1) Найти сумму ряда или установить его расходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(9n-8)(9n+1)}$$

Решение: Методом неопределенных коэффициентов разложим общий член ряда в сумму дробей:

$$\frac{A}{9n-8}+\frac{B}{9n+1}=\frac{1}{(9n-8)(9n+1)}$$

$$A(9n+1)+B(9n-8)=1$$

$$\begin{cases}9A+9B=0\\ A-8B=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A+B=0\\ A-8B=1\end{cases}\Rightarrow 9B=-1\Rightarrow B=-\frac{1}{9};\ A=\frac{1}{9}$$

Таким образом:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(9n-8)(9n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\frac{1}{9}}{9n-8}-\frac{\frac{1}{9}}{9n+1}\right)=\frac{1}{9}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{9n-8}-\frac{1}{9n+1}\right)$$

Запишем частичную сумму ряда:

$$9S_n=1-\frac{1}{10}+\frac{1}{10}-\frac{1}{19}+\frac{1}{19}-\frac{1}{28}+\frac{1}{28}-\frac{1}{37}+\ldots+\frac{1}{9n-17}-\frac{1}{9n-8}+\frac{1}{9n-8}-\frac{1}{9n+1}=$$

$$=1-\frac{1}{9n+1}$$

$$S_n=\frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{9n+1}\right)$$

Вычислим сумму ряда:

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{9}\lim_{n\to\infty}\left(1-\overbrace{\frac{1}{9n+1}}^{\to 0}\right)=\frac{1}{9}$$

Ответ: Ряд сходится, сумма ряда: $S=\frac{1}{9}$

Исследовать ряды на сходимость

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+2n+1}{9n^2+2n+1}$

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n^2+2n+1}{9n^2+2n+1}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{2n^2+2n+1}{n^2}}{\frac{9n^2+2n+1}{n^2}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2+\overbrace{\frac{2}{n}}^{\to 0}+\overbrace{\frac{1}{n^2}}^{\to 0}}{9+\underbrace{\frac{2}{n}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0}}=\frac{2}{9}\neq 0$$

Исследуемый ряд **расходится,** так как не выполнен необходимый признак сходимости ряда.

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n+5)^2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n+5)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{16n^2+40n+25}$$

Сравним данный ряд со сходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$:

$16n^2+40n+25>n^2 \Rightarrow \frac{1}{16n^2+40n+25}<\frac{1}{n^2}$, таким образом, по признаку сравнения исследуемый ряд **сходится** вместе с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

Сравним данный ряд с расходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$. Используем предельный признак сравнения:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{2n+1}}}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{2n+1}{n}}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt{2+\frac{1}{n}^{\to 0}}=\sqrt{2}$$

Получено конечное число, отличное от нуля, значит, исследуемый ряд **расходится** вместе с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$.

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n}{(\sqrt{5})^n}$

Используем признак Даламбера:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{4(n+1)}{\sqrt{5^{n+1}}}}{\frac{4n}{\sqrt{5^n}}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{5^n}\cdot 4(n+1)}{\sqrt{5\cdot 5^n}\cdot 4n}=\frac{1}{\sqrt{5}}\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}^{\to 0}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}<1$$

Таким образом, исследуемый ряд **сходится.**

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{4n-3}}{\sqrt{n}}$

Используем признак Даламбера:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{3^{4(n+1)-3}}{\sqrt{n+1}}}{\frac{3^{4n-3}}{\sqrt{n}}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3^{4n-3+4}\cdot\sqrt{n}}{3^{4n-3}\cdot\sqrt{n+1}}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3^{4n-3}\cdot 3^4}{3^{4n-3}}\cdot\sqrt{\frac{n}{n+1}}\right)=$$

$$=3^4\lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{\frac{n+1}{n}}}=81\lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{1+\overset{\to 0}{\frac{1}{n}}}}=81>1$$

Таким образом, исследуемый ряд **расходится.**

Исследовать сходимость знакопеременных рядов. В случае сходимости исследовать на абсолютную и условную сходимость

7) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$

Используем признак Лейбница:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)}=\frac{3}{2}-\frac{5}{6}+\frac{7}{12}-\frac{9}{20}+\ldots$$

Ряд является знакочередующимся.

$$\lim_{n\to+\infty}|a_n|=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n+1}{n^2+n}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{2n+1}{n^2}}{\frac{n^2+n}{n^2}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\overset{\to 0}{\frac{2}{n}}+\overset{\to 0}{\frac{1}{n^2}}}{1+\overset{\to 0}{\frac{1}{n}}}=\frac{0}{1}=0$$

Члены ряда убывают по модулю.

Вывод: Ряд сходится по признаку Лейбница.

Исследуем ряд на абсолютную сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}$$

Сравним данный ряд с расходящимся гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Используем предельный признак сравнения:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{2n+1}{n(n+1)}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n(n+1)}{n(2n+1)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2n+1}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{2n+1}{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\overset{\to 0}{\frac{1}{n}}}{2+\overset{\to 0}{\frac{1}{n}}}=\frac{1}{2}\neq 0$$

Получено конечное число, отличное от нуля, значит, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ расходится вместе с гармоническим рядом.

Исследуемый ряд **сходится только условно.**

8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(3n-1)!}$

Используем признак Лейбница:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(3n-1)!}=-\frac{1}{2!}+\frac{1}{5!}-\frac{7}{8!}+\frac{1}{11!}-...$$

Ряд является знакочередующимся.

$$\lim_{n\to+\infty}|a_n|=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(3n-1)!}=0$$

Члены ряда убывают по модулю.

Вывод: Ряд сходится по признаку Лейбница.

Исследуем ряд на абсолютную сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)!}$$

Используем признак Даламбера:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{(3(n+1)-1)!}}{\frac{1}{(3n-1)!}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(3n-1)!}{(3n+2)!}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1\cdot2\cdot3\cdot...\cdot(3n-1)}{1\cdot2\cdot3\cdot...\cdot(3n-1)\cdot3n\cdot(3n+1)(3n+2)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{3n\cdot(3n+1)(3n+2)}=0<1$$

Таким образом, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ сходится.

Исследуемый ряд **сходится абсолютно**.

Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах найденного интервала.

9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n}$

Решение: Найдем интервал сходимости данного ряда. Используем признак Даламбера:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{n+1}}{\frac{x^n}{n}}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x\cdot x^n\cdot n}{x^n\cdot(n+1)}\right|=|x|\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}=\frac{\infty}{\infty}=$$

$$=|x|\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n}{n}}{\frac{n+1}{n}}=|x|\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}^{\to 0}}=|x|$$

Ряд сходится при $|x|<1$

$-1<x<1$ – интервал сходимости исследуемого степенного ряда.

Исследуем сходимость ряда на концах найденного интервала.

1) При $x=-1\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(-1)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

Полученный числовой ряд расходится (гармонический ряд)

2) При $x=1\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$

Используем признак Лейбница:

– Ряд является знакочередующимся.

– $\lim_{n\to+\infty}|a_n|=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ – члены ряда убывают по модулю.

Вывод: Ряд сходится.

Данный ряд не является абсолютно сходящимся, поскольку $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – расходится

Ответ: Область сходимости исследуемого степенного ряда: $-1<x\le 1$, при $x=1$ ряд сходится только условно.

10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n\cdot 5^n}$

Решение: Найдем интервал сходимости данного ряда. Используем признак Даламбера:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{(x-3)^{n+1}}{(n+1)\cdot 5^{n+1}}}{\frac{(x-3)^n}{n\cdot 5^n}}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(x-3)\cdot(x-3)^n\cdot 5^n\cdot n}{(x-3)^n\cdot 5\cdot 5^n\cdot(n+1)}\right|=$$

$$=\frac{|x-3|}{5}\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}=\frac{|x-3|}{5}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\frac{n}{n}}{\frac{n+1}{n}}\right)=\frac{|x-3|}{5}\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}^{\to 0}}=\frac{|x-3|}{5}$$

Ряд сходится при $\frac{|x-3|}{5}<1$

$|x-3|<5$

$-5<x-3<5$

$-2<x<8$ – интервал сходимости исследуемого степенного ряда.

Исследуем сходимость ряда на концах найденного интервала.

1) При $x=-2\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-5)^n}{n\cdot 5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 5^n}{n\cdot 5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$

Используем признак Лейбница:

– Ряд является знакочередующимся.

– $\lim_{n\to+\infty}|a_n|=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ – члены ряда убывают по модулю.

Вывод: Ряд сходится.

Исследуем ряд на абсолютную сходимость:

$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – расходится (гармонический ряд).

Таким образом, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ сходится только условно.

2) При $x=8\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n\cdot 5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – расходится.

Ответ: Область сходимости исследуемого степенного ряда: $-2\le x<8$, при $x=-2$ ряд сходится только условно.

11) Разложить функцию $f(x)=5x^3-2x^2-5x-2$ в ряд Тейлора по степеням $(x+4)$, указать область сходимости найденного разложения к своей функции.

Решение: Используем формулу Тейлора:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+...+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+...$$

В данном случае: $a=-4$

$f(a)=f(-4)=-320-32+20-2=-334$

$f'(x)=(5x^3-2x^2-5x-2)'=15x^2-4x-5$

$f'(a)=f'(-4)=240+16-5=251$

$f''(x)=(15x^2-4x-5)'=30x-4$

$f''(a)=f''(-4)=-120-4=-124$

$f'''(x)=(30x-4)'=30=const$

$f'''(a)=f'''(-4)=30$

$f^{(4)}(x)=(30)'=0$, все производные, начиная с четвёртой производной, будут нулевыми.

Таким образом:

$$f(x)=5x^3-2x^2-5x-2=-334+\frac{251}{1!}(x+4)-\frac{124}{2!}(x+4)^2+\frac{30}{3!}(x+4)^3+0+0+0+...=$$

$$=-334+251(x+4)-62(x+4)^2+5(x+4)^3$$

Проверка:

$$-334+251(x+4)-62(x+4)^2+5(x+4)^3=$$

$$=-334+251x+1004-62(x^2+8x+16)+5(x^3+12x^2+48x+64)=$$

$$=-334+251x+1004-62x^2-496x-992+5x^3+60x^2+240x+320=$$

$$=5x^3-2x^2-5x-2$$

Получен исходный многочлен, что и требовалось проверить.

Полученное разложение сходится при любом значении x, так как является конечным многочленом.

Ответ: $f(x)=-334+251(x+4)-62(x+4)^2+5(x+4)^3$, область сходимости разложения: $-\infty<x<+\infty$

12) Разложить функцию $f(x)=\frac{1}{4-x^4}$ в ряд Маклорена, указать область сходимости этого ряда к своей функции.

Решение: преобразуем функцию:

$$f(x)=\frac{1}{4-x^4}=\frac{1}{4\left(1-\frac{x^4}{4}\right)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{x^4}{4}\right)}$$

Используем частный случай биномиального разложения:

$\frac{1}{1-\alpha}=1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+...+\alpha^n+...$, ряд сходится при $|\alpha|<1$

В данном случае $\alpha=\frac{x^4}{4}$:

$$\frac{1}{1-\frac{x^4}{4}}=1+\frac{x^4}{4}+\left(\frac{x^4}{4}\right)^2+\left(\frac{x^4}{4}\right)^3+...+\left(\frac{x^4}{4}\right)^n+...=1+\frac{x^4}{4}+\frac{x^8}{4^2}+\frac{x^{12}}{4^3}+...+\frac{x^{4n}}{4^n}+...$$

Таким образом, искомое разложение:

$$f(x)=\frac{1}{4-x^4}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{x^4}{4}\right)}=\frac{1}{4}\cdot\left(1+\frac{x^4}{4}+\frac{x^8}{4^2}+\frac{x^{12}}{4^3}+...+\frac{x^{4n}}{4^n}+...\right)=$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{x^4}{4^2}+\frac{x^8}{4^3}+\frac{x^{12}}{4^4}+...+\frac{x^{4n}}{4^{n+1}}+...$$

Поскольку $\alpha=\frac{x^4}{4}$, то область сходимости полученного ряда:

$$|\alpha|<1$$

$$\left|\frac{x^4}{4}\right|<1$$

$$\frac{x^4}{4}<1$$

$$x^4<4$$

$$x^2<2$$

$$-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$$

Ответ: $f(x)=\frac{1}{4-x^4}=\frac{1}{4}+\frac{x^4}{4^2}+\frac{x^8}{4^3}+\frac{x^{12}}{4^4}+...+\frac{x^{4n}}{4^{n+1}}+...$, область сходимости ряда: $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$

13) Вычислить e с точностью до 0,001

Решение: Используем разложение:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

В данном случае $x = 1$, таким образом:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \ldots = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \overbrace{\frac{1}{5040}}^{<0,001} + \ldots \approx$$

$$\approx 1 + 1 + 0,5 + 0,166667 + 0,041667 + 0,008333 + 0,001389 = 2,718056 \approx 2,718$$

Ответ: $e \approx 2,718$ с точностью до 0,001

14) Вычислить $\ln 2,2$ с точностью до 0,001

Решение: Используем разложение: $\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

$$2,2 = \frac{11}{5}$$

Найдём x:

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{11}{5}$$

$$5(1+x) = 11(1-x)$$

$$5 + 5x = 11 - 11x$$

$$16x = 6$$

$$x = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

Заполним расчётную таблицу:

n	$2\cdot\frac{\left(\frac{3}{8}\right)^{2n+1}}{2n+1}$
0	0,75
1	$\approx 0,035156$
2	$\approx 0,002966$
3	$\approx 0,000298 < 0,001$

Таким образом:

$$\ln 2,2 \approx 0,75 + 0,035156 + 0,002966 = 0,788123 \approx 0,788$$

Ответ: $\ln 2,2 \approx 0,788$ с точностью до 0,001

15) Решить дифференциальное уравнение с помощью ряда (найти первые три ненулевых члена разложения в степенной ряд).

$y'' - xy' + y - 1 = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$

Решение: Разложение частное решение $y = y(x)$ дифференциального уравнения при начальном условии $y(x_0) = y_0$ имеет вид:

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{y'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \ldots$$

В данном случае: $x_0 = 0$, $y(x_0) = y(0) = 0$, $y'(x_0) = y'(0) = 0$

Разрешим исходное уравнение относительно второй производной:
$y'' = xy' - y + 1$
Подставим: $x = x_0 = 0$, $y = y(0) = 0$, $y' = y'(0) = 0$
$y''(0) = 0 - 0 + 1 = 1 \neq 0$

$y''' = y' + xy'' - y' + 0 = xy''$
Подставим: $x = x_0 = 0$, $y = y(0) = 0$, $y' = y'(0) = 0$, $y'' = y''(0) = 1$
$y'''(0) = 0 \cdot 1 = 0$

$y^{IV} = y'' + xy'''$
Подставим: $x = x_0 = 0$, $y = y(0) = 0$, $y' = y'(0) = 0$, $y'' = y''(0) = 1$, $y''' = y'''(0) = 0$
$y^{IV}(0) = 1 + 0 = 1 \neq 0$

$y^{V} = y''' + y''' + xy^{IV} = 2y''' + xy^{IV}$
Подставим: $x = x_0 = 0$, $y = y(0) = 0$, $y' = y'(0) = 0$, $y'' = y''(0) = 1$, $y''' = y'''(0) = 0$, $y^{IV} = y^{IV}(0) = 1$
$y^{V}(0) = 0 + 0 = 0$

$y^{VI} = 2y^{IV} + y^{IV} + xy^{V} = 3y^{IV} + xy^{V}$
Подставим: $x = x_0 = 0$, $y = y(0) = 0$, $y' = y'(0) = 0$, $y'' = y''(0) = 1$, $y''' = y'''(0) = 0$, $y^{IV} = y^{IV}(0) = 1$, $y^{V} = y^{V}(0) = 0$
$y^{VI}(0) = 3 + 0 = 3$

Таким образом, приближенное разложение искомого частного решения:
$$y(x) \approx \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{3}{6!}x^6$$

Ответ: $y(x) \approx \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{240}x^6$

Разложить функцию в ряд Фурье на указанном интервале

16) $f(x) = |x+1|$, $x \in (-\pi;\pi)$

Решение: В данной задаче период разложения $T = 2\pi$, полупериод $l = \pi$.
Раскроем модуль:

$$f(x) = \begin{cases} -(x+1), \ x \in (-\pi;-1) \\ x+1, \ x \in (-1;\pi) \end{cases}$$

Используя соответствующие формулы, вычислим коэффициенты Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-1}(x+1)dx + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{\pi}(x+1)dx = -\frac{1}{\pi}\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_{-\pi}^{-1} + \frac{1}{\pi}\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_{-1}^{\pi} =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}-1-\left(\frac{\pi^2}{2}-\pi\right)\right) + \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{2}+\pi-\left(\frac{1}{2}-1\right)\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi^2}{2}-\pi+\frac{\pi^2}{2}+\pi+\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2+1}{\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-1}(x+1)\cos nx dx + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{\pi}(x+1)\cos nx dx = (*)$$

Интегрируем по частям:

$$u = x+1 \Rightarrow du = dx$$

$$dv = \cos nx dx \Rightarrow v = \frac{1}{n}\sin nx$$

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du$$

$$(*) = -\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}(x+1)\sin nx\Big|_{-\pi}^{-1} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{-1}\sin nx dx\right) + \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}(x+1)\sin nx\Big|_{-1}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{-1}^{\pi}\sin nx dx\right) =$$

$$= -\frac{1}{\pi n}(0-0) + \frac{1}{\pi n}\cdot\left(-\frac{1}{n}\right)\cos nx\Big|_{-\pi}^{-1} + \frac{1}{\pi n}(0-0) - \frac{1}{\pi n}\cdot\left(-\frac{1}{n}\right)\cos nx\Big|_{-1}^{\pi} =$$

$$= -\frac{1}{\pi n^2}(\cos n - (-1)^n) + \frac{1}{\pi n^2}((-1)^n - \cos n) = \frac{-\cos n + (-1)^n + (-1)^n - \cos n}{\pi n^2} = \frac{2((-1)^n - \cos n)}{\pi n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-1}(x+1)\sin nx dx + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{\pi}(x+1)\sin nx dx = (*)$$

Интегрируем по частям:

$$u = x+1 \Rightarrow du = dx$$

$$dv = \sin nx dx \Rightarrow v = -\frac{1}{n}\cos nx$$

$$(*)=-\frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n}(x+1)\cos nx\Big|_{-\pi}^{-1}+\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{-1}\cos nxdx\right)+\frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n}(x+1)\cos nx\Big|_{-1}^{\pi}+\frac{1}{n}\int_{-1}^{\pi}\cos nxdx\right)$$

$$=\frac{1}{\pi n}(0-(1-\pi)(-1)^n)-\frac{1}{\pi n}\cdot\frac{1}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{-1}-\frac{1}{\pi n}((\pi+1)(-1)^n-0)+\frac{1}{\pi n}\cdot\frac{1}{n}\sin nx\Big|_{-1}^{\pi}=$$

$$=\frac{(\pi-1)(-1)^n}{\pi n}-\frac{1}{\pi n^2}(-\sin n-0)-\frac{(\pi+1)(-1)^n}{\pi n}+\frac{1}{\pi n^2}(0+\sin n)=$$

$$=\frac{(\pi-1-\pi-1)(-1)^n}{\pi n}+\frac{2\sin n}{\pi n^2}=\frac{-2(-1)^n}{\pi n}+\frac{2\sin n}{\pi n^2}=$$

$$=\frac{-2n\cdot(-1)^n+2\sin n}{\pi n^2}=\frac{2(\sin n-n\cdot(-1)^n)}{\pi n^2}$$

Искомое разложение имеет вид:

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos nx+b_n\sin nx\right]$$

Таким образом:

$$f(x)\sim\frac{\pi^2+1}{2\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2((-1)^n-\cos n)}{\pi n^2}\cdot\cos nx+\frac{2(\sin n-n\cdot(-1)^n)}{\pi n^2}\cdot\sin nx\right]$$

Ответ: $f(x)\sim\frac{\pi^2+1}{2\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{((-1)^n-\cos n)\cdot\cos nx+(\sin n-n\cdot(-1)^n)\cdot\sin nx}{n^2}\right]$

17) Разложить в ряд Фурье по синусам

$$f(x)=\begin{cases}x,\ x\in\left(0;\frac{3}{2}\right)\\3-x,\ x\in\left(\frac{3}{2};3\right)\end{cases}$$

Решение: В данной задаче период разложения $T=6$, полупериод $l=3$.
Разложим функцию в ряд Фурье по синусам:

$a_0=a_n=0$

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx=\frac{2}{3}\int_0^{3/2}x\sin\frac{\pi nx}{3}dx+\frac{2}{3}\int_{3/2}^{3}(3-x)\sin\frac{\pi nx}{3}dx$$

1) $\frac{2}{3}\int_0^{3/2}x\sin\frac{\pi nx}{3}dx=(*)$

Интегрируем по частям:

$u=x\Rightarrow du=dx$

$$dv=\frac{2}{3}\sin\frac{\pi nx}{3}dx\Rightarrow v=\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{3}{\pi n}\right)\cos\frac{\pi nx}{3}=-\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{3}$$

$$(*)=-\frac{2}{\pi n}x\cos\frac{\pi nx}{3}\Big|_0^{3/2}+\frac{2}{\pi n}\int_0^{3/2}\cos\frac{\pi nx}{3}dx=$$

$$=-\frac{2}{\pi n}\left(\frac{3}{2}\cos\frac{\pi n}{2}-0\right)+\frac{2}{\pi n}\cdot\frac{3}{\pi n}\cdot\sin\frac{\pi nx}{3}\Big|_0^{3/2}=-\frac{3}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{2}+\frac{6}{\pi^2n^2}\cdot\left(\sin\frac{\pi n}{2}-0\right)=$$

$$=-\frac{3}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{2}+\frac{6}{\pi^2n^2}\sin\frac{\pi n}{2}$$

2) $\frac{2}{3}\int_{3/2}^{3}(3-x)\sin\frac{\pi nx}{3}dx=(*)$

Интегрируем по частям:

$u=3-x\Rightarrow du=-dx$

$dv=\frac{2}{3}\sin\frac{\pi nx}{3}dx\Rightarrow v=\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{3}{\pi n}\right)\cos\frac{\pi nx}{3}=-\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{3}$

$$(*)=-\frac{2}{\pi n}(3-x)\cos\frac{\pi nx}{3}\Big|_{3/2}^{3}-\frac{2}{\pi n}\int_{3/2}^{3}\cos\frac{\pi nx}{3}dx=$$

$$=-\frac{2}{\pi n}\left(0-\frac{3}{2}\cos\frac{\pi n}{2}\right)-\frac{2}{\pi n}\cdot\frac{3}{\pi n}\cdot\sin\frac{\pi nx}{3}\Big|_{3/2}^{3}=\frac{3}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{2}-\frac{6}{\pi^2n^2}\cdot\left(0-\sin\frac{\pi n}{2}\right)=$$

$$=\frac{3}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{2}+\frac{6}{\pi^2n^2}\sin\frac{\pi n}{2}$$

Таким образом:

$$b_n=-\frac{3}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{2}+\frac{6}{\pi^2n^2}\sin\frac{\pi n}{2}+\frac{3}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{2}+\frac{6}{\pi^2n^2}\sin\frac{\pi n}{2}=\frac{12}{\pi^2n^2}\sin\frac{\pi n}{2}$$

Искомое разложение имеет вид:

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{\pi nx}{l}$$

Ответ: $f(x)\sim\frac{12}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\cdot\sin\frac{\pi n}{2}\cdot\sin\frac{\pi nx}{3}\right)$