maΣprof∫.ru

Высшая математика – просто и доступно!

# Практикум по теории вероятностей

## Краткий курс для начинающих

*Настоящая книга позволяет в самые короткие сроки (3 дня - неделя) освоить азы комбинаторики и теории вероятностей и научиться решать наиболее распространённые задачи по теме. **Материал предназначен для** студентов-заочников и других читателей, которые хотят максимально быстро освоить практику.*

*Автор: Александр Емелин*

# Оглавление


1. Случайные события ....................................................................................4
  1.1. Понятие теории вероятностей ....................................................................4
  1.2. События и их вероятности ........................................................................5
    ➢ Виды событий ................................................................................5
    ➢ Совместные и несовместные события. Противоположные события. ..........6
    ➢ Полная группа событий ........................................................................6
    ➢ Алгебра событий..............................................................................8
    ➢ Вероятность события ........................................................................10
    ➢ Принцип практической невозможности маловероятных событий............11
    ➢ Сумма вероятностей событий, которые образуют полную группу,...........11
    ➢ Мама мыла раму ..............................................................................12
  1.3. Элементы комбинаторики.........................................................................13
    ➢ Перестановки, сочетания и размещения без повторений ..........................13
    ➢ Перестановки ..................................................................................15
    ➢ Сочетания ......................................................................................16
    ➢ Размещения ....................................................................................17
    ➢ Правило сложения и правило умножения комбинаций...............................18
    ➢ Перестановки, сочетания и размещения с повторениями ..........................21
    ➢ Перестановки с повторениями ..............................................................21
    ➢ Сочетания с повторениями ...................................................................22
    ➢ Размещения с повторениями .................................................................23
  1.4. Классическое определение вероятности: ....................................................24
  1.5. Геометрическое определение вероятности ...................................................34
  1.6. Теоремы сложения и умножения вероятностей .............................................41
    ➢ Теорема сложения вероятностей несовместных событий ..........................41
    ➢ Зависимые и независимые события ........................................................44
    ➢ Теорема умножения вероятностей независимых событий.........................44
    ➢ Задачи на теоремы сложения и умножения ..............................................46
    ➢ Условная вероятность ........................................................................52
    ➢ Теорема умножения  вероятностей зависимых событий............................53
  1.7. Формула полной вероятности ....................................................................61
  1.8. Формулы Байеса ......................................................................................64
  1.9. Независимые испытания и формула Бернулли...............................................71
  1.10. Формула Пуассона...................................................................................79
  1.11. Локальная теорема Лапласа.......................................................................81
  1.12. Интегральная теорема Лапласа ..................................................................84
  1.13. Статистический подход к определению вероятности ....................................87
    ➢ Ограниченность классического определения ...........................................87
    ➢ Относительная частота события и статистическая вероятность ................88
    ➢ Вероятность отклонения относительной частоты от вероятности .............91
    ➢ и обратная задача...............................................................................93

2. Случайные величины ....................................................................................94
2.1. Понятие и виды случайных величин ...............................................................94
2.2. Дискретная случайная величина .......................................................................95
- Закон распределения дискретной случайной величины.............................95
- Математическое ожидание дискретной случайной величины...................97
- Дисперсия дискретной случайной величины ..............................................99
- Среднее квадратическое отклонение.........................................................100
- Формула для нахождения дисперсии .......................................................101
- Многоугольник распределения .................................................................105
- Функция распределения случайной величины..........................................106
- Вероятность попадания в промежуток .......................................................109
- Контрольное задание......................................................................................112

2.3. Наиболее распространённые дискретные распределения .............................112
- Геометрическое распределение вероятностей...........................................112
- Биномиальное распределение вероятностей .............................................117
- Распределение Пуассона..............................................................................121
- Гипергеометрическое распределение вероятностей.................................124

2.4. Непрерывная случайная величина ..................................................................130
- Функция распределения непрерывной случайной величины ..................130
- Вероятность попадания в промежуток .......................................................131
- функция ПЛОТНОСТИ распределения вероятностей..............................132
- Как вычислить математическое ожидание и дисперсию НСВ?...............140

2.5. Распространённые виды непрерывных распределений .................................144
- Равномерное распределение вероятностей................................................144
- Показательное распределение вероятностей .............................................150
- Нормальный закон распределения вероятностей......................................154

Решения и ответы ......................................................................................................166

# 1. Случайные события

Доброго времени суток, и я сразу открываю 1-й параграф 1-й главы, как говорится, в первый раз в первый класс:) Ну а Первое сентября у каждого своё:

## 1.1. Понятие теории вероятностей

Первое и очень важное. Что изучает эта наука? Многим в голову наверняка пришли мысли вроде *«вероятность дождя велика»*, *«вероятность выигрыша в лотерею мала»*, *«орёл и решка выпадают с вероятностью 50 на 50»* и т.п. Но тогда сразу возникает вопрос, при чём здесь наука? Пожалуйста, прямо сейчас возьмите в руки монету и скажите, какой гранью она выпадет после броска? …совсем не похоже на теорию – скорее какое-то гадание….

И действительно, обывательское понимание вероятности больше смахивает на некое предсказание, часто с изрядной долей мистицизма и суеверий. **Теория же** вероятностей изучает *вероятностные закономерности* массовых однородных ***случайных событий***. То есть, у неё нет цели что-либо угадать, например, результат броска той же монеты в единичном эксперименте. Однако если одну и ту же монету в одинаковых условиях подбрасывать сотни и тысячи раз, то будет прослеживаться чёткая закономерность, описываемая вполне жёсткими законами.

**Другой пример**. Вокруг нас летают молекулы воздуха. Некоторые из них движутся быстро, некоторые не очень, а некоторые – с низкой скоростью. Совершенно понятно, что не имеет смысла угадывать скорость отдельно взятых молекул; но их массовый учёт находит самое широкое применения в физических исследованиях. Обратите внимание, что самолёты «умеют» летать, газовые и паровые котлы обычно не взрываются, а чайники при кипении не скачут по кухне. За многими и многими, казалось бы, обыденными фактами и событиями кроются серьёзные вероятностно-статистические расчёты!

**Или пример попроще**. Если вы приобретёте лотерейный билет, то вряд ли что-то выиграете и совсем невероятно, что сорвёте крупный куш. Но организатор лотереи при случайном розыгрыше тиража *(извлечение пронумерованных шариков и т.п.)* **гарантированно и с высокой точностью знает**, сколько билетов выиграют и проиграют, что очень важно для распределения призового фонда. Ровно так же **научно обоснована** житейская фраза *«всё равно ничего не выиграю»*. И мы обязательно рассмотрим «секреты» выигрыша в лотереи и азартные игры!

Да, кстати **подумайте ещё над одной насущной задачей**: многие из нас за жизнь сдают десятки экзаменов, и практически всегда имеет место следующая ситуация: часть вопросов студент знает, а другую часть… плохо с ней:( В каком случае вероятнее сдать экзамен – если идти «в первых рядах», «в серединке» или если зайти в аудиторию в числе последних?

**…изучаем теорию вероятностей!**

И **сначала мы познакомимся с основными понятиями**, которые ниже по тексту я буду выделять ***жирным коричневым курсивом***. Обращаю ваше внимание, что это ИМЕННО ТЕРМИНЫ, а не «просто слова»!

Начинаем:

## 1.2. События и их вероятности

Всё по пунктам, всё по коротеньким параграфам – чтобы лучше запомнилось:

### ➢ Виды событий

Одно из базовых понятий тервера уже озвучено выше – это ***событие***. События бывают ***достоверными***, ***невозможными*** и ***случайными***.

**1) Достоверным** называют событие, которое в результате ***испытания*** *(осуществления определенных действий, определённого комплекса условий)* **обязательно произойдёт**. Например, в условиях земного тяготения подброшенная монета непременно упадёт вниз.

**2) Невозможным** называют событие, которое в результате испытания **заведомо не произойдёт**. Пример невозможного события: в условиях земного тяготения подброшенная монета ~~трах-тибидох~~ улетит вверх.

**3)** И, наконец, событие называется **случайным**, если в результате испытания оно может, **как произойти, так и не произойти**, при этом должен иметь место **принципиальный критерий случайности**: случайное событие – есть следствие случайных факторов, воздействие которых предугадать невозможно или крайне затруднительно. Пример: в результате броска монеты выпадет «орёл». В рассмотренном случае случайные факторы – это форма и физические характеристики монеты, сила и направление броска, сопротивление воздуха и т.д.

Подчёркнутый критерий случайности очень важен – так, карточный шулер может очень ловко имитировать случайность и давать выигрывать клиенту, но ни о каких случайных факторах, влияющих на итоговый результат, речи не идёт.

**Любой** результат испытания называется ***исходом***, который, собственно и представляет собой появление определённого события. В частности, при подбрасывании монеты возможно 2 исхода (случайных события): выпадет орёл, выпадет решка. Естественно, подразумевается, что данное испытание проводится в таких условиях, что монета не может встать на ребро или, скажем, зависнуть в невесомости.

События (любые) **обозначают** большими латинскими буквами $A, B, C, D, E, F, ...$ либо теми же буквами с подстрочными индексами, например: $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, ...$. При этом стараются избегать буквы $P$, которая зарезервирована под другие нужды.

Запишем следующие случайные события:

$A_O$ – в результате броска монеты выпадет «орёл»;

$B_5$ – в результате броска игральной кости (кубика) выпадет 5 очков;

$C_T$ – из карточной колоды будет извлечена карта трефовой масти.

Да, события прямо так и записывают в практических задачах, при этом в уместных случаях удобно использовать «говорящие» подстрочные индексы (хотя можно обойтись и без них).

И следует в третий раз подчеркнуть, что случайные события обязательно удовлетворяют вышеприведённому критерию случайности. В этом смысле особо показателен 3-й пример: если из колоды изначально удалить все карты трефовой масти, то событие $C_T$ становится *невозможным*. Наоборот, если испытателю известно, что, например, дама треф лежит снизу, то он при желании может сделать событие $C_T$ *достоверным* =) Таким образом, в данном примере предполагается, что **карты хорошо перемешаны и их «рубашки» неразличимы**, т.е. колода не является краплёной.

**Важной характеристикой** случайных событий является их ***равновозможность***. Два или бОльшее количество событий называют **равновозможными**, если ни одно из них не является более возможным, чем другое. Например:

– выпадение орла или решки при броске монеты;
– выпадение 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков при броске игрального кубика;
– появление трефы, пики, бубны или червы при случайном извлечении карты из полной колоды.

При этом предполагается, что монета и кубик однородны и имеют геометрически правильную форму, а колода хорошо перемешана и «идеальна» с точки зрения неразличимости рубашек карт.

Могут ли быть те же события **НЕ** равновозможными? Легко. Так, если у монеты или кубика смещён центр тяжести, то гораздо чаще будут выпадать вполне определённые грани. Если кто-то ловко спрятал в рукаве туза треф, то становится *менее возможным*, что оппоненту будет сдана трефа, и, главное, *менее возможно*, что будет сдан туз.

- **Совместные и несовместные события. Противоположные события.**
- **Полная группа событий**

События называют ***несовместными***, если в одном и том же испытании появление одного из событий **исключает** появление других событий. Простейшим примером несовместных событий является пара ***противоположных*** событий. Событие, противоположное данному, обычно **обозначается** той же латинской буквой с чёрточкой наверху:

$A_O$ – в результате броска монеты выпадет орёл;
$\overline{A}_O$ – в результате этого же броска выпадет решка.

Совершено ясно, что в отдельно взятом испытании появление орла исключает появление решки (и наоборот), поэтому данные события и называются несовместными.

Противоположные события легко формулируются из соображений элементарной логики:

$B_5$ – в результате броска игрального кубика выпадет 5 очков;
$\overline{B}_5$ – в результате этого же броска выпадет число очков, отличное от пяти.

Либо 5, либо не 5, т.е. данные события **несовместны** и **противоположны**.

Аналогично:
$C_T$ – из колоды будет извлечена карта трефовой масти, либо:
$\overline{C}_T$ – извлечена пика, черва или бубна.

Множество несовместных событий образуют ***полную группу***, если в результате отдельно взятого испытания **обязательно** появится **одно и только одно из этих событий**.

Очевидно, что любая пара противоположных событий, например, $B_5$ и $\overline{B}_5$ (выпадение / невыпадение «пятёрки») образует полную группу. Но, разумеется, полную группу могут образовывать не только противоположные события:

$B_1$ – в результате броска игрального кубика выпадет 1 очко;

$B_2$ – … 2 очка;

$B_3$ – … 3 очка;

$B_4$ – … 4 очка;

$B_5$ – … 5 очков;

$B_6$ – … 6 очков.

События $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ **несовместны** (поскольку появление какой-либо грани исключает одновременное появление других) **и образуют полную группу** (так как в результате испытания обязательно появится одно из этих шести событий).

И из этих двух примеров вытекает ещё одно важное понятие, которое нам потребуется в дальнейшем – это ***элементарность*** исхода (события). Если совсем просто, то элементарное событие нельзя «разложить на другие события». Например, события $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ элементарны, но событие $\overline{B}_5$ не является таковым, так как подразумевает выпадение 1, 2, 3, 4 или 6 очков (включает в себя 5 элементарных исходов).

В примере с картами события $C_Т, C_П, C_Ч, C_Б$ (извлечение трефы, пики, червы или бубны соответственно) несовместны и образуют полную группу, но они неэлементарны. Если считать, что в колоде 36 карт, то каждое из перечисленных выше событий включает в себя 9 элементарных исходов. Аналогично – события $D_6, D_7, D_8, D_9, D_{10}, D_В, D_Д, D_К, D_Т$ (извлечение шестёрки, семёрки, …, короля, туза) несовместны, образуют полную группу и неэлементарны (каждое включает в себя 4 исхода).

Таким образом, элементарным исходом здесь считается лишь извлечение какой-то конкретной карты, и 36 несовместных элементарных исходов тоже образуют полную группу событий.

И коротко о событиях ***совместных***. События называются **совместными**, если в отдельно взятом испытании появление одного из них **не исключает** появление другого. Например:

$C_Т$ – из колоды карт будет извлечена трефа;

$D_7$ – из колоды карт будет извлечена семёрка.

– данные события совместны, т.к. при излечении семёрки треф одновременно имеют место оба события.

Понятие совместности охватывает и бОльшее количество событий:

$D$ – завтра в 12.00 будет дождь;

$G$ – завтра в 12.00 будет гроза;

$S$ – завтра в 12.00 будет солнце.

Ситуация, конечно, редкая, но совместное появление всех трёх событий, не исключено. Следует отметить, что перечисленные события совместны и попарно.

## ➢ Алгебра событий

Мужайтесь, будет и матан =)

Пожалуйста, запомните **ВАЖНЕЙШЕЕ ПРАВИЛО**, без которого освоить тервер просто нереально:

> **Сложение событий** обозначает логическую связку **ИЛИ**,
> а **умножения событий** – логическую связку **И**.

Разбираемся:

**1) Суммой** двух событий $A$ и $B$ называется событие $A+B$ которое состоит в том, что наступит **или** событие $A$, **или** событие $B$, **или** оба события одновременно. В том случае, если события несовместны, последний вариант отпадает, то есть может наступить **или** событие $A$ **или** событие $B$.

Правило распространяется и на бОльшее количество слагаемых, например, событие … состоит в том, что произойдёт **хотя бы одно** из событий $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$, а **если события** несовместны – **то одно и только одно** событие из этой суммы: **или** событие $A_1$, **или** событие $A_2$, **или** событие $A_3$, **или** событие $A_4$, **или** $A_5$.

Примеров масса:

Событие … (при броске игральной кости не выпадет 5 очков) состоит в том, что выпадет 1, **или** 2, **или** 3, **или** 4, **или** 6 очков.

> **Все примеры ОСМЫСЛЕННО проговариваем ВСЛУХ!**
> **Это важно.**

Событие $B_{1,2} = B_1 + B_2$ состоит в том, что выпадет не более двух очков (1 **или** 2 **очка**).

Событие … состоит в том, что выпадет 2, **или** 4, **или** 6 очков (чётное число очков).

Событие $C_Ч + C_Б$ заключается в том, что из колоды будет извлечена карта красной масти (черва **или** бубна), а событие $D_В + D_Д + D_К + D_Т$ – в том, что будет извлечена «картинка» (валет **или** дама **или** король **или** туз).

Чуть занятнее дело с событиями совместными:

Событие $C_T + D_7$ состоит в том, что из колоды будет извлечена трефа **или** семёрка **или** семёрка треф. Согласно данному выше определению, **хотя бы что-то** – или любая трефа или любая семёрка или их «пересечение» – семёрка треф. Легко подсчитать, что данному событию соответствует 12 элементарных исходов (9 трефовых карт + 3 оставшиеся семёрки).

Событие $D+G+S$ состоит в том, что завтра в 12.00 наступит **ХОТЯ БЫ ОДНО из суммируемых совместных событий**, а именно:

– будет только дождь / только гроза / только солнце;
– или наступит только какая-нибудь пара событий (дождь + гроза / дождь + солнце / гроза + солнце);
– или все три события появятся одновременно.

То есть, событие $D+G+S$ включает в себя 7 возможных исходов, которые, к слову, несовместны – по той причине, что любая «погодная комбинация» исключает появление других.

Второй столп алгебры событий:

**2) Произведением** двух событий $A$ и $B$ называют событие $AB$, которое состоит в совместном появлении этих событий, иными словами, умножение $AB$ означает, что при некоторых обстоятельствах наступит **и** событие $A$, **и** событие $B$. Аналогичное утверждение справедливо и для бОльшего количества событий, так, например, произведение $A_1A_2A_3\cdot\ldots\cdot A_{10}$ подразумевает, что при определённых условиях произойдёт **и** событие $A_1$, **и** событие $A_2$, **и** событие $A_3$, …, **и** событие $A_{10}$.

Рассмотрим испытание, в котором подбрасываются две монеты *(не имеет значения, одновременно или нет)* и следующие события:

$A_1$ – на 1-й монете выпадет орёл;
$\overline{A}_1$ – на 1-й монете выпадет решка;
$A_2$ – на 2-й монете выпадет орёл;
$\overline{A}_2$ – на 2-й монете выпадет решка.

Тогда:
– событие $A_1A_2$ состоит в том, что на 1-й монете выпадет орёл **и** на 2-й орёл;
– событие $\overline{A}_1\overline{A}_2$ состоит в том, что на 1-й монете выпадет решка **и** на 2-й решка;
– событие $A_1\overline{A}_2$ состоит в том, что на 1-й монете выпадет орёл **и** на 2-й монете выпадет решка;
– событие $\overline{A}_1A_2$ состоит в том, что на 1-й монете выпадет решка **и** на 2-й монете выпадет орёл.

**Осмысливаем и проговариваем вслух!!**

Очевидно, что события … несовместны *(т.к. не может, например, выпасть 2 орла и в то же самое время 2 решки)* и образуют полную группу *(поскольку учтены **все** возможные исходы броска двух монет)*.

Давайте просуммируем данные события: …. Как интерпретировать эту запись? Очень просто – умножение означает логическую связку **И**, а сложение – **ИЛИ**. Таким образом, эту сумму легко прочитать понятным человеческим языком: *«выпадут два орла **или** две решки, **или** на 1-й монете выпадет орёл **и** на 2-й решка, **или** на 1-й монете выпадет решка **и** на 2-й монете орёл »*.

Это был пример, когда **в одном испытании** задействовано несколько объектов, в данном случае две монеты. Другая распространенная в практических задачах схема – это ***повторные испытания***, когда, например, **один и тот же** игральный кубик бросается 3 раза подряд. В качестве демонстрации рассмотрим следующие события:

$B_{(1)4}$ – в 1-м броске выпадет 4 очка;

$B_{(2)5}$ – во 2-м броске выпадет 5 очков;

$B_{(3)6}$ – в 3-м броске выпадет 6 очков.

Тогда событие $B_{(1)4} \cdot B_{(2)5} \cdot B_{(3)6}$ состоит в том, что в 1-м броске выпадет 4 очка **и** во 2-м броске выпадет 5 очков **и** в 3-м броске выпадет 6 очков.

…понимаю, что разбираются не очень интересные примеры, но это часто встречающиеся в задачах вещи и от них никуда не деться. Помимо монетки, кубика и колоды карт вас поджидают урны с разноцветными шарами, несколько стрелков, стреляющих по мишени, и неутомимый рабочий, который постоянно вытачивает какие-то детали =)

## ➢ Вероятность события

***Вероятность события*** – это *количественная мера* возможности наступления этого события в результате испытания. В курсе тервера существует несколько подходов к определению вероятности, но пока мы ограничимся её интуитивным понятием и общей информацией.

**Обозначения:** вероятность некоторого события $A$ обозначается большой латинской буквой $P$, а само событие берётся в скобки, выступая в роли своеобразного аргумента. Например:

$P(A_O)$ – вероятность того, что в результате броска монеты выпадет «орёл»;

$P(B_5)$ – вероятность того, что в результате броска кубика выпадет 5 очков;

$P(C_T)$ – вероятность того, что из колоды будет извлечена карта трефовой масти.

Также для обозначения вероятности широко используется маленькая буква $p$. В частности, можно отказаться от громоздких обозначений событий $A_O, B_5, C_T$ и их вероятностей $P(A_O), P(B_5), P(C_T)$ и использовать следующую стилистику:

$p_O = \frac{1}{2}$ – вероятность того, что в результате броска монеты выпадет «орёл»;

$p_5 = \frac{1}{6}$ – вероятность того, что в результате броска игральной кости выпадет 5 очков;

$p_T = \frac{1}{4}$ – вероятность того, что из полной колоды будет извлечена трефа.

Данный вариант популярен при решении практических задач, поскольку позволяет заметно сократить запись решения. Как и в первом случае, здесь удобно использовать «говорящие» подстрочные / надстрочные индексы.

Вероятности можно выразить и в процентах, например: вероятность выпадение орла равна $\frac{1}{2}\cdot 100\% = 50\%$, выпадения пятёрки $\frac{1}{6}\cdot 100\% \approx 16{,}67\%$, извлечения трефы $\frac{1}{4}\cdot 100\% = 25\%$, но в теории вероятностей **ЭТОГО ДЕЛАТЬ НЕ ПРИНЯТО** (хотя не возбраняется прикидывать проценты в уме).

**Принято использовать доли единицы**, и, очевидно, что вероятность может изменяться в пределах…. При этом если $P(A) = 0$, то событие $A$ является невозможным, если $P(A) = 1$ – достоверным, а если $0 < P(A) < 1$, то речь идёт о случайном событии.

**Если в ходе решения любой задачи у вас получилось какое-то другое значение вероятности – ищите ошибку!**

### ➢ Принцип практической невозможности маловероятных событий

Особый интерес представляют события, вероятность наступления которых чрезвычайно мала. Хоть такие события и являются случайными, для них справедлив следующий постулат: **в отдельно взятом испытании маловозможное событие практически достоверно не произойдёт**. Именно поэтому вы не сорвёте в лотерее Джек-пот, если вероятность это события, скажем, равна $0{,}00000001$. Да-да, именно Вы – с единственным билетом в каком-то конкретном тираже. Впрочем, и с 10 билетами тоже.

…когда я рассказываю об этом окружающим, то почти всегда в ответ слышу: «но ведь кто-то выигрывает». Хорошо, тогда давайте проведём следующий эксперимент: пожалуйста, сегодня или завтра купите билет любой лотереи (не откладывайте!). И если выиграете... ну, хотя бы 10 килорублей, обязательно отпишитесь – и я объясню, почему это всё-таки произошло. За процент, разумеется ☺

Но грустить не нужно, потому что есть противоположный принцип: если вероятность некоторого события очень близка к единице, то в отдельно взятом испытании оно *практически достоверно* произойдёт. Поэтому перед прыжком с парашютом не надо бояться, наоборот – улыбайтесь! Ведь должны сложиться совершенно немыслимые и фантастические обстоятельства, чтобы отказали оба исправных парашюта.

### ➢ Сумма вероятностей событий, которые образуют полную группу,

**равна единице**. Это теорема. Грубо говоря, если события образуют полную группу, то со 100%-ной вероятностью какое-то из них произойдёт. В самом простом случае полную группу образуют противоположные события, например:

$A_O$ – в результате броска монеты выпадет орёл;
$\overline{A}_O$ – в результате броска монеты выпадет решка.

По теореме: $P(A_O) + P(\overline{A}_O) = 1$

Поскольку данные события равновозможны, то их вероятности одинаковы $P(A_O) = \frac{1}{2}$, $P(\overline{A}_O) = \frac{1}{2}$, и по этой причине такие события называют ***равновероятными***.

Рассматриваемая теорема удобна тем, что позволяет быстро найти вероятность противоположного события. Так, если известна вероятность $P(B_5)=\frac{1}{6}$ того, что на кубике выпадет пятёрка, то из суммы $P(B_5)+P(\overline{B}_5)=1$ легко выразить и вычислить вероятность того, что она не выпадет: $P(\overline{B}_5)=1-P(B_5)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

Это гораздо проще, чем копаться в элементарных исходах и их вероятностях, для которых, к слову, данная теорема тоже справедлива:

…

События $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$, как отмечалось выше, *равновозможны* – и теперь мы можем сказать, что *равновероятны*. Вероятность выпадения любой грани кубика равна $\frac{1}{6}$:

$$P(B_1)=P(B_2)=P(B_3)=P(B_4)=P(B_5)=P(B_6)=\frac{1}{6}$$

Ну и на десерт колода: поскольку нам известна вероятность $P(C_T)=\frac{1}{4}$ того, что будет извлечена трефа, то легко найти вероятность того, что будет извлечена карта другой масти: $P(C_T)+P(\overline{C}_T)=1 \quad \Rightarrow \quad P(\overline{C}_T)=1-P(C_T)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

Заметьте, что рассмотренные пары событий $B_5, \overline{B}_5$ и $C_T, \overline{C}_T$ не равновероятны, как оно чаще всего и бывает.

В упрощенном варианте оформления вероятность противоположного события стандартно **обозначается** строчной буквой $q$. Например, если $p=0,7$ – вероятность того, что стрелок попадёт в цель, то $q=1-p=1-0,7=0,3$ – вероятность того, что он промахнётся.

Таким образом, в теории вероятностей буквы $p$ и $q$ также нежелательно использовать в каких-то других целях.

### ➢ Мама мыла раму

В честь Вашего Дня Знаний я не буду задавать домашнее задание =), но очень важно, чтобы вы могли ответить на следующие вопросы, хотя бы на уровне понимания:

Какие виды событий существуют?
Что такое случайность и равновозможность события?
Как вы понимаете термины совместность / несовместность событий?
Что такое полная группа событий, противоположные события?
Что означает сложение и умножение событий?
Что такое вероятность события, и какие значения она может принимать?
Чем полезна теорема сложения вероятностей событий, образующих полную группу?

Нет-нет, зубрить ничего не надо, это всего лишь азы теории вероятностей – своеобразный букварь, который довольно быстро уложится в голове.

## 1.3. Элементы комбинаторики

***Комбинаторика*** – это отдельный раздел математики, и без неё дальше никуда.

В узком смысле комбинаторика – это подсчёт различных комбинаций, которые можно составить из некоторого множества *дискретных* объектов. Под объектами понимаются какие-либо обособленные предметы или живые существа – люди, звери, грибы, растения, насекомые и т.д. Самыми распространёнными видами комбинаций являются ***перестановки*** объектов, их выборка из множества (***сочетания***) и распределение в выборке (***размещения***). Не пугайтесь малопонятных терминов, тем более, некоторые из них не очень удачны:

### ➢ Перестановки, сочетания и размещения без повторений

Начнём с хвоста заголовка – что значит «**без повторений**»? Это значит, что в данном параграфе будут рассматриваться множества, которые состоят из **различных** объектов, либо которые считаются таковыми по смыслу задачи.

Представьте, что перед вами на столе слева направо выложены:
яблоко / груша / банан

<u>Вопрос первый</u>: сколькими способами их можно **переставить**?

Одна комбинация уже записана выше и с остальными проблем не возникает:

яблоко / банан / груша
груша / яблоко / банан
груша / банан / яблоко
банан / яблоко / груша
банан / груша / яблоко

**Итого**: 6 комбинаций или 6 ***перестановок***.

Хорошо, здесь не составило особого труда перечислить все возможные случаи, но как быть, если предметов больше? Уже с четырьмя различными фруктами количество комбинаций значительно возрастёт! Пожалуйста, откройте *Приложение* ***Основные формулы комбинаторики*** и в *пункте № 2* найдите **формулу количества перестановок**. Никаких мучений – 3 объекта можно переставить: $P_3 = 3! = 6$ способами.

<u>Вопрос второй</u>: сколькими способами можно выбрать а) один фрукт, б) два фрукта, в) три фрукта, г) хотя бы один фрукт?

**а)** Один фрукт можно выбрать, очевидно, тремя способами – взять либо яблоко, либо грушу, либо банан. Формальный подсчёт проводится по **формуле количества сочетаний** *(см. тот же п.2 Приложения)*:

…

**Запись** $C_3^1$ **следует читать и понимать так**: «сколькими способами можно выбрать 1 фрукт из трёх?».

**б)** Перечислим все возможные сочетания двух фруктов:

яблоко и груша;
яблоко и банан;
груша и банан.

Количество комбинаций легко проверить по той же формуле:

$$C_3^2 = \frac{3!}{1! \cdot 2!} = 3$$

**Запись** $C_3^2$ **понимается аналогично**: «сколькими способами можно выбрать 2 фрукта из трёх?».

**в)** И, наконец, три фрукта можно выбрать единственным способом:

$$C_3^3 = \frac{3!}{0! \cdot 3!} = 1$$

Следует отметить, что формула количества сочетаний сохраняет смысл и для пустой выборки:

$C_3^0 = \frac{3!}{3! \cdot 0!} = 1$ способом можно выбрать ни одного фрукта – собственно, ничего не взять и всё. Но это явно не про студенток ☺

**г)** Сколькими способами можно взять **хотя бы один** фрукт? Условие «хотя бы один» подразумевает, что нас устраивает 1 фрукт (любой) **или** 2 любых фрукта (любые) **или** все 3 фрукта:

… способами можно выбрать хотя бы один фрукт.

…внимательные читатели уже кое о чём догадались. Но о смысле знака «плюс» позже.

И для ответа на третий вопрос мне требуется два добровольца…, ну что же, раз никто не хочет, тогда буду вызывать к доске =)

<u>Вопрос третий</u>: сколькими способами можно раздать по одному фрукту Даше и Наташе?

Для того чтобы раздать два фрукта, сначала нужно их выбрать. Согласно пункту «бэ» предыдущего вопроса, сделать это можно $C_3^2 = 3$ способами, перепишу их заново:

яблоко и груша;
яблоко и банан;
груша и банан.

Но комбинаций сейчас будет в два раза больше. Рассмотрим, например, первую пару фруктов:
яблоком можно угостить Дашу, а грушей – Наташу;
либо наоборот – груша достанется Даше, а яблоко – Наташе.

И такая перестановка возможна для каждой пары фруктов.

В данном случае работает **формула количества размещений**:
$A_3^2 = 2 \cdot 3 = 6$

Она отличается от формулы $C_3^2$ тем, что учитывает **не только** количество способов, которым можно выбрать несколько объектов, но и все перестановки объектов **в каждой** возможной выборке. Так, в рассмотренном примере, важно не только то, что можно просто выбрать, например, грушу и банан, но и то, как они будут распределены (размещены) между Дашей и Наташей.

**Пожалуйста, ещё раз внимательно перечитайте** *пункт №2 Приложения* ***Основные формулы комбинаторики*** и постарайтесь хорошо уяснить разницу между перестановками, сочетаниями и размещениями. В простых случаях легко пересчитать все возможные комбинации вручную, но чаще всего это становится трудноподъёмной задачей, именно поэтому и нужно понимать смысл формул.

Теперь остановимся на каждой комбинации подробнее:

- **Перестановки**

***Перестановками*** называют комбинации, состоящие из одних и тех же $n$ **различных** объектов и отличающиеся только порядком их расположения. Количество всех возможных перестановок выражается формулой $P_n = n!$

Отличительной особенностью перестановок является то, что в каждой из них участвует **ВСЁ** множество, то есть – **все** $n$ объектов. Например, дружная семья:

**Задача 1**

Сколькими способами можно рассадить 5 человек за столом?

**Решение**: используем формулу количества перестановок:
$P_5 = 5! = 120$

**Ответ**: 120 способами

Невероятно, но факт. И здесь не имеет значения круглый ли стол, квадратный, или вообще все люди сели ~~встали, легли~~ на скамейку вдоль одной стены – важен лишь их порядок расположения. Аналогично решается типовая задача о перестановке различных книг на полке, но это было бы слишком просто даже для «чайника»:

**Задача 2**

Сколько четырёхзначных чисел можно составить из четырёх карточек с цифрами 0, 5, 7, 9?

Для того чтобы составить четырёхзначное число нужно задействовать **все** четыре карточки *(цифры на которых **различны!**)*, и это очень важная предпосылка для применения формулы $P_n = n!$ Очевидно, что, переставляя карточки, мы будем получать различные четырёхзначные числа, но стоп…, а всё ли тут в порядке? ;-)

Хорошенько подумайте над задачей! Сверить своё решение можно в конце книге.

**Вообще, это характерная черта комбинаторных и вероятностных задач – в них НУЖНО ДУМАТЬ.**

И зачастую думать чисто по-житейски, как, например, в разборе вступительного примера с фруктами.

### ➢ Сочетания

В учебниках обычно даётся лаконичное и не очень понятное определение сочетаний, поэтому в моих устах формулировка будет не особо рациональной, но, надеюсь, доходчивой:

***Сочетаниями*** называют различные комбинации из $m$ объектов, которые выбраны из множества $n$ различных объектов, и которые отличаются друг от друга хотя бы одним объектом. Иными словами, отдельно взятое сочетание – это уникальная выборка из $m$ элементов, в которой не важен их порядок (расположение). Общее же количество таких уникальных сочетаний рассчитывается по формуле $C_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!\cdot m!}$.

**Задача 3**

В ящике находится 15 деталей. Сколькими способами можно взять 4 детали?

**Решение**: прежде всего, обращаю внимание на то, что по логике такого условия, детали считаются **различными** – даже если они на самом деле однотипны и визуально одинаковы *(в этом случае их можно, например, пронумеровать)*.

В задаче речь идёт о выборке из четырёх деталей, в которой не имеет значения их «дальнейшая судьба» – грубо говоря, «просто выбрали 4 штуки и всё». Таким образом, у нас имеют место сочетания деталей. Считаем их количество:

… *(прерываю решение для промежуточных объяснений)*

И здесь, конечно, не нужно «тягать» значения $11! = 39916800,\ 15! = 1307674368000$. В похожей ситуации я советую использовать следующий **приём:** в знаменателе выбираем **наибольший** факториал (в данном случае $11!$) и сокращаем на него дробь. Для этого числитель следует представить в виде $15! = 11!\cdot 12\cdot 13\cdot 14\cdot 15$. Распишу очень подробно:

$(*) = \dfrac{11!\cdot 12\cdot 13\cdot 14\cdot 15}{11!\cdot 4!} = \dfrac{12\cdot 13\cdot 14\cdot 15}{4!} = \dfrac{12\cdot 13\cdot 14\cdot 15}{24} = 1365$ способами можно взять 4 детали из ящика.

**Ещё раз: что это значит?** Это значит, что из 15 различных деталей можно составить *одну тысячу триста шестьдесят пять* **уникальных** сочетаний из 4 деталей. То есть, каждая такая комбинация из четырёх деталей будет отличаться от других комбинаций хотя бы одной деталью.

**Ответ**: 1365 способами

**Формуле … необходимо уделить самое пристальное внимание**, поскольку она является «хитом» комбинаторики. При этом полезно понимать и без всяких вычислений записывать «крайние» значения: $C_n^0 = 1, \quad C_n^1 = n, \quad C_n^{n-1} = n, \quad C_n^n = 1$. Применительно к разобранной задаче:

$C_{15}^0 = 1$ – единственным способом можно не выбрать ни одной детали;

$C_{15}^1 = 15$ способами можно взять 1 деталь (любую из 15);

$C_{15}^{14} = 15$ способами можно взять 14 деталей (при этом какая-то одна из 15 останется в ящике);

$C_{15}^{15} = 1$ – единственным способом можно выбрать все пятнадцать деталей.

Рекомендую вновь обратиться к *Приложению* ***Формулы комбинаторики*** и внимательно ознакомиться с ***биномом Ньютона*** и ***треугольником Паскаля*** *(пункт 3)*, по которому очень удобно выполнять проверку вычислений количества сочетаний $C_n^m$ при небольших значениях «эн».

Для самостоятельного решения:

**Задача 4**

а) Сколькими способами из колоды в 36 карт можно выбрать 3 карты?

б) В шахматном турнире участвует $k$ человек и каждый с каждым играет по одной партии. Сколько всего партий сыграно в турнире?

Чем приятны многие комбинаторные задачи, так это краткостью – главное, разобраться в сути. Решения и ответы в конце книги.

### ➢ Размещения

Или «продвинутые» сочетания. ***Размещениями*** называют различные комбинации из $m$ объектов, которые выбраны из множества $n$ различных объектов, и которые отличаются друг от друга как составом объектов в выборке, так и их порядком. Количество размещений рассчитывается по формуле $A_n^m = (n-m+1) \cdot \ldots \cdot (n-1)n$

Что наша жизнь? Игра:

**Задача 5**

Боря, Дима и Володя сели играть в «очко». Сколькими способами им можно сдать по одной карте? *(колода содержит 36 карт)*

**Решение**: ситуация похожа на предыдущую задачу, но отличается тем, что здесь важно не только то, какие три карты будут извлечены из колоды, но и то, КАК они будут распределены между игроками. По формуле размещений:

$A_{36}^3 = 34 \cdot 35 \cdot 36 = 42840$ способами можно раздать 3 карты игрокам.

Есть и другая схема решения, которая, с моей точки зрения, даже понятнее:

… способами можно извлечь 3 карты из колоды.

Теперь давайте рассмотрим, какую-нибудь одну *из семи тысяч ста сорока* комбинаций, например: король пик, 9 червей , 7 червей. Выражаясь комбинаторной терминологией, эти 3 карты можно «переставить» между Борей, Димой и Володей $P_3 = 3! = 6$ способами, а конкретнее:

КП, 9Ч, 7Ч;
КП, 7Ч, 9Ч;
9Ч, КП, 7Ч;
9Ч, 7Ч, КП;
7Ч, КП, 9Ч;
7Ч, 9Ч, КП.

И аналогичный факт справедлив **для любого** уникального набора из трёх карт. А таких наборов, не забываем, мы насчитали $C_{36}^3 = 7140$ . Не нужно быть профессором, чтобы понять, что данное количество сочетаний следует умножить на шесть:

$C_{36}^3 \cdot P_3 = 7140 \cdot 6 = 42840$ способами можно сдать по одной карте трём игрокам.

По существу, получилась экспериментальная проверка формулы $C_n^m \cdot P_m = A_n^m$ , окончательный смысл которой мы проясним в следующем параграфе.

**Ответ**: 42840

И самостоятельно:

**Задача 6**

В студенческой группе 23 человека. Сколькими способами можно выбрать старосту и его заместителя?

Задача о «размещении» должностей в коллективе встречается очень часто и является самым настоящим «баяном». Краткое решение и ответ в конце книги.

## ➢ Правило сложения и правило умножения комбинаций

Эти правила записаны в общем виде в *Приложении* ***Формулы Комбинаторики*** *(пункт 4)* и весьма напоминают алгебру событий:

**1) Правило сложения комбинаций**. **Знак «плюс» следует понимать и читать как союз ИЛИ**. Вспоминаем демонстрационную задачу с яблоком, грушей и бананом:

$C_3^1 + C_3^2 + C_3^3 = 3 + 3 + 1 = 7$ способами можно выбрать хотя бы один фрукт.

То есть, можно взять 1 фрукт (любой из трёх) **ИЛИ** какое-нибудь сочетание двух фруктов (любое) **ИЛИ** все три фрукта. Заметьте, что сложение комбинаций предполагает безразличие выбора *(в данном случае без разницы – будет ли выбран 1, 2 или 3 фрукта)*.

Теперь рассмотрим более содержательный пример:

**Задача 7**

Студенческая группа состоит из 23 человек, среди которых 10 юношей и 13 девушек. Сколькими способами можно выбрать 2 человек одного пола?

**Решение**: в данном случае подсчёт количества сочетаний $C_{23}^2$, не годится – по той причине, множество комбинаций из двух человек включает в себя и разнополые пары.

Условие «выбрать 2 человек одного пола» подразумевает, что нужно выбрать двух юношей **или** двух девушек, и уже сама словесная формулировка указывает на верный путь решения:

$C_{10}^2 = \dfrac{10!}{8!\cdot 2!} = \dfrac{8!\cdot 9\cdot 10}{8!\cdot 2!} = \dfrac{9\cdot 10}{2} = 45$ способами можно выбрать 2 юношей;

… способами можно выбрать 2 девушек.

Таким образом, двух человек одного пола (без разницы – юношей **или** девушек) можно выбрать: $C_{10}^2 + C_{13}^2 = 45 + 78 = 123$ способами.

**Ответ**: 123

**2) Правило умножения комбинаций. Знак «умножить» следует понимать и читать как союз И.**

Рассмотрим ту же студенческую группу, которая пошла на танцы. Сколькими способами можно составить пару из юноши и девушки?

$C_{10}^1 = 10$ способами можно выбрать 1 юношу;

$C_{13}^1 = 13$ способами можно выбрать 1 девушку.

Таким образом, одного юношу **и** одну девушку можно выбрать:
$C_{10}^1 \cdot C_{13}^1 = 10\cdot 13 = 130$ способами.

Когда из каждого множества выбирается по одному объекту, то справедлив следующий **принцип подсчёта комбинаций:** «**каждый** объект из одного множества может составить пару **с каждым** объектом другого множества».

То есть, Олег может пригласить на танец любую из 13 девушек, Евгений – тоже любую из 13 девушек, и аналогичный выбор есть у остальных молодых людей. Итого:

$10\cdot 13 = 130$ возможных пар.

Следует отметить, что в данном примере не имеет значения упорядоченность пары, однако если принять во внимание инициативу, то количество комбинаций нужно удвоить, поскольку **каждая** из 13 девушек тоже может пригласить на танец **каждого** из 10 юношей. Всё зависит от условия той или иной задачи!

Этот же принцип справедлив и для более сложных комбинаций, например: сколькими способами можно выбрать 2 юношей **и** 2 девушек для участия в сценке КВН?

Союз **И** недвусмысленно намекает, что комбинации следует перемножить:

$C_{10}^{2} \cdot C_{13}^{2} = 45 \cdot 78 = 3510$ возможных групп артистов.

Иными словами, **каждая** пара юношей (45 уникальных пар) может выступить с **каждой** парой девушек (78 уникальных пар). А если рассмотреть распределение ролей между участниками, то комбинаций будет ещё больше. …Очень хочется, но всё-таки воздержусь от продолжения, чтобы не привить вам отвращение к студенческой жизни =).

Правило умножения комбинаций распространяется и на бОльшее количество множителей:

## Задача 8

Сколько существует трёхзначных чисел, которые делятся на 5?

**Решение**: для наглядности обозначим данное число тремя звёздочками: ***

Комбинации будем считать по разрядам – *слева направо*:

В *разряд тысяч* можно записать любую из $C_{9}^{1} = 9$ цифр (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 или 9). Ноль не годится, так как в этом случае число перестаёт быть трёхзначным.

А вот в *разряд десятков* («посерединке») можно выбрать любую из 10 цифр: $C_{10}^{1} = 10$

По условию, число должно делиться на 5. Число делится на 5, если оно заканчивается на 5 либо на 0. Таким образом, в младшем разряде нас устраивают 2 цифры.

**Итого, существует**:
… трёхзначных чисел, которые делятся на 5.

При этом произведение $C_{9}^{1} \cdot C_{10}^{1} \cdot 2$ расшифровывается так: «9 способами можно выбрать цифру в *разряд сотен* **и** 10 способами выбрать цифру в *разряд десятков* **и** 2 способами – в *разряд единиц*»

Или ещё проще: «**каждая** из 9 цифр в *разряде сотен* комбинируется **с каждой** из 10 цифр в *разряде десятков* **и с каждой** из двух цифр в *разряде единиц*».

**Ответ**: 180

…да, чуть не забыл об обещанном комментарии к Задаче 5, в которой Боре, Диме и Володе можно сдать по одной карте $C_{36}^{3} \cdot P_{3} = 7140 \cdot 6 = 42840$ способами. Умножение здесь имеет тот же смысл: $C_{36}^{3} = 7140$ способами можно извлечь 3 карты из колоды **И в каждой** выборке переставить их $P_{3} = 3! = 6$ способами.

А теперь задача для самостоятельного решения… сейчас придумаю что-нибудь поинтереснее, …пусть будет про ту же русскую версию Блэкджека:

**Задача 9**

Сколько существует выигрышных комбинаций из 2 карт при игре в «очко»?

***Справка:*** *выигрывает комбинация 10 + ТУЗ (11 очков) = 21 очко, и давайте будем считать выигрышной комбинацию из 2 тузов (порядок карт в любой паре не имеет значения).*

Кстати, не надо считать пример примитивным. Блэкджек – это чуть ли не единственная игра, для которой существует математически обоснованный алгоритм, позволяющий систематически выигрывать у казино, и желающие могут найти массу информации об оптимальной стратегии и тактике. Правда, такие мастера довольно быстро попадают в чёрный список всех заведений :)

## ➢ Перестановки, сочетания и размещения с повторениями

Перечисленные виды комбинаций кратко законспектированы в том же *Приложении* ***Формулы комбинаторики*** *(пункт 5)* и сейчас мы разберём их подробнее:

## ➢ Перестановки с повторениями

В перестановках с повторениями, как и в «обычных» перестановках, участвует **сразу всё множество объектов**, но есть одно но: в данном множестве один или бОльшее количество элементов (объектов) повторяются. Встречайте очередной стандарт:

**Задача 10**

Сколько различных слов (не обязательно осмысленных) можно получить перестановкой карточек со следующими буквами: К, О, Л, О, К, О, Л, Ь, Ч, И, К?

**Решение**: поскольку среди букв есть одинаковые, то формула $P_n = n!$ не годится, так как учитывает «холостые» перестановки (например, двух карточек с буквами «к», при этом форма самих карточек и размеры букв не имеют значения). Поэтому здесь имеют место перестановки с повторениями, и осталось выполнить бесхитростные подсчёты – всего у нас 11 карточек, среди которых буква:

К – повторяется 3 раза;
О – повторяется 3 раза;
Л – повторяется 2 раза;
Ь – повторяется 1 раз;
Ч – повторяется 1 раз;
И – повторяется 1 раз.

Контроль: 3 + 3 + 2 + 1 + 1 + 1 = 11, что и требовалось проверить.

По **формуле количества перестановок с повторениями**:

$$P_{11(повт)} = \frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot n_3!\cdot \ldots \cdot n_k!} = \frac{11!}{3!\cdot 3!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} = \frac{39916800}{6\cdot 6\cdot 2} = 554400$$ различных слов

(буквосочетаний) можно получить. Больше полумиллиона!

На практике вполне допустимо не записывать общую формулу и, кроме того, опускать единичные факториалы, то есть в компактном виде решение оформляется так:

…

Но предварительные комментарии о повторяющихся буквах обязательны!

**Ответ**: 554400

Другой типовой пример для самостоятельного решения:

**Задача 11**

Сколькими способами можно расставить белые фигуры *(2 коня, 2 слона, 2 ладьи, 1 ферзь, 1 король)* на первой линии *(8 клеток)* шахматной доски?

Коротенькое решение в конце книги.

### ➢ Сочетания с повторениями

Характерная особенность этого вида комбинаций состоит в том, что выборка проводится из нескольких групп, каждая из которых состоит из одинаковых объектов:

**Задача 12**

В студенческой столовой продают сосиски в тесте, ватрушки и пончики. Сколькими способами можно приобрести пять пирожков?

**Решение**: сразу обращаю внимание на **типичный критерий сочетаний с повторениями** – по условию на выбор предложено не множество объектов как таковое, а **различные виды** объектов; при этом предполагается, что в продаже есть не менее пяти хот-догов, не менее 5 ватрушек и не менее 5 пончиков. Пирожки в каждой группе, разумеется, отличаются – ибо абсолютно идентичные пончики можно смоделировать разве что на компьютере =) Но по логике задачи физические характеристики не имеют значения, и хот-доги / ватрушки / пончики в своих группах считаются одинаковыми.

Что может быть в выборке? Прежде всего, следует отметить, что в выборке обязательно будут одинаковые пирожки (т.к. выбираем 5 штук, а на выбор предложено 3 вида). Варианты тут на любой вкус: 5 хот-догов, 5 ватрушек, 5 пончиков, 3 хот-дога + 2 ватрушки, 1 хот-дог + 2 + ватрушки + 2 пончика и т.д.

Как и при «обычных» сочетаниях, порядок выбора и поедания пирожков в выборке не имеет значения – просто выбрали 5 штук и всё.

Используем формулу $C^m_{n(повт)} = C^m_{n+m-1} = \frac{(n+m-1)!}{(n-1)!\cdot m!}$ количества сочетаний с повторениями:

… способом можно приобрести 5 пирожков.

**Ответ**: 21, приятного аппетита!

Аналогичный пример для самостоятельного решения:

**Задача 13**

В кошельке находится достаточно большое количество 1-, 2-, 5- и десятирублёвых монет. Сколькими способами можно извлечь три монеты из кошелька?

И в целях самоконтроля ответьте на пару простых вопросов:
1) Могут ли в выборке все монеты быть разными?
2) Назовите самую «дешевую» и самую «дорогую» комбинацию монет.

Из моего личного опыта могу сказать, что сочетания с повторениями – наиболее редкий гость на практике, чего не скажешь о следующем виде комбинаций:

### Размещения с повторениями

Из множества, состоящего из $n$ элементов, выбирается $m$ элементов, при этом важен порядок элементов в каждой выборке. И было бы это «обычными» размещениями, но изюминка в том, что любой объект исходного множества мы можем выбирать неоднократно, причём «от множества не убудет»!

Когда так бывает? Ну, конечно, при выборе цифр и букв. Как говорится, если 10 раз сказать «а», то буква «а» из алфавита никуда не денется.

На практике распространена задача с кодовым замком, но по причине развития технологий актуальнее рассмотреть его цифрового потомка:

**Задача 14**

Сколько существует четырёхзначных пин-кодов?

**Решение**: на самом деле для разруливания задачи достаточно знаний правил комбинаторики: $C_{10}^{1}=10$ способами можно выбрать первую цифру пин-кода **и** $C_{10}^{1}=10$ способами – вторую цифру пин-кода **и** столькими же способами – третью **и** столькими же – четвёртую. Таким образом, по правилу умножения комбинаций, четырёхзначный пин-код можно составить:
… способами.

А теперь **по формуле** $A_{n(повт)}^{m}=n^{m}$ **размещений с повторениями**. По условию, нам предложен набор из $n=10$ цифр, из которого выбираются $m=4$ цифры и располагаются <u>в определенном порядке</u>, при этом цифры в выборке могут повторяться *(т.к. любой цифрой можно пользоваться произвольное количество раз)*. Таким образом:
$A_{10(повт)}^{4}=10^{4}=10000$

**Ответ**: 10000

Что тут приходит на ум… …если банкомат «съедает» карточку после третьей неудачной попытки ввода пин-кода, то шансы подобрать его наугад весьма призрачны.

И кто сказал, что в комбинаторике нет никакого практического смысла?

Ещё одна познавательная и практически важная задача:

**Задача 15**

Согласно государственному стандарту, автомобильный номерной знак состоит из 3 цифр и 3 букв. При этом недопустим номер с тремя нулями, а буквы выбираются из набора А, В, Е, К, М, Н, О, Р, С, Т, У, Х *(используются только те буквы кириллицы, написание которых совпадает с латинскими буквами)*.

Сколько различных номерных знаков можно составить для региона?

Не так их, кстати, и много. В крупных регионах такого количества не хватает, и поэтому для них существуют несколько кодов к надписи RUS.

…хотел похвастаться эксклюзивом, да оказалось не эксклюзивом =) Заглянул в Википедию – там есть расчёты, правда, без комментариев.

И теперь во всеоружии мы возвращаемся к основному курсу:

## 1.4. Классическое определение вероятности:

Вероятностью наступления события $A$ в некотором испытании называют отношение $P(A)=\frac{m}{n}$, где:

$n$ – общее число всех равновозможных, элементарных исходов этого испытания, которые образуют полную группу событий;

$m$ – количество элементарных исходов, ***благоприятствующих*** событию $A$.

При броске монеты может выпасть либо орёл, либо решка – данные события образуют полную группу, таким образом, общее число исходов $n=2$; при этом, каждый из них элементарен и равновозможен. Событию $A_O$ благоприятствует $m=1$ исход (выпадение орла). По классическому определению вероятностей: $P(A_O)=\frac{m}{n}=\frac{1}{2}$.

Аналогично, в результате броска кубика может появиться $n=6$ элементарных равновозможных исходов, образующих полную группу, а событию $B_5$ благоприятствует единственный $m=1$ исход (выпадение пятёрки). Поэтому $P(B_5)=\frac{m}{n}=\frac{1}{6}$.

**Особое внимание** обращаю на третий пример. Здесь будет некорректным сказать *«раз в колоде 4 масти, то вероятность извлечения трефы* $P(C_T)=\frac{1}{4}$». В определении речь идёт об элементарных исходах, поэтому правильный порядок рассуждений таков: всего в колоде 36 карт *(несовместные элементарные исходы, образующие полную группу)*, из них 9 карт трефовой масти *(количество благоприятствующих событию $C_T$ исходов)*; по классическому определению вероятности: $P(C_T)=\frac{m}{n}=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$. **Именно так!**

«Крайние» значения вероятности (ноль и единица) получаются посредством точно таких же рассуждений. Пусть из некой урны, в которой находятся 10 красных шаров, наугад извлекается 1 шар. Рассмотрим следующие события:

$K$ – из урны будет извлечён красный шар;
$Z$ – из урны будет извлечён зелёный шар.

Общее количество исходов: $n = 10$.

Событию $K$ благоприятствуют все возможные исходы $(m = 10)$, следовательно, $P(K) = \frac{m}{n} = \frac{10}{10} = 1$, то есть данное событие достоверно. Для 2-го же события благоприятствующие исходы отсутствуют $(m = 0)$, поэтому $P(Z) = \frac{m}{n} = \frac{0}{10} = 0$, то есть событие $Z$ невозможно.

**НЕ ПРОПУСКАЕМ задачи! Особенно, если они кажутся элементарными.**

## Задача 16

В урне находится 15 белых, 5 красных и 10 чёрных шаров. Наугад извлекается 1 шар, найти вероятность того, что он будет: а) белым, б) красным, в) чёрным.

**Важнейшей предпосылкой** для использования классического определения вероятности является **возможность подсчёта общего количества исходов**.

И **решение** как раз с этого и начинается, всего в урне:

15 + 5 + 10 = 30 шаров, при этом справедливы следующие факты:

– извлечение любого шара одинаково возможно ***(равновозможность** исходов)*, при этом исходы ***элементарны*** и образуют ***полную группу событий*** *(т.е. в результате испытания обязательно будет извлечён какой-то один из 30 шаров)*.

Таким образом, общее число исходов: $n = 30$.

Рассмотрим событие: $A$ – из урны будет извлечён белый шар. Данному событию благоприятствуют $m = 15$ элементарных исходов, поэтому по классическому определению:

$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$ – вероятность того, что из урны будет извлечён белый шар.

Как ни странно, даже в такой простой задаче можно допустить серьёзную неточность, на которой я уже заострял внимание. В чём здесь подводный камень? Здесь некорректно рассуждать, что *«раз половина шаров белые, то вероятность извлечения белого шара $P(A) = \frac{1}{2}$»*.

В классическом определении вероятности речь идёт об **ЭЛЕМЕНТАРНЫХ** исходах, и дробь $\frac{15}{30}$ следует обязательно прописать!

С другими пунктами аналогично, рассмотрим следующие события:

$B$ – из урны будет извлечён красный шар;
$C$ – из урны будет извлечён чёрный шар.

Событию $B$ благоприятствует 5 элементарных исходов, а событию $C$ – 10 элементарных исходов. Таким образом, соответствующие вероятности:

$$P(B) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6};$$

$$P(C) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}.$$

**Типичная проверка многих задач по терверу** осуществляется с помощью теоремы о сумме вероятностей событий, образующих полную группу. В нашем случае события $A, B, C$ образуют полную группу, а значит, сумма соответствующих вероятностей должна обязательно равняться единице: $P(A) + P(B) + P(C) = 1$.

Проверим, так ли это: …, в чём и хотелось убедиться.

**Ответ**: а) $\frac{1}{2}$, б) $\frac{1}{6}$, в) $\frac{1}{3}$ – в ответе достаточно записать лишь числа.

На практике распространён «скоростной» вариант оформления **решения**:

Всего: 15 + 5 + 10 = 30 шаров в урне. По классическому определению:

$p_Б = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$ – вероятность того, то из урны будет извлечён белый шар;

$p_К = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$ – вероятность того, то из урны будет извлечён красный шар;

$p_Ч = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$ – вероятность того, то из урны будет извлечён чёрный шар.

**Ответ**: а) $\frac{1}{2}$, б) $\frac{1}{6}$, в) $\frac{1}{3}$

Однако, если в условии несколько пунктов, то решение зачастую удобнее оформить первым способом, который отнимает чуть больше времени, но зато всё «раскладывает по полочкам» и позволяет легче сориентироваться в задаче.

## Задача 17

В магазин поступило 30 холодильников, пять из которых имеют заводской дефект. Случайным образом выбирают один холодильник. Какова вероятность того, что он будет без дефекта?

Это пример для самостоятельного решения. Выберите целесообразный вариант оформления и сверьтесь с образцом в конце книги.

В простейших случаях количество общих и количество благоприятствующих исходов «лежат на поверхности», но чаще их приходится добывать самостоятельно. Каноничная серия задач о забывчивом абоненте:

## Задача 18

Набирая номер телефона, абонент забыл две последние цифры, но помнит, что одна из них ноль, а другая нечётная. Найти вероятность того, что он наберёт правильный номер

***Примечание***: *ноль – это чётное число (делится на 2 без остатка)*

**Решение**: сначала найдём общее количество исходов. Привлекаем на помощь комбинаторику:

$C_{10}^{1}=10$ способами можно набрать предпоследнюю цифру;

$C_{10}^{1}=10$ способами можно набрать последнюю цифру.

По правилу умножения комбинаций: $C_{10}^{1}\cdot C_{10}^{1}=100$ способами можно набрать предпоследнюю цифру **и** последнюю цифру.

В целях повторения расшифруем эту запись другим способом: «**каждая** цифра на *предпоследнем месте* комбинируется **с каждой** цифрой на *последнем месте*, и таких комбинаций сто»

Как вариант, можно использовать формулу количества размещений с повторениями: $A_{10(повт)}^{2}=10^{2}=100$ способами можно составить упорядоченный набор из двух цифр, причём цифры могут оказаться и одинаковыми.

По возможности всегда старайтесь анализировать найденное множество исходов. ЧТО это за комбинации и действительно ли их ТАКОЕ количество? В данной задаче ответ на эти вопросы элементарен:

…

С общим количеством исходов разобрались, теперь благоприятствующие исходы. По условию, абонент помнит, что одна из цифр – ноль, а другая цифра – нечётная. Здесь рациональнее не мудрить с комбинаторикой и воспользоваться **методом прямого перечисления исходов**. То есть, при оформлении решения просто записываем все благоприятствующие комбинации:

01, 03, 05, 07, 09
10, 30, 50, 70, 90
и подсчитываем их – всего: 10 благоприятствующих исходов.

По классическому определению:

$p=\dfrac{1}{10}=0{,}1$ – вероятность того, что абонент наберёт правильный номер

**Ответ**: 0,1

Десятичные дроби в тервере смотрятся вполне уместно, но можно придерживаться и традиционного вышматовского стиля, оперируя только обыкновенными дробями.

Продвинутая задача для самостоятельного решения:

**Задача 19**

Абонент забыл пин-код к своей сим-карте, однако помнит, что он содержит три «пятёрки», а одна из цифр – то ли «семёрка», то ли «восьмёрка». Какова вероятность включить телефон с первой попытки?

Иногда в задаче не просматривается явное комбинаторное решение, и перечисление всех комбинаций (фактически вынужденное) оказывается весьма кропотливым занятием. В частности, так обстоят дела в следующей, не менее популярной группе задач, где подкидываются 2 игральных кубика *(реже – бОльшее количество)*:

**Задача 20**

Найти вероятность того, что при бросании двух игральных костей в сумме выпадет:

а) пять очков;
б) не более четырёх очков;
в) от 3 до 9 очков включительно.

**Решение**: найдём общее количество исходов:

$C_6^1 = 6$ способами может выпасть грань 1-го кубика **и** $C_6^1 = 6$ способами может выпасть грань 2-го кубика; по правилу умножения комбинаций, всего: $C_6^1 \cdot C_6^1 = 6 \cdot 6 = 36$ возможных комбинаций. Иными словами, **каждая** грань 1-го кубика может составить упорядоченную пару **с каждой** гранью 2-го кубика. Условимся записывать такую пару в виде $(a, b)$, где $a$ – цифра, выпавшая на 1-м кубике, $b$ – цифра, выпавшая на 2-м кубике. Например:

$(3, 5)$ – на первом кубике выпало 3 очка, на втором – 5 очков, их сумма: 3 + 5 = 8;

$(6, 1)$ – на первом кубике выпало 6 очков, на втором – 1 очко, их сумма: 6 + 1 = 7;

$(2, 2)$ – на обеих костях выпало 2 очка, сумма: 2 + 2 = 4.

Очевидно, что наименьшую сумму даёт пара $(1, 1)$, а наибольшую – пара $(6, 6)$.

**а)** Рассмотрим событие: $A$ – в результате броска двух игральных костей выпадет 5 очков. Запишем и подсчитаем количество исходов, которые благоприятствуют данному событию:

…

Итого: 4 благоприятствующих исхода.

По классическому определению:

$P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$ – искомая вероятность.

**б)** Рассмотрим событие: $B$ – выпадет не более 4 очков. То есть, либо 2, либо 3, либо 4 очка. Снова перечисляем и подсчитываем благоприятствующие комбинации, слева я буду записывать суммарное количество очков, а после двоеточия – подходящие пары:

$2\,\textit{очка}: \quad (1,1)$

$3\,\textit{очка}: \quad (1,2); \ldots$

$4\,\textit{очка}: \quad \ldots$

Итого: 6 благоприятствующих комбинаций.

Таким образом:

$P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ – вероятность того, что выпадет не более 4 очков.

**в)** Рассмотрим событие: $C$ – выпадет от 3 до 9 очков включительно. Здесь можно пойти прямой дорогой, но… что-то не хочется. Да, некоторые пары уже перечислены в предыдущих пунктах, но работы все равно предстоит многовато.

Как лучше поступить?

В подобных случаях рациональным оказывается окольный путь. Рассмотрим противоположное событие: $\overline{C}$ – выпадет 2 или 10 или 11 или 12 очков.

В чём смысл? Противоположному событию благоприятствует значительно меньшее количество пар:

$2\,\textit{очка}: \quad (1,1)$

$10\,\textit{очков}: \quad \ldots$

$11\,\textit{очков}: \quad (5,6); (6,5)$

$12\,\textit{очков}: \quad (6,6)$

Итого: 7 благоприятствующих исходов.

По классическому определению:

$P(\overline{C}) = \frac{7}{36}$ – вероятность того, что выпадет меньше трёх или больше 9 очков.

Далее пользуемся тем, что сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$P(C) + P(\overline{C}) = 1 \quad \Rightarrow \quad P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - \frac{7}{36} = \frac{29}{36}$ – вероятность того, что выпадет от 3 до 9 очков включительно.

Особо щепетильные люди могут перечислить все 29 пар, выполнив тем самым проверку.

**Ответ**: а) $\frac{1}{9}$, б) $\frac{1}{6}$, в) $\frac{29}{36}$

В следующей задаче повторим таблицу умножения:

**Задача 21**

Найти вероятность того, что при броске двух игральных костей произведение очков:

а) будет равно семи;
б) окажется не менее 20;
в) будет чётным.

Краткое решение и ответ в конце книги.

Помимо прямого перечисления и подсчёта исходов, в ходу также различные комбинаторные формулы. Эпичная задача про лифт:

**Задача 22**

В лифт 20-этажного дома на первом этаже зашли 3 человека. И поехали. Найти вероятность того, что:

а) они выйдут на разных этажах
б) двое выйдут на одном этаже;
в) все выйдут на одном этаже.

**Решение**: вычислим общее количество исходов: $C_{19}^1 = 19$ способами может выйти из лифта 1-й пассажир **и** $C_{19}^1 = 19$ способами – 2-й пассажир **и** $C_{19}^1 = 19$ способами – третий пассажир. По правилу умножения комбинаций: $C_{19}^1 \cdot C_{19}^1 \cdot C_{19}^1 = 19 \cdot 19 \cdot 19 = 6859$ возможных исходов. То есть, **каждый** этаж выхода 1-го человека может комбинироваться **с каждым** этажом выхода 2-го человека и **с каждым** этажом выхода 3-го человека.

Второй способ опять же основан на размещениях с повторениями:
$A_{19(повт)}^3 = 19^3 = 6859$ способами можно разместить пассажиров по трём этажам, причём этажи (два или все три) могут совпадать.

Кому как понятнее, кому как удобнее.

**а)** Рассмотрим событие: $A$ – пассажиры выйдут на разных этажах. В данном случае имеют место быть размещения:
$A_{19}^3 = 17 \cdot 18 \cdot 19 = 5814$ способами могут выйти 3 пассажира на разных этажах.

Или так: $C_{19}^3 = \frac{19!}{16! \cdot 3!} = ...$ способами можно выбрать 3 этажа из 19 **и** $P_3 = 3! = 6$ способами «переставить» пассажиров в каждом варианте. По правилу умножения комбинаций: $C_{19}^3 \cdot P_3 = 969 \cdot 6 = 5814$.

По классическому определению вероятности:
$$P(A) = \frac{5814}{6859} = \frac{306}{361}$$

Теперь подумаем вот над какой вещью: пункт «бэ» достаточно сложен, и значительная часть читателей просто не справятся с этим пунктом. Но только не те, которые прочитают пару следующих абзацев!

**в)** Рассмотрим событие: $B$ – пассажиры выйдут на одном этаже. Данному событию благоприятствуют $C_{19}^{1}=19$ исходов и по классическому определению, соответствующая вероятность: $P(B)=\frac{19}{6859}=\frac{1}{361}$.

Заходим с чёрного хода:

**б)** Рассмотрим событие: $C$ – два человека выйдут на одном этаже *(и, соответственно, третий – на другом)*.

События $A, B, C$ образуют полную группу *(считаем, что в лифте никто не уснёт и лифт не застрянет =))*, а значит, $P(A)+P(B)+P(C)=1$.

В результате, искомая вероятность:

$$P(C)=1-P(A)-P(B)=1-\frac{306}{361}-...$$

Таким образом, теорема о сложении вероятностей событий, образующих полную группу, может быть не только удобной, но и стать самой настоящей палочкой-выручалочкой!

**Ответ**: а) $\frac{306}{361}\approx 0{,}8476$, б) $\frac{54}{361}\approx 0{,}1496$, в) $\frac{1}{361}\approx 0{,}0028$

Когда получаются большие дроби, то хорошим тоном будет указать их приближенные десятичные значения. Обычно округляют до 2-4 знаков после запятой.

Поскольку события пунктов «а», «бэ», «вэ» образуют полную группу, то есть смысл выполнить контрольную проверку, причём лучше с приближенными значениями:

$0{,}8476+0{,}1496+0{,}0028=1$, что и требовалось проверить

Иногда по причине погрешности округлений может получиться 0,9999 либо 1,0001, в этом случае одно из приближенных значений следуют «подогнать» так, чтобы в сумме нарисовалась «чистая» единица.

Творческая задача для самостоятельного решения:

**Задача 23**

У Васи дома живут четыре кота, каждый из которых после завтрака случайным образом может выйти на прогулку или остаться дома. Какова вероятность того, что завтра после завтрака уйдут гулять 2 кота.

Да, авторы задачников, преподаватели любят придумывать свои задачи, и я не исключение. Цель благородна – заставить учащихся ДУМАТЬ и РАССУЖДАТЬ самостоятельно, а не пользоваться стандартными шаблонами.

Иногда в ходе рассуждений бывает просто необходимо что-нибудь почертить, что-нибудь порисовать, чтобы отыскать решение:

## Задача 24

На семиместную скамейку случайным образом рассаживается 7 человек. Какова вероятность того, что два определённых человека окажутся рядом?

**Решение**: с общим количеством исходов проблем не возникает:
$P_7 = 7! = 5040$ способами могут рассесться 7 человек на скамейке.

Но вот как подсчитать количество благоприятствующих исходов? Тривиальные формулы не подходят и единственный путь – это логические рассуждения. Сначала рассмотрим ситуацию, когда Саша и Маша оказались рядом на левом краю скамейки:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| * | * | | | | | |

Очевидно, что порядок имеет значение: слева может сидеть Саша, справа Маша и наоборот. Но это ещё не всё – **для каждого** из этих двух случаев остальные люди могут рассесться на свободных местах $5! = 120$ способами. Выражаясь комбинаторно, Сашу и Машу можно переставить на соседних местах $P_2 = 2!$ способами **и** для каждой перестановки других людей можно переставить $P_5 = 5! = 120$ способами.

Таким образом, по правилу умножения комбинаций, получается $2! \cdot 5!$ исходов.

Но и это ещё не всё! Перечисленные факты справедливы **для каждой** пары соседних мест:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| * | * | | | | | |
| | * | * | | | | |
| | | * | * | | | |
| | | | * | * | | |
| | | | | * | * | |
| | | | | | * | * |

Интересно отметить, что если скамейку «скруглить» *(соединяя левое и правое место)*, то получится дополнительная, седьмая пара соседних мест. Но не будем отвлекаться. Согласно тому же принципу умножения комбинаций, получаем окончательное количество благоприятствующих исходов: $6 \cdot 2! \cdot 5!$

По классическому определению:
$p = \dfrac{6 \cdot 2! \cdot 5!}{7!} = ...$ – вероятность того, что два определённых человека окажутся рядом.

**Ответ**: $\dfrac{2}{7} \approx ...$

**Не стесняйтесь снабжать трудные задачи рисунками или чертежами**, поскольку «голые» словесные комментарии чреваты ошибками – если и не запутаетесь, то можете запросто обсчитаться.

И в заключительной части параграфа рассмотрим очень распространённый тип задач, который с высочайшей вероятностью встретится в вашем курсе:

## Задача 25

Какова вероятность того, что в четырех сданных картах будет один туз и один король?

**Решение**: коль скоро неизвестный автор умолчал о колоде, будем считать, что в ней 36 карт. Ну а зачем нам больше? =)

Вычислим общее количество исходов. Сколькими способами можно извлечь 4 карты из колоды? Наверное, все поняли, что речь идёт о количестве сочетаний:

$C_{36}^{4}=\dfrac{36!}{32!\cdot 4!}=\dfrac{33\cdot 34\cdot 35\cdot 36}{24}=58905$ способами можно выбрать 4 карты из колоды.

Теперь считаем благоприятствующие исходы. По условию, в выборке из 4 карт должен быть один туз, один король и, о чём не сказано открытым текстом – **две другие карты**:

$C_{4}^{1}=4$ способами можно извлечь одного туза;

$C_{4}^{1}=4$ способами можно выбрать одного короля.

Исключаем из рассмотрения тузов и королей:
36 – 4 – 4 = 28

$C_{28}^{2}=\dfrac{28!}{26!\cdot 2!}=\dfrac{27\cdot 28}{2}=378$ способами можно извлечь две другие карты.

По правилу умножения комбинаций:

$C_{4}^{1}\cdot C_{4}^{1}\cdot ...=6048$ способами можно извлечь искомую комбинацию карт (1-го туза **и** 1-го короля **и** две другие карты).

Прокомментирую комбинационный смысл записи $C_{4}^{1}\cdot C_{4}^{1}\cdot C_{28}^{2}$ другим способом: **каждый** туз комбинируется **с каждым** королем и **с каждой** возможной парой других карт.

По классическому определению:

$p=\dfrac{C_{4}^{1}\cdot C_{4}^{1}\cdot C_{28}^{2}}{C_{36}^{4}}=\dfrac{6048}{58905}=...$ – вероятность того, что среди четырех сданных карт будет один туз и один король.

Если хватает времени и терпения, максимально сокращайте большие дроби.

**Ответ**: …

Стандартная задача для самостоятельного решения:

**Задача 26**

В ящике находится 15 качественных и 5 бракованных деталей. Наудачу извлекаются 2 детали. Найти вероятность того, что:

а) обе детали будут качественными;
б) одна деталь будет качественной, а одна – бракованной;
в) обе детали бракованны.

События перечисленных пунктов образуют полную группу, поэтому проверка здесь напрашивается сама собой.

И ещё одна задача, которая не только популярна, но и актуальна для многих читателей. Когда она мне попадается на глаза, то я всегда думаю: «чего же он так много выучил-то?!». Поэтому сделаю пример более реалистичным :=)

**Задача 27**

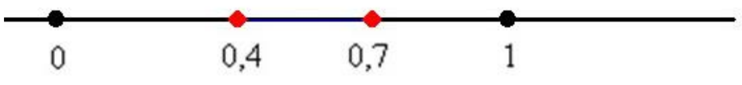
Студент знает ответы на 25 экзаменационных вопросов из 60. Какова вероятность сдать экзамен, если для этого необходимо ответить не менее чем на 2 из 3 вопросов?

Узнайте, насколько велики ваши шансы ☺ И, конечно же, эти шансы нужно всячески увеличивать, едем дальше:

## 1.5. Геометрическое определение вероятности

Классическое определение вероятности оказывается эффективным для решения целого спектра задач, но с другой стороны, обладает и рядом ограничений. Одним из таких ограничений является тот факт, что оно неприменимо к испытаниям с бесконечным количеством исходов. Простейший пример:

На отрезок $[0;1]$ наудачу бросается точка. Какова вероятность того, что она попадёт в промежуток $[0{,}4;\,0{,}7]$?




Поскольку на отрезке бесконечно много точек, то здесь нельзя применить формулу $P(A)=\dfrac{m}{n}$ *(ввиду бесконечно большого значения «эн»)* и поэтому на помощь приходит другой подход, называемый ***геометрическим определением вероятности***:

Вероятность наступления некоторого события $A$ в испытании равна отношению $P(A)=\dfrac{g}{G}$, где $G$ – *геометрическая мера*, выражающая общее число всех возможных и равновозможных исходов данного испытания, а $g$ – *мера*, выражающая количество благоприятствующих событию $A$ исходов.

На практике в качестве такой геометрической меры чаще всего выступает длина или площадь, реже – объём.

Рассмотрим событие: $A$ – брошенная на отрезок $[0;1]$ точка, попала в промежуток $[0{,}4;\,0{,}7]$. Очевидно, что общее число исходов выражается длиной бОльшего отрезка: $L = 1 - 0 = 1\,ед.$, а благоприятствующие событию $A$ исходы – длиной вложенного отрезка: $l = 0{,}7 - 0{,}4 = 0{,}3\,ед.$ По геометрическому определению вероятности:

$$P(A) = \frac{l}{L} = \frac{0{,}3\,ед.}{1\,ед.} = 0{,}3$$

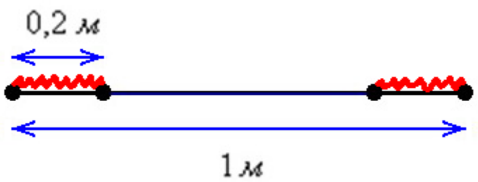
***Примечание**: ед. – метрические единицы: метры, сантиметры или какие-то др.*

Слишком просто? Как и в случае с классическим определением, это обманчивое впечатление. Обстоятельно и добросовестно разбираемся в практических примерах:

**Задача 28**

Метровую ленту случайным образом разрезают ножницами. Найти вероятность того, что длина обрезка составит не менее 80 см.

**Решение**: «чего тут сложного? Вероятность равна $\frac{1}{5}$». Это автоматическая ошибка, которую допускают по небрежности. Да, совершенно верно – длина обрезка составит не менее 80 см, если от ленты отрезать меньше 20 сантиметров. Но здесь часто забывают, что искомый разрез можно сделать **как с одного** конца ленты, **так и с другого**:




Рассмотрим событие: $A$ – длина обрезка составит не менее 0,8 м.

Поскольку ленту можно разрезать где угодно, то общему числу исходов соответствует её длина: $L = 1\,м.$ Благоприятствующим исходам соответствуют участки, отмеченные красным цветом, и их суммарная длина равна: $l = 0{,}2 + 0{,}2 = 0{,}4\,м.$

По геометрическому определению:

$$P(A) = \frac{l}{L} = \frac{0{,}4\,м}{1\,м} = 0{,}4$$

**Ответ**: 0,4

**Какой можно сделать вывод?**

**Даже если задача кажется вам очень простой, НЕ СПЕШИТЕ**

При оформлении задач следует обязательно указывать размерность *(единицы, метры, квадратные единицы, квадратные метры и т.д.)*. Кстати, обратите внимание, что на финальном этапе вычислений геометрическая мера сокращается. Так в рассмотренном примере, сократились метры:

$\frac{0{,}4\,\cancel{м}}{1\,\cancel{м}}$, в результате чего получилась привычная безразмерная вероятность.

Следующая задача для самостоятельного решения:

**Задача 29**

После бури на участке между 40-м и 70-м километрами телефонной линии произошёл обрыв провода. Какова вероятность того, что он произошёл между 50-м и 55-м километрами линии?

Значительно чаще встречаются примеры, в которых фигурируют площади:

**Задача 30**

В треугольник со сторонами $a = 9, b = 13, c = 16$ вписан круг. Точка $M$ произвольно ставится в треугольник. Найти вероятность того, что точка попадёт в круг.

Вспоминаем геометрию: вписанный круг лежит внутри треугольника и касается его сторон в трёх точках. …Представили? Отлично!

**Решение**: поскольку точка ставится в треугольник, а круг лежит внутри, то общему числу исходов соответствует площадь треугольника, а множеству благоприятствующих исходов – площадь вписанного круга.

Осталось вспомнить или отыскать (проще всего в Сети) школьные геометрические формулы. Если даны длины сторон треугольника, то его площадь удобно найти по *формуле Герона*:

$S_T = ...$, где $a, b, c$ – длины сторон треугольника, а $p$ – полупериметр.

Сначала вычислим полупериметр треугольника: $p = \dfrac{a+b+c}{2} = \dfrac{9+13+16}{2} = 19$ *ед.*, а затем его площадь:

$$S_T = \sqrt{19\cdot(19-9)\cdot(19-13)\cdot(19-16)} = \sqrt{19\cdot 10\cdot 6\cdot 3} = 6\sqrt{95}\ \text{ед.}^2$$

Площадь круга найдём по известной формуле $S_K = \pi r^2$. Если круг вписан в треугольник, то его радиус можно рассчитать по формуле $r = \dfrac{S_T}{p}$, этого я не вообще не знал – только что нашёл в Интернете.

Итак, площадь вписанного круга:

$$S_K = \pi\cdot\left(\frac{S_T}{p}\right)^2 = \pi\cdot\left(\frac{6\sqrt{95}}{19}\right)^2 = \pi\cdot\frac{36\cdot 95}{19^2} = \frac{180\pi}{19}\ \text{ед.}^2$$

По геометрическому определению:

$$p = \frac{S_K}{S_T} = \frac{\frac{180\pi}{19}\ \text{ед.}^2}{6\sqrt{95}\ \text{ед.}^2} = ...$$ – вероятность того, что точка $M$ попадёт во вписанный круг.

**Ответ**: $\approx 0{,}51$

Более простой пример для самостоятельного решения:

**Задача 31**

В круге радиуса 10 см находится прямоугольный треугольник с катетами 12 и 7 см. В круг наудачу ставится точка. Найти вероятность того, что она не попадёт в данный треугольник.

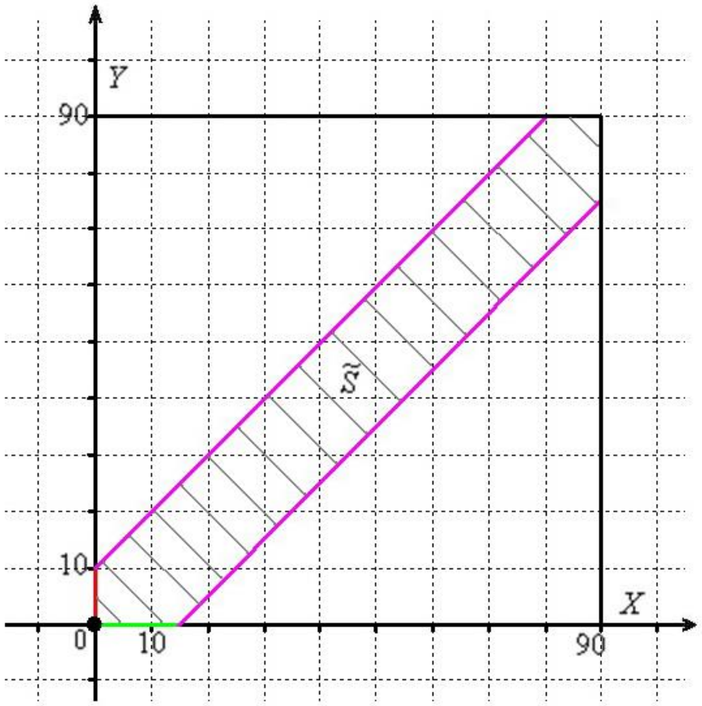
Следует отметить, что в этой задаче треугольник вовсе не обязан как-то касаться окружности, он просто расположен внутри круга и всё. **Будьте внимательны!**

А теперь рассмотрим широко известную задачу о встрече:

**Задача 32**

Две грузовые машины могут подойти на погрузку в промежуток времени от 19.00 до 20.30. Погрузка первой машины длится 10 минут, второй – 15 минут. Какова вероятность того, что одной машине придется ждать окончания погрузки другой?

**Решение**: сначала выясним длительность временнОго промежутка, на котором могут пересечься автомобили: это 90 минут (коль скоро, от 19.00 до 20.30). Изобразим прямоугольную систему координат, где в подходящем масштабе построим квадрат размером 90 на 90 единиц:




Общему множеству исходов соответствует площадь данного квадрата: $S = 90^2 = 8100\ ед.^2$

Далее по оси $OX$ от начала координат откладываем время погрузки одного автомобиля (зелёная линия), а по оси $OY$ – время погрузки другого автомобиля (красная линия) *(можно наоборот, это не повлияет на решение)*.

Теперь из правого конца зелёного отрезка и из верхнего конца красного отрезка под углом 45 градусов проводим две линии внутри квадрата (малиновые отрезки).

Множеству благоприятствующих исходов (когда автомобили «пересекутся» во времени) соответствует площадь $\tilde{S}$ заштрихованной фигуры. В принципе, её можно вычислить «на пальцах», но технически проще использовать окольный путь, а именно, вычислить площади двух прямоугольных треугольников. Используем формулу:

$S = \frac{1}{2}ab$, где $a, b$ – длины катетов.

В нашей задаче: верхний треугольник имеет катеты длиной по 80 единиц, нижний треугольник – по 75 единиц. Обратите внимание, что **в общем случае эти треугольники не равны**.

Таким образом, суммарная площадь треугольников составляет:

$$S^* = \frac{1}{2}\cdot 80\cdot 80 + \frac{1}{2}\cdot 75\cdot 75 = 3200 + 2812{,}5 = 6012{,}5\ ед.^2$$

И бесхитростный заключительный манёвр: из площади квадрата вычитаем площади треугольников, получая тем самым благоприятствующую площадь:

$$\tilde{S} = S - S^* = 8100 - \ldots$$

По геометрическому определению:

$p = \frac{\tilde{S}}{S} = \ldots$ – вероятность того, что одной машине придется ждать окончания погрузки другой.

**Ответ**: $\approx 0{,}26$

Подробное объяснение этого способа решения можно найти, например, в учебном пособии В.Е. Гмурмана, я же остановился лишь на техническом алгоритме, дабы не тратить ваше драгоценное время.

И если в разобранной задаче встреча явно нежелательна, то в следующей, скорее, наоборот. Романтичный эпизод для самостоятельного изучения:

## Задача 33

Студенты случайным образом приходят в столовую с 14.00 до 15.00, при этом обед каждого из них занимает примерно 20 минут. Найти вероятность того, что: а) Коля встретится с Олей во время обеда, б) данная встреча не состоится.

Не нужно печалиться по поводу пункта «бэ» – любовь приходит и уходит, а кушать хочется всегда! =)

Решение, чертёж и ответ в конце книги.

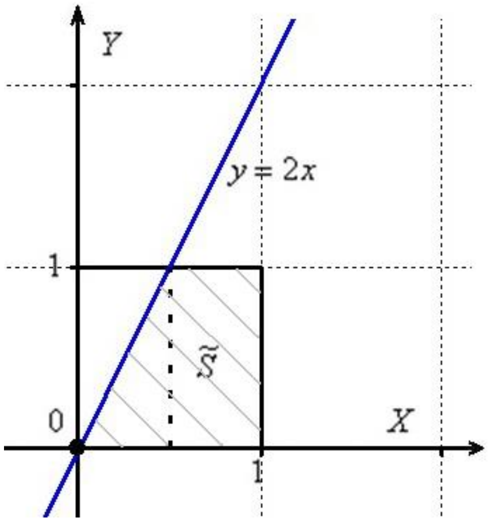
Оставшиеся примеры параграфа посвящены не менее распространённому типу задач, где фигурируют неравенства.

Для начала разогревающий пример:

## Задача 34

В квадрат с вершинами $(0;0), (1;0), (1;1), (0;1)$ наудачу брошена точка $(x;y)$. Найдите вероятность того, что координаты этой точки удовлетворяют неравенству $y < 2x$.

**Решение**: изобразим на чертеже искомый квадрат и **прямую** $y = 2x$:




Общему множеству исходов соответствует площадь квадрата $S = 1 \cdot 1 = 1\,ед.^2$

Прямая $y = 2x$ делит квадрат на треугольник и трапецию. Как определить фигуру, которая удовлетворяет условию $y < 2x$? Вспоминаем **линейные неравенства**: нужно взять любую точку, **не** принадлежащую прямой $y = 2x$, например, точку $(1;0)$ и подставить её координаты в неравенство:

$$0 < 2 \cdot 1$$

$$0 < 2$$

Получено *верное неравенство*, значит, множеству благоприятствующих исходов соответствует площадь $\tilde{S}$ трапеции. Рассчитаем данную площадь как сумму площадей прямоугольного треугольника и прямоугольника *(разделены на чертеже пунктиром)*:

$$\tilde{S} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + \ldots$$

По геометрическому определению:

$$P(y < 2x) = \frac{\tilde{S}}{S} = \frac{\frac{3}{4}\,ед.^2}{1\,ед.^2} = \frac{3}{4}$$ – вероятность того, что координаты брошенной в данный квадрат точки удовлетворяют неравенству $y < 2x$.

**Ответ**: $P(y < 2x) = \frac{3}{4}$

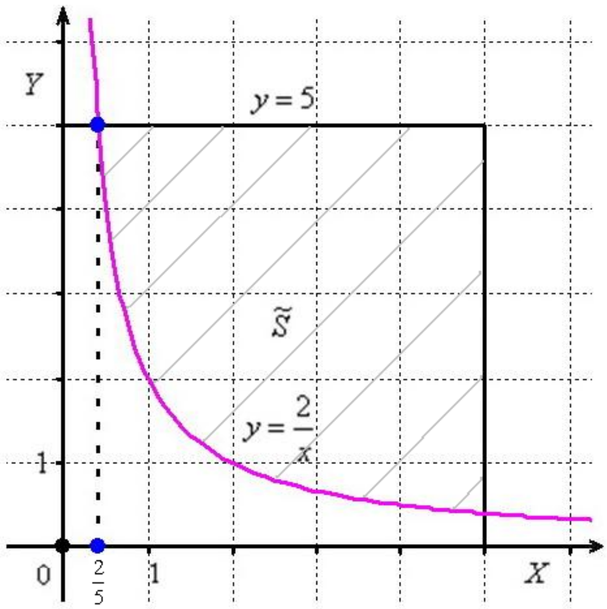
…аналитическую геометрию немного вспомнили, теперь на очереди математический анализ, ибо неравенства бывают не только линейными:

## Задача 35

Загадываются два числа $x$ и $y$ в промежутке от 0 до 5. Какова вероятность, что $xy > 2$?

Схема **решения** уже знакома: коль скоро загадываются 2 произвольных числа от нуля до пяти *(они могут быть и иррациональными)*, то общему количеству исходов соответствует площадь квадрата $S = 5 \cdot 5 = 25\, ед.^2$

Изобразим ветвь **гиперболы** $xy = 2 \;\Rightarrow\; y = \dfrac{2}{x}$, которая делит квадрат на две части:




Теперь выясним, какой из этих двух «кусков» удовлетворяет неравенству $xy > 2$. Для этого выберем любую точку, **не** принадлежащую гиперболе, проще всего взять $(0;0)$, и подставим её координаты в наше неравенство:

$0 \cdot 0 > 2$

$0 > 2$

Получено *неверное неравенство*, а значит, условию $xy > 2$ соответствует «верхний кусок», площадь $\tilde{S}$ которого, деваться тут некуда, придётся вычислить с помощью **определённого интеграла**. Уточним нижний предел интегрирования аналитически *(найдём точку пересечения гиперболы $xy = 2$ и прямой $y = 5$)*:

$$\begin{cases} xy = 2 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow\; x \cdot 5 = 2 \;\Rightarrow\; x = \frac{2}{5}$$

На отрезке $\left[\frac{2}{5}; 5\right]$ прямая $y = 5$ расположена *не ниже* гиперболы $y = \dfrac{2}{x}$, **по соответствующей формуле**:

$$\tilde{S} = \int_{\frac{2}{5}}^{5} \left(5 - \frac{2}{x}\right) dx = (5x - 2\ln|x|)\Big|_{\frac{2}{5}}^{5} = \ldots =$$

$$= 25 - 2\ln 5 - 2 + 2\ln\frac{2}{5} = \ldots = 23 + 2\ln\frac{2}{25}\; ед.^2$$

По геометрическому определению:

$$P(xy>2)=\frac{\tilde{S}}{S}=\frac{\left(23+2\ln\frac{2}{25}\right)ед.^2}{25\ ед.^2}\approx 0{,}72$$ – вероятность того, что произведение двух загаданных в промежутке от 0 до 5 чисел окажется больше двух.

**Ответ**: $P(xy>2)\approx 0{,}72$

Аналогичный пример для самостоятельного решения:

**Задача 36**

Загадываются два числа $x$ и $y$ в промежутке от 0 до 10. Какова вероятность, что $y>\frac{x^2}{2}-1$?

Данная задача *(как, собственно, и предыдущая)* допускает несколько способов расчёта площади, подумайте, какой путь более рационален.

В заключение следует отметить, что геометрическое определение вероятности тоже обладает своими недостатками. Один из них заключается в своеобразном парадоксе, давайте вспомним самый первый пример с отрезком $[0;1]$, на который случайным образом падает точка. Возможно ли, что точка попадёт, например, на самый край отрезка? Да, такое событие возможно, но по геометрическому определению, его вероятность равна нулю! И то же самое можно сказать о любой точке отрезка! Дело в том, что с позиций геометрии размеры отдельно взятой точки равны нулю, и поэтому геометрическое определение вероятности здесь не срабатывает.

## 1.6. Теоремы сложения и умножения вероятностей

А теперь можно немного расслабиться, сейчас будут более простые задачки ☺

### ➢ Теорема сложения вероятностей несовместных событий

Вероятность появления одного из двух несовместных событий $A$ или $B$ *(без разницы какого)*, равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

Аналогичный факт справедлив и для бОльшего количества несовместных событий, например, для трёх несовместных событий $A, B$ и $C$:

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)$$

Вспомним алгебру событий: сложение событий означает появление **хотя бы одного** из суммируемых событий, и, поскольку события в данном случае НЕсовместны, то **одного и только одного** из этих событий (безразлично какого).

Следует отметить, что для совместных событий равенство $P(A+B)=P(A)+P(B)$ будет **неверным**. Теорема сложения вероятностей совместных событий имеет гораздо меньшее значение практики *(и более того, может запутать «чайника»)*, поэтому о ней я расскажу вскользь и чуть позже.

А сейчас возьмём в руки уже знакомое и безотказное орудие ~~труда~~ учёбы – игральную кость с полной группой событий $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$, которые состоят в том, что при броске выпадут 1, 2, 3, 4, 5 и 6 очков соответственно.

Рассмотрим событие $B_{5,6}$ – в результате броска игральной кости выпадет *не менее пяти очков*. Данное событие состоит в двух несовместных исходах: $B_{5,6} = B_5 + B_6$ *(выпадет 5* ***или*** *6 очков)*. По теореме сложения вероятностей несовместных событий:

$P(B_5 + B_6) = P(B_5) + P(B_6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ – вероятность того, что в результате броска игральной кости выпадет не менее пяти очков.

Рассмотрим событие $B_{1-4} = B_1 + B_2 + B_3 + B_4$, состоящее в том, что выпадет *не более 4 очков* и найдем его вероятность. По теореме сложения вероятностей несовместных событий: $P(B_1 + B_2 + B_3 + B_4) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) + P(B_4) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

По той же теореме, вероятность того, что выпадет нечётное число очков:

$P(B_1 + B_3 + B_5) = P(B_1) + P(B_3) + P(B_5) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, и так далее.

С помощью этой теоремы можно решить некоторые задачи, которые нам встретились в параграфе о классическом определении вероятности. Вспомним условие и краткое решение Задачи 27: *«Студент знает ответы на 25 экзаменационных вопросов из 60. Какова вероятность сдать экзамен, если для этого необходимо ответить не менее чем на 2 из 3 вопросов?»*

В той задаче мы сначала нашли $C_{60}^3$ *(количество всех возможных сочетаний трёх вопросов)*, затем вычислили $C_{25}^2 \cdot C_{35}^1 + C_{25}^3$ количество благоприятствующих исходов и вероятность $p = \frac{C_{25}^2 \cdot C_{35}^1 + C_{25}^3}{C_{60}^3}$ того, что студент сдаст экзамен.

Но здесь вместо правила сложений комбинаций в ходу и другая схема рассуждений. Рассмотрим два несовместных события:

$A$ – студент ответит на 2 вопроса из трёх;
$B$ – студент ответит на все три вопроса.

Теперь, пользуясь классическим определением, найдём их вероятности:

$$P(A) = \frac{C_{25}^2 \cdot C_{35}^1}{C_{60}^3}, \quad P(B) = \frac{C_{25}^3}{C_{60}^3}$$

Факт успешной сдачи экзамена выражается суммой $A + B$ *(ответ на два вопроса из трёх* ***или*** *на все вопросы)*. По теореме сложения вероятностей несовместных событий:

$P(A + B) = P(A) + P(B) = \frac{C_{25}^2 \cdot C_{35}^1}{C_{60}^3} + \frac{C_{25}^3}{C_{60}^3}$ – вероятность того, что студент сдаст экзамен.

Этот способ решения совершенно равноценен, выбирайте, какой больше нравится.
Разминаемся, на этот раз в подсобке:)

**Задача 37**

Магазин получил продукцию в ящиках с четырех оптовых складов: четыре с 1-го, пять со 2-го, семь с 3-го и четыре с 4-го. Случайным образом выбран ящик для продажи. Какова вероятность того, что это будет ящик с первого или третьего склада.

**Решение**: всего получено магазином: 4 + 5 + 7 + 4 = 20 ящиков.

В данной задаче удобнее воспользоваться «быстрым» способом оформления без расписывания событий большими латинскими буквами. По классическому определению:

$p_1 = \frac{4}{20} = 0{,}2$ – вероятность того, что для продажи будет выбран ящик с 1-го склада;

$p_3 = \frac{7}{20} = 0{,}35$ – вероятность того, что для продажи будет выбран ящик с 3-го склада.

Бесконечных «хвостов» после запятых тут нет, и не ожидается, поэтому можно работать с десятичными дробями – компактнее будет запись.

По теореме сложения несовместных событий:

$p = p_1 + p_3 = 0{,}2 + 0{,}35 = 0{,}55$ – вероятность того, что для продажи будет выбран ящик с первого или третьего склада.

**Ответ**: 0,55

Безусловно, задача разрешима и «чисто» через классическое определение вероятности путём непосредственного подсчёта количества благоприятствующих исходов (4 + 7 = 11), но рассмотренный способ ничем не хуже. И даже чётче.

Ещё один товар на соседнем стеллаже:

**Задача 38**

В коробке 10 красных и 6 синих пуговиц. Наудачу извлекаются две пуговицы. Какова вероятность того, что они будут одноцветными?

Аналогично – здесь можно использовать комбинаторное правило суммы, но мало ли … вдруг кто-то его запамятовал, а то и вовсе проехал мимо с песнями. Тогда на помощь придёт теорема сложения вероятностей несовместных событий! Решение и ответ в конце книги (оформлено в «ускоренном» стиле).

**Если у вас возникло хоть какое-то недопонимание по вышеизложенному материалу, то настоятельно рекомендую обратиться к предыдущим параграфам.**

Ибо оставлять пробелы в комбинаторике или задачах на классическое определение – не есть хорошо =( В тяжёлом случае следует перечитать основы теории вероятностей.

Знакомимся с новыми, до сих пор не встречавшимися понятиями:

### ➢ Зависимые и независимые события

События являются ***независимыми***, если вероятность наступления **любого из них** не зависит от появления / непоявления остальных событий рассматриваемого множества событий (во всех возможных комбинациях).

Так, например, при подбрасывании двух или бОльшего количества монет вероятность выпадения орла или решки на любой монете **не зависит** от того, что выпадет на других монетах. Вероятности выпадения граней кубика во 2-м испытании **не зависят** от того, какая грань выпала в 1-м испытании.

Теперь более любопытная ситуация. Событие $X$ называют ***зависимым***, если его вероятность $P(X)$ зависит от одного или бОльшего количества событий, которые **уже произошли**.

Например: $X$ – из неполной колоды игроку будет сдана карта червовой масти. Вероятность этого события **зависит** от того, какие карты **уже были** извлечены из колоды.

И, конечно, близкий многим пример:

$E$ – на экзамене студенту достанется простой билет.

Если идти не самым первым, то событие $E$ будет **зависимым**, поскольку его вероятность $P(E)$ зависит от того, какие билеты **уже вытянули** однокурсники.

**Как определить зависимость / независимость событий?**

Иногда об этом прямо сказано в условии задачи, но чаще приходится проводить самостоятельный анализ. Какого-то однозначного ориентира тут нет, и факт зависимости либо независимости событий вытекает из естественных логических рассуждений.

Чтобы не валить всё в одну кучу, начнём с независимых событий:

### ➢ Теорема умножения вероятностей независимых событий

Вероятность совместного появления независимых событий $A$ и $B$ равна произведению вероятностей этих событий:
$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

Теорема распространяется и на бОльшее количество независимых событий, так, например, если события $A, B, C$ независимы, то вероятность их совместного наступления равна: $P(ABC) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$.

Следует отметить, что несмотря на всю очевидность и «примитивность» этих теорем, все они строго доказаны в теории, и желающие могут найти эти доказательства в учебной литературе. …Зачем нужны такие доказательства? А дело в том, что «очевидно» – это ещё не значит «правильно» ;-)

Вернёмся к простейшему примеру, в котором подбрасываются две монеты и следующим событиям:

$A_1$ – на 1-й монете выпадет орёл;

$A_2$ – на 2-й монете выпадет орёл.

Найдём вероятность события $A_1A_2$ (на 1-й монете появится орёл **и** на 2-й монете появится орёл – вспоминаем, как читается произведение событий!). Вероятность выпадения орла на одной монете **никак не зависит** от результата броска другой монеты, следовательно, события $A_1$ и $A_2$ **независимы**. По теореме умножения вероятностей независимых событий:

$$P(A_1A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Аналогично:

$P(\overline{A}_1\overline{A}_2) = P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ – вероятность того, что на 1-й монете выпадет решка **и** на 2-й решка;

$P(A_1\overline{A}_2) = P(A_1) \cdot P(\overline{A}_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ – вероятность того, что на 1-й монете появится орёл **и** на 2-й решка;

$P(\overline{A}_1A_2) = P(\overline{A}_1) \cdot P(A_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ – вероятность того, что на 1-й монете появится решка **и** на 2-й орёл.

События $A_1A_2,\ \overline{A}_1\overline{A}_2,\ A_1\overline{A}_2,\ \overline{A}_1A_2$ образуют полную группу и сумма их вероятностей должна равняться единице: …, что и требовалось проверить.

Тренируемся:

**Задача 39**

В каждом из трех ящиков имеется по 10 деталей. В первом ящике 8 стандартных деталей, во втором – 7, в третьем – 9. Из каждого ящика наудачу извлекают по одной детали. Найти вероятность того, что все детали окажутся стандартными.

**Решение**: вероятность извлечения стандартной или нестандартной детали из любого ящика не зависит от того, какие детали будут извлечены из других ящиков, поэтому в задаче речь идёт о независимых событиях. Рассмотрим следующие, явно независимые события:

$S_1$ – из 1-го ящика извлечена стандартная деталь;

$S_2$ – из 2-го ящика извлечена стандартная деталь;

$S_3$ – из 3-го ящика извлечена стандартная деталь.

По классическому определению:

$P(S_1) = \frac{8}{10} = 0{,}8;\ \ P(S_2) = \frac{7}{10} = 0{,}7;\ \ P(S_3) = \frac{9}{10} = 0{,}9$ – соответствующие вероятности.

Интересующее нас событие выражается произведением $S_1S_2S_3$ *(из 1-го ящика будет извлечена стандартная деталь **и** из 2-го стандартная **и** из 3-го стандартная).*

По теореме умножения вероятностей независимых событий:

$P(S_1S_2S_3) = ...$ – вероятность того, что из трёх ящиков будет извлечено по одной стандартной детали.

**Ответ**: 0,504

И после бодрящих упражнений с ящиками нас поджидают не менее интересные урны:

**Задача 40**

В трех урнах имеется по 6 белых и по 4 черных шара. Из каждой урны извлекают наудачу по одному шару. Найти вероятность того, что: а) все три шара будут белыми; б) все три шара будут одного цвета.

Опираясь на полученную информацию, догадайтесь, как разобраться с пунктом «бэ» ;-) Примерный образец решения оформлен в академичном стиле с подробной росписью всех событий.

На практике очень распространена связка рассмотренных теорем:

## ➢ Задачи на теоремы сложения и умножения

Этот тандем почти 100% встретится в вашей самостоятельной и отчётной работе. Хит хитов и самая настоящая классика теории вероятностей:

**Задача 41**

Два стрелка сделали по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0,8, для второго – 0,6. Найти вероятность того, что:

а) только один стрелок попадёт в мишень;
б) хотя бы один из стрелков попадёт в мишень.

**Решение**: вероятность попадания / промаха одного стрелка, очевидно, **не зависит** от результативности другого стрелка. Рассмотрим следующие независимые события:

$A_1$ – 1-й стрелок попадёт в мишень;
$A_2$ – 2-й стрелок попадёт в мишень.

По условию, $P(A_1) = 0{,}8;\ P(A_2) = 0{,}6$.

Найдём вероятности противоположных событий $\bar{A}_1, \bar{A}_2$ – того, что соответствующие стрелки промахнутся:

$P(\bar{A}_1) = 1 - P(A_1) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2;$

$P(\bar{A}_2) = 1 - P(A_2) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4.$

**а)** Рассмотрим событие: $B$ – только один стрелок попадёт в мишень. Данное событие состоит в **двух** несовместных исходах:

1-й стрелок попадёт **и** 2-й промахнётся **или**
1-й промахнётся **и** 2-й попадёт.

На языке алгебры событий этот факт запишется следующей формулой:

$B = A_1\overline{A}_2 + \overline{A}_1 A_2$

Сначала используем теорему сложения вероятностей несовместных событий, затем – теорему умножения вероятностей независимых событий:

$P(B) = P(A_1\overline{A}_2 + \overline{A}_1 A_2) = P(A_1\overline{A}_2) + P(\overline{A}_1 A_2) = P(A_1)\cdot P(\overline{A}_2) + P(\overline{A}_1)\cdot P(A_2) =$

$= 0{,}8\cdot 0{,}4 + 0{,}2\cdot 0{,}6 = 0{,}32 + 0{,}12 = 0{,}44$ – вероятность того, что будет только одно попадание

**б)** Рассмотрим событие: $C$ – хотя бы один из стрелков попадёт в мишень.

**Способ первый**: событие $C$ состоит в двух несовместных исходах:
попадёт кто-то один (событие $B$) **или**
попадут оба стрелка, обозначим последнее событие буквой $D$.

Таким образом: $C = B + D$

По теореме умножения вероятностей независимых событий:

$P(D) = \ldots$ – вероятность того, что 1-й стрелок попадёт **и** 2-й стрелок попадёт,

и по теореме сложения вероятностей несовместных событий:

$P(C) = \ldots$ – вероятность хотя бы одного попадания по мишени.

**Способ второй**: рассмотрим противоположное событие: $\overline{C}$ – оба стрелка промахнутся. По теореме умножения вероятностей независимых событий:

$P(\overline{C}) = P(\overline{A}_1\overline{A}_2) = P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2) = 0{,}2\cdot 0{,}4 = 0{,}08$

По соответствующей теореме: $P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - 0{,}08 = 0{,}92$

Кроме того, существует альтернативный, третий путь решения, основанный на умолчанной выше ***теореме сложения совместных событий***:

Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий $A_1, A_2$ равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2)$

И посему **способ третий**: события $A_1, A_2$ совместны, а значит, их сумма $A_1 + A_2$ выражает событие «хотя бы один стрелок попадёт в мишень» (см. алгебру событий). По **теореме сложения вероятностей совместных событий** и теореме умножения вероятностей независимых событий:

$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1)\cdot P(A_2) =$

$= \ldots$

Какой способ лучше? С моей точки зрения, наиболее рационален 2-й способ, и 3-м способом я не пользуюсь вообще (т.к. нет необходимости, да и путаница с ним бывает). Впрочем, у вас может сложиться своё мнение или пристрастие на этот счёт.

Выполним **проверку**: события $\overline{C}$, $B$ и $D$ *(0, 1 и 2 попадания соответственно)* образуют полную группу, поэтому сумма их вероятностей должна равняться единице:

$P(\overline{C})+P(B)+P(D)=0{,}08+0{,}44+0{,}48=1$, что и требовалось проверить.

**Ответ**: а) 0,44, б) 0,92

На практике часто используют «быстрый» стиль оформления и **решение** принимает примерно такой вид:

по условию: $p_1=0{,}8$, $p_2=0{,}6$ – вероятность попадания соответствующих стрелков. Тогда вероятности их промаха:

$q_1=1-p_1=1-0{,}8=0{,}2;$

$q_2=1-p_2=1-0{,}6=0{,}4.$

**а)** По теоремам сложения вероятностей несовместных и умножения вероятностей независимых событий:

$p_{(1)}=...$ – вероятность того, что только один стрелок попадёт в мишень.

**б)** По теореме умножения вероятностей независимых событий:

$q=q_1q_2=0{,}2\cdot 0{,}4=0{,}08$ – вероятность того, что оба стрелка промахнутся.

Тогда: $p=1-q=1-0{,}08=0{,}92$ – вероятность того, что хотя бы один из стрелков попадёт в мишень.

**Ответ**: а) 0,44, б) 0,92

Однако не нужно забывать и первый вариант оформления (с росписью событий) – он хоть и длиннее, но зато содержательнее, в нём понятнее, *что, почему и зачем* складывается и умножается. В ряде случаев уместен гибридный стиль, когда прописными буквами удобно обозначить лишь некоторые события.

Контрольная задача для самостоятельного решения:

**Задача 42**

Для сигнализации о возгорании установлены два независимо работающих датчика. Вероятности того, что при возгорании датчик сработает, для первого и второго датчиков соответственно равны 0,5 и 0,7. Найти вероятность того, что при пожаре:

а) оба датчика откажут, б) оба датчика сработают.

+ бонус-задание: пользуясь теоремой сложения вероятностей событий, образующих полную группу, найти вероятность того, что при пожаре сработает только один датчик. Проверить результат прямым вычислением этой вероятности *(с помощью теорем сложения и умножения)*.

Здесь независимость работы устройств непосредственно прописана в условии, что, кстати, является важным уточнением. Образец решения оформлен в академичном стиле.

Как быть, если в похожей задаче даны одинаковые вероятности, например, 0,9 и 0,9? Решать нужно точно так же! *(что, собственно, уже продемонстрировано в примере с двумя монетами)*. Следующий, более интересный пример тоже самостоятельно:

**Задача 43**

Вероятность поражения цели первым стрелком при одном выстреле равна 0,8. Вероятность того, что цель не поражена после выполнения первым и вторым стрелками по одному выстрелу равна 0,08. Какова вероятность поражения цели вторым стрелком при одном выстреле?

Условие можно переформулировать более лаконично, но переделывать оригинал не буду – на практике приходится вникать и в более витиеватые измышления. Образец решения оформлен «коротким» способом.

А теперь знакомьтесь – тот самый, который настрогал для вас немереное количество деталей :=)

**Задача 44**

Рабочий обслуживает три станка. Вероятность того, что в течение смены первый станок потребует настройки, равна 0,3, второй – 0,75, третий – 0,4. Найти вероятность того, что в течение смены:

а) все станки потребуют настройки;
б) только один станок потребует настройки;
в) хотя бы один станок потребует настройки.

**Решение**: коль скоро в условии ничего не сказано о едином технологическом процессе, то работу каждого станка следует считать независимой от работы других станков.

По аналогии с Задачей 41 здесь можно ввести в рассмотрение события $A_1, A_2, A_3$, состоящие в том, что соответствующие станки потребуют настройки в течение смены, записать вероятности $P(A_1)=0{,}3;\ P(A_2)=0{,}75;\ P(A_3)=0{,}4$, найти вероятности противоположных событий $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \overline{A}_3$ и т.д. Но с тремя объектами так оформлять задачу уже не очень хочется – получится долго и нудно. Поэтому здесь заметно выгоднее использовать «быстрый» стиль:

По условию: $p_1=0{,}3;\ p_2=0{,}75;\ p_3=0{,}4$ – вероятности того, что в течение смены соответствующие станки потребуют настройки. Тогда вероятности того, что они не потребуют внимания:

$$q_1=1-p_1=1-0{,}3=0{,}7;$$
$$q_2=1-p_2=1-0{,}75=0{,}25;$$
$$q_3=1-p_3=1-0{,}4=0{,}6.$$

**а)** По теореме умножения вероятностей независимых событий:

$p_{(3)}=p_1p_2p_3=0{,}3\cdot 0{,}75\cdot 0{,}4=0{,}09$ – вероятность того, что в течение смены все три станка потребуют настройки.

**б)** Событие «В течение смены только один станок потребует настройки» состоит в **трёх** несовместных исходах:

1) 1-й станок потребует внимания **и** 2-й станок *не потребует* **и** 3-й станок *не потребует*
**или**:
2) 1-й станок *не потребует* внимания **и** 2-й станок потребует **и** 3-й станок *не потребует*
**или:**
3) 1-й станок *не потребует* внимания **и** 2-й станок *не потребует* **и** 3-й станок потребует.

По теоремам сложения вероятностей несовместных и умножения вероятностей независимых событий:

$p_{(1)} = \ldots$

$= 0{,}045 + 0{,}315 + 0{,}07 = 0{,}43$ – вероятность того, что в течение смены только один станок потребует настройки.

Думаю, сейчас вам должно быть понятно, откуда взялось выражение $p_1q_2q_3 + q_1p_2q_3 + \ldots$

**в)** Вычислим вероятность $p_{(0)} = q_1q_2q_3 = 0{,}7 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}6 = 0{,}105$ того, что станки не потребуют настройки, и затем – вероятность противоположного события:

$p_{(1,2,3)} = 1 - p_{(0)} = 1 - 0{,}105 = 0{,}895$ – того, что хотя бы один станок потребует настройки.

**Ответ**: а) 0,09; б) 0,43; в) 0,895

Пункт «вэ» можно решить и через сумму $p_{(1,2,3)} = p_{(1)} + p_{(2)} + p_{(3)}$, где $p_{(2)}$ – вероятность того, что в течение смены только два станка потребуют настройки. Это событие в свою очередь включает в себя 3 несовместных исхода, которые расписываются по аналогии с пунктом «бэ». Постарайтесь самостоятельно найти вероятность $p_{(2)}$, чтобы проверить всю задачу с помощью равенства $p_{(0)} + p_{(1)} + p_{(2)} + p_{(3)} = 1$.

Самостоятельно:

### Задача 45

Из трех орудий произвели залп по цели. Вероятность попадания при одном выстреле только из первого орудия равна 0,7, из второго – 0,6, из третьего – 0,8. Найти вероятность того, что: 1) хотя бы один снаряд попадет в цель; 2) только два снаряда попадут в цель; 3) цель будет поражена не менее двух раз.

При основательном изучении теории вероятностей вам встретятся десятки задач милитаристского содержания, и, что характерно, после этого никого не захочется пристрелить =) – задачи почти подарочные.

И снова о совпадениях: в том случае, если по условию два или даже все значения исходных вероятностей совпадают (например, 0,7; 0,7 и 0,7), то следует придерживаться точно такого же алгоритма решения.

Вернёмся к распространённой головоломке:

**Задача 46**

Стрелок попадает в цель с одной и той же вероятностью при каждом выстреле. Какова эта вероятность, если вероятность хотя бы одного попадания при трех выстрелах равна 0,973.

**Решение**: обозначим через $p$ – вероятность попадания в мишень при каждом выстреле и через $q=1-p$ – вероятность промаха при каждом выстреле.

Здесь будет удобно расписать события:

$A$ – при 3 выстрелах стрелок попадёт в мишень хотя бы один раз;
$\overline{A}$ – стрелок 3 раза промахнётся.

По условию $P(A)=0{,}973$, тогда вероятность противоположного события:
$P(\overline{A})=1-P(A)=1-0{,}973=0{,}027$

С другой стороны, по теореме умножения вероятностей независимых событий:
$P(\overline{A})=qqq=q^3$

Таким образом:
$q^3=0{,}027$
$q=...$ – вероятность промаха при каждом выстреле.

В результате:
$p=1-q=...$ – вероятность попадания при каждом выстреле.

**Ответ**: 0,7

Просто и изящно.

В рассмотренной задаче можно поставить дополнительные вопросы о вероятности только одного попадания, только двух попаданий и вероятности трёх попаданий по мишени. Схема решения будет точно такой же, как и в двух предыдущих примерах:
$p_{(1)}=pqq+qpq+qqp;$

$p_{(2)}=ppq+pqp+qpp$

$p_{(3)}=ppp$

Однако принципиальное содержательное отличие состоит в том, что здесь имеют место ***повторные независимые испытания***, которые выполняются последовательно, независимо друг от друга и с одинаковой вероятностью исходов.

К повторным независимым испытаниям мы вернёмся чуть позже, после того, как разберём зависимые события:

## ➢ Условная вероятность

Случайное событие $B$ является **зависимым**, если помимо случайных факторов его вероятность зависит от появления либо непоявления события $A$. Вероятность события $B$, вычисленная в предположении того, что событие $A$ **уже произошло**, называется ***условной вероятностью*** наступления события $B$ и **обозначается** через $P_A(B)$.

При этом события $A$ и $B$ называют ***зависимыми событиями*** *(хотя, строго говоря, зависимо только одно из них)*.

Карты в руки:

**Задача 47**

Из колоды в 36 карт последовательно извлекаются 2 карты. Найти вероятность того, что вторая карта окажется червой, если до этого:

а) была извлечена черва, б) была извлечена карта другой масти.

**Решение**: рассмотрим событие: $B$ – вторая карта будет червой. Совершенно понятно, что вероятность этого события зависит от того, черву вытянули ранее или нет.

**а)** Если сначала была извлечена черва (событие $A$), то в колоде осталось 35 карт, среди которых осталось 8 карт червовой масти. По классическому определению:

$P_A(B)=\dfrac{8}{35}$ – вероятность того, что вторая карта окажется червой **при условии**, что до этого была извлечена черва.

**б)** Если же сначала была извлечена карта другой масти (событие $\overline{A}$), то все 9 черв остались в колоде. По классическому определению:

$P_{\overline{A}}(B)=\dfrac{9}{35}$ – вероятность того, что вторая карта окажется червой **при условии**, что до этого была извлечена карта другой масти.

**Ответ**: а) $\dfrac{8}{35}$, б) $\dfrac{9}{35}$

И здесь всё логично – если вероятность извлечения червы из полной колоды составляет $P(A)=\dfrac{9}{36}=0{,}25$, то при извлечении следующей карты аналогичная вероятность изменится: в первом случае – уменьшится: $P_A(B)=\dfrac{8}{35}\approx 0{,}23$ (т.к. черв стало меньше), а во втором – возрастёт: $P_{\overline{A}}(B)=\dfrac{9}{35}\approx 0{,}26$ (т.к. все червы остались в колоде).

Зависимых событий, разумеется, может быть и больше. Пока задача не остыла, добавим ещё одно: $C$ – третьей картой будет извлечена черва. Предположим, что произошло событие $A$, а затем событие $B$; тогда в колоде осталось 34 карты, среди которых 7 черв. По классическому определению:

$P_{AB}(C)=\dfrac{7}{34}$ – вероятность наступления события $C$ **при условии**, что до этого были извлечены две червы.

Для самостоятельной тренировки:

**Задача 48**

В конверте находится 10 лотерейных билетов, среди которых 3 выигрышных. Из конверта последовательно извлекаются билеты. Найти вероятности того, что:

а) 2-й извлечённый билет будет выигрышным, если 1-й был выигрышным;
б) 3-й будет выигрышным, если предыдущие два билета были выигрышными;
в) 4-й будет выигрышным, если предыдущие билеты были выигрышными.

Краткое решение с комментариями в конце книги.

А теперь обратим внимание на один **принципиально важный момент**: в рассмотренных примерах требовалось найти лишь условные вероятности, при этом **предыдущие события считались достоверно состоявшимися**. Но ведь в действительности и они являются случайными! Так, в демо-примере извлечение червы из полной колоды – есть событие случайное, вероятность которого равна $P(A)=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$

Поэтому на практике гораздо чаще требуется отыскать вероятность **совместного появления** зависимых событий. Как, например, найти вероятность события $A \cdot B$, состоящего в том, что из полной колоды будет извлечена черва **и** затем ещё одна черва? Ответ на этот вопрос даёт

### ➢ Теорема умножения вероятностей зависимых событий

Вероятность совместного появления двух зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже произошло:
$P(AB)=P(A)\cdot P_A(B)$

В нашем примере: $P(AB)=P(A)\cdot P_A(B)=\frac{9}{36}\cdot\frac{8}{35}=\frac{2}{35}\approx 0{,}0571$ – вероятность того, что из полной колоды будут извлечены 2 червы подряд.

Аналогично: $P(\overline{A}B)=P(\overline{A})\cdot P_{\overline{A}}(B)=\frac{27}{36}\cdot\frac{9}{35}=\frac{27}{140}\approx 0{,}1929$ – вероятность того, что сначала будет извлечена карта другой масти **и** затем черва.

Вероятность события $\overline{A}B$ получилась заметно больше вероятности события $AB$, что, в общем-то, было очевидно и безо всяких вычислений.

И, само собой, не нужно питать особых надежд, что из конверта с десятью лотерейными билетами (Задача 48) вы вытяните 3 выигрышных билета подряд:

$P(A_1A_2A_3)=P(A_1)\cdot P_{A_1}(A_2)\cdot P_{A_1A_2}(A_3)=\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}\cdot\ldots$ *(впрочем, это щедро).*

Да, совершенно верно – теорема умножения вероятностей зависимых событий естественным образом распространяется и на бОльшее их количество.
Закрепим материал несколькими типовыми задачами:

## Задача 49

В урне 4 белых и 7 черных шаров. Из урны наудачу один за другим извлекают два шара, не возвращая их обратно. Найти вероятность того, что:

а) оба шара будут белыми;
б) оба шара будут чёрными;
в) сначала будет извлечён белый шар, а затем – чёрный.

Обратите внимание на уточнение «не возвращая их обратно». Этот факт говорит нам о том, что события зависимы. Действительно, а вдруг извлечённые шары возвращают обратно? В случае возвратной выборки вероятности извлечения чёрного и белого шара меняться не будут, и в такой задаче уже следует руководствоваться теоремой умножения вероятностей НЕзависимых событий.

**Решение**: всего в урне: 4 + 7 = 11 шаров, и мы приступаем к их извлечению:

**а)** Рассмотрим события $A$ – первый шар будет белым, $B$ – второй шар будет белым и найдём вероятность события $AB$, состоящего в том, что 1-й шар будет белым **и** 2-й белым.

По классическому определению вероятности: $P(A)=\frac{4}{11}$. Предположим, что белый шар извлечён, тогда в урне останется 10 шаров, среди которых 3 белых, поэтому:

$P_A(B)=\frac{3}{10}$ – вероятность извлечения белого шара во 2-м испытании **при условии**, что до этого был извлечён белый шар.

По теореме умножения вероятностей зависимых событий:

$P(AB)=P(A)\cdot P_A(B)=\frac{4}{11}\cdot\frac{3}{10}=\frac{6}{55}$ – вероятность того, что оба шара будут белыми.

**б)** Найдём вероятность события $\overline{A}\overline{B}$, состоящего в том, что 1-й шар будет чёрным **и** 2-й чёрным.

По классическому определению: $P(\overline{A})=\frac{7}{11}$ – вероятность того, что в 1-м испытании будет извлечён чёрный шар. Пусть чёрный шар извлечён, тогда в урне останется 10 шаров, среди которых 6 чёрных, следовательно:

$P_{\overline{A}}(\overline{B})=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$ – вероятность того, что во 2-м испытании будет извлечён чёрный шар **при условии**, что до этого был извлечен чёрный шар.

По теореме умножения вероятностей зависимых событий:

$P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A})\cdot P_{\overline{A}}(\overline{B})=\frac{7}{11}\cdot\ldots$ – вероятность того, что оба шара будут чёрными.

**в)** Найдём вероятность события $A\overline{B}$ (сначала будет извлечён белый шар **и** затем чёрный)

После извлечения белого шара (с вероятностью $P(A)=\frac{4}{11}$) в урне останется 10 шаров, среди которых 3 белых и 7 чёрных, таким образом:

$P_A(\overline{B})=\frac{7}{10}$ – вероятность того, что во 2-м испытании будет извлечён чёрный шар **при условии**, что до этого был извлечен белый шар.

По теореме умножения вероятностей зависимых событий:

$P(A\overline{B})=P(A)\cdot P_A(\overline{B})=\frac{4}{11}\cdot...$ – искомая вероятность.

**Ответ**: а) $\frac{6}{55}$, б) $\frac{21}{55}$, в)

Данную задачу нетрудно проверить через теорему сложения вероятностей образующих полную группу. Для этого найдём вероятность 4-го недостающего события:

$P(\overline{A}B)=P(\overline{A})\cdot P_{\overline{A}}(B)=\frac{7}{11}\cdot\frac{4}{10}=\frac{14}{55}$ – того, что сначала будет извлечён чёрный шар **и** затем белый.

События $AB, \overline{A}\overline{B}, A\overline{B}, \overline{A}B$ образуют полную группу, поэтому сумма их вероятностей должна равняться единице:

$P(AB)+P(\overline{A}\overline{B})+P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)=\frac{6}{55}+\frac{21}{55}+\frac{14}{55}+\frac{14}{55}=\frac{55}{55}=1$, что и требовалось проверить. …Какая, однако, полезная и рабочая теорема!

И я сразу предлагаю проверить, насколько хорошо вы усвоили изложенный материал:

**Задача 50**

Какова вероятность того, что из колоды в 36 карт будут извлечены два туза подряд?

**Задача 51**

В урне 6 черных, 5 красных и 4 белых шара. Последовательно извлекают три шара. Найти вероятность того, что

а) третий шар окажется белым, если до этого был извлечён черный и красный шар;
б) первый шар окажется черным, второй – красным и третий – белым.

Решения и ответы в конце книги.

Надо сказать, что многие из рассматриваемых задач разрешимы и другим способом, но чтобы не возникло путаницы, пожалуй, вообще о нём умолчу.

Наверное, все заметили, что зависимые события возникают в тех случаях, когда осуществляется некоторая цепочка действий. Однако **сама по себе последовательность действий ещё не гарантируют зависимость событий**. Так, при последовательном подбрасывании монеты результат любого броска **никак не зависит** от предыдущих исходов. Это, кстати, важный момент, развевающий одно распространённое заблуждение, к которому мы вернёмся позже.

Ну а сейчас мы возвращаемы к нашим урнам. Если в задачах на теорему умножения вероятностей независимых событий хозяйничают стрелки, то здесь происходит самое настоящее нашествие урн с шарами =)

**Задача 52**

Из урны, в которой находится 6 белых и 4 черных шара, извлекаются наудачу один за другим три шара. Найти вероятность того, что:

а) все три шара будут черными;
б) будет не меньше двух шаров черного цвета.

**Решение**: всего: 6 + 4 = 10 шаров в урне.

Событий в данной задаче будет многовато, и в этой связи целесообразнее использовать смешанный стиль оформления, обозначая прописными латинскими буквами только основные события. Надеюсь, вы уже поняли, по какому принципу подсчитываются условные вероятности:

**а)** Рассмотрим событие: $A$ – все три шара будут черными.

По теореме умножения вероятностей зависимых событий:
$$P(A)=\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8}=\frac{1}{30}$$

**б)** Этот пункт интереснее, рассмотрим событие: $C$ – будет не меньше двух шаров черного цвета. Данное событие состоит в двух несовместных исходах: либо все шары будут чёрными (событие $A$) либо 2 шара будут чёрным и 1 белым – обозначим последнее событие буквой $B$.

Событие $B$ включается в себя **три** несовместных исхода:

в 1-м испытании извлечён белый шар **и** во 2-м **и** в 3-м испытаниях – чёрные шары
**или**
в 1-м испытании извлечён ЧШ **и** во 2-м – БШ **и** в 3-м – ЧШ
**или**
в 1-м испытании извлечён ЧШ **и** во 2-м – ЧШ **и** в 3-м – БШ.

По теоремам сложения вероятностей несовместных и умножения вероятностей зависимых событий:
$P(B)=\frac{6}{10}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}+...$ – вероятность того, что среди трёх последовательно извлеченных шаров будет 2 чёрных и 1 белый шар.

***Примечание***: *на всякий случай озвучу примерный ход рассуждений при конструировании, например, последнего произведения* $\frac{4}{10}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{3}{8}$*:*

*«в 1-м испытании с вероятностью* $\frac{4}{10}$ *извлекается ЧШ, после чего в урне останется 9 шаров, среди которых 6 белых и 3 чёрных.* ***И*** *во 2-м испытании с вероятностью* $\frac{6}{9}$ *извлекается БШ, после чего в урне останется 8 шаров, среди которых 5 белых и 3 чёрных.* ***И*** *в 3-м испытании с вероятностью* $\frac{3}{8}$ *будет снова извлечён ЧШ»*

По той же теореме сложения вероятностей несовместных событий:

$P(C)=P(A)+P(B)=\frac{1}{30}+\frac{3}{10}=\frac{1}{3}$ – вероятность того, что среди трёх последовательно извлеченных шаров будет не менее двух черных.

**Ответ**: а) $\frac{1}{30}$, б) $\frac{1}{3}$

Вы просто не сможете от этого отказаться :)

**Задача 53**

Из 20 экзаменационных билетов 3 содержат простые вопросы. Пять студентов по очереди берут билеты. Найти вероятность того, что хотя бы одному из них достанется билет с простыми вопросами

А почему бы и нет? Ситуация более чем реалистичная: представьте, начался экзамен, в аудиторию пригласили 5 человек. Проведите самостоятельное исследование – какова вероятность того, что хоть кому-то из этих пяти добровольцев повезёт с билетом?

К задаче о сдаче экзамена мы вернёмся в конце параграфа, а пока рассмотрим ещё одну стандартную задачу о перекладывании шаров из урны в урну:

**Задача 54**

В первой урне содержится 12 шаров, из них 7 белых, во второй – 6 шаров, из них 3 белых. Из первой урны во вторую наудачу перекладывают один шар, а затем из второй урны наудачу извлекают один шар. Найти вероятность того, что он окажется белым.

**Решение**: по условию, из первой урны во вторую наудачу перекладывают один шар, и, очевидно, он может быть как белым, так и не белым. В этой связи необходимо рассмотреть 2 несовместные ***гипотезы***:

$B_1$ – из 1-й урны во 2-ю будет переложен белый шар;
$B_2$ – из 1-й урны во 2-ю будет переложен не белый шар.

Обозначим через $A$ зависимое событие – после перекладывания шара из 2-й урны будет извлечён белый шар.

Несовместные исходы удобно расписать по пунктам:

**1)** По классическому определению: $P(B_1)=\frac{7}{12}$ – вероятность того, что из 1-й урны во вторую будет переложен белый шар. Пусть гипотеза $B_1$ **осуществилась**, тогда во второй урне стало 7 шаров, среди которых теперь 4 белых шара. Таким образом:

$P_{B_1}(A)=\frac{4}{7}$ – вероятность того, что из второй урны будет извлечен белый шар **при условии**, что туда был переложен белый шар.

По теореме умножения вероятностей зависимых событий:

$P(B_1A)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)=\frac{7}{12}\cdot\frac{4}{7}=\frac{1}{3}$ – вероятность того, что во 2-ю урну будет переложен белый шар **и** после этого из 2-й урны будет извлечён белый шар.

**2)** По классическому определению: $P(B_2)=\frac{5}{12}$ – вероятность того, что из 1-й урны во вторую будет переложен не белый шар. Пусть гипотеза $B_2$ осуществилась, тогда во второй урне стало 7 шаров, среди которых по-прежнему 3 белых. Таким образом:

$P_{B_2}(A)=\frac{3}{7}$ – вероятность того, что из второй урны будет извлечен белый шар при условии, что туда был переложен не белый шар.

По теореме умножения вероятностей зависимых событий:

$P(B_2A)=P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)=\frac{5}{12}\cdot\frac{3}{7}=\frac{5}{28}$ – вероятность того, что из 1-й урны во 2-ю будет переложен не белый шар **и** после этого из 2-й урны будет извлечён белый шар.

Подводим итог. По теореме сложения вероятностей несовместных событий:

$P(A)=P(B_1A)+...=\frac{43}{84}$ – вероятность того, что из 2-й урны будет извлечён белый шар.

**Ответ**: $\frac{43}{84}\approx 0{,}51$

Более интересная вариация по теме для самостоятельного разбора:

**Задача 55**

В первой урне находится 3 белых и 2 черных шара, во второй – 4 белых и 4 черных. Из первой урны во вторую наудачу перекладывают 2 шара. Найти вероятность того, что из второй урны будет извлечён белый шар.

Для решения задания нужно рассмотреть 3 несовместные гипотезы, привлечь на помощь комбинаторику и воспользоваться типовой задачей на классическое определение вероятности.

Иногда встречаются задачи повышенной комбинационной сложности – с двумя последовательными перемещениями шаров из 1-й во 2-ю урну, из 2-й в 3-ю и финальным извлечением шара из последней урны.

И в заключение этого параграфа разберём прелюбопытнейшую задачу, которой я вас заманивал в самом начале книги =) Даже не разберём, а проведём небольшое практическое исследование. Выкладки в общем виде будут громоздкие, поэтому рассмотрим конкретный пример:

Петя сдаёт экзамен по теории вероятностей, при этом 20 билетов он знает хорошо, а 10 плохо. Предположим, в первый день экзамен сдаёт часть группы, например, 16 человек, включая нашего героя. В общем, ситуация до боли знакома: студенты один за другим заходят в аудиторию и тянут билеты.

Очевидно, что последовательное извлечение билетов представляет собой цепь зависимых событий, и возникает насущный **вопрос**: в каком случае Пете с бОльшей вероятностью достанется «хороший» билет – если он пойдёт «в первых рядах», или зайдёт «посерединке», или если будет тянуть билет в числе последних? Когда лучше заходить?

Сначала рассмотрим «экспериментально чистую» ситуацию, в которой Петя сохраняет свои шансы постоянными – он не получает информацию о том, какие вопросы уже достались однокурсникам, ничего не учит в коридоре, ожидая своей очереди, и т.д.

Рассмотрим событие: $X_1$ – Петя зайдёт в аудиторию самым первым и вытянет «хороший» билет. По классическому определению вероятности: $P(X_1)=\frac{20}{30}=\frac{2}{3}$.

Как изменится вероятность извлечения удачного билета, если пропустить вперёд отличницу Настю? В этом случае возможны две несовместные гипотезы:

$B_1$ – Настя вытянет «хороший» (для Пети) билет;
$B_2$ – Настя вытянет «плохой» билет (т.е. увеличит шансы Пети).

Событие же $X_2$ (Петя зайдёт вторым и вытянет «хороший» билет) становится <u>зависимым</u>.

**1)** Предположим, что Настя с вероятностью $P(B_1)=\frac{20}{30}=\frac{2}{3}$ «увела» у Пети один удачный билет. Тогда на столе останутся 29 билетов, среди которых 19 «хороших». По классическому определению вероятности: $P_{B_1}(X_2)=\frac{19}{29}$

**2)** Теперь предположим, что Настя с вероятностью $P(B_2)=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$ «избавила» Петю от 1-го «плохого» билета. Тогда на столе останутся 29 билетов, среди которых по-прежнему 20 «хороших». По классическому определению: $P_{B_2}(X_2)=\frac{20}{29}$

Используя теоремы сложения вероятностей несовместных и умножения вероятностей зависимых событий, вычислим вероятность того, что Петя вытянет «хороший» билет, будучи вторым в очереди:

$$P(X_2)=P(B_1X_2+B_2X_2)=P(B_1X_2)+P(B_2X_2)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(X_2)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(X_2)=$$
$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{19}{29}+\frac{1}{3}\cdot\frac{20}{29}=\frac{38}{87}+\frac{20}{87}=\frac{58}{87}=\frac{2}{3}$$ – вероятность… осталось той же!

Хорошо, рассмотрим событие: $X_3$ – Петя пойдёт третьим, пропустив вперёд Настю и Лену, и вытащит «хороший» билет.

Здесь гипотез будет больше: дамы могут «обокрасть» джентльмена на 2 удачных билета, либо наоборот – избавить его от 2 неудачных, либо извлечь 1 «хороший» и 1 «плохой» билет. Если провести аналогичные рассуждения, воспользоваться теми же теоремами, то… получится такое же значение вероятности $P(X_3) = \frac{2}{3}$!

И так далее.

Таким образом, **чисто с математической точки зрения, без разницы, когда идти** – первоначальные вероятности останутся неименными. **НО**. Это только усреднённая теоретическая оценка, так, например, если Петя пойдёт последним, то это вовсе не значит, что ему останутся на выбор 10 «хороших» и 5 «плохих» билетов в соответствии с его изначальными шансами. Данное соотношение может варьироваться в лучшую или худшую сторону, однако всё же маловероятно, что среди билетов останется «одна халява», или наоборот – «сплошной ужас». Хотя «уникальные» случаи не исключены – всё-таки тут не 3 миллиона лотерейных билетов с практически нулевой вероятностью крупного выигрыша. Поэтому «невероятное везение» или «злой рок» – это слишком уж преувеличенные высказывания. Даже если Петя знает всего лишь три билета, то его шансы составляют 10%, что заметно выше нуля.

Математика и «чистый эксперимент» – это хорошо, но какой стратегии и тактики выгоднее придерживаться **в реальных условиях**? Безусловно, следует принять во внимание субъективные факторы, например, «скидку» преподавателя для «храбрецов» или его усталость к концу экзамена. Зачастую эти факторы могут быть и решающими, но в заключительных рассуждениях мы всё же остановимся на вероятностных аспектах:

Если Вы готовы к экзамену хорошо, то лучше идти «в первых рядах». Пока билетов полный комплект, постулат «маловозможные события не происходят» работает на Вас гораздо в бОльшей степени. Согласитесь, что намного приятнее иметь соотношение «30 билетов, среди которых 2 плохих», чем «15 билетов, среди которых 2 плохих». А то, что два неудачных билета **на отдельно взятом экзамене** *(а не по средней теоретической оценке!)* так и останутся на столе – вполне и вполне возможно.

Теперь рассмотрим «ситуацию Пети» – когда студент готов достаточно хорошо, но с другой стороны, и «плавает» тоже неплохо. В этом случае целесообразно пропустить вперёд 5-6 человек, и ожидать подходящего момента вне аудитории. Дальше по ситуации. Довольно скоро начнёт поступать информация, какие билеты вытянули однокурсники ***(снова зависимые события!)***, и на «заигранные» вопросы можно больше не тратить силы – учите и повторяйте другие билеты, повышая тем самым первоначальную вероятность своего успеха.

Если «первая партия» экзаменующихся «избавила» вас сразу от 3-4 трудных (лично для Вас) билетов, то выгоднее как можно быстрее попасть на экзамен – именно сейчас шансы значительно возросли. Постарайтесь не упускать момент – всего несколько пропущенных вперёд человек, и преимущество, скорее всего, растает. Если же наоборот, «плохих» билетов вытянули мало – ждите. Через несколько человек эта «аномалия» опять же с большой вероятностью, если не исчезнет, то сгладится в лучшую сторону.

В «обычном» и самом распространённом случае выгода тоже есть, ибо расклад «24 билета / 8 плохих» лучше соотношения «30 билетов / 10 плохих». Почему? Трудных билетов теперь не десять, а восемь! С удвоенной энергией штудируем материал!

Если Вы готовы неважно или плохо, то само собой, лучше идти в «последних рядах» *(хотя возможны и оригинальные решения, особенно, если нечего терять)*. Существует небольшая, но всё же ненулевая вероятность, что на столе останутся относительно простые вопросы + дополнительная зубрёжка + шпоры, которые отдадут отстрелявшиеся сокурсники =) И, да – в совсем критической ситуации есть ещё следующий день, когда экзамен сдаёт вторая часть группы ;-)

**Какой можно сделать вывод? Субъективный оценочный принцип** *«кто идёт раньше, тот готов лучше»* **находит внятное вероятностное обоснование!**

Ни пуха Вам, ни пера, ни холлофайбера! ☺

## 1.7. Формула полной вероятности

Это непосредственное следствие только что разобранных теорем, и даже задача такая была недавно (Задача 54).

Рассмотрим зависимое событие $A$, которое может произойти лишь в результате осуществления одной из несовместных ***гипотез*** $B_1, B_2, B_3, .., B_n$, которые образуют полную группу. Пусть известны вероятности этих гипотез $P(B_1), P(B_2), P(B_3), .., P(B_n)$ и соответствующие условные вероятности $P_{B_1}(A), P_{B_2}(A), P_{B_3}(A), .., P_{B_n}(A)$.

Тогда вероятность наступления события $A$ равна:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + ...$$

Эта формула получила название ***формулы полной вероятности***. В учебниках она формулируется теоремой, доказательство которой элементарно: согласно алгебре событий, событие $A$ расписывается в виде суммы $B_1A + B_2A + B_3A + ... + B_nA$, которая обозначает, что:

*– произошло событие $B_1$* ***и*** *после него наступило событие $A$* ***или*** *произошло событие $B_2$* ***и*** *после него наступило событие $A$,* ***или*** *произошло событие $B_3$* ***и*** *после него наступило событие $A$,* ***или*** *….,* ***или*** *произошло событие $B_n$* ***и*** *после него наступило событие $A$.*

Поскольку гипотезы $B_1, B_2, B_3, .., B_n$ несовместны, а событие $A$ – зависимо, то по теореме сложения вероятностей несовместных событий *(первый шаг)* и теореме умножения вероятностей зависимых событий *(второй шаг)*, получаем:

$$P(A) = P(B_1A + B_2A + B_3A + ... + B_nA) =$$
$$= P(B_1A) + P(B_2A) + P(B_3A) + ... + P(B_nA) =$$
$$= P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + ...$$

И, наверное, многие предчувствуют содержание первого примера :)

Куда ни плюнь – везде урна:

## Задача 56

Имеются три одинаковые урны. В первой урне находятся 4 белых и 7 черных шаров, во второй – только белые и в третьей – только черные шары. Наудачу выбирается одна урна и из неё наугад извлекается шар. Какова вероятность того, что этот шар чёрный?

**Решение**: рассмотрим событие $A$ – из наугад выбранной урны будет извлечён чёрный шар. Данное событие может произойти или не произойти в результате осуществления одной из следующих гипотез:

$B_1$ – будет выбрана 1-я урна;

$B_2$ – будет выбрана 2-я урна;

$B_3$ – будет выбрана 3-я урна.

Так как урна выбирается наугад, то выбор любой из трёх урн равновозможен, следовательно:

$$P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = \frac{1}{3}$$

Перечисленные гипотезы образуют полную группу событий, то есть, по условию, шар может появиться только из этих урн, а например, не прилететь с бильярдного стола. Проведём простую промежуточную проверку:

$P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$, ОК, едем дальше:

В первой урне 4 белых + 7 черных = 11 шаров, по классическому определению:

$P_{B_1}(A) = \frac{7}{11}$ – вероятность извлечения чёрного шара **при условии**, что будет выбрана 1-я урна.

Во второй урне только белые шары, поэтому **в случае её выбора** появление чёрного шара становится *невозможным*:

$P_{B_2}(A) = 0$.

И, наконец, в третьей урне одни чёрные шары, а значит, соответствующая условная вероятность извлечения чёрного шара составит $P_{B_3}(A) = 1$ *(событие достоверно)*.

По формуле полной вероятности:

$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + \ldots =$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{11} + \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{7}{33} + 0 + \frac{1}{3} = \frac{18}{33} = \frac{6}{11}$ – вероятность того, что из наугад выбранной урны будет извлечен чёрный шар.

**Ответ**: $\frac{6}{11}$

**Разобранный пример снова наводит на мысль о том, как важно ВНИКАТЬ В УСЛОВИЕ.**

Возьмём те же задачи с урнами и шарами – при их «внешней схожести» способы решения могут быть совершенно разными: где-то требуется применить только классическое определение вероятности, где-то события независимы, где-то зависимы, а где-то речь о гипотезах. При этом не существует чёткого формального критерия для выбора пути решения – над ним почти всегда нужно думать.

Как повысить свою квалификацию? Решаем, решаем и ещё раз решаем!

## Задача 57

В тире имеются 5 различных по точности боя винтовок. Вероятности попадания в мишень для данного стрелка соответственно равны $0{,}5$; $0{,}55$; $0{,}7$; $0{,}75$ и $0{,}4$. Чему равна вероятность попадания в мишень, если стрелок делает один выстрел из случайно выбранной винтовки?

Краткое решение и ответ в конце книги.

В большинстве тематических задач гипотезы, конечно же, не равновероятны:

## Задача 58

В пирамиде 5 винтовок, три из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,7. Найти вероятность того, что мишень будет поражена, если стрелок производит один выстрел и наудачу взятой винтовки.

**Решение**: в этой задаче количество винтовок точно такое же, как и в предыдущей, но вот гипотезы всего две:

$B_1$ – стрелок выберет винтовку с оптическим прицелом;

$B_2$ – стрелок выберет винтовку без оптического прицела.

По классическому определению вероятности:

$$P(B_1) = \frac{3}{5} = 0{,}6;\quad P(B_2) = \frac{2}{5} = 0{,}4.$$

Контроль: $P(B_1) + P(B_2) = 0{,}6 + 0{,}4 = 1$

Рассмотрим событие: $A$ – стрелок поразит мишень из наугад взятой винтовки.
По условию: $P_{B_1}(A) = 0{,}95;\ P_{B_2}(A) = 0{,}7$.

По формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + \ldots = 0{,}85$$

**Ответ**: 0,85

На практике решение удобно оформить коротко, примерно так:

**Решение**: по классическому определению: $p_1 = \frac{3}{5} = 0{,}6; \quad p_2 = \frac{2}{5} = 0{,}4$ – вероятности выбора винтовки с оптическим и без оптического прицела соответственно.

По условию, $\tilde{p}_1 = 0{,}95; \quad \tilde{p}_2 = 0{,}7$ – вероятности попадания в мишень из соответствующих типов винтовок.

По формуле полной вероятности:

$p = p_1\tilde{p}_1 + ... = 0{,}85$ – вероятность того, что стрелок поразит мишень из наугад выбранной винтовки.

**Ответ**: 0,85

Следующая задача для самостоятельного решения:

### Задача 59

Двигатель работает в трёх режимах: нормальном, форсированном и на холостом ходу. В режиме холостого хода вероятность его выхода из строя равна 0,05, при нормальном режиме работы – 0,1, а при форсированном – 0,7. 70% времени двигатель работает в нормальном режиме, а 20% – в форсированном. Какова вероятность выхода из строя двигателя во время работы?

На всякий случай напомню – чтобы получить значения вероятностей проценты нужно разделить на 100. **Будьте очень внимательны!** По моим наблюдениям, условия задач на *формулу полной вероятности* частенько пытаются подзапутать, и я специально подобрал такой пример. Скажу по секрету, сам чуть не запутался :)

Образец решения оформлен коротким способом.

## 1.8. Формулы Байеса

Материал тесно связан с содержанием предыдущего параграфа. Пусть событие $A$ **наступило** в результате осуществления одной из гипотез $B_1, B_2, B_3, .., B_n$. Как определить вероятность того, что имела место та или иная гипотеза?

**При условии**, что событие $A$ **уже произошло**, вероятности гипотез ***переоцениваются*** по формулам, которые в своё время предложил английский священник Томас Байес:

$P_A(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)}{P(A)}$ – вероятность того, что имела место гипотеза $B_1$;

$P_A(B_2) = \frac{P(B_2) \cdot P_{B_2}(A)}{P(A)}$ – вероятность того, что имела место гипотеза $B_2$;

$P_A(B_3) = \frac{P(B_3) \cdot P_{B_3}(A)}{P(A)}$ – вероятность того, что имела место гипотеза $B_3$;

…

$P_A(B_n) = \frac{P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)}{P(A)}$ – вероятность того, что имела место гипотеза $B_n$.

На первый взгляд кажется полной нелепицей – зачем пересчитывать вероятности гипотез, если они и так известны? Но на самом деле разница есть:

$P(B_1), P(B_2), P(B_3), .., P(B_n)$ – это ***априорные*** (оцененные **до** испытания) вероятности.

$P_A(B_1), P_A(B_2), P_A(B_3), .., P_A(B_n)$ – это ***апостериорные*** (оцененные **после** испытания) вероятности тех же гипотез, пересчитанные в связи «со вновь открывшимися обстоятельствами » – с учётом того факта, что событие $A$ **достоверно произошло**.

Рассмотрим это различие на конкретном примере:

**Задача 60**

На склад поступило 2 партии изделий: первая – 4000 штук, вторая – 6000 штук. Средний процент нестандартных изделий в первой партии составляет 20%, а во второй – 10%. Наудачу взятое со склада изделие оказалось стандартным. Найти вероятность того, что оно: а) из первой партии, б) из второй партии.

Первая часть **решения** состоит в использовании формулы полной вероятности. Иными словами, вычисления проводятся в предположении, что испытание ещё не произведено и событие *«изделие оказалось стандартным»* пока не наступило.

Рассмотрим две гипотезы:
$B_1$ – наудачу взятое изделие будет из 1-й партии;
$B_2$ – наудачу взятое изделие будет из 2-й партии.

Всего: 4000 + 6000 = 10000 изделий на складе. По классическому определению:
$P(B_1)=\frac{4000}{10000}=0{,}4; \quad P(B_2)=\frac{6000}{10000}=0{,}6$.

Контроль: $P(B_1)+P(B_2)=0{,}4+0{,}6=1$

Рассмотрим зависимое событие: $A$ – наудачу взятое со склада изделие будет стандартным.

В первой партии 100% – 20% = 80% стандартных изделий, поэтому:
$P_{B_1}(A)=\frac{80}{100}=0{,}8$ – вероятность того, что наудачу взятое на складе изделие будет стандартным **при условии**, что оно принадлежит 1-й партии.

Аналогично, во второй партии 100% – 10% = 90% стандартных изделий и
$P_{B_2}(A)=\frac{90}{100}=0{,}9$ – вероятность того, что наудачу взятое на складе изделие будет стандартным **при условии**, что оно принадлежит 2-й партии.

По формуле полной вероятности:
$P(A)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+...=0{,}86$ – вероятность того, что наудачу взятое на складе изделие будет стандартным.

**Часть вторая.** Пусть наудачу взятое со склада изделие оказалось стандартным. Эта фраза прямо прописана в условии, и она констатирует тот факт, что событие $A$ **произошло**. По формулам Байеса:

а) $P_A(B_1)=\dfrac{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)}{P(A)}=\dfrac{0{,}4\cdot 0{,}8}{0{,}86}=\dfrac{0{,}32}{0{,}86}=\dfrac{32}{86}=\dfrac{16}{43}\approx 0{,}37$ – вероятность того, что выбранное стандартное изделие принадлежит 1-й партии;

б) $P_A(B_2)=\dfrac{P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)}{P(A)}=\ldots$ – вероятность того, что выбранное стандартное изделие принадлежит 2-й партии.

После *переоценки* гипотезы $B_1, B_2$, разумеется, по-прежнему образуют полную группу:

$$P_A(B_1)+P_A(B_2)=\frac{16}{43}+\frac{27}{43}=\frac{43}{43}=1 \text{ \textit{(проверка ;-))}}$$

**Ответ**: а) $\dfrac{16}{43}\approx 0{,}37$; б)

Понять смысл переоценки гипотез нам поможет Иван Васильевич, которой снова сменил профессию и стал директором завода. Он знает, что сегодня 1-й цех отгрузил на склад 4000, а 2-й цех – 6000 изделий, и приходит удостовериться в этом. Предположим, вся продукция однотипна и находится в одном контейнере. Естественно, Иван Васильевич подсчитал, что изделие, которое он сейчас извлечёт для проверки, с вероятностью $P(B_1)=0{,}4$ выпущено первым цехом и с вероятностью $P(B_2)=0{,}6$ – вторым.

Но после того как выбранное изделие оказывается стандартным, он восклицает: «Какой же классный болт! – его скорее выпустил 2-й цех». Таким образом, вероятность второй гипотезы переоценивается в лучшую сторону $P_A(B_2)\approx 0{,}63$, а вероятность первой гипотезы занижается: $P_A(B_1)\approx 0{,}37$. И эта переоценка небезосновательна – ведь 2-й цех произвёл не только больше изделий, но и работает в 2 раза лучше!

Вы скажете, чистый субъективизм? Отчасти – да, более того, сам Байес интерпретировал *апостериорные* вероятности как **уровень доверия**.

И, несмотря на то, что у байесовского подхода немало критиков, в нём есть и объективное зерно. Ведь вероятности того, что изделие будет стандартным *(0,8 и 0,9 для 1-го и 2-го цехов соответственно)* это **предварительные** (априорные) и **средние** оценки.

Но, выражаясь философски – всё течёт, всё меняется, и вероятности в том числе. Вполне возможно, что **на момент исследования** более успешный 2-й цех повысил процент выпуска стандартных изделий *(и / или 1-й цех снизил)*, и если проверить бОльшее количество либо все 10 тысяч изделий на складе, то переоцененные значения $P_A(B_1)\approx 0{,}37;\quad P_A(B_2)\approx 0{,}63$ окажутся гораздо ближе к истине.

Кстати, если Иван Васильевич извлечёт нестандартную деталь, то наоборот – он будет больше «подозревать» первый цех и меньше – второй. Предлагаю убедиться в этом самостоятельно:

**Задача 61**

На склад поступило 2 партии изделий: первая – 4000 штук, вторая – 6000 штук. Средний процент нестандартных изделий в первой партии 20%, во второй – 10%. Наудачу взятое со склада изделие оказалось **не**стандартным. Найти вероятность того, что оно: а) из первой партии, б) из второй партии.

Условие отличатся двумя буквами, которые я выделил жирным шрифтом. Задачу можно решить с «чистого листа», или воспользоваться результатами предыдущих вычислений. В образце я провёл полное решение, но чтобы не возникло формальной накладки с предыдущей задачей, событие *«наудачу взятое со склада изделие будет нестандартным»* обозначено через $\overline{A}$.

Байесовская схема переоценки вероятностей встречается повсеместно, причём её активно эксплуатируют и различного рода мошенники. Рассмотрим ставшее нарицательным АО на три буквы, которое привлекает вклады населения, якобы куда-то их инвестирует, исправно выплачивает 2% в день и т.д. Что происходит? Проходит день за днём, месяц за месяцем и всё новые и новые факты, донесённые путём рекламы и «сарафанным радио», только повышают уровень доверия к финансовой пирамиде *(апостериорная байесовская переоценка в связи с произошедшими событиями!)*. То есть, в глазах вкладчиков происходит постоянное увеличение вероятности того, что *«это серьёзная контора»*; при этом вероятность противоположной гипотезы *(«это очередной лохотрон»)*, само собой, уменьшается и уменьшается. Дальнейшее, думаю, понятно. Примечательно, что заработанная репутация даёт организаторам время успешно скрыться от Ивана Васильевича, который остался не только без партии болтов, но и без штанов.

К не менее любопытным примерам мы вернёмся чуть позже, а пока на очереди, пожалуй, самый распространенный случай с тремя гипотезами:

**Задача 62**

Электролампы изготавливаются на трех заводах. 1-ый завод производит 30% общего количества ламп, 2-й – 55%, а 3-й – остальную часть. Продукция 1-го завода содержит 1% бракованных ламп, 2-го – 1,5%, 3-го – 2%. В магазин поступает продукция всех трех заводов. Купленная лампа оказалась с браком. Какова вероятность того, что она произведена 2-м заводом?

Заметьте, что **в задачах на формулы Байеса в условии обязательно фигурирует некое произошедшее событие**, в данном случае – покупка лампы.

Событий прибавилось, и **решение** удобнее оформить в «быстром» стиле.

Алгоритм точно такой же: **на первом шаге** находим вероятность того, что купленная лампа вообще <u>окажется</u> бракованной.

Пользуясь исходными данными, переводим проценты в вероятности:

$p_1 = \frac{30}{100} = 0{,}3;\ \ p_2 = \frac{55}{100} = 0{,}55;\ \ p_3 = \frac{(100-30-55)}{100} = \frac{15}{100} = 0{,}15$ – вероятности того, что лампа произведена 1-м, 2-м и 3-м заводами соответственно.

Контроль: $p_1 + p_2 + p_3 = 0{,}3 + 0{,}55 + 0{,}15 = 1$

Аналогично:
$\tilde{p}_1 = \frac{1}{100} = 0{,}01; \quad \tilde{p}_2 = \frac{1{,}5}{100} = 0{,}015; \quad \tilde{p}_3 = \frac{2}{100} = 0{,}02$ – вероятности изготовления бракованной лампы для соответствующих заводов.

По формуле полной вероятности:
$p = p_1\tilde{p}_1 + p_2\tilde{p}_2 + ...$
$= 0{,}003 + 0{,}00825 + 0{,}003 = 0{,}01425$ – вероятность того, что купленная лампа окажется с браком.

**Шаг второй**. Пусть купленная лампа оказалась бракованной (событие произошло)

По формуле Байеса:
$p_2^* = ... = \frac{0{,}00825}{0{,}01425} = \frac{825}{1425} = \frac{11}{19}$ – вероятность того, что купленная бракованная лампа изготовлена вторым заводом

**Ответ**: $\frac{11}{19} \approx 0{,}5789$ – отвечаем только на то, о чём спрашивалось в условии!

Почему изначальная вероятность 2-й гипотезы $p_2 = 0{,}55$ после переоценки увеличилась $p_2^* \approx 0{,}58$? Ведь второй завод производит «средние» по качеству лампы (первый – лучше, третий – хуже). Так почему же возросла *апостериорная* вероятность, что бракованная лампа именно со 2-го завода? Это объясняется уже не «репутацией», а размером. Так как завод № 2 выпустил самое большое количество ламп (более половины), то логично субъективное завышение оценки по принципу *«скорее всего, эта бракованная лампа именно оттуда»*.

Интересно заметить, что вероятности 1-й и 3-й гипотез, переоценились в ожидаемых направлениях и сравнялись:
$p_1^* = \frac{p_1\tilde{p}_1}{p} = ...$

Контроль: $p_1^* + p_2^* + p_3^* = \frac{4}{19} + \frac{11}{19} + \frac{4}{19} = \frac{19}{19} = 1$, что и требовалось проверить.

К слову, о заниженных и завышенных оценках:

## Задача 63

В студенческой группе 3 человека имеют высокий уровень подготовки, 19 человек – средний и 3 – низкий. Вероятности успешной сдачи экзамена для данных студентов соответственно равны: 0,95; 0,7 и 0,4. Известно, что некоторый студент сдал экзамен. Какова вероятность того, что:

а) он был подготовлен очень хорошо;
б) был подготовлен средне;
в) был подготовлен плохо.

Проведите вычисления и проанализируйте результаты переоценки гипотез.

Предложенная задача приближена к реальности и особенно правдоподобна для группы студентов-заочников, где преподаватель практически не знает способностей того или иного студента. При этом результат может послужить причиной довольно-таки неожиданных последствий *(особенно это касается экзаменов в 1-м семестре)*. Если плохо подготовленному студенту посчастливилось с билетом, то преподаватель с большой вероятностью сочтёт его хорошо успевающим или даже сильным студентом, что принесёт неплохие дивиденды в будущем *(естественно, нужно «поднимать планку» и поддерживать свой имидж)*. Если же студент 7 дней и 7 ночей учил, «зубрил», повторял, но ему просто не повезло, то дальнейшие события могут развиваться в самом скверном ключе – с многочисленными пересдачами и балансировкой на грани «вылета».

Что и говорить, репутация – это важнейший капитал, не случайно многие корпорации носят имена-фамилии своих отцов-основателей, которые руководили делом 100-200 лет назад и прославились своей безупречной репутацией.

Да, байесовский подход в известной степени субъективен, но… так устроена жизнь!

Закрепим материал заключительным индустриальным примером, в котором я расскажу ещё об одном техническом приёме решения:

**Задача 64**

Три цеха завода производят однотипные детали, которые поступают на сборку в общий контейнер. Известно, что первый цех производит в 2 раза деталей, чем второй цех, и в 4 раза больше третьего цеха. В первом цехе брак составляет 12%, во втором – 8%, в третьем – 4%. Для контроля из контейнера берется одна деталь. Какова вероятность того, что она окажется бракованной? Какова вероятность того, что извлечённую бракованную деталь выпустил 3-й цех?

…таки Иван Васильевич снова на коне, должен же быть у фильма счастливый конец :)

**Решение**: в отличие от предыдущих задач здесь в явном виде задан вопрос, который разрешается с помощью формулы полной вероятности. Но с другой стороны, условие немного «зашифровано», и разгадать этот ребус нам поможет школьный навык составлять простейшие уравнения. За «икс» удобно принять наименьшее значение:

Пусть $x$ – доля деталей, выпускаемая третьим цехом.

По условию, первый цех производит в 4 раза больше третьего цеха, поэтому доля 1-го цеха составляет $4x$. Кроме того, первый цех производит изделий в 2 раза больше, чем второй цех, а значит, доля последнего: $\frac{4x}{2} = 2x$.

Составим и решим уравнение:

$$4x + 2x + x = 1$$

$$7x = 1$$

$$x = \frac{1}{7}$$

Таким образом: $p_1 = 4x = \frac{4}{7}$, $p_2 = 2x = \frac{2}{7}$, $p_3 = x = \frac{1}{7}$ – вероятности того, что извлечённая из контейнера деталь выпущена 1-м, 2-м и 3-м цехами соответственно.

Контроль: $\frac{4}{7} + \frac{2}{7} + \frac{1}{7} = 1$. Кроме того, будет не лишним ещё раз посмотреть на фразу *«Известно, что первый цех производит изделий в 2 раза больше второго цеха и в 4 раза больше третьего цеха»* и убедиться, что полученные значения вероятностей действительно соответствуют этому условию.

За «икс» изначально можно было принять долю 1-го либо долю 2-го цеха – вероятности выйдёт такими же. Но, так или иначе, самый трудный участок пройден, и решение входит в накатанную колею:

Из условия находим:
$\tilde{p}_1 = \frac{12}{100} = \ldots$ – вероятности изготовления бракованной детали для соответствующих цехов.

По формуле полной вероятности:
$p = p_1\tilde{p}_1 + p_2\tilde{p}_2 + \ldots$
$= \frac{12}{175} + \frac{4}{175} + \frac{1}{175} = \frac{17}{175} \approx 0{,}097$ – вероятность того, что наугад извлеченная из контейнера деталь окажется нестандартной.

**Вопрос второй**: какова вероятность $p_3^*$ того, что извлечённую бракованную деталь выпустил 3-й цех? Данный вопрос предполагает, что деталь уже извлечена, и она оказалось бракованной. Переоцениваем гипотезу по формуле Байеса:

$p_3^* = \frac{p_3\tilde{p}_3}{p} = \frac{\frac{1}{175}}{\frac{17}{175}} = \frac{1}{175} \cdot \frac{175}{17} = \frac{1}{17} \approx 0{,}06$ – искомая вероятность. Совершенно ожидаемо – ведь третий цех производит не только самую малую долю деталей, но и лидирует по качеству!

Коль скоро в условии нет пунктов «а» и «бэ», то ответ лучше снабдить текстовыми комментариями:

**Ответ**: $p = \frac{17}{175} \approx 0{,}097$ – вероятность того, что извлечённая из контейнера деталь окажется бракованной; $p_3^* = \frac{1}{17} \approx 0{,}06$ – вероятность того, что извлечённую бракованную деталь выпустил 3-й цех.

Как видите, задачи на формулу полной вероятности и формулы Байеса достаточно простЫ, и, наверное, по этой причине в них так часто пытаются затруднить условие, о чём я уже упоминал в начале параграфа.

## 1.9. Независимые испытания и формула Бернулли

Что такое ***независимые испытания***? Практически всё понятно уже из самого названия. Пусть производится несколько испытаний. Если вероятность появления некоего события $A$ в каждом из них **не зависит** от исходов остальных испытаний, то… заканчиваем фразу самостоятельно! При этом под словосочетанием «независимые испытания» часто подразумевают ***повторные независимые испытания*** – когда они осуществляются друг за другом. Простейшие примеры:

– монета подбрасывается 10 раз;
– игральная кость подбрасывается 20 раз.

Совершенно ясно, что вероятность выпадения орла либо решки в любом испытании не зависит от результатов других бросков. Аналогичное утверждение, естественно, справедливо и для кубика. А вот последовательное извлечение карт из колоды не является серией независимых испытаний – очевидно, это цепочка зависимых событий. Однако если карту каждый раз возвращать обратно, то это тоже будут повторные независимые испытания.

И у нас в гостях очередной Терминатор, который абсолютно равнодушен к своим удачам / неудачам, и поэтому его стрельба представляет собой образец стабильности :)

**Задача 65**

Стрелок совершает 4 выстрела по мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле постоянна и равна $p$. Найти вероятность того, что:
а) стрелок попадёт только один раз, б) стрелок попадёт 2 раза.

**Решение**: условие сформулировано **в общем виде** и вероятность попадания в мишень при каждом выстреле считается известной. Она равна $p$ *(если совсем тяжко, присвойте параметру какое-нибудь конкретное значение, например,* $p = 0{,}6$*).*

Коль скоро мы знаем $p$, то легко найти вероятность промаха в каждом выстреле:
$q = 1 - p$, то есть, «ку» – это тоже известная нам величина.

**а)** Рассмотрим событие *«Стрелок попадёт только один раз»* и обозначим его вероятность через $P_4^1$ *(индексы понимаются как «1 попадание из 4»).* Данное событие состоит в 4 несовместных исходах: стрелок попадёт в 1-й **или** во 2-й, **или** в 3-й, **или** в 4-й попытке. По теоремам сложения вероятностей несовместных и умножения вероятностей независимых событий:

$$P_4^1 = pqqq + qpqq + qqpq + qqqp$$

Упростим результат с помощью комбинаторной формулы количества сочетаний:
$C_4^1 = 4$ способами можно выбрать попытку, в которой стрелок попал, и, поскольку в каждом исходе имеет место 1 попадание и 3 промаха, то:
$P_4^1 = C_4^1 pq^3 = 4pq^3$ – вероятность того, что стрелок попадёт только 1 раз из 4.

…как-то так «с лёгкой руки» я начал называть повторные независимые испытания «попытками», что не в каждой задаче может быть корректным в содержательном плане… …ну да ладно.

**б)** Рассмотрим событие *«Стрелок попадёт два раза»* и обозначим его вероятность через $P_4^2$ *(«2 попадания из 4»)*. Здесь исходов будет уже больше, попадания возможны:

в 1-й и 2-й попытках
**или**
в 1-й и 3-й попытках,
**или**
в 1-й и 4-й попытках,
**или**
во 2-й и 3-й попытках,
**или**
во 2-й и 4-й попытках,
**или**
в 3-й и 4-й попытках.

Таким образом, по тем же теоремам сложения и умножения вероятностей:
$P_4^2 = ppqq + pqpq + ...$

Можно ли так решать задачу? Безусловно, можно. Но что делать, если серия состоит из 5, 6 или бОльшего количества выстрелов? Тут уже будут получаться десятки слагаемых, запись которых отнимет много времени и места. В этой связи гораздо рациональнее придерживаться более компактной схемы:
$C_4^2 = \frac{4!}{2!\cdot 2!} = \frac{24}{2\cdot 2} = 6$ способами *(перечислены выше)* можно выбрать 2 попытки, в которых произойдут попадания.

И, поскольку в любом исходе ровно 2 попадания и 2 промаха, то:
$P_4^2 = C_4^2 p^2 q^2 = 6p^2q^2$ – вероятность того, что стрелок попадёт 2 раза из 4.

**Ответ**: а) $4pq^3$, б) $6p^2q^2$

Итак – вероятность того, что будет 1 попадание из 4, равна $P_4^1 = C_4^1 pq^3$, вероятность того, что будет 2 попадания из 4, равна $P_4^2 = C_4^2 p^2 q^2$, …не замечаете ли вы закономерности?

Только что на конкретном примере мы повторили путь Якоба Бернулли, который несколько веков назад вывел формулу, названную позже в его честь:

Вероятность $P_n^m$ того, что **в** $n$ **независимых испытаниях** некоторое случайное событие $A$ наступит **ровно** $m$ **раз**, равна:

$P_n^m = C_n^m p^m q^{n-m}$, где:

$p$ – вероятность появления события $A$ в каждом испытании;
$q = 1 - p$ – вероятность непоявления события $A$ в каждом испытании,

при этом коэффициент $C_n^m$ часто называют ***биномиальным коэффициентом***.

За примером далеко ходить не будем:

**Задача 66**

Найти вероятность того, что при 10 бросках монеты орёл выпадет 3 раза.

**Решение**: сначала немного порассуждаем: всего проводится 10 повторных независимых испытаний. Сколькими способами можно выбрать 3 испытания из 10, в которых выпадет орёл? Считаем:

$C_{10}^{3} = \frac{10!}{7! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{6} = 120$ способами.

Это что же получается, нужно записывать 120 слагаемых, в каждом из которых 10 множителей?! Конечно, нет! – ведь есть ***формула Бернулли***:

$P_{n}^{m} = C_{n}^{m} p^{m} q^{n-m}$, в данном случае:

$n = 10$ – всего испытаний;
$m = 3$ – количество испытаний, в которых должен появиться орёл;
$p = \frac{1}{2}$ – вероятность появления орла в каждом испытании;
$q = 1 - p = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ – вероятность появления решки в каждом испытании.

Таким образом:

$P_{10}^{3} = \ldots \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{7} = \frac{120}{1024} = 0{,}1171875$ – вероятность того, что при 10 бросках монеты орёл выпадет ровно 3 раза.

**Ответ**: $P_{10}^{3} \approx 0{,}12$

Следует отметить, что *повторный характер* независимых испытаний не является «жизненно важным» условием для применения формулы Бернулли. Рассмотрим похожую задачу:

*Найти вероятность того, что при броске 10 монет орёл выпадет на 3 монетах.*

Здесь испытания не повторяются, а скорее, производятся одновременно, но, тем не менее, работает та же самая формула: $P_{10}^{3} = C_{10}^{3} p^{3} q^{7} = \ldots = 0{,}1171875$.

Решение будет отличаться смыслом и некоторыми комментариями, в частности:

$C_{10}^{3} = 120$ способами можно выбрать 3 монеты, на которых выпадет орёл.

$p = \frac{1}{2}$ – вероятность выпадения орла на каждой из 10 монет

и т.д.

Однако на практике подобные задачи встречаются не столь часто, и, видимо, по этой причине формула Бернулли чуть ли не стереотипно ассоциируется только с повторными испытаниями. Хотя, как только что было показано, повторяемость вовсе не обязательна.

Следующая задача для самостоятельного решения:

**Задача 67**

Игральную кость бросают 6 раз. Найти вероятность того, что 5 очков:

а) не выпадут *(выпадут 0 раз)*;
б) выпадут 2 раза;
в) выпадут 5 раз.

Результаты округлить до 4 знаков после запятой.

Очевидно, что в рассматриваемых примерах некоторые события *более вероятны*, а некоторые – *менее вероятны*. Так, например, при 6 бросках кубика даже безо всяких расчётов интуитивно понятно, что вероятности событий пунктов «а» и «бэ» значительно больше вероятности того, что «пятёрка» выпадет 5 раз. И на уровне интуиции легко сделать вывод, что **наивероятнейшее количество** появлений «пятёрки» равно единице – ведь всего граней шесть, и при 6 бросках кубика каждая из них должна выпасть *в среднем* по одному разу. Желающие могут вычислить вероятность $P_6^1$ и посмотреть, будет ли она больше «конкурирующих» значений $P_6^0$ и $P_6^2$.

Теперь сформулируем **строгий критерий** на этот счёт:

Для отыскания **наивероятнейшего числа** $m_0$ **появлений** случайного события $A$ в $n$ независимых испытаниях *(с вероятностью* $p$ *в каждом испытании)* руководствуются следующим двойным неравенством:

$np - q \le m_0 < \ldots$, причём:

1) если значение $np - q$ – дробное, то существует единственное наивероятнейшее число $m_0$;
в частности, если $np$ – целое, то оно и есть наивероятнейшее число: $m_0 = np$;

2) если же $np - q$ – целое, то существуют **два** наивероятнейших числа: $m_0$ и $m_0 + 1$.

Найдём *наивероятнейшее число* $m_0$ появлений «пятёрки» при 6 бросках кубика.
Сначала вычислим:

$np = 6 \cdot \frac{1}{6} = 1$ – целое число, таким образом, это частный случай 1-го пункта и $m_0 = np = 1$.

Как вариант, можно воспользоваться общей формулой:

$$np - q \le m_0 < np + p$$

$$6 \cdot \frac{1}{6} - \frac{5}{6} \le m_0 < 6 \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$$

$\frac{1}{6} \le m_0 < \frac{7}{6}$ – полученному неравенству удовлетворяет единственное целое значение $m_0 = 1$.

В целях закрепления материала решим пару задач:

**Задача 68**

Вероятность того, что при броске мяча баскетболист попадёт в корзину, равна 0,3. Найти наивероятнейшее число попаданий при 8 бросках и соответствующую вероятность.

**Решение**: для оценки наивероятнейшего числа попаданий используем двойное неравенство $np - q \le m_0 < np + p$. В данном случае:

$n = 8$ – всего бросков;
$p = 0{,}3$ – вероятность попадания в корзину при каждом броске;
$q = 1 - p = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$ – вероятность промаха при каждом броске.

Таким образом, наивероятнейшее количество попаданий при 8 бросках находится в следующих пределах:

$$8 \cdot 0{,}3 - 0{,}7 \le m_0 < 8 \cdot 0{,}3 + 0{,}3$$
$$2{,}4 - 0{,}7 \le m_0 < 2{,}4 + 0{,}3$$
$$1{,}7 \le m_0 < 2{,}7$$

Поскольку левая граница (1,7) – дробное число *(пункт № 1 критерия – см. выше)*, то существует единственное наивероятнейшее значение, и, очевидно, что это $m_0 = 2$.

Используя формулу Бернулли $P_n^m = C_n^m p^m q^{n-m}$, вычислим вероятность того, что при 8 бросках будет ровно 2 попадания:

$$P_8^2 = \ldots = \frac{8!}{6! \cdot 2!} \cdot (0{,}3)^2 \cdot (0{,}7)^6 = \ldots$$

**Ответ**: $m_0 = 2$ – наивероятнейшее количество попаданий при 8 бросках, – соответствующая вероятность.

Аналогичное задание для самостоятельного решения:

**Задача 69**

Монета подбрасывает 9 раз. Найти вероятность наивероятнейшего числа появлений орла

Решение и ответ в конце книги.

А сейчас немного отвлёчёмся и рассмотрим весьма любопытную ситуацию: предположим, что во всех 9 испытаниях выпал орёл. Что, кстати, не являются каким-то уж сильно невероятным событием: $P_9^9 = C_9^9 \cdot p^9 \cdot q^0 = (0{,}5)^9 \approx 0{,}002$ ;-)

**Вопрос:** какая сторона монеты вероятнее всего выпадет в 10-м испытании?

Как вы думаете?

…ответьте на этот вопрос и перейдите на следующую страницу.

**Правильный ответ:** вероятности останутся равными! Почему? Причина была сформулирована в начале параграфа: поскольку испытания **независимы**, то вероятность выпадения орла либо решки в любом испытании **не зависит от результатов других испытаний**!

Однако игры разума таковы, что у многих людей напрашивается следующий вывод: *раз орёл выпал много раз подряд, то теперь выпадение решки* ***гораздо (!)*** *вероятнее*. Этот **психологический феномен** получил название ***Ошибка игрока***. Если подбрасывать монету тысячи, десятки тысяч раз, то соотношение орлов / решек будет примерно равным *(о чём мы ещё поговорим)*. Но в этом процессе неоднократно встретятся эпизоды, когда монету «заклинит» на какой-то одной грани, и КАК ИМЕННО распределятся эти «необычные» серии на длинной дистанции – никто не знает.

К слову, о «необычности». Любая случайная последовательность девяти орлов/решек **так же вероятна**, как и выпадение 9 орлов! Проверить данный факт легче лёгкого: запишем произвольную последовательность исходов, например:

*Орёл/Решка/Решка/Орёл /Решка/ Орёл /Решка/ Орёл /Орёл*

По теореме умножения вероятностей независимых событий, вероятность появления этой цепочки:

$\tilde{p} = pqqpqpqpp = 0{,}5\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5 = (0{,}5)^9$, что в точности равно вероятности выпадения девяти орлов $P_9^9 = (0{,}5)^9$ !

И здесь мы сталкиваемся со **второй иллюзией** – человек склонен считать «красивые» комбинации чем-то из ряда вон выходящим и чуть ли не фантастическим. Но на самом деле ничего необычного, например, в комбинации *О/О/О/Р/Р/Р/О/О/О* – нет, и она может запросто появиться в серии испытаний.

Вероятность получить, скажем, пиковый «Ройял-флеш» в покере составляет 1:2598960, однако мало кто задумывается, что **с той же вероятностью** приходит ЛЮБАЯ, в том числе, совершено «мусорная» комбинация из пяти карт! И с этой точки зрения «сверхъестественная» комбинация *10, В, Д, К, Т пик* ничем не примечательна – встречалась «в истории» наряду с другими очень много раз. И поэтому «Ройял-флеш» может **запросто** оказаться у вас или у вашего соперника.

Кстати, к теме нашего разговора относятся и типичные ситуации в играх, в частности, в картах – когда «карта идёт», и наоборот – когда постоянно сдают «один мусор» или «фатально не везёт». Такие «полосы» встречаются у каждого игрока, и никакой мистики в этом нет. Да что там игры, в жизни то же самое – пресловутые «чёрные и белые полосы».

На просторах Интернета часто встречается популярный «секрет выигрыша» в рулетку, известный также под названием «Мартингейл». Краткая суть системы состоит в следующем: *«Ставьте на красное. Если выпало чёрное, удваивайте ставку и снова ставьте на красное. Если снова выпало чёрное, то ещё раз удваивайте ставку и снова ставьте на красное и т.д.»*. Казалось бы – вот оно, золотое дно, ведь красных секторов целых 18 из 37! *(+ 18 черных и 1 зеро в европейской рулетке)*. И уж «красное» **должно** *(!)* выпасть если не на 5-й, то на 10-й раз точно, что позволит отыграть всё ранее поставленное с прибылью!

Ничего подобного!

Вероятность выпадения красного сектора в любом испытании постоянна $p = \frac{18}{37} \approx 0{,}4865$ и никак не зависит от результатов предыдущих испытаний. Постоянна – **и проигрышна** *(т.к. поставленные на «красное» деньги с вероятностью* $q = \frac{19}{37} \approx 0{,}5135$ *проигрываются, а в случае успеха удваиваются)*. Длинная серия «чёрного» **обязательно появятся** (рано или поздно) и разорит даже Билла Гейтса. Поэтому данный «секрет», как и все остальные системы игры в рулетку – не работает.

«Ошибка игрока» совершается и многими участниками лотерей. Она состоит в том, что люди пытаются предугадать числа на основе статистики предыдущих тиражей. Чистой воды химера и пустая трата времени – если, например, № 8 не выпадал 50 раз подряд, то он с таким же успехом может не выпасть ещё 150 раз (это не ирония). Однако если провести десятки тысяч тиражей, то количество появлений всех номеров будет примерно равным, но В КАКОМ ПОРЯДКЕ И КАКИМИ СЕРИЯМИ будет выпадать та же «восьмёрка» на длинной дистанции – никто предсказать не может.

А теперь **ответим на один важный вопрос:**

**Как правильно играть в азартные игры и лотереи? – в чём главный секрет?**

Наверное, многие ожидают услышать от меня что-нибудь вроде: «Лучше вообще не играть», «Открыть собственное казино», «Организовать лотерею» и т.п. Ну почему же не играть? Игра – это одно из развлечений, а за развлечения, как известно, нужно… совершенно верно! Поэтому средства, на которые вы играете, следует считать платой за развлечение, но ни в коем случае трагической потерей. Что касается лотерей, то билет лучше покупать опять же ради развлечения и наобум. Или «по наитию». Правда, лично я никогда не слышал, чтобы кто-то из «счастливчиков» рассказывал о своём предчувствии.

Естественно, перечисленные советы не относятся к хроническим лудоманам и им как раз таки «Лучше вообще не играть». И после столь увлекательного отступления рассмотрим ещё несколько задач по теме:

**Задача 70**

Среди изделий, произведенных на станке-автомате, в среднем бывает 60% изделий первого сорта. Какова вероятность того, что среди 6 наудачу отобранных изделий будет:

а) от 2 до 4 изделий первого сорта;
б) не менее 5 изделий первого сорта;
в) хотя бы одно изделие более низкого сорта.

Вероятность производства первосортного изделия **не зависит** от качества других выпущенных изделий, поэтому в задаче речь идёт о независимых испытаниях. Пожалуйста, **не подходите формально и не пренебрегайте подобным анализом условия**, а то может статься, события-то зависимые или задача вообще о другом.

**Решение**: вероятность зашифрована под проценты, которые, напоминаю, нужно разделить на сто: $p = \frac{60}{100} = 0{,}6$ – вероятность того, что выбранное изделие будет 1-го сорта. Тогда: $q = 1 - p = 0{,}4$ – вероятность того, что оно не будет первосортным.

**а)** Событие *«Среди 6 наудачу отобранных изделий будет от 2 до 4 изделий первого сорта»* состоит в **трёх** несовместных исходах: среди $n=6$ изделий будет 2 первосортных **или** 3 первосортных, **или** 4 первосортных.

С исходами удобнее разделаться по отдельности. Трижды используем формулу Бернулли $P_n^m = C_n^m p^m q^{n-m}$:

$$P_6^2 = C_6^2 \cdot (0{,}6)^2 \cdot (0{,}4)^4 = \frac{6!}{4!\cdot 2!} \cdot 0{,}36 \cdot 0{,}0256 = \frac{5\cdot 6}{2} \cdot 0{,}009216 = 0{,}13824;$$

$$P_6^3 = \ldots = \frac{6!}{3!\cdot 3!} \cdot 0{,}216 \cdot 0{,}064 = \frac{4\cdot 5\cdot 6}{6} \cdot 0{,}013824 = 0{,}27648;$$

$$P_6^4 = C_6^4 \cdot (0{,}6)^4 \cdot (0{,}4)^2 = \ldots$$

По теореме сложения вероятностей несовместных событий:

$P_6(2 \le m \le 4) = P_6^2 + P_6^3 + P_6^4 = 0{,}13824 + 0{,}27648 + 0{,}31104 = 0{,}72576$ – вероятность того, что среди 6 наудачу отобранных изделий будет от 2 до 4 изделий первого сорта.

Решение можно было записать и «одной строкой», что мы и сделаем в следующем пункте:

**б)** Событие «*Среди 6 наудачу отобранных изделий будет не менее 5 изделий первого сорта»* состоит в **двух** несовместных исходах: первосортных изделий будет пять **или** шесть. По формуле Бернулли и теореме сложения вероятностей несовместных событий:

$$P_6(m \ge 5) = P_6^5 + P_6^6 = C_6^5 \cdot (0{,}6)^5 \cdot (0{,}4)^1 + C_6^6 \cdot (0{,}6)^6 \cdot (0{,}4)^0 = 6 \cdot (0{,}6)^5 \cdot 0{,}4 + (0{,}6)^6 =$$
$$= 0{,}186624 + 0{,}046656 = 0{,}23328$$ – искомая вероятность.

**в)** Вероятность того, что *«Среди 6 наудачу отобранных изделий будет хотя бы одно изделие более низкого сорта»* удобно найти через вероятность противоположного события (*«Все изделия будут первосортными»*), которая уже известна:

$P_6(0 \le m \le 5) = 1 - P_6^6 = 1 - 0{,}046656 = 0{,}953344$ – вероятность того, что среди шести отобранных изделий окажется хотя бы одно низкосортное.

**Ответ**: а) $0{,}72576$; б) $0{,}23328$; в) $0{,}953344$, и подобных задач пруд пруди.

Давайте заодно вспомним такое полезное понятие, как полная группа событий. Что осталось не найденным? Остались не найденными вероятности двух событий. Не хотел я лишний раз заострять внимание на ***Калькуляторе по теории вероятностей***, который приложен к книге, но быстроты ради воспользуюсь:

$P_6^0 = 0{,}00409$, $P_6^1 = 0{,}036864$ – **но на чистовике так, конечно, делать не нужно – обязательно расписывайте вычисления подробно!**

Проверка: $P_6^0 + P_6^1 + P_6^2 + P_6^3 + P_6^4 + P_6^5 + P_6^6 =$

$= 0{,}004096 + 0{,}036864 + 0{,}13824 + 0{,}27648 + 0{,}31104 + 0{,}186624 + 0{,}046656 = 1$,

что и требовалось проверить

Небольшое задание для самостоятельного решения:

**Задача 71**

Производится 8 выстрелов по цели, в каждом из которых вероятность попадания равна 0,1. Для разрушения цели требуется хотя бы два попадания. Найти вероятность того, что цель будет разрушена

Формула Бернулли очень удобна, но с другой стороны, обладает и рядом недостатков. В частности, при достаточно больших значениях $n$ и $m$ её применение затруднено ввиду огромных значений факториалов. В этом случае используют ***теоремы Лапласа***. В другой распространённой на практике ситуации вероятность $p$ достаточно мала, а количество испытаний $n$ весьма велико. Здесь вопрос разрешается с помощью ***формулы Пуассона***, с неё и начнём:

### 1.10. Формула Пуассона

Если количество независимых испытаний $n$ **достаточно велико** *(100 и больше)*, а вероятность $p$ появления события $A$ в отдельно взятом испытании **весьма мала** *(0,05-0,01 и меньше)*, то вероятность того, что в данной серии испытаний событие $A$ появится ровно $m$ раз, можно вычислить **приближённо** по формуле Пуассона:

$P_m \approx \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}$, где $\lambda = np$ *(вместо «лямбды» также используют букву «а»).*

Утопичная, конечно, задача, но что делать – таких много:)

**Задача 72**

В новом микрорайоне поставлено 10000 кодовых замков на входных дверях домов. Вероятность выхода из строя одного замка в течение месяца равна 0,0002. Найти вероятность того, что за месяц откажет ровно 1 замок.

**Решение**: в данном случае количество «испытаний» $n = 10000$ велико, а вероятность «успеха» в каждом из них – мала: $p = 0{,}0002$, поэтому используем формулу Пуассона:

$P_m \approx \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}$, по условию, требуется найти вероятность того, что за месяц откажет ровно $m = 1$ замок

Вычислим: $\lambda = np = 10000 \cdot 0{,}0002 = 2$ – по существу, это *среднеожидаемое* количество вышедших из строя замков.

Таким образом:

$P_1 \approx \frac{2^1}{1!} \ldots$ – вероятность того, что за месяц из строя выйдет ровно один замок (из 10 тысяч).

**Ответ**:

С технической точки зрения результат $P_1 \approx \frac{2^1}{1!} \cdot e^{-2} \approx 0{,}2707$ можно получить несколькими способами, расскажу о них в историческом ракурсе:

**1)** С помощью специальной таблицы, которая до сих пор встречается в некоторых книгах. В данную таблицу сведены различные значения $\lambda$, $m$ и соответствующие им вероятности. Табулирование обусловлено тем, что в своё время не существовало бытовых калькуляторов, на которых можно было бы подсчитать значения экспоненциальной функции. Отсюда, кстати, идёт **традиция округлять вычисления до 4 знаков после запятой** – как в стандартной таблице.

**2)** С помощью прямого вычисления на микрокалькуляторе (прогресс!), именно этим способом я и провёл вычисления.

**3)** С помощью стандартной экселевской функции: *ПУАССОН(m; лямбда; 0)*, в данной задаче забиваем в любую ячейку Экселя *=ПУАССОН(1; 2; 0)* и жмём *Enter*.

Следует отметить, что развитие вычислительной техники фактически отправило в историю рассмотренное решение – по той причине, что ответ легко вычислить более точно***** по формуле Бернулли, например, с помощью функции *БИНОМРАСП* приложения MS Excel: $P_{10000}^{1} \approx 0{,}2706705646685$

***** *и, разумеется, существует абсолютно точное значение с длинным «хвостом».*

Но формула Пуассона, тем не менее, даёт очень крутое приближение:
$P_1 \approx 0{,}2706705664732$ – с погрешностью только на 9-м знаке после запятой!

Впрочем, это всё лирика, решать-то всё равно нужно по формуле Пуассона, пока я и мои коллеги не написали для вас новые учебники:) Ну а пока классика жанра:

## Задача 73

Завод отправил в торговую сеть 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0,003. Найти вероятность того, что при транспортировке будет повреждено:
а) ни одного изделия, б) ровно три изделия, в) более трех изделий.

**Решение**: используем формулу Пуассона:

$P_m \approx \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}$, в данном случае: $\lambda = np = 500 \cdot 0{,}003 = 1{,}5$ – среднеожидаемое количество повреждённых изделий

**а)** $m = 0$

$P_0 \approx \frac{1{,}5^0}{0!} \cdot e^{-1{,}5} = e^{-1{,}5} \approx 0{,}2231$ – вероятность того, что все изделия дойдут в целости и сохранности, как бы сказал опытный логист, ничего не украли ☺

**б)** $m = 3$

$P_3 \approx \frac{1{,}5^3}{3!} \cdot e^{-1{,}5} \approx 0{,}1255$ – вероятность того, что в пути будут повреждены ровно 3 изделия из 500.

**в)** $m > 3$ (больше трёх изделий). Это **или** 4, **или** 5, **или** 6, **или**, …, **или** 500 штук. Но считать сумму $P_4 + P_5 + P_6 + .... + P_{499} + P_{500}$, мы, конечно не будем :)

Приём уже знаком – «заходим с чёрного хода». Сначала найдём $P(m \le 3)$ – вероятность того, что в пути повредятся *не более* трёх изделий. По теореме сложения вероятностей несовместных событий:

$$P(m \le 3) \approx P_0 + P_1 + P_2 + .. = ... + \frac{1{,}5^3}{3!} \cdot e^{-1{,}5} \approx$$

$$\approx 0{,}2231 + 0{,}3347 + 0{,}2510 + 0{,}1255 = 0{,}9344$$

И по теореме сложения вероятностей противоположных событий:

$P(m > 3) = 1 - P(m \le 3) \approx 1 - 0{,}9344 = 0{,}0656$ – вероятность того, что при доставке будет повреждено более 3 изделий.

**Ответ**: а) $\approx 0{,}2231$, б) $\approx 0{,}1255$, в) $\approx 0{,}0656$

Само собой, ручками это всё считать надоест, и поэтому я добавил в ***Калькулятор*** *(Пункт 7)* автоматическое вычисление этих вероятностей.

Следующий пример самостоятельно; по возможности, проведите вычисления несколькими способами:

**Задача 74**

Вероятность изготовления бракованных деталей при их массовом производстве равна $p = 0{,}001$. Определить вероятность того, что в партии из 800 деталей будет: а) ровно 2 бракованные, б) не более двух.

Иногда условие встречается в несколько другой интерпретации. Так, в предложенной задаче может идти речь о том, что производственный брак составляет 0,1% или, например, *«в среднем 0,8 детали на каждую тысячу»*. Обратите внимание, что в последнем случае нам дано готовое значение «лямбда».

**Ни в коем случае не отключаем голову** – даже в таких простых примерах!

Ещё раз подчёркиваю, что формула Пуассона лишь *приближает* формулу Бернулли, и на самом деле это её не единственное применение. В следующей главе мы познакомимся с распределением Пуассона и разберём другие задачи с этой формулой.

## 1.11. Локальная теорема Лапласа

Итак, те же независимые испытания, но значения $n$ и $m$ достаточно велики:

*Найти вероятность того, что при 400 бросках монеты орёл выпадет 200 раз.*

Очевидно, что здесь следует применить формулу Бернулли, и мы попробуем её применить: $P_{400}^{200} = C_{400}^{200} \cdot (0{,}5)^{200} \cdot (0{,}5)^{200} = \frac{400!}{200! \cdot 200!} \cdot (0{,}5)^{400}$ …стоп, что делать дальше?

Микрокалькулятор (по крайне мере, мой) не справился с 400-й степенью и капитулировал перед факториалами.

Воспользуемся стандартной функцией Экселя (*БИНОМРАСП – см. п. 3 **Калькулятора***), которая сумела обработать монстра:

$P_{400}^{200} = 0{,}0398693019637926$.

Заостряю ваше внимание, что это **точное** значение и такое решение вроде бы идеально,… но: 1) программного обеспечения может не оказаться под рукой, 2) учебное решение будет смотреться нестандартно, 3) Эксель – тоже не панацея, «сломался» на значениях, чуть бОльших, чем $n = 1000$ *(специально ради интереса ломал)*.

Возникает мысль написать специальную программу, например, на Паскале, но… сами понимаете, изощрённые фантазии многими преподавателями не одобряются =)

***Локальная теорема Лапласа***. Если вероятность $p$ появления случайного события $A$ в каждом испытании постоянна, то вероятность $P_n(m)$ того, что в $n$ испытаниях событие $A$ наступит ровно $m$ раз, **приближённо** равна:

$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x)$ , где $\varphi(x) = ...$ – ***функция Гаусса***, а $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$ .

При этом, чем больше $n$, тем рассчитанная вероятность $P_n(m)$ будет лучше приближать точное значению $P_n^m$ (по Бернулли). Рекомендуемое минимальное количество испытаний – примерно 50-100, в противном случае результат $P_n(m)$ может оказаться далёким от истины. Кроме того, локальная теорема Лапласа работает тем лучше, чем вероятность $p$ ближе к 0,5, и наоборот – даёт существенную погрешность, когда $p$ меньше, чем $0{,}05 - 0{,}1$ (впрочем, это зависит от $n$). Поэтому **критерием эффективного использования теоремы является выполнение неравенства** $npq > 10 \ (\approx 10)$.

Так, например, если $n = 50,\ p = 0{,}5$, то $npq = 50 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 12{,}5 > 10$ и применение теоремы Лапласа для 50 испытаний оправдано. Но если $n = 50$ и $p = 0{,}1$, то $npq = 50 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9 = 4{,}5 < 10$ и приближение $P_n(m)$ к точному значению $P_n^m$ будет плохим.

Оформим официальные отношения с нашим примером:

## Задача 75

Монета подбрасывается 400 раз. Найти вероятность того, что орёл выпадет ровно:
а) 200 раз, б) 225 раз.

С чего начать **решение**? Сначала распишем известные величины, чтобы они были перед глазами:

$n = 400$ – общее количество независимых испытаний;
$p = 0{,}5$ – вероятность выпадения орла в каждом броске;
$q = 1 - p = 0{,}5$ – вероятность выпадения решки.

**а)** Найдём вероятность того, что в серии из 400 бросков орёл выпадет ровно $m = 200$ раз. Ввиду большого количества испытаний используем локальную теорему Лапласа: $P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x)$, где $\varphi(x) = ...$.

На первом шаге вычислим значение аргумента:

$$x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}} = \frac{200-400\cdot 0{,}5}{\sqrt{400\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5}} = \frac{200-200}{\sqrt{100}} = \frac{0}{10} = 0$$

Далее находим соответствующее значение функции: $\varphi(0)$. Это можно сделать несколькими способами. В первую очередь, конечно же, напрашивается прямое вычисление:

$\varphi(x) = \varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot \ldots$ – **округление проводят, как правило, до 4 знаков после запятой**. Для ускорения вычислений я добавил эту формулу в ***Калькулятор*** *(пункт 4)*.

Кроме того, существует *таблица значений функции* $\varphi(x)$, которая есть практически в любой книге по теории вероятностей. И эта книга не исключение:

**Прямо сейчас откройте** *Приложение* ***Таблицы***
**и разберитесь, как пользовать таблицей значений функции $\varphi(x)$!**

В частности, найдите по таблице значение $\varphi(0)\approx 0{,}3989$. «Дедовский» способ поможет в тех случаях, когда под рукой не окажется нужной техники (что вполне реально на практике).

На заключительном этапе применим формулу $P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\varphi(x)$:

$P_{400}(200) \approx \frac{1}{10}\cdot\varphi(0) \approx 0{,}1\cdot 0{,}3989 = 0{,}03989$ – вероятность того, что при 400 бросках монеты орёл выпадет ровно 200 раз.

Как видите, полученный результат очень близок к точному значению $P_{400}^{200} = 0{,}0398693019637926$, вычисленному по формуле Бернулли.

**б)** Найдём вероятность того, что в серии из 400 испытаний орёл выпадет ровно $m = 225$ раз. Используем локальную теорему Лапласа. Раз, два, три – и готово:

1) $x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}} = \frac{225-200}{10} = \frac{25}{10} = 2{,}5$

2) $\varphi(x) = \varphi(2{,}5) \approx 0{,}0175$

**Обязательно найдите это значение по таблице!**

3) $P_{400}(225) \approx \frac{1}{10}\cdot\varphi(2{,}5) \approx 0{,}1\cdot 0{,}0175 = 0{,}00175$ – искомая вероятность.

**Ответ**: а) $\approx 0{,}04$;  б) $\approx 0{,}002$

Следующий пример посвящен,… правильно догадываетесь, и это вам для самостоятельного решения :)

## Задача 76

Вероятность рождения мальчика равна 0,52. Найти вероятность того, что среди 100 новорожденных окажется ровно: а) 40 мальчиков, б) 50 мальчиков, в) 30 девочек.

Кстати, реальная ***статистическая вероятность*** рождения мальчика во многих регионах мира как раз колеблется в пределах от 0,51 до 0,52.

Как вы заметили, вероятности получаются достаточно малыми, и это не должно вводить в заблуждение – ведь речь идёт о вероятностях отдельно взятых, *локальных* значениях (отсюда и название теоремы). А таковых значений много, и, образно говоря, вероятности «должно хватить на всех». Правда, многие события будут практически невозможными. Так, в серии из 400 испытаний орёл теоретически может выпасть от 0 до 400 раз, и данные события образуют полную группу:
$P_{400}(0)+P_{400}(1)+P_{400}(2)+...+P_{400}(199)+P_{400}(200)+...$

Однако бОльшая часть этих значений представляет собой сущий мизер, и вероятность того, что орёл выпадет ровно 250 раз – уже одна десятимиллионная: $P_{400}(250)\approx 0{,}0000001$. О значениях вроде $P_{400}(100),\ P_{400}(350)$ тактично умолчим :)

С другой стороны, не следует недооценивать и «скромные результаты»: так, если $P_{400}(225)$ составляет всего около $0{,}00175$, то вероятность того, орёл выпадет, скажем, от 220 до 250 раз, будет весьма заметна. **А теперь задумаемся: как найти эту вероятность?** С современными вычислительными возможностями не составит труда воспользоваться теоремой сложения вероятностей несовместных событий и вычислить сумму $P_{400}(220)+P_{400}(221)+P_{400}(222)+...+P_{400}(249)+P_{400}(250)$ либо абсолютно точное значение через формулу Бернулли: $P_{400}^{220}+P_{400}^{221}+P_{400}^{222}+...+P_{400}^{249}+P_{400}^{250}$.

Но гораздо проще эти значения *объединить*. А объединение чего-либо называется ***интегрированием***:

### 1.12. Интегральная теорема Лапласа

Если вероятность $p$ появления случайного события $A$ в каждом испытании постоянна, то вероятность $P_n(m_1\le m\le m_2)$ – того, что в $n$ испытаниях событие $A$ наступит **не менее** $m_1$ **и не более** $m_2$ **раз** *(от $m_1$ до $m_2$ раз включительно)*, **приближённо** равна:

$$P_n(m_1\le m\le m_2)\approx\Phi(x_2)-\Phi(x_1),\ \text{где}\ \Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$ – ***функция Лапласа***,

а аргументы рассчитываются по формулам $x_2=\dfrac{m_2-np}{\sqrt{npq}},\quad x_1=\dfrac{m_1-np}{\sqrt{npq}}$.

Как и в локальной теореме, количество испытаний $n$ должно быть достаточно большим и вероятность $p$ не слишком мала, и на практике следует ориентироваться на выполнение того же неравенства $npq>10$, в противном случае приближение к точному результату $P_n^{m_1}+P_n^{m_1+1}+P_n^{m_1+2}+...+P_n^{m_2-1}+P_n^{m_2}$ *(полученному по Бернулли)* будет плохим.

## Задача 77

Вероятность поражения стрелком мишени равна 0,7. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена:

а) от 60 до 80 раз,  б) не менее 65 раз

**Решение**: в данной задаче речь идёт о повторных независимых испытаниях, причём их количество $n = 100$ достаточно велико. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле составляет $p = 0{,}7$, следовательно, вероятность промаха: $q = 1 - p = 0{,}3$.

Оценим эффективность применения интегральной теоремы Лапласа:
$npq = 100 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 = 21 > 10$, значит, теорема Лапласа даст хорошее приближение.

**а)** Найдём вероятность $P_{100}(60 \le m \le 80)$ – того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена от $m_1 = 60$ до $m_2 = 80$ раз. Используем интегральную теорему Лапласа:
$P_{100}(60 \le m \le 80) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, где $\Phi(x)$ – *функция Лапласа*.

Сначала вычислим значения аргументов:

$$x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{80 - 100 \cdot 0{,}7}{\sqrt{21}} = \frac{80 - 70}{\sqrt{21}} \approx \frac{10}{4{,}5825} \approx 2{,}18$$

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \ldots$$

Обращаю внимание, что произведение $npq$ не обязано извлекаться из-под корня нацело *(как любят «подгонять» числа авторы задач)* – без тени сомнения извлекаем корень приближённо и округляем результат; я привык оставлять 4 знака после запятой. А вот **полученные значения** $x_1, x_2$ **обычно округляют до 2 знаков** – эта традиция идёт из *таблицы значений функции* $\Phi(x)$ *(см. Приложение **Таблицы**)*, где аргументы представлены именно в таком виде.

Таким образом:
$P_{100}(60 \le m \le 80) \approx \Phi(2{,}18) - \Phi(-2{,}18)$

Как вычислить значения функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$? Ручные вычисления и микрокалькулятор здесь не помогут, поскольку этот интеграл не берётся. Но вот в Экселе соответствующий функционал есть – используйте *Пункт 5* ***Калькулятора***.

**Кроме того, ОБЯЗАТЕЛЬНО найдите значение** $\Phi(2{,}18) \approx 0{,}4854$ **в таблице!**

И, учитывая нечётность функции Лапласа $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, получаем, распишу подробно:

$P_{100}(60 \le m \le 80) \approx \ldots$

$\approx 0{,}4854 + 0{,}4854 = 0{,}9708$ – вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена от 60 до 80 раз.

**Результат чаще всего округляют до 4 знаков после запятой** *(опять же в соответствии с форматом таблицы)*.

**б)** Найдём вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена *не менее* 65 раз. Это означает, что $m_1 = 65$, а $m_2 = 100$.

Вычислим значения аргументов:

$$x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 70}{\sqrt{21}} \approx \frac{30}{4{,}5825} \approx 6{,}55$$

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{65 - 70}{\sqrt{21}} \approx \frac{-5}{4{,}5825} \approx -1{,}09$$

Таким образом, по интегральной теореме Лапласа и *таблице значений функции Лапласа* (лучше использовать такую формулировку!), получаем:

$... = \Phi(6{,}55) - (-\Phi(1{,}09)) = \Phi(6{,}55) + \Phi(1{,}09) \approx$

$\approx 0{,}5000 + 0{,}3621 = 0{,}8621$ – вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена *не менее* 65 раз.

***Примечание:*** *начиная с* $x = 4$, *можно считать, что* $\Phi(x) \approx 0{,}5000$, *или, если записать строже:* $\lim\limits_{x \to +\infty} \Phi(x) = 0{,}5$.

**Ответ**: а) $P_{100}(60 \le m \le 80) \approx 0{,}9708$, б) $P_{100}(m \ge 65) \approx 0{,}8621$

И ради исследовательского интереса я вычислил более точные значения с помощью формулы Бернулли («протянув» в Экселе формулу *БИНОМРАСП*):

$P_{100}^{60} + P_{100}^{61} + P_{100}^{62} + ... + P_{100}^{79} + P_{100}^{80} \approx 0{,}9786$, $P_{100}^{65} + P_{100}^{66} + P_{100}^{67} + ... + P_{100}^{99} + P_{100}^{100} \approx 0{,}8839$

– как видите, расхождение получилось существенным, это обусловлено небольшим значением $n$. А ещё, надо признать, рассматриваемый метод устарел, ибо экселевские расчёты отняли у меня буквально минуту. Но мы отнесёмся к этому с пониманием, таки Пьер-Симон маркиз де ~~Сад~~ Лаплас жил в 18-19 веках ☺

Следующая задача для самостоятельного решения:

**Задача 78**

В здании имеется 2500 ламп, вероятность включения каждой из них в вечернее время равна 0,5. Найти вероятность того, что вечером будет включено:
а) половина ламп,
б) не менее 1250 и не более 1275 ламп,
в) не более 1000 ламп

Примерный образец чистового оформления решения в конце книги.

Следует отметить, что рассматриваемые задачи очень часто встречаются в «обезличенном» виде, примерно таком:

*Производится некоторый опыт, в котором случайное событие* $A$ *может появиться с вероятностью 0,5. Опыт повторяется в неизменных условиях 2500 раз. Определить вероятность того, что в 2500 опытах событие* $A$ *произойдет от 1250 до 1275 раз*

## 1.13. Статистический подход к определению вероятности

Давайте вспомним, с чего всё начиналось:

Вероятность наступления события $A$ в некотором испытании – есть отношение $P(A)=\dfrac{m}{n}$, где:

$n$ – общее число всех равновозможных, элементарных исходов этого испытания, которые образуют полную группу событий;

$m$ – количество элементарных исходов, благоприятствующих событию $A$.

Например:

$P(A_O)=\dfrac{1}{2}$ – вероятность того, что в результате броска монеты **выпадет** «орёл»;

$P(B_5)=\dfrac{1}{6}$ – вероятность того, что на игральной кости **выпадет** 5 очков;

$P(C_T)=\dfrac{9}{36}=\dfrac{1}{4}$ – вероятность того, что из колоды **будет извлечена** трефа

Внимательный читатель заметил, что все комментарии о вероятностях сформулированы в **будущем времени**. И это не случайность – классическое определение оценивает вероятность **ДО** проведения испытаний и даже **без их фактического проведения**. То есть, монета ещё не подброшена, а вероятность появления орла мы уже знаем. Можно дать зарок никогда не брать в руки кубик либо колоду карт, однако, вероятности событий $B_5, C_T$ беспроблемно рассчитываются и без этого.

Почему такое возможно? Такое возможно потому, что **все** элементарные исходы известны и подсчитаны заранее:

*орёл и решка* – итого 2 элементарных исхода;
*1, 2, 3, 4, 5, 6* – 6 элементарных исходов;
*6, 7, 8, 9, 10, В, Д, К, Т каждой масти* – всего 36 карт.

Кроме того, для применения классического определения вероятности необходима равновозможность элементарных исходов *(см. определение)*. Равновозможность выпадения граней монеты либо кубика обуславливается симметрией и несмещённым центром тяжести, колода же карт должна быть полной, некраплёной и хорошо перемешанной.

### ➢ Ограниченность классического определения

И всё было бы ладно, но в реальной жизни рассмотренные выше модели встречаются нечасто. В большинстве ситуаций элементарные исходы перечислить затруднительно или невозможно, и ещё труднее обосновать их равновозможность. Простой пример:

*Штирлиц пошёл в лес за грибами. Найти вероятность того, что он найдёт подберёзовик.*

Совершенно понятно, что все грибы в лесу *(общее количество элементарных исходов)* пересчитать практически невозможно, а значит, классическое определение вероятности не срабатывает. И даже если группа разведчиков учтёт все грибы в небольшой роще, классифицирует их по видам, то препятствием станет неравновозможность исходов. Почему? Поляна мухоморов намного заметнее, чем замаскировавшиеся подберёзовики…, так, кто это предложил их покрасить в красный цвет? :) …ну что тут сказать? – с такими страна на пропадёт!

Кстати, вспомнилась ещё одна каверзная задачка на счёт неравновозможности исходов. Её суть состоит в следующем: если в городе проживает примерно равное количество мужчин и женщин *(которых подсчитать значительно проще =))*, то это ещё не значит, что вероятность встретить на улице мужчину либо женщину равна $\frac{1}{2}$-й. Ибо за углом может быть отделение полиции или швейная фабрика.

А теперь вновь обратим внимание на шаблонные формулировки стандартных задач тервера:

«Стрелок попадает в мишень с вероятностью 0,8»;
«Вероятность изготовления бракованной детали на данном станке составляет 0,05».

Возникает вопрос, откуда взялись эти значения? И ответ здесь один: данные вероятности могли получиться **только на основе ранее проведённых опытов**.

### ➢ Относительная частота события и статистическая вероятность

***Относительной частотой*** события $A$ называют **отношение** числа испытаний $m$, в которых данное событие появилось, к общему числу $n$ фактически проведённых испытаний:

$W(A) = \frac{m}{n}$, или короче:

**Относительная частота** наряду с вероятностью является одним из ключевых понятий тервера, но если классическое либо геометрическое определение вероятности не требуют проведения испытаний, то **относительная частота рассчитывается ПОСЛЕ опытов и исключительно на основе фактически полученных данных.**

В том случае, если серии испытаний проводятся в неизменных условиях, то относительная частота обнаруживает свойство ***устойчивости***, то есть колеблется около определённого значения. Поясню это на конкретных примерах:

Пусть некий профессиональный стрелок произвёл 100 выстрелов по мишени и попал 83 раза. Тогда относительная частота поражения цели составит: $\omega = \frac{83}{100} = 0{,}83$.

Предположим, что тот же самый стрелок в точно такой же «форме» и в приблизительно таких же условиях снова провёл серию из 100 выстрелов. Вероятно ли, что он снова попадёт 83 раза? Не очень. Но количество попаданий вряд ли будет сильно отличаться от предыдущего результата. Пусть, например, стрелок попал 79 раз. Тогда относительная частота поражения цели составит: $\omega = \frac{79}{100} = 0{,}79$.

В третьей серии из 100 выстрелов, проведённой при похожих обстоятельствах, данный стрелок попал 81 раз, $\omega = \frac{81}{100} = 0{,}81$ и т.д.

Иногда будут случаться блестящие серии более 90 попаданий, иногда «провалы», но среднее количество попаданий будет варьироваться около 80. И когда количество фактически проведённых испытаний станет достаточно большим, то речь зайдёт о ***статистической вероятности***.

Если в одинаковых (примерно одинаковых) условиях проведено достаточно много испытаний, то за ***статистическую вероятность события*** принимают относительную частоту данного события либо близкое число.

Предположим, что на протяжении нескольких лет наш спортсмен, сохраняя стабильный уровень подготовки, совершил 10000 выстрелов и попал 8037 раз. Относительная частота поражения цели составит: $\omega = \frac{8037}{10000} = 0{,}8037$ и за статистическую вероятность его результативности целесообразно принять $p = 0{,}8$, которая становится теоретической оценкой, например, перед грядущими соревнованиями.

Именно так и собирается богатая спортивная статистика в различных видах спорта.

Аналогичная история с утверждением *«Вероятность изготовления бракованной детали на данном станке равна 0,05»*.

Эту оценку невозможно получить с помощью классического определения вероятности – она следует только из практики! Если на станке произведены десятки тысяч деталей и на каждую, скажем, тысячу выпущенных деталей, приходится *в среднем 50* бракованных, то в качестве статистической вероятности брака принимается значения $p = 0{,}05$.

В Задаче 76 фигурировала вероятность рождения мальчика $p = 0{,}52$. Откуда взялось данное значение? Из многолетнего подсчёта фактически рождённых детей в определённом регионе. Но это вовсе не означает, что среди 100 новорожденных будет ровно 52 мальчика. В следующей сотне рождённых их может оказаться, например, 45, и относительная частота $\omega = \frac{45}{100} = 0{,}45$ будет далека от истины.

Но если рассмотреть выборку в тысячи и десятки тысяч младенцев, то $\omega$ отклонится от $p = 0{,}52$ совсем-совсем незначительно. **И это уже не случайность**. Как известно, такое соотношение новорожденных сложилось эволюционно – по причине бОльшей смертности мужчин.

В учебном пособии *В.Е. Гмурмана* есть весьма удачный пример, в котором продемонстрировано, как при подбрасывании монеты относительная частота появления орла приближается к своей вероятности $p = \frac{1}{2}$ (полученной по классическому определению):

| Количество бросков монеты, $n$ | Число появлений орла, $m$ | Относительная частота, $\omega = \frac{m}{n}$ |
|---|---|---|
| 4040 | 2048 | 0,5069 |
| 12000 | 6019 | 0,5016 |
| 24000 | 12012 | 0,5005 |

**Таким образом, с увеличением количества независимых испытаний случайность превращается в закономерность**

Вернёмся к рулетке. В отдельно взятом сеансе игры отдельно взятый человек может выиграть, причём выиграть по-крупному. **Это случайность**. Но, совершая миллионы и миллионы оборотов, рулетка на протяжении веков приносит неизменную прибыль владельцам казино. **И это закономерность**.

Существует байка о том, что крупный выигрыш не отдадут, а если и отдадут, то «вы с ним не дойдёте до дома». Чисто житейская фантазия. Да, кому-то повезло, но сколько проиграется?! К тому же человек, посещающий подобные заведения, с большой вероятностью придёт снова и «сольёт» ещё больше. А чтобы он вернулся, казино, скорее наоборот – создаст максимальный комфорт и безопасность для «счастливчика». Ибо на длинной дистанции разорятся ВСЕ игроки.

Другой пример. Пусть в некой лотерее приняло участие $n = 629911$ билетов, из которых $m = 192833$ выиграли хоть какой-то приз. Таким образом, относительная частота выигрыша составила: $\omega = \frac{192833}{629911} \approx 0{,}306127$. Поскольку билетов продано очень много, то с большой вероятностью можно утверждать, что в будущем, при сопоставимых объемах продаж, доля выигравших билетов будет примерно такой же, и за статистическую вероятность выигрыша удобно принять значение $p = 0{,}3$.

Организатор лотереи знает, что из миллиона проданных билетов выиграют около 300 тысяч с небольшим отклонением. Этот факт важен для грамотного распределения призового фонда, **и это закономерность**. Но всем участникам лотереи достаётся….
– правильно, **случайность**! То есть, если вы купите 10 билетов, то это вовсе не значит, что выиграют 3 билета. Так, выигрыш только по одному билету – есть событие очень даже вероятное, по формуле Бернулли:

$$P_{10}^{1} = C_{10}^{1} \cdot (0{,}3)^{1} \cdot (0{,}7)^{9} = 10 \cdot 0{,}3 \cdot (0{,}7)^{9} \approx 0{,}12$$

А если учесть тот факт, что львиная доля выигрышей – сущая мелочь, то картина вырисовывается совсем унылая. Ситуацию спасают красочные телевизионные розыгрыши и различные психологические трюки.

Желающие могут самостоятельно исследовать вероятность выигрыша в различные лотереи – вся статистика есть в свободном доступе ;) И, говоря откровенно, вас просто поразит это чудовищное надувательство. Впрочем, рулетка гораздо коварнее.

Практическая часть параграфа будет тесно связана с только что изложенным материалом:

## ➢ Вероятность отклонения относительной частоты от вероятности

Вероятность того, что в $n$ независимых испытаниях относительная частота $\omega = \dfrac{m}{n}$ события $A$ **отклонится** от вероятности $p$ *(появления данного события в каждом испытании)* не более чем на $\varepsilon$, **приблизительно** равна:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) \approx .., \text{ где } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$ – ***функция Лапласа***.

Эта формула следует из интегральной теоремы Лапласа.

Итак, расклад следующий: в распоряжении имеется вероятность $p$ наступления события $A$, которая предварительно получена с помощью классического/геометрического определения или посредством серьёзной статистической оценки. Планируется провести $n$ независимых испытаний, в которых событие $A$ может наступить некоторое количество раз, причём значение $m$, разумеется, предсказать нельзя. Полученная относительная частота $\omega = \dfrac{m}{n}$ может оказаться как больше, так и меньше вероятности $p$ (поэтому нужен знак модуля).

Требуется найти вероятность того, что в серии из $n$ независимых испытаний, расхождение между относительной частотой и теоретической вероятностью $\left|\dfrac{m}{n} - p\right|$, будет не больше, чем заранее заданное число, например, не больше, чем $\varepsilon = 0{,}01$.

Возвращаемся к любимой задаче:

### Задача 79

В некотором регионе в результате многолетнего статистического исследования установлена вероятность рождения мальчика $p = 0{,}52$. С какой вероятностью можно утверждать, что среди следующей тысячи новорожденных, относительная частота появления мальчика отклонится от соответствующей вероятности не более чем на 0,02?

**Решение**: используем формулу $P\left(\left|\dfrac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\dfrac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right)$

По условию, $p = 0{,}52, \ n = 1000, \ \varepsilon = 0{,}02$. Таким образом:

$$P\left(\left|\frac{m}{1000} - 0{,}52\right| \le 0{,}02\right) \approx ...$$ – искомая вероятность.

Напоминаю, что значения функции Лапласа можно найти по соответствующей таблице или с помощью ***Калькулятора*** *(Пункт 5)*.

**Ответ**: $\approx 0{,}796$

Каков смысл полученного результата? Если рассмотреть достаточно много групп по 1000 новорожденных в каждой, то примерно в 79,6% этих групп доля мальчиков будет находиться в пределах:

$$p-\varepsilon \le \frac{m}{n} \le p+\varepsilon$$

$$0{,}52-0{,}02 \le \frac{m}{1000} \le 0{,}52+0{,}02$$

$$0{,}50 \le \frac{m}{1000} \le 0{,}54$$

или, умножая все три части неравенства на тысячу: от 500 до 540 мальчиков.

И на самом деле рассмотренная задача эквивалентна следующей: *«Найти вероятность того, что среди 1000 новорожденных будет от 500 до 540 мальчиков, если вероятность рождения мальчика равна 0,52»*. А эта задача как раз и решается через разобранную выше интегральную теорему Лапласа.

Следующая задача для самостоятельного решения:

**Задача 80**

Производится некоторый опыт, в котором случайное событие $A$ может появиться с вероятностью 0,6. Опыт повторяют в неизменных условиях $800$ раз. Определить вероятность того, что в 800 независимых испытаниях относительная частота появления события $A$ отклонится от вероятности не более чем: а) на 0,05, б) на 0,03

Условие сформулировано в общем виде, как оно чаще всего и бывает. Ещё раз повторим суть задания: проводится $n=800$ опытов, в результате чего событие $A$ наступит $m$ раз – сколько именно, предугадать невозможно. Относительная частота составит $W(A)=\frac{m}{n}=\frac{m}{800}$. С другой стороны, известна вероятность $p=0{,}6$ события $A$, которая установлена ранее с помощью классического / геометрического определения или путём сбора солидной статистики. Требуется найти вероятность $P\left(\left|\frac{m}{800}-0{,}6\right| \le 0{,}05\right) \approx \gamma$ – того, что относительная частота отклонится от вероятности, не более чем на $\varepsilon=0{,}05$.

В чём смысл? С найденной вероятностью $\gamma$ можно утверждать, что относительная частота будет заключена в следующих пределах:

$$p-\varepsilon \le \frac{m}{n} \le p+\varepsilon$$

...

...

...

или в абсолютном количестве появлений события $A$, умножаем все части на 800:

$$0{,}55 \cdot 800 \le m \le 0{,}65 \cdot 800$$

$440 \le m \le 520$ *(от 440 до 520 появлений в 800 испытаниях)*

Для $\varepsilon=0{,}03$ этот промежуток будет меньше *(найдите самостоятельно)*, и логично, что уменьшиться вероятность того, что $m$ примет значение из этого, более узкого промежутка.

На практике не менее популярна

### ➢ и обратная задача

Её можно сформулировать следующим образом: **Как определить, сколько нужно провести испытаний $(n)$, чтобы с заранее заданной вероятностью $\gamma$ обеспечить желаемую точность $\varepsilon$?**

### Задача 81

Проводится некоторый опыт, в котором случайное событие $A$ может появиться с вероятностью 0,4. Определить, сколько опытов нужно провести, чтобы с вероятностью большей, чем 0,9 можно было ожидать отклонения относительной частоты появления события $A$ от $p = 0,4$ не более чем на 0,05.

**Решение**: используем ту же формулу $P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right) = \gamma$, но на этот раз нам известны величины: $p = 0,4; \quad q = 1 - p = 0,6; \quad \varepsilon = 0,05; \quad \gamma = 0,9$

По условию, требуется найти такое количество опытов $n$, чтобы с вероятностью <u>бОльшей</u> чем $\gamma = 0,9$ разница $\left|\frac{m}{n} - 0,4\right|$ составила *не более* чем $\varepsilon = 0,05$. Ну, а коль скоро с вероятностью «бОльшей», то задачу следует разрулить через строгое неравенство:

$2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right) > \gamma$ – подставляем известные значения и делим обе части на два:

$$\Phi\left(\frac{0,05\cdot\sqrt{n}}{\sqrt{0,24}}\right) > 0,45$$

По таблице значений функции $\Phi(x)$ либо с помощью ***Калькулятора*** *(Пункт 5*, этот способ будет точнее)* по известному значению функции $\Phi(x) = 0,45$ находим соответствующий аргумент: $x \approx 1,64$. Таким образом:

$$\frac{0,05\sqrt{n}}{\sqrt{0,24}} > 1,64$$

Возведём обе части в квадрат:

$$\left(\frac{0,05\sqrt{n}}{\sqrt{0,24}}\right)^2 > \ldots$$

$\frac{0,0025n}{0,24} > 2,6896$, и финальный штрих:

$$\ldots \cdot \frac{0,24}{0,0025} = 258,2$$

**Ответ**: для того, чтобы с вероятностью большей, чем 0,9, можно было ожидать отклонения $\left|\frac{m}{n} - 0,4\right| \le 0,05$, нужно провести более 259 опытов.

## 2. Случайные величины

Да, вот так вот неожиданно, вторая глава – как ведро холодной воды на голову. ***Случайные величины*** незримо сопровождали нас почти с самого начала, и настал момент чётко сформулировать, что же это такое:

### 2.1. Понятие и виды случайных величин

***Случайной*** называют *величину*, которая в результате испытания примет **одно и только одно** числовое значение, зависящее от случайных факторов и заранее непредсказуемое.

Случайные величины, как правило, **обозначают** через $X, Y, Z$ *, а их значения – соответствующими маленькими буквами с подстрочными индексами, например, $x_1, x_2, x_3$.

* *Иногда используют $U, V, W$ , а также греческие буквы*

Пример нам встретился практически на первых же страницах, где мы фактически рассмотрели следующую случайную величину:

$X$ – количество очков, которое выпадет после броска игрального кубика.

В результате данного испытания выпадет **одна и только** грань, какая именно – не предсказать *(фокусы не рассматриваем)*; при этом случайная величина $X$ может принять одно из следующий значений:

$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3, \quad x_4 = 4, \quad x_5 = 5, \quad x_6 = 6$.

Тема из недавних параграфов:

$Y$ – количество мальчиков среди 10 новорождённых.

Совершенно понятно, что это количество заранее не известно *(хотя вроде уже есть технология)*, и в очередном десятке родившихся детей может оказаться:

$y_0 = 0, \quad y_1 = 1, \quad y_2 = 2, \quad y_3 = 3, ..., \quad y_9 = 9$, либо $y_{10} = 10$ мальчиков – **один и только один** из перечисленных вариантов.

И, дабы соблюсти форму, немного физкультуры:

$Z$ – дальность прыжка в длину *(в некоторых единицах)*.

Её не в состоянии предугадать даже мастер спорта!

Тем не менее, ваши гипотезы? …всё верно, мы даже прыгать не будем :)

Коль скоро, речь идёт о **множестве действительных чисел**, то случайная величина $Z$ может принять *бесконечно и несчётно много* значений из некоторого числового промежутка. И в этом состоит её принципиальное отличие от предыдущих примеров.

Таким образом, **случайные величины целесообразно разделить на 2 большие группы:**

**1)** ***Дискретная*** *(прерывная)* случайная величина – принимает отдельно взятые, изолированные значения. Количество этих значений *конечно* либо *бесконечно, но счётно*.

***Справка:*** *множество счётно, если все его элементы можно пронумеровать*.

**2)** ***Непрерывная*** случайная величина – принимает **все** числовые значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

***Сокращения:*** *в учебной литературе популярны аббревиатуры ДСВ и НСВ*

Разберём эти величины по порядку:

## 2.2. Дискретная случайная величина

Поехали:

### ➢ Закон распределения дискретной случайной величины

– это *соответствие* между возможными значениями этой величины и их вероятностями. Чаще всего закон записывают таблицей:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $\ldots$ | $x_n$ |
| | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | $\ldots$ | $p_n$ |

Довольно часто встречается термин ***ряд*** *распределения*, но в некоторых контекстах он звучит двусмысленно, и поэтому я буду использовать слово ***закон***.

И сразу **очень важный момент**: поскольку случайная величина $X$ **обязательно** примет **одно из значений** $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, то соответствующие события образуют полную группу и сумма вероятностей их наступления равна единице:

$$p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n = 1$$

или, если записать свёрнуто:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

***Справка:*** $\sum$ *– это значок суммирования, а* $i$ *– переменная-«счётчик», которая «пробегает» все значения от 1 до* $n$.

Так, например, закон распределения выпавших на кубике очков имеет следующий вид:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $X$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |

…как говорится, без комментариев.

Возможно, у вас сложилось впечатление, что дискретная случайная величина может принимать только «хорошие» целые значения. Развеем иллюзию – они могут быть любыми:

### Задача 82

Пусть некая игра имеет следующий закон распределения выигрыша:

*(в 1-й строке размер выигрыша в условных единицах, а во 2-й – его вероятность)*

Найти $p_2$.

**Решение**: так как случайная величина $U$ может принять только одно из трёх значений, то соответствующие события образуют **полную группу**, а значит, сумма их вероятностей равна единице:

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

Разоблачаем «партизана»:

$$0{,}5 + p_2 + 0{,}1 = 1$$

$p_2 + 0{,}6 = 1 \quad \Rightarrow \quad p_2 = 1 - 0{,}6$ – таким образом, вероятность выигрыша $u_2 = 2{,}5$ условных единиц составляет 0,4.

Контроль: $p_1 + p_2 + p_3 = 0{,}5 + 0{,}4 + 0{,}1 = 1$, в чём и требовалось убедиться.

**Ответ**: $p_2 = 0{,}4$

Не редкость, когда закон распределения требуется составить самостоятельно. Для этого используют классическое определение вероятности, теоремы сложения / умножения вероятностей и другие фишки:

### Задача 83

В коробке находятся 50 лотерейных билетов, среди которых 12 выигрышных, причём 2 из них выигрывают по 1000 рублей, а остальные – по 100 рублей. Составить закон распределения случайной величины $V$ – размера выигрыша, если из коробки наугад извлекается один билет.

**Решение**: как вы заметили, **значения случайной величины принято располагать в порядке их возрастания.** Поэтому мы начинаем с самого маленького выигрыша, и именно $v_1 = 0$ рублей. Всего таковых билетов 50 – 12 = 38, и по классическому определению:

$p_1 = \frac{38}{50} = 0{,}76$ – вероятность того, что наудачу извлечённый билет окажется безвыигрышным.

С остальными случаями всё просто. Вероятность выигрыша $v_2 = 100$ рублей составляет: $p_2 = \frac{10}{50} = 0{,}2$

И для $v_3 = 1000$:

$$p_3 = \frac{2}{50} = 0{,}04$$

Проверка: $p_1 + p_2 + p_3 = 0{,}76 + 0{,}2 + 0{,}04 = 1$ – и это особенно приятный момент таких заданий.

**Ответ**: искомый закон распределения выигрыша:

| $V$ | 0 | 100 | 1000 |
|---|---|---|---|
| | 0,76 | 0,2 | 0,04 |

Следующее задание для самостоятельного решения:

**Задача 84**

Вероятность того, что стрелок поразит в мишень, равна $p = 0{,}7$. Составить закон распределения случайной величины $W$ – количества попаданий после 2 выстрелов.

Вспоминаем теоремы умножения и сложения! Решение и ответ в конце книги.

Закон распределения полностью описывает случайную величину, однако на практике бывает полезно (а иногда и полезнее) знать лишь некоторые её ***числовые характеристики***:

### ➢ Математическое ожидание дискретной случайной величины

Говоря простым языком, это *среднеожидаемое значение* при многократном повторении испытаний. Пусть случайная величина $X$ принимает значения $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ с вероятностями $p_1, p_2, p_3, ..., p_n$ соответственно. Тогда ***математическое ожидание*** $M(X)$ данной случайной величины равно *сумме произведений* всех её значений на соответствующие вероятности:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + ... + x_n p_n$$

или в свёрнутом виде:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Вычислим, например, математическое ожидание случайной величины $X$ – количества выпавших на игральном кубике очков:

$$M(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + ... \text{ очка}$$

В чём состоит вероятностный смысл полученного результата? Если подбросить кубик достаточно много раз, то *среднее значение* выпавших очков будет близкО к 3,5 – и чем больше провести испытаний, тем ближе. Об этом эффекте я уже подробно рассказывал в параграфе о статистической вероятности.

Теперь вспомним нашу гипотетическую игру:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $U$ | $-5$ | 2,5 | 10 |
| | 0,5 | 0,4 | 0,1 |

Возникает вопрос: а выгодно ли вообще играть в эту игру? …у кого какие впечатления? Так ведь «навскидку» и не скажешь! Но на этот вопрос можно легко ответить, вычислив математическое ожидание, по сути – *средневзвешенный* по вероятностям выигрыш:

$M(U) = u_1 p_1 + u_2 p_2 + u_3 p_3 = -5 \cdot 0{,}5 + 2{,}5 \cdot 0{,}4 + 10 \cdot 0{,}1 = -2{,}5 + 1 + 1 = -0{,}5$, таким образом, математическое ожидание данной игры **проигрышно**.

Не верь впечатлениям – верь цифрам! Да, здесь можно выиграть 10 и даже 20-30 раз подряд, но на длинной дистанции нас ждёт неминуемое разорение. И я бы не советовал вам играть в такие игры :) Ну, может, только ради развлечения.

И из всего вышесказанного следует, что **математическое ожидание – это уже НЕ СЛУЧАЙНАЯ величина**.

Творческое задание для самостоятельного исследования:

**Задача 85**

Мистер Х играет в европейскую рулетку по следующей системе: постоянно ставит 100 рублей на «красное». Составить закон распределения случайной величины $X$ – его выигрыша. Вычислить математическое ожидание выигрыша и округлить его до копеек. Сколько *в среднем* проигрывает игрок с каждой поставленной сотни?

***Справка:*** *европейская рулетка содержит 18 красных, 18 чёрных и 1 зелёный сектор («зеро»). В случае выпадения «красного» игроку выплачивается удвоенная ставка, в противном случае – она уходит в доход казино.*

Существует много других систем игры в рулетку, для которых можно составить свои таблицы вероятностей. Но этот тот случай, когда нам не нужны никакие законы распределения и таблицы, ибо доподлинно установлено, что математическое ожидание выигрыша будет точно таким же. От системы к системе меняется лишь ***дисперсия***, о которой мы поговорим скоро-скоро.

Но прежде будет полезно размять пальцы на клавишах калькулятора:

**Задача 86**

Случайная величина $X$ задана своим законом распределения вероятностей:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $X$ | $-1$ | 0 | $x_3$ | 5 |
| | 0,3 | 0,2 | 0,1 | 0,4 |

Найти $x_3$, если известно, что $M(X) = 1{,}9$. Выполнить проверку.

…Есть? Тогда переходим к следующему параграфу. ПРЯМО СЕЙЧАС!! – чтобы не потерять нить темы:

## ➢ Дисперсия дискретной случайной величины

В предыдущем параграфе мы выяснили, насколько полезно знать математическое ожидание, однако только этой характеристики ещё не достаточно для описания случайной величины. Представим двух стрелков, которые стреляют по мишени. Один стреляет метко и попадает близко к центру, а другой… просто развлекается и даже не целится. Но что забавно, их *средние* результаты будет одинаковыми! Эту ситуацию условно иллюстрируют следующие случайные величины:

| $X$ | $-1$ | $1$ |
|---|---|---|
| | $0{,}5$ | $0{,}5$ |

| $Y$ | $-100$ | $100$ |
|---|---|---|
| | $0{,}5$ | $0{,}5$ |

«Снайперское» математическое ожидание равно $M(X) = -1 \cdot 0{,}5 + 1 \cdot 0{,}5 = 0$, однако и у «интересной личности» оно тоже нулевое! $M(Y) = -100 \cdot 0{,}5 + 100 \cdot 0{,}5 = 0$

Таким образом, возникает надобность количественно оценить, насколько далеко *рассеяны* пули (значения случайной величины) относительно центра мишени (математического ожидания). Ну а *рассеяние* с латыни переводится не иначе, как ***дисперсия***.

Посмотрим, как определяется эта числовая характеристика на одном из предыдущих примеров:

| $X$ | $-5$ | $2{,}5$ | $10$ |
|---|---|---|---|
| | $0{,}5$ | $0{,}4$ | $0{,}1$ |

Мы уже нашли неутешительное математическое ожидание $M(X) = -0{,}5$ этой игры, и сейчас нам предстоит вычислить её дисперсию, которая **обозначается** через $D(X)$.

Выясним, насколько далеко «разбросаны» выигрыши / проигрыши относительно среднего значения. Очевидно, что для этого нужно вычислить *разности* между значениями случайной величины и её математическим ожиданием:

–5 – (–0,5) = –4,5
2,5 – (–0,5) = 3
10 – (–0,5) = 10,5

Теперь вроде бы нужно просуммировать результаты, но этот путь не годится – по той причине, что отрицательные и положительные отклонения будут взаимоуничтожаться

Чтобы обойти эту неприятность можно рассмотреть **модули** разностей, но по техническим причинам прижился подход, когда их возводят в квадрат. Решение удобно оформлять таблицей:

И здесь напрашивается вычислить *среднеожидаемое* значение квадратов отклонений. А это ЧТО за значение? Это их математическое ожидание, которое и является мерилом рассеяния, **проговариваем и ОСМЫСЛИВАЕМ это определение**:

$D(X)=M\left[(X-M(X))^2\right]$ – ***Дисперсия*** – это математическое ожидание квадратов отклонений случайной величины от её математического ожидания.

и из определения сразу следует, что **дисперсия не может быть отрицательной** – возьмите этот факт на заметку!

Теперь вспоминаем, как находить матожидание. Для этого нужно перемножить «пациентов» на соответствующие вероятности *(продолжение таблицы)*:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $(x_i-M(X))^2\cdot p_i$ | 10,125 | 3,6 | 11,025 |

и просуммировать результаты:

$D(X)=10{,}125+3{,}6+11{,}025=24{,}75$

…Но не кажется ли вам, что на фоне выигрышей $x_1=-5,\ x_2=2{,}5,\ x_3=10$ результат получился великоватым? Всё верно – мы возводили в квадрат, и чтобы вернуться в размерность нашей игры, нужно извлечь квадратный корень. Данная величина называется:

- **Среднее квадратическое отклонение**

и стандартно **обозначается** греческой буквой «сигма»:

$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{24{,}75}\approx 5$

***Среднеквадратическое отклонение*** также называют ***стандартным отклонением***

В чём его смысл? Если мы отклонимся от математического ожидания $M(X)=-0{,}5$ влево и вправо на среднее квадратическое отклонение:

$(-5{,}5;\ 4{,}5)$ – то на этом интервале (или вблизи него) будут «сконцентрированы» наиболее вероятные значения случайной величины. Что мы, собственно, и наблюдаем – в полученный интервал попали значения $x_1=-5\,(p_1=0{,}5)$ и $x_2=2{,}5\,(p_2=0{,}4)$.

Однако так сложилось, что при анализе рассеяния чаще оперируют понятием дисперсии. Давайте разберёмся, что она означает применительно к играм. Если в случае со стрелками речь идёт о «кучности» попаданий относительно центра мишени, то здесь дисперсия характеризует две вещи:

Во-первых, при увеличении ставок, дисперсия тоже возрастает. Так, например, если мы увеличим $x_1=-5,\ x_2=2{,}5,\ x_3=10$ в 10 раз, то математическое ожидание увеличится в 10 раз, а дисперсия – в 100 раз *(коль скоро, это квадратичная величина)*. Но, заметьте, что сами-то правила игры не изменились! Изменились лишь ставки, грубо говоря, раньше мы ставили 10 рублей, теперь 100.

Второй, более интересный момент состоит в том, что дисперсия характеризует стиль игры. Мысленно зафиксируем игровые ставки на каком-то определённом уровне, и посмотрим, что здесь к чему:

Игра с низкой дисперсией – это осторожная игра. Игрок склонен выбирать самые надёжные схемы, и в ситуации неопределённости не рискует слишком большими деньгами. Например, система «красное / чёрное» в рулетке *(см. Задачу 85)*.

Игра с высокой дисперсией. Её часто так и называют – *дисперсионной* игрой. Это авантюрный или агрессивный стиль игры, где игрок выбирает «адреналиновые» схемы. Вспомним хотя бы Мартингейл, где на кону оказываются суммы, на порядок превосходящие «тихую» игру предыдущего пункта.

Многими любимый покер: здесь есть так называемые *тайтовые* игроки, которые склонны осторожничать и «трястись» над своими игровыми средствами *(банкроллом)*. Неудивительно, что их банкролл не подвергается значительным колебаниям (низкая дисперсия). Наоборот, если у игрока высокая дисперсия, то это агрессор. Он часто рискует, делает крупные ставки и может, как сорвать огромный банк, так и проиграться в пух и прах.

То же самое происходит на биржах, и так далее – примеров масса.

Причём, во всех случаях не важно – на копейки ли идёт игра или на тысячи долларов. На любом уровне есть свои низко- и высокодисперсионные игроки. Ну а за средний выигрыш, как мы помним, «отвечает» математическое ожидание.

Наверное, вы заметили, что нахождение дисперсии – есть процесс длительный и кропотливый. Но математика щедрА:

### ➢ Формула для нахождения дисперсии

Данная формула выводится непосредственно из определения дисперсии, и мы незамедлительно пускаем её в оборот. Скопирую сверху табличку с нашей игрой:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $X$ | –5 | 2,5 | 10 |
| | 0,5 | 0,4 | 0,1 |

и найденное матожидание $M(X) = -0{,}5$.

Вычислим дисперсию вторым способом. Сначала найдём математическое ожидание $M(X^2)$ – квадрата случайной величины $X$. По определению математического ожидания, значения случайной величины $X^2$ следует перемножить на соответствующие вероятности и эти произведения сложить:

$$M(X^2) = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + x_3^2 p_3 + \ldots + x_n^2 p_n$$

в данном случае:

$$M(X^2) = (-5)^2 \cdot 0{,}5 + (2{,}5)^2 \cdot 0{,}4 + 10^2 \cdot 0{,}1 = 12{,}5 + 2{,}5 + 10 = 25$$

Таким образом, по формуле:

$$D(X) = \ldots$$

Как говорится, почувствуйте разницу. **И на практике, конечно, лучше применять формулу** (если иного не требует условие).

Осваиваем технику решения и оформления:

**Задача 87**

Дискретная случайная величина задана своим законом распределения:

| $x_i$ | $-2$ | 0 | 3 | 7 |
|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0,4 | 0,1 | 0,3 | 0,2 |

Найти её математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Эта задача встречается повсеместно, и, как правило, идёт без содержательного смысла. Но желающие могут представить четыре лампочки с числами, которые загораются ~~в дурдоме~~ с определёнными вероятностями :)

**Решение**: Основные вычисления удобно свести в таблицу. Сначала в верхние две строки записываем исходные данные. Затем рассчитываем произведения $x_i p_i$, затем $x_i^2 p_i$ и, наконец, суммы в правом столбце:

Собственно, почти всё готово. В третьей строке нарисовалось готовенькое математическое ожидание: $M(X) = \sum x_i p_i = 1{,}5$.

Дисперсию вычислим по формуле:
$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = \sum x_i^2 p_i - (1{,}5)^2 = 14{,}1 - 2{,}25 = 11{,}85$

И, наконец, среднее квадратическое отклонение:
$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{11{,}85} \approx 3{,}44$ – лично я обычно округляю результат до 2 знаков после запятой.

Все вычисления можно провести на калькуляторе, а ещё лучше – **в Экселе** *(ссылка на видеоролик на Ютубе)*. Вот здесь вот уже будет трудно ошибиться.

**Ответ**: $M(X) = 1{,}5, \quad D(X) = 11{,}85, \quad \sigma(X) = \sqrt{11{,}85} \approx 3{,}44$

Пара заданий для самостоятельного решения:

**Задача 88**

Вычислить дисперсию случайной величины $X$ предыдущего примера по определению.

…встречается и такая задача, я ничего не придумываю. Почти ☺

И аналогичный пример:

**Задача 89**

Дискретная случайная величина задана своим законом распределения:

| $x_i$ | 12 | 16 | 21 | 26 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0,2 | 0,1 | 0,4 | $a$ | 0,1 |

Найти $M(X), D(X), \sigma(X)$

Да, значения случайной величины бывают достаточно большими, и здесь по возможности лучше использовать Эксель.

И в заключение параграфа разберём ещё одну типовую задачу, можно даже сказать, небольшой ребус:

**Задача 90**

Дискретная случайная величина $X$ может принимать только два значения: $x_1$ и $x_2$, причём $x_1 < x_2$. Известна вероятность $p_1 = 0{,}8$, математическое ожидание $M(X) = 0{,}2$ и дисперсия $D(X) = 5{,}76$.

Найти $x_1, x_2, p_2$.

**Решение**: начнём с неизвестной вероятности. Так как случайная величина может принять только два значения, то сумма вероятностей соответствующих событий:

$$p_1 + p_2 = 1$$

и поскольку $p_1 = 0{,}8$, то $p_2 = 0{,}2$.

Осталось найти $x_1, x_2$ …, легко сказать :) Но да ладно, понеслось. По определению математического ожидания:

$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2$ – подставляем известные величины:

$0{,}2 = 0{,}8x_1 + 0{,}2x_2$ – и больше из этого уравнения ничего не выжать, разве что можно переписать его в привычном направлении:

$$0{,}8x_1 + 0{,}2x_2 = 0{,}2$$

ОК, едем дальше. По формуле вычисления дисперсии:

$D(X) = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 - (M(X))^2$ – подставляем известные данные:

$$5{,}76 = 0{,}8x_1^2 + 0{,}2x_2^2 - (0{,}2)^2$$
$$5{,}76 = 0{,}8x_1^2 + 0{,}2x_2^2 - 0{,}04$$
$$5{,}8 = 0{,}8x_1^2 + 0{,}2x_2^2$$

и реверанс:

О дальнейших действиях, думаю, вы догадываетесь. Составим и решим систему:

$$\begin{cases} 0{,}8x_1 + 0{,}2x_2 = 0{,}2 \\ 0{,}8x_1^2 + 0{,}2x_2^2 = 5{,}8 \end{cases}$$

Десятичные дроби – это, конечно, безобразие, умножаем оба уравнения на 5:

Вот так-то лучше. Из 1-го уравнения выражаем:
$x_2 = 1 - 4x_1$ *(это более простой путь)* – подставляем во 2-е уравнение:

$$4x_1^2 + (1 - 4x_1)^2 = 29$$

**Возводим разность в квадрат** и проводим упрощения:

$$4x_1^2 + 1 - 8x_1 + 16x_1^2 = 29$$

$$20x_1^2 - 8x_1 - 28 = 0$$

$$5x_1^2 - 2x_1 - 7 = 0$$

В результате получено **квадратное уравнение**, находим его дискриминант:
$D = (-2)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-7) = 4 + 140 = 144$ и извлекаем из него корень:
$\sqrt{D} = \sqrt{144} = 12$ – отлично, целое значение, значит, мы на верном пути.

Таким образом, у нас получаются два решения:

1) если $x_1 = \dfrac{2-12}{10} = -1$, то ;

2) если $x_1 = \dfrac{2+12}{10} = 1{,}4$, то $x_2 = 1 - 4 \cdot 1{,}4 = -4{,}6$.

Условию $x_1 < x_2$ удовлетворяет первая пара корней. С высокой вероятностью всё правильно, но, тем не менее, запишем закон распределения:

| | | |
|---|---|---|
| $x_i$ | $-1$ | $5$ |
| $p_i$ | $0{,}8$ | $0{,}2$ |

и выполним проверку, а именно, найдём матожидание:
$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 = -1 \cdot 0{,}8 + 5 \cdot 0{,}2 = -0{,}8 + 1 = 0{,}2$
и дисперсию:
$D(X) = x_1^2p_1 + x_2^2p_2 - (M(X))^2 = (-1)^2 \cdot 0{,}8 + 5^2 \cdot 0{,}2 - (0{,}2)^2 = 0{,}8 + 5 - 0{,}04 = 5{,}76$

В результате получены исходные значения, что и требовалось проверить.

**Ответ**: $x_1 = -1, \quad x_2 = 5, \quad p_2 = 0{,}2$ …да, вроде бы такие простенькие числа, но вычисления…, и поэтому в этой задаче следует проявлять повышенное внимание.

Переходим к графическому представлению дискретной случайной величины:

## ➢ Многоугольник распределения

Итак, пусть дискретная случайная величина $X$ задана своим законом распределения:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $\dots$ | $x_n$ |
| | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | $\dots$ | $p_n$ |

***Многоугольником распределения вероятностей*** данной величины называют *ломаную*, звенья которой соединяют соседние точки $(x_i;\ p_i)$. Иногда вместо «многоугольника» используют термин ***полигон***, но этот вариант больше в ходу в математической статистике.

Всё очень просто:

**Задача 91**

Построить многоугольник распределения вероятностей случайной величины $X$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | $-2$ | $0$ | $3$ | $6$ | $7{,}5$ |
| $p_i$ | $0{,}2$ | $0{,}1$ | $0{,}2$ | $0{,}3$ | $0{,}2$ |

**Решение**: чертим прямоугольную систему координат, в которой по оси абсцисс отсчитываются $x_i$ – значения случайной величины, а по оси ординат $p_i$ – их вероятности. Отмечаем на чертеже точки $(x_i;\ p_i)$, в данном случае их пять, и соединяем «соседей» отрезками:

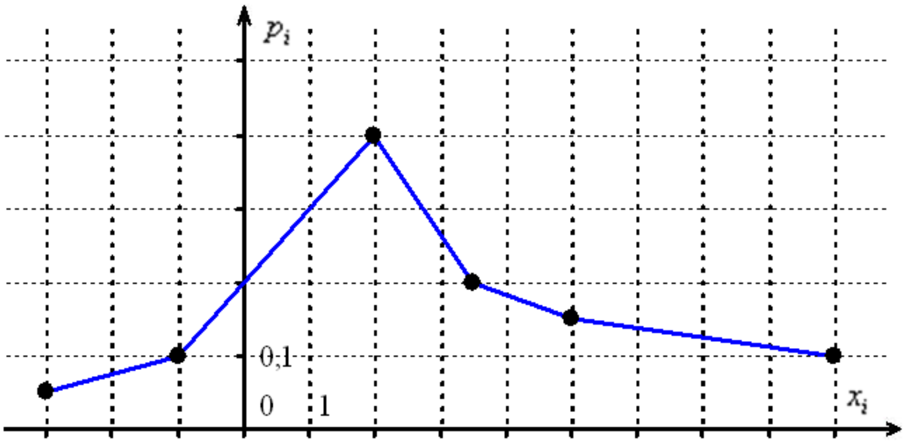
При выполнении чертежа от руки по возможности придерживайтесь следующего масштаба:
*горизонтальная ось: 1 ед. = 2 тетрадные клетки (1 см);*
*вертикальная ось: 0,1 = 2 тетрадные клетки.*

Если значения $x_i$ достаточно велики, то ось абсцисс можно «разорвать» *(не чертить её кусочек после единицы)*, и справа продолжить нумерацию, например, с 20.

Теперь обратите внимание на следующую **важную вещь**: помимо того, что дискретную случайную величину можно **изобразить** с помощью многоугольника – её ведь можно ещё и ЗАДАТЬ этим способом. До сих пор мы делали это с помощью таблички, но никто же не мешает использовать и чертёж!

## Задача 92

Дискретная случайная величина $X$ задана своим многоугольником




Записать закон распределения данной случайной величины, выполнить проверку.

Это задание для самостоятельного решения. И тут мы, кстати, видим изъян графического способа: по чертежу не всегда понятны точные значения случайной величины и их вероятности.

На практике задачи с многоугольником встречаются довольно часто, но гораздо бОльшее распространение получила:

### ➢ Функция распределения случайной величины

**Стандартное обозначение:** $F(x)$

И для дискретной, и для непрерывной случайной величины она определяется одинаково:

…, где $P(X < x)$ – вероятность того, что случайная величина $X$ примет значение, МЕНЬШЕЕ, чем *переменная* $x$, которая «пробегает» все действительные значения *от «минус» до «плюс» бесконечности*.

Построим функцию распределения для нашей подопытной игры:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $X$ | $-5$ | $2{,}5$ | $10$ |
| | $0{,}5$ | $0{,}4$ | $0{,}1$ |

Начинаем разбираться. Чему, например, равно значение $F(-20)$? Это вероятность того, что выигрыш будет меньше, чем –20. И это невозможное событие: $F(-20) = P(X < -20) = 0$. Совершенно понятно, что $F(x) = 0$ и для всех «икс» из интервала $(-\infty; -5)$, **а также для** $x = -5$. Почему? По определению функции распределения:

$F(-5) = P(X < -5) = 0$ – вы согласны? Функция $F(x)$ возвращает вероятность того, что <u>в точке</u> $x = -5$ выигрыш будет СТРОГО МЕНЬШЕ «минус» пяти.

Таким образом: $F(x) = 0$, если $x \le -5$.

На интервале $-5 < x < 2{,}5$ функция $F(x) = P(X < x) = 0{,}5$, поскольку **левее** любой точки этого интервала есть только одно значение $x_1 = -5$ случайной величины, которое появляется с вероятностью 0,5. Кроме того, сюда же следует отнести точку $x = 2{,}5$, так как:

$F(2{,}5) = P(X < 2{,}5) = 0{,}5$ – очень хорошо осознайте этот момент!

Таким образом, если $-5 < x \le 2{,}5$, то $F(x) = 0{,}5$

Далее рассматриваем промежуток $-2{,}5 < x \le 10$. СТРОГО ЛЕВЕЕ любой точки этого промежутка находятся два выигрыша $x_1 = -5,\ x_2 = 2{,}5$, поэтому:

$F(x) = P(X < x) = 0{,}5 + 0{,}4 = 0{,}9$

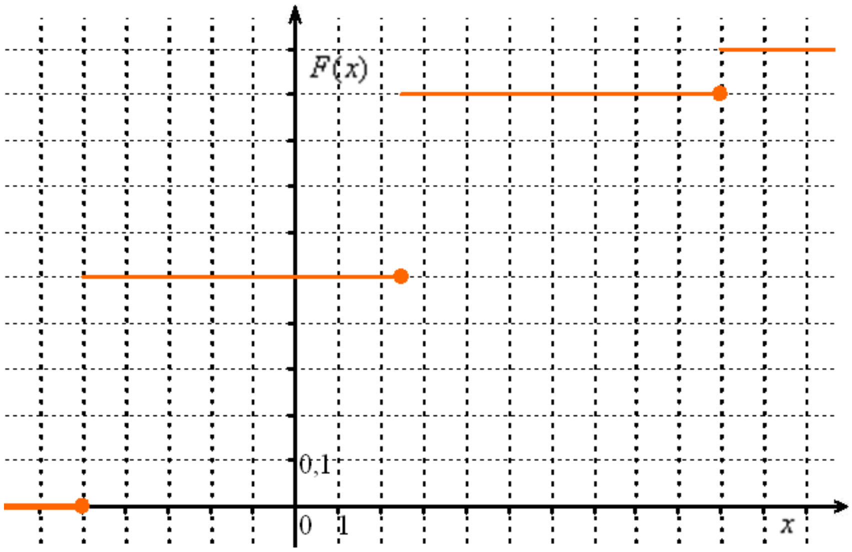
И, наконец, если $x > 10$, то $F(x) = P(X < x) = 0{,}5 + 0{,}4 + 0{,}1 = 1$, ибо **все** значения $x_1 = -5,\ x_2 = 2{,}5,\ x_3 = 10$ случайной величины $X$ лежат СТРОГО левее **любой** точки интервала $x \in (10; +\infty)$

Заметим, кстати, **важную особенность:** коль скоро функция $F(x)$ характеризует вероятность, то она может принимать значения лишь из промежутка $0 \le F(x) \le 1$ – и никакие другие!

Итак, функция распределения вероятностей ДСВ является *кусочной* и, как многие знают, в таких случаях принято использовать фигурные скобки:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \le -5 \\ 0{,}5, & \text{если} \quad -5 < x \le 2{,}5 \\ 0{,}9, & \text{если} \quad 2{,}5 < x \le 10 \\ 1, & \text{если} \quad x > 10 \end{cases}$$

График данной функции имеет разрывный «ступенчатый» вид:




Причём, функция $F(x)$ или её график однозначно определяют сам закон распределения: в точке $x_1 = -5$ высота «ступеньки» (разрыв) составляет $p_1 = 0{,}5$ *(следим по графику)*, в точке $x_2 = 2{,}5$ «скачок» разрыва равен $p_2 = 0{,}4$ и, наконец, в точке $x_3 = 10$ он равен в точности $p_3 = 0{,}1$.

Таким образом, функция распределения вероятностей – это **ещё один способ** ЗАДАТЬ случайную величину. И этот способ особо важен для ***непрерывной случайной величины*** – по той причине, что её невозможно описать таблицей (ввиду бесконечного и *несчётного* количества принимаемых значений). Однако, всему своё время, и НСВ – тоже.

Освоим технические моменты решения типовой задачи:

**Задача 93**

Построить функцию распределения случайной величины $X$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | –2 | 0 | 3 | 7 |
| $p_i$ | 0,4 | 0,1 | 0,3 | 0,2 |

Найти вероятности того, что случайная величина примет значение из следующих промежутков:
$P(-1 < X < 5)$, $P(4 < X \le 10)$, $P(X \le 2)$,
$P(3 \le X \le 7)$, $P(X > 7)$, $P(|X - M(X)| < \sigma(X))$…, пожалуй, достаточно.

**Решение**: На практике удобно использовать **формальный алгоритм построения функции распределения:**

Сначала берём первое значение $x_1 = -2$ и составляем *нестрогое* неравенство $x \le -2$. На этом промежутке $F(x) = 0$.

На промежутке $-2 < x \le 0$ *(между $x_1$ и $x_2$)*:

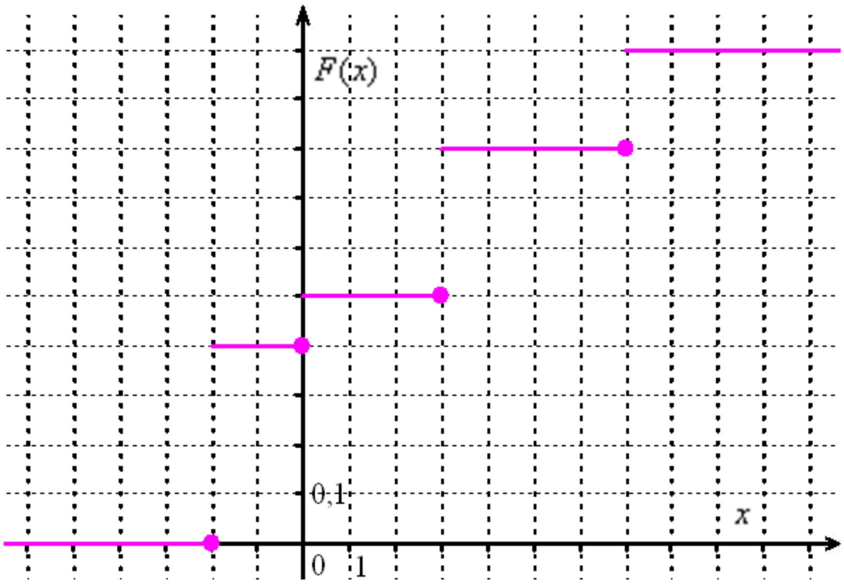
На промежутке $0 < x \le 3$ *(между $x_2$ и $x_3$)*:

На промежутке $3 < x \le 7$ *(между $x_3$ и $x_4$)*:

И, наконец, если $x$ строго больше самого последнего значения $x_4 = 7$, то:

Легко заметить, что с увеличением «икс» идёт накопление (суммирование) вероятностей, и поэтому функцию $F(x)$ иногда называют ***интегральной функцией распределения***. В практических задачах проведённые выше действия обычно выполняют устно, а результат сразу записывают под единую скобку:

Выполним чертёж:




и проконтролируем правильность решения с помощью «скачков» графика: в точке $x_1 = -2$ «скачок» равен $p_1 = 0{,}4$, в точке $x_2 = 0$ составляет $p_2 = 0{,}1$, в точке $x_3 = 3$ равен $p_3 = 0{,}3$, и, наконец, в точке $x_4 = 7$ – $p_4 = 0{,}2$.

При выполнении чертежа от руки оптимален следующий масштаб:
*горизонтальная ось: 1 ед. = 2 или 1 тетрадная клетка;*
*вертикальная ось: 0,1 = 1 тетрадная клетка.*

На левых концах ступенек (кроме нижнего луча) можно ставить выколотые точки – дело вкуса. Левый нижний луч следует прочертить жирно (чтобы он не сливался с координатной осью) и до конца оси! Правая верхняя линия не должна заканчиваться **раньше** *острия* оси! Такие оплошности могут говорить о непонимании функции распределения, а это, как вы понимаете, скверно. То было ручное построение. Ну а о том, как строить такие красивые графики в Экселе можно узнать в **этом ролике** на Ютубе, к слову, полигон (многоугольник) распределения строится **ещё проще**.

Переходим ко второй части задания, её коротко можно сформулировать так:

### ➢ Вероятность попадания в промежуток

Найдём $P(-1 < X < 5)$ – вероятность того, что случайная величина $X$ примет какое-нибудь значение из интервала $(-1; 5)$.

И здесь я сформулирую **практическое правило**: если оба конца $a$ и $b$ промежутка **не «попадают»** в точки разрыва функции $F(x)$, то следующие вероятности: …, можно найти по единой формуле:

$$F(b) - F(a)$$

В данном случае концы интервала (–1 и 5) находятся в области непрерывности функции распределения поэтому: $P(-1 < X < 5) = F(5) - F(-1) = 0{,}8 - 0{,}4 = 0{,}4$.

И действительно, на данном интервале находятся значения $x_2 = 0,\ x_3 = 3$, вероятности появления которых: $p_2 = 0{,}1,\ p_3 = 0{,}3$.

Вычислим вероятность $P(4 < X \le 10)$. Оба конца этого промежутка не «попадают» в точки разрыва, поэтому:

$P(4 < X \le 10) = F(10) - F(4) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$ – вероятность того, что случайная величина $X$ примет значение из данного промежутка. И в самом деле – на нём находится единственное значение $x_4 = 7$, которое может появиться с вероятностью $p_4 = 0{,}2$.

Та же самая история с $P(X \le 2)$ – единственное, тут левый конец промежутка равен *«минус» бесконечности*:

$P(X \le 2) = F(2) - F(-\infty) = 0{,}5 - 0 = 0{,}5$ – самостоятельно проанализируйте, какие значения $x_i$, и с какими вероятностями располагаются на промежутке $(-\infty; 2]$

**Теперь более занятная ситуация, где нужно особо включать голову:** если **хотя бы один** из концов $a, b$ промежутка **«попадает»** в точку разрыва функции $F(x)$, то указанную выше формулу можно использовать лишь в одном случае из четырёх, а именно для неравенства:

…

***Примечание:*** *если $a = -\infty$, то левое неравенство становится строгим, но формула тоже применима.*

Найдём $P(3 \le X \le 7)$. Как быть? – под правило не подходит! Вспоминаем теоремы тервера. По теореме сложения вероятностей несовместных событий:

$P(3 \le X \le 7) = P(3 \le X < 7) + P(7) = F(7) - F(3) + p_4 = 0{,}8 - 0{,}5 + 0{,}2 = 0{,}5$ – вероятность того, что случайная величина $X$ примет значение из отрезка $[3; 7]$.

И действительно, этот отрезок включает в себя два значения $x_3 = 3,\ x_4 = 7$, которые появляются с вероятностями $p_3 = 0{,}3,\ p_4 = 0{,}2$.

Тут же рассмотрим три других неравенства:

$P(3 < X < 7) = 0$, т.к. на интервале $(3; 7)$ нет значений случайной величины. Да-да, так и пишем.

$P(3 \le X < 7) = F(7) - F(3) = 0{,}8 - 0{,}5 = 0{,}3$ – это «штатный» случай *(см. правило)*.

И для 2-го полуинтервала используем теорему сложения вероятностей несовместных событий:

$P(3 < X \le 7) = P(3 < X < 7) + P(7) = 0 + p_4 = 0{,}2$

Едем дальше:

$P(X > 7) = 0$ – поскольку там нет значений случайной величины.

Кстати, случай с *нестрогим* неравенством – есть «штатный» случай:

$P(X \ge 7) = P(7 \le X < +\infty) = F(+\infty) - F(7) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$, который можно оформить и так:

$P(X \ge 7) = p_4 = 0{,}2$ – ведь на функции распределения «свет клином не сошёлся».

И, наконец, типовая вероятность $P(|X - M(X)| < \sigma(X))$ – того, что значение случайной величины $X$ отклонится от своего математического ожидания не более чем на одно среднее квадратическое отклонение. И, как вы догадываетесь, эти характеристики нужно вычислить. Но на самом деле не нужно, поскольку они уже рассчитаны в Задаче 87:

$M(X) = 1{,}5, \quad \sigma(X) = \sqrt{11{,}85} \approx 3{,}44$

Раскрываем **модуль**:

$P(|X - M(X)| < \sigma(X)) = P(-\sigma(X) < X - M(X) < \sigma(X)) =$

$= P(M(X) - \sigma(X) < X < M(X) + \sigma(X)) =$

подставляем конкретные значения $1{,}5 - \sqrt{11{,}85} \approx -1{,}94, \; 1{,}5 + \sqrt{11{,}85} \approx 4{,}94$ и пользуемся тем фактом, что они не «попадают» в точки разрыва функции распределения:

$= P(1{,}5 - \sqrt{11{,}85} < X < 1{,}5 + \sqrt{11{,}85}) = F(1{,}5 + \sqrt{11{,}85}) - F(1{,}5 - \sqrt{11{,}85}) =$

$= 0{,}8 - 0{,}4 = 0{,}4$ – искомая вероятность.

Напоминаю, что в типичном случае на интервале $(M(X) - \sigma(X);\, M(X) + \sigma(X))$ или вблизи него «сконцентрированы» наиболее вероятные значения случайной величины. Так сказать, «центр событий».

**Ответ**:

$P(-1 < X < 5) = 0{,}4, \quad P(4 < X \le 10) = 0{,}2, \quad P(X \le 2) = 0{,}5,$

$P(3 \le X \le 7) = 0{,}5, \quad P(X > 7) = 0, \quad P(|X - M(X)| < \sigma(X)) = 0{,}4$

Аналогичное задание для самоконтроля, весь трафарет приведён выше:

## Задача 94

Составить функцию распределения случайной величины $X$

| $x_i$ | 12 | 16 | 21 | 26 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0,2 | 0,1 | 0,4 | 0,2 | 0,1 |

Выполнить чертёж. Найти вероятности следующих событий:

$P(15 < X < 25), \quad P(12 < X \le 20), \quad P(X \ge 21),$

$P(X < 16), \quad P(X \le 16), \quad P(|X - M(X)| < \sigma(X))$

Подумайте над рациональным масштабом графика. Если возникают сомнению с нахождением вероятностей, помните – их всегда можно пересчитать вручную, просто посмотрев на исходную табличку.

Решение и ответ там, где обычно.

И не успел я запостить этот материал на сайте *(давно это было ☺)*, как от читателей стали поступать просьбы включить в статью контрольный пример. Я даже прослезился (прямо как **тот профессор**), и, конечно же, не смог вам отказать:

## ➢ Контрольное задание

Проверьте, насколько хорошо вы усвоили материал:

**Задача 95**

В билете три задачи. Вероятность того, что студент правильно решит первую задачу, равна 0,9, вторую – 0,8, третью – 0,7. Составить закон распределения числа правильно решенных задач в билете, вычислить математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины. Построить график функции распределения. Найти вероятность того, что студент сдаст зачёт, если для этого нужно правильно решить не менее 2 задач.

Тут нужно использовать теоремы умножения и умножения, и могут возникнуть накладки с обозначениями. В образце решения я обозначил $p_1 = 0{,}9, \quad p_2 = 0{,}8, \quad p_3 = 0{,}7$, а вероятности значений случайной величины – через $p(0),\ p(1),\ p(2),\ p(3)$.

И на самом деле таких заданий много, и это всегда праздник!

## 2.3. Наиболее распространённые дискретные распределения

Как же я люблю вступления одной строкой:

## ➢ Геометрическое распределение вероятностей

И геометрия тут не при чём.

Пусть проводится серия испытаний, в каждом из которых случайное событие $A$ может появиться с вероятностью $p$; причём, испытания заканчиваются при первом же появлении данного события. Тогда случайная величина $X$, характеризующая количество совершённых попыток, как раз и имеет ***геометрическое распределение***.

Рассмотрим, например, такое событие: $A$ – *в результате броска монеты выпадет орёл*.

Начинаем подбрасывать монету. Совершенно понятно, что вероятность появления орла в любом испытании равна $p = \frac{1}{2}$, и наша задача заключается в том, чтобы проанализировать – как скоро появится первый орёл (после чего серия закончится). Составим закон распределения случайной величины $X$ – *количества проведённых бросков*.

Если $x = 1$, то это означает, что орёл выпал в первой же попытке. Вероятность этого события равна:

$$p_1 = p = \frac{1}{2}$$

Если $x = 2$, то в первой попытке выпала решка (вероятность $q = 1 - p = 1/2$), а во второй – орёл. По теореме умножения вероятностей ЗАвисимых событий:

$$p_2 = qp = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Если $x = 3$, то в первых двух испытаниях появились решки, а в третьем – орёл. По той же теореме:

$$p_3 = qqp = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Если $x = 4$, то первый орёл появился лишь в четвёртом испытании:

$$p_4 = qqqp = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$

…сколько же можно подбрасывать монету? Теоретически – до бесконечности.

И перед нами пример дискретной случайной величины, которая принимает бесконечное и *счётное* количество значений. В общем виде её закон распределения записывается следующим образом:

| $X$ | $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | … | $n$ | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $p_i$ | $p$ | $q\,p$ | $q^2p$ | $q^3p$ | … | $q^{n-1}p$ | … |

Вероятности $p_i$ представляют собой *бесконечно убывающую геометрическую прогрессию* с первым членом $p$ и основанием $q$. Отсюда и название – геометрическое распределение вероятностей. Как известно, сумма такой прогрессии равна:

$p + pq + q^2p + q^3p + ... = \frac{p}{1-q} = \frac{p}{p} = 1$, что полностью соответствует вероятностному смыслу задачи.

В частности, для примера с «волшебной» монетой:

сумма вероятностей составляет: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2} + ... = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$

Однако жизнь такова, что всё когда-то заканчивается, и поэтому в практических задачах количество испытаний почти всегда ограничивается. На «грубую» такое распределение тоже можно считать геометрическим, и сейчас мы разберём классический пример:

**Задача 96**

Стрелок производит несколько выстрелов в цель до первого попадания, имея всего 4 патрона. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,6. Найти закон распределения случайной величины $X$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, где $X$ – количество произведённых выстрелов. Построить многоугольник и функцию распределения данной случайной величины. Найти $P(|X - M(X)| < \sigma(X))$.

…если что-то позабылось, то я заботливо проставлю ссылки, **решаем**:

По условию, вероятность попадания в каждом испытании равна $p = 0,6$. Тогда вероятность промаха: $q = 1 - p = 1 - 0,6 = 0,4$.

Составим закон распределения случайной величины $X$:

1) $x = 1$
Это означает, что стрелок попал с 1-й попытки и на этом испытания закончились:
$p_1 = p = 0,6$

2) $x = 2$ – в первом испытании промах, во втором – попадание. По теореме умножения вероятностей ЗАвисимых событий:
$p_2 = qp = 0,4 \cdot 0,6 = 0,24$

3) $x = 3$ – попадание с третьей попытки, мимо-мимо, попал:
$p_3 = qqp = 0,4 \cdot 0,4 \cdot 0,6 = 0,096$

И, наконец:

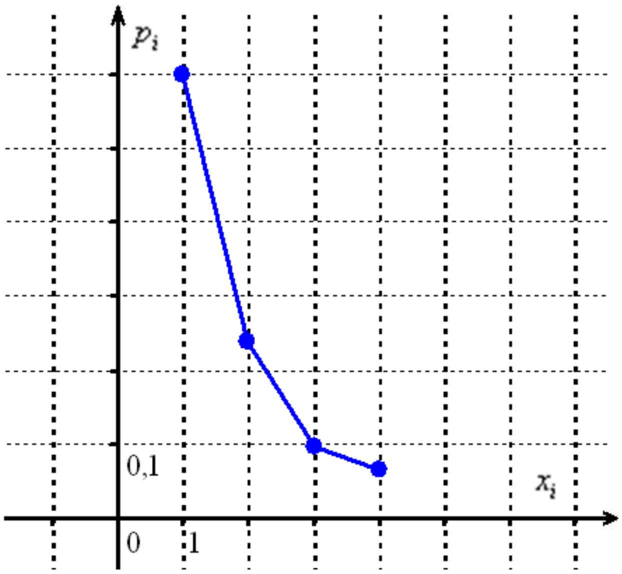
4) $x = 4$

Здесь стрелок может промахнуться или попасть, но испытания заканчиваются в любом случае. Вместе с патронами. По теоремам умножения вероятностей зависимых и сложения вероятностей несовместных событий:
$p_4 = qqqq + ...$

Таким образом, искомый закон распределения:

**Обязательно** выполняем проверку:
$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0,6 + 0,24 + 0,096 + 0,064 = 1$, что и требовалось проверить.

Построим многоугольник распределения:



Вычислим $M(X)$ и $D(X)$. Для геометрического распределения существуют готовые формулы нахождения математического ожидания и дисперсии: $M(X) = \frac{1}{p}$, $D(X) = \frac{q}{p^2}$, но нам ими воспользоваться не удастся – по той причине, что количество испытаний не бесконечно.

Поэтому придётся использовать общий алгоритм. Заполним расчётную таблицу:

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | Суммы: |
|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0,6 | 0,24 | 0,096 | 0,064 | 1 |
| $x_i p_i$ | 0,6 | 0,48 | 0,288 | 0,256 | 1,624 |
| $x_i^2 p_i$ | 0,6 | 0,96 | 0,864 | 1,024 | 3,448 |

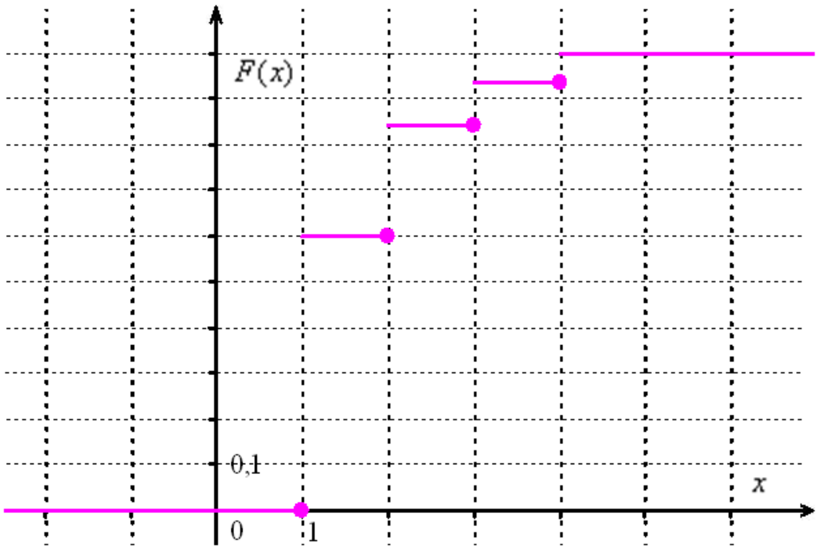
Математическое ожидание лежит готовенькое: $M(X) = \sum x_i p_i = 1{,}624$ – это среднеожидаемое количество выстрелов *(при многократном повторении таких серий из 4 выстрелов)*.

Дисперсию вычислим по формуле:
$D(X) = ...$ – это *мера рассеяния* количества выстрелов относительно математического ожидания.

Составим функцию распределения вероятностей:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \le 1 \\ 0{,}6, & \text{если} \quad 1 < x \le 2 \\ 0{,}84, & \text{если} \quad 2 < x \le 3 \\ 0{,}936, & \text{если} \quad 3 < x \le 4 \\ 1, & \text{если} \quad x > 4 \end{cases}$$

Выполним чертёж:



Найдём $P(|X - M(x)| < \sigma(x))$ – вероятность того, что значение случайной величины отклонится от математического ожидания не более чем на $\sigma(X)$.

Сначала вычислим среднее квадратическое отклонение:
$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0{,}810624} \approx 0{,}9$
затем – требуемую вероятность:
$P(|X - M(X)| < \sigma(X)) = P(-\sigma(X) < X - M(X) < \sigma(X)) =$
$= P(M(X) - \sigma(X) < X < M(X) + \sigma(X)) = ...$
$= F(1{,}624 + \sqrt{0{,}810624}) - F(1{,}624 - \sqrt{0{,}810624}) = 0{,}84 - 0 = 0{,}84$ – вспоминаем, что это за интервал, и почему вероятность получилась столь большой ;)

Готово!

Но при всей кажущейся простоте, у этого задания существуют подводные камни. **Главное коварство** состоит в том, условие может быть сформулировано по такому же шаблону, но случайная величина быть ДРУГОЙ. Например:

$X$ *– количество промахов.*

В этом случае закон распределения вероятностей примет следующий вид:

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0,6 | 0,24 | 0,096 | 0,0384 | 0,0256 |

Здесь $p_3 = qqqp = q^3 p = (0{,}4)^3 \cdot 0{,}6 = 0{,}0384$ – вероятность того, что будет 3 промаха *(и в 4-й попытке попадание)*; $p_4 = qqqq = q^4 = (0{,}4)^4 = 0{,}0256$ – вероятность того, что стрелок совершит 4 промаха.

Естественно, что числовые характеристики и содержательные выводы этой задачи будут несколько другими, однако сам закон распределения сохранит свой «геометрический» характер.

Вот ещё одна хитрая вариация, которая мне встречалась на практике:

$X$ *– количество неизрасходованных патронов.*

Закон распределения этой величины таков:

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0,064 | 0,096 | 0,24 | 0,6 |

Проанализируйте данный случай самостоятельно. Кстати, в примере, который мы прорешали, случайную величину $X$ можно эквивалентно сформулировать, как *Количество израсходованных патронов*.

Таким образом, к решению подобных задач **тоже нельзя подходить формально** – во избежание ошибок, ВСЕГДА ДУМАЙТЕ ГОЛОВОЙ и **анализируйте реалистичность полученных результатов**. И тогда полученное значение $M(X) = 4$ в разобранной задаче вас явно насторожит :)

## ➢ Биномиальное распределение вероятностей

Или ***биномиальный закон распределения вероятностей***. По моим наблюдениям и личной статистике, это наиболее распространённый вид дискретного распределения, с которым мы уже встречались добрый десяток раз. И старая добрая формулировка:

Пусть проводится $n$ независимых испытаний *(не обязательно повторных)*, в каждом из которых случайное событие $A$ может появиться с вероятностью $p$. Тогда случайная величина $X$ *– число появлений события $A$ в данной серии испытаний*, имеет биномиальное распределение.

Совершенно понятно, что эта случайная величина может принять одно из следующих значений:

$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad ..., x_{n-1} = n-1, \quad x_n = n$.

Пусть, например: монета подбрасывается 5 раз. Тогда случайная величина $X$ *– количество появлений орла* распределена по биномиальному закону. Орёл обязательно выпадет:

или $x_0 = 0$ раз, или $x_1 = 1$, или $x_2 = 2$, или $x_3 = 3$, или $x_4 = 4$, или $x_5 = 5$ раз.

Как вы правильно догадались, соответствующие вероятности определяются формулой Бернулли:

$p_i = P_n^{x_i} = C_n^{x_i} p^{x_i} q^{n-x_i}$, где:

$n$ – количество независимых испытаний;
$p$ – вероятность появления события $A$ в каждом испытании;
$q = 1-p$ – вероятность непоявления события $A$ в каждом испытании;
$x_i = \{0, 1, 2, ..., n-1, n\}$ – сколько раз может появиться событие $A$ в данной серии испытаний (список всех возможных значений).

Сведём этот закон распределения в таблицу:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X$ | $x_i$ | $0$ | $1$ | $2$ | $...$ | $n-1$ | $n$ |
| | $p_i$ | $C_n^0 q^n$ | $C_n^1 p^1 q^{n-1}$ | $C_n^2 p^2 q^{n-2}$ | $...$ | $C_n^{n-1} p^{n-1} q$ | $C_n^n p^n$ |

Вероятности $p_i$ являются членами ***бинома Ньютона*** *(см. Приложение **Формулы комбинаторики**)*, благодаря чему распределение и получило своё название. По формуле бинома *(см. там же)*:

$C_n^0 q^n + C_n^1 p^1 q^{n-1} + C_n^2 p^2 q^{n-2} + ... + C_n^{n-1} p^{n-1} q + C_n^n p^n = (q+p)^n = 1^n = 1$, что мы и ожидали увидеть.

В нашем примере с монеткой:

$p_0 = P_5^0 = C_5^0 p^0 q^{5-0} = (0,5)^5 = 0,03125$ – вероятность того, что в 5 испытаниях орёл не выпадет вообще ($x_0 = 0$);

$p_1 = P_5^1 = C_5^1 p^1 q^{5-1} = 5 \cdot 0,5 \cdot (0,5)^4 = 0,15625$ – вероятность того, что в 5 испытаниях орёл выпадет ровно $x_1 = 1$ раз;

$p_2 = P_5^2 = C_5^2 p^2 q^{5-2} = \frac{5!}{3!\cdot 2!}\cdot \ldots$ – вероятность того, что в 5 испытаниях орёл выпадет ровно $x_2 = 2$ раза;

$p_3 = P_5^3 = C_5^3 p^3 q^{5-3} = \frac{5!}{2!\cdot 3!}\cdot (0{,}5)^3 \cdot (0{,}5)^2 = 0{,}3125$ – … ровно $x_3 = 3$ раза;

$p_4 = P_5^4 = C_5^4 p^4 q^{5-4} = 5\cdot (0{,}5)^4 \cdot 0{,}5 = 0{,}15625$ – … ровно $x_4 = 4$ раза;

$p_5 = P_5^5 = C_5^5 p^5 q^{5-5} = (0{,}5)^5 = 0{,}03125$ – … ровно $x_5 = 5$ раз.

Таким образом, закон распределения числа выпавших орлов:

Контроль: $0{,}03125 + 0{,}15625 + 0{,}3125 + 0{,}3125 + 0{,}15625 + 0{,}03125 = 1$

Легко видеть, что нахождение биномиального ряда – есть занятие муторное, и это хорошо, если он содержит 3-4-5-6 значений. А ведь немало задач, где требуется рассчитать 8-10, а то и бОльшее количество вероятностей!

Поэтому вычисления целесообразно автоматизировать в Экселе с помощью его стандартной функции:

*=БИНОМРАСП(m; n; p; 0)*, где $m$ количество «успехов» в $n$ испытаниях, а $p$ – вероятность успеха в каждом испытании.

Именно так реализован *Пункт 3* ***Калькулятора***, ну и особо крутая плюшка – это *Пункт 6*, в котором биномиальное распределение получается автоматически!

Однако на практике вычисления нужно расписывать подробно, да и Эксель не всегда бывает под рукой, поэтому держите под рукой микрокалькулятор и непременно потренируйтесь в ручных вычислениях!

**Задача 97**

Вероятность поражения цели при одном выстреле равна 0,6. Составить закон распределения случайной величины $X$ – числа попаданий в цель при четырех выстрелах. Вычислить $M(X)$ и $D(X)$. Построить многоугольник и функцию распределения. Найти $P(|X - M(X)| < \sigma(X))$.

**Решение**: по существу, текст условия совпадает с *Задачей 96*, но есть **одно принципиальное отличие** – **здесь другая случайная величина**. А именно, под страхом расстрела совершается серия из $n = 4$ **и строго из 4** выстрелов, вероятность попадания *в каждом* из которых составляет $p = 0{,}6$.

Очевидно, что испытания независимы, попаданий может быть 0, 1, 2, 3 или 4, и посему случайная величина $X$ распределена по биномиальному закону.

Составим ряд распределения данной случайной величины. Используем формулу Бернулли:

$p_i = P_n^{x_i} = C_n^{x_i} p^{x_i} q^{n-x_i}$ для $x_i = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ – всех возможных результатов рассматриваемой серии выстрелов.

И перед вычислениями удобно сразу «забить» значения $n = 4,\ p = 0{,}6$ в ***Калькулятор*** *(Пункт 6)*, чтобы контролировать правильность каждого шага:

0) $x_0 = 0$

$p_0 = P_4^0 = C_4^0 \cdot (0{,}6)^0 \cdot (0{,}4)^4 = (0{,}4)^4 = 0{,}0256$ – вероятность того, что в 4 выстрелах не будет попаданий;

1) $x_1 = 0$

$p_1 = P_4^1 = C_4^1 \cdot (0{,}6)^1 \cdot (0{,}4)^3 = 4 \cdot 0{,}6 \cdot (0{,}4)^3 = 0{,}1536$ – вероятность того, что в 4 выстрелах будет ровно 1 попадание;

2) $x_2 = 0$

$p_2 = P_4^2 = C_4^2 \cdot (0{,}6)^2 \cdot (0{,}4)^2 = 6 \cdot 0{,}36 \cdot 0{,}16 = 0{,}3456$ – … ровно 2 попадания;

3) $x_3 = 0$

$p_3 = P_4^3 = ...$ – … ровно 3 попадания;

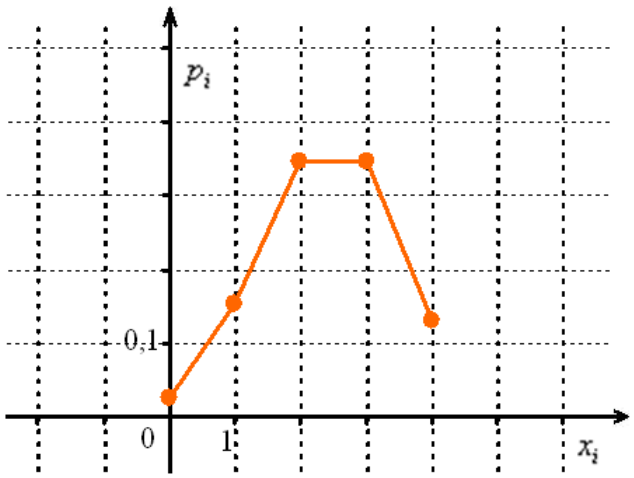
4) $x_4 = 0$

$p_4 = P_4^4 = C_4^4 \cdot (0{,}6)^4 \cdot (0{,}4)^0 = (0{,}6)^4 = 0{,}1296$ – … ровно 4 попадания.

Таким образом, искомый закон распределения:

Проверка: $0{,}0256 + 0{,}1536 + 0{,}3456 + 0{,}3456 + 0{,}1296 = 1$, ч.т.п.

Пока таблица не ушла из поля зрения, построим многоугольник распределения:



Вычислим математическое ожидание и дисперсию. И тут есть отличная новость – для биномиального распределения можно не использовать общий алгоритм расчёта этих числовых характеристик – по той причине, что существуют готовые формулы:

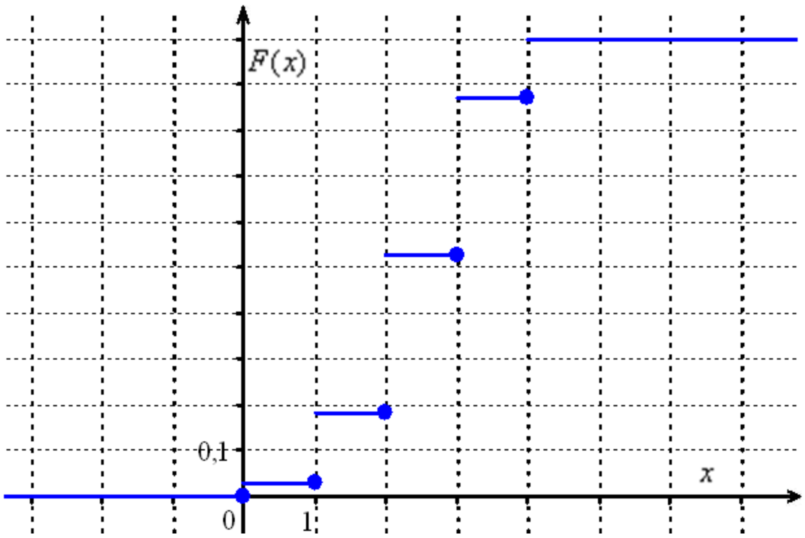
$M(X) = np = 4 \cdot 0{,}6 = 2{,}4$ – среднеожидаемое количество попаданий;

$D(X) = npq = 4 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}96$ – *рассеяние* количества попаданий относительно матожидания.

Всегда бы так!

Составим функцию распределения вероятностей:

Я не буду вновь останавливаться на алгоритме её построения, и если что-то не понятно, то смотрите по ссылке выше. Раз ступенька, два ступенька – будет график:




Найдём $P(|X - M(X)| < \sigma(X))$ – вероятность того, что значение случайной величины $X$ отклонится от своего математического ожидания не более чем на одно среднее квадратическое отклонение.

Среднее квадратическое отклонение: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0{,}96} \approx 0{,}98$
и искомая вероятность:

$$P(|X - M(X)| < \sigma(X)) = P(-\sigma(X) < X - M(X) < \sigma(X)) =$$
$$= P(M(X) - \sigma(X) < X < M(X) + \sigma(X)) = P\left(2{,}4 - \sqrt{0{,}96} < X < 2{,}4 + \sqrt{0{,}96}\right) =$$
$$= F\left(2{,}4 + \sqrt{0{,}96}\right) - F\left(2{,}4 - \sqrt{0{,}96}\right) = 0{,}8704 - 0{,}1792 = 0{,}6912$$

Готово.

Как вариант, в разобранной задаче может быть предложена другая случайная величина: не количество попаданий, а $X$ – *количество промахов*. Нетрудно догадаться, что в этом случае вероятности «поменяются местами» ($p = 0{,}4,\ q = 0{,}6$), и числовые характеристики с графиками будут другими.

БУДЬТЕ ВНИМАТЕЛЬНЫ!

И, конечно же, задачка для самостоятельного решения. Ввиду важности и распространённости биномиального распределения, **обязательно прорешайте эту задачу** и постукайте пальцами по клавишам микрокалькулятора:

**Задача 98**

Вероятность выпуска прибора, удовлетворяющего требованиям качества, равна 0,9. В контрольной партии 3 прибора. Составить закон распределения случайной величины $X$ – *число приборов, удовлетворяющих требованиям качества*.

Вычислить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$. Построить график функции распределения $F(x)$.

Возвращаемся к знакомой фамилии:

### ➢ Распределение Пуассона

Случайная величина $X$, распределённая по этому закону, принимает бесконечное и *счётное* количество значений $x_i = \{0, 1, 2, ..., n, ...\}$, вероятности появления которых определяются формулой:

$$P_{x_i} = \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} \cdot e^{-\lambda} \quad (\lambda > 0)$$

Или, если расписать подробно:

Вспоминая **разложение экспоненты в ряд**, легко убедиться, что:

$$\sum p_i = e^{-\lambda} + \lambda e^{-\lambda} + \frac{\lambda^2}{2!} \cdot e^{-\lambda} + \frac{\lambda^3}{3!} \cdot e^{-\lambda} + ... + \frac{\lambda^n}{n!} \cdot e^{-\lambda} + ... =$$

$$= e^{-\lambda}\left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + ... + \frac{\lambda^n}{n!} + ...\right) = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1$$

Математическое ожидание пуассоновской случайной величины равно $M(X) = \lambda$ и дисперсия – тому же самому значению: $D(X) = \lambda$.

Во всех задачах параграфа Формула Пуассона мы лишь ПОЛЬЗОВАЛИСЬ ***распределением Пуассона*** для приближенного расчёта вероятностей, в то время как ТОЧНЫЕ значения следовало находить по формуле Бернулли, т.е., там имело место биномиальное распределение. **И последующие задачи отличаются принципиально** –

– отличие состоит в том, что сейчас речь идёт именно о РАСПРЕДЕЛЕНИИ Пуассона:

## Задача 99

Случайная величина $X$ подчинена закону Пуассона с математическим ожиданием, равным $3$. Найти вероятность того, что данная случайная величина $X$ примет значение, меньшее, чем её математическое ожидание.

**Решение**: известно, что математическое ожидание распределения Пуассона в точности равно $M(X) = 3 = \lambda$, таким образом, случайная величина $X$ принимает значения $x_i = \{0, 1, 2, ..., n, ...\}$ с вероятностями:

$$P_{x_i} = \frac{3^{x_i}}{x_i!} \cdot e^{-3}$$

Интересующее нас событие $X < 3$ состоит в трёх несовместных исходах: случайная величина $X$ примет значение $x_0 = 0$ или $x_1 = 1$, или $x_2 = 2$. По теореме сложения вероятностей несовместных событий:

$P(X < 3) = P_0 + P_1 + P_2 = \frac{3^0}{0!} \cdot e^{-3} + ...$ – вероятность того, что случайная величина $X$ примет значение, меньшее, чем ее математическое ожидание.

**Ответ**: $\approx 0{,}4232$

Аналогичная задача на понимание:

## Задача 100

Случайная величина $X$ подчинена закону Пуассона с единичным математическим ожиданием. Найти вероятность того, что данная случайная величина примет положительное значение.

Решение и ответ в конце книги.

Помимо прочего, распределение Пуассона нашло широкое применение в ***теории массового обслуживания*** для вероятностной характеристики ***простейшего потока событий***. Постараюсь быть лаконичным:

Пусть в некоторую систему поступают заявки (телефонные звонки, приходящие клиенты и т.д.). Поток заявок называют ***простейшим***, если он удовлетворяет условиям *стационарности*, *отсутствия последствий* и *ординарности*.

Стационарность подразумевает то, что интенсивность заявок постоянна и не зависит от времени суток, дня недели или других временнЫх рамок. Иными словами, не бывает «часа пик» и не бывает «мёртвых часов». *Отсутствие последствий* означает, что вероятность появления новых заявок не зависит от «предыстории», т.е. нет такого, что «одна бабка рассказала» и другие «набежали» (или наоборот, разбежались). И, наконец, свойство *ординарности* характеризуется тем, что за *достаточно малый* промежуток времени практически невероятно появление двух или бОльшего количества заявок. «Две старушки в дверь?» – нет уж, увольте~~, рубить удобнее по порядку~~.

Итак, пусть в некоторую систему поступает простейший поток заявок со средней интенсивностью $\lambda$ заявок в некоторую единицу времени *(минуту, час, день или в любой другой)*. Тогда вероятность того, что за данный промежуток времени, в систему поступит ровно $m$ заявок, равна:

$$P_m = \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}$$

Поразительно, с какой скоростью устаревают задачи:

**Задача 101**

Звонки в диспетчерскую такси представляет собой простейший пуассоновский поток со средней интенсивностью 30 вызовов в час. Найти вероятность того, что: а) за 1 мин. поступит 2-3 вызова, б) в течение пяти минут будет хотя бы один звонок.

**Решение**: используем формулу Пуассона:

$$P_m = \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}$$

**а)** Учитывая стационарность потока, вычислим *среднее количество вызовов за 1 минуту*:

$\lambda = \frac{30}{60} = 0{,}5$ вызова – в среднем за одну минуту.

По теореме сложения вероятностей несовместных событий:

$P(2 \le m \le 3) = P_2 + P_3 = \frac{0{,}5^2}{2!} \cdot e^{-0{,}5} + \ldots$ – вероятность того, что за 1 минуту в диспетчерскую поступит 2-3 вызова.

**б)** Вычислим среднее количество вызов за пять минут:

$$\lambda = \frac{30}{60} \cdot 5 = 2{,}5$$

По формуле Пуассона:

$P_0 = \frac{2{,}5^0}{0!} \cdot e^{-2{,}5} \approx 0{,}0821$ – вероятность того, что в течение 5 минут не будет ни одного звонка.

По теореме сложения вероятностей противоположных событий:

$P(m \ge 1) = 1 - P_0 \approx 1 - 0{,}0821 = 0{,}9179$ – вероятность того, что в течение 5 минут будет хотя бы один вызов.

**Ответ**: а) $\approx 0{,}0885$, б) $\approx 0{,}9179$

Обращаю внимание, что в отличие от задач параграфа Формула Пуассона, **эту задачу уже нельзя решить по формуле Бернулли**. По той причине, что заранее не известно общее количество исходов $n$ (точное количество звонков в тот или иной час). И предсказать это значение, разумеется, невозможно.

Для самостоятельного решения:

**Задача 102**

Среднее число автомобилей, проходящих таможенный досмотр в течение часа, равно 3. Найти вероятность того, что: а) за 2 часа пройдут досмотр от 7 до 10 автомобилей; б) за пол часа успеет пройти досмотр только 1 автомобиль.

Таможня пройдена, достаём припрятанное:

## ➢ Гипергеометрическое распределение вероятностей

Пожалуй, второе по распространённости после биномиального распределения, в котором нет ничего гиперсложного. Да и сложного тоже:

Пусть в совокупности из  объектов содержатся  объектов, обладающие некоторым признаком. Из этой совокупности случайным образом и без возвращения извлекается $n$ объектов. Тогда случайная величина $X$ *– количество «особых» объектов в выборке* – распределена по ***гипергеометрическому*** закону.

С гипергеометрическим законом распределения вероятностей мы неоднократно сталкивались ранее и фактически полностью построили в Задаче 26:

*В ящике находится $N = 20$ деталей, среди которых $M = 5$ бракованных. Наудачу извлекаются $n = 2$ детали. Найти вероятность того, что:*
*а) обе детали будут качественными;*
*б) одна деталь будет качественной, а одна – бракованной;*
*в) обе детали бракованны*

По сути дела, здесь фигурирует случайная величина $X$ *– количество бракованных деталей в выборке.* Прорешаем данную задачу под другим углом зрения, а именно, найдём закон распределения этой случайной величины, которая, очевидно, может принять одно из следующих значений: $x_i = \{0, 1, 2\}$. Соответствующие вероятности $p_0, p_1, p_2$ определяются формулами и правилами комбинаторики и классическим определением вероятности.

Сначала вычислим количество <u>всех возможных наборов</u> из 2 деталей. Две детали можно выбрать $C_N^n = C_{20}^2 = \frac{20!}{18! \cdot 2!} = \frac{19 \cdot 20}{2} = 190$ способами. Дальнейшие действия удобно занумеровать:

0) $x_0 = 0$ (в выборке нет бракованных деталей)
$C_{15}^2 = \frac{15!}{13! \cdot 2!} = \frac{14 \cdot 15}{2} = 105$ способами можно извлечь 2 качественные детали.

По классическому определению:
$p_0 = \frac{C_{15}^2}{C_{20}^2} = \frac{105}{190} = \frac{21}{38}$ – вероятность того, среди 2 извлечённых деталей не будет бракованных.

1) $x_1 = 1$

$C_{15}^1 \cdot C_5^1 = 15 \cdot 5 = 75$ способами можно извлечь 1 качественную деталь и 1 бракованную.

По тому же определению:

$p_1 = \frac{C_{15}^1 \cdot C_5^1}{C_{20}^2} = \frac{75}{190} = \frac{15}{38}$ – вероятность того, среди 2 извлечённых деталей будет 1 бракованная.

2) И, наконец, $x_2 = 2$:

$C_5^2 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10$ способами можно извлечь 2 бракованные детали.

$p_3 = \frac{C_5^2}{C_{20}^2} = \frac{10}{190} = \frac{1}{19}$ – вероятность того, что обе извлечённые детали будут бракованными.

Таким образом, закон распределения количества бракованных деталей в выборке:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $X$ | $x_i$ | 0 | 1 | 2 |
| | $p_i$ | $\frac{21}{38}$ | $\frac{15}{38}$ | $\frac{1}{19}$ |

Контроль: $\frac{21}{38} + \frac{15}{38} + \frac{2}{38} = \frac{38}{38} = 1$

Заметьте, что здесь уже предпочтительны обыкновенные дроби – они и точнее и смотрятся лучше.

Теперь разберём более содержательную задачу, в которой я расскажу вам об общих формулах и полезных технических приёмах решения. Как в передаче «Что? Где? Когда?» выносят чёрные ящики, так в теории вероятностей предлагают урны с шарами :)

**Задача 103**

Из урны, содержащей 6 белых и 4 черных шара, случайным образом и без возвращения извлекают 3 шара.

***! Примечание:*** *оговорка «без возвращения» является важной, но её часто опускают, подразумевая этот факт по умолчанию*

Составить функцию распределения случайной величины $X$ – числа черных шаров среди выбранных. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины. Построить многоугольник и функцию распределению. Вычислить вероятность того, что в выборке будет не менее двух чёрных шаров. Вычислить $P(|X - M(X)| < \sigma(X))$.

Как говорится, весь джентльменский набор / полная дамская сумочка.

Кстати, если не нравятся шары, можете представить, что это белые и чёрные котята или…, не знаю, например, красные и чёрные карты.

**Решение**: поскольку в условии речь идёт о *выборке* объектов из *совокупности* и о количестве «особенных» объектов в этой выборке, то предложенная случайная величина имеет гипергеометрическое распределение вероятностей.

Обозначим исходные данные стандартными буквами:

$N = 6 + 4 = 10$ – размер совокупности;
$M = 4$ – количество черных шаров в совокупности («особенный» признак);
$n = 3$ размер выборки.

Очевидно, что случайная величина $X$ *(кол-во чёрных шаров в выборке)* может принять следующие значения:
$x = x_i = \{0, 1, 2, 3\}$

Следует отметить, что этих значений может быть и меньше. В каком случае?
В случае если $M < n$, то есть, если во всей совокупности чёрных шаров МЕНЬШЕ, чем размер выборки. Так, если в урне всего 2 чёрных шара, то значение $x_3 = 3$ отпадёт.

Для вычисления гипергеометрических вероятностей существует формула, но я вам крайне советую **вникать в смысл** выполняемых действий.

Сначала вычислим знаменатель дроби:
$C_N^n = C_{10}^3 = \frac{10!}{7! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{6} = 120$ способами можно выбрать 3 шара из 10. Данное значение нам потребуется при вычислении каждой вероятности. И каждую вероятность мы вычислим по формуле:

$p_x = ... = \frac{C_4^x \cdot C_6^{3-x}}{C_{10}^3}$, понеслось:

0) $x = x_0 = 0$ (в выборке нет чёрных шаров)
$C_4^x \cdot C_6^{3-x} = C_4^0 \cdot C_6^{3-0} = 1 \cdot \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{6} = 20$ способами можно выбрать 0 чёрных и 3 белых шара.

По классическому определению:
$p_0 = \frac{C_4^0 \cdot C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6} \approx 0{,}1667$ – вероятность того, что в выборке будет 0 черных шаров.

**Результаты лучше записывать в трёх видах:** *несокращённой* обыкновенной дробью, *сокращённой* обыкновенной дробью и *десятичной* дробью (с 3-4-5 знаками после запятой). Это упростит решение, и скоро будет понятно, как.

Кроме того, вероятности выгодно и приятно знать заранее. Для этого можно использовать экселевскую функцию *=ГИПЕРГЕОМЕТ(x; n; M; N)* или сразу воспользоваться ***Калькулятором*** *(Пункт 8)*. Едем дальше:

1) $x = x_1 = 1$

$C_4^x \cdot C_6^{3-x} = C_4^1 \cdot C_6^2 = 4 \cdot \frac{6!}{4! \cdot 2!} = 4 \cdot \frac{5 \cdot 6}{2} = 60$ способами можно выбрать 1 чёрный и 2 белых шара.

$p_1 = \frac{C_4^1 \cdot C_6^2}{C_{10}^3} = \frac{60}{120} = \frac{1}{2} = 0{,}5$ – вероятность того, что в выборке окажется 1 ч. шар.

2) $x = x_2 = 2$

$C_4^x \cdot C_6^{3-x} = C_4^2 \cdot C_6^1 = 6 \cdot 6 = 36$ способами можно выбрать 2 чёрных и 1 белый шар.

$p_2 = \frac{C_4^2 \cdot C_6^1}{C_{10}^3} = \ldots$ – вероятность того, что в выборке окажется 2 ч. шара.

3) $x = x_3 = 3$

$C_4^x \cdot C_6^{3-x} = C_4^3 \cdot C_6^0 = 4 \cdot 1 = 4$ способами можно выбрать 3 чёрных и 0 белых шаров.

$p_3 = \frac{C_4^3 \cdot C_6^0}{C_{10}^3} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30} \approx 0{,}0333$ – вероятность того, что в выборке будет 3 ч. шара.

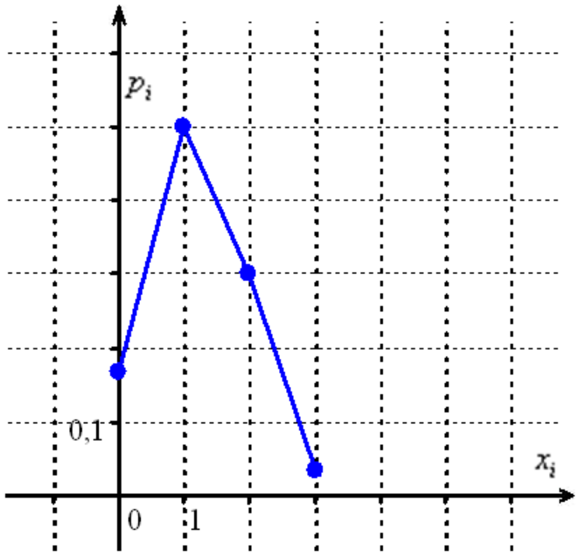
Таким образом, количество чёрных шаров в выборке распределено по следующему закону:

**Вероятности записываем обыкновенными дробями!**

Контроль: $\frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{3}{10} + \frac{1}{30} = \frac{5}{30} + \frac{15}{30} + \frac{9}{30} + \frac{1}{30} = \frac{30}{30} = 1$, ч.т.п.

В крайнем случае можно использовать десятичные дроби *(если обыкновенные сильно наворочены)*, единственное, нужно следить, чтобы сумма округлённых значений равнялась единице и при необходимости «подгонять» некоторые вероятности. Однако помните, что это уже будет **не точным** ответом!

Но десятичные значения, безусловно, удобны для построения многоугольника распределения:



Математическое ожидание и дисперсию гипергеометрического распределения можно вычислить в обход общего алгоритма – по специальным формулам:

$M(X) = \frac{M}{N} \cdot n = \frac{4}{10} \cdot 3 = 1{,}2$ – *среднее количество* чёрных шаров в выборке (при многократном повторении таких выборок).

$D(X) = \frac{M}{N} \cdot n \cdot ...$ – *мера рассеяния* количества чёрных шаров относительно матожидания.

Составим функцию распределения вероятностей. И здесь как раз пригодятся несокращённые обыкновенные дроби. Вычислим накопленные частоты:

$p_0 = \frac{20}{120} = \frac{1}{6} \approx 0{,}1667$ – десятичные значения нужны для ручного построения графика.

$$p_0 + p_1 = \frac{20}{120} + \frac{60}{120} = \frac{80}{120} = \frac{2}{3} \approx 0{,}66667$$

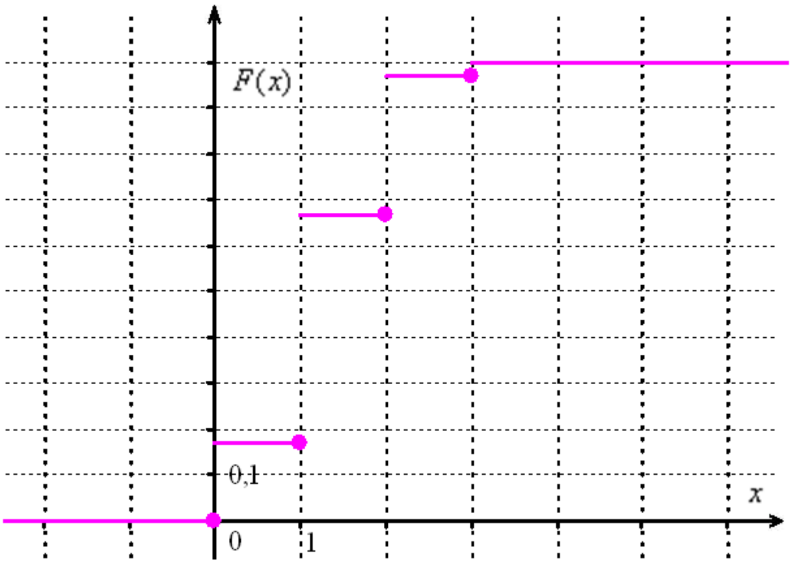
$$p_0 + p_1 + p_2 = \frac{20}{120} + \frac{60}{120} + \frac{36}{120} = \frac{116}{120} = \frac{29}{30} \approx 0{,}96667$$

$$p_0 + p_1 + p_2 + ..$$

Таким образом, искомая функция:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0; \\ 1/6 \text{ при } 0 < x \le 1; \\ ... \text{ при } 1 < x \le 2; \\ ... \text{ при } 2 < x \le 3; \\ 1 \text{ при } x > 3. \end{cases}$$

**– её значения тоже записываем обыкновенными дробями!** Дабы соблюсти точность. Строим график:



Выходим на финишную прямую. Вычислим $P(X \ge 2)$ – вероятность того, что в выборке будет не менее двух чёрных шаров. Это можно сделать не единственным способом. Прямым суммированием вероятностей несовместных исходов:

$$P(X \ge 2) = p_2 + p_3 = \frac{3}{10} + \frac{1}{30} = \frac{9}{30} + \frac{1}{30} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

или с помощью функции распределения и штатной формулы $P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$:

$$P(X \ge 2) = P(2 \le X < +\infty) = F(+\infty) - F(2) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Напоминаю, что здесь существуют **критично важные** тонкости *(см. по ссылке выше)*.

И, наконец, рассчитываем стандартную вероятность $P(|X - M(X)| < \sigma(X))$ того, что значение случайной величины $X$ отклонится от математического ожидания не более чем на одно среднее квадратическое отклонение $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0{,}56} \approx 0{,}75$:

$$P(|X - M(X)| < \sigma(X)) = P(-\sigma(X) < X - M(X) < \sigma(X)) =$$
$$= P(M(X) - \sigma(X) < X < M(X) + \sigma(X)) =$$
$$= \ldots - F(1{,}2 - \sqrt{0{,}56}) = \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

Готово.

Основная трудность **гг**-распределений состоит в технике вычислений – в них нужно грамотно управляться с дробями, которые частенько получаются страшноватыми. Это к слову, относится и к другим распределениям – дана где-нибудь вероятность $p = \frac{2}{3}$, и, пожалуйста, обыкновенные дроби рулят.

Ну, и конечно, не забываем о том, КАКАЯ ИМЕННО дана случайная величина. Так, в разобранном задании может быть предложена величина $X$ – *количество белых шаров в выборке*, и тогда решение примет «зеркальный» характер.

Миниатюрная задача для закрепления материала:

### Задача 104

В группе из шести студентов два отличника. Наугад выбрали двух человек. Составить закон распределения случайной величины $X$ – число отличников среди выбранных. Найти математическое ожидание и дисперсию. Построить график функции распределения.

Желающие могут решить эту же задачу для случая, когда в группе всего лишь один отличник ;)

…Есть? Отлично!

## 2.4. Непрерывная случайная величина

В отличие от дискретной случайной величины, НСВ может принять любое действительное значение из некоторого промежутка ненулевой длины, что делает невозможным её представление в виде таблицы *(т.к. действительных чисел несчётно много)*. И посему **непрерывную случайную величину задают функциями двух типов:**

1) ***функцией распределения*** $F(x)$,

2) ***функцией плотности распределения*** $f(x)$.

### ➢ Функция распределения непрерывной случайной величины

Как отмечалось ранее, *функция распределения* $F(x)$ *непрерывной случайной величины* $X$ определяется **точно так же**, как и в дискретном случае, повторим определение:

> … – вероятность того, что случайная величина $X$ примет значение, МЕНЬШЕЕ, чем *переменная* $x$, которая «пробегает» все действительные значения от «минус» до «плюс» бесконечности.

С увеличением $x$ функция распределения «накапливает» (суммирует) вероятности, а значит, является *неубывающей* и изменяется в пределах $0 \le F(x) \le 1$. По этой причине её также называют ***интегральной функцией распределения***.

**Важной особенностью непрерывного случая** является тот факт, что **функция распределения ЛЮБОЙ непрерывной случайной величины всюду непрерывна**! Часто её можно встретить в *кусочном* виде, например:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < 0 \\ \dfrac{x^2}{9}, & \text{если} \quad 0 \le x \le 3 \\ 1, & \text{если} \quad x > 3 \end{cases}$$

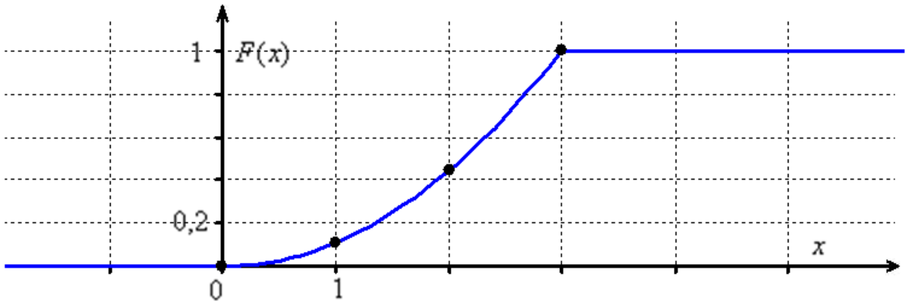
однако в точках «стыка» всё хорошо:

$$F(0) = \frac{0^2}{9} = 0, \quad F(3) = \frac{3^2}{9} = 1$$

**и если там разрыв**, то вы имеете дело с опечаткой или откровенной ошибкой!

***! Но*** *сама по себе непрерывность и ноль слева, единица справа – ещё не означают, что перед нами функция распределения.*

При ручном построении чертежа целесообразно найти опорные точки; в нашем примере удобно взять: $F(1) = \frac{1^2}{9} \approx 0{,}11, \quad F(2) = \frac{2^2}{9} \approx 0{,}44$ и плавно-плавно провести карандашом кусочек **параболы** $y = \frac{x^2}{9}$:




Напоминаю, что левый нижний луч следует прочертить жирно *(чтобы он не сливался с осью)*, а правый верхний луч продолжить за остриё оси *(т.к. график бесконечен)*. Функция распределения **не может** *убывать*, и если вдруг окажется, что какой-то кусок графика идёт «сверху вниз», то ищите ошибку или опять же – имеет место опечатка. А может просто дрогнула рука :)

Что касаемо масштаба, то смотрим по ситуации, чаще всего оптимальный масштаб составляет *1 ед. = 1 см (две клетки)*, но поскольку я строю графики не от руки, то особо не слежу за пропорциями – в данном случае по оси ординат вышло примерно в 2 раза больше, чем по оси абсцисс.

Теперь вернёмся к смыслу функции распределения и рассмотрим пару конкретных значений $x$:

$F(-1)=P(X<-1)=0$ – вероятность того, что случайная величина $X$ примет значение, МЕНЬШЕЕ, чем $x=-1$;

$F(4)=P(X<4)=1$ – вероятность того, что случайная величина $X$ примет значение, МЕНЬШЕЕ, чем $x=4$.

Ну и очевидно, что рассматриваемая случайная величина принимает *случайные, наперёд неизвестные* значения из отрезка $[0;3]$. Если вкладывать в задачу содержательный смысл, то это может быть случайная продолжительность некоего процесса *(в секундах, например)*, или масса либо размер случайно выбранного объекта *(например, плюшевого мишки)*. И так далее, примеров – масса. Конкретные задачи обязательно рассмотрим, но прежде мы остановимся на технической стороне вопроса.

### ➢ Вероятность попадания в промежуток

Вероятность того, что случайная величина примет значение из некоторого промежутка рассчитывается **ещё проще**, чем для дискретной случайной величины. Здесь нет никакой Санта-Барбары: отрезок ли $[a;b]$ нам дан, полуинтервал $(a;b]$, $[a;b)$ или интервал $(a;b)$, соответствующую вероятность можно вычислить по единой формуле:

$F(b)-F(a)$, и в следующем параграфе мы обоснуем это утверждение.

Например:

$P(0\le X\le 1)=F(1)-F(0)=\frac{1^2}{9}-\frac{0^2}{9}=\frac{1}{9}$ – вероятность того, что случайная величина примет какое-либо значение из отрезка $[0;1]$. И точно такими ми же будут вероятности $P(0<X\le 1)$, $P(0\le X<1)$, $P(0<X<1)$ *(скоро будет понятно, почему)*.

$P(2 \le X \le 3) = F(3) - F(2) = \frac{3^2}{9} - ...$ – вероятность того, что случайная величина примет значение из отрезка $[2; 3]$;

$P(-1 < X < 4) = F(4) - F(-1) = 1 - 0 = 1$ – вероятность того, что случайная величина примет значение из интервала $(-1; 4)$;

и так далее.

Наверное, вы заметили, что на участках <u>одинаковой длины</u> результаты получились разными: $P(0 \le X \le 1) = \frac{1}{9}$, $P(2 \le X \le 3) = \frac{5}{9}$. **И возникает вопрос: как оценить «концентрацию» вероятностей на различных промежутках?** – ведь функция распределения $F(x)$ характеризует *накопление* вероятностей по мере увеличения $x$, и каждый раз вычислять $F(b) - F(a)$ что-то неохота.

Эффективный ответ на поставленный вопрос даёт

- **функция ПЛОТНОСТИ распределения вероятностей**

или ***дифференциальная функция распределения***. Она представляет собой **производную** функции распределения: $F'(x) = f(x)$.

***Примечание:*** *для дискретной случайной величины такой функции не существует*

В нашем примере:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} (0)', & \text{если} \quad x < 0 \\ \left(\frac{x^2}{9}\right)', & \text{если} \quad 0 \le x \le 3 \\ (1)', & \text{если} \quad x > 3 \end{cases} = \quad ...$$

то есть, всё очень просто – **берём производную** от каждого куска, и порядок.

Но настоящий порядок состоит в том, что **несобственный интеграл** от $f(x)$ с пределами интегрирования от «минус» до «плюс» бесконечности:

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ – **равен единице, и строго единице**. В противном случае перед нами **не** функция плотности, и если эта функция была найдена как производная, то $F(x)$ – **не является** функцией распределения *(несмотря на какие бы то ни было другие признаки)*.

Проверим «подлинность» наших функций. Если случайная величина $X$ принимает значения из *конечного* промежутка, то всё дело сводится к вычислению **определённого интеграла**. В силу *свойства аддитивности*, делим интеграл на 3 части:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \int_{0}^{3} \frac{2x}{9} dx + \int_{3}^{+\infty} 0 \cdot dx$$

Совершенно понятно, что левый и правый интегралы равны нулю и нам осталось вычислить средний интеграл:

$\frac{2}{9}\int_0^3 x dx = \ldots$, что и требовалось проверить.

**С вероятностной точки зрения** это означает, что случайная величина $X$ достоверно примет одно из значений отрезка $[0; 3]$. Геометрически же это значит, что **площадь** между осью $OX$ и графиком $f(x)$ равна единице, и в данном случае речь идёт о площади треугольника $ABC$. Сторона $AB$ является фрагментом **прямой** $y = \frac{2x}{9}$ и для её построения достаточно найти точку $y(3) = \frac{2 \cdot 3}{9} = \frac{2}{3} \approx 0{,}67$:

Ну вот, теперь всё наглядно – где бОльшая площадь, там и сконцентрированы более вероятные значения.

Так как функция плотности «собирает под собой» вероятности, то она *неотрицательна* ($f(x) \geq 0$) и её график не может располагаться ниже оси $OX$. В общем случае функция разрывна *(смотрим, где «жирные» оранжевые точки!)*.

Теперь разберём весьма любопытный факт: поскольку действительных чисел *несчётно много*, то вероятность того, что случайная величина $X$ примет какое-то конкретное значение *стремится к нулю*. И поэтому вероятности рассчитывают не для отдельно взятых точек, а для целых промежутков *(пусть даже очень малых)*. Как вы правильно догадываетесь:

$P(0 \leq X \leq 1) = \int_a^b f(x)dx = \frac{2}{9}\int_0^1 x dx = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{2}(x^2)\Big|_0^1 = \frac{1}{9}(1-0) = \frac{1}{9}$ *(синяя площадь на чертеже)* – вероятность того, что случайная величина примет значение из отрезка $[0; 1]$;

$P(2 \leq X \leq 3) = \frac{2}{9}\int_2^3 x dx =$ *(красная площадь)* – вероятность того, что случайная величина примет значение из отрезка $[2; 3]$.

По той причине, что отдельно взятые значения можно не принимать во внимание, с помощью этих же интегралов рассчитываются и вероятности по интервалам и полуинтервалам, в частности:

$$P(0 < X \leq 1) = P(0 \leq X < 1) = P(0 < X < 1) = \frac{2}{9}\int_0^1 x dx = \frac{1}{9}$$

Этим же объяснятся аналогичная «вольность» с функцией $F(x)$.

Возможно, кто-то спросит: *а зачем считать интегралы, если есть функция* $F(x)$*?*

А дело в том, что во многих задачах непрерывная случайная величина ИЗНАЧАЛЬНО задана функцией $f(x)$ плотности распределения, которая ТОЖЕ **однозначно определяет случайную величину.** Но, как вариант, можно сначала найти функцию $F(x)$ *(с помощью тех же интегралов)*, после чего использовать «лёгкий способ» ~~бросить курить~~ отыскания вероятностей. Впрочем, об этом чуть позже:

**Задача 105**

Непрерывная случайная величина $X$ задана своей функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \le c \\ \dfrac{(x+1)^3}{8}, & \text{если} \quad c < x \le d \\ 1, & \text{если} \quad x > d \end{cases}$$

Найти значения $c, d$ и функцию $f(x)$. Проверить, что $f(x)$ действительно является функцией плотности распределения. Вычислить вероятности $P(-1 \le X < 0),\ P\left(x > \dfrac{1}{2}\right)$. Построить графики $F(x),\ f(x)$.

Тренируемся самостоятельно! Если возникнут затруднения, то внимательно перечитайте вышеизложенный материал. Краткое решение и ответ в конце книги.

Вообще, **типовые задачи на непрерывную случайную величину можно разделить на 2 большие группы:**

**1)** когда дана функция $F(x)$, **2)** когда дана функция $f(x)$.

В первом случае не составляет особых трудностей отыскать функцию плотности распределения – почти всегда производные не то что простЫ, а примитивны (в чём мы только что убедились). Но вот когда НСВ задана функцией $f(x)$, то нахождение функции распределения – есть более кропотливый процесс:

**Задача 106**

Непрерывная случайная величина $X$ задана функцией плотности распределения:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \le -\dfrac{\pi}{2} \\ A\cos x, & \text{если} \quad -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2} \\ 0, & \text{если} \quad x \ge \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Найти значение $A$ и составить функцию распределения вероятностей $F(x)$.

Вычислить $P\left(0 \le X < \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Построить графики $f(x),\ F(x)$.

**Решение**: найдём константу $A$. Это классика (в подавляющем большинстве задач вам не предложат готовую функцию плотности). Используем свойство $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

В данном случае:

$$\int_{-\infty}^{-\frac{\pi}{2}} 0 \cdot dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} A\cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} 0 \cdot dx = 1$$

$$0 + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} A\cos x dx + 0 = 1$$

На практике нулевые интегралы можно опускать, а константу сразу выносить за знак интеграла:

$$A\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 1 \qquad (*)$$

Пользуясь **чётностью подынтегральной функции**, вычислим интеграл:

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \ldots$ и подставим результат в уравнение (*):

$A \cdot 2 = 1$, откуда выразим $A = \frac{1}{2}$

Таким образом, функция плотности распределения:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \le -\frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2}\cos x, & \text{если} \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{если} \quad x \ge \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Выполним проверку, а именно, вычислим тот же самый интеграл, но уже с известной константой. Для разнообразия я не буду пользоваться чётностью:

$\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \frac{1}{2}(\sin x)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \ldots$, отлично.

**Обратите внимание, что только при $A = \frac{1}{2}$ и только при этом значении** предложенная в условии функция **является** функцией плотности распределения. Ну и тут не лишним будет проконтролировать, что на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$: $\frac{1}{2}\cos x > 0$, т.е. условие неотрицательности действительно выполнено. Доверяй условию, да проверяй ;) Не раз и не два мне встречались функции, которые в принципе не могли быть плотностью, что говорило об опечатках или о невнимательности авторов задач.

Теперь начинается самое интересное. Функции распределения вероятностей – есть интеграл:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

Так как $f(x)$ состоит из трёх кусков, то решение разобьётся на 3 шага:

**1)** На промежутке $\left(-\infty;-\frac{\pi}{2}\right]$ $f(x)=0$, поэтому: $F(x)=\int_{-\infty}^{x} 0dx=0$

**2)** На интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ $f(x)=\frac{1}{2}\cos x$, и мы прицепляем следующий вагончик:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{-\frac{\pi}{2}} 0dx+\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}\cos xdx=...$$

При подстановке верхнего предела интегрирования можно считать, что *вместо «икс» мы подставляем «икс»*. Если же возник вопрос с пределом нижним, то вспоминаем **график синуса** либо его *нечётность*: $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$.

**3)** И, наконец, на $\left[\frac{\pi}{2};+\infty\right)$ $f(x)=0$, и детский паровозик отправляется в путь:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{-\frac{\pi}{2}} 0dx+\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} 0dx=0+\frac{1}{2}(\sin x)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}+0=$$

$$=\frac{1}{2}(\sin x)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\frac{1}{2}(1+1)=\frac{1}{2}\cdot 2=1$$

**Внимание! А вот в этом задании нулевые интегралы пропускать НЕ НАДО.** Чтобы показать своё понимание функции распределения ;) К тому же, они могут оказаться вовсе не нулевыми, и тогда придётся иметь дело с интегралами несобственными. И такой пример я обязательно разберу ниже.

Записываем наши достижения под единую скобку:

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\le -\frac{\pi}{2}\\ , & \text{если } -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\\ 1, & \text{если } x\ge\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

С высокой вероятностью всё правильно, но, тем не менее, устно возьмём производную: $\left(\frac{1}{2}(\sin x+1)\right)'=\frac{1}{2}\cos x$, а также «прозвоним» точки «стыка»:

$$\frac{1}{2}\left(\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)+1\right)=\frac{1}{2}(-1+1)=0,\quad \frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2}+1\right)=\frac{1}{2}(1+1)=1$$

Правильность решения можно проконтролировать и в ходе построения графика, но, во-первых, он не всегда требуется, а во-вторых, до сего момента можно успеть «наломать дров». Ибо вероятности попадания чаще находят с помощью функции распределения:

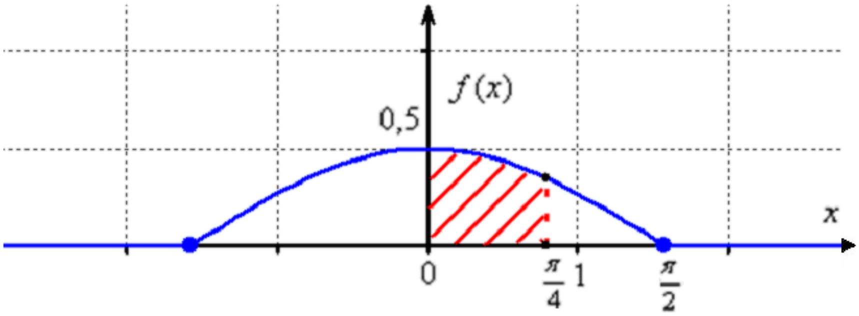
$$P\left(0\le X<\frac{\pi}{4}\right)=F\left(\frac{\pi}{4}\right)-F(0)=...$$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)-\frac{1}{2}(0+1)=\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}\approx 0{,}35$ – вероятность того, что случайная величина $X$ примет значение из промежутка $\left[0;\frac{\pi}{4}\right)$

Второй способ состоит в вычислении интеграла:

$P\left(0\le X<\frac{\pi}{4}\right)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\cos x dx=...$что, кстати, не труднее. И проверочка заодно получилась.

Выполним чертежи. График $y=\frac{1}{2}\cos x$ представляет собой ~~ко~~**синусоиду**, **сжатую вдоль ординат в 2 раза**. Тот редкий случай, когда функция плотности непрерывна:




Значение $P\left(0\le X<\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}\approx 0{,}35$ численно равно заштрихованной площади – это я специально нарисовал, чтобы напомнить вероятностный смысл плотности функции распределения. И вся площадь под «дугой» равна единице, то есть, достоверным является тот факт, что случайная величина примет значение из интервала $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Заметьте, что значения $x=-\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{2}$ по условию, *невозможны*.

Осталось изобразить функцию распределения. График $y=\frac{1}{2}(\sin x+1)$ представляет собой синусоиду, **сжатую в 2 раза вдоль оси ординат** и **сдвинутую** на $\frac{1}{2}$ вверх:

В принципе, тут можно было не заморачиваться преобразованием графиков, а найти несколько опорных точек и догадаться, как выглядит кривая (**тригонометрическая таблица** в помощь). Но «любительский» подход чреват тем, что график получится **принципиально не точным**. Так, в нашем примере в точке $x=0$ существует **перегиб графика** функции $F(x)$, и велик риск неверно отобразить его выпуклость / вогнутость.

Чертежи желательно расположить так, чтобы оси ординат (вертикальные оси) лежали ровненько одна под другой. Это будет хорошим тоном.

И я так чувствую, вам уже не терпится проверить свои силы. Как водится, пример попроще:

**Задача 107**

Задана плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины $X$ :

Требуется:

1) определить коэффициент $A$;
2) найти функцию распределения $F(x)$;
3) построить графики $f(x), F(x)$;
4) найти вероятность того, что $X$ примет значение из промежутка $[1; 3)$

и задачка поинтереснее:

**Задача 108**

Непрерывная случайная величина $X$ задана плотностью распределения вероятностей:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le -1\\ 2a, & -1<x\le 1\\ a, & 1<x\le 4\\ 0, & x>4\end{cases}$$

Найти значение $a$ и построить график плотности распределения. Найти функцию распределения вероятностей $F(x)$ и построить её график. Вычислить вероятность $P(0<X<2)$.

Дерзайте! Свериться с решением можно внизу книги.

Следует отметить, что все эти задачи реально предлагают студентам-заочникам, и поэтому я не предлагаю вам ничего необычного.

И в заключение параграфа обещанные случаи с **несобственными интегралами**:

## Задача 109

Непрерывная случайная величина $X$ задана своей плотностью распределения:

$$f(x)=\begin{cases} Ae^x, & x\le 0 \\ 0, & x>0 \end{cases}$$

Найти коэффициент $A$ и функцию распределения $F(x)$. Построить графики.

**Решение**: по свойству функции плотности распределения:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$$

В данной задаче $f(x)$ состоит из 2 частей, поэтому:

$$A\int_{-\infty}^{0} e^x dx+\int_{0}^{+\infty} 0\cdot dx=1$$

Правый интеграл равен нулю, а вот левый – есть «живой» **несобственный интеграл с бесконечным нижним пределом**:

$$\int_{-\infty}^{0} e^x dx=\lim_{a\to-\infty}(e^x)\Big|_a^0=\lim_{a\to-\infty}(e^0-e^a{}_{\to 0})=1-0=1$$

Таким образом, наше уравнение превратилось в готовый результат:

$$A\cdot 1+0=1$$

$$A=1$$

и функция плотности:

$$f(x)=\begin{cases} e^x, & x\le 0 \\ 0, & x>0 \end{cases}$$

Функция $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx$, как нетрудно понять, отыскивается в 2 шага:

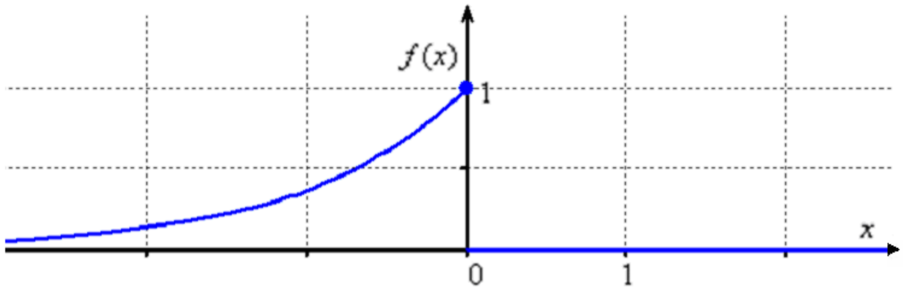
1) На промежутке $(-\infty;0]$: $f(x)=e^x$, следовательно:

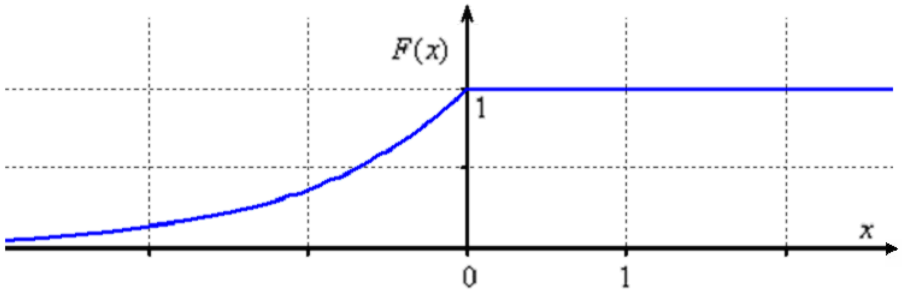
$F(x)=\int_{-\infty}^{x} e^x dx=\lim_{a\to-\infty}(e^x)\Big|_a^x=\ldots$ – вот такая вот у нас замечательная экспонента. Как птица Феникс.

2) На интервале $(0;+\infty)$: $f(x)=0$ и:

$F(x)=\int_{-\infty}^{0} e^x dx+\int_{0}^{x} 0dx=\lim_{a\to-\infty}(e^x)\Big|_a^0+0=\lim_{a\to-\infty}(e^0-e^a{}_{\to 0})=1-0=1$, что и должно получиться.

Для построения графиков найдём пару опорных точек: $e^{-1}\approx 0{,}37$, $e^{-2}\approx 0{,}14$ и аккуратно прочертим кусочки экспонент с причитающимися дополнениями:




Заметьте, что *теоретически* случайная величина $X$ может принять сколь угодно *большое по модулю* отрицательное значение, и ось абсцисс является **горизонтальной асимптотой** для обоих графиков при $x \to -\infty$.

В **соответствующей статье сайта** я рассмотрел ещё более интересный пример с функцией $f(x) = \dfrac{2}{\pi(e^{-x} + e^{x})}$, где случайная величина *теоретически* принимает вообще ВСЕ действительные значения. Но это уже несколько повышенный уровень сложности.

➢ **Как вычислить математическое ожидание и дисперсию НСВ?**

Ответ на этот вопрос состоит из двух слов: **с помощью интегралов**.

Сам смысл математического ожидания и дисперсии мы уже разбирали ранее *(но, конечно, повторим)*, и сейчас настало время узнать, как они определяются для непрерывной случайной величины. Всё очень просто, по аналогии с ДСВ:

***Математическое ожидание*** непрерывной случайной величины $X$ определяется, как несобственный интеграл:

$M(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx$, где $f(x)$ – функция плотности распределения этой случайной величины.

***Дисперсия*** тоже имеет «знакомые очертания»: $D(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} [x - M(X)]^2 f(x)dx$ *(по определению)*, но в практических задачах гораздо удобнее применять формулу:

Как и в дискретном случае, **дисперсия не может быть отрицательной**!

И ***среднее квадратическое отклонение*** вычисляется точно так же:
$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$

Итак, все инструменты в руках и мы с энтузиазмом приступаем к любимому делу:

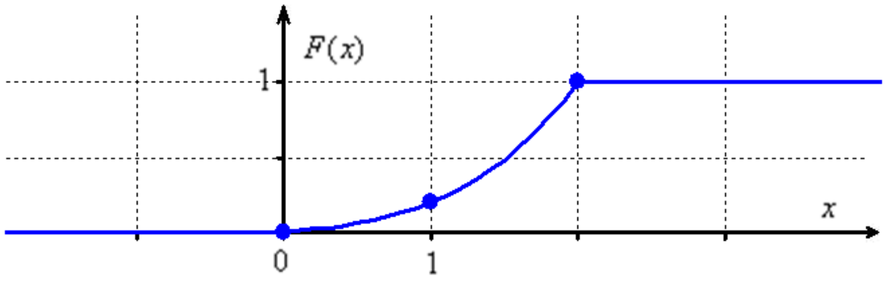
**Задача 110**

Непрерывная случайная величина $X$ задана функцией

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x<0 \\ \dfrac{1}{10}(x^3+x), & \text{если} \quad 0\le x\le 2 \\ 1, & \text{если} \quad x>2\end{cases}$$

Вычислить $M(X), D(X), \sigma(X)$. И построим ещё графики $F(x)$ и $f(x)$, ну а куда же без них? Повторение и ещё раз повторение!

**Решение** начнём как раз с графика функции распределения. При его ручном построении удобно найти промежуточное значение $F(1)=\dfrac{1}{10}(1^3+1)=0{,}2$ и аккуратно провести кусок **кубической параболы** $y=\dfrac{1}{10}(x^3+x)$:




**Повторяем:** функция распределения $F(x)=P(X<x)$ описывает вероятность того, что случайная величина $X$ примет значение, МЕНЬШЕЕ, чем *переменная* $x$, «пробегающая» все значения от $-\infty$ до $+\infty$. Данная функция изменяется в пределах $0\le F(x)\le 1$ и не убывает *(т. к. «накапливает» вероятности)*. **Но если в дискретном случае она разрывна** *(вспоминаем «ступеньки»)*, **то здесь – всюду непрерывна!**

Очевидно, что случайная величина $X$ принимает случайные значения из отрезка $[0;2]$, и какие из них *более вероятны*, а какие – *менее*, наглядно показывает функция ПЛОТНОСТИ распределения вероятностей:

Найдём опорные точки **параболы**: $f(0)=\dfrac{1}{10}$, $f(1)=\dfrac{4}{10}$, $f(2)=\dfrac{13}{10}$, и готово:

**В отличие от** $F(x)$, функции плотности может быть разрывна и может принимать значения бОльшие единицы *(как в нашем случае)*; может, как убывать, так и возрастать и даже иметь **экстремумы** *(наш кусок параболы растёт)*. **Однако (повторяем)**, она неотрицательна: $f(x) \ge 0$ и обладает свойством $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$, **и это лучше всегда проверять** (а то мало ли, опечатка или ошибка). Неотрицательность функции очевидна по чертежу, а вот интеграл подлежит вычислению. Используя свойство *аддитивности*, делим его на три части:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \frac{1}{10}\int_{0}^{2}(3x^2+1)dx + \int_{2}^{+\infty} 0 \cdot dx =$$

$= 0 + \frac{1}{10}(x^3+x)\Big|_0^2 + 0 = \frac{1}{10}(8+2-0-0) = \frac{1}{10} \cdot 10 = 1$ – данный результат равен заштрихованной площади (см. выше) и с вероятностной точки зрения означает тот факт, что случайная величина $X$ достоверно примет одно из значений отрезка $[0; 2]$. Причём, по чертежу хорошо видно, что значения из правой части отрезка гораздо более вероятны, чем значения слева.

**И эти вероятности оцениваются кусками площади, а не значениями функции** $f(x)$ **!!!** (окончательно избавляемся от распространённой иллюзии)

Ради интереса вычислим:

$P(0 \le X \le 1) = \int_{0}^{1} f(x)dx = F(x)\Big|_0^1 = \frac{1}{10}(x^3+x)\Big|_0^1 = \frac{1}{10}(1+1-0-0) = \frac{1}{5}$ – вероятность того, что случайная величина $X$ примет какое-нибудь значение из промежутка $[0;1]$

Теперь числовые характеристики. Очевидно, что математическое ожидание *(среднеожидаемое значение)* случайной величины $X$ должно находиться в «живом» отрезке $[0; 2]$, причём – ближе к его правому концу (поскольку там выше плотность вероятности).

Убедимся в этом аналитически. По формуле вычисления математического ожидания, и в силу того же свойства *аддитивности*:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x \cdot 0 \cdot dx + \frac{1}{10}\int_{0}^{2} x(3x^2+1)dx + \int_{2}^{+\infty} x \cdot 0 \cdot dx = 0 + \frac{1}{10}\int_{0}^{2}(3x^3+x)dx + 0 =$$

$= \frac{1}{10} \cdot \textit{юююю}$ – ну что же, вполне и вполне правдоподобно, результат я отметил красной точкой на чертеже.

***! Примечание:*** *в общем случае (и в этом, в частности)* $M(X)$ *не делит площадь на 2 равные части!*

Если промежуток *конечен*, то можно сразу записывать, что матожидание равно определённому интегралу:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \frac{1}{10}\int_{0}^{2} x(3x^2+1)dx = \ldots = \frac{7}{5}$$

Дисперсию *(меру рассеяния случайных значений относительно* $M(X)$*)* вычислим по формуле:

Сначала удобно разделаться с интегралом, здесь я не буду расписывать подробно:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \frac{1}{10}\int_0^2 x^2(3x^2+1)dx = \frac{1}{10}\int_0^2 (3x^4+x^2)dx =$$

$$= \frac{1}{10}\cdot\left(\frac{3x^5}{5}+\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{1}{10}\cdot\left(\frac{96}{5}+\frac{8}{3}-0-0\right) = \frac{1}{10}\cdot\left(\frac{288+40}{15}\right) = \frac{1}{10}\cdot\frac{328}{15} = \frac{164}{75}$$

Таким образом:

$$D(X) = \frac{164}{75} - \left(\frac{7}{5}\right)^2 = \frac{164}{75} - \frac{49}{25} = \frac{164}{75} - \frac{147}{75} = \frac{17}{75} \approx 0{,}23$$

И, наконец, среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma(X) = D(X) = \sqrt{\frac{17}{75}} \approx 0{,}48$$

Вот такое вот у нас получилось захватывающее повторение-изучение-исследование! И коль скоро спрашивалось немного, запишем:

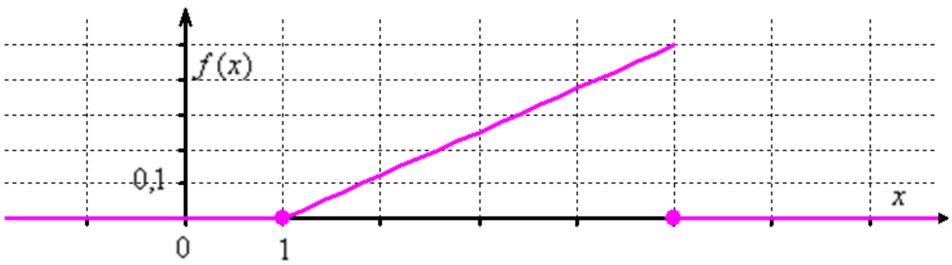
**ответ**: $M(X) = \frac{7}{5}, \quad D(X) = \frac{17}{75}, \quad \sigma(X) = \sqrt{\frac{17}{75}} \approx 0{,}48$

Строго говоря, ответ следовало записывать и в предыдущих задачах, но когда пунктов много, то итоговые результаты вполне допустимо помечать по ходу решения, например, подчёркивать или обводить карандашом.

Следующее задание для самостоятельного решения:

**Задача 111**

Дана функция:




Представить $f(x)$ в аналитическом виде и показать, что она может служить плотностью вероятностей случайной величины $X$. Вычислить $M(X), D(X)$ и $\sigma(X)$.

***Справка:*** *уравнение прямой, проходящей через точки* $A(x_1;\, y_1), B(x_2;\, y_2)$, *можно составить по формуле* $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$.

Бывает, вычисление матожидания и дисперсии сопряжено с техническими трудностями, и **в соответствующей статье сайта** я рассмотрел следующие функции:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ A\sin 2x, & 0\le x\le \dfrac{\pi}{4}\\ 1, & x>\dfrac{\pi}{4}\end{cases}\qquad f(x)=\begin{cases}\dfrac{C}{\sqrt{4-x^2}}, & \text{если } x\in[-1;1]\\ 0, & \text{если } x\notin[-1;1]\end{cases}$$

Однако вся трудность этих заданий состоит в более сложных интегралах, что, собственно, уже не относится к теории вероятностей, и посему я не включил эти примеры в настоящую книгу. Но вот задачка с несобственными интегралами не помешает:

**Задача 112**

Непрерывная случайная величина $X$ задана плотностью распределения вероятностей:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ \dfrac{C}{x^4}, & x\ge 1\end{cases}$$

Найти $C, M(X)$ и $D(X)$. Составить функцию распределения и построить графики $f(x), F(x)$. Вычислить вероятность того, что случайная величина $X$ примет значение, бОльшее, чем её математическое ожидание.

Попробуйте решить её самостоятельно! И для желающих есть более трудное задание с функцией $f(x)=Ae^{-|x|}$ *(смотрите опять же на сайте – ссылка выше).*

Но этим всё дело не ограничивается. Точно так же, как и в дискретном случае, у непрерывной случайной величины существуют особые законы распределения вероятностей, и наиболее популярные из них мы рассмотрим прямо сейчас:

## 2.5. Распространённые виды непрерывных распределений

Первое:

### ➢ Равномерное распределение вероятностей

Это не только «особое», но и, пожалуй, простейшее непрерывное распределение, с помощью которого моделируются многие реальные процессы.

И самый такой распространённый пример – это график движения общественного транспорта. Предположим, что некий автобус *(троллейбус / трамвай)* ходит с интервалом в 10 минут, и вы в случайный момент времени подошли к остановке. Какова вероятность того, что автобус подойдёт в течение 1 минуты? Очевидно, $\frac{1}{10}$-я. А вероятность того, что придётся ждать 4-5 минут? Тоже $\frac{1}{10}$-я. А вероятность того, что автобус придётся ждать более 9 минут? Одна десятая!

Рассмотрим некоторый *конечный* промежуток, пусть для определённости это будет отрезок $[a;b]$. Если случайная величина $X$ обладает постоянной плотностью распределения вероятностей на данном отрезке и нулевой плотностью вне него, то говорят, что она распределена ***равномерно***. При этом функция плотности будет строго такой:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & \text{если } x\in[a;b]\\ 0, & \text{если } x\notin[a;b]\end{cases}$$

И в самом деле, если длина отрезка *(см. чертёж)* составляет $b-a$, то значение $f(x)$ неизбежно равно $\dfrac{1}{b-a}$ – дабы получилась единичная площадь прямоугольника, и было соблюдено известное свойство:

Проверим это свойство формально:

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int\limits_a^b\dfrac{dx}{b-a}=\dfrac{1}{b-a}\cdot(x)\Big|_a^b=\dfrac{1}{b-a}\cdot(b-a)=1$, ч.т.п. С вероятностной точки зрения это означает, что случайная величина $X$ достоверно примет одно из значений отрезка $[a;b]$…, эх, становлюсь потихоньку занудным старикашкой =)

Суть равномерности состоит в том, что какой бы внутренний промежуток фиксированной длины $l$ мы ни рассмотрели *(вспоминаем «автобусные» минуты)* – вероятность того, что случайная величина $X$ примет значение из этого промежутка будет одной и той же. На чертеже я заштриховал троечку таких вероятностей – ещё раз заостряю внимание, что **они определяются площадями**, а не значениями функции $f(x)$!

Рассмотрим типовое задание:

**Задача 113**

Непрерывная случайная величина $X$ задана своей плотностью распределения:

$$f(x)=\begin{cases}C, & \text{если } x\in(-1;3)\\ 0, & \text{если } x\notin(-1;3)\end{cases}$$

Найти константу $C$, вычислить $M(X), D(X)$ и составить функцию распределения. Построить графики $f(x), F(x)$. Найти $P(1{,}5\le X<3)$

Иными словами, всё, о чём только можно было мечтать :)

**Решение**: так как на интервале $(-1;3)$ *(конечном промежутке)* $f(x)=C=\text{const}$, то случайная величина $X$ имеет равномерное распределение, и значение «цэ» можно отыскать по прямой формуле $C=\frac{1}{b-a}=\frac{1}{3-(-1)}=\frac{1}{4}$. Но лучше общим способом – с помощью свойства:

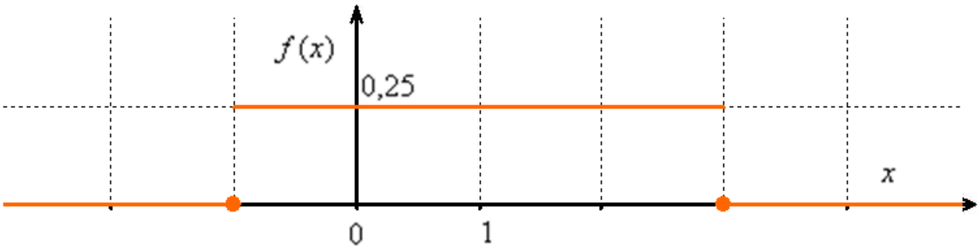
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = C\int_{-1}^{3} dx = ...$$

…почему лучше? Чтобы не было лишних вопросов ;)

Таким образом, функция плотности:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & \text{если } x\in(-1;3)\\ 0, & \text{если } x\notin(-1;3)\end{cases}$$

Выполним чертёж. Значения $x=-1,\ x=3$ невозможны, и поэтому жирные точки ставятся внизу:




В качестве экспресс-проверки вычислим площадь прямоугольника:

$(3-(-1))\cdot\frac{1}{4}=4\cdot\frac{1}{4}=1$, ч.т.п.

Найдём математическое ожидание, и, наверное, вы уже догадываетесь, чему оно равно. Вспоминаем «10-минутный» автобус: если *случайным образом* подходить к остановке много-много дней ~~упаси~~, то *в среднем* его придётся ждать 5 минут.

Да, именно так – матожидание должно находиться ровно посерединке «событийного» промежутка:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_{-1}^{3} x\cdot\frac{1}{4}dx=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}(x^2)\Big|_{-1}^{3}=\frac{1}{8}(9-1)=\frac{1}{8}\cdot 8=1, \text{ как и предполагалось.}$$

Дисперсию вычислим по формуле. И вот тут нужен глаз да глаз при вычислении интеграла:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx=\int_{-1}^{3} x^2\cdot\frac{1}{4}dx=...$$

Таким образом, дисперсия:

$$D(X)=\frac{28}{12}-1^2=\frac{28}{12}-\frac{12}{12}=\frac{16}{12}=\frac{4}{3}$$

Составим функцию распределения $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx$. Здесь ничего нового:

1) если $x \le -1$, то $f(x) = 0$ и $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} 0 \cdot dx = 0$;

2) если $-1 < x < 3$, то $f(x) = \frac{1}{4}$ и:

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{-1} 0dx + ...$$

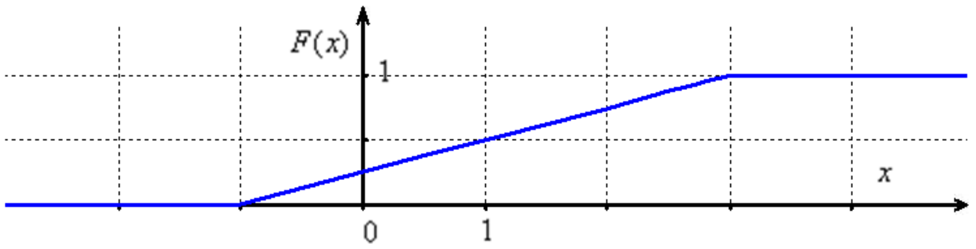
3) и, наконец, при $x \ge 3$ $f(x) = 0$, поэтому:

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{-1} 0dx + \frac{1}{4}\int\limits_{-1}^{3} dx + \int\limits_{3}^{x} 0dx = 0 + \frac{1}{4}(x)\Big|_{-1}^{3} + 0 = \frac{1}{4}(3-(-1)) = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1$$

В результате:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \le -1 \\ ..., & \text{если} \quad -1 < x < 3 \\ 1, & \text{если} \quad x \ge 3 \end{cases}$$

Выполним чертёж:




На «живом» промежутке функция растёт *линейно*, и это ещё один признак, что перед нами равномерно распределённая случайная величина. Ну, ещё бы, ведь производная линейной функции – есть константа.

Вероятность попадания можно вычислить двумя способами, с помощью найденной функции распределения:

$$P\left(\frac{3}{2} \le X < 3\right) = F(3) - F\left(\frac{3}{2}\right) = 1 - \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2} + 1\right) = 1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{2} = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$$

либо с помощью определённого интеграла от плотности:

$$P\left(\frac{3}{2} \le X < 3\right) = \frac{1}{4}\int\limits_{\frac{3}{2}}^{3} dx = \frac{1}{4}(x)\Big|_{\frac{3}{2}}^{3} = \frac{1}{4}\left(3 - \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{8}$$

Кому как нравится.

И теперь можно записать **ответ**, перечислив в нём все трофеи, но у меня тут закончилась страница, и поэтому обойдёмся без ответа. За его отсутствие обычно не карают, но иногда заставляют и записать, если рецензенту лень просматривать решения :)

Для вычисления $M(X)$ и $D(X)$ равномерной случайной величины существуют специальные формулы, которые я предлагаю вам вывести самостоятельно:

## Задача 114

Непрерывная случайная величина $X$ задана плотностью

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{если } x \in [a; b] \\ 0, & \text{если } x \notin [a; b] \end{cases}.$$

Вычислить математическое ожидание и дисперсию. Результаты максимально упростить (**формулы сокращённого умножения** в помощь). Полученные формулы удобно использовать для проверки, в частности, проверьте предыдущую задачу, подставив в них конкретные значения «а» и «б». И в заключение параграфа разберём парочку «текстовых» задач:

## Задача 115

Цена деления шкалы измерительного прибора равна 0,2. Показания прибора округляются до ближайшего целого деления. Считая, что погрешности округлений распределены равномерно, найти вероятность того, что при очередном измерении она не превзойдёт 0,04.

Для лучшего понимания **решения** представим, что это какой-нибудь механический прибор со стрелкой, например, весы с ценой деления 0,2 кг, и нам предстоит взвесить кота в мешке. Но не в целях выяснить его упитанность – сейчас будет важно, ГДЕ между двумя соседними делениями остановится стрелка.

Рассмотрим случайную величину $X$ – *расстояние* стрелки от ближайшего левого деления *(можно от ближайшего правого, это не принципиально).*

Составим функцию плотности распределения вероятностей:

1) Так как расстояние не может быть отрицательным, то на интервале $(-\infty; 0)$: $f(x) = 0$. Логично.

2) Из условия следует, что стрелка весов с *равной вероятностью** может остановиться в любом месте между делениями, включая сами деления, и поэтому на промежутке $0 \le x \le 0{,}2$: $f(x) = \dfrac{1}{b-a} = \dfrac{1}{0{,}2-0} = \dfrac{1}{0{,}2} = 5$

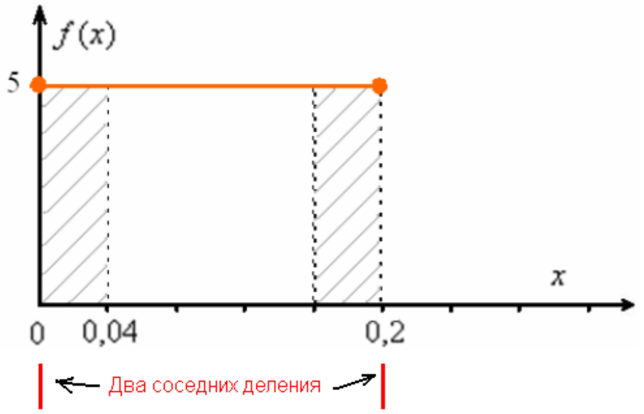
*** Это существенное условие. Так, например, при взвешивании кусков ваты или пачек соли равномерность будет соблюдаться на куда более узких промежутках.*

3) И поскольку расстояние от БЛИЖАЙШЕГО левого деления не может быть больше, чем 0,2, то при $x > 0{,}2$ $f(x)$ тоже равна нулю.

Таким образом:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < 0 \\ 5, & \text{если} \quad 0 \le x \le 0{,}2 \\ 0, & \text{если} \quad x > 0{,}2 \end{cases}$$

Теперь ответим на вопрос задачи. Когда погрешность округления до ближайшего деления не превзойдёт 0,04? Это произойдёт тогда, когда стрелка остановится не далее чем на 0,04 от левого деления *справа* или не далее чем на 0,04 от правого деления *слева*:




Осталось найти эти площади. Лучше с помощью интегралов, а не по формуле площади прямоугольника. Ибо простота здесь не всегда находит понимание ;)

По теореме сложения вероятностей несовместных событий:

$$p = 5\int_{0}^{0,04} dx + \ldots$$

$= 5 \cdot 0,04 + 5 \cdot 0,04 = 0,2 + 0,2 = 0,4$ – вероятность того, что ошибка округления не превзойдёт 0,04 (40 грамм для нашего примера)

Легко понять, что максимально возможная погрешность округления составляет 0,1 (100 грамм) и поэтому *вероятность того, что ошибка округления не превзойдёт 0,1* равна единице. И из этого, кстати, следует другой, более лёгкий способ решения, в котором нужно рассмотреть случайную величину $X$ *– погрешность округления до ближайшего деления*. Но первый способ мне пришёл в голову первым ☺

**Ответ**: 0,4

**И ещё один момент по задаче.** В условии речь может идти о погрешностях **не округлений**, а о *случайных* погрешностях **самих измерений**, которые, как правило *(но не всегда)*, распределены по нормальному закону. Таким образом, **всего лишь одно слово может в корне изменить решение! Будьте начеку и вникайте в смысл задач!**

И коль скоро всё идёт по кругу, то ноги нас приносят на ту же остановку:

**Задача 116**

Автобусы некоторого маршрута идут строго по расписанию и интервалом 7 минут. Составить функцию плотности случайной величины $T$ – времени ожидании очередного автобуса пассажиром, который наудачу подошёл к остановке. Найти вероятность того, что он будет ждать автобус не более трёх минут. Найти функцию распределения $F(t)$ и пояснить её содержательный смысл.

Несмотря на то, что время не может быть отрицательным, интервал $(-\infty; 0)$ не исключается из рассмотрения, ибо противоречия тут нет – вероятность того, что случайная величина $T$ примет невозможное значение, равна нулю.

## ➢ Показательное распределение вероятностей

***Показательным*** или ***экспоненциальным*** называют распределение, которое характеризуется следующей функцией плотности:

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x<0\\ ..., & \text{если } x\ge 0\end{cases}, \text{ где } \lambda>0$$

Убедимся в том, что перед нами не «подделка». Поскольку $f(x)\ge 0$ и несобственный интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} 0dx+...$$

$=-\lim\limits_{b\to+\infty}(e^{-\lambda x})\Big|_0^b=-\lim\limits_{b\to+\infty}(e^{-\lambda b}{}_{\to 0}-e^0)=-(0-1)=1$, то функция $f(x)$ действительно задаёт закон распределения непрерывной случайной величины.

Используя стандартный алгоритм, легко найти функцию распределения данной случайной величины:

$$F(x)=P(X<x)=\begin{cases}0, & \text{если } x<0\\ 1-e^{-\lambda x}, & \text{если } x\ge 0\end{cases} \quad (\lambda>0),$$

и опять же через общие формулы нетрудно получить числовые характеристики экспоненциального распределения:

$$M(X)=\frac{1}{\lambda},\quad D(X)=\frac{1}{\lambda^2}$$

Большим достоинством показательного распределения является тот факт, что оно определяется всего лишь одним параметром. Всего лишь одним, Карл! И по этой причине нам достаточно разобрать одну-единственную задачу, проще всего для $\lambda=1$. Как-то так получилось, что во всех примерах параграфа Равномерное распределение мы начинали с функции $f(x)$, и поэтому для разнообразия зайдём в лес с другой стороны:

### Задача 117

Непрерывная случайная величина $X$ задана своей функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1+Ae^{-x}, & x\ge 0\end{cases}$$

Требуется:
1) определить коэффициент $A$;
2) найти плотность распределения вероятностей $f(x)$;
3) схематично построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$;
4) вычислить математическое ожидание и дисперсию $X$;
5) определить вероятность того, что $X$ примет значение из интервала $(2;+\infty)$.

Одним словом, обычная задача на НСВ, бессмысленная и беспощадная, заметьте, кстати, что в условии ничего не сказано о том, что эта величина распределена по экспоненциальному закону.

**Решаем**:

**1)** В силу непрерывности функции распределения:

$F(0)=1+A\cdot e^{0}=1+A=0 \quad \Rightarrow \quad A=-1$ – **при этом и только при этом значении** предложенная функция задаёт закон распределения непрерывной случайной величины:

$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-e^{-x}, & x\ge 0\end{cases}$, что соответствует шаблону для $\lambda=1$, таким образом, мы имеем дело с экспоненциальным распределением.

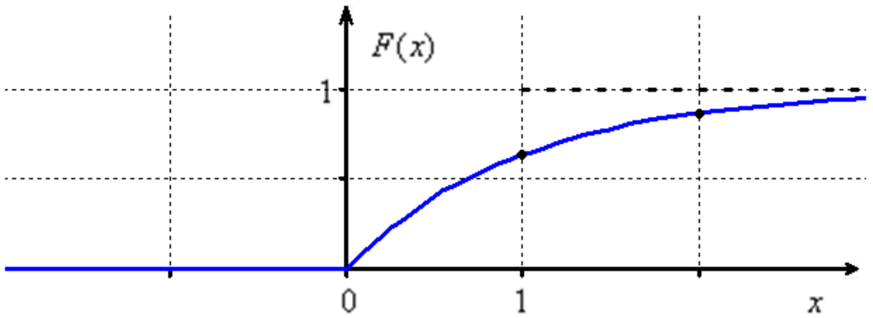
**2)** Найдём функцию плотности распределения:

$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ e^{-x}, & x\ge 0\end{cases}$, что полностью соответствует шаблону.

***На всякий случай*** *производная сложной функции:* $(1-e^{-x})'=0-e^{-x}\cdot(-x)'=e^{-x}$.

**3)** Условие допускает схематическое построение графиков, но зачем занижать планку? Даже при их ручном построении не составляет никакого труда найти пару дополнительных точек и проявить маломальскую аккуратность.

Вычислим пару опорных значений: $F(1)=1-e^{-1}\approx 1-0{,}37=0{,}63$, $F(2)=1-e^{-2}\approx 1-0{,}14=0{,}86$ и простенький предел $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(1-e^{-x}{}_{\to 0})=1$. Таким образом, прямая $y=1$ *(изображена пунктиром)* является горизонтальной асимптотой для графика $F(x)$ при $x\to+\infty$:

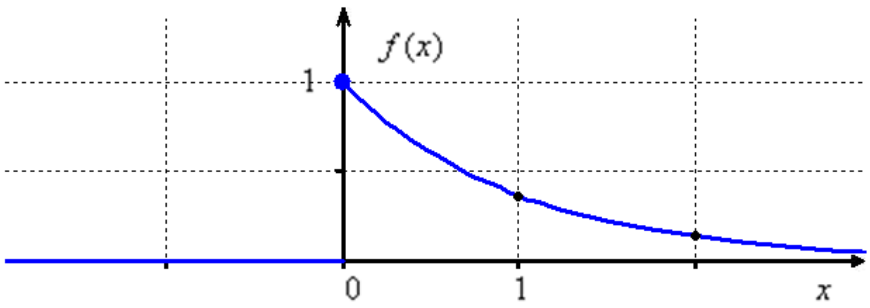



Показательное распределение нашло широкое применение в прикладных задачах, и пока чертёж не уехал вверх, приведу конкретный пример. Пусть на промежутке $x\ge 0$ переменная «икс» обозначает *время* и в момент времени $x=0$ начинает эксплуатироваться некий прибор, например, обычная лампочка. Тогда экспоненциальная случайная величина $X$ характеризует *время работы лампочки до перегорания*. И тогда функция $F(x)=P(X<x)$ описывает вероятность того, что лампочка проработает МЕНЬШЕ, чем прошедшее время $x$. По понятным причинам при увеличении $x$ эта вероятность стремится к единице, что хорошо иллюстрирует вышеприведённый график.

Кстати, о чём идёт речь в 5-м пункте условия? В контексте рассматриваемого примера, нам нужно найти $P(2<X<+\infty)$ – вероятность того, что лампочка проработает более 2 тыс. часов *(значения, естественно, условные)*. Давайте сразу и вычислим эту вероятность:

**5)** $P(2<X<+\infty)=F(+\infty)-F(2)=1-(1-e^{-2})=1-1+e^{-2}=e^{-2}\approx 0{,}14$

Ситуацию наглядно иллюстрирует чертёж ПЛОТНОСТИ распределения вероятностей:




Площадь между графиком $f(x)$ и осью абсцисс равна единице *(проверено в начале параграфа)*, и значительная часть этой площади (а именно, $\approx 0{,}86$) сосредоточена на промежутке от 0 до 2.

Применительно к «ламповому» примеру, определённый интеграл $\int_0^k f(x)dx$ равен вероятности того, что лампочка проработает от 0 до $k$ тыс. часов. В частности, как раз:

$$\int_0^2 e^{-x}dx = -\int_0^2 e^{-x}d(-x) = \ldots .$$

Соответственно, несобственный интеграл $\int_k^{+\infty} f(x)dx$ – есть вероятность того, что лампочка проработает более $k$ тыс. часов, и Пункт **5)** можно решить вторым способом:

$$P(2 < X < +\infty) = \int_2^{+\infty} e^{-x}dx = -\int_2^{+\infty} e^{-x}d(-x) = -\lim_{b \to +\infty}(e^{-x})\Big|_2^b =$$

$$= -\lim_{b \to +\infty}(e^{-b}{}_{\to 0} - e^2) = -(0 - e^2) = e^2 \approx 0{,}14$$

**4)** Вычислим **математическое ожидание** и **дисперсию**.

Несмотря на то, что существуют готовые формулы для расчёта этих характеристик, решать, конечно же, будем подробно. По формуле математического ожидания:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x \cdot 0 \cdot dx + \int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = 0 + \int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = \int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$$

Сначала удобно найти неопределенный интеграл:

$$\int xe^{-x}dx = (*)$$

Вспоминаем **интегрирование по частям**:

$u = x \quad \Rightarrow \quad du = dx$

$dv = e^{-x}dx \quad \Rightarrow \quad v = -e^{-x}$

$\int udv = uv - \int vdu$

$(*) = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = \ldots$ – произвольную константу приплюсовывать не надо, т.к. она всё равно сократится.

Таким образом:

$$M(X)=\int_{0}^{+\infty} xe^{-x}dx=-\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{x+1}{e^{x}}\right)\Big|_{0}^{b}=...$$

***Примечание:*** $\frac{b+1}{e^{b}}\to 0$, *т.к. знаменатель **более высокого порядка роста**.*

Дисперсию вычислим по формуле $D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2}f(x)dx-(M(X))^{2}$, и из избушки на курьих ножках появляется следующий интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2}f(x)dx=\int_{0}^{+\infty} x^{2}e^{-x}dx$$

Как и в случае с матожиданием, сначала проясним первообразную:

$$\int x^{2}e^{-x}dx=(*)$$

По канонам жанра тут нужно дважды интегрировать по частям, но решение облегчается тем, что после 1-го применения формулы $\int udv=uv-\int vdu$ мы сталкиваемся с только что решённым интегралом:

$$u=x^{2}\quad\Rightarrow\quad du=2xdx$$

$$dv=e^{-x}dx\quad\Rightarrow\quad v=-e^{-x}$$

$$(*)=-x^{2}e^{-x}+2\int xe^{-x}dx=...$$

Таким образом, несобственный интеграл:

$$\int_{0}^{+\infty} x^{2}e^{-x}dx=-\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{(x^{2}+2x+2)}{e^{x}}\right)\Big|_{0}^{b}=...$$

***Примечание:*** $\frac{b^{2}+2b+2}{e^{b}}\to 0$ *по той же самой причине.*

Таким образом:

$$D(X)=2-1^{2}=2-1=1$$

Проверим полученные результаты с помощью готовых формул:

$$M(X)=\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{1}=1,\quad D(X)=\frac{1}{\lambda^{2}}=\frac{1}{1^{2}}=1$$

Готово.

Показательное распределение нашло широкое применение в ***теории надёжности***, этой теме, в частности, посвящены отдельные главы учебного пособия *В.Е. Гмурмана*. Помимо лампочек и более грустных примеров существуют и другие приложения. Так, например, в простейшем потоке событий время ожидания каждого последующего события распределено именно по экспоненциальному закону.

Ну а сейчас пришло время зажечь новые огни и перейти к кульминационному параграфу под названием

## ➢ Нормальный закон распределения вероятностей

Без преувеличения его можно назвать философским законом. Наблюдая за различными объектами и процессами окружающего мира, мы часто сталкиваемся с тем, что чего-то бывает мало, и что бывает норма. Перед вами принципиальный вид функции плотности ***нормального распределения вероятностей***:

Какие можно привести примеры? Их просто тьма. Это, например, рост, вес людей (и не только), их физическая сила, умственные способности и т.д. Существует «основная масса» *(по тому или иному признаку)* и существуют отклонения в обе стороны.

Это различные характеристики неодушевленных объектов (те же размеры, вес). Это случайная продолжительность процессов…, снова пришёл на ум грустный пример, и поэтому скажу время «жизни» лампочек :) Из физики вспомнились молекулы воздуха: среди них есть медленные, есть быстрые, но большинство двигаются со «стандартными» скоростями.

Более того, даже дискретные распределения бывают близкИ к нормальному, и в конце урока мы раскроем важную предпосылку «нормальности». А сейчас математика, математика, математика, которая в древности не зря считалась философией!

Непрерывная случайная величина $X$, распределённая по ***нормальному закону***, имеет функцию плотности $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ *(не пугаемся)* и **однозначно** определяется параметрами $a$ и $\sigma$ $(\sigma>0)$.

Эта функция получила фамилию некоронованного короля математики, К.Ф. Гаусса и в своё время была изображена вместе с его портретом на купюре в 10 немецких марок. Для ***функции Гаусса*** выполнены общие свойства плотности, а именно $f(x)>0$ *(почему?)* и $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=1$, откуда следует, что нормально распределённая случайная величина достоверно примет одно из действительных значений. Теоретически – какое угодно, практически – узнаем позже.

Следующие замечательные факты я тоже приведу без доказательства:

$M(X)=a$ – то есть, математическое ожидание нормально распределённой случайной величины в точности равно «а», а среднее квадратическое отклонение в точности равно «сигме»: $\sigma(X)=\sigma$.

Эти значения выводятся с помощью общих формул, и желающие могут найти подробные выкладки в учебной литературе.

Ну а мы переходим к насущным практическим вопросам. Практики будет много, и она будет интересна не только «чайникам», но и более подготовленным читателям:

**Задача 118**

Нормально распределённая случайная величина задана параметрами $a = 3, \sigma = 2$. Записать её функцию плотности и построить график.

Несмотря на кажущуюся простоту задания, в нём существует немало тонкостей.

Первый момент касается **обозначений**. **Они стандартные:** матожидание обозначают буквой $a$ *(реже* $m$ *или* $\mu$ *(«мю»))*, а стандартное отклонение – буквой $\sigma$. Кстати, обратите внимание, что в условии ничего не сказано о сущности параметров «а» и «сигма», и несведущий человек может только догадываться, что это такое.

**Решение** начнём шаблонной фразой: функция плотности нормально распределённой случайной величины имеет вид $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$. В данном случае $a = 3, \sigma = 2$ и:

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-3)^2}{2 \cdot 2^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-3)^2}{8}}$$

Первая, более лёгкая часть задачи выполнена. Теперь график. Вот на нём-то, на моей памяти, студентов «заворачивали» десятки раз, причём, многих неоднократно. По той причине, что **график функции Гаусса обладает несколькими принципиальными особенностями, которые нужно обязательно отобразить на чертеже**.

Сначала полная картина, затем комментарии:

На первом шаге декартову систему координат. При выполнении чертежа от руки во многих случаях оптимален следующий масштаб:

по оси абсцисс: *2 тетрадные клетки = 1 ед.*,
по оси ординат: *2 тетрадные клетки = 0,1 ед.*, при этом саму ось следует расположить из тех соображений, что в точке $x = a = 3$ функция достигает максимума, и вертикальная прямая $x = 3$ *(на чертеже её нет)* является линией симметрии графика.

И логично, что в первую очередь удобно найти максимум функции:

$$f(3) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(3-3)^2}{2 \cdot 2^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^0 = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \approx 0{,}1995$$

Отмечаем вершину графика *(красная точка)*.
Далее вычислим значения функции при $x = a - \sigma = 3 - 2 = 1, \quad x = a + \sigma = 3 + 2 = 5$, а точнее только одно из них – в силу симметрии графика они равны:

$$f(1)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(1-3)^2}{2\cdot 2^2}}=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{4}{8}}=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}}\approx 0{,}121$$

$$f(5)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(5-3)^2}{2\cdot 2^2}}\approx 0{,}121$$

Отмечаем синим цветом.

**Внимание!** $x=a-\sigma$ и $x=a+\sigma$ – это **точки перегиба** нормальной кривой. На интервале $(a-\sigma;\,a+\sigma)=(1;\,5)$ график является выпуклым вверх, а на крайних интервалах – вогнутым вниз.

Далее отклоняемся от центра влево и право ещё на одно стандартное отклонение $x=a-2\sigma=3-4=-1,\quad x=a+2\sigma=3+4=7$ и рассчитываем высоту:

$$f(1)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(-1-3)^2}{2\cdot 2^2}}=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{16}{8}}=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-2}\approx 0{,}027$$

$$f(7)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(7-3)^2}{2\cdot 2^2}}\approx 0{,}027$$

Отмечаем точки на чертеже *(зелёный цвет)* и видим, что этого вполне достаточно.

На завершающем этапе аккуратно чертим график, и **особо аккуратно** отражаем его **выпуклость / вогнутость!** Ну и, наверное, вы давно поняли, что ось абсцисс – это **горизонтальная асимптота**, и «залезать» за неё категорически нельзя!

Поговорим о том, как меняется форма нормальной кривой в зависимости от значений $a$ и $\sigma$.

При увеличении или уменьшении «а» *(при неизменном «сигма»)* график сохраняет свою форму и **перемещается вправо или влево** соответственно. Так, при $a=0,\ \sigma=2$ *(уменьшили «а» на 3)* функция принимает вид $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-0)^2}{8}}=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{8}}$ и наш график «переезжает» на 3 единицы влево – ровнехонько в начало координат:

Нормально распределённая величина с нулевым математическим ожиданием получила вполне естественное название – ***центрированная***; её функция плотности $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ – **чётная**, и график симметричен относительно оси ординат.

В случае изменения «сигмы» *(при постоянном «а»)*, график «остаётся на месте», но меняет форму. При увеличении $\sigma$ он становится более низким и вытянутым, словно осьминог, растягивающий щупальца. И, наоборот, при уменьшении $\sigma$ график становится более узким и высоким – как «удивлённый осьминог». Так, при *уменьшении* «сигмы» в два раза: $a=0, \sigma=1$ предыдущий график сужается и вытягивается вверх в два раза:

Нормальное распределёние с единичным значением «сигма» называется ***нормированным***, а если оно ещё и *центрировано* (наш случай), то такое распределение называют ***стандартным***. Оно имеет ещё более простую функцию плотности, которая уже встречалась в локальной теореме Лапласа: $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$. Стандартное распределение нашло широкое применение, и очень скоро мы окончательно поймём его предназначение.

И как-то незаслуженно осталась в тени функция распределения вероятностей. Вспоминаем её определение:

$F(x)=P(X<x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(\lambda-a)^2}{2\sigma^2}}d\lambda$ – вероятность того, что случайная величина $X$ примет значение, МЕНЬШЕЕ, чем переменная $x$, которая «пробегает» все действительные значения до «плюс» бесконечности.

Внутри интеграла используют другую букву, чтобы не возникало «накладок» с обозначениями, ибо здесь каждому значению $x$ ставится в соответствие несобственный интеграл $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(\lambda-a)^2}{2\sigma^2}}d\lambda$, который равен некоторому *числу* из интервала $(0;1)$. Почти все значения $F(x)$ не поддаются абсолютно точному расчету, но с современными вычислительными мощностями с этим нет **никаких трудностей** *(ролик на Ютубе)*.

Так, например, график функции $F_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}}dz$ стандартного распределения $(a=0, \sigma=1)$ имеет следующий вид:

На чертеже хорошо видно выполнение всех свойств функции распределения, и из технических нюансов здесь следует обратить внимание на горизонтальные асимптоты и точку перегиба $x=a=0$.

Теперь вспомним одну из ключевых задач темы, а именно выясним, как найти $P(\alpha < X < \beta)$ – вероятность того, что нормальная случайная величина $X$ примет значение из интервала $(\alpha; \beta)$. Геометрически эта вероятность равна площади между нормальной кривой и осью абсцисс на соответствующем участке:

но каждый раз вымучивать приближенное значение $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx$ неразумно, и поэтому здесь рациональнее использовать **«лёгкую» формулу**:

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$$

***! Вспоминает также**, что:*
$$P(\alpha < X < \beta) = P(\alpha \le X < \beta) = P(\alpha < X \le \beta) = P(\alpha \le X \le \beta)$$

Тут можно снова задействовать Эксель, но есть пара весомых «но»: во-первых, он не всегда под рукой, а во-вторых, «готовые» значения $F(\beta), F(\alpha)$, скорее всего, вызовут вопросы у преподавателя. Почему?

Об этом я неоднократно рассказывал ранее: в своё время (и ещё не очень давно) роскошью был обычный калькулятор, и в учебной литературе до сих пор сохранился «ручной» способ решения рассматриваемой задачи. Его суть состоит в том, чтобы свести решение к стандартному распределению:

$$P(\alpha < X < \beta) = F_0\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - F_0\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right), \text{ где } F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

Зачем это нужно? Дело в том, что значения $F_0(x)$ скрупулезно подсчитаны нашими предками и сведены в специальную таблицу, которая есть во многих книгах по терверу. Но ещё чаще встречается таблица значений функции Лапласа:

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = F_0(x) - 0{,}5$, и с этой функцией и этой таблицей *(см. Приложение **Таблицы**)* мы уже имели дело в интегральной теореме Лапласа.

Итак, вероятность того, что нормальная случайная величина $X$ *с параметрами* $a$ *и* $\sigma$ примет значение из интервала $(\alpha; \beta)$, можно вычислить по формуле:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right), \text{ где } \Phi(x) \text{ – функция Лапласа.}$$

Таким образом, наша задача становится чуть ли не устной! Порой, здесь хмыкают и говорят, что метод устарел. Может быть…, но парадокс состоит в том, что «устаревший метод» очень быстро приводит к результату!

И ещё в этом заключена большая мудрость – если вдруг пропадёт электричество или восстанут машины, то у человечества останется возможность заглянуть в бумажные таблицы и спасти мир =) Классика жанра:

**Задача 119**

Из пункта $C$ ведётся стрельба из орудия вдоль прямой $CK$. Предполагается, что дальность полёта распределена нормально с математическим ожиданием 1000 м и средним квадратическим отклонением 5 м. Определить (в процентах) сколько снарядов упадёт с перелётом от 5 до 70м.

**Решение**: в задаче рассматривается нормально распределённая случайная величина $X$ – *дальность полёта снаряда*, и по условию $a = 1000,\ \sigma = 5$.

Так как речь идёт о *перелёте* за цель, то $\alpha = 1005,\ \beta = 1070$. Вычислим вероятность $P(1005 < X < 1070)$ – того, что снаряд упадёт в пределах этой дистанции.

Если в вашей методичке дана таблица значений функции $F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$, то используйте формулу $P(\alpha < X < \beta) = F_0\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - F_0\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$:

$$P(1005 < X < 1070) = F_0\left(\frac{1070 - 1000}{5}\right) - \ldots$$

$$= F_0(14)^{\to 1} - F_0(1) \approx 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587$$

Для самопроверки можно «забить» $a = 1000,\ \sigma = 5,\ x = \alpha = 1005$ и затем $x = \beta = 1070$ в *Пункт 9* ***Калькулятора***, и кроме того, для стандартного нормального распределения в Экселе существует прямая функция *=НОРМСТРАСП(z)*.

Но гораздо чаще, и в этом курсе в частности, встречается таблица значений функции Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$, поэтому решаем через неё:

$$\ldots - \Phi\left(\frac{1005 - 1000}{5}\right) =$$

$$= \Phi(14)^{\to 0{,}5} - \Phi(1) \approx 0{,}5 - 0{,}3413 = 0{,}1587$$

Дробные значения традиционно округляем до 4 знаков после запятой, как это сделано в типовой таблице. И для контроля есть *Пункт 5* **макета**.

**Напоминаю, что** $\Phi(x) = F_0(x) - 0{,}5$. **Всегда контролируйте, таблица КАКОЙ функции перед вашими глазами**.

**Ответ** требуется дать в процентах, поэтому рассчитанную вероятность нужно умножить на 100 и снабдить результат содержательным комментарием:

– с перелётом от 5 до 70 м упадёт примерно 15,87% снарядов

Тренируемся самостоятельно:

## Задача 120

Диаметр подшипников, изготовленные на заводе, представляет собой случайную величину, распределенную нормально с математическим ожиданием 1,5 см и средним квадратическим отклонением 0,04 см. Найти вероятность того, что размер наугад взятого подшипника колеблется от 1,4 до 1,6 см.

В образце решения и далее я буду использовать функцию Лапласа, как самый распространённый вариант. Кстати, обратите внимание, что согласно формулировке, в этой задаче корректнее будет **включить** концы интервала в рассмотрение.

И уже в этом примере нам встретился особый случай – когда интервал $(\alpha;\beta)$ симметричен относительно математического ожидания. В такой ситуации его можно записать в виде $(a-\delta;a+\delta)$ и, пользуясь нечётностью функции Лапласа $\Phi(-x)=-\Phi(x)$, упростить рабочую формулу $P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$:

$$P(a-\delta<X<a+\delta)=\Phi\left(\frac{a+\delta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\delta-a}{\sigma}\right)=$$

$$=\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)-\ldots$$

Параметр «дельта» называют ***отклонением от математического ожидания***, и двойное неравенство удобно «упаковать» с помощью **модуля**:

$P(|X-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$ – вероятность того, что значение случайной величины $X$ отклонится от математического ожидания менее чем на $\delta$.

Таким, образом задача про подшипники решается гораздо короче:

$P(|X-1{,}5|\le 0{,}1)=2\Phi\left(\frac{0{,}1}{0{,}04}\right)=2\Phi(2{,}5)\approx 2\cdot 0{,}4938=0{,}9876$ – вероятность того, что диаметр наугад взятого подшипника отличается от 1,5 см не более чем на 0,1 см.

Результат этой задачи получился близким к единице, но хотелось бы ещё бОльшей надежности – а именно, узнать границы, в которых находится диаметр *почти всех* подшипников. Существует ли какой-нибудь критерий на этот счёт? Существует! На этот вопрос отвечает так называемое **правило «трех сигм».**

Его суть состоит в том, что практически достоверным является тот факт, что нормально распределённая случайная величина $X$ примет значение из промежутка $(a-3\sigma;a+3\sigma)$. И в самом деле, вероятность отклонения от матожидания менее чем на $\delta=3\sigma$ составляет:

$$P(|X-a|<3\sigma)=2\Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right)=2\Phi(3)\approx 2\cdot 0{,}4987=0{,}9973 \text{ или } 99{,}73\%$$

В «пересчёте на подшипники» – это 9973 штуки с диаметром от 1,38 до 1,62 см и всего лишь 27 «некондиционных» экземпляров.

Продолжаем решать суровые советские задачи:

**Задача 121**

Случайная величина $X$ ошибки взвешивания распределена по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и стандартным отклонением 3 грамма. Найти вероятность того, что очередное взвешивание будет проведено с ошибкой, не превышающей по модулю 5 грамм.

**Решение** очень простое. По условию, $a = 0,\ \sigma = 3$ и сразу заметим, что по правилу «трёх сигм», при очередном взвешивании *(чего-то или кого-то)* мы почти 100% получим погрешность менее 9 грамм. Но в задаче фигурирует более узкое отклонение $\delta = 5$ и по формуле $P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$:

$P(|X| < 5) = 2\Phi\left(\frac{5}{3}\right) \approx 2 \cdot 0{,}4522 = 0{,}9044$ – вероятность того, что очередное взвешивание будет проведено с ошибкой, не превышающей 5 грамм.

**Ответ**: $\approx 0{,}9044$

Этот пример принципиально отличается от вроде бы похожей задачи параграфа о равномерном распределении. Там была погрешность *округления* результатов измерений, здесь же речь идёт о случайной погрешности самих измерений. Такие погрешности возникают в связи с техническими характеристиками самого прибора *(диапазон допустимых ошибок, как правило, указывают в его паспорте)*, а также по вине самого экспериментатора – когда мы, например, «на глазок» снимаем показания со стрелки механических весов.

Помимо прочих, существуют ещё так называемые ***систематические ошибки*** измерения. Это уже *неслучайные* ошибки, которые возникают по причине некорректной настройки или эксплуатации прибора. Так, например, неотрегулированные напольные весы могут стабильно «прибавлять» килограмм, а продавец систематически обвешивать покупателей. Или не систематически, ведь можно обсчитать :) Однако, в любом случае, случайной такая «ошибка» не будет, и её матожидание отлично от нуля.

…срочно разрабатываю курс по подготовке продавцов =)

Самостоятельно решаем обратную задачу:

**Задача 122**

Диаметр валика – случайная нормально распределенная случайная величина, среднее квадратическое отклонение ее равно $\sigma = 5$ мм. Найти длину интервала, симметричного относительно математического ожидания, в который с вероятностью $\gamma = 0{,}9545$ попадет длина диаметра валика.

*Пункт 5** ***Калькулятора*** в помощь. Обратите внимание, что здесь не известно математическое ожидание, но это нисколько не мешает решить поставленную задачу.

И экзаменационное задание, которое я настоятельно рекомендую для закрепления материала:

## Задача 123

Нормально распределенная случайная величина $X$ задана своими параметрами $a=-1$ (математическое ожидание) и $\sigma=3$ (среднее квадратическим отклонение). Требуется:

а) записать плотность вероятности и схематически изобразить ее график;
б) найти вероятность того, что $X$ примет значение из интервала $(\alpha;\,\beta)=(-4;\,0)$;
в) найти вероятность того, что $X$ отклонится по модулю от $a$ не более чем на $\delta=2$;
г) применяя правило «трех сигм», найти значения случайной величины $X$.

Такие задачи предлагаются повсеместно, и за годы практики мне их довелось решить сотни и сотни штук. Обязательно попрактикуйтесь в ручном построении чертежа и использовании таблицы ;) После чего мы разберём заключительный пример:

## Задача 124

Плотность распределения вероятностей случайной величины $X$ имеет вид $f(x)=Ae^{-2x^2+8x-1}$. Найти $A$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, функцию распределения $F(x)$, построить графики плотности и функции распределения, найти $P(1\le X\le 3)$.

**Решение**: прежде всего, обратим внимание, что в условии ничего не сказано о характере случайной величины. Само по себе присутствие экспоненты ещё ничего не значит: это может оказаться, например, показательное или вообще произвольное непрерывное распределение. И поэтому «нормальность» распределения ещё нужно обосновать:

функция $f(x)=Ae^{-2x^2+8x-1}$ определена при *любом* действительном значении $x$, и если её удастся привести к виду $f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, то случайная величина $X$ распределена по нормальному закону.

Пробуем привести. Для этого **выделяем полный квадрат** и организуем **трёхэтажную дробь**:

$$-2x^2+8x-1=-2(x^2-4x)-1=-2(x^2-4x+4)-1+8=$$
$$=-2(x-2)^2+7=-\frac{(x-2)^2}{\frac{1}{2}}+7=\ldots$$

Обязательно выполняем проверку, возвращая показатель в исходный вид:

$$-\frac{(x-2)^2}{2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2}+7=-\frac{(x-2)^2}{2\cdot\frac{1}{4}}+7=-\frac{(x-2)^2}{\frac{1}{2}}+7=-2(x^2-4x+4)+7=$$
$$=-2x^2+8x-8+7=-2x^2+8x-1,$$ что мы и хотели увидеть.

Таким образом, мы действительно имеем дело с нормальным распределением:

$f(x) = Ae^{-2x^2+8x-1} = Ae^{-\frac{(x-2)^2}{2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2}+7} = \ldots$ – по правилу действий со степенями «отщипываем» $e^7$. И здесь можно сразу записать очевидные числовые характеристики:

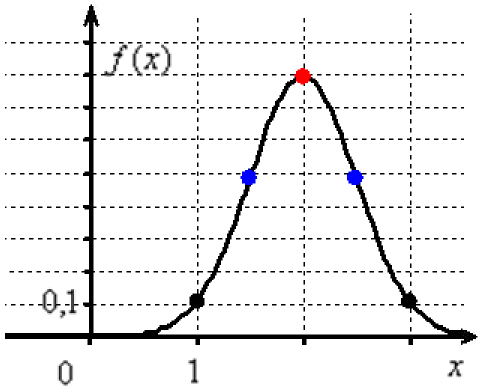
$$M(X) = a = 2, \quad D(X) = \sigma^2 = \frac{1}{4}$$

Теперь найдём значение параметра $A$. Поскольку множитель нормального распределения имеет вид $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ и $\sigma = \frac{1}{2}$, то:

$A \cdot e^7 = \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{2\pi}}$, откуда выражаем $A = \frac{2}{e^7\sqrt{2\pi}}$ и подставляем в нашу функцию:

$f(x) = A \cdot e^7 \cdot e^{-\frac{(x-2)^2}{2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{2}{e^7\sqrt{2\pi}} \cdot e^7 \cdot e^{-\frac{(x-2)^2}{2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-2)^2}{2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2}}$, после чего ещё раз пробежим глазами и убедимся, что полученная функция имеет вид $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$.

Построим график плотности:




и график функции распределения $F(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(\lambda-2)^2}{2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2}}d\lambda$:

Пару слов на счёт ручного построения последнего графика – на случай отсутствия под рукой Экселя или даже обычного калькулятора. В точке $x = a = 2$ функция распределения принимает значение $F(a) = F(2) = 0{,}5$ и здесь находится **перегиб графика** (малиновая точка).

Кроме того, для более или менее приличного чертежа желательно найти ещё хотя бы пару точек. Берём традиционное значение $x = a + \sigma = 2 + 0{,}5 = 2{,}5$ и *стандартизируем* его по формуле $\frac{\lambda - a}{\sigma} = \frac{2{,}5 - 2}{0{,}5} = \frac{0{,}5}{0{,}5} = 1$. Далее по таблице значений функции Лапласа находим: $F(2{,}5) = \Phi(1) + 0{,}5 \approx 0{,}34 + 0{,}5 = 0{,}84$ – жёлтая точка на чертеже. С симметричной оранжевой точкой никаких проблем: $x = a - \sigma = 2 - 0{,}5 = 1{,}5$ и:

$$F(1{,}5) = \Phi(-1) + 0{,}5 \approx -0{,}34 + 0{,}5 = 0{,}16.$$

После чего аккуратно проводим интегральную кривую, не забывая о перегибе и двух горизонтальных асимптотах.

Да, и ещё нужно вычислить:

$$P(1 \le X \le 3) = \Phi\left(\frac{3-2}{0{,}5}\right) - \Phi\left(\frac{1-2}{0{,}5}\right) =$$

$= \Phi(2) - \ldots$ – вероятность того, что случайная величина $X$ примет значение из данного отрезка.

Задача была непростой, и посему блеснём академичным стилем, **ответ**:

$$A = \frac{2}{e^7\sqrt{2\pi}}, \quad M(X) = 2, \quad D(X) = \frac{1}{4}, \quad F(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(\lambda-2)^2}{2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2}}\,d\lambda, \quad P(1 \le X \le 3) \approx 0{,}9545$$

А теперь **обещанный секрет:**

**понятие о центральной предельной теореме.**

которую также называют ***теоремой Ляпунова***. Её суть состоит в том, что если случайная величина $X$ является *суммой* очень большого числа взаимно независимых случайных величин $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$, влияние каждой из которых на всю сумму ничтожно мало, то $X$ имеет распределение, близкое к нормальному.

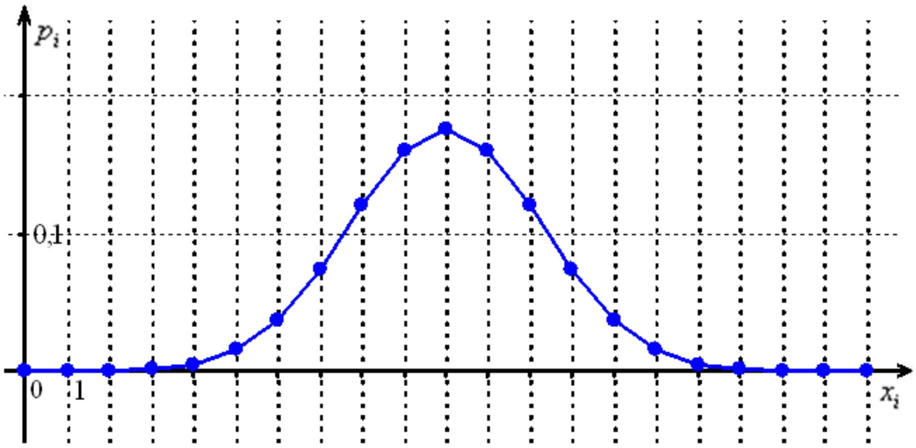
В окружающем мире условие теоремы Ляпунова выполняется очень часто, и поэтому нормальное распределение встречается буквально на каждом шагу.

Так, например, молекул воздуха очень и очень много, и каждая из них своим движением оказывает ничтожно малое влияние на всю совокупность. Поэтому скорость молекул воздуха распределена нормально.

Большая популяция некоторых особей. Каждая из них (или подавляющее большинство) оказывает несущественное влияние на жизнь всей популяции, следовательно, продолжительность жизни этих особей тоже распределена по нормальному закону.

Теперь вернёмся к знакомой задаче, где проводится $n$ независимых испытаний, в каждом из которых некое событие $A$ может появиться с постоянной вероятностью $p$. Эти испытания можно считать попарно независимым случайными величинами $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$, и при достаточно большом значении «эн» биномиальное распределение случайной величины $X$ – *числа появлений события* $A$ *в* $n$ *испытаниях* – очень близко к нормальному распределению.

Уже при $n = 20$ и $p = \frac{1}{2}$ в многоугольнике биномиального распределения хорошо просматривается нормальная кривая:




И чем больше $n$, тем ближе будет сходство. Причём, вероятность $p$ может быть любой, но не слишком малой.

Именно этот факт мы и использовали в теоремах Лапласа – когда приближали биномиальные вероятности соответствующими значениями функций нормального распределения.

Подчёркиваю, что теорема Ляпунова носит статус теоремы, а значит, строго доказана в теории.

И в заключение книги хочется ответить на один философский вопрос: имеет ли в нашей жизни значение ***случайность***? Безусловно! Везение играет немаловажную, а порой, и огромную роль: встретить хороших друзей, встретить «своего» человека, найти деятельность по душе и т.д. – всё это нередко происходит благодаря случаю….

Но, с другой стороны, гораздо более важнА системная и упорная деятельность, после которой следуют ***закономерные*** результаты. Желательно, полезные, конечно ☺

Дополнительную информацию можно найти в **соответствующем разделе** портала mathprofi.ru *(ссылка на карту раздела)*. Из учебной литературы рекомендую:

*Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика (уч. пособие);*

*Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятности (задачник с примерами решений).*

**Везения в главном!**

## Решения и ответы

*Задача 2. Решение: найдём количество всех возможных перестановок четырех карточек:*

*Когда карточка с нулём располагается на 1-м месте, то число становится трёхзначным, поэтому данные комбинации следует исключить. Пусть ноль находится на 1-м месте, тогда оставшиеся 3 цифры в младших разрядах можно переставить способами.*

*Примечание: т.к. карточек немного, то здесь несложно перечислить все такие варианты:*
*0579*
*0597*
*0759*
*0795*
*0957*
*0975*

*Таким образом, из предложенного набора карточек можно составить:*
*24 – 6 = 18 четырёхзначных чисел*

*Ответ: 18*

*Задача 4.*

*а) Решение: способами можно выбрать 3 карты из 36.*

*Ответ: 7140*

*б) Решение: различных пар можно составить из соперников (кто играет белыми, а кто чёрными – не важно).*

*Ответ: всего сыграно партий.*

*Задача 6. Решение:   способами.*

*Другой вариант  решения:   способами можно выбрать двух человек из группы и способами распределить должности в каждой выборке. Таким образом, старосту и его заместителя можно выбрать   способами.*

*Ответ: 506*

*Задача 9.  Решение:*

*способами может быть сдана десятка и туз («каждая десятка с каждым тузом»);*

*способами может быть сдана пара тузов.*

*Итого:   выигрышные комбинации.*

*Ответ: 22*

*Задача 11. Решение: всего: 2 + 2 + 2 + 1 + 1 = 8 фигур.*

*По формуле перестановок с повторениями:*

*способами можно расставить фигуры на 1-й линии*

*Ответ: 5040*

*Задача 13. Решение:*
*используем формулу сочетаний с повторениями:*
*способами можно выбрать 3 монеты из кошелька.*

*Ответ: 20*

*Ответы на вопросы:*

*1) Да (т.к. количество извлекаемых монет (3 шт.) меньше видов монет (4 вида));*

*2) Самый «дешёвый» набор содержит 3 рублёвые монеты, а самый «дорогой» – 3 десятирублёвые.*

*Задача 15. Решение:*
*способами можно составить цифровую комбинацию автомобильного номера, при этом одну из них (000) следует исключить:*
.

*способами можно составить буквенную комбинацию автомобильного номера.*

*По правилу умножения комбинаций, всего можно составить:*
*автомобильных номера*
*(каждая цифровая комбинация сочетается с каждой буквенной комбинацией).*

*Ответ: 1726272*

*Задача 17. Решение: 30 – 5 = 25 холодильников не имеют дефекта.*

*По классическому определению:*
*– вероятность того, что наугад выбранный холодильник не имеет дефекта.*
*Ответ:*

*Задача 19. Решение: найдём общее число исходов:*
*способами можно выбрать место, на котором расположена сомнительная цифра и на каждом из этих четырёх мест могут располагаться 2 цифры (семёрка или восьмёрка). По правилу умножения комбинаций, общее число исходов: .*

*Как вариант, в решении можно просто перечислить все исходы (благо их немного):*
*7555, 8555, 5755, 5855, 5575, 5585, 5557, 5558*

*Благоприятствующий исход один (правильный пин-код).*

*Таким образом, по классическому определению:*
*– вероятность того, что абонент включит телефон с 1-й попытки*
*Ответ:*

*Задача 21. Решение: найдём общее количество исходов:*
*способами могут выпасть цифры на двух кубиках.*

*а) Рассмотрим событие: – при броске двух игральных костей произведение очков будет равно семи. Для данного события не существует благоприятствующих исходов, по классическому определению вероятности:*
*, т.е. это событие является невозможным.*

*б) Рассмотрим событие: – при броске двух игральных костей произведение очков окажется не менее 20. Данному событию благоприятствуют следующие исходы:*

*Итого: 8*

*По классическому определению:*
*– искомая вероятность.*
*в) Рассмотрим противоположные события:*
*– произведение очков будет чётным;*
*– произведение очков будет нечётным.*

*Перечислим все исходы, благоприятствующие событию :*

*Итого: 9 благоприятствующих исходов.*

*По классическому определению вероятности:*

*Противоположные события образуют полную группу, поэтому:*
*– искомая вероятность.*

*Ответ:*

*Задача 23. Решение: найдём общее число исходов (все возможные комбинации выхода / не выхода 4 котов на прогулку).*

*Первый способ рассуждения:   способами может поступить 1-й кот (уйти или не уйти на прогулку) и   способами может поступить 2-й кот и   способами – 3-й кот и способами – 4-й кот. По правилу умножения комбинаций:*
*способами могут поступить 4 кота.*

*Второй способ рассуждения: условно обозначим выход кота на прогулку единицей, а невыход – нулём, всего: 2 цифры. Тогда:*
*способами можно составить упорядоченный набор из четырёх нулей и единиц, в частности, возможны комбинации 0000 и 1111.*

*Третий способ, это прямой подсчёт всех возможных исходов:*
*способом все коты могут остаться дома;*
*способами  может выйти на прогулку один кот (любой из четырёх);*
*способами  могут выйти на прогулку 2 кота;*
*способами могут выйти на прогулку 3 кота (какой-то один сидит дома);*
*способом  могут уйти гулять все коты.*
*Итого:   возможных исходов.*
*Вычислим количество благоприятствующих исходов:*
*способами можно составить комбинацию из двух котов, которые уйдут на прогулку.*

*По классическому определению:*
*– вероятность того, что завтра после завтрака уйдут гулять 2 кота.*

*Ответ: 0,375*

*Задача 26. Решение: всего: 15 + 5 = 20 деталей в ящике. Вычислим общее число исходов:*

*способами можно извлечь 2 детали из ящика.*

*а) Рассмотрим событие:  – обе извлечённые детали будут качественными.*

*способами можно извлечь 2 качественные детали.*

*По классическому определению вероятности:*

*б) Рассмотрим событие:  – одна деталь будет качественной, а одна – бракованной.*

*способами можно извлечь 1 качественную деталь и 1 бракованную.*

*По классическому определению:*

*в) Рассмотрим событие:  – обе извлечённые детали бракованны.*

*способами можно извлечь 2 бракованные детали.*

*По классическому определению:*

*Проверка: вычислим сумму вероятностей событий, образующих полную группу: , что и требовалось проверить.*

*Ответ:*

*Задача 27. Решение: вычислим количество «плохих» вопросов: 60 – 25 = 35.*

*способами можно выбрать 3 вопроса из 60 (общее количество исходов).*

*Для того чтобы сдать экзамен, нужно ответить на 2 или 3 вопроса. Считаем благоприятствующие комбинации:*

*способами можно выбрать 2 «хороших» вопроса и один «плохой»;*

*способами можно выбрать 3 «хороших» вопроса.*

*По правилу сложения комбинаций:*

*способами можно выбрать благоприятствующую для сдачи экзамена комбинацию из трёх вопросов (без разницы с двумя или тремя «хорошими» вопросами).*

*По классическому определению:*

*– вероятность того, что студент сдаст экзамен.*

*Ответ:*

*Задача 29. Решение: используем геометрическое определение вероятности. Общему числу исходов соответствует участок длиной , благоприятствующему количеству исходов – участок длиной .*

*Таким образом:*

*– вероятность того, что обрыв провода произошёл между 50-м и 55-м километрами линии.*

*Ответ:*

*Задача 31. Решение: общему количеству исходов соответствует площадь круга:*

*Площадь прямоугольного треугольника равна полупроизведению его катетов:*

*По условию поставленная в круг точка не должна попасть в треугольник, поэтому благоприятствующее число исходов выражается разностью*

*По геометрическому определению:*

*– вероятность того, что поставленная в круг точка не попадёт в треугольник.*

*Ответ:*

*Задача 33. Решение: Оля и Коля могут встретиться в течение 60 минут. Выполним чертёж:*

*Площадь квадрата   соответствует общему числу исходов.*

*Рассмотрим противоположные события:*
*– Оля и Коля встретятся во время обеда;*
*–  данной встречи не состоится.*

*Вычислим суммарную площадь двух треугольников:*
*– данное значение благоприятствует событию  .*

*По геометрическому определению вероятности:*

*Противоположные события образуют полную группу, по соответствующей теореме:*

*Ответ:*

*Задача 36. Решение: выполним чертёж:*

*Общее число исходов равно площади квадрата:*

*Неравенству соответствует площадь , которую удобно вычислить интегрируя по «игрек» (данный метод рассмотрен в статье Объем тела вращения).*

*Выразим обратную функцию: .*

*На отрезке , поэтому:*

*По геометрическому определению:*
*– вероятность того, что два загаданных от нуля до 10 числа будут удовлетворять неравенству .*

*Ответ:*

*Задача 38. Решение: всего: 10 + 6 = 16 пуговиц в коробке.*
*способами можно извлечь 2 пуговицы из коробки;*
*способами можно извлечь 2 красные пуговицы;*
*способами можно извлечь 2 синие пуговицы.*

*По классическому определению:*
*– вероятность того, что из коробки будут извлечены две красные пуговицы;*
*– вероятность того, что будут извлечены две синие пуговицы.*

*По теореме сложения вероятностей несовместных событий:*
*– вероятность того, что из коробки будут извлечены две одноцветные пуговицы.*

*Ответ: 0,5*

*Задача 40. Решение: рассмотрим события:  – из 1-й, 2-й и 3-й урны соответственно будет извлечён белый шар. По классическому определению вероятности:*

*Тогда вероятности извлечения чёрного шара из соответствующих урн равны:*

*а) Рассмотрим событие:  – из каждой урны будет извлечено по одному белому шару. Данное событие выражается в виде произведения  (из 1-й урны будет извлечён БШ и из 2-й урны будет извлечён БШ и из 3-й урны будет извлечён БШ).*

*По теореме умножения вероятностей независимых событий:*

*б) Рассмотрим событие  – из каждой урны будет извлечено по 1 одному чёрному шару. По теореме умножения вероятностей независимых событий:*

*Рассмотрим событие  – все три шара будут одного цвета. Данное событие состоит в двух несовместных исходах:  (будут извлечены 3 белых или 3 чёрных шара) По теореме сложения вероятностей несовместных событий:*

*Ответ:*

*Задача 42. Решение: рассмотрим следующие события:*
*– при возгорании сработает 1-й датчик;*
*– при возгорании сработает 2-й датчик.*

*По условию,*

*Вычислим вероятности противоположных событий:*

*а) Рассмотрим событие: – при пожаре оба датчика откажут.*
*По теореме умножения вероятностей независимых событий:*

*б) Рассмотрим событие: – при пожаре оба датчика сработают.*
*По теореме умножения вероятностей независимых событий:*

*Ответ:*

*Бонус-задание: Рассмотрим событие: – при пожаре сработает только один датчик. События образуют полную группу, следовательно:*

*Проверим результат с помощью прямого вычисления. Событие состоит в двух несовместных исходах: 1-й датчик сработает и 2-й откажет или 1-й откажет и 2-й сработает. Таким образом: .*

*По теоремам сложения вероятностей несовместных и умножения вероятностей независимых событий:*

*, что и требовалось проверить.*

*Задача 43. Решение: по условию,   – вероятность поражения цели первым стрелком при одном выстреле. Тогда вероятность его промаха:*

*Обозначим через   – вероятности попадания и промаха 2-го стрелка.*
*По теореме умножения вероятностей независимых событий:*
*– вероятность того, что оба стрелка промахнутся.*

*По условию  , таким образом:*

*В результате:*

*Ответ: 0,6*

*Задача 45. Решение: по условию – вероятности попадания в цель из соответствующих орудий. Тогда соответствующие вероятности промаха:*

*1) По теореме умножения вероятностей независимых событий:*
*– вероятность того, что будет три промаха.*
*Тогда: – вероятность того, что хотя бы один снаряд попадет в цель.*

*2) Событие «только два снаряда попадут в цель» состоит в трёх несовместных исходах:*
*попадание из 1-го и 2-го орудий и промах из 3-го или*
*попадание из 1-го и промах из 2-го и попадание из 3-го орудия или*
*промах из 1-го и попадание из 2-го и 3-го орудий.*

*По теоремам сложения вероятностей несовместных и умножения вероятностей независимых событий:*

*– вероятность того, что только два снаряда попадут в цель.*

*3) По теореме умножения вероятностей независимых событий:*
*– вероятность того, что все три снаряда попадут в цель.*
*По теореме сложения вероятностей несовместных событий:*
*– вероятность того, что цель будет поражена не менее двух раз*

*Ответ:*

*Задача 48. Решение: рассмотрим события:   – в 1-й, 2-й, 3-й и 4-й попытках соответственно будет извлечён выигрышный билет.*

*а) Пусть событие   состоялось. Тогда в конверте осталось 9 билетов, среди которых 2 выигрышных. По классическому определению:   – вероятность того, что 2-й выбранный билет будет выигрышным при условии, что до этого извлечён выигрышный билет.*

*б) Если события   произошли, то в конверте осталось 8 билетов, среди которых 1 выигрышный. По классическому определению:   – вероятность того, что 3-й выбранный билет будет выигрышным при условии, что до этого было извлечено два выигрышных билета.*

*в) Если события   произошли, то в конверте не осталось выигрышных билетов. По классическому определению:*

*– вероятность того, что 4-й выбранный билет будет выигрышным при условии, что до этого были извлечены три выигрышных билета.*

*Ответ:*

*Задача 50. Решение: всего: 4 туза в колоде. Рассмотрим события – первой картой будет извлечён туз, – 2-й картой будет извлечён туз. По классическому определению вероятности: . В случае осуществления события в колоде останется 35 карт, среди которых 3 туза, поэтому: – вероятность того, что 2-й картой будет извлечён туз, при условии, что до этого был извлечен туз.*

*По теореме умножения вероятностей зависимых событий:*
*– вероятность того, что из колоды в 36 карт будут извлечены два туза подряд.*

*Ответ:*

*Задача 51. Решение: всего: 6 + 5 + 4 = 15 шаров в урне. Рассмотрим события:*
*– 1-й шар будет черным;*
*– 2-й шар будет красным;*
*– 3-й шар будет белым.*

*а) По условию, события и уже произошли, а значит, в урне осталось 13 шаров, среди которых 4 белых. По классическому определению: – вероятность того, что 3-й шар будет белым при условии, что до этого был извлечён черный и красный шар.*

*б) По классическому определению: . Предположим, что событие произошло, тогда в урне осталось 14 шаров, среди которых 5 красных. По классическому определению: – вероятность того, что 2-й шар будет красным при условии, что 1-й был чёрным.*
*По теореме умножения вероятностей зависимых событий:*
*– вероятность того, что первый шар окажется черным и второй – красным и третий – белым*

*Ответ:*

*Задача 53. Решение: рассмотрим события:*
*– хотя бы одному из пяти студентов достанется билет с простыми вопросами;*
*– всем пятерым достанутся трудные билеты.*

*Данные события являются противоположными, поэтому .*

*По теореме умножения вероятностей зависимых событий:*

*Таким образом:*
*– искомая вероятность*

*Ответ:*

*Задача 55. Решение: рассмотрим зависимое событие (после перемещения двух шаров, из 2-й урны будет извлечён белый шар) и предшествующие ему несовместные события (гипотезы):*
*– из 1-й урны во 2-ю будут переложены два белых шара;*
*– будут переложены белый и чёрный шар;*
*– будут переложены два чёрных шара.*
*способами можно извлечь два шара из первой урны.*

*1) способами можно извлечь два белых шара из 1-й урны.*
*По классическому определению:*
*– вероятность того, что из первой урны будут извлечены и переложены 2 белых шара. При осуществлении данной гипотезы во 2-й урне станет 6 белых и 4 чёрных шара. По классическому определению:*
*– вероятность того, что из 2-й урны будет извлечен белый шар при условии, что туда были переложены 2 белых шара.*

*2) способами можно извлечь белый и черный шар из 1-й урны.*
*По классическому определению:*
*– вероятность того, что из первой урны будут извлечены и переложены белый и черный шар.*
*При осуществлении данной гипотезы во второй урне станет 5 белых и 5 черных шаров. Таким образом:*
*– вероятность того, что из второй урны будет извлечен белый шар при условии, что туда были переложены белый и чёрный шары.*
*3) способом можно извлечь два черных шара из 1-й урны.*
*По классическому определению:*
*– вероятность того, что из первой урны будут извлечены и переложены 2 черных шара. При осуществлении данной гипотезы во второй урне станет 4 белых и 6 черных шаров. Таким образом:*
*– вероятность извлечения белого шара из второй урны при условии, что туда были переложены два черных шара.*

*По теоремам сложения вероятностей несовместных и умножения вероятностей зависимых событий:*

*– вероятность того, что из второй урны будет извлечен белый шар.*

*Ответ:*

*Задача 57. Решение: рассмотрим гипотезы , состоящие в том, что стрелок выберет 1-ю, 2-ю, 3-ю, 4-ю и 5-ю винтовку соответственно. Выбор любой винтовки равновозможен, следовательно:*

.

*Рассмотрим событие – стрелок попадёт в мишень из наугад взятой винтовки. По условию, .*

*По формуле полной вероятности:*

*Ответ: 0,58*

*Задача 59. Решение: вычисляем – вероятности того, что двигатель работает на холостом ходу, в нормальном и форсированном режимах соответственно.*

*По условию, – вероятности выхода из строя двигателя для холостого, нормального и форсированного режима соответственно.*

*По формуле полной вероятности:*

*– вероятность того, что двигатель выйдет из строя.*

*Ответ: 0,215*

*Задача 61. Решение: рассмотрим две гипотезы:*
*– наудачу взятое изделие будет из 1-й партии;*
*– наудачу взятое изделие принадлежит 2-й партии.*

*Всего: 4000 + 6000 = 10000 изделий на складе. По классическому определению:*

*Рассмотрим событие: – наудачу взятое со склада изделие будет нестандартным.*
*Из условия находим: – вероятности того, что изделие из соответствующих партий будет нестандартным.*

*По формуле полной вероятности:*

*Примечание: данную вероятность можно легко найти, пользуясь результатом Задачи 60:*

*Пусть событие произошло (извлечено нестандартное изделие). По формулам Байеса:*
*а) – вероятность того, что выбранное нестандартное изделие принадлежит 1-й партии;*

*б) – вероятность того, что выбранное нестандартное изделие принадлежит 2-й партии.*

*Ответ:*

*Задача 63. Решение: всего: 3 + 19 + 3 = 25 студентов в группе. По классическому определению:   – вероятности того, что экзаменующийся студент имеет высокий, средний и низкий уровень подготовки соответственно.*

*Контроль:*

*По условию,   – вероятности успешной сдачи экзамена для студентов соответствующих уровней подготовки.*

*По формуле полной вероятности:*

*– вероятность того, что произвольно выбранный студент сдаст экзамен.*

*Пусть студент сдал экзамен. По формулам Байеса:*

*а)   – вероятность того, что студент, сдавший экзамен, был подготовлен очень хорошо. Объективная исходная вероятность   оказывается завышенной, поскольку почти всегда  некоторым «середнячкам» везёт с вопросами, и они отвечают очень сильно, что вызывает ошибочное впечатление отличной подготовки.*

*б)   – вероятность того, что студент, сдавший экзамен, был подготовлен средне. Исходная вероятность   оказывается чуть завышенной, т.к. студентов со средним уровнем подготовки обычно большинство, кроме того, сюда преподаватель отнесёт неудачно ответивших «отличников», а изредка  и плохо успевающего студента, которому крупно повезло с билетом.*

*в)   – вероятность того, что студент, сдавший экзамен, был подготовлен плохо. Исходная вероятность   оказалась заниженной, что неудивительно.*

*Проверка:*

*Ответ:*

*Задача 67. Решение: используем формулу Бернулли:  , в данной задаче:*

*– всего испытаний;*

*– вероятность выпадения «пятёрки» в каждом испытании;*

*– вероятность того, что «пятёрка» не выпадет (для каждого испытания).*

*а)*

*– вероятность того, что в результате 6 бросков кубика «пятёрка» не появится.*

*б)*

*– вероятность того, что в 6 испытаниях «пятёрка» выпадет ровно 2 раза.*

*в)*

*– вероятность того, что в 6 испытаниях «пятёрка» выпадет ровно 5 раз.*

*Ответ:*

*Задача 69. Решение: в данной задаче речь идёт о независимых испытаниях, при этом:*

*– всего испытаний;*

*– вероятность выпадения орла в каждом испытании;*

*– вероятность выпадения решки в каждом испытании.*

*Найдём наивероятнейшее количество  появлений орла:*

*Так как  – целое число, то существуют два наивероятнейших значения:*
*и  (пункт № 2 критерия)*

*Используя формулу Бернулли, вычислим соответствующие вероятности:*

*Ответ: 4 и 5;*

*Задача 71. Решение: используем формулу Бернулли: ,  в данном случае:*

*– всего выстрелов;*

*– вероятность попадания в цель при каждом выстреле;*

*– вероятность промаха при каждом выстреле.*

*По теореме сложения вероятностей несовместных событий:*

*– вероятность того, что цель не будет разрушена (ни одного или 1 попадание).*

*Найдём вероятность противоположного события:*

*– вероятность того, что цель будет разрушена (будет хотя бы два попадания)*

*Ответ:*

*Задача 74. Решение: используем формулу Пуассона:*
*, в данном случае:*

*а) – вероятность того, что в данной партии окажется ровно две бракованные детали.*

*б) По теореме сложения вероятностей несовместных событий:*

*– вероятность того, что в данной партии окажется не более двух бракованных изделий.*

*Ответ: а) , б)*

*Задача 76. Решение: используем локальную теорему Лапласа .*
*По условию:*
*– всего новорожденных;*
*– вероятность рождения мальчика.*
*Тогда: – вероятность рождения девочки.*

*а)*
*(«икс» обычно округляют до 2 знаков после запятой).*

*Используем чётность функции и то таблице значений этой функции* находим:*

** Лучше использовать именно такую, «классическую» формулировку.*

*Таким образом:*
*– вероятность того, что среди 100 новорожденных будет ровно 40 мальчиков.*

*б)*

*– вероятность того, что среди 100 новорожденных будет ровно 50 мальчиков.*
*в)*

*– вероятность того, что среди 100 новорожденных будет ровно 30 девочек.*

*Ответ:*

*Задача 78. Решение: по условию:*

*– всего ламп в здании;*
*– вероятность того, что лампа вечером будет включена (для каждой из ламп);*
*– вероятность противоположного события.*

*а) Найдём вероятность того, что вечером будет включено 1250 ламп (половина). Используем локальную теорему Лапласа:*
*, где*

*В данном случае и аргумент равен:*

*По таблице значений функции находим:*

*Таким образом:*
*– вероятность того, что вечером будет включена половина ламп (ровно 1250 штук).*

*б) Используем интегральную теорему Лапласа:*
*, где:*
*, – функция Лапласа.*

*В данном случае*
*– минимальное количество одновременно включенных ламп;*
*– максимальное количество одновременно включенных ламп;*

*Вычислим аргументы:*

*Значения функции найдём по соответствующей таблице:*
*– вероятность того, что вечером будет включено не менее 1250 и не более 1275 ламп.*

*в) Используем интегральную теорему Лапласа для и . Вычислим значения аргументов:*

*Используем нечётность функции Лапласа:*

*– вероятность того, что вечером будет включено не более 1200 ламп.*

*Ответ:*

*Задача 80. Решение: используем формулу .*
*В данной задаче:*

*а) Если , то:*
*– вероятность, того, что при 800 испытаниях относительная частота появления события отклонится от вероятности данного события не более чем на 0,05.*

*Это событие является практически достоверным.*

*б) Если , то:*
*– вероятность, того, что при 800 испытаниях относительная частота появления события отклонится от вероятности данного события не более чем на 0,03.*

*Ответ:*

*Задача 84. Решение: по условию, – вероятность попадания в мишень. Тогда: – вероятность промаха.*

*Составим – закон распределения попаданий при двух выстрелах:*

*– ни одного попадания. По теореме умножения вероятностей независимых событий:*

*– одно попадание. По теоремам сложения вероятностей несовместных и умножения вероятностей независимых событий:*

*– два попадания. По теореме умножения вероятностей независимых событий:*

*Проверка: 0,09 + 0,42 + 0,49 = 1*

*Ответ:*

*Примечание: можно было использовать более удобные обозначения*
*– это не принципиально.*

*Задача 85. Решение: игрок выигрывает 100 рублей в 18 случаях из 37, и поэтому закон распределения его выигрыша имеет следующий вид:*

*Вычислим математическое ожидание:*

*Ответ: , таким образом, с каждой поставленной сотни игрок в среднем проигрывает 2,7 рубля.*

*Задача 86. Решение: по определению математического ожидания:*

*поменяем части уравнения местами и проведём упрощения:*

*таким образом:*

*Выполним проверку:*

*, что и требовалось проверить.*

*Ответ:*

*Задача 88. Решение: вычислим математическое ожидание:*

*Вычислим дисперсию по определению: .*
*Заполним расчётную таблицу:*

*Таким образом:*

*Ответ:*

*Задача 89. Решение: случайная величина может принять только 5 значений, поэтому:*

*Заполним расчётную таблицу:*

*Математическое ожидание:*

.

*Дисперсию вычислим по формуле:*

*Среднее квадратическое отклонение:*

*Ответ:*

*Задача 92. Решение: запишем закон распределения случайной величины :*

*Контроль: , что и требовалось проверить.*

*Задача 94. Решение: составим функцию распределения вероятностей:*

*Выполним чертёж:*

*Примечание: сплошная нумерация по оси абсцисс представлена исключительно ради удобства восприятия.*

*Вычислим вероятности того, что случайная величина примет значение из предложенных промежутков:*

*или более простой способ:*

*(«штатный» случай)*

*(частный случай «штатной» формулы)*

*Числовые характеристики уже рассчитаны в Задаче 89. Вычислим вероятность того, что случайная величина отклонится от математического ожидания не более чем на среднее квадратическое отклонение:*

*Ответ:*

*Задача 95. Решение: найдём вероятности того, что соответствующие задачи будут решены неверно:*

*Используя теоремы умножения независимых и сложения несовместных событий, составим закон распределения случайной величины – числа правильно решенных задач в билете:*

*0) (все задачи решены неверно)*

*1)*

*2)*

*3) (все задачи решены правильно)*

*Таким образом, искомый закон распределения:*

*Контроль: 0,006 + 0,092 + 0,398 + 0,504 = 1*
*Вычислим и . Заполним расчетную таблицу:*

*Математическое ожидание:*
*Дисперсия: .*

*Составим функцию распределения:*

*Выполним чертеж:*

*Найдём вероятность – того, что студент сдаст зачёт:*

*Задача 98. Решение: случайная величина  имеет биномиальное распределение. Найдём её закон распределения, используем формулу Бернулли:*

*, в данной задаче:*

*– вероятность того, что прибор удовлетворяет требованиям качества.*

*– вероятность того, что прибор не удовлетворяет требованиям качества.*

*– всего приборов в контрольной партии;*

*– вероятное количество приборов, удовлетворяющих требованиям качества.*

*– вероятность того, что из  приборов ровно  будут удовлетворять требованиям качества.*

*0)*

*1)*

*2)*

*3)*

*Таким образом, искомый закон распределения:*

*Проверка: 0,001 + 0,027 + 0,243 + 0,729 = 1*

*Вычислим математическое ожидание:*

*Вычислим дисперсию:*

*Среднее квадратическое отклонение:*

*Составим функцию распределения:*

*Выполним чертеж:*

*Задача 100. Решение: случайная величина  принимает значения  с вероятностями . По условию,  .*

*Найдём вероятность того, что случайная величина примет нулевое значение:*

*По теореме сложения вероятностей противоположных событий:*

*– вероятность того случайная величина примет положительное значение*

*Ответ:*

*Задача 102. Решение: предполагая поток простым, используем формулу Пуассона:*

*а) Вычислим – среднее количество автомобилей, проходящих таможенный досмотр, в течение 2 часов.*

*По теореме сложения вероятностей несовместных событий:*

*– вероятность того, что за 2 часа досмотр пройдут от 7 до 10 автомобилей*

*б) Вычислим – среднее количество автомобилей, проходящих досмотр, за 1/2 часа.*

*По формуле Пуассона:*
*– вероятность того, что за пол часа таможенный досмотр пройдёт только один автомобиль.*

*Ответ: а) , б)*

*Задача 104. Решение: случайная величина имеет гипергеометрическое распределение. Найдем закон распределения случайной величины , используя формулу:*
*, в данной задаче:*
*– всего студентов;*
*– всего отличников;*
*– размер выборки;*
*– возможное количество отличников в выборке.*

*способами можно выбрать двух человек.*
*0) – в выборке нет отличников:*

*1) – в выборке один отличник:*

*2) – в выборке два отличника:*

*Таким образом, искомый закон распределения случайной величины :*

*Вычислим математическое ожидание:*

*Дисперсию вычислим по формуле:*

*Составим функцию распределения:*

*и изобразим её на чертеже:*

*Задача 105. Решение: в силу непрерывности функции распределения:*

*Таким образом:*

*Контроль:*

*Найдём функцию плотности распределения:*

*Покажем, что  действительно является функцией плотности:*

*1) Для любого значения , в частности, на среднем промежутке:*
*Внимание! Без 1-го пункта обойтись нельзя!*

*2)*
*Таким образом, найденная функция действительно является функцией плотности распределения.*

*Требуемые вероятности выгоднее вычислить с помощью функции распределения:*

*– вероятность того, что случайная величина примет значение из полуинтервала ;*

*– вероятность того, что случайная величина примет значение, большее, чем .*

*Построим графики функций :*

*Задача 107. Решение:*
*1) По свойству функции плотности распределения:*

*В данной задаче:*

*Таким образом, искомая плотность:*

*2) Функцию распределения найдём с помощью формулы :*
*– если  то  и ;*

*– если  то  и ;*

*– если  то  и:*
*.*
*Таким образом:*

*3) Выполним чертежи:*

*4) Найдём вероятность того, что случайная величина  примет значение из промежутка :*

*Задача 108. Решение: функция плотности распределения вероятности обладает свойством . В данном случае:*

*Таким образом, функция плотности распределения:*

*Выполним чертеж:*

*Составим функцию распределения вероятностей :*
*1) Если , то  и*
*2) Если , то  и*
*3) Если , то  и:*

*4) Если , то  и:*

*Таким образом:*
*,*

*Вычислим  – вероятность того, что случайная величина  примет значение из интервала .*
*Задача 111. Решение: представим  в аналитическом виде. Составим уравнение прямой по точкам  и :*

*Таким образом:*

*Примечание: верхние неравенства можно записать и так: , в условии нет однозначной инструкции на этот счёт.*

*Покажем, что  может служить плотностью вероятностей НСВ :*

*1) очевидно, функция  на всей числовой прямой;*
*2)*

*Таким образом,  может служить плотностью вероятностей непрерывной случайной величины*

*Вычислим математическое ожидание:*

*Дисперсию вычислим по формуле , в данном случае:*

*Таким образом:*

*Среднее квадратическое отклонение:*

*Задача 112. Решение: найдём коэффициент . Используем свойство .*
*В данном случае:*

*Вычислим несобственный интеграл:*

*Таким образом:*

*и функция плотности распределения:*

*Вычислим математическое ожидание:*

*Дисперсию вычислим по формуле:*

*в данном случае:*

*Таким образом:*

*Функцию распределения вероятностей найдём по формуле :*
*1) на интервале и ;*
*2) на промежутке , следовательно:*

*Таким образом:*

*Выполним чертежи:*

*Вычислим*
*– вероятность того, что случайная величина примет значение, бОльшее, чем её математическое ожидание.*

*Задача 114. Решение: вычислим математическое ожидание:*

*Дисперсию вычислим по формуле:*

.

*В данном случае:*

*Таким образом:*

*Ответ:*

*Задача 116. Решение: случайная величина   имеет равномерное распределение с плотностью:*

*Вычислим вероятность того, что пассажир будет ожидать автобус не более 3 минут:*

*Составим функцию распределения  :*

*1) если  , то   и   ;*

*2) если   , то   и  ;*

*3) если  , то  , и  .*

*Таким образом:*

*Функция   описывает  вероятность того, что пассажир дождётся очередной автобус за время, МЕНЬШЕЕ, чем  . При увеличении   от 0 до 7 эта вероятность линейно возрастает на   в минуту и по достижению   достоверным становится тот факт, пассажир автобуса дождался (форс-мажор исключаем).*

*Задача 120. Решение: т.к. случайная величина (диаметр подшипника) распределена нормально, то используем формулу , где – функция Лапласа.*

*В данном случае:*

*– вероятность того, что диаметр наугад взятого подшипника будет находиться в пределах от 1,4 до 1,6 см.*

*Ответ:*

*Задача 122. Решение: используем формулу: .*
*В данной задаче , таким образом:*

*откуда находим:*

*Длина искомого интервала составляет*

*Ответ: 20 мм*

*Задача 123. Решение, а): функция плотности нормально распределённой случайной величины имеет вид , где – математическое ожидание, – стандартное отклонение. В данном случае , следовательно:*

*Выполним чертёж:*

*! Примечание: несмотря на то, что условие допускает схематическое построение графика, на чертеже обязательно отображаем все его принципиальные особенности, в частности, на забываем о перегибах в точках .*

*б) Используем формулу , где – функция Лапласа. В данной задаче :*

*– вероятность того, что случайная величина примет значение из данного интервала.*

*в) Используем формулу для :*
*– вероятность того, что значение случайной величины отклонится от её математического ожидания не более чем на 2.*

*г) Согласно правилу «трех сигм», практически все значения (99,73%) нормально распределенной случайной величины входят в интервал . В данном случае это интервал:*

*Ответ: а) , б) , в) , г)*

***Ответ**: а), б), в), г)*