$,

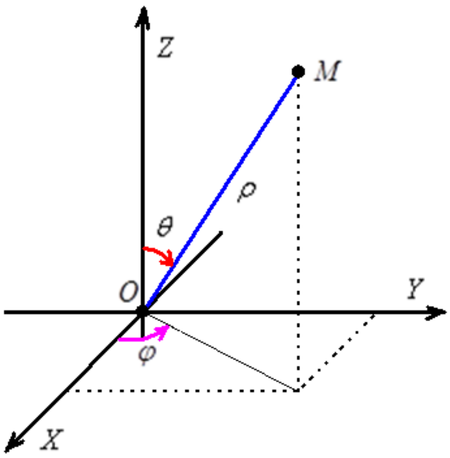
и даже со сферой:

$x^2+y^2+z^2=R^2 \Rightarrow \ldots$.

Но для сферы, шара и их частей есть более удобная

➢ Сферическая система координат

В этой системе координат любая точка M пространства однозначно определяется упорядоченной тройкой: расстоянием $\rho=|OM|$ *(«ро»)* от начала координат (***сферическим радиусом***), ***зенитным углом*** θ *(«тета»)* и ***азимутальным углом*** φ : $M(\rho;\theta;\varphi)$.



Зенитный угол отсчитывается **от** полуоси OZ_+ и изменяется в пределах $0\le\theta\le\pi$. Крайнему значению $\theta=\pi$ соответствуют точки, лежащие на нижней полуоси OZ_-

Азимутальный угол отсчитывается в плоскости XOY против часовой стрелки. Он изменяется в пределах $0\le\varphi<2\pi$, иными словами, «ведёт» себя так же, как полярный угол.

Чтобы найти уравнение поверхности в сферической системе координат, нужно использовать следующие формулы:

…

Задача 184

Найти уравнение сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$ в сферической системе координат и пояснить его смысл.

Это задание для самостоятельного решения.

Где используется сферическая система координат? Ну, конечно же, в астрономии.

И сейчас для вас зажглись новые звёздные пути!

Желаю успехов и до скорых встреч!

…даже местечко ещё осталось ☺

7. Решения и ответы

Задача 2. Решение:

а)

б)

в)

г)

Задача 4. Решение:

По соответствующей формуле: и

Ответ:

Задача 6.

а) Решение: найдём вектор :

Вычислим длину вектора:

Ответ:

б) Решение: вычислим длины векторов:

Задача 9. Решение:

Сначала выполняется действие в скобках:

Примечание: перед выполнением действий можно предварительно раскрыть скобки:

Ответ:

Задача 12.

а) Решение: из условия следует, что точка делит отрезок в отношении , считая от точки , то есть, справедлива пропорция: . По формулам деления отрезка в данном отношении:

Подставим координаты точек и выразим координаты точки :

Ответ:

Проверка: рассмотрим концы отрезка и найдём координаты точ-ки , которая делит отрезок в отношении :

Таким образом, , что и требовалось проверить.

б) Решение: по условию, , . По формулам деле-ния отрезка в данном отношении:

Ответ:

Задача 14. Решение: выясним, какая сторона является основанием. Для этого найдём длины сторон треугольника:

, следовательно, это боковые стороны, а – основание. Найдём середину отрезка , по формулам координат середины отрезка:

Ответ:

Задача 14. Решение:

Ответ:

Задача 18. Решение:

Ответ:

Задача 20. Решение:

Ответ:

Задача 22. Решение: Используем формулу .

Найдём скалярное произведение:

Найдём длину вектора :

Найдём длину вектора :

Таким образом:

Ответ:

Задача 25. Решение:

а) Найдем векторы:

Вычислим скалярное произведение:

, значит, векторы не перпендикулярны, а значит, не перпендикулярны и прямые .

б) Найдем векторы:

Вычислим скалярное произведение:

, следовательно, прямые пер-пендикулярны.

Ответ: а) прямые не перпендикулярны, б)

Задача 27. Решение: Составим и решим уравнение:

Ответ: при

Задача 29. Решение:

Используем ассоциативность скалярного произведения относительно множителя:

Ответ:

Задача 32. Решение: Найдем векторы

Вычислим косинус угла:

Ответ:

Задача 33. Решение:

а) угол между векторами острый, когда скалярное произведение положительно:

, умножим обе части неравенства на , т.к. множитель отрицате-лен, то у неравенства следует сменить знак:

б) , в данном случае угол прямой при:

в) и, очевидно, при угол будет тупым.

Ответ: при а) , б) , в) .

Задача 35. Решение: Найдём векторы:

а)

б)

Ответ:

Задача 36. Решение:

а) Найдём длину вектора: .

Направляющие косинусы: .

Проверка: , ч.т.п.

б) Найдём длину вектора: .

Направляющие косинусы: .

Проверка: , ч.т.п.

Ответ:

Задача 38. Решение: составим пропорцию из соответствующих координат векторов:

Ответ: при

Задача 40. Доказательство: трапецией называется четырёхугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие стороны не параллельны.

1) Проверим параллельность противоположных сторон и .

Найдём векторы:

Вычислим определитель, составленный из координат векторов :

, значит, данные векторы не коллинеарны и стороны не параллельны.

2) Проверим параллельность противоположных сторон и .

Найдём векторы:

Вычислим определитель, составленный из координат векторов :

, значит, данные векторы коллинеарны и .

Вывод: две стороны четырёхугольника параллельны, а две другие стороны не параллельны, значит, это трапеция по определению. Что и требовалось доказать.

Задача 41. Решение:

б) Проверим, существует ли коэффициент пропорциональности для соответствующих координат векторов:

Система не имеет решения, значит, векторы не коллинеарны.

Более простое оформление: – вторая и третья координаты не пропорциональны, значит, векторы не коллинеарны.

Ответ: векторы не коллинеарны.

в) Составим систему из координат векторов :

Соответствующие координаты векторов пропорциональны, значит

Примечание: вот здесь как раз не проходит «пижонский» метод оформления.

Ответ:

Задача 42. Решение:

б) Вычислим определитель, составленный из координат векторов (опре-делитель раскрыт по первой строке):

, значит, векторы линейно зависимы и не образуют базиса трёхмерного пространства.

Ответ: данные векторы не образуют базиса

Задача 45. Решение: Вычислим определитель, составленный из координат векторов :

Таким образом, векторы линейно независимы и образуют базис.
Представим вектор в виде линейной комбинации базисных векторов:

Покоординатно:

Систему решим по формулам Крамера:
, значит, система имеет единственное решение.

Ответ: Векторы образуют базис,
Задача 47. Решение: По соответствующей формуле:

Ответ:
Задача 50. Решение:
1) Выразим вектор через вектор :

2) Вычислим длину векторного произведения:

Ответ:

Задача 52. Решение:
1) Найдём векторное произведение:

2) Вычислим длину векторного произведения:

Ответ:
Задача 54. Решение: Найдём вектор:
.
Векторное произведение:

Площадь параллелограмма:

Ответ:
Задача 58. Решение: Найдём векторы:

Вычислим смешанное произведение (определитель раскрыт по первой строке):

Вычислим объём пирамиды :

Ответ:

Задача 60. Решение: найдём угловой коэффициент: .

Уравнение прямой составим по точке и угловому коэффициенту :

Ответ:

Задача 62. Решение: уравнение прямой составим по формуле:

Ответ:

Задача 64. Решение: Используем формулу:

Ответ: (ось ординат)

Задача 66. Решение: Составим уравнение прямой по двум точкам:

– *умножим обе части на –4:*

– *и разделим на 5:*

Ответ:

Задача 68. Решение: Используем формулу:

Сокращаем на –2:

Направляющий вектор прямой:

Ответ:

Задача 70.

а) Решение: Преобразуем уравнение:

Таким образом:

Ответ:

Примечание: для проверки подставьте координаты полученных точек в исходное уравнение, это легко сделать устно.

б) Решение: Преобразуем уравнение:

Таким образом:

Ответ:

Не забываем о проверке!

Задача 73. Решение: составим общее уравнение прямой по точке и век-тору нормали :

Умножаем все члены на 12:

Умножаем ещё на 2, чтобы после раскрытия второй скобки избавиться от дроби:

Направляющий вектор прямой: , контроль:

, что и требовалось проверить.

Параметрические уравнения прямой составим по точке и направляюще-му вектору : .

Ответ:

Задача 76. Решение: найдём направляющий вектор прямой :

Уравнение искомой прямой составим по точке и направляющему вектору . Так как одна из координат направляющего вектора равна нулю, уравнение перепишем в виде:

Ответ:

Задача 78. Решение:

1) Уравнение прямой составим по двум точкам :

2) Уравнение прямой составим по двум точкам :

3) Соответствующие коэффициенты при переменных и не пропорциональны: , значит, прямые пересекаются.

4) Найдём точку :

(1-е уравнение умножено на 5, затем из 1-го уравнения почленно вычтено 2-е)

Ответ:

Задача 80. Решение:

1) Найдём нормальный вектор прямой: .

2) Составим уравнение прямой по точке и направляющему вектору :

3) Найдём точку пересечения прямых :

(2-е уравнение умножено на 4, затем уравнения сложены почленно)

Ответ:

Задача 82. Решение: Расстояние между параллельными прямыми найдём как расстояние от точки до прямой. Для этого достаточно найти одну точку, принадлежащую любой прямой. Из уравнения легко усмотреть точку . Вычислим расстояние:

Примечание: последним действием домножили числитель и знаменатель на – чтобы избавиться от иррациональности в знаменателе.

Ответ:

Задача 84. Решение:

Способ первый

1) , значит, прямые не перпендикулярны.

2) Угол между прямыми найдём с помощью формулы:

Таким образом:

Ответ:

Способ второй применить нельзя, так как прямая параллельна оси ор-динат и её угловой коэффициент не определён.

Способ третий: запишем направляющие векторы прямых и вы-числим .

Таким образом:

Задача 87. Ответ:

Задача 89. Решение:

а) Построим прямую . Выберем произвольную точку плоскости, не принадлежащую прямой, например, и подставим её координаты в неравенство:

Получено неверное неравенство, значит, неравенство задаёт полуплос-кость, которой точка не принадлежит. Так как неравенство строгое, то пря-мая не входит в решение (синий цвет):

б) Построим прямую . Выберем произвольную точку плоскости, не принадлежащую данной прямой, например, и подставим её координаты в неравенство:

Получено верное неравенство, значит, неравенство задаёт полуплос-кость, в которой находится точка . Так как неравенство нестрогое, то прямая входит в решение (красный цвет).

Ответ: на чертеже слева.

Задача 91. Решение: составим многочлен и вычислим его зна-чение в точке :

, следовательно, искомые точки должны удовлетворять неравенству (а значит, и условию).

Вычислим значения многочлена во всех точках:

Условию удовлетворяют точки .

Ответ: в одной полуплоскости с лежат точки .

Задача 93. Решение: найдём опорные точки прямых:

построим прямые и определим соответствующие неравенствам полуплоскости:

Область решений представляет собой многоугольник . Найдём координаты вершин полученной области. Точки очевидны, другие вершины уточним аналитически:

– из 2-го уравнения почленно вычтем первое:

– подставим в 1-е: – 2-е уравнение умножили на 3, складываем их почленно:

– подставим во 2-е уравнение: .

Ответ: область решений системы представляет собой многоугольник с вершинами в точках .

Задача 97. Решение: так как фокусы канонически расположенного эллипса имеют координаты , то расстояние от каждого из фокусов до начала ко-ординат равно: .

По условию известная малая полуось , из соотношения находим:

Запишем каноническое уравнение эллипса:

Вершины эллипса: .

Выразим функцию , найдём дополнительные точки в 1-й координатной четверти:

отметим симметричные точки в других четвертях и выполним чертёж.

Вычислим эксцентриситет:

Задача 98. Решение: выделим полный квадрат и выполним чертёж:

– окружность радиуса с центром в точке .

Задача 100. Решение: данная гипербола является равносторонней, поэтому имеет асимптоты . Действительная полуось , значит, вершины расположены в точках . Выразим и найдём опорные точки: , .

Определим координаты фокусов:

и выполним чертёж. Может сложиться впечатление, что перед нами «школьная» гипербола, но это не она.

Задача 102. Решение: преобразуем уравнение: . Очевидно, что вер-шина параболы находится в точке , ветви направлены влево. С помощью уравне-ний найдём дополнительные точки:

и выполним чертёж:

Парабола получена путём поворота параболы на 180 градусов и её параллельного переноса в точку . Из канонического уравнения находим фокальный параметр , фокус и уравнение директрисы

Примечание: в случае необходимости нетрудно найти координаты фокуса и уравнение директрисы неканонически расположенной параболы . Учитывая поворот и параллельный перенос: .

Задача 104. Решение: пусть точка принадлежит искомому множеству точек. Тогда: .

По условию:

или:

Упростим уравнение:

Выделим полные квадраты:

– уравнение окружности с центром в точке ра-диуса

Выполним чертеж.

Ответ: уравнение искомого множества точек задаёт окружность с центром в точке радиуса .

Задача 106. Решение: пусть точка принадлежит искомому множеству точек. Тогда: .

По условию , таким образом:

– парабола, ветви которой направлены вверх, с вершиной и фокальным параметром .

Примечание: условие задачи формулирует определение данной параболы, т.е. точка является её фокусом, а ось абсцисс – директрисой.

Приведём уравнение кривой к каноническому виду:

1) Осуществим параллельный перенос параболы вершиной в начало координат: и повернём её на 90 градусов по часовой стрелке: .

Либо так: повернём параболу по часовой стрелке на относи-тельно точки : и перенесём её в начало координат: .

2) Повернём прямоугольную систему координат на радиан против часо-вой стрелки и перенесём её началом координат в точку . Тогда в новой системе координат уравнение данной параболы примет канонический вид :

Ответ: – парабола. Каноническое уравнение: (либо в системе – зависимости от способа приведения).

Задача 108. Решение: пусть точка принадлежит искомому множеству точек. Тогда:

По условию :

Приведём уравнение к каноническому виду:

– эллипс с центром в начале координат и полуосями, равными 1 и 2.

Примечание: здесь нежелательна формулировка «с полуосями », по-скольку буквой «а» стандартно обозначают большую полуось, а «единица» таковой не является по причине неканонического положения эллипса.

Выполним чертеж и приведём уравнение к каноническому виду:

1) Способ первый. Повернём эллипс вокруг центра на 90 градусов: (представьте эллипс мысленно).

Вычислим и запишем фокусы: .

Найдём эксцентриситет: .

Директрисы эллипса задаются уравнениями ,

в данном случае:

Ответ: искомое множество точек представляет собой эллипс . Канонический вид уравнения: . Фокусы: , эксцентриситет: , директрисы: .

2) Способ второй. Перейдём к системе координат , которая получена пово-ротом системы на угол радиан против часовой стрелки. Тогда в новой системе уравнение примет вид .

! Все дальнейшие действия проводятся в новой системе координат – с переменными !

Вычислим и запишем фокусы эллипса:

.

Эксцентриситет: .

Директрисы задаются уравнениями , в данном случае

Ответ: искомое множество точек представляет собой эллипс . Кано-нический вид уравнения: в системе , полученной поворотом систе-мы на угол радиан против часовой стрелки. Фокусы: , экс-центриситет: , директрисы: .

Задача 110. Решение: Пусть точка принадлежит искомому множеству точек. Тогда:

По условию:

в

Упростим уравнение:

– каноническое уравнение гиперболы с действительной полуосью , мнимой полуосью .

Выполним чертёж:

Ответ:

Примечание: точка является вторым фокусом гиперболы, прямая – второй директрисой, а их отношение – эксцентриситетом.

Задача 112. Решение: приведём уравнение данной линии к каноническому виду в новой системе координат .

Из уравнения находим коэффициенты:

Вычислим инварианты:

Составим и решим систему:

Из 1-го уравнения выражаем – подставляем во второе уравнение:

Таким образом, получаются две пары корней:

Примечание: решение несложно найти и подбором.

Подставим в третье уравнение системы:

Подставляем (сначала мысленно либо на черновике!) первый комплект корней в уравнение :

– в результате получена неканоническая запись гиперболы, т.е. пер-вый набор корней нас не устраивает.

Подставляем второй комплект корней :

– гипербола с центром в точке , действительной полуосью , мнимой полуосью .

Примечание: опытный читатель сразу выберет 2-й комплект корней – из тех со-ображений, что у итогового уравнения гиперболы коэффициент при должен оказать-ся положительным.

Найдём угол поворота новой системы координат относительно старой. Так как , то формула не даёт однозначного ответа об угле пово-рота. Поэтому используем вторую формулу: .

Координаты начала новой системы координат найдём как решение системы – первое уравнение умножим на 5, вто-рое – на 3 и из первого уравнения почленно вычтем второе:

– подставим в 1-е уравнение исходной системы:

Таким образом: .

Выполним чертёж.

Ответ: – гипербола с полуосями в системе координат с началом в точке (координаты старой системы), которая повёрнута относительно исходной системы на угол .

Дополнительная информация: гиперболический случай выражается аналитическим условием (и имеют разные знаки). Если инвариант , то коэф-фициент , и ги-

пербола вырождается в две пересекающиеся прямые. В нашем при-мере гипотетически получилось бы уравнение: – двух пересекающихся прямых , которые, кстати, представляют собой асимптоты рассмотренной ги-перболы (изображены синим цветом на чертеже).

Задача 114. Решение: сначала выяснить тип линии. Для этого вычислим определитель, составленный из коэффициентов :

, значит, уравнение задаёт нецентральную линию.

Осуществим поворот прямоугольной системы координат и переход к новой системе координат так, чтобы получить уравнение вида , где .

Найдём угол поворота:

Если , то:

Подставим в формулы поворота:

Подставляем в

и для первых трёх слагаемых используем формулу :

– сокращаем на пять: и выделяем полный квадрат:

Осуществим параллельный перенос системы началом в точку . Для этого проведём замену и запишем уравнение линии в новой системе координат :

– пара прямых, параллельных оси .

Выполним чертёж.

Ответ: данная линия представляет собой пару параллельных прямых – в прямоугольной системе , которая получена путём поворота системы вокруг своего начала на угол (красный цвет) и дальнейшим параллельным переносом в точку (зелёный цвет).

Задача 117. Решение: найдём область определения:

Вычислим полярные координаты точек, принадлежащих данной линии:

Выполним чертёж:

Найдём уравнение линии в декартовой системе координат. Для удобства домножим обе части уравнения на «эр»: и проведём замены :

Выделим полный квадрат:

– окружность с центром в точке (координаты декар-товы!) радиуса .

Дополнительная информация: уравнение вида задаёт окруж-ность диаметра с центром в точке .

Задача 119. Решение: а) Найдём область определения: косинус неотрицателен, когда его аргумент находится в пределах от до радиан включительно. В данном случае: , или: . Таким образом:

– отрезок принадлежит области определения;

– интервал – не принадлежит;

– отрезок – принадлежит;

– интервал – не принадлежит.

Область определения:

.

Роза имеет два лепестка, вершины которых находятся на полярной оси и её продолжении, длина лепестка равна .

б) Область определения: . Роза имеет три ле-пестка единичной длины с вершинами, имеющими следующие угловые координаты:

Выполним чертёж.

Уравнение вида , , – натуральное число, задаёт полярную -лепестковую розу, длина лепестка которой равна . Если рассматривается обобщенная полярная система координат, то при чётном значения количество ле-пестков удваивается.

Задача 121. Решение: 1) Найдём область определения функции:

– любое.

Заполним таблицу требуемыми значениями угла и соответствующими значениями полярного радиуса:

Выполним чертёж и 2) Найдём уравнение линии в декартовой системе координат:

Используем формулы :

– уравнение линии в прямоугольной системе координат.

3) Данная кривая представляет собой эллипс с центром симметрии в точке , большой полуосью и малой полуосью .

Задача 123. Решение: 1) Найдём область определения функции:

и заполним расчётную таблицу:

Выполним чертёж и 2) Найдём уравнение линии в декартовой системе координат:

Используем формулы

– искомое уравнение в системе . Это парабола.

3) Приведём уравнение линии к каноническому виду. Для этого перейдём к новой системе координат , которая получена путём поворота исходной системы на радиан вокруг точки и её параллельным переносом центром в точку (ко-ординаты – в старой системе координат).

В результате получено каноническое уравнение параболы , фокальный параметр которой равен . Выполним чертёж.

Найдём фокус: .

Эксцентриситет любой параболы равен 1.

Задача 124. Решение: выполним чертёж:

Данное тело определяется системой

Задача 126. Решение: а) Сначала удобно построить прямую , лежа-щую в плоскости . Используем начало координат, и, например, точку .

б) Сначала удобно построить прямую , лежащую в плоскости . Используем начало координат, и, например, точку .

Задача 129. Решение: запишем уравнение плоскости в отрезках и выполним чертёж:

Задача 131. Решение: составим уравнение плоскости по точке и двум неколлинеарным векторам:

Ответ:

Задача 133. Решение: используем соответствующую формулу, при этом в качестве «нулевой» точки выгодно выбрать начало координат:

Ответ:

Задача 136. Решение: Так как плоскость перпендикулярна оси , то вектор является вектором нормали для данной плоскости. Уравнение плоскости соста-вим по точке и вектору нормали :

Ответ:

Задача 140. Решение: Разделим все коэффициенты второго уравнения на два:

Используем формулу:

Ответ:

Задача 141. Решение: Обозначим . Используем формулу:

, за угол между плоскостями примем острый угол (на всякий пожарный):

Ответ:

Задача 146. Ответы:

Задача 148. Решение: Найдём направляющий вектор прямой:

Уравнения прямой составим по точке и направляющему вектору :

Ответ: («игрек» – любое)

Задача 150. Решения и ответы:

в) Найдём направляющий вектор прямой: . Па-раметрические уравнения прямой составим по точке (можно выбрать точку «бэ») и направляющему вектору :

Задача 152. Решение: Найдём какую-нибудь точку, принадлежащую данной прямой. Пусть , тогда: . Точка . Найдём направ-ляющий вектор прямой, используем формулу:

Составим канонические уравнения прямой по точке и направляющему вектору :

Ответ:

Задача 154. Решение оформим по пунктам:

1) Находим направляющие векторы и точки, принадлежащие данным прямым. Для нахождения точек удобно использовать нулевые значения параметров :

2) Найдём вектор:

3) Вычислим смешанное произведение векторов:

, таким образом, прямые могут пересекаться, быть параллельными или совпадать.

4) Исследуем направляющие векторы на коллинеарность:

, следовательно, направляющие векторы не коллинеарны, и прямые пересекаются.

Ответ:

Задача 158. Решение: 1) Выполним схематический чертёж:

2) Найдём вектор

3) Составим параметрические уравнения прямой по точке и направл. вектору :

4) Точка , поэтому её координаты удовлетворяют параметри-ческим уравнениям данной прямой при некотором значении :

5) Составим вектор .

6) Найдём значение . Так как – высота треугольника, то и:

7) Подставим в выражения координат точки :

Точка совпала с точкой , значит, высота совпадает со стороной , и треугольник является прямоугольным.

8) Найдём вектор .

9) Составим уравнения высоты (катета) по точке и направ-ляющему вектору :

10) Найдём длину высоты как длину вектора :

Ответ:

Задача 159. Решение:

а) Из уравнений прямой найдём её направляющий вектор: . Уравнения прямой составим по точке и направляющему век-тору :

б) Да, две параллельные прямые однозначно определяют плоскость, в которой они лежат.

Точка принадлежит первой прямой.

Найдём вектор:

Уравнение искомой плоскости составим по точке и двум неколлинеар-ным век-торам :

в) Расстояние между параллельными прямыми найдём как расстояние от точки до прямой: .

Таким образом:

Ответ:

а) ,

б) да, ,

в)

Задача 161. Решение: Найдем направляющий вектор и точку, принадлежащую прямой:

Найдём вектор нормали плоскости:

.

Вычислим скалярное произведение:

, значит, прямая параллельна плоскости или лежит в ней.

Подставим координаты точки в уравнение плоскости :

Получено неверное равенство, значит, точка не лежит в плоскости , и все точки прямой не лежат в данной плоскости.

Ответ:

Задача 163. Решение: выполним схематический чертёж:

а) Найдём вектор нормали плоскости: . Уравнения перпендикулярной прямой составим по точке и вектору нормали :

б) Запишем уравнения прямой в параметрической форме:

Основание перпендикуляра принадлежит данной прямой, и координатам дан-ной точки соответствует определённое значение параметра: . Но точка также принадлежит и плоскости. Подставим параметрические координа-ты в уравнение плоскости:

– подставим найденное значение параметра в параметрические координаты точки:

Примечание: точка является проекцией прямой на плоскость «сигма».

в) Координаты симметричной точки найдем по формулам координат середины отрезка:

Таким образом:

Ответ:

а) , б) , в) .

Задача 165. Ответы:

Задача 170. Решение: функция задаёт верхнюю часть цилиндра :

Проекция на плоскость : часть данной плоскости, ограниченная «плоскими» прямыми (включая прямые).

Проекция на плоскость : часть данной плоскости, ограниченная прямыми (– любое), включая сами прямые.

Проекция на плоскость : полуокружность

Задача 172. Чертежи:

Задача 173. Решение: данный эллипсоид получен вращением эллипса (плоскость) вокруг оси :

Примечание: также можно считать, что вращается эллипс , лежащий в плоскости .

Задача 175. Решение: областью определения данной функции является круг с центром в начале координат радиуса . Функция задаёт полусферу, лежащую в верхнем полупространстве, с центром в начале координат радиу-са :

Задача 177. Решение: сечения конуса плоскостями представляют со-бой окружности . Выполним чертёж:

Неравенство задаёт множество точек, находящихся внутри конуса; неравенство задаёт множество внешних точек.

Задача 180. Решение: вершина данного параболоида находится в точке :

Задача 183. Решение: искомое тело ограничено верхней чашей двуполостного гиперболоида снизу и плоскостью сверху.

Найдём линию пересечения гиперболоида с этой плоскостью:

– эллипс с полуосями .

Отметим на чертеже вершину гиперболоида , построим в плоскости эллипс и изобразим четыре направляющих гиперболоида.

Задача 184.

Решение: используем формулы :

– при ЛЮБЫХ значениях и рас-стояние от начала координат до любой точки поверхности постоянно и равно .

Это аналитическое условие в точности определяет сферу с центром в начале координат, радиуса .